République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP et Analyse numérique**

Par :

M[elle]. FAIZI Rima

Intitulé

Existence de la solution non triviale d'un problème aux limites fractionnaire

Dirigé par : Prof. ELLAGGOUNE Fateh

Devant le jury

PRESIDENT	Mr. H. Guebbia	MCA	Univ - Guelma
RAPPORTEUR	Mr. F. Ellaggoune	Prof	Univ - Guelma
EXAMINATEUR	Mr. M. Karboua	MCA	Univ - Guelma

Session Juin 2019

Remerciements

Je remercie avant tout Allah qui m'a donné la force et la volonté pour achever ce travail.

Je tiens à remercier mon encadreur le professeure Ellaggoune Fateh, pour son soutien, ses conseils et son aide précieuse, merci infiniment.

Je tiens également à remercier les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance et d'examiner notre travail.

Je remercie du fond de mon coeur, mes parents qui m'ont soutenu et encouragé tout au long de mes études.

De même remercie ma famille et mes amies.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à l'ensemble de mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.

Table des matières

ملخص **iii**

Résumé **iv**

Abstract **v**

Introduction générale **vi**

1 Intégration et dérivation fractionnaire **1**
1.1 Outils de base 1
1.1.1 Fonction Gamma 1
1.1.2 Fonction Bêta 2
1.2 Intégration fractionnaire 4
1.3 Dérivation fractionnaire 7
1.3.1 Approche de Riemann-Liouville 8
1.3.2 Approche de Caputo 11
1.4 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville 14
1.5 Propriétés générales des dérivées fractionnaires 15
1.5.1 Linéarité (voir [13], p90) 15
1.5.2 La règle de Leibniz (voir [13], p91) 15

2 Quelques résultats de la théorie du point fixe **17**
2.1 Théorème du point fixe du type Banach 17
2.1.1 Extension du principe de l'application contractante . . 19
2.2 Le théorème du point fixe de type Brouwer [18] 21
2.3 Théorème du point fixe de type Schauder [18] 23
2.4 Théorème du point fixe de Krasnoselskii [12][14] 25

3 Existence de la solution d'un problème aux limites fractionnaire 27
3.1 Présentation du problème 27
3.2 Résultat d'existence 28
3.3 Exemples 38

ملخص

الهدف من هذه المذكرة يكمن في دراسة وجود الحلول لمسألة ذات الشروط الحدية الكسرية تنطوي على مشتقات كسور لريمان-ليوفيل على اليسار وكابوتو على اليمين وذلك باستخدام نظرية النقطة الصامدة لكراسنوسلسكي.

الكلمات المفتاحية:

المعادلة التكاملية، المشتق الكسري ، التكامل الجزئي ، نظرية النقطةالثابتة ، وجود الحل.

Résumé

Le but de ce mémoire est l'étude de l'existence de la solution non triviale d'un problème aux limites fractionnaire impliquant des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville à gauche et de Caputo à droite en utilisant le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

Mots clés : Équation intégrale, dérivée fractionnaire, théorème du point fixe, existence de la solution.

Abstract

The purpose of this thesis is the study of the existence of the nontrivial solution for a boundary value problem involving both left Riemann-Liouville and right Caputo fractional derivatives using the Krasnoselskii fixed-point theorem.

Keywords : Integral equation, fractional derivative, fixed point theorem, existence of solution.

Introduction générale

Le concept de calcul fractionnaire est une généralisation de la dérivation et de l'intégration ordinaire à un ordre arbitraire réel ou même complexe.

Les dérivées d'ordres non entiers sont de nombreux domaines par exemple en probabilité, viscoélasticité, économique, mécanique et en biologie, etc. Un intérêt particulaire pour la dérivation fractionnaire est liée à la modélisation mécanique des gommes et des caoutchoucs. En bref toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations antérieures notamment à caractère viscoélastique. En effet, la dérivation fractionnaire s'y introduit naturellement.

Bien que la théorie de la dérivation fractionnaire ne soit pas nouveau, ces origines remontaient à la fin du $17^{ème}$ siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\dfrac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la $n^{ème}$ dérivée d'une fonction f (où $n \in \mathbb{N}$). Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital, l'Hôpital a répondu :

Que signifie $\dfrac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?

Cette lettre de l'Hôpital écrite en 30 Septembre 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

A cette époque il n'y avait presque pas d'applications pratiques de cette théorie, et c'est pour cette raison qu'elle a été considéré comme une abstraite ne contenant que des manipulations mathématiques peu utiles. Le passage des formulations mathématiques pures à des applications a commencé à voir le jour depuis les années 1990, où les équations différentielles fractionnaires sont apparues dans plusieurs domaines.

Récemment, l'équation différentielle fractionnaire impliquant des dérivés fractionnaires à gauche et à droit étaient de plus en plus au centre d'intérêt et de nombreux articles sont consacrés à ce sujet [1-3,7,8,9].

Les auteurs dans [3] ont étudié une équation de type linéaire d'Euler-Lagrange

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}_{b^-}\,{}^{C}D^{\alpha}_{a^+}u(t) - \omega^{2\alpha}u(t) = f(t),\ a \leq t \leq b,\ 0 < \alpha \leq 1, \\ u(a) = \xi_a,\ u(b) = \xi_b. \end{cases}$$

Ils ont transformé le problème en une équation intégrale, puis ils ont présenté une analyse numérique.

Dans [8], les auteurs ont étudié un problème de valeur limite impliquant à la fois les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville à gauche et de Caputo à droite au moyen de théorème du point fixe de Krasnoselskii.

Ce mémoire se décompose de trois chapitres partagés de la manière suivante :

Premier chapitre : Dans ce chapitre, nous avons énoncé tous les outils de base du calcul fractionnaire que nous aurons besoin par la suite.

Deuxième chapitre : s'étend à rappeler quelques résultats fondamentaux sur le principe de l'application contractante ainsi que les théorèmes célèbres du point fixe.

Troisième chapitre : dans le troisième chapitre de ce mémoire nous présentons les résultats obtenus dans [9], c'est à dire l'étude de la solution nontriviale du problème fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} -{}^{C}D^{\alpha}_{1^-}D^{\beta}_{0^+}u(t) + f\left(t, u(t)\right) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ \lim_{t \to 0^+} t^{1-\beta}u(t) = u(1) = -u(\eta) \end{cases}, \qquad (P)$$

où $0 < \alpha,\ \beta < 1,\ 1 < \alpha + \beta < 2,\ 0 < \eta < 1,\ {}^{C}D^{\alpha}_{1^-}$ et $D^{\beta}_{0^+}$ désignent la dérivé fractionnaire au sens de Caputo à droite et de Riemann-Liouville à gauche respectivement.

Enfin, ce mémoire est clôturé par une bibliographie.

Chapitre 1

Intégration et dérivation fractionnaire

Dans ce chapitre, on introduira l'opérateur d'intégration fractionnaire ainsi que les deux définitions les plus utilisées des dérivées fractionnaires à savoir celle de Riemann-Liouville et de Caputo, en donnant les propriétés les plus importantes de ces notions.

1.1 Outils de base

Dans cette partie, nous introduisons les fonctions Gamma et Bêta, qui seront utilisées ultérieurement. Ces deux fonctions jouent un rôle très important dans la théorie de calcul fractionnaire.

1.1.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est une fonction qui prolonge naturellement le factoriel aux nombres réels et même aux nombres complexes.

Définition 1.1 ([13])

Pour $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $\operatorname{Re}(z) > 0$, *on définit la fonction Gamma par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{1.1}$$

Propriétés 1.1 ([13])

1. Une propriété importante de la fonction Gamma est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \ \textit{avec} \ \operatorname{Re}(z) > 0. \tag{1.2}$$

Qu'on peut démontrer par une intégration par partie :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

2. La fonction Gamma d'Euler généralise le factoriel :

$$\Gamma(n+1) = n!, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

3. La fonction Gamma peut être représentée par la limite :

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)...(z+n)}, \ \textit{avec} \ \operatorname{Re}(z) > 0. \tag{1.4}$$

Démonstration (voir [13], p4)

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.2 ([13])
La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour les nombres complexes z et w par :

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \ \operatorname{Re}(z) > 0, \ \operatorname{Re}(w) > 0. \tag{1.5}$$

Propriétés 1.2

1. La fonction Bêta est symétrique :

$$B(z,w) = B(w,z), \ \operatorname{Re}(z) > 0, \ \operatorname{Re}(w) > 0. \tag{1.6}$$

Qu'on peut démontrer par le changement de variable $\mu = 1 - t$:

$$B(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,dt=\int_0^1 (1-\mu)^{z-1}\mu^{w-1}d\mu=B(w,z).$$

2. La fonction Bêta peut être donnée par :

$$B(z,w)=B(z+1,w)+B(z,w+1),\ \operatorname{Re}(z)>0,\ \operatorname{Re}(w)>0. \tag{1.7}$$

En effet

$$\begin{aligned}
B(z,w) &= \int_0^1 [t+(1-t)]\,t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,dt \\
&= \int_0^1 t^{z}(1-t)^{w-1}\,dt+\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w}\,dt \\
&= B(z+1,w)+B(z,w+1).
\end{aligned}$$

Lien entre la fonction Gamma et la fonction Bêta

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\,\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)},\ \operatorname{Re}(z)>0,\ \operatorname{Re}(w)>0. \tag{1.8}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(w) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{z-1}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-y}y^{w-1}dy\right) \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x-y}x^{z-1}y^{w-1}dxdy.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable, $y=\mu-x$ pour $0\leq x\leq\mu$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{\mu} e^{-\mu}x^{z-1}(\mu-x)^{w-1}\,dxd\mu \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\mu}\left(\int_0^{\mu} x^{z-1}(\mu-x)^{w-1}\,dx\right)d\mu.
\end{aligned}$$

Pour évaluer l'intégrale relative à dx, on pose le changement de variable $x = t\mu$ on obtient que :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\mu} x^{z-1} (\mu - x)^{w-1} \, dx &= \int_0^{1} (t\mu)^{z-1} (\mu - t\mu)^{w-1} \mu dt \\
&= \mu^{z+w-1} \int_0^{1} t^{z-1} (1-t)^{w-1} \, dt \\
&= \mu^{z+w-1} B(z,w).
\end{aligned}$$

Par la suite

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = B(z,w) \int_0^{+\infty} e^{-\mu} \mu^{z+w-1} d\mu = B(z,w)\Gamma(z+w).$$

Ce qui donne le résultat désiré.

