

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique  
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Master en Mathématiques**

Option : EDP Et Analyse numérique

Par :

**M<sup>lle</sup>. Roumayssa CHABANE**

## **Intitulé**

**SUR LE NOMBRE DE CYCLES LIMITES VIA LA  
METHODE DE MOYENNISATION**

Dirigé par : Dr. Badi.S  
Devant le jury

<b>PRESIDENT</b>	<b>Dr. Bouattia Yassine</b>	<b>MCB</b>	<b>Univ-Guelma</b>
<b>ENCADREUR</b>	<b>Dr. Badi Sabrina</b>	<b>MCA</b>	<b>Univ-Guelma</b>
<b>CO-ENCADREUR</b>	<b>Dr. Ellagoune Fateh</b>	<b>Prof</b>	<b>Univ-Guelma</b>
<b>EXAMINATEUR</b>	<b>Dr. Sellami Nabil</b>	<b>MCB</b>	<b>Univ-Guelma</b>

**Session Juillet 2019**

# *Dedicace*

*Je dédie ce modeste travail*

*A ma mère et à mon père en guise de remerciement et de reconnaissance pour toute la confiance, le soutien et l'aide qu'ils m'ont apporté tout en m'encourageant pour empreinter la voie de la réussite.*

*A toutes mes sœurs mon petit frère « amar » et mon neveu « chamsou » qui étaient toujours à mes cotés pour me soutenir et m'aider dans les moments difficiles,*

*A tous mes professeurs qui ont eu la générosité de partager leur savoir et de nous l'inculquer sans relâche.*

*A tous mes amis*

*A Tous ce bon monde et tous ceux que j'aime du font de mon cœur, je dis grand merci*

*De la part de roumayssa*

## REMERCIEMENTS

*Mes remerciements vont en premier lieu, à « ALLAH » Dieu le tout puissant, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.*

*En second lieu, Je voudrais exprimer ma profonde gratitude envers mon Encadreur Mme. **Badi Sabrina** directrice de ce mémoire de fin d'étude master 2 en mathématique, pour sa disponibilité la confiance qu'elle m'a accordé, et ses précieux conseils qui m'ont permis de mener à bien ce travail.*

*Merci beaucoup.*

*Je remercie Mr. **Ellagoune Fateh**, d'avoir accepté d'être Co-encadreur.*

*Je tiens à remercier Mr. **Bouattia Yassine**, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.*

*J'adresse mes remerciements à Mr. **Sellami Nabil**, d'avoir accepté d'examiner, évaluer et juger mon travail.*

*Veillez accepter ce travail, en gage de mon grand respect et ma profonde reconnaissance.*

# Table des matières

Résumé	3
Abstract	4
ملخص	5
Introduction	6
<b>1 Notions Préliminaires</b>	<b>9</b>
1.1 Existence et unicité de la solution . . . . .	9
1.2 Stabilité de la solution . . . . .	11
1.3 Systèmes dynamiques . . . . .	13
1.4 Notion de Flot . . . . .	15
1.4.1 Cas d'un système d'équations différentielles linéaires . .	15
1.4.2 Cas d'un système d'équations différentielles non linéaires	15
1.5 Théorie des systèmes différentiels non linéaires autonomes. . .	17
1.5.1 Points D'équilibre et linéarisation . . . . .	17
1.5.2 Classification et nature des points d'équilibre . . . . .	20
1.5.3 Portrait de phase . . . . .	25
1.5.4 Théorème de Hartman-Grobman . . . . .	26

1.5.5	Orbites périodiques et Cycles limites . . . . .	27
1.6	Existence et non-existence des Cycles limites . . . . .	29
1.6.1	Méthode pour obtenir les fonctions de Dulac . . . . .	35
1.6.2	Application : . . . . .	37
1.7	Théorie de bifurcation . . . . .	40
<b>2</b>	<b>Méthode de moyennisation</b>	<b>44</b>
2.1	Théorème de moyennisation . . . . .	46
2.2	Théorème de moyennisation du premier ordre . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Applications</b>	<b>52</b>
3.1	Applications 1. . . . .	52
3.2	Application 2. . . . .	54
	<b>Conclusion</b>	<b>57</b>

# *Résumé*

Dans ce travail, on s'intéresse au nombre de solutions périodiques que peut avoir un système différentiel plan polynomial.

On va utiliser une méthode de perturbation nommée : la méthode de Moyennisation "**Averaging method**".

Cette étude est illustrée par des applications.

**Mots clés** : Stabilité, équation différentielle, solution périodique, cycle limite, perturbation, méthode de moyennisation.

# *Abstract*

In this research work, we are interested to the number of periodic solutions that a planar polynomial differential system can have.

We will use a perturbation method which is called "**Averaging method**"

This study is illustrated by applications.

**Keywords :** Stability, differential equation, periodic solution, limit cycle, perturbation, averaging method.

# المخلص

- في هذه الاطروحة سوف نهتم بدراسة عدد الحلول الدورية التي يمكن ان تنشأ في مستوي جملة معادلات تفاضلية لكثيرات الحدود

- سوف نستعمل نