République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et Analyse numérique

Par :

Himed Imane

Intitulé

Méthode de perturbation régulière appliquée aux EDO non linéaire

Dirigé par : BOUTTIA Yassine

Devant le jury

PRESIDENT	HITTA Amara	Pr	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	BOUTTIA Yassine	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	GHIAT Mourad	MCB	Univ-Guelma

Session Jeuillet 2019

Remerciements

Tous d'abord, je remercie ALLAH le toit puissant de m'avoir donné la santé, la volonté et la force pour terminer ce travail dans les meilleures conditions.

Je tiens à exprimer mes remerciements. Mon respect et ma profaned gratitude à Mon encadreur Mr. Bouattia Yassine de m'avoir orients, Corneille et critique quant le besoin se faisait sentir, mais surtout pour sa disponibilité et d'avoir été tout simplement toujours là pour m'écouter et me redonner confiance.

Je adresse l'exepression de notre gratitude à notre enseigant le docteur, qui nous fait l'honneur de jury et d'examiner notre mémoire.

Je tiens à remercier touts nos enseignantes et enseignants du department mathématiques.

MERCI TOUS

Dédicace

Je dédie ce travail à:

Mes très chers parents qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance.

Mes très grand-père ABD-ELRAHEMANE puis Allah avoir pitié d'elle.

Mes chers frères et mes sœurs : Fares, Nour Elhouda .

à Toute famille.

Mes porche et chères amies: Sana, Kaouthare, wafa, chafya, Hana, Oumaima et chérés: Sara, Aia, Rawia, nouha.

MERCI TOUS

Table des matières

Résumé

Ce memoire est consacré à l'étude, Premièrement nous rappelons des notions générales. Nous commençons par définir les systèmes dynamiques, les points critiques et le système linéarisé d'un système non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre. Ensuite nous introduisons la notion d'un cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite d'un système planaire. Nous introduisons la stabilité d'une solution d'un système différentiel en se basant sur les fonctions de Lyapunov. Deuxièment, nous étudions la méthode de pèrturbation régulier. Nous commençons paridée de base sur la méthode de pèrturbation régulier. Ensuite nous étudions la premier est méthode de lindsted est on appeliquons un exemple sur cette méthode. et la deuxième est méthode des échelles de temps multiples est on on appeliquons un exemple sur cette méthode.troisième chapitre nous intéressons à l'étude du nombre de cycles limites on utilisont la méthode de moyene de premier ordre

ملخص

موضوع هذه المذكرة يرتكز أساسا على دراسة عدد الحلول الدورية لبعض الجمل التفاضلية غير الخطية.

أولا: نقوم بالتذكير ببعض المفاهيم العامة نبدأ بتحديد النظام الديناميكي, و النقطة الحرجة و النظام الخطي لنظام غير خطي بالقرب من نقطة التوازن, ثم نقدم مفاهيم دورة الحد نظام مستو. نحن نقدم استقرار حلول الحلول لنظام التفاضلية مرورا بالدالة ليبنوف.

ثانيا ندرس طريقة الاضطراب المنتظم و نبدأ بفكرة أساسية عنه ثم نقوم بدراسة الطريقة الأولى و هي طريقة لاندستد و نطبق مثالا على هذه الطريقة و الطريقة الثانية يتم تطبيق جداول زمنية متعددة و نقدم مثالا عن هذه الطريقة.

ثالثا نهتم بدراسة عدد حدود الدورة باستخدام طريقة ترتيب الدرجة الأولى .

0.1 Introduction

(a) Historique

Nous allons étudier dans ces chapitres des équations différentielles du deuxième ordre.

$$y" = F(y', y) \quad \text{où} \quad y = y(x) \text{ et } ' \equiv \frac{d}{dx} \tag{0.1}$$

Ces équations peuvent se transformer en un système de 2 équations différentielles du premier ordre. L'espace des phases est alors un plan. La forme générale d'un tel système est :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \tag{0.2}$$

Le premier modèle physique publié dans la littérature qui, transformé en un système du type (**0.2**), admette un cycle limite est l'équation :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon(\frac{1}{3}(\frac{dy}{dt})^3 - \frac{dy}{dt}) + y = 0 \tag{0.3}$$

établie par Rayleigh (1945) et qui modélise les oscillations d'une corde de violon.

• Dans les années vingt, Balthasar van der Pol, un ingénieur hollandais, étudiait les propriétés électriques des tubes à néon (van der Pol, 1922). A cette époque là, les oscilloscopes n'existant pas encore, il surveillait l'évolution de son circuit en écoutant les changements de tonalité dans un combiné téléphonique. Il modélisa les charges et décharges du tube par l'équation qui porte maintenant son nom :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{0.4}$$

On voit que si on dérive l'équation (**0.3**) par rapport à t et que si l'on note $x = \frac{dy}{dt}$, on retrouve l'équation (**0.4**) Ces deux équations sont donc équivalentes.

Quelques années plus tard Van Der Pol (1927) étudiait le même circuit électrique mais en régime sinusoïdal forcé. Lorsqu'il variait la fréquence du courant, il entendait dans son combiné la tonalité changer (le circuit se stabilisait donc sur la fréquence externe). Mais de temps à autre il remarquait quelque chose d'étrange, un comportement inexplicablement irrégulier : "on entend souvent au téléphone un bruit irrégulier avant que la fréquence ne saute à la valeur immédiatement inférieure" (van der Pol, 1927). Son tube à vide devait vraisemblablement traverser une période de chaos transitoire avant de se synchroniser sur la fréquence externe.

Plus tard, en Angleterre, Mary Lucy Cartwright et John E. Littlewood poursuivront les travaux de van der Pol sur les oscillateurs forcés.