1.2 Intégration fractionnaire

Intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a,b]$

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. Une primitive de f est donnée par :

$$\left(I^{(1)} f\right)(x) = \int_a^x f(t) \, dt. \tag{1.9}$$

Pour une primitive seconde de f on aura :

$$\left(I^{(2)} f\right)(x) = \int_a^x \left(\int_a^s f(t) \, dt \right) ds. \tag{1.10}$$

Le théorème de Fubini sous ramène cette intégrale double à une intégrale simple

$$\left(I^{(2)} f\right)(x) = \int_a^x (x-t) \, f(t) dt.$$

Par récurrence on peut montre que :

$$\left(I^{(n)}f\right)(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{a}^{x}(x-t)^{(n-1)}f(t)dt,\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma, Riemann remarque que le seconde membre pourrait être équivalent quand n prenant une valeur non-entière, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suite :

Définition 1.3 ([11]**)**

Si $f\in\mathbb{C}[a,b]$, $\alpha\in\mathbb{R}^{+}$ *l'intégrale*

$$I_{a^{+}}^{(\alpha)}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{a}^{x}(x-t)^{(\alpha-1)}f(t)dt,\ \textit{telle que } a\in]-\infty,+\infty[\tag{1.12}$$

est appelée intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre α, *et l'intégrale*

$$I_{b-}^{(\alpha)}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{x}^{b}(t-x)^{(\alpha-1)}f(t)dt,\ \textit{telle que } b\in]-\infty,+\infty[\tag{1.13}$$

est appelée intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville d'ordre α.

Remarque 1.1

Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement l'intégrale fractionnaire à gauche.

Exemple 1.1

Considérons la fonction $f(x)=(x-a)^{\beta}$ alors :

$$I^{(\alpha)}(x-a)^{\beta}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{a}^{x}(x-t)^{(\alpha-1)}(t-a)^{\beta}dt.$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement de variable $t=a+(x-a)\mu$, d'où :

$$I^{(\alpha)}(x-a)^{\beta}=\frac{(x-a)^{(\alpha+\beta)}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{1}(1-\mu)^{(\alpha-1)}\mu^{\beta}d\mu.$$

En utilisant la formule (1.5) et la propriété (1.8) , on arrive à :

$$\begin{aligned} I^{(\alpha)}\left(x-a\right)^{\beta} &= \frac{\left(x-a\right)^{(\alpha+\beta)}}{\Gamma\left(\alpha\right)}B(\alpha,\beta+1) \\ &= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}\left(x-a\right)^{(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

En particulier, lorsque $\alpha=0.5$, $\beta=1$ et $a=0$, on aura :

$$I^{0.5}\left(x\right)=\frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(2.5\right)}\left(x\right)^{(1.5)}=\frac{\sqrt{x^3}}{\Gamma(2.5)}.$$

Proposition 1.1 ([5])

Soit $f\in C^n([a,b])$, *pour* x *fixé, l'application* $\alpha\to\left(I^{\alpha}f\right)(x)$ *définie pour* $\mathrm{Re}(\alpha)>0$ *est holomorphe et se prolonge analytiquement au domaine* $\mathrm{Re}\left(\alpha\right)>-n$.

Démonstration

Montrons l'existence du prolongement analytique. Dans (1.12) procédons par une intégration par partie

$$\begin{aligned} \left(I^{\alpha}f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left[\frac{-(x-t)^{\alpha}}{\alpha}f(t)\right]_{t=a}^{t=x}+\frac{1}{\alpha\Gamma(a)}\int_a^x\left(x-t\right)^{\alpha}f'(t)dt \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}f(a)+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^x\left(x-t\right)^{\alpha}f'(t)dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\left(I^{\alpha}f\right)(x)=\frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}f(a)+\left(I^{\alpha+1}f'\right)(x). \tag{1.14}$$

Il est clair que le membre de droite de l'égalité précédente est holomorphe dans le domaine $\mathrm{Re}(\alpha)>-1$. A présent le résultat final découle d'une simple itération de (1.14)

$$\left(I^{\alpha}f\right)(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma\left(\alpha+1+j\right)}f^{(j)}(a)+\left(I^{\alpha+n}\ f^{(n)}\right)(x) \tag{1.15}$$

formule qui constitue l'expression du prolongement analytique.

Théorème 1.1 ([5])
Pour $f \in C[a,b]$*, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe*

$$I^{(\alpha)}\left(I^{(\beta)}f(x)\right) = I^{(\alpha+\beta)}f(x), \text{ pour } \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0. \tag{1.16}$$

Démonstration
La démonstration s'obtient par calcul direct en utilisant la fonction Bêta d'Euler. En effet :

$$\begin{aligned} I^{\alpha}(I^{\beta}f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}(I_a^{\beta}f(s))ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\int_a^s (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}f(t)dtds \end{aligned}$$

or $f \in C[a,b]$, d'après Fubini :

$$I^{\alpha}(I^{\beta}f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\left[\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}\, ds\right]dt$$

et par le changement de variable $s = t + (x-t)\mu$, on obtient :

$$\begin{aligned} I^{\alpha}(I^{\beta}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\left[(x-t)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-\mu)^{\alpha-1}\mu^{\beta-1}d\mu\right]dt \\ &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}dt \\ &= \left(I^{(\alpha+\beta)}f\right)(x). \end{aligned}$$

1.3 Dérivation fractionnaire

Différentes approches ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation aux ordres non entiers.

1.3.1 Approche de Riemann-Liouville

Définition 1.4 ([11])

Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$ et $n-1 \leq p < n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, alors la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à gauche de la fonction f d'ordre p est :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^p_{a^+} f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I^{n-p}_{a^+} f(x)\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-p-1} f(t)dt, \ \forall x \in [a,b], \end{aligned} \tag{1.17}$$

et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à droite de la fonction f d'ordre p est :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^p_{b-} f(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \left(I^{n-p}_{b^-} f(x)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (t-x)^{n-p-1} f(t)dt, \ \forall x \in [a,b]. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Remarque 1.2

Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à gauche.

Exemples 1.2

1- La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville.

Si $p > 0$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante $f(x) = c$ n'est pas nulle, sa valeur est :

$$ {}^{RL}D^p c = \frac{c}{\Gamma(1-p)} (x-a)^{-p}. $$

2- La dérivée fractionnaire de $f(x) = (x-a)^\beta$ au sens de Riemann-Liouville.

Soit $p > 0$ tel que $n-1 < p < n$ avec $\beta > -1$

$$ {}^{RL}D^p f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left[I_a^{(n-p)} (x-a)^\beta \right] $$

d'après le résultat de l'exemple 1.1, on obtient :

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D^p f(x) &= \frac{d^n}{dx^n}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-p+\beta+1)}(x-a)^{(\beta+n-p)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-p+\beta+1)}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^{(\beta+n-p)}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-p+\beta+1)}\frac{\Gamma(\beta+n-p+1)}{\Gamma(\beta-p+1)}(x-a)^{\beta-p} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-p+1)}(x-a)^{\beta-p}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la formule

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^\lambda = \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)(x-a)^{\lambda-n} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-n+1)}(x-a)^{\lambda-n}. \tag{1.19}$$

En particulier, lorsque $p = 0.5$, $\beta = 0.5$ et $a = 0$, on obtient :

$${}^{RL}D^{0.5}x^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5).$$

Proposition 1.2
Si f est de classe C^n alors en faisant des intégrations par parties et des dérivations répétées, on obtient :

$${}^{RL}D^p f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}f^{(k)}(a) + \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_a^x (x-t)^{n-p-1}f^n(t)dt. \tag{1.20}$$

Proposition 1.3 (Propriété d'interpolation)
Soit $f(x)$ une fonction définie sur $[a,b]$ et soit $p \in [0,1)$. Soit $f(x)$ a un dérivé continu d'ordre suffisant et ${}^{RL}D^p f(x)$ existe, alors :

$$\lim_{p\to 1} {}^{RL}D^p f(x) = f'(x). \tag{1.21}$$

$$\lim_{p\to 0} {}^{RL}D^p f(x) = f(x). \tag{1.22}$$

Démonstration (voir [13])

Nous pouvons généraliser les égalités ci-dessus dans la proposition 1.3 pour tout nombre positif p, on obtient :

$$\lim_{p\to n} {}^{RL}D^p f(x) = f^n(x). \tag{1.23}$$

$$\lim_{p\to n-1} {}^{RL}D^p f(x) = f^{n-1}(x). \tag{1.24}$$

Où $n-1<p<n$, $n\in\mathbb{N}$ et avec la même condition de proposition 1.3.

