République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par :

Melles : CHIBOUTA Aia et ACHI Rahoua

Intitulé

Contrôlabilité approchée des systèmes d'évolution d'ordre fractionnaire

Dirigé par : Dr. KERBOUA Mourad

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. BERHAIL Amel	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. KERBOUA Mourad	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. BENCHAABANE Abbes	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2019

Remerciements

*Avant tout, nous remercions **ALLAH** le tout puissant de nous avoir donné la santé, la volonté et la force pour terminer ce travail dans les meilleurs conditions.*

*Nous tenons à remercier infiniment le **Dr. Karboua Mourad**, qui a encadré ce mémoire avec beaucoup de patience et de gentillesse.*

Il a su motiver chaque étape de notre travail par des remarques pertinentes et a su nous faire progresser dans nos recherches. Nous le remercions pour sa disponibilité.

Nous adressons l'expression de notre gratitude à notre enseignant le docteur, qui nous fait l'honneur de jury et d'examiner notre mémoire.

Nous tenons à remercier tous nos enseignants durant toute notre vie scolaire.

*Nous remercions le chef de département de mathématique **Mr Chiheb Tarek**,*

*De même nous remercions tous nos collègues de l'université **8 mais 1945-Guelma**, pour leur soutien moral.*

Enfin, nous n'oublierons pas tous cour qui nous ont encouragés pour terminer ce travail de loin ou de prés.

Merci… Merci… Merci… Merci… Merci… Merci…

Dédicace

- *Je dédie ce modeste travail :*

- *à tours ceux qui sacrifient pour notre vie soit meilleure.*

- *à mon très cher père **Salah** qui a consenti d'énormes sacrifices pour me voir réussir, qu'il trouve en ce modeste travail le témoignage de ma profonde affection.*

- *à ma très chère mère **Hassiba** s'est consumée telle que une bougie.*

- *à ma très chère grand-mère **Houria** qui je la souhaite longue vie avec bonne santé.*

- *à très chère sœur **Anfal** et très chers frères **Abd el-Djalile** et **Abd el-Rafeaa** .*

- *à toute ma famille.*

- *à mes proches et chères amies : **Zineb**, **Rahoua** ,**Imen** .*

Aia

Dédicace

- *Je dédie ce modeste travail :*

❖ *à tours ceux qui sacrifient pour notre vie soit meilleure.*

❖ *à mon très cher père **SALIH** qui a consenti d'énormes sacrifices pour me voir Réussir, qu'il trouve en ce modeste travail le témoignage de ma profonde affection.*

❖ *à ma très chère mère **Saïda** s'est consumée telle que une bougie.*

❖ *à très chère grand-mère **Rahoua** puisse Allah avoir pitié d'elle et ma grand-mère **Badiaa** qui je la souhaite longue vie avec bonne santé.*

❖ *à mes sœurs **Asma** et **Hanine** et mes cher frères **Mohammed** et **Ahmed**.*

❖ *à toute ma famille.*

❖ *à mes proches et chères amies **Yasmine**, **Amani**, **Aia**, **Dounia**, **Amira**, **Imen**.*

Rahoua

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions des systèmes de contrôle régis par des équations différentielles à évolution fractionnaire impliquant des dérivés fractionnaires de Riemann – Liouville dans des espaces de Banach. Notre objectif principal dans ce mémoire est de présenter les conditions suffisantes et appropiées pour l'existence et l'unicité des solutions mild et d'étudier les résultats de contrôlabilité approchée pour les problémes abstraite de Cauchy d'ordres fractionnaires au sens de Riemann–Liouville. L'approche suivie ici est basée sur des méthodes de point fixe, la théorie des semi-groupes et le calcul fractionnaire.

Mots clés : contrôlabilité approchée, systèmes à évolution fractionnaire, dérivés fractionnaires de Riemann – Liouville, solutions mild.

ملخص

في هذه المذكرة، ندرس أنظمة التحكم التي تحكمها معادلات تطور تفاضلي كسرية تتضمن مشتقات كسرية من صنف ريمان- ليوفيل في فضاءات بناخ. هدفنا الرئيسي في هذه المذكرة هو تقديم و طرح الشروط الكافية و المناسبة لوجود ووحدانية الحلول اللينة ودراسة نتائج قابلية التحكم التقريبية لمسائل كوشي التجريدية الكسرية بمفهوم ريمان - ليوفيل. التقريب المتبع هنا يعتمد على طرق تقنية النقطة الثابتة ، نظرية شبه الزمر و حساب التفاضل و التكامل الكسري.

الكلمات المفتاحية : التحكم التقريبي، أنظمة التطور الكسري، مشتقات كسرية من صنف ريمان- ليوفيل، الحلول اللينة.

Introduction

Récemment, les équations différentielles fractionnaires se sont révélées être des outils précieux dans la modélisation de nombreux phénomènes, car elles sont plus précises que les modèles d'ordre entier. Étant donné que les dérivés fractionnaires constituent un excellent instrument pour la description de la mémoire et des propriétés héréditaires dans un modèle, ils ont trouvé de nombreuses applications dans la modélisation mathématique de systèmes et de processus dans les domaines de la physique, de l'aérodynamique, de l'électrodynamique des milieux complexes, de la viscoélasticité, de la conduction thermique, de la mécanique, de l'électricité, de la théorie du contrôle,... etc. Pour plus de détails sur ces sujets, voir, par exemple [2, 4, 7, 10, 11, 12, 13, 15, 17] et les références qui y figurent.