• Liénard un ingénieur français, établit un théorème d'existence et d'unicité d'une solution périodique pour une classe générale d'équations dont fait partie l'équation (**0.4**) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon f(x)\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{0.5}$$

• Levinson & Smith (1942) ont suggéré de généraliser l'équation (**0.5**) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon f(x)\frac{dx}{dt} + G(x) = 0 \tag{0.6}$$

et qui est connu sous le nom d'équation de Liénard généralisé.

• Le problème fondamental lié à l'équation (**0.6**) est le nombre de solutions périodiques isolées (i.e. cycles limites) qui peuvent exister simultanément. Imaginons que l'équation (**0.6**) décrit le mouvement d'un oscillateur. Si cette équation a un cycle limite globalement attracteur alors l'oscillateur va évoluer, après un régime transitoire, selon un mouvement périodique. Le point important est que la période de ce mouvement sera la même quelle que soit la condition initiale !

On voit donc que la présence d'un cycle limite peut être une propriété importante d'une équation surtout si cette équation est une horloge !

(b) Résultats importants

On ne considère par la suite que le cas où $F(x)$ et $G(x)$ sont des polynômes, avec $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. On note m le degré de $F(x)$, n celui de $G(x)$ et $H(m,n)$ le nombre maximal de cycles limites qui peuvent exister simultanément pour (**0.6**). Depuis le théorème de Liénard plusieurs résultats importants ont été publiés :

• Rychkov (1975) a prouvé que pour des polynômes $F(x)$ impairs et de degré 5 et si $G(x) = x$ alors (**0.6**) n'a au plus que 2 cycles limites.

• Lins, de Melo & Pugh (1977) ont prouvé que si $m = 3$ et $n = 1$ alors il n'y a au plus qu'un cycle limite. Ils ont de plus donné les conditions pour que ce cycle existe. Enfin ils ont conjecturé que si $G(x) = x$, il ne pouvait y avoir plus de $\left[\frac{m-1}{2}\right]$ cycles limites.

• Xianwu (1983) a prouvé la conjecture pour certains cas où $m = 4$ et $n = 1$.

• Coppel (1988) a prouvé que $H(2,2) = 1$.

• Dumortier & Li(1996) ont prouvé que $H(2,3) = 1$.

• Dumortier & Li(1997) ont prouvé que $H(3,2) = 1$.

D'autres chercheurs essayent de trouver des valeurs minimales à $H(m,n)$ en ne considérant que des cycles limites de petite amplitude qui seraient crées par bifurcation de Hopf autour d'un point d'équilibre. Ils trouvent ainsi un nombre maximum $\hat{H}(m,n)$ de cycles limites locaux.

• Zuppa (1981) et Blows & Lloyd (1984) ont prouvé que si $G(x) = x$ et si $F(x) = a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2k+1}x^{2k+1}$ alors l'équation (**0.6**) a au plus k cycles limites locaux. Si de plus on choisit les coefficients a_i tels que :

$$\begin{gathered} \|a_1\| \ll \|a_2\| \ll ... \ll \|a_{2k+1}\| \\ a_i a_{i+1} < 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq 2k \end{gathered}$$

alors il y a exactement k cycles limites locaux.

Les cycles limites locaux sont actuellement intensément étudiés par Lynch (1997) qui remplit petit à petit la table (**0.1**). Christopher & Lloyd (1998) ont démontré que cette table était symétrique ($\widehat{H}(n,m) = \widehat{H}(m,n)$). Gasull & Torregrosa (1997) semblent avoir amélioré les résultats de la table (**0.1**).

50	$\uparrow$	$\uparrow$	38														
49	24	33	38														
48	24	32	36														
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$														
13	6	9	10														
12	6	8	10														
11	5	7	8														
10	5	7	8														
9	4	6	8	9													
8	4	5	6	9													
7	3	5	6	8													
6	3	4	6	7													
5	2	3	4	6	6												
4	2	3	4	4	6	7	8	9	9								
3	1	2	2	4	4	6	6	6	8	8	8	10	10	$\ldots$	36	38	38
2	1	1	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	$\ldots$	32	33	$\rightarrow$
1	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	$\ldots$	24	24	$\rightarrow$
$\overset{\uparrow}{m}$ $n \rightarrow$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	$\ldots$	**48**	**49**	**50**

Tab.0.1– Nombre maximum de cycles limites locaux qui peuvent exister pour les équations (**0.6**) en fonction du degré m de $F(x)$ et du degré n de $G(x)$.

Ce mémoire comporte trois chapitres :

Le premier chapitre est un rappel des notions générales. Nous commençons par définir les systèmes dynamiques, les points d'équilibres et le système lin. Ensuite nous introduisons la notion d'un cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite d'un système planaire. Nous introduisons la définition de la stabilité des points d'équilibres en se basant sur les fonctions de Lyapunov.chapitre deux nous étudions deux méthode de pèrturbation la premier est méthode de lindsted est on appeliquons un exemple sur cette méthode. la deuxième est méthode des échelles de temps multiples est on on appeliquons un exemple sur cette méthode.dans le troisième chapitre nous intéressons à l'étude du nombre de cycles limites on utilisont la méthode de moyene de premier ordre .

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Systèmes dynamiques, points critiques

Définition 1.1.1 : Un système dynamique sur $\mathbb{R}^n$ est une application :

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, telle que :

• $U(.,x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ est continue.

• $U(t,.) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue.

• $U(0,x) = x$.

• $U(t+s,x) = U(t,U(s,x))$ pour $t,s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$.

Exemple

Soit le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}^+, \ x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

où A est une matrice constante.

La solution de (1.1) est :

$$x(t) = e^{tA} x_0$$

Le système (1.1) engendre un système dynamique, car l'application :

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

qui à tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$ associe :

$$U(t, x) = e^{tA} x$$

vérifie les quatre propriétés précédentes.