Propriétés 1.3 ([11])

Nous présentons maintenant quelques propriétés de l'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville.

1. **Composition avec l'intégrale fractionnaire**

Soit $p>0$ et $f\in L^1([a,b])$, alors on a :

$$^{RL}D^p I^p f(x) = f(x), \forall x\in[a,b]. \tag{1.25}$$

Ce qui signifie que l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville du même ordre.

2. **Composition avec les dérivées d'ordre entier**

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, si les dérivées fractionnaires $^{RL}D^p f$ et $^{RL}D^{p+n} f$ existent, alors :

$$\frac{d^n}{dx^n}\left({}^{RL}D^p f(x)\right) = {}^{RL}D^{n+p} f(x), \ \forall x\in[a,b], \tag{1.26}$$

mais, on a :

$$^{RL}D^p\left(\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right) = {}^{RL}D^{n+p} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)}, \ \forall x\in[a,b]. \tag{1.27}$$

On déduit alors que la différentiation fractionnaire et la différentiation conventionnelle (d'ordre entière) ne commutent que si : $f^{(k)}(a)=0$, pour tout $k=0,1,2,...,n-1$.

3. **Composition avec les dérivées fractionnaires**

Pour $f\in L^1([a,b])$, $n-1\le p<n$ et $m-1\le q<m$ alors :

$$^{RL}D^p\left({}^{RL}D^q f(x)\right) = {}^{RL}D^{p+q} f(x) - \sum_{k=1}^{m}\left[{}^{RL}D^{q-k} f(a)\right]\frac{(x-a)^{-p-k}}{\Gamma(1-p-k)}, \ \forall x\in[a,b], \tag{1.28}$$

et

$$^{RL}D^{q}\left(^{RL}D^{p}f(x)\right) = ^{RL}D^{p+q}f\left(x\right) - \sum_{k=1}^{n}\left[^{RL}D^{p-k}f\left(a\right)\right]\frac{\left(x-a\right)^{-q-k}}{\Gamma\left(1-q-k\right)},\ \forall x\in\left[a,b\right]. \tag{1.29}$$

Par suite les deux opérateurs de dérivations fractionnaires $^{RL}D^p$ et $^{RL}D^q$ ne commutent que si $p = q$, $\left[^{RL}D^{q-k}f\left(a\right)\right] = 0$ pour tout $k = 1, 2..., m$ et $\left[^{RL}D^{p-k}f\left(a\right)\right] = 0$ pour tout $k = 1, 2..., n$.

Les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville ont certains inconvénients lorsque on essaie de modéliser des phénomènes du monde réel. Les problèmes étudiés exigent une définition des dérivées fractionnaires permettant l'utilisation des conditions initiales physiquement interprétables incluant $y(0), y^{'}(0)$, etc. Ces défaillances ont conduit vers la fin des années soixante, à une définition alternative des dérivées fractionnaires qui satisfait ces demandes, elle a été introduite par Caputo.

1.3.2 Approche de Caputo

Définition 1.5 ([11])

Soit $p > 0$ avec $n-1 \leq p < n$, $(n \in \mathbb{N}^{*})$ et f est une fonction telle que $\frac{d^n}{dx^n}f \in L^1\left([a,b]\right)$.

La dérivée fractionnaire d'ordre p au sens de Caputo à gauche et à droite de la fonction f sont définis respectivement par :

$$\begin{aligned} ^{C}D_{a^{+}}^{p}f(x) &= I_{a^{+}}^{(n-p)}\left(\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(n-p\right)}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-p-1}f^{(n)}(t)dt,\ \forall x\in\left[a,b\right], \end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned} ^{C}D_{b^{-}}^{p}f(x) &= \left(-1\right)^{n} I_{b^{-}}^{(n-p)}\left(\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right) \\ &= \frac{\left(-1\right)^{n}}{\Gamma\left(n-p\right)}\int_{x}^{b}(t-x)^{n-p-1}f^{(n)}(t)dt,\ \forall x\in\left[a,b\right]. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Remarque 1.3

Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement la dérivée fractionnaire au sens de Caputo à gauche.

Exemples 1.3

1- La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Caputo

La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :

$$^{C}D^{p} = 0.$$

2- La dérivée $f(x) = (x-a)^{\beta}$au sens de Caputo

Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\beta > n-1$.

On a d'abord d'après (1.19) :

$$\frac{d^n}{dt^n}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}(x-a)^{\beta-n}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
^{C}D^{p}(x-a)^{\beta} &= I_a^{(n-p)}\left[\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{\beta}\right] \\
^{C}D^{p}(x-a)^{\beta} &= I_a^{(n-p)}\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}(x-a)^{\beta-n}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} I_a^{(n-p)}\left[(x-a)^{\beta-n}\right]
\end{aligned}$$

d'après le résultat de l'exemple 1.1, on obtient :

$$^{C}D^{p}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-p)}(x-a)^{\beta-p}.$$

En particulier, lorsque $p = 0.5$, $\beta = 0.5$ et $a = 0$, on obtient :

$$^{C}D^{0.5}x^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5).$$

Proposition 1.4 (Propriété d'interpolation)

Soit $p \in [0,1]$, soit $f(x)$ une fonction avec une seconde dérivée continue dans $[a,T]$ pour chaque $T > a$ et ${}^{C}Df(x)$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{p\to 1} {}^{C}D^{p}f(x) &= f^{'}(x). && (1.32)\\ \lim_{p\to 0} {}^{C}D^{p}f(x) &= f(x) - f(a). && (1.33) \end{aligned}$$

Démonstration (voir [10])

Nous pouvons généraliser les égalités ci-dessus dans la proposition 1.4 pour tout nombre positif p, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{p\to n} {}^{C}D^{p}f(x) &= f^{n}(x). && (1.34)\\ \lim_{p\to n-1} {}^{C}D^{p}f(x) &= f^{n-1}(x) - f^{n-1}(0). && (1.35) \end{aligned}$$

Où $n-1 < p < n$, $n \in \mathbb{N}$ et avec la même condition de proposition 1.4.

Propriétés 1.4 ([10],[13])

Nous présentons maintenant quelques propriétés de l'opérateur de dérivation au sens de Caputo.

1. **Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire**

Soit $p > 0$.Si $f \in C^{n}([a,b])$ alors, on a :

$$ {}^{C}D^{p}I^{p}f(x) = f(x),\ \forall x \in [a,b] \tag{1.36}$$

et

$$ I^{p}\ {}^{C}D^{p}f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k}}{k!},\ \forall x \in [a,b]. \tag{1.37}$$

Alors l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire du même ordre , mais il n'est pas un inverse à droite.

2. **Composition avec les dérivées d'ordre entier**

Pour $m \in \mathbb{N}$, si les dérivées fractionnaires ${}^{C}D^{p}f$ et ${}^{C}D^{p+n}f$ existent où $n-1 < p < n$ $(n \in \mathbb{N})$, alors :

$$ {}^{C}D^{p}\left(\frac{d^{m}}{dx^{m}}f(x)\right) = f(x) \neq \frac{d^{m}}{dx^{m}}\left({}^{C}D^{p}f(x)\right). \tag{1.38}$$

On déduit alors que la différentiation fractionnaire au sens de Caputo et la différentiation conventionnelle (d'ordre entière) ne commutent pas.

3. **Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville**

Soit $p \geq 0$ avec $n-1 \leq p < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que f une fonction telle que ${}^{C}D^{p}$et ${}^{RL}D^{p}$ existent, alors :

$$ {}^{C}D^{p} f(x) = {}^{RL} D^{p} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}. \tag{1.39} $$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, .., n-1$, on aura :

$$ {}^{C}D^{p} f(x) = {}^{RL} D^{p} f(x). $$

Corollaire 1.1
Si $0 \leq p,\ q \leq 1$ avec $p + q \leq 1$ et f de classe C^1, alors :

$$ \left({}^{C}D^{p} \circ {}^{C}D^{q}\right) f = {}^{C}D^{p+q} f = \left({}^{C}D^{q} \circ {}^{C}D^{p}\right) f. \tag{1.40} $$

Démonstration

$$ \begin{aligned} \left({}^{C}D^{p} \circ {}^{C}D^{q}\right) f &= \left(I^{1-p} \circ \frac{d}{dx} \circ I^{1-q} \circ \frac{d}{dx}\right) f \\ &= \left(I^{1-p-q} \circ I^{q} \circ \frac{d}{dx} \circ I^{1-q} \circ \frac{d}{dx}\right) f \\ &= \left(I^{1-p-q} \circ {}^{C}D^{1-q} \circ I^{1-q} \circ \frac{d}{dx}\right) f \\ &= \left(I^{1-p-q} \circ \frac{d}{dx}\right) f \\ &= {}^{C}D^{p+q} f. \end{aligned} $$

1.4 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville

L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier.