Les définitions des dérivées fractionnaires de Riemann – Liouville où les conditions initiales d'intégrales jouent un rôle important dans certains problèmes pratiques.
HEYMANS et PODLUBNY ont démontré qu'il est possible d'attribuer une signification physique aux conditions initiales exprimées en termes des dérivés fractionnaires de Riemann – Liouville où les intégrales sur le champ de la viscoélasticité, et de telles conditions initiales sont plus appropriées que des conditions initiales physiquement interprétables.
La notion de contrôlabilité, introduite pour la première fois par KALMAN en **1963**, est devenue un domaine d'investigation actif en raison de ses grandes applications dans le domaine de la physique. Il existe divers traveaux sur la contrôlabilité complète des systèmes représentés par des équations différentielles, équations intégrodifférentialles, des inclusions différentielles des équations différentielles à fonction neutre et des équations différentielles impulsives dans des espaces de Banach.
Cependant, les résultats complets de contrôlabilité des systèmes de contrôle abstraits sont obtenus en supposant que l'opérateur de contrôlabilité a un inverse induit sur un espace de quotient et même restreint les espaces dimentionnels finis, lorsque le semi-groupe $S(t)$ est compact.
Par conséquent, le concept de contrôlabilité complète est trop fort dans des espaces dimentionnels infinis, et afin d'établir des conditions plus appropriées concernant la contrôlabilité, de plus en plus d'auteurs se préoccupent de la contrôlabilité approchée.
Dans la littérature actuelle il y a seulement un nombre limité de documents qui traitent la contrôlabilité approchée pour les équations différentielles à évolution fractionnaires de Riemann-Liouville.
L'objet de notre mémoire est de présenter les conditions suffisantes et appropiées pour l'existence et l'unicité de solution mild et d'étudier les résultats de contrôlabilité approchée pour les problémes fractionnaires abstraite de Cauchy avec les dérivés fractionnaire de Riemann–Liouville.
Ce mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux bases mathématiques du calcul fractionnaire, quelques notions essentielles en calcul fractionnaire seront introduits comme les fonctions spéciales (Gamma, Bêta) et l'approche de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.
Le deuxième chapitre de ce mémoire est consacré au théorie des semi-groupes, où on présente les notions de base de cette théorie, ainsi on fait rappel sur les transformations de Laplace et les théorèmes de point fixe qui sont trés utils à la résolution des systèmes d'évolution d'ordre fractionnaire.
Le trosième chapitre de ce mémoire est dédié aux systèmes décrits par des equations différentielles à évolution fractionnaires avec les dérivés fractionnaires de Riemann–Liouville et au rappel des principaux résultats concernant ces systèmes. Ainsi, nous intéresserons à la question de l'existence et la contrôlabilité de ces systèmes. Un exemple est donnée pour illustrer la théorie.

Chapitre 1

Calcul Fractionnaire

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions mathématiques nécessaires pour les fonctions spéciales (Gamma, Bêta), l'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann Liouville.

1.1 Espaces fonctionnels

Avant de présenter les définitions des opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires, il convient d'introduire les espaces fonctionnels suivants :
Soit $\Omega = [a, b]$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 1.1.1 *Pour $1 \leq p \leq \infty$, on définit*
1. *L'espace $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, des $(classes\ de)$ fonctions f réelles ou complexes sur Ω telles que f est mesurable et $\int_a^b |f(t)|^p dt < \infty$, muni de la norme*

$$||f||_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \; 1 \leq p \leq \infty.$$

2. *L'espace $L^\infty(\Omega)$, $p = \infty$, des (classes de) fonctions mesurables bornées presque partout (p.p.) sur Ω muni de la norme*

$$||f||_\infty = \underset{t\in\Omega}{ess\sup}|f(t)| = \inf\{K \geq 0;\ |f(t)| \leq K,\ p.p.\ sur\ \Omega\}.$$

DÉFINITION 1.1.2 *Soit $\Omega = [a, b]$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$, alors l'espace des fonctions absolûment continues, noté $AC^1(\Omega)$, est défini comme l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$, dérivable presque partout telle que $f' \in L^1(\Omega)$.*
On a ainsi

$$f \in AC^1(\Omega) \Longleftrightarrow f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)ds,\ t \in \Omega.$$

Pour $n \geq 2$ nous notons par $AC^n(\Omega)$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$, telles que $f^{(k)} \in C(\Omega)$ $k = 1, ..., n-1$ et $f^{(n-1)} \in AC^1(\Omega)$.

Notation *: On notera $AC^1(\Omega)$ par $AC(\Omega)$.* L'espace *$AC^n(\Omega)$ est caractérisé par le résultat suivant*

LEMME 1.1.1 *Une fonction $f \in AC^n(\Omega)$, si et seulement si elle s'écrit sous la forme*

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1} f^{(n)}(s)\ ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k,\ \forall t \in \Omega.$$

1.2 Fonctions spéciales

1.2.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est une fonction de base du calcul fractionnaire. Cette fonction généralise le factoriel $n!$.

DÉFINITION 1.2.1 ([7, 15]) *La fonction Gamma est définie par l'intégrale*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,\ x > 0$$

ou parfois

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2x-1} dt,\ x > 0$$

avec $\Gamma(1) = 1;\ \Gamma(0_+) = +\infty$.

Quelques propriétés sur la fonction Gamma

Soit $x \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$, alors :

1. $\Gamma(n+1) = n!$

2. $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$, pour $x \in \mathbb{R}_-$.

3. $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

4. $\frac{d^n}{dx^n}\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n\, dt, \ \ x > \ 0.$

De ce qui précède, nous pouvons obtenir :

a) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

b) $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$

c) $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{-3}{2}+1\right)}{\frac{-3}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)}{\frac{-3}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{-3}{2}.\frac{-1}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$

Représentation de la fonction Gamma sous forme d'une limite

La fonction Gamma peut être représentée aussi par la limite

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)},$$

où nous supposons que $Re(z) > 0.$

1.2.2 La fonction Bêta

Parmi les fonctions de base du calcul fractionnaire : la fonction Bêta. Cette fonction joue un rôle important spécialement dans une certaine combinaison avec la fonction Gamma.

DÉFINITION 1.2.2 ([7, 15]**)** *La fonction Bêta est donnée par*

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt, \ Re(x) > 0, \ Re(y) > 0. \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2x-1}\cos(t)^{2y-1}\, dt. \end{aligned}$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma comme suit

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(y,x), \forall x,y : Re(x) > 0, \ Re(y) > 0.$$

– **Quelques propriétés sur la fonction Bêta**

Soient $Re(x) > 0$ et $Re(y) > 0$, alors :

1. $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$.