Définition 1.1.2 : Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.2}$$

On appelle point critique ou point d'équilibre du système (1.2), le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$f(x_0) = 0$$

Définition 1.1.3 : Considérons le système (1.2)

Le système :

$$\dot{x} = Ax$$

où

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right) = Df(x_0), 1 \leq i, j \leq n$$

et

$$f(x_0) = 0$$

est appelé linéarisation de (1.2) en x_0.

Définition 1.1.4 : On appelle point critique hyperbolique de (1.2), le point x_0 telle que A n'a aucune valeur propre avec une partie réelle nulle.

1.2 Classification des points d'équilibre

Cas des systèmes linéaires

considérons le système linéaire :

$$\dot{x} = Ax \tag{1.3}$$

où $x = (x_1, ..., x_n)$ et A une matrice constante inversible. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de A.

Définition 1.2.1 :

· Si les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont réelles et du même signe, la solution $x = 0$ est appelée *noeud*.

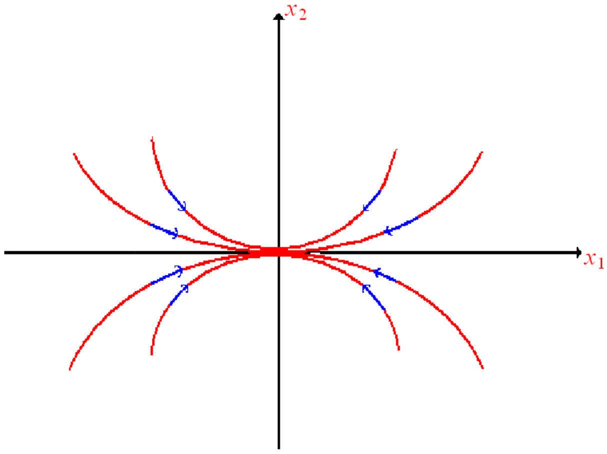


Fig 1.1 Noeud stable (n=2).

· Si les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont réelles, non nulles et de signe différent, la solution $x = 0$ est appelée *selle*.

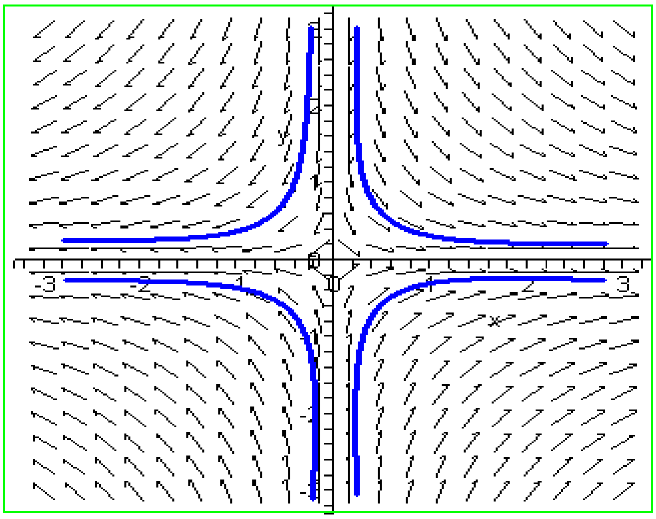


Fig 1.2- point selle (n=2).

$\cdot$ Si les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont complexes avec $\mathrm{Im}(\lambda_i) \neq 0$, $i = 1, ..., n$. La solution $x = 0$ est appelée *foyer*.

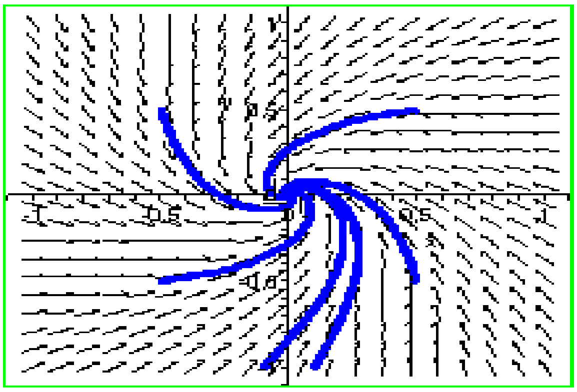


Fig 1.3- Foyer stable (n=2).

$\cdot$ Si les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont complexes avec $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$ et $\mathrm{Im}(\lambda_i) \neq 0$, $i = 1, ..., n$.

La solution $x = 0$ est appelée *centre*.

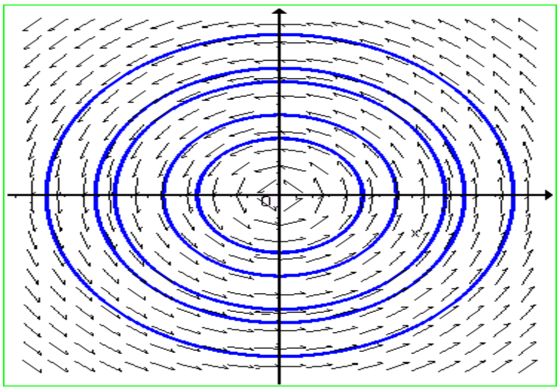


Fig 1.4- Centre (n=2).

Cas des systèmes non linéaires

Considérons maintenant le système non-linéaire :

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.4}$$

$x = (x_1, ..., x_n)$, $f = (f_1, ..., f_n)$

Théorème 1.1 : Si x_0 est un point d'équilibre hyperbolique de (1.4), alors il existe un voisinage de ce point dans lequel le système $\dot{x} = f(x)$ est *topologiquement équivalent* à son linéarisé $\dot{x} = Ax$.

1.3 Portrait de phase et cycles limites

Définition 1.3.1 : Soit le système planaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \tag{1.5}$$

où P, Q sont des polynômes en x et y. les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.5) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelés orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentés dans le plan (x, y) s'appelle portrait de phase, et le plan (x, y) est appelé plan de phase.