On résume dans ce tableau :

Propriété	Riemann-Liouville	Caputo
Représentation	${}^{RL}D^p f(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(I^{n-p}f(x)\right)$	${}^{C}D^p f(x) = I^{(n-p)}\left(\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right)$
Interpolation	$\lim_{p\to n} {}^{RL}D^p f(x) = f^n(x)$ $\lim_{p\to n-1} {}^{RL}D^p f(x) = f^{n-1}(x)$	$\lim_{p\to n} {}^{C}D^p f(x) = f^n(x)$ $\lim_{p\to n-1} {}^{C}D^p f(x) = f^{n-1}(x) - f^{n-1}(0)$
Linéarité	${}^{RL}D^p(\lambda f(x) + g(x)) =$ $\lambda^{RL}D^p f(x) +^{RL} D^p g(x)$	${}^{C}D^p(\lambda f(x) + g(x)) =$ $\lambda^{C}D^p f(x) +^{C} D^p g(x)$
Non commutative	$\frac{d^n}{dx^n}\left({}^{RL}D^p f(x)\right) =^{RL} D^{n+p} f(x)$ $\neq^{RL} D^p\left(\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right)$	${}^{C}D^p\left(\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right) =^{C} D^{n+p} f(x)$ $\neq \frac{d^n}{dx^n}\left({}^{C}D^p f(x)\right)$
$f(x) = c$	${}^{RL}D^p f(x) = \frac{c}{\Gamma(1-p)}(x-a)^{-p}$	${}^{C}D^p f(x) = 0$

1.5 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

1.5.1 Linéarité (voir [13], p90)

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire

$$D^p(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D^p f(x) + \mu D^p g(x), \tag{1.41}$$

où D^p désigne n'importe quelle approche de dérivation considérée dans ce mémoire.

1.5.2 La règle de Leibniz (voir [13], p91)

Pour n entier on a :

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x).$$

La généralisation de cette formule, nous donne :

$$D^p(f(x)\, g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} f^{(k)}(x) D^{(p-k)} g(x) + R_n^p(x), \tag{1.42}$$

où $n \geq p+1$ et

$$R_n^p(x) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)} \int_a^x (x-t)^{-p-1} g(t)dt \int_t^x f^{(n+1)}(\mu)(t-\mu)^n d\mu$$

avec $\lim_{n\to+\infty} R_n^p(x) = 0$.

Si f et g avec toutes ses dérivées sont continues dans $[a.x]$, alors la formule (1.42) devient :

$$D^p(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} f^{(k)}(x) D^{(p-k)}g(x). \tag{1.43}$$

Où D^p est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Chapitre 2

Quelques résultats de la théorie du point fixe

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats de la théorie du point fixe. A savoir le théorème du point fixe de Banach, celui de Brouwer et Schauder et enfin nous abordons le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

2.1 Théorème du point fixe du type Banach

Le théorème du point fixe de Banach, connu aussi sous le nom du principe de contraction de Banach, est apparu pour la première fois en 1922 dans le cadre de la résolution d'une équation intégrale.

Définition 2.1 ([17])

Soit E un espace de Banach et $T : E \to E$ une application, un élément x de E est dit point fixe de T si $Tx = x$.

Définition 2.2

Soit (M, d) un espace métrique complet et l'application $T : M \to M$, on dit que T est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive k telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments x, y de M, l'inégalité

$$d\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right) \leq k\left(d\left(x, y\right)\right). \tag{2.1}$$

Si $k \leq 1$, l'application T est appelée non expansive.

Si $k < 1$, l'application T est appelée contraction.

Théorème 2.1 (Théorème du point fixe de Banach(1922)) [15]

Soit (M,d) un espace métrique complet et soit $T : M \to M$ une application contractante avec la constante de contraction k, alors T a un unique point fixe $x \in M$. De plus on a :

$$\begin{aligned} \text{si } x_0 &\in M \text{ et } x_n = T(x_{n-1}), \\ \lim_{n\to\infty} x_n &= x \text{ et } d(x_n, x) \leq k^n (1-k)^{-1} d(x_1, x_0) \quad n \geq 1, \end{aligned} \tag{2.2}$$

x étant le point fixe de T.

Démonstration

1-L'existence :

Soit $y \in M$ un point arbitraire dans M. Considérons la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ donnée par :

$$\begin{cases} x_0 = y \\ x_n = T(x_{n-1}), \ n > 1. \end{cases}$$

On doit prouver que (x_n) est une suite de Cauchy dans M.

Pour $m < n$, on utilise l'inégalité triangulaire :

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + ... + d(x_{n-1}, x_n).$$

Puisque T est une contraction, on a :

$$d(x_p, x_{p+1}) = d(Tx_{p-1}, Tx_p) \leq k \ d(x_{p-1}, x_p), \text{ pour } p \geq 1.$$

En répétant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \left(k^m + k^{m+1} + ... + k^{n-1}\right) d(x_0, x_1) \\ &\leq k^m \left(1 + k + ... + k^{n-m-1}\right) d(x_0, x_1) \\ &\leq k^m \left(\frac{1-k^{n-m}}{1-k}\right) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{k^m}{1-k} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

donc

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_0, x_1) < \epsilon.$$

Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans M qui est complet, on déduit qu'elle est converge dans M, ie

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Par ailleurs puisque T est continue, on a :

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T(x_{n-1}) = T\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = Tx.$$

Donc x est un point fixe de T, i.e $Tx = x$.

2-L'unicité

Supposons $x = Tx$ et $y = Ty$ alors :

$$d(x,y) = d(Tx,Ty) \leq kd(x,y) \tag{2.3}$$

ce qui implique que $d(x,y) = 0$, i.e $x = y$ (puisque $k < 1$).

Remarque 2.1

Si T est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées T^p est une contraction, alors T a un seul point fixe.

En effet, soit x l'unique point fixe de T^p on a :

$T^p(T(x)) = T(T^p(x)) = T(x)$ ce qui convient à dire que $T(x)$ est aussi un point fixe de T^p et grâce à l'unicité $T(x) = x$.

Ce résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.

2.1.1 Extension du principe de l'application contractante

En premier temps on va voir une extension qui consiste à prendre un autre type de contraction et qui donne le même résultat que celui de Banach.

Extension de Boyd et Wong

Elle consiste à remplacer la contraction par la φ-contraction dont nous donnons la définition :

Définition 2.3

Soit M un espace métrique et T une application de M dans M. On dit que T est une φ-contraction, s'il existe une application φ semi-continue supérieurement de $[0,\infty)$ dans $[0,\infty)$ avec $\varphi(r) < r$ pour $r > 0$ telle que :

$$\forall\ x,y \in M,\ d\left(T(x),T(y)\right) \leq \varphi\left(d(x,y)\right). \tag{2.4}$$

Le résultat suivant va assurer l'existence d'un unique point fixe pour une telle application :

Théorème 2.2 ([4])

Toute φ–contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique.

Remarque 2.2

La contraction est un cas particulier de la φ-contraction (il suffit de prendre $\varphi(r) = kr$ pour tout $r \geq 0$, $0 \leq k < 1$).

On va voir que si on remplace l'hypothèse que T soit une contraction par l'hypothèse plus faible qu'est :

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y) \tag{2.5}$$

T n'a pas de point fixe. En effet nous avons l'exemple suivant :

Exemple

Considérons l'espace suivant : $M = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ muni de la métrique $d(x, y) = |x - y|$, $\forall x, y \in M$.

Soit $T : M \to M$ tel que : $T(x) = x + \dfrac{1}{x}$ alors :

$$d(T(x), T(y)) = |T(x) - T(y)| = |x - y| . \frac{xy - 1}{xy} < |x - y| = d(x, y)$$

donc

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y), \forall x, y \in M.$$

On vérifie que T ne possède aucun point fixe dans M.

En effet : $T(x) = x \Longrightarrow \dfrac{1}{x} = 0$ impossible.

Extension d'Edelstein

Théorème 2.3 ([6])

Soit (M, d) un espace métrique complet et $T : M \to M$ une application telle que :

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y), \ \forall x, y \in M, \ x \neq y. \tag{2.6}$$

Supposons qu'il existe $y \in M$ tel que la suite $\{x_n\}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 = y \\ x_n = T(x_{n-1}), \ n \geq 1 \end{cases}$$

possède une sous suite $\{x_{nj}\}$ *avec* $\lim_{j\to\infty} x_{nj} = x \in M$*. Alors* x *est l'unique point fixe de* T*.*

Remarque 2.3

L'application $T : M \to M$ avec la propriété (2.6) ne donne pas le même résultat que le théorème 2.2 mais si M est compact alors T avec la propriété (2.6) est une φ-contraction.

- Le résultat précédent (d'Edelstein) a une importante conséquence qu'est :

Théorème 2.4

Soit (M, d) *un espace métrique complet et* $T : M \to M$ *une application telle que :*

$$d\left(T\left(x\right), T(y)\right) < d(x, y),\ \forall x, y \in M,\ x \neq y \tag{2.7}$$

En plus, supposons que $T : M \to K$ *où* K *est un sous ensemble compact de* M*, alors* T *possède un unique point fixe dans* M*.*

2.2 Le théorème du point fixe de type Brouwer [18]

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Il existe plusieurs formes de ce théorème selon le contexte d'utilisation. La plus simple est parfois donnée sous la forme suivante :

Dans le plan : Toute application T continue du disque fermé dans lui-même admet au moins un point fixe. Il est possible de généraliser à toute dimension finie.

Dans un espace euclidien : Toute application T continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe.