2. $B(x,1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

3. $B(x,1) = \frac{1}{x}$.

4. $B(x,n) = \frac{(n-1)!}{x.(x+1)\ldots(x+n-1)}, \quad n \geq 1.$

5. $B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, \ \ m \geq 1$ et $n \geq 1.$

1.3 Intégrale et dérivée fractionnaire

1.3.1 Intégrale d'ordre arbitraire

Soit $f : [a; b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. b pouvant être fini ou infini.

Une primitive de f est donnée par l'expression

$$\left(I_a^1 f\right)(t) = \int_a^t f(\tau)\ d\tau$$

pour une primitive seconde on aura

$$\left(I_a^2 f\right)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s f(t)\, dt\right)\ ds.$$

En utilisant le théoréme de fubini, on peut écrire

$$\left(I_a^2 f\right)(t) = \int_a^t (t-\tau) f(\tau)\ d\tau$$

en itérant, on arrive a :

$$(I_a^n f)(t) = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\ d\tau.$$

1.3.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'approche de Riemann-Liouville relative à la définition de l'intégrale fractionnaire s'appuie sur la formule de Cauchy pour le calcul de l'intégrale répétée n fois qui est donnée par

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)\ ds;\ t > a\ et\ n \in \mathbb{N}^*.$$

En généralisant cette formule à un ordre α réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma on aura la définition suivante :

DÉFINITION 1.3.1 ([7, 15]) *L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre* $\alpha > 0$ *d'une fonction* $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, *est formellement définie par*

$$I_{0^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\ ds.$$

– **Exemples pour l'intégrale fractionnaire R-L**

a) Soit la fonction $f(t) = t^\beta$ où $\beta > -1$

$$I_{0^+}^\alpha t^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\beta ds$$

pour évaluer cette intégrale on effectue le changement de variable $s = tz$

$$\begin{aligned}
I_{0^+}^\alpha t^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-tz)^{\alpha-1} (tz)^\beta t dz \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 z^\beta (1-z)^{\alpha-1} dz \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1,\alpha) \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

b) Soit la fonction : $f(t) = C$

$$\begin{aligned}
I_{0^+}^\alpha C &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} C\, ds \\
&= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds
\end{aligned}$$

pour évaluer cette intégrale on effectue le changement de variable $u = t - s$

$$\begin{aligned}
I_{0^+}^\alpha C &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t u^{\alpha-1} du \\
&= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{t^\alpha}{\alpha} \\
&= \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha
\end{aligned}$$

– **Propriétés de l'intégrale fractionnaire de R-L**

1. L'opérateur d'intégration fractionnaire $I_{0^+}^\alpha$ est borné dans $L^p(\mathbb{R}_+),\ (1 \leq p \leq +\infty)$ et on a

$$||I_{0^+}^\alpha f||_p \leq K\, ||\, f\, ||_p,$$

pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$.

2. Soit $\alpha, \beta > 0$, alors pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ on a

$$I_{0^+}^{\alpha} I_{0^+}^{\beta} f(t) = I_{0^+}^{\alpha+\beta} f(t) = I_{0^+}^{\beta} I_{0^+}^{\alpha} f(t),$$

pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$.

3. Soit $\alpha > 1$, alors pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ on a

$$\frac{d}{dt}(I_{0^+}^{\alpha} f)(t) = (I_{0^+}^{\alpha-1} f)(t),$$

4. Soit $\alpha > 0$, alors pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ on a

$$\lim_{\alpha \to 0_+} (I_{0^+}^{\alpha} f)(t) = f(t).$$

1.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

DÉFINITION 1.3.2 ($[7, 15]$**)** *Pour $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ est formellement définie par*

$$^{L}D_{0^+}^{\alpha} f(t) = D^n I_{0^+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds, \;\; t \in \mathbb{R}_+$$

où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$.

– **Exemples pour la dérivée fractionnaire R-L**

a) Soit la fonction $f(t) = t^{\beta}, \; \beta > -1$, on a :

$$\begin{aligned} ^{L}D_{0_+}^{\alpha} t^{\beta} &= \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} t^{n-\alpha+\beta}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} (\frac{d}{dt})^n \;\; t^{n-\alpha+\beta} \end{aligned}$$

on sait que :

$$(\frac{d}{dt})^n \;\; t^{n-\alpha+\beta} = (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)\; t^{\beta-\alpha}$$

par substitution on obtient :

$$\begin{aligned} ^{L}D_{0_+}^{\alpha} t^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}\; t^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)}{(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)\;\Gamma(\beta-\alpha+1)}\; t^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

b) Pour $\alpha = 1$, la formule de dérivation se réduit a :

$$\begin{aligned} {}^{L}D_{0_+}^{1} t^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}\, t^{\beta-1} \\ &= \beta t^{\beta-1} = \frac{d}{dt} t^{\beta} \end{aligned}$$

c) Si on prend $\beta = 0$ dans l'exemple précédent, on arrive au résultat suivant :

$${}^{L}D_{0_+}^{\alpha} 1 = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

C'est -à-dire que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas ni nulle ni constante, mais on a :

$${}^{L}D_{0_+}^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}.$$

Remarque

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coincide avec la dérivée ordinaire.

Chapitre 2

Semi-Groupes

Dans ce chapitre nous présentons les notions de base de la théorie des semi-groupes qui seront utilisées tout au long de ce mémoire.
Soit X un espace de Banach muni d'une norme noté $||.||$ et le produit scalaire $< .,. >$.
$\mathcal{L}\ (X)$ est l'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans lui même dont la norme est

$$||U\ ||_{\mathcal{L}\ (X)}\ = \sup_{x\neq 0}\frac{||Ux||}{||x||}$$

pour tout $U\ \in \mathcal{L}(X),\ \mathcal{L}(X)$ est un espace de Banach.