Définition 1.3.2 : Une solution périodique du système (1.5) est une solution telle que :

$$(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t)) \text{ pour } T > 0$$

A toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace des phases.

Définition 1.3.3 : Un cycle limite du système (1.5) est une orbite fermée isolée, c'est à dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.

Définition 1.3.4 : L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable x sur le cycle limite.

1.4 Stabilité :

Soit le système des équations :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

On suppose que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité des solutions.

Définitions : Une solution $\Phi(t)$ du système (1.6) telle que $\Phi(t_0) = \Phi_0$ est dite stable au sens de Lyapunov si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tel que toute solution $x(t)$ de (1.6) dont la valeur initiale $x(t_0)$ vérifie

$$\|x(t_0) - \Phi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \Phi(t)\| < \varepsilon, \ \forall t \geq t_0,$$

si en plus de cette définition on a :

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t) - \Phi(t)\| = 0$$

alors la solution est dite asymptotiquement stable.

Quand $\Phi(t) = 0$ la définition devient :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tel que toute solution $x(t)$ de (1.6) dont la valeur initiale $x(t_0)$ vérifie

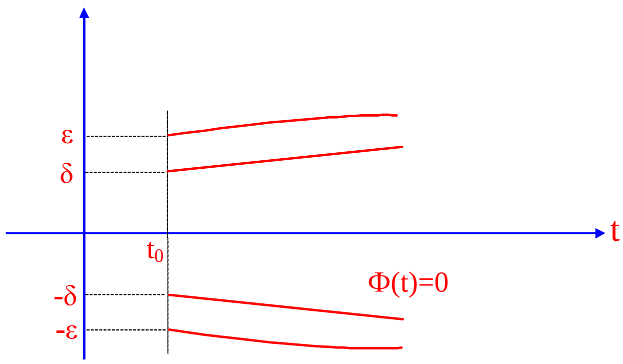
$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \ \forall t \geq t_0,$$

si en plus

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t)\| = 0,$$

alors $\Phi(t) = 0$ est asymptotiquement stable.

Pour $n = 1$ on a :



L'étude de la stabilité de la solution $\Phi(t)$ peut être ramenée à celle de la solution nulle $y = 0$ d'un système (Analogue) au système (1.8).

En effet : posons $y(t) = x(t) - \Phi(t)$ où $y(t)$ est la nouvelle fonction inconnue.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} + \frac{d\Phi(t)}{dt} = f(t, y + \Phi)$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t, y + \Phi) - f(t, \Phi) \\ &= g(t, y) \end{aligned}$$

On voit bien que $y \equiv 0$ est une solution de ce système.

1.4.1 Méthode des fonctions de Lyapunov

Soit $v(x_1, ..., x_n)$ une fonction différentiable.

Soit le système autonome :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, ..., x_n) \ i = 1, ..., n \tag{1.7}$$

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x) \tag{1.8}$$

si $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ satisfait (1.7).

Théorème 1 : Si pour le système (1.7) ; il existe une fonction $v(x_1, ..., x_n)$ de signe défini positif (ou négatif) telle que $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x_1, ..., x_n)$ est une fonction semi définie négative (ou positive) ou identiquement nulle alors le point d'équilibre $(0, ..., 0)$ est stable au sens de Lyapunov.

$v(x_1, ..., x_n)$ est dite fonction de Lyapunov.

Chapitre 2

Méthode de perturbation régulière

2.1 Idée de base

On utilisans la méthode de perturbation pour chercher une solution approché a une équation $(E\varepsilon)$ dépend d'un paramètre ε, sachant que la solution correspondant a la valeur $\varepsilon = 0$ est connu exactement.

Exemple

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases} ;\ x(0) = y(0) = 1 \tag{2.1}$$

Après une petite perturbation ce système devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + \varepsilon y^2 \\ \dot{y} = x - 2y + \varepsilon x^2 \end{cases} ;\ x(0) = y(0) = 1 \tag{2.2}$$

où ε est un petite paramètre ; $0 < \varepsilon \ll 1$ puisque ε est un petit paramètre l'idée de base de la théorie des perturbation est de trouver la solution de l'équation (2.2) sous la forme :

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \varepsilon^3 x_3 + ... \tag{2.3}$$

On substituions (2.3) dans (2.2) on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_0 + \varepsilon\dot{x}_1 + \varepsilon^2\dot{x}_2 + ... = -2x_0 - 2\varepsilon x_1 - 2\varepsilon^2 x_2 + y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + ... \\ +\varepsilon(y_0^2 + \varepsilon^2 y_1^2 + 2\varepsilon y_0 y_1 + \ 2\varepsilon^2 y_0 y_2 + ...) \\ \dot{y}_0 + \varepsilon\dot{y}_1 + \varepsilon^2\dot{y}_2 + ... = -2y_0 - 2\varepsilon y_1 - 2\varepsilon^2 y_2 + x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + ... \\ +\varepsilon(x_0^2 + \varepsilon^2 x_1^2 + 2\varepsilon x_0 x_1 + \ 2\varepsilon^2 x_0 x_2 + ...) \\ x_0(0) + \varepsilon x_1(0) + \varepsilon^2 x_2(0) + ... = y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \varepsilon^2 y_2(0) + ... = 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

les équations (2.4) peut être considérée comme un polynôme en ε d'où on a les systèmes suivante :

à l'ordre ε^0 on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = -2x_0 + y_0 \\ \dot{y}_0 = x_0 - 2y_0 \end{cases} ;\ x_0(0) = y_0(0) = 1 \tag{2.5}$$

à l'ordre ε^1 on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + y_1 + y_0^2 \\ \dot{y}_1 = x_1 - 2y_1 + x_0^2 \end{cases} ;\ x_1(0) = y_1(0) = 0 \tag{2.6}$$

à l'ordre ε^2 on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -2x_2 + y_2 + 2y_0 y_1 \\ \dot{y}_2 = x_2 - 2y_2 + 2x_0 x_1 \end{cases} ;\ x_2(0) = y_2(0) = 0 \tag{2.7}$$

On va trouver la solution de système(2.5) :

on écrivons le système comme un forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

on a :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La solution de système et sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

telle que : P matrice inverse et λ sont les valeures propre de A.