Il peut encore être un peu plus général :

Convexe compact : Toute application T continue d'un convexe compact K d'un espace euclidien à valeur dans K admet un point fixe.

a) Théorème de Brouwer en dimension un : On note $[a, b]$ le domaine de définition de T. L'application T est continue et à valeurs dans le même segment. Dire que cette application admet un point fixe, revient à dire que son graphe croise celui de l'application définie sur $[a, b]$, qui a x associe x.

Une démonstration n'est pas difficile à établir. Considérons l'application continue

$$Fx = Tx - x, \tag{2.8}$$

elle est positive en a, négative en b. Le théorème de Bolzano, qui est un cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires assure que l'application F possède un zéro dans $[a, b]$, ce zéro de F est un point fixe de T.

En dimension deux, un raisonnement intuitif permet de montrer que le résultat est probablement vrai. La démonstration est néanmoins plus délicate.

b) **Théorème de Brouwer en dimension deux :** Si K le domaine de définition de T est d'intérieur vide, c'est un segment. Sinon, K est semblable à une boule unité fermée. Le terme semblable signifie qu' il existe un homéomorphisme ϕ de la boule unité vers K, L'équation définissant le point fixe peut encore s'écrire :

Si $h = T \circ \phi,\ h(x) = x$. Autrement dit, on peut supposer que K est la boule unité fermée. On peut de plus choisir la norme de manière quelconque. Si on choisit celle qui associe la valeur absolue de la plus grande coordonnée, cela revient à dire que l'on peut choisir pour compact K, ensemble $[-1, 1] \times [-1, 1]$, sans perte de généralité.

Si l'on définit la fonction F comme suit :

$F : [-1, 1] \times [-1, 1] \to [-1, 1] \times [-1, 1]$

$$x \mapsto F(x) = h(x) - x. \tag{2.9}$$

Cela revient à montrer que la fonction F atteint le vecteur nul sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Si F_k, pour $k = 1, 2$, sont les deux fonctions coordonnées de F, cela revient à montrer l'existence d'un point x_0, telles que F_1 et F_2 admettent toutes deux pour zéro la valeur x_0.

La fonction F_1 est une fonction de $[-1, 1] \times [-1, 1]$ dans $[-1, 1]$. Sur $\{-1\} \times [-1, 1]$, elle est positive en revanche sur $\{1\} \times [-1, 1]$, elle est négative. Ceci laisse penser que la courbe de niveau 0 est une ligne qui part d'un point $[-1, 1] \times \{1\}$ pour finir sur un point de $[-1, 1] \times \{-1\}$.

Le même raisonnement appliquée à F_2 laisse penser que la courbe de niveau 0 est cette fois-ci une ligne qui part d'un point $\{-1\} \times [-1, 1]$ pour terminer sur un point de $\{1\} \times [-1, 1]$.

Intuitivement, il semble évident que ces deux lignes de niveaux doivent nécessairement se croiser et ce point de croisement est un point fixe de $T \circ \phi$.

Remarque 2.4

Il est important de voir que l'unicité n'est pas assurée par le théorème de Brouwer du fait que chaque point de K est un point fixe de l'application identité.

- Nous allons donner un résultat de Brouwer qu'on aura besoin dans la démonstration du théorème de Schauder :

Définition 2.4

On dit qu'un espace topologique a la propriété du point fixe si toute application continue $T : E \to E$ possède un point fixe. On note par B_n la boule unité fermée de E^n.

On a le résultat suivant :

Théorème 2.5

La boule B_n a la propriété du point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.3 Théorème du point fixe de type Schauder [18]

Ce théorème prolonge le théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. Il est établi en 1930.

Théorème 2.6

Soit K un sous ensemble non vide, compact et convexe d'un espace de Banach E et supposons $T : K \to K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.

Démonstration

Soit $T : K \to K$ une application continue. Comme K est compact, T est uniformément continue donc, si on fixe $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x,\ y \in K$,

on a

$$\|x - y\| \leq \delta \Longrightarrow \|T(x) - T(y)\| \leq \epsilon.$$

De plus, il existe un ensemble fini des points $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_i recouvrent K, ie $K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \delta)$.

Si on désigne $L := Vect(T(x_j))_{1 \leq j \leq p}$, alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie. Pour $1 \leq j \leq p$, on définit la fonction continue $\psi_j : E \to \mathbb{R}$ par :

$$\psi_j = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinon} \end{cases},$$

il est clair que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle dehors.

On a donc, pour tout $x \in K$, $\sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$, et donc on peut définir sur K les fonctions continues positives φ_j par :

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^{p} \psi_k(x)},$$

pour les quelles on a $\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$ pour tout $x \in K$.

Posant, pour $x \in K$,

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) T(x_j).$$

La fonction g est continue (car elle est la somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans K^* (car $g(x)$ est un barycentre des $T(x_j)$).

Si on prend la restriction $g_{/K^*} : K^* \to K^*$, (d'après théorème de Brouwer) g possède un point fixe $y \in K^*$.

De plus :

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - g(y) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) T(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) T(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) \left[T(y) - T(x_j) \right]. \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\|y - x_j\| < \delta$, et donc $\|T(y) - T(x_j)\| < \epsilon$.

Donc pour tout j :

$$\begin{aligned} \|T(y) - y\| &\leq \sum_{j=1}^{p} \|\varphi_j(y) \left[T(y) - T(x_j) \right] \| \\ &\leq \sum_{j=1}^{p} \epsilon \varphi_j(y) = \epsilon. \end{aligned}$$

Alors, pour tout entier m, on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que $\|T(y_m) - y_m\| < 2^{-m}$. Et puisque K est compact, de la suite (y_m) on peut extraire une sous-suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \in K$. Alors T étant continue, la suite $(T(y_{m_k}))$ converge vers $T(y^*)$, et on conclut que $T(y^*) = y^*$, i.e y^* est un point fixe de T sur K.

Théorème 2.7 (Théorème de Rothe)[15]

Soit X un espace normé, et K une partie convexe fermée de X. Alors toute application compacte et continue de K dans X telle que $T(\partial K) \subset K$ admet un point fixe.

Le résultat suivant est une autre conséquence du théorème de Schauder qui donne lieu à de nombreuses applications dans les équations aux dérivées partielles :

Théorème 2.8 ([15])

Soit T un opérateur compact de l'espace de Banach X dans lui-même. Supposons qu'il existe un réel $r > 0$ tel que l'égalité

$$u = \sigma T u \Longrightarrow ||u|| < r, \text{ où } u \in X \text{ et } \sigma \in [0,1], \tag{2.10}$$

alors T admet un point fixe dans $B(0, r)$.

- Le théorème de Schauder reste vrai dans le cas des espaces localement convexes, nous allons le confirmer par les théorèmes suivants (voir [15][16]) :

T**héorème 2.9 (Théorème de Tychonoff et Singball)**

Soit E un espace localement convexe, et K un compact convexe de E alors toute application continue de K dans K admet un point fixe.

Théorème 2.10

Soit E un espace localement convexe et séparé, K un fermé et convexe de E, alors toute application T continue de K dans K telle que $T(K)$ soit continue dans un compact de E admet un point fixe.

2.4 Théorème du point fixe de Krasnoselskii [12][14]

Nous donnons un théorème d'existence du point fixe concernant les applications de la forme $T = U + V$, où U une contraction et V est continue et compacte.

Théorème 2.11 (Krasnoselskii, 1958)

Soit X un espace de Banach, soit D un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe de X. Soient U, V deux applications de D dans X telles que :

1. *U est une contractante de constante k.*

2. *V est compact et continue.*
3. $\forall x, y \in D$, $Ux + Vy \in D$.

Alors il existe $x \in D$ tel que $Ux + Vx = x$.

Démonstration :

Soit y fixé dans D, comme U est une contraction, l'équation $x = Ux + Vy$ admet une solution unique x dans D.

On définit application

$$\begin{aligned} L &: D \to D \\ Ly &= x \\ Ly &= ULy + Vy, \; (y \in D). \end{aligned} \tag{2.11}$$

On a $LD \subset D$. On montre que L est compacte et continue et d'après le théorème de Schauder, on pourra conclure qu'il existe $y \in D$ tel que $Ly = y$, d'où $Uy + Vy = y$.

Soit y_n un point arbitraire de D, alors de (2.11) :

$$\begin{aligned} Ly_n &= ULy_n + Vy_n \\ Ly - Ly_n &= ULy - ULy_n + Vy - Vy_n \\ \|Ly - Ly_n\| &\leq \|ULy - ULy_n\| + \|Vy - Vy_n\| \end{aligned}$$

et puisque U est une contraction on a :

$$\begin{aligned} \|Ly - Ly_n\| &\leq k||Ly - Ly_n|| + \|Vy - Vy_n|| \\ &\leq \frac{1}{1-k}\|Vy - Vy_n\| \end{aligned} \tag{2.12}$$

d'où la continuité de L. Reste à montrer que LD est relativement compact. En effet, comme VD est relativement compact,

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists (1-k)\epsilon - \textit{réseau} \; Vy_1, \ldots, Vy_n$$

c'est-à-dire les boules

$$B(Vy_k, (1-k)\epsilon), 1 \leq k \leq n$$

telle que

$$VD \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(Vy_k, (1-k)\epsilon).$$

Alors de (2.12), $Ly_1, \ldots, Ly_n$ est un ε $-$*réseau* de LD.