2.1 Définitions

DÉFINITION 2.1.1 ([14]) *Une famille d'opérateurs $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ linéaires bornés définis sur X est dite semi-groupe fortement continu (ou de classe C_0), ou simplement C_0-semi-groupe si on a :*

(i) $\mathcal{S}(0) = I$ *(I est l'opérateur d'identité dans $\mathcal{L}(X)$).*

(ii) $\mathcal{S}(t+s) = \mathcal{S}(t)\mathcal{S}(s)$ *pour tout $s, t \geq 0$.(propriété algebrique)*

(iii) $\lim\limits_{t\to 0}||\mathcal{S}(t)x - x||\ = 0$ *pour tout x dans X.(propriété topologique)*

*si en remplace **(iii)** par :*

$$\lim_{t\to 0}||\mathcal{S}(t) - I\ ||\ = 0,\quad t\geq 0,$$

il s'agit d'un semi-groupe uniformément continu.

Théorème 2.1.1 ([14]**)** *Pour $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X, alors on a les propriétés suivantes*

(i) $t \to |\mathcal{S}(t)|_{\mathcal{L}(X)}$ *est bornée sur tout intervalle compact* $[0, t_1]$;

(ii) *Pour tout x dans X, la fonction $t \to \mathcal{S}(t)\, x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;*

(iii) *Il existe des constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que*:

$$|\mathcal{S}(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq \; Me^{\omega t}, \;\; \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Définition 2.1.2 ([14]**)** *L'opérateur A défini par :*

$$D(A) = \left\{ x \in X \;:\; \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{S}(t)x - x}{t} \text{ existe pour tout } t > 0 \right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{S}(t)\; x - x}{t} = \frac{d}{dt}\, \mathcal{S}(t)x|_{t=0}, \text{ pour } x \in D\,(A)$$

est dit générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe.

L'espace $D(A)$ est muni de la norme du graphe $||x||_{D(A)} = ||x|| \; + ||Ax||, \quad x \in D\,(A).$

Remarque. Si $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés de générateur infinitésimal A, alors il est unique.

2.2 Solution Mild

Dans cette section on présente la solution de l'équation différentielle linéaire fractionnaire. Le concept du solution mild peut être introduit pour étudier le problème à valeur initiale non homogène suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f(t), \; 0 < t < T, \\ x(0) = x_0, \qquad\qquad\qquad x \in X \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f : [0, T[\to X$.

Nous définissons maintenant le concept d'une solution mild

DÉFINITION 2.2.1 ([7]) *Soit A un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ sur X, $x_0 \in X$, et $f \in L^1([0,T], X)$ l'espace des fonctions Bochner-intégrables sur $[0,T]$ à valeurs dans X.*
La fonction $x \in C([0,T], X)$ donnée par

$$x(t) = \mathcal{S}(t)\, x_0 + \int_0^t \mathcal{S}\,(t-s)\, f(s)\, ds, \quad 0 < t < T,$$

est la solution mild du probléme à valeur initiale (2.1) sur $[0,T]$.

2.3 Transformation de Laplace

DÉFINITION 2.3.1 *On dit que $f(t)$ est une fonction originale si :*
1. *$f(t) = 0$ pour $t < 0$.*
2. *$|f(t)| < Me^{s_0 t}$ pour $t > 0$ avec $M > 0$, $s_0 \in \mathbb{R}$.*
3. *La fonction $f(t)$ satisfait les conditions de Dirichlet pour tout intervalle $[a,b]$:*
a) *$f(t)$ est bornée,*
b) *$f(t)$ est continue, ou bien a un nombre fini des points de discontinuites de premiére forme,*
c) *$f(t)$ a un nombre fini des extrémes.*

On consindére la variable complexe telle que : $s = \alpha + i\beta$ et $Re(s) = \alpha \geq s_1 \geq s_0$ alors

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

est dite la tronsformation de Laplace de la fonction $f(t)$ et on note

$$\mathcal{L}\,[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt\ .$$

La tronsformation de Laplace inverse est défini par

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{t\to\infty} \int_{\gamma - it}^{\gamma + it} F(s) e^{st}\, dt\ = \mathcal{L}^{-1}[F(s)],$$

où $i = \sqrt{-1}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

2.3.1 Images de quelques fonctions élémentaires

Original	Image	Original	Image
1	$\frac{1}{s}$	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$\cos\beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$t\cos\beta t$	$\frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$
$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$t\sin\beta t$	$\frac{2s\beta}{(s^2+\beta^2)^2}$
$\cosh(\beta t)$	$\frac{s}{s^2-\beta^2}$	$\sinh(\beta t)$	$\frac{\beta}{s^2-\beta^2}$

2.3.2 Exemples

a) Soit la fonction $f(t) = t^\lambda$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}t^\lambda \, dt$$

pour évaluer cette intégrale on effuctue le changement de variable $x = ts$ alors

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-x}\frac{x^\lambda}{s^\lambda}\,\frac{dx}{s} \\ F(s) &= \frac{1}{s^{\lambda+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^\lambda dx = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{s^{\lambda+1}} \end{aligned}$$

donc la tronsformation de Laplace est :

$$\mathcal{L}(t^\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{s^{\lambda+1}}$$

et la tronsformation de Laplace inverse est :

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^{\lambda+1}}) = \frac{t^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$$

b) Soit $f(t) = \sin^2(t)$

En utilisant l'identité $\sin^2 t \ = \frac{1-\cos(2t)}{2}$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\frac{1-\cos(2t)}{2}dt \\ &= \frac{1}{2s} - \frac{2s}{2(s^2+4)} = \frac{2}{s(s^2+4)} \end{aligned}$$

2.3.3 Propriétés de la tronsformation de Laplace

Dans cette sous-section on utisant la notation $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ et $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$

- Propriété de la linéairité

$$\mathcal{L}[a\ f(t) + b\ g(t)] = aF(s) + bG(s),\ a, b \in \mathbb{R}$$

- Propriété de la similarité

$$\mathcal{L}[\ f(\alpha t)\ ] = \frac{1}{\alpha}\ F(\frac{s}{\alpha}), \quad \alpha > 0$$

2.3.4 Les théorèmes de différentiation et d'intégration

Théorème 2.3.1 ([17]) ***(Différentiation d'un original)***
La tronsformation de Laplace de la Dérivée d'ordre k de la fonction $f(t)$ est donée par :