On calculons les valeures propre de la matrice A et la matrice P

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 2)^2 - 1 = 0$$

alore :

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -3\,;\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Alore on trouvons la solutions de systéme suivant :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-t) & 0 \\ 0 & \exp(-3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \exp(-t) & \exp(-3t) \\ \exp(-t) & \exp(-3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)\exp(-t) + \frac{1}{2}(c_1 - c_2)\exp(-3t) \\ y_0 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)\exp(-t) - \frac{1}{2}(c_1 - c_2)\exp(-3t) \end{cases} ;\ x_0(0) = y_0(0) = 1$$

donc la solution de système (2.5) est :

$$\begin{cases} x_0(t) = \exp(-t) \\ y_0(t) = \exp(-t) \end{cases} . \tag{2.9}$$

On calculonss la solutions de système (2.6)

on écrivons le système comme un forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \exp(-2t) \\ \exp(-2t) \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

alore la solution du système (2.10) est sous la forme :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)\exp(-t) + \frac{1}{2}(c_1 - c_2)\exp(-3t) + A\exp(-2t) \\ y_1 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)\exp(-t) - \frac{1}{2}(c_1 - c_2)\exp(-3t) + B\exp(-2t) \end{cases} \; ; \; x_1(0) = y_1(0) = 0$$

donc la solution de système (2.10) est :

$$\begin{cases} x_1(t) = \exp(-t) + \exp(-2t) \\ y_1(t) = \exp(-t) + \exp(-2t) \end{cases}. \tag{2.11}$$

On calculons la solution de système (2.7),on écrivons sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \exp(-2t)\exp(-3t) \\ \exp(-2t)\exp(-3t) \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

alore la solution de système (2.12) est sous la forme :

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)\exp(-t) + \frac{1}{2}(c_1 - c_2)\exp(-3t) \\ \qquad +A_1\exp(-2t) + (B_1 t + \bar{B}_1)\exp(-3t) \\ y_2 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)\exp(-t) - \frac{1}{2}(c_1 - c_2)\exp(-3t) \\ \qquad +A_2\exp(-2t) + (B_2 t + \bar{B}_2)\exp(-3t) \end{cases} \; ; \; x_2(0) = y_2(0) = 0$$

Donc la solution de (2.12) est :

$$\begin{cases} x_2(t) = \frac{1}{2}\exp(-t) - \exp(-2t) + \frac{1}{2}\exp(-3t) \\ y_2(t) = \frac{1}{2}\exp(-t) - \exp(-2t) + \frac{1}{2}\exp(-3t) \end{cases} \tag{2.13}$$

D'après $(2.9), (2.11), (2.13)$ la solution de système (2.2) est :

$$\begin{cases} x(t,\varepsilon) = \exp(-t) + \varepsilon(\exp(-t) + \exp(-2t)) + +\varepsilon^2(\frac{1}{2}\exp(-t) - \exp(-2t) + \frac{1}{2}\exp(-3t)) + ... \\ y(t,\varepsilon) = \exp(-t) + \varepsilon(\exp(-t) + \exp(-2t)) + \varepsilon^2(\frac{1}{2}\exp(-t) - \exp(-2t) + \frac{1}{2}\exp(-3t)) + ... \end{cases}.$$

2.2 méthode de lindsted

Terme séculaires :

Si on prend le développpement de $\sin((1+\varepsilon)t) = \sin(t) + \varepsilon t\cos(t) - \frac{\varepsilon^2 t^2}{2}\sin(t) + ...$

Si on retientun nombre fini du terme, on obtient une fonction qui est périodique et non bornèe quand $t \to 0$.

les termes : $\begin{cases} t^n \sin(t) \\ t^n \cos(t) \end{cases}$ s'appellent terme séculaires, ils dèteruisent la période une idée pour éviter les terme sèculaire et donnè par lindsted .

La méthode de lindsted s'applique aux èquations de la forme

$\ddot{x} + x + \varepsilon F(x,\dot{x}) = 0$ telleque $0 < \varepsilon \ll 1.$

la base de la méthode de lindsted consiste a introduire une transformation de la variable indépendant ;Cette transformation ne permet d'éviter les terme séculaires dans les solutions sous la forme de série de perturbation.

Exemple :

Soit l'équations de duffing :

$$\ddot{x} + x = \varepsilon x^3;\ x(0) = k,\ \dot{x}(0) = 0 \tag{2.14}$$

posons $\tau = wt$ on obtient :

$$w^2 \frac{dx^2}{d\tau^2} + x = \varepsilon x^3;\ x(0) = k,\ \dot{x}(0) = 0$$

oú $x = x(\tau)$ on pose :

$$\begin{aligned} x(\tau) &= x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + ... \\ w &= 1 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + ... \end{aligned}$$

et les conditions initiale :

$$\begin{cases} x_1(0) = x_2(0) = ... = x_n(0) = 0 \\ x_0(0) = k \\ \dot{x}_0(0) = \dot{x}_1(0) = ... = \dot{x}_n(0) = 0 \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} & (1 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + ...)^2 (\ddot{x}_0 + \varepsilon \ddot{x}_1 + \varepsilon^2 \ddot{x}_2 + ...) + (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + ...) \\ = \; & \varepsilon (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + ...)^3. \end{aligned}$$