Chapitre 3

Existence de la solution d'un problème aux limites fractionnaire

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence de la solution d'un problème au limites fractionnaire. Pour étudier ce problème, nous le transformons en une équation intégrale que nous écrivons comme la somme d'une contraction et d'un opérateur compact, puis nous appliquons le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

3.1 Présentation du problème

On considère le problème au limites fractionnaire (P) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} -{}^{C}D_{1^-}^{\alpha} D_{0^+}^{\beta} u(t) + f\left(t, u(t)\right) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ \lim_{t \to 0^+} t^{1-\beta} u(t) = u(1) = -u(\eta) \end{array} \right. , \qquad (P)$$

où $0 < \alpha$, $\beta < 1$, $1 < \alpha + \beta < 2$, $0 < \eta < 1$, ${}^{C}D_{1^-}^{\alpha}$ et $D_{0^+}^{\beta}$ désignent la dérivé fractionnaire au sens de Caputo à droite et de Riemann -Liouville à gauche respectivement.

3.2 Résultat d'existence

Nous commençons par résoudre le problème linéaire $(P1)$ correspondant :

$$\begin{cases} -{}^C D^{\alpha}_{1^-} D^{\beta}_{0^+} u(t) + y(t) = 0, \ 0 < t < 1 \\ \lim_{t\to 0^+} t^{1-\beta} u(t) = u(1) = -u(\eta). \end{cases} \tag{P1}$$

Lemme 3.1

Soit $y \in L^1(0,1)$ alors le problème linéaire $(P1)$ a une solution unique u qui satisfait l'équation intégrale

$$u(t) = \int_0^1 G(t,r)y(r)dr - \frac{t^{\beta-1}}{1+\eta^{\beta-1}} \int_0^1 G(\eta.r)y(r)dr + \left(-t^{\beta} + \frac{t^{\beta-1}\eta^{\beta}}{1+\eta^{\beta-1}}\right) \int_0^1 g(r)y(r)dr, \tag{3.1}$$

où

$$G(t.r) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \begin{cases} \int_0^r (t-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}ds, \ 0 \leq r \leq t \leq 1, \\ \int_0^t (t-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}ds, \ 0 \leq t \leq r \leq 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

$$g(r) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^r (1-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}ds. \tag{3.3}$$

Remarque 3.1

Nous allons donner les propriétés des dérivés fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo qu'on aura besoin dans la démonstration du ce lemme pour $0 < p < 1$:

$$I^p_{0^+} D^p_{0^+} f(t) = f(t) - ct^{p-1}. \tag{3.4}$$

$$I^{p}_{1^-} {}^C D^p_{1^-} f(t) = f(t) - c. \tag{3.5}$$

Démonstration

En appliquant l'opérateur $I^{\alpha}_{1^-}$ à l'équation de $(P1)$

$$I^{\alpha}_{1^-} \left[-{}^C D^{\alpha}_{1^-} D^{\beta}_{0^+} u(t) + y(t) \right] = 0$$

et d'après la propriété (3.5), on obtient :

$$-D^{\beta}_{0^+} u(t) + c_1 + I^{\alpha}_{1^-} y(t) = 0 \tag{3.6}$$

puis, on applique l'opérateur $I_{0^+}^{\beta}$ à l'équation (3.6)

$$I_{0^+}^{\beta}\left[-D_{0+}^{\beta}u(t)+c_1+I_{1^-}^{\alpha}y(t)\right]=0$$

il est claire que $I_{0^+}^{\beta}c=\dfrac{c_1t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}$ et d'après la propriété (3.4), on obtient :

$$u(t)=I_{0^+}^{\beta}I_{1^-}^{\alpha}y(t)+\frac{c_1t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}+c_2t^{\beta-1}. \tag{3.7}$$

En utilisant la condition $\lim_{t\to 0^+}t^{1-\beta}u(t)=u(1)$, on a d'une part

$$\lim_{t\to 0^+}t^{1-\beta}u(t)=\lim_{t\to 0^+}\left[t^{1-\beta}\left(I_{0^+}^{\beta}I_{1^-}^{\alpha}y(t)\right)+\frac{c_1t}{\Gamma(\beta+1)}+c_2\right]=c_2$$

d'autre part

$$u(1)=I_{0^+}^{\beta}I_{1^-}^{\alpha}y(1)+\frac{c_1}{\Gamma(\beta+1)}+c_2$$

donc, on conclue :

$$c_1=-\Gamma(\beta+1)I_{0^+}^{\beta}I_{1^-}^{\alpha}y(1).$$

En substituant c_1 dans (3.7), on obtient :

$$u(t)=I_{0^+}^{\beta}I_{1^-}^{\alpha}y(t)-t^{\beta}I_{0^+}^{\beta}I_{1^-}^{\alpha}y(1)+c_2t^{\beta-1}. \tag{3.8}$$

Maintenant à partir de la condition $u(1)=-u(\eta)$ et de même raisonnement, on trouve :

$$c_2=\frac{1}{1+\eta^{\beta-1}}\left(-I_{0^+}^{\beta}I_{1^-}^{\alpha}y(\eta)+\eta^{\beta}I_{0+}^{\beta}I_{1^-}^{\alpha}y(1)\right),$$

par conséquent (3.8) devient :

$$u(t)=I_{0^+}^{\beta}I_{1^-}^{\alpha}y(t)+\left(-t^{\beta}+\frac{t^{\beta-1}\eta^{\beta}}{1+\eta^{\beta-1}}\right)I_{0^+}^{\beta}I_{1^-}^{\alpha}y(1)-\frac{t^{\beta-1}}{1+\eta^{\beta-1}}I_{0^+}^{\beta}I_{1^-}^{\alpha}y(\eta),$$

qui peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\Bigg(\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\left(\int_s^1 (r-s)^{\alpha-1}y(r)dr\right)ds \\
&+\left(-t^{\beta}+\frac{t^{\beta-1}\eta^{\beta}}{1+\eta^{\beta-1}}\right)\int_0^1 (1-s)^{\beta-1}\left(\int_s^1 (r-s)^{\alpha-1}y(r)dr\right)ds \\
&-\frac{t^{\beta-1}}{1+\eta^{\beta-1}}\int_0^{\eta} (\eta-s)^{\beta-1}\left(\int_s^1 (r-s)^{\alpha-1}y(r)dr\right)ds\Bigg).
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\Bigg(\int_0^t \left(\int_0^r (t-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}ds\right)y(r)dr \\
&+\int_t^1 \left(\int_0^t (t-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}ds\right)y(r)dr \\
&-\frac{t^{\beta}(1-t\eta+\eta^{1-\beta})}{(1+\eta^{1-\beta})}\int_0^1 \left(\int_0^r (1-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}ds\right)y(r)dr \\
&-\frac{t^{\beta-1}}{(1+\eta^{\beta-1})}\int_0^{\eta} \left(\int_0^r (\eta-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}ds\right)y(r)dr \\
&-\frac{t^{\beta-1}}{1+\eta^{\beta-1}}\int_{\eta}^1 \left(\int_0^{\eta} (\eta-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}ds\right)y(r)dr\Bigg).
\end{aligned}$$

Lemme 3.2

On suppose que $0 < \alpha,\ \beta < 1$ et $1 < \alpha + \beta < 2$, *Alors la fonction* G *définit dans (3.2) et la fonction* g *définit dans (3.3) satisfont les propriétés suivantes :*

1. *Les fonctions* $G(t,r)$ *et* $g(r)$ *sont positives, pour tout* $0 \leq r \leq t \leq 1$.
2. $G(r,r) \leq \dfrac{1}{(\alpha+\beta-1)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}$ *et* $g(r) \leq \dfrac{1}{(\alpha+\beta-1)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}$.

Démonstration

Evidemment, $G(t,r) \geq 0$ pour $t, r \in [0,1]$.

Soit

$$g_1(t,r) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_0^r (t-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}\,ds,\ \ 0 \leq r \leq t \leq 1.$$

$$g_2(t,r) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}\,ds,\ \ 0 \leq t \leq r \leq 1.$$

Pour $0 \leq r \leq t \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned} g_1(t,r) &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_0^r (r-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}\,ds \\ &\leq \frac{r^{\alpha+\beta-1}}{(\alpha+\beta-1)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \\ &\leq \frac{1}{(\alpha+\beta-1)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

De même, si $0 \leq t \leq r \leq 1$, alors :

$$\begin{aligned} g_2(t,r) &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1}(t-s)^{\alpha-1}\,ds \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{(\alpha+\beta-1)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \\ &\leq \frac{1}{(\alpha+\beta-1)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ainsi de (3.9) et (3.10), on obtient :

$$G(t,r) \leq \frac{1}{(\alpha+\beta-1)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}, \text{ pour tout } t,r \ \in [0.1]\,.$$

De même raisonnement, on trouve :

$$g(r) \leq \frac{1}{(\alpha+\beta-1)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}, \text{ pour tout } r \ \in [0.1]\,.$$

On définit $\delta = 1-\beta,\ 0<\delta<1$. Soit E l'espace pondéré $C_\delta[0,1] = \{u \in C(0,\ 1],\ t^\delta u(t) \in C[0,1]\}$, alors E est un espace de Banach selon la norme $\|u\|_{C_\delta} = \max_{t\in[0,1]} |t^\delta u(t)|$, voir [13].