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = s^k F(s) - [s^{k-1}f(0) + s^{k-2}f'(0) + ... + f^{(k-1)}(0)]$$

Exemples

a) Soit $f(t) = t^2$

On a $f^{'}(t) = 2t$ et $f"(t) = 2$,

$$\begin{aligned} f(0) &= 0,\ f^{'}(0) = 0,\ f"(0) = 2 \\ \mathcal{L}[f"(0)] &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \\ \mathcal{L}[2] &= \frac{2}{s} = s^2F(s) \Rightarrow\ F(s) = \frac{2}{s^3} \end{aligned}$$

b) $f(t) = \cos(2t)$

On a $f^{'}(t) = -2\sin(2t)$ et $f"(t) = -4\cos(2t)$,

$$\begin{aligned} f(0) &= 1,\ f^{'}(0) = 0,\ f"(0) = -4 \\ \mathcal{L}[f"(t)] &= s^2F(s) - sf'(0) - f(0) \Rightarrow -4F(s) = s^2F(s) - s \\ F(s) &= \frac{s}{s^2+4} \end{aligned}$$

THÉORÈME 2.3.2 ([17]) ***(Intégration d'un original)*** *La tronsformation de Laplace de l'intégrale la fonction $f(t)$ est donée par :*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

THÉORÈME 2.3.3 ([17]) ***(Différentiation d'un tronsfome)*** *On a*

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)]$$

2.3.5 La tronsformation de Laplace des intégrales et dérivées fractionnaires

- Intégrales fractionnaires

Si $\alpha > 0$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville est donée par :

$$I = I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-y)^{(\alpha-1)}\, f(y)\, dy$$

$$\mathcal{L}[I] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathcal{L}[t^{\alpha-1}]\mathcal{L}[f(t)] = \frac{F(s)}{s^\alpha}$$

- Dérivées fractionnaires

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[D_t^\alpha f(t)] &= \mathcal{L}[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{dt^n}{d^n t})\int_0^t (t-u)^{n-\alpha-1}\, f(u)\, du] \\
&= \mathcal{L}[(\frac{dt^n}{d^n t})I^{n-\alpha} f(t)]
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f'(0)8 - ... - f^{(n-1)}(0),$$

$$\mathcal{L}[D_t^\alpha f(t)] = s^n\frac{F(s)}{s^{n-\alpha}} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-\alpha-1}[D^k I^{n-\alpha} f(t)]_{t=0},$$

$$\mathcal{L}[D_t^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-\alpha-1}[D^k I^{n-\alpha} f(t)]_{t=0},$$

2.4 Théoremes du point fixe

Les théorèmes de points fixes sont des outils très utiles en mathématiques et particulièrement dans la résolution des équations différentielles et intégrales.

En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour lesquelles une fonction donnée admet un point fixe, ainsi on assure l'existence de la solution d'un problème donné en le transformant en un problème de point fixe, et on détermine éventuellement ces points fixes qui sont les solutions du problème posé.

DÉFINITION 2.4.1 *Soit f une application d'un ensemble E dans lui même. On appelle point fixe de F tout point $x \in E$ tel que*

$$F(x) = x$$

En 1922 STEFAN BANACH *prouva son fameux résultat dit "principe de contraction de Banach", ce théorème est le résultat le plus élémentaire et le plus utilisé puisqu'il n'assure pas seulement l'existence d'un point fixe mais aussi son unicité.*

THÉORÈME 2.4.1 ***(Banach)***

Soit E un espace de Banach sur un corps K $(K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et soit $||.||$ la norme sur E. Soit D un sous ensemble fermé de E. Soit F une fonction qui applique D dans D, telle qu'il existe un nombre γ avec $0 \leq \gamma < 1$ et

$$||F_x - F_y|| \ \leq \gamma \, ||x - y|| \ \text{pour tout } x, y \in D,$$

Alors il existe un point unique $z \in D$ tel que $F\ z \ = \ z$.
De plus, si $x_0 \in D$ et $x_n = F x_{n-1}$ pour $n = 1, 2, ...$ alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = z$$

et on a l'estimation

$$\|x_n - z\| \leq \gamma^n (1 - \gamma)^{-1} \|x_1 - x_0\| \ \text{pour } n = 1, 2, ...$$

Chapitre 3

Contrôlabilité approchée des systèmes d'évolution d'ordre fractionnaire

Dans ce chapitre, nous traitons des systèmes de contrôle régis par des équations différentielles à évolution d'ordre fractionnaire impliquant des dérivés fractionnaires de Riemann – Liouville dans des espaces de Banach. Notre objectif principal dans ce mémoire est d'établir des hypothèses appropriées pour garantir l'existence et l'unicité des solutions Mild. Dans ces conditions, la contrôlabilité approchée des systèmes d'évolution d'ordre fractionnaire associés impliquant des dérivés fractionnaires de Riemann – Liouville est formulée et prouvée.