En identifiont les termes de même puissances de ε on obtient :
à l'ordre ε^0 on obtient :

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0; \; x_0(0) = k, \; \dot{x}_0(0) = 0 \tag{2.15}$$

à l'ordre ε^1 on obtient :

$$\ddot{x}_1 + x_1 = x_0^3 - 2w_1 \ddot{x}_0; \; x_1(0) = 0, \; \dot{x}_1(0) = 0 \tag{2.16}$$

à l'ordre ε^2 on obtient :

$$\ddot{x}_2 + x_2 = 3x_0^2 x_1 - 2w_1 \ddot{x}_1 - (w_1 + 2w_2)\ddot{x}_0; \; x_2(0) = 0, \; \dot{x}_2(0) = 0 \tag{2.17}$$

Pour l'équation (2.15) on a :

$$x_0(\tau) = k\cos(\tau)$$

Pour l'équation (2.16) on a :

$$\ddot{x}_1 + x_1 = k^3\cos^3(\tau) + 2w_1 k\cos(\tau)$$

elle s'ècrite en utilisant

$$\cos^3(\tau) = \frac{1}{4}(3\cos(\tau) + \cos(3\tau))$$

donc

$$\ddot{x}_1 + x_1 = (\frac{3}{4}k^3 + 2w_1 k)\cos(\tau) + \frac{k^3}{4}\cos(3\tau)).$$

En èvite les terme sèculaire, en posant $\frac{3}{4}k^3 + 2w_1 k = 0$ donc $w_1 = -\frac{3}{8}k^2$ l'équations devient :

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \frac{k^3}{4}\cos(3\tau);\ x_1(0) = 0,\ \dot{x}_1(0) = 0 \tag{2.18}$$

Donc la solutions de (2.18) :

$$x_1(\tau) = \frac{k^3}{32}(\cos(\tau) - \cos(3\tau))$$

Pour l'équation (2.17) on a :

$$\ddot{x}_2 + x_2 = \cos(\tau)(\frac{21}{128}k^5 + 2w_2 k) + TNS \tag{2.19}$$

où TNS : termes non séculaires

elle s'ècrite en utilisant

$$\cos^2(\tau) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\tau));\ \cos(2\tau)\cos(3\tau) = \frac{1}{2}(\cos(\tau) + \cos(5\tau))$$

De nouveau pour éliminer le terme séculaire , on pose $w_2 = \frac{-21}{256}k^4$
l'équation (2.19) devient : $\ddot{x}_2 + x_2 = TNS$
on trouve :

$$x_2 = \frac{k^5}{1024}(23\cos(\tau) - 24\cos(3\tau) + \cos(5\tau))$$

on peut continue ce processus .
ainsi :

$$x(t) = k\cos(3\tau) + \frac{\varepsilon k^3}{32}(\cos(wt) - \cos(3wt)) + ...$$

où $w = 1 - 3\frac{\varepsilon}{8}k^2 + ...$

Remareque :

Cette méthode ne donne pas toutes les solutions de l'équations, car nous avons supposè que chaque terme x_3 ètant périodique, la méthode de lindsted donne seulement les solutions périodique.

Remareque :

En gènèral pour une valeur quelconque K il n'existe de solutions périodique .

2.3 méthode des échelles de temps multiples

Soit l'équation

$$\ddot{x} + x = -2\varepsilon\dot{x} \tag{2.20}$$

telle que $0 < \varepsilon \ll 1$.
Posons :

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \varepsilon^3 x_3 + ...$$

on obtient après substituons dans (2.20)
à l'ordre ε^0 on obtient :

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0 \tag{2.21}$$

à l'ordre ε^1 on obtient :

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -2x_0 \tag{2.22}$$

à l'ordre ε^2 on obtient :

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -2x_1 \tag{2.23}$$

La solution de l'équation (2.21) est :

$$x_0(\tau) = A\cos(t + \phi)$$

où A et ϕ sont constants arbitraires
La solution de l'équations (2.22) est :

$$x_1(t) = -At\cos(t + \phi).$$

La solution de l'équations (2.23) est :

$$x_2(t) = \frac{1}{2}At^2\cos(t + \phi) + \frac{1}{2}At\sin(t + \phi).$$

Donc

$$x(t) = A\cos(t + \phi) - \varepsilon At\cos(t + \phi) + \frac{1}{2}\varepsilon^2(t^2\cos(t + \phi) + t\sin(t + \phi))$$

pour approximer, il faut $t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, ...$, soit petit, plus clairement que :

$$x(t) = a\exp(-\varepsilon t)\cos(\sqrt{1 - \varepsilon^2}t + \phi)$$

et on a :

$$\exp(-\varepsilon t) = 1 - \varepsilon t + \frac{1}{2}\varepsilon^2 t^2 + ...$$

Au voisinage de zèro on a :

$$\cos(\sqrt{1-\varepsilon^2}t + \phi) = \cos(t+\phi) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 t \sin(t+\phi) + ...$$

C-a-d :

$$f(\varepsilon) = f(0) + \varepsilon f^{'}(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(0) + ...$$

d'où on a :

$$x = a\cos(t+\phi) - \varepsilon a t \cos(t+\phi) - \frac{1}{2}\varepsilon^2 a(t^2\cos(t+\phi) + t\sin(t+\phi)) + ...$$

Quand ont tronque $\exp(-\varepsilon t)$,c'est εt qui est la variable indépendant et non t ;quand on tronque $\cos(\sqrt{1-\varepsilon^2}t + \phi)$ c'est $\varepsilon^2 t$ qui est variable indèpendant et non t c'est pour cela que nous déffinissons les nouvelles variable , appelles "multiple time scales" comme suit :

$T_0 = \varepsilon^0 t = t$

$T_1 = \varepsilon^1 t$

$T_2 = \varepsilon^2 t$

...