Théorème 3.1

On suppose que $M = \sup(|f(t.0)|,\ 0 \leq t \leq 1) < \infty,\ M \neq 0$ *et il existe une fonction positive* $k \in C_\delta[0,1]$ *tel que :*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq t^{1-\beta} k(t)|x-y|,\ 0 \leq t \leq 1,\ x,y \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Alors le problème (P) *a au moins une solution non triviale à condition que :*

$$\|k\|_{C_\delta} \leq \frac{(\alpha+\beta-1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{12}. \tag{3.12}$$

Démonstration

Soit $\Omega = \{u \in E,\ \|u\|_{C_\delta} \leq R\}$ un sous-ensemble convexe non vide fermé de E, où R est choisi tel que :

$$R \geq \frac{12M}{(\alpha+\beta-1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}. \tag{3.13}$$

On définit les opérateurs A et B sur Ω par :

$$\begin{aligned} Au(t) &= \int_0^1 G(t,r) f(r,u(r))dr, \\ Bu(t) &= -\frac{t^{\beta-1}}{1+\eta^{\beta-1}} \int_0^1 G(\eta,r) f(r,u(r))dr \\ &\quad + \left(-t^\beta + \frac{t^{\beta-1}\eta^\beta}{1+\eta^{\beta-1}}\right) \int_0^1 g(r) f(r,u(r))dr. \end{aligned}$$

On divise cette preuve à 5 étapes :

Etape 1 : A est continu sur Ω. En effet, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega$ tels que $u_n \to u$, en Ω, on a :

$$\begin{aligned} |t^{1-\beta}Au_n(t) - t^{1-\beta}Au(t)| &= \left| \int_0^1 \left[t^{1-\beta}G(t,r)f(r,u_n(r)) - t^{1-\beta}G(t,r)f(r,u(r)) \right] dr \right| \\ &\leq \int_0^1 t^{1-\beta}G(t,r)|f(r,u_n(r)) - f(r,u(r))|dr \end{aligned}$$

en utilisant (3.11), on obtient :

$$\begin{aligned} |t^{1-\beta}Au_n(t) - t^{1-\beta}Au(t)| &\leq \int_0^1 t^{1-\beta}G(t,r)r^{1-\beta}k(r)|u_n(r) - u(r)|dr \\ &\leq \max_{r\in[0,1]} |r^{1-\beta}k(r)\left[u_n(r) - u(r)\right]| \int_0^1 t^{1-\beta}G(t,r)dr \\ &\leq \|k\|_{C_\delta}\|u_n - u\|_{C_\delta} \int_0^1 t^{1-\beta}G(t,r)dr \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.2**,** on trouve :

$$|t^{1-\beta}Au_n(t) - t^{1-\beta}Au(t)| \leq \frac{\|k\|_{C_\delta}\|u_n - u\|_{C_\delta}}{(\alpha+\beta-1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}$$

d'où $\|Au_n - Au\|_{C_\delta} \to 0$ quand n tend à ∞.

Etape 2 : (Au) est uniformément borné sur Ω. En fait :

$$\begin{aligned} |t^{1-\beta}Au(t)| &\leq \int_0^1 t^{1-\beta}G(t,r)|f(r,u(r))|dr \\ &\leq \int_0^1 t^{1-\beta}G(t,r)[|f(r,u(r)) - f(r,0)| + |f(r,0)|]dr \end{aligned}$$

en utilisant (3.11), on obtient :

$$\begin{aligned}
|t^{1-\beta}Au(t)| &\leq \int_0^1 t^{1-\beta}G(t,r)\left[r^{1-\beta}k(r)|u(r)| + |f(r,0)|\right]dr \\
&\leq \int_0^1 t^{1-\beta}G(t,r)\left[r^{1-\beta}k(r)|u(r)|\right]dr + \int_0^1 t^{1-\beta}G(t,r)|f(r,0)|dr \\
&\leq \left(\max_{r\in[0,1]}|r^{1-\beta}k(r)u(r)| + \max_{r\in[0,1]}|f(r,0)|\right)\int_0^1 t^{1-\beta}G(t,r)dr \\
&\leq (\|k\|_{C_\delta}\|u\|_{C_\delta} + M)\int_0^1 t^{1-\beta}G(t,r)dr
\end{aligned}$$

d'après le lemme 3.2**,** puis en utilisant (3.12)-(3.13), on truove :

$$\begin{aligned}
|t^{1-\beta}Au(t)| &\leq \frac{\|k\|_{C_\delta}\|u\|_{C_\delta} + M}{(\alpha+\beta-1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)} \\
&\leq \frac{R\|k||_{C_6} + M}{(\alpha+\beta-1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)} \\
&\leq \frac{R}{12} + \frac{M}{(\alpha+\beta-1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)} \\
&\leq \frac{R}{12} + \frac{R}{12} = \frac{R}{6} \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

d'où $\|Au\|_{C_\delta} \leq \frac{R}{6}$.

Etape 3 : (Au) est équicontinu sur Ω. En fait, pour $u \in \Omega,\ 0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$

$$\begin{aligned}
|t_1^{1-\beta}Au(t_1) - t_2^{1-\beta}Au(t_2)| &= \left| \int_0^1 \left[t_1^{1-\beta}G(t_1,r)f(r,u(r)) - t_2^{1-\beta}G(t_2,r)f(r,u(r)) \right] dr \right| \\
&\leq \int_0^1 |t_1^{1-\beta}G(t_1,r) - t_2^{1-\beta}G(t_2,r)||f(r,u(r))|dr \\
&\leq \int_0^{t_1} |t_1^{1-\beta}G(t_1,r) - t_2^{1-\beta}G(t_2,r)||f(r,u(r))|dr \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} |t_1^{1-\beta}G(t_1,r) - t_2^{1-\beta}G(t_2,r)||f(r,u(r))|dr \\
&\quad + \int_{t_2}^{1} |t_1^{1-\beta}G(t_1,r) - t_2^{1-\beta}G(t_2,r)||f(r,u(r))|dr \\
&\leq \int_0^{t_1} |t_1^{1-\beta}G(t_1,r) - t_2^{1-\beta}G(t_2,r)| \left[|f(r,u(r)) - f(r,0)| + |f(r,0)| \right] dr \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} |t_1^{1-\beta}G(t_1,r) - t_2^{1-\beta}G(t_2,r)| \left[|f(r,u(r)) - f(r,0)| + |f(r,0)| \right] dr \\
&\quad + \int_{t_2}^{1} |t_1^{1-\beta}G(t_1,r) - t_2^{1-\beta}G(t_2,r)| \left[|f(r,u(r)) - f(r,0)| + |f(r,0)| \right] dr
\end{aligned}$$

d'après le lemme 3.2 et la formule (3.2), on obtient :

$$
\begin{aligned}
|t_1^{1-\beta}Au(t_1) - t_2^{1-\beta}Au(t_2)| \leq\ & \frac{\|k\|_{C_\delta}\|u\|_{C_\delta} + M}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)} \\
& (\int_0^{t_1}\left(\int_0^{r}\left(t_1^{1-\beta}(t_1-s)^{\beta-1} - t_2^{1-\beta}(t_2-s)^{\beta-1}\right)(r-s)^{\alpha-1}ds\right)dr \\
& + \int_{t_1}^{1}\left(\int_0^{t_1}\left(t_1^{1-\beta}(t_1-s)^{\beta-1} - t_2^{1-\beta}(t_2-s)^{\beta-1}\right)(r-s)^{\alpha-1}ds\right)dr \\
& + \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{t_1}^{r} t_2^{1-\beta}(t_2-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}ds\right)dr \\
& + \int_{t_2}^{1}\left(\int_{t_1}^{t_2} t_2^{1-\beta}(t_2-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}ds\right)dr).
\end{aligned}
$$

Par théorème de Fubini, on trouve :

$$
\begin{aligned}
|t_1^{1-\beta}Au(t_1) - t_2^{1-\beta}Au(t_2)| \leq\ & \frac{\|k\|_{C_\delta}||u||_{C_\delta} + M}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}(\int_0^{t_1}\left(t_1^{1-\beta}(t_1-s)^{\beta-1} - t_2^{1-\beta}(t_2-s)^{\beta-1}\right)ds \\
& + \int_0^{t_1}\left(t_1^{1-\beta}(t_1-s)^{\beta-1} - t_2^{1-\beta}(t_2-s)^{\beta-1}\right)ds \\
& + \int_{t_1}^{t_2} t_2^{1-\beta}(t_2-s)^{\beta-1}ds + \int_{t_1}^{t_2} t_2^{1-\beta}(t_2-s)^{\beta-1}ds) \\
=\ & \frac{2(\|k\|_{C_\delta}||u||_{C_\delta} + M)}{\beta\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\left(2t_2^{1-\beta}(t_2-t_1)^{\beta} - (t_2-t_1)\right) \\
\leq\ & \frac{2(\|k\|_{C_\delta}||u||_{C_\delta} + M)}{\beta\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\left(2(t_2-t_1)^{\beta} - (t_2-t_1)\right)
\end{aligned}
$$

donc $|t_1^{1-\beta}Au(t_1) - t_2^{1-\beta}Au(t_2)|$ tend vers zéro quand $t_1 \to t_2$, ainsi (Au) est équicontinu.