3.1 Position du problème

Ci-dessous, nous discutons le système d'évolution d'ordre fractionnaire suivant

$$D_t^{\alpha} x(t) = Ax(t) + Bu(t) + f\,(t, x(t)) \tag{3.1}$$

$$I_t^{1-\alpha}\, x(t)|_{t=0} = x_0 \in X, \tag{3.2}$$

où D_t^α désigne la dérivée fractionnaire de Riemann – Liouville d'ordre α avec la limite inférieure zéro. $A : D(A) \subseteq X \to X$ est le générateur infinitésimal d'un C_0−semi-groupe $S(t)(t \geq 0)$ sur un espace de Banach X. $f : [0, b] \times X \to X$ est une fonction donnée. La fonction de contrôle $u(\cdot)$ prend ses valeurs dans $V = L^2([0, b]; U)$ et U est un espace de Banach. B est un opérateur linéaire de V en $L^2([0, b]; X)$.
Avant l'introduction de la définition de la solution mild de (3.1)-(3.2), nous présentons les définitions, lemmes et les notations suivantes.
La norme d'un espace de Banach X sera notée $\|\cdot\|_X$. $L_b(X, Y)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires de X dans Y. Soit $M := \sup\limits_{t\geq 0} \|S(t)\|_{L_b(X)}$. Soit $C(J, X)$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de valeurs X de $J = [0, b]$ en X muni de la norme $\|x\|_C = \sup\limits_{t\in J} \|x(t)\|_X$. Soit $AC(J, X)$ l'espace des fonctions f qui sont absolument continues sur J et $AC^m(J, X) = \left\{f : J \to X \text{ et } f^{(m-1)}(x) \in AC(J, X)\right\}$.
Pour définir les solutions Mild de (3.1)-(3.2), considérons également l'espace de Banach $C_{1-\alpha}(J, X) = \{x : t^{1-\alpha}x(t) \in C(J, X),\ 0 < \alpha \leq 1\}$ muni de la norme $\|x\|_{C_{1-\alpha}} = \sup\{t^{1-\alpha} \|x(t)\|_X : t \in J,\ 0 < \alpha \leq 1\}$. L'espace $C_{1-\alpha}(J, X)$ est un espace de Banach.
L'étape suivante consiste à présenter la solution mild du problème (3.1)-(3.2).

DÉFINITION 3.1.1 ($[8, 23]$**)** *Une fonction $x \in C_{1-\alpha}(J, X)$ est appelée solution Mild de (3.1)-(3.2) si elle vérifie l'équation intégrale fractionnaire suivante :*

$$x(t) = t^{1-\alpha}\mathcal{T}_\alpha(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(t-s)Bu(s)ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(t-s)f(s, x(s))\,ds$$

où

$$\mathcal{T}_\alpha(t) = \alpha \int_0^\infty \theta\xi_\alpha(\theta)\,S(t^\alpha\theta)d\theta$$

ξ_α est une fonction de densité de probabilité définie sur $(0, \infty)$, telle que

$$\xi_\alpha(\theta) \geq 0,\ \theta \in (0, \infty),\ \text{et} \int_0^\infty \xi_\alpha(\theta)\,d\theta = 1.$$

LEMME 3.1.1 *L'opérateur $\mathcal{T}_\alpha(t)$ $(t \geq 0)$ est fortement continus, i.e., pour $x \in X$ et $0 \leq t_1 < t_2 \leq b$, on a $\|\mathcal{T}_\alpha(t_2)x - \mathcal{T}_\alpha(t_1)x\| \longrightarrow 0$ quand $t_2 \to t_1$.*

Ci-dessous nous imposons les conditions suivantes sur les données de notre problème :

(H_1) Pour tout $t \geq 0$ fixé ; $\mathcal{T}_\alpha(t)$ est un opérateur linéaire borné, i.e., pour tout $x \in X$,

$$\|\mathcal{T}_\alpha(t)\,x\| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\|x\|.$$

(H_2) Il existe des constantes positives $N_1, N_2 > 0$ telle que

$$\begin{aligned}\|f(t,x) - f(t,y)\| &\leq N_1\|x-y\|_X \\ \|f(t,x)\| &\leq N_2(1+\|x\|_X) \quad \forall\, x,y \in X.\end{aligned}$$

(H_3) Le système linéaire est approximativement contrôlable sur J.

Pour chaque $0 \leq t < b$, l'opérateur $\lambda(\lambda I + \Psi_0^b)^{-1} \to 0$ dans la topologie forte des opérateurs quand $\lambda \to 0_+$, où $\Psi_0^b = \int_0^b (b-s)^{2(\alpha-1)}\mathcal{T}_\alpha(b-s)BB^*\mathcal{T}_\alpha^*(b-s)ds$ est le Gramian de contrôlabilité, B^* est l'adjoint de B et $\mathcal{T}_\alpha^*(t)$ représente l'adjoint de $\mathcal{T}_\alpha(t)$.

DÉFINITION 3.1.2 ([8, 23]) *Soit $x(t;0,x_0,u) = x(b)$ une solution du système (3.1)-(3.2) à partir de la valeur initiale $x_0 \in X$ à l'instant t correspondant au contrôle $u(\cdot) \in V$. L'ensemble $K_b(f) = \{x(b) = x(b;0,x_0,u) : u(\cdot) \in V\}$ est appelé l'ensemble accessible du système (3.1)-(3.2) à l'instant terminal b.*
Si $\overline{K_b(f)} = X$ $\forall x_0 \in X$, alors le système (3.1)-(3.2) est dit approximativement contrôlable sur J.

Plus précisément, (3.1)-(3.2) est approximativement contrôlable sur J si :

$$\forall h \in X, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists u \in V \ / \ \|x(b) - h\| < \epsilon.$$

Nous définissons maintenant la fonction de contrôle sous la forme suivante

$$\begin{aligned}u^\lambda(t,x) &= B^*(b-t)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha^*(b-t)\Big[(\lambda I + \Psi_0^b)^{-1}\Big\{x(b) - b^{1-\alpha}\mathcal{T}_\alpha(b)x_0\Big\}\Big] \\ &\quad - B^*(b-t)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha^*(b-t)\int_0^t (\lambda I + \Psi_0^b)^{-1}(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(b-s)f(s,x(s))ds.\end{aligned}$$

LEMME 3.1.2 ([8, 23]) *Il existe des constantes réelles positives $\hat{M}, \hat{N}$ telles que pour tout $x, y \in C_{1-\alpha}(J,X)$, on a*

$$\begin{aligned}\left|\left|u^\lambda(t,x) - u^\lambda(t,y)\right|\right| &\leq \hat{M}\,||x(t) - y(t)||, \\ \left|\left|u^\lambda(t,x)\right|\right| &\leq \hat{N}\left(\frac{1}{b} + \|x(t)\|\right).\end{aligned}$$

3.2 Existence des solutions Mild

Cette section est consacrée à l'étude des résultats d'existence et d'unicité pour notre problème (3.1)-(3.2) en utilisant le principe de l'application contractante.