$T_n = \varepsilon^n t$

$T_{n+1} = \varepsilon^{n+1} t$

où T_{n+1} est toujour inférieur a T_n.

Pour utiliser ces variable dans l'équation $\ddot{x} + x = -2\varepsilon\dot{x}$ introduisons $x = x(T_0, T_1, ...)$ de plusieurs variable

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial T_0}\frac{dT_0}{dt} + \frac{\partial x}{\partial T_1}\frac{dT_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial T_2}\frac{dT_2}{dt} + ... \\
\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial x}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial x}{\partial T_2} + ...
\end{aligned}$$

Posons :

$$D = \frac{d}{dt}\ ,\ \ D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$$

on écrite :

$$D = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + ...$$

L'équation (2.20) s'ècrite :

$$D^2 x + x = -2\varepsilon D x$$

où encor :

$$(D^2 + 1)x = -2\varepsilon D x$$

$$\left[(D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + ...)^2 + 1\right][x_0 + \varepsilon x_1 + ...] = -2\varepsilon(D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + ...)(x_0 + \varepsilon x_1 + ...)$$

$$(D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + ...)^2 + 1 = D_0^2 + 1 + 2\varepsilon D_0 D_1 + ...$$

En identifions les coefficients d'une même puissance de ε, on a :
à l'ordre ε^0 on obtient :

$$(D_0^2 + 1)x_0 = 0 \tag{2.24}$$

à l'ordre ε^1 on obtient :

$$(D_0^2 + 1)x_1 = -2\varepsilon D_0 D_1 x_0 - 2D_0 x_0 \tag{2.25}$$

De l'équation(2.24) on a :

$$x(t) = A\cos(T_0 + \phi)$$

où A et ϕ sont non constante ; donc $A = A(t_1, t_2, ...)$, $\phi = \phi(t_1, t_2, ...)$.
L'équation(2.25) s'ècrite :

$$
\begin{aligned}
(D_0^2+1)x_1 &= 2D_1\left[A\sin(T_0+\phi)\right]+2A\sin(T_0+\phi)\\
&= 2\left[D_1A+A\right]\sin(T_0+\phi)+2A\sin(T_0+\phi)+2AD_1\phi\cos(T_0+\phi)
\end{aligned}
$$

pour supprimes les termes séculaire posons :

$D_1A+A=0\ \ ;\ D_1\phi=0\quad c.a.d\quad \frac{\partial A}{\partial T_1}+A=0;\quad \frac{\partial\phi}{\partial T_1}=0.$

d'où $A=a\exp(-T_1)\ \ et\ \ \phi=c$ .avec a et c dependent de $T_0,T_3,...$,a et c sont priss pour des constant à cette échelle de tempe.

On a alore :

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0(t)+\varepsilon x_1(t)\\
&= A\cos(T_0+\phi)+...\\
&= a\exp(-T_1)\cos(T_0+\phi)
\end{aligned}
$$

d'où

$$x(t)=a\exp(-\varepsilon t)\cos(t+c)$$

exemple :

Soit l'équation de diffing :

$$\ddot{x}+x=-\varepsilon x^3 \tag{2.26}$$

et on a :

$T_0=\varepsilon^0t=t$

$T_1=\varepsilon^1t$

$T_2=\varepsilon^2t$

...

$T_n=\varepsilon^nt$

$T_{n+1} = \varepsilon^{n+1} t.$

On pose :

$$D = \frac{d}{dt} \ , \ D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$$

Substituion $D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + ...$ dans (2.26) on obtient :

$$(D_0^2 + 1 + 2\varepsilon D_0 D_1 + ...)(x_0 + \varepsilon x_1 + ...) = -\varepsilon (x_0 + \varepsilon x_1 + ...)^3.$$

En identifions les coefficients d'une même puissance de ε, on a :
à l'ordre ε^0 on obtient :

$$(D_0^2 + 1) x_0 = 0 \tag{2.27}$$

à l'ordre ε^1 on obtient :

$$(D_0^2 + 1) x_1 = -2 D_0 D_1 x_0 - x_0^3 \tag{2.28}$$

L'équation (2.27) nous donne :

$$x_0(t) = A \cos(T_0 + \phi)$$

où A et ϕ sont non constante ; donc $A = A(t_1, t_2, ...)$, $\phi = \phi(t_1, t_2, ...)$.
L'équation (2.28) devient :

$$\begin{aligned}
(D_0^2 + 1) x_1 &= 2 D_0 D_1 \left[A \cos(T_0 + \phi) \right] - A^3 \cos^3(T_0 + \phi) \\
&= 2 D_1 [A \sin(T_0 + \phi)] - A^3 \cos^3(T_0 + \phi) \\
&= 2[A' \sin(T_0 + \phi) + A\phi' \cos(T_0 + \phi)] - A^3 \cos^3(T_0 + \phi) \\
&= 2[A' \sin(T_0 + \phi) + A\phi' \cos(T_0 + \phi)] - \frac{A^3}{4}[3 \cos(T_0 + \phi) + \cos[3(T_0 + \phi)]] \\
&= 2A' \sin(T_0 + \phi) + (2A\phi' + 3\frac{A^3}{4}) \cos(T_0 + \phi) + TNS
\end{aligned}$$

oú TNS est termes non séculaire.