Etape 4 : B est une contraction sur Ω. En effet, soient $u,\ v \in \Omega$, alors :

$$\begin{aligned}
\left|t^{1-\beta}Bu(t) - t^{1-\beta}Bv(t)\right| &= \Big|\frac{-1}{1+\eta^{\beta-1}}\int_0^1 G(\eta,r)\left[f(r,u(r)) - f(r,v(r))\right]dr \\
&\quad + \left(-t + \frac{\eta^{\beta}}{1+\eta^{\beta-1}}\right)\int_0^1 g(r)\left[f(r,u(r)) - f(r,v(r))\right]dr\Big| \\
&\leq \frac{1}{1+\eta^{\beta-1}}\int_0^1 G(\eta,r)\left|f(r,u(r)) - f(r,v(r))\right|dr \\
&\quad + \left|-t + \frac{\eta^{\beta}}{1+\eta^{\beta-1}}\right|\int_0^1 g(r)|f(r,u(r)) - f(r,v(r))|dr \\
&\leq \frac{3\|k\|_{C_\delta}\|u-v\|_{C_\delta}}{(\alpha+\beta-1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)} \leq \frac{\|u-v\|_{C_\delta}}{4}
\end{aligned}$$

Etape 5 : $Au + Bv \in \Omega$, pour tout $u, v \in \Omega$. En fait, nous avons

$$\begin{aligned}
|t^{1-\beta}Bu(t)| &= \left|\frac{-1}{1+\eta^{\beta-1}}\int_0^1 G(\eta,r)f(r,u(r))dr + \left(-t + \frac{\eta^{\beta}}{1+\eta^{\beta-1}}\right)\int_0^1 g(r)f(r,u(r))dr\right| \\
&\leq \frac{1}{1+\eta^{\beta-1}}\int_0^1 G(\eta,r)(|f(r,u(r)) - f(r,0)| + |f(r,0)|)dr \\
&\quad + \left|-t + \frac{\eta^{\beta}}{1+\eta^{\beta-1}}\right|\int_0^1 g(r)(|f(r,u(r)) - f(r,0)| + |f(r,0)|)dr \\
&\leq \frac{3\|k\|_{C_\delta}\|u||_{C_\delta} + 3M}{(\alpha+\beta-1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)} \leq \frac{R}{2}. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

De (3.14) à (3.15), on trouve :

$$\begin{aligned}
|t^{1-\beta}(Au(t) + Bv(t))| &\leq |t^{1-\beta}Au(t)| + |t^{1-\beta}Bv(t)| \\
&\leq \frac{R}{6} + \frac{R}{2} = \frac{2R}{3} \leq R
\end{aligned}$$

donc $Au + Bv \in \Omega$.

D'après les étapes 1 à 3 et le théorème d'Ascoli Arzela, nous concluons que A est continu et compact sur Ω. Grâce aux les étapes 3 et 4 et au théorème de Krasnoselskii, nous déduisons que $A+B$ a un point fixe $u \in \Omega$, puis le problème (P) a au moins une solution non triviale dans Ω.

3.3 Exemples

Nous donnons quelques exemples numériques pour illustrer les résultats obtenus.

Exemple 1 Considérons le problème fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} -{}^C D_{1^-}^{0.8} D_{0^+}^{0.5} u(t) + \omega u(t) + t^{\frac{1}{2}} = 0,\ 0 < t < 1 \\ \lim_{t \to 0^+} t^{0.5} u(t) = u(1) = -u(\eta),\ 0 < \eta < 1 \end{cases} \qquad (P2)$$

où $\omega = 10^{-2},\ f(t,\ x) = \omega x + t^{1/2}$. On a définit $k(t) = \omega t^{-\frac{1}{2}}$, puis

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &= |\omega x + t^{1/2} - \omega y - t^{1/2}| = \omega |x-y| \\ &= k(t) t^{\frac{1}{2}} |x-y|,\ 0 < t \leq 1,\ x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M &= \sup\{|f(t,0)|,\ 0 \leq t \leq 1\} \\ &= \sup\{|t|,\ 0 \leq t \leq 1\} = 1. \end{aligned}$$

On a :

$$\|k\|_{C_\delta} = \omega \leq \frac{(\alpha+\beta-1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{12} = 2.5794 \times 10^{-2}.$$

Soit $\Omega = \{x \in E,\ \|x\|_{C_\delta} \leq R\}$, où

$$R = 40\omega \geq \frac{12M}{(\alpha+\beta-1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)} = 38.768\omega.$$

Nous concluons par le théorème 3.1 que le problème $(P2)$ a au moins une solution non triviale telle que $\|x\|_{C_\delta} \leq 0.4$.

Exemple 2 Considérons le problème (P) avec $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.5$ et $f(t.x) = \dfrac{t^{\frac{1}{2}} e^{-t}}{30(1+x^2)}$, ie

$$\begin{cases} -{}^C D_{1^-}^{0.8} D_{0^+}^{0.5} u(t) + \dfrac{t^{\frac{1}{2}} e^{-t}}{30(1+u(t)^2)} = 0,\ 0 < t < 1. \\ \lim_{t \to 0^+} t^{0.5} u(t) = u(1) = -u(\eta),\ 0 < \eta < 1 \end{cases} \qquad (P3)$$

Vérifions les hypothèses du théorème (3.1). Nous avons :

$$\begin{aligned}
|f(t,x)-f(t,y)| &= \left|\frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-t}}{30(1+x^2)}-\frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-t}}{30(1+y^2)}\right| \\
&= \left|\frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-t}\,(y^2-x^2)}{30(1+x^2)(1+y^2)}\right| \\
&\leq \frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-t}}{30}|x-y|\left|\frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \\
&\leq \frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-t}}{30}|x-y| = k(t)t^{\frac{1}{2}}|x-y|,\ 0\leq t\leq 1,\ x,\ y\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

où $k(t)=\dfrac{e^{-t}}{30}$. Par des calculs, on obtient :

$$M=\sup\{|f(t,0)|,\ 0\leq t\leq 1\ \}=\max_{0\leq t\leq 1}\frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-t}}{30}=1.4296\times 10^{-2},$$

$$\begin{aligned}
\|k\|_{C_\delta} &= \max_{0\leq t\leq 1}\frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-t}}{30}=1.4296\times 10^{-2} \\
&\leq \frac{(\alpha+\beta-1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{12}=2.5794\times 10^{-2}.
\end{aligned}$$

Soit $\Omega=\{x\in E,\ \|x\|_{C_\delta}\leq 1\}$, alors :

$$R=1\geq\frac{12M}{(\alpha+\beta-1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}=0.55423.$$

Ainsi, d'après le théorème 3.1, le problème $(P3)$ a une solution non triviale $x\in\Omega$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté une breuf synthèse sur les équations différentielles fractionnaires.

Nous nous sommes concentrés sur la présentation de [9] en détail, dans lequel il a été démontré l'existence de la solution non triviale d'un problème aux limites fractionnaire impliquant des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville à gauche et de Caputo à droite en utilisant le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

Bibliographie

[1] O. P. Agrawal, *Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems*, J. Math. Anal. Appl. 272, 368-379 (2002).

[2] T. Blaszczyk, Ciesielski, M. : *Fractional oscillator equation transformation into integral equation and numerical solution*, Appl. Math. Comput. 257, 428A35 (2015).

[3] T. Blaszczyk, Ciesielski, M. : *Numerical solution of Euler-Lagrange equation with Caputo derivatives*, Adv. Appl. Math. Mech. 9(1), 173-185 (2017).

[4] D. W. Boyd and J.S.W. Wong, *On nonlinear contractions*, Proc. Amer. Math. Soc. 20(1969) 458-464.

[5] H. Dib, *Equations Différentielles Fractionnaires EDA-EDO(4ème Ecole)*,.Université Aboubekr BELAKID Tlemcen (2009).

[6] M. Edelstein, *An extension of Banach's contraction principle*, Proc. Amer. Math. Soc.12 (1961) 7-10.

[7] A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi,Torres, D.F.M. : *Lyapunov-type inequality for a fractional boundary value problem with natural conditions*, SeMA (2017), https ://doi.org/10.1007/s40324-017-0124-2.

[8] A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi, A. Kılıçman, *Existence of solutions for a mixed fractional boundary value problem,* Adv. Differ. Equations 2017, 164 (2017).

[9] A. Guezane-Lakoud, R. Rodriguez-López, *On a fractional boundary value problem in a weighted space,* SeMA G. 75 (2018), no. 3.435–443, https ://doi.org/10.1007/s40324-017-0144-20.

[10] M. Ishteva, *Properties and Applications of the Caputo Fractional Operator*, Msc. Thesis, Universität Karlsruhe (TH), Sofia, Bulgaria, (2005).

[11] A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, vol. 204 of North-Holland Mathematics Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, 2006.

[12] M.A. Krasnoselskii, *Positive solutions of operator equations*, Noordhoff, Groningen 1964.

[13] I. Podlubny, Fractional Differential Equations : *An Introduction to Fractional Derivatives*, *Fractional differential equations*, *to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif,USA, 1993.

[14] V.M. Sehgal and S.P. Singh, *On a fixed point theorem of Krasnoselskii for locally convexspaces*, Pacific J. Math. 62 (1976) 561-567.

[15] D.R. Smart, *Fixed point theory*, Combridge Uni. Press, Combridge 1974.

[16] I. Vasile-Istratescu, *Introduction into theory of fixed points*, E. Academie, Bucarest 1973.

[17] K. Yosida, *Fonctional Analysis*, 6th edn Springer-Verlag, Berlin, (1980).

[18] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem*, Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.