THÉORÈME 3.2.1 *Supposons que les hypotheses (H_1) et (H_2) sont satisfaites. Alors pour chaque fonction de contrôle $u(.) \in V$, le systeme de contrôle (3.1)-(3.2) a une solution mild unique sur $C_{1-\alpha}(J, X)$.*

Preuve

Pour tout $\lambda > 0$, nous définissons l'opérateur $F_\lambda : C_{1-\alpha}(J, X) \to C_{1-\alpha}(J, X)$ par

$$(F_\lambda x)(t) = t^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(t)\, x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,\mathcal{T}_\alpha(t-s)\left[Bu^\lambda(s, x) + f(s, x(s))\right] ds.$$

Nous montrons que F_λ^n est un opérateur de contraction sur $C_{1-\alpha}(J, X)$ .En fait pour tout $x, y \in C_{1-\alpha}(J, X)$ et $t \in J$, nous avons

$$\begin{aligned}
t^{1-\alpha}\left\|(F_\lambda x)(t) - (F_\lambda y)(t)\right\| &\leq t^{1-\alpha}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left\|\mathcal{T}_\alpha(t-s)\,B\left[u^\lambda(s, x) - u^\lambda(s, y)\right]\right\| ds \\
&\quad + t^{1-\alpha}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left\|\mathcal{T}_\alpha(t-s)\left[f(s, x(s)) - f(s, y(s))\right]\right\| ds \\
&\leq \frac{M\hat{M}\|B\|}{\Gamma(\alpha)} t^{1-\alpha}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|x(s) - y(s)\|\, ds \\
&\quad + \frac{N_1 M}{\Gamma(\alpha)} t^{1-\alpha}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|x(s) - y(s)\|\, ds \\
&\leq \left(\hat{M}\|B\| + N_1\right)\frac{Mt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|x - y\|_{C_{1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient une constante réelle positive $\gamma(\lambda)$ telle que

$$t^{1-\alpha}\left\|(F_\lambda x)(t) - (F_\lambda y)(t)\right\| \leq \gamma(\lambda)\|x - y\|_{C_{1-\alpha}}. \tag{3.3}$$

pour tout $t \in J$ et tout $x; y \in C_{1-\alpha}$. Pour tout nombre naturel n, il résulte de l'itération successive de l'inégalité ci-dessus (3.3) que, en prenant la borne supérieure sur J,

$$\|F_\lambda^n x - F_\lambda^n y\|_{C_{1-\alpha}} \leq \frac{\gamma^n(\lambda)}{n!}\|x - y\|_{C_{1-\alpha}}. \tag{3.4}$$

Pour tout $\lambda > 0$ fixé, pour n suffisamment grand ; $\frac{\gamma^n(\lambda)}{n!} < 1$. Il résulte de (3.4) que F_λ^n est une contraction, ainsi que le principe de contraction assure que l'opérateur F_λ a un unique point fixe x_λ dans $C_{1-\alpha}(J, X)$, qui est une solution mild de (3.1)–(3.2).

3.3 Résultats de contrôlabilité approchée

Dans cette section, nous nous intéressons aux résultats de contrôlabilité approchée des systèmes différentiels à évolution fractionnaire avec les dérivés fractionnaires de Riemann – Liouville.

THÉORÈME 3.3.1 *Supposons que les hypothèses $(H_1) - (H_3)$ sont satisfaites, de plus si la fonction f est uniformément bornée et $\mathcal{T}_\alpha(t)$ $(t \geq 0)$ est compact, alors le système (3.1)–(3.2) est approximativement contrôlable sur J.*

Preuve. Soit x_λ un point fixe de F_λ. On peut avoir facilement que

$$\begin{aligned} x_\lambda(b) &= x(b) - \lambda(\lambda I + \Psi_0^b)^{-1}\left(b^{1-\alpha}\mathcal{T}_\alpha(b)x_0\right) \\ &\quad + \lambda\int_0^b (\lambda I + \Psi_s^b)^{-1}(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(b-s)f(s,x_\lambda(s))ds \end{aligned}$$

Il résulte de l'hypothèse sur f qu'il existe $\hat{D} > 0$ tel que

$$\|f(s,x_\lambda(s))\| \leq \hat{D},$$

pour tout $s \in J$. Alors, il se trouve une sous-suite notée par $\{f(s,x_\lambda(s))\}$ qui converge faiblement à certains $\{f(s)\}$ dans X.

De l'équation précédente, nous avons

$$\begin{aligned} &\|x_\lambda(b) - x(b)\| \\ &\leq \left\|\lambda(\lambda I + \Psi_0^b)^{-1}\left(b^{1-\alpha}\mathcal{T}_\alpha(b)x_0\right)\right\| \\ &+ \int_0^b (b-s)^{\alpha-1}\left\|\lambda(\lambda I + \Psi_s^b)^{-1}\right\| \|\mathcal{T}_\alpha(b-s)(f(s,x_\lambda(s)) - f(s))\|\, ds \\ &+ \int_0^b (b-s)^{\alpha-1}\left\|\lambda(\lambda I + \Psi_s^b)^{-1}\mathcal{T}_\alpha(b-s)f(s)\right\| ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H_3), pour tout $0 \leq s < b$ l'opérateur $\lambda(\lambda I + \Psi_s^b)^{-1} \to 0$ fortement quand $\lambda \to 0^+$ et de plus $\|\lambda(\lambda I + \Psi_s^b)^{-1}\| \leq 1$. Ainsi, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue et la compacité de l'opérateur $\mathcal{T}_\alpha$ implique que $\|x_\lambda(b) - x(b)\| \to 0$ quand $\lambda \to 0^+$. Par conséquent, la contrôlabilité approchée de (3.1)-(3.2) a été prouvée.