pour supprimes les termes séculaire ; posons :$A' = 0$ et $\phi' = \frac{3}{8}A^2$

alore $A = const = a$ et $\phi = \frac{3}{8}a^2T_1 + const$

où $constant$ est une fonction de $T_2, T_3, ...$

ainsi :

$$x(t) = a\cos(t + \frac{3}{8}a^2T_1 + const).$$

Chapitre 3

Méthode de la moyenne de premier ordre

Théorème. *Considérons les deux équations suivantes*

$$\dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 G(t, x, \varepsilon), \qquad x(0) = x_0, \tag{3.1}$$

et

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y), \qquad y(0) = x_0. \tag{3.2}$$

où $x, y, x_0 \in D$ *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$, $t \in [0, \infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, F *et* G *sont périodiques de période* T *par rapport a la variable* t, *et* $f^0(y)$ *est la fonction moyennée de* $F(t, y)$, *c.à.d.,*

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t, y) dt.$$

On suppose :

(i) F, $\partial F/\partial x$, $\partial^2 F/\partial x^2$, G *et* $\partial G/\partial x$ *sont définies, continues et bornées par une constante indépendante de* ε *dans* $[0, \infty) \times D$ *et* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

(ii) T *est une constante indépendante de* ε.

(iii) $y(t)$ *appartient à* D *sur le temps échelle* $1/\varepsilon$. *Alors les propriétés suivantes sont*

vérifiées. (a) Sur le temps échelle $1/\varepsilon$ on a $x(t) - y(t) = O(\varepsilon)$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. (b) Si p est un point d'équilibre du système moyennée (3.4), tel que

$$\left.\frac{\partial f^0}{\partial y}\right|_{y=p} \neq 0, \tag{3.3}$$

alors il existe une solution T-périodique $\phi(t,\varepsilon)$ de l'équation (3.3) proche de p tel que $\phi(0,\varepsilon) \longrightarrow p$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. (c) Si (3.5) est négatif, alors la solution périodique correspondante $\phi(t,\varepsilon)$ de l'équation (3.4) dans l'espace (t,x) est asymptotiquement stable pour ε suffisamment petit. Si (3.5) est positif, alors $\phi(t,\varepsilon)$ est instable.

Preuve. (voir [4]).

Remarque. Si $\left.\frac{\partial f^0}{\partial y}\right|_{y=p} < 0$ alors le cycle limite d'amplitude $y = p$ est stable et si $\left.\frac{\partial f^0}{\partial y}\right|_{y=p} > 0$ alors le cycle limite d'amplitude $y = p$ est instable.

Exemple.

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(x^4 - \frac{5}{2}x + \frac{4}{8})y \end{cases} \tag{3.4}$$

On pose :

$$x = r\cos\theta;\ y = r\sin\theta.$$

on obtient

$$x^2 + y^2 = r^2;\ \frac{y}{x} = \tan\theta.$$

donc :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2};\ \theta = \arctan\frac{y}{x}.$$

on a :

$$\dot{r} = \cos\theta\dot{x} + \sin\theta\dot{y} \text{ et } \dot{\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta\dot{y} - \sin\theta\dot{x}).$$

On substituions (3.4) dans $\dot{r}$ et $\dot{\theta}$ on trouvons :

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \varepsilon r \sin^2\theta(r^4\cos^4\theta - \frac{5}{2}r^2\cos^2\theta + \frac{4}{8}),\\
\dot{\theta} &= -1 + \varepsilon\cos\theta\sin\theta(r^4\cos^4\theta - \frac{5}{2}r^2\cos^2\theta + \frac{4}{8}).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} &= \frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r\sin^2\theta(r^4\cos^4\theta + \frac{5}{2}r^2\cos^2\theta + \frac{4}{8})}{-1+\varepsilon\cos\theta\sin\theta(r^4\cos^4\theta - \frac{5}{2}r^2\cos^2\theta + \frac{4}{8})}\\
&= \varepsilon F(r,\theta) + \varepsilon^2 G(\varepsilon, r, \theta),
\end{aligned}$$

où

$$F(r,\theta) = -r\sin^2\theta(r^4\cos^4\theta + \frac{5}{2}r^2\cos^2\theta + \frac{4}{8}).$$

on a :

$$\begin{aligned}
f^0(r) &= \frac{1}{T}\int_0^T F(r,\theta)d\theta\\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\sin^2\theta(r^4\cos^4\theta + \frac{5}{2}r^2\cos^2\theta + \frac{4}{8})d\theta\\
&= -\frac{r}{16}(r^4 - 5r^2 + 4).
\end{aligned}$$

Donc :

$$f^0(r) = -\frac{1}{16}r(r^2-4)(r^2-1).$$

donc existe deux cycles limites d'amplitudes 2 et 1 respectivement.

On a :

$$\frac{df^0(r)}{dr} = -\frac{5}{16}r^4 + \frac{15}{16}r^2 - \frac{4}{16}.$$

Pour $r = 2$, $\frac{df^0(2)}{dr} = -\frac{3}{2} < 0$, donc le cycle limite d'amplitude 2 est stable et pour $r = 1$, $\frac{df^0(1)}{dr} = \frac{3}{8} > 0$, donc le cycle limite d'amplitude 1 est instable.

conclusion

La méthode de pertubations régulières ne donne pas les fonctions périodique bornés dans ce cas nous utilisons la méthode des perturbations singulieres comme la méthode de la moyenne pour chercher les fonctions périodique.

Bibliographie

[1] **Alsholm, P**. [1992], Existence of limit cycles for generalized Liénard equations, J. Math. Anal. Appl. 171, 242.

[2] **BOUATTIA YASSINE** & **MAKHLOUF AMAR.** Limit cycles of Lienard systems. Prépublication du laboratoire de mathématiques appliquées. Université de Annaba. (2005).

[3] **Thése doctorat BOUATTIA YASSINE** Recherche des cycles limites des centres non linéaires perturbés UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

[4] **B.Coll, A.Gasull, R.Prohens**. Bifurcation of limit cycles from two families of centers. Dyn Contin Discrete Impuls Syst 2005 ;12 :275–88.