3.4 Exemple

Considérons le système de contrôle fractionnaire avec condition initiale et dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

$$D_t^{\frac{2}{3}} x(t,z) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} x(t,z) + \mu(t,z) + \hat{f}(t, x(t,z)), \tag{3.5}$$

$$x(t,0) = x(t,1) = 0, \quad t \in J, \tag{3.6}$$

$$I_{0^+}^{1-\alpha} \ x(t,z)|_{t=0} = x_0(z), \quad z \in [0,1] \tag{3.7}$$

Les fonctions $x(t)(z) = x(t,z), \ f(t,x(t))(z) = \hat{f}(t,x(t,z))$, l'opérateur linéaire borné $B : V = L^2([0,b];U) \to L^2([0,b];X)$ est défini par $Bu(t)(z) = \mu(t,z), \ 0 \leq z \leq 1, \ u \in U.$ Soit $X = U = L^2([0,1])$ et l'opérateur $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ est défini par

$$Ax = x"$$

où

$$D(A) = \{x \in X : x, x' \text{ sont absolument continues}, \ x" \in X, \ x(0) = x(1) = 0\}$$

Alors l'opérateur A peut étre écrit comme suit

$$Ax = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x, x_n) x_n, \quad x \in D(A)$$

où $x_n(z) = \left(\sqrt{2/\pi}\right) \sin nz, \ (n = 1, 2, ...)$ est une base orthônormale sur X,il est bien connue que A est un opérateur infinitésimal d'un semi-groupe différentiable $S(t)$ $(t > 0)$

$$S(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} (x, x_n) x_n, \ \ x \in X,$$

et $||S(t)|| \leq e^{-1} < 1 = M.$

Par conséquent, avec les choix ci-dessus, le système (3.5)-(3.7) peut s'écrire comme une formulation abstraite de (3.1)-(3.2) et ainsi le Théorème 3.2.1. permet de garantir l'existence d'une solution mild de (3.5)-(3.7). D'autre part, il est facile de voir que le système de contrôle déterministe linéaire fractionnaire correspond à (3.5)-(3.7) est approximativement contrôlable sur J, ce qui signifie que toutes les conditions du Théorème 3.3.1. sont satisfaites. Ainsi, le système de contrôle fractionnaire (3.5)-(3.7) est approximativement contrôlable sur J.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté quelques conditions suffisantes et appropiées pour l'existance et l'unicité de solution mild et de résultats de contrôlabilité approchée pour les problémes fractionnaires abstraite de Cauchy avec les dérivés fractionnaires de Riemann–Liouville dans un espace de Banach. Les résultats sont obtenus en basant sur le calcul fractionnaire, la théorié des semi-groupes et le théorème de point fixe (Principe de l'application contractante).

Bibliographie

[1] N. ABADA, M. BENCHOHRA, AND H. HAMMOUCHE, Existence and controllability results for nondensely defined impulsive semilinear functional differential inclusions, J. Differential Equations, 246 (**2009**), pp. 3834–3863.

[2] D. BALEANU AND A. K. GOLMANKHANEH, On electromagnetic field in fractional space, Nonlinear Anal. Real Word Appl., 11 (**2010**), pp. 288–292.

[3] E.HERNANDEZ AND D. O'REGAN, Controllability of Volterra-Fredholm type systems in Banach space, J. Franklin Inst., 346 (**2009**), pp. 95–101.

[4] E.HERNANDEZ, D. O'REGAN, AND E. BALACHANDRAN, On recent developments in the theory of abstract differential equations with fractional derivatives, Nonlinear Anal., 73 (**2010**),pp. 3462–3471.

[5] N. HEYMANS AND I. PODLUBNY, Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives, Rheol. Acta, 45 (**2006**),pp. 765–771.

[6] R. E. KALMAN, Controllablity of linear dynamical systems, Contrib. Diff. Equ., 1 (**1963**), pp.190–213.

[7] A. A. KILBAS, H. M. SRIVASTAVA, AND J. J. TRUJILLO, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Math. Stud., 204, Elsevier Science, Amsterdam, **2006**.

[8] S. KUMAR AND N. SUKAVANAM, Approximate controllability of fractional order semilinear systems with bounded delay, J. Differential Equations, 252 (**2012**), pp. 6163–6174.

[9] V. LAKSHMIIKANTHAM AND A. S. VATSALA, Basic theory of fractional differential equations, Nonlinear Anal., 69 **(2008**), pp. 2677–2682.

[10] Z. H. LIU AND J. F. HAN, Integral boundary value problems for fractional order integro-differential equations, Dynam. Systems Appl., 21 (**2012**), pp. 535–548.

[11] Z. H. LIU AND L. LU, A class of BVPs for nonlinear fractional differential equations with p-Laplacian operator, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 70 (**2012**), pp. 1–16.

[12] Z. H. LIU, J. H. SUN, AND I. SZANTO, Monotone iterative technique for Riemann-Liouville fractional integro-differential equations with advanced arguments, Results in Math., 63 (**2013**), pp. 1277–1287.

[13] Z. H. LIU AND J. H. SUN, Nonlinear boundary value problems of fractional functional integro-differential equations, Comput. Math. Appl., 64 (**2012**), pp. 3228–3234.

[14] A. PAZY, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations,Springer-Verlag, New York, **1983**.

[15] I. PODLUBNY, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, CA, **1999**.

[16] K. RYKACZEWSKI, Approximate controllability of differential of fractional inclutions in Hilbert spaces, Nonlinear Anal., 75 (**2012**), pp. 2701–2702.

[17] S. G. SAMKO, A. A. KILBAS, AND O. I. MARCHIVE, Fractional Integral and Derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach, New York, **1993**.

[18] N. SUKAVANAM AND M. KUMAR, S-controllability of an abstract first order semilinear control system, Numer. Funct. Anal. Optim., 31 (**2010**), pp. 1023–1034.

[19] J. R. WANG AND Y. ZHOU, A class of fractional evolution equations and optimal controls, Nonlinear Anal. Real World Appl., 12 (**2011**), pp. 262–272.

[20] J. R. WANG AND Y. ZHOU, Completely controllability of fractional evolution systems, Commun Nonlinear Sci. Numer Simul., 17 (**2012**), pp. 4346–4355.

[21] H. P. YE, J. M. GAO, AND Y. S.DING, A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl., 328 (**2007**), pp. 1075–1081.

[22] Y. ZHOU AND F. JIAO, Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations, Comput. Math. Appl., 59 (**2010**), pp. 1063–1077.

[23] H. X. ZHOU, Approximate controllability for a class of semilinear abstract equations, SIAM J.Control Optim., 22 (**1983**), pp. 405–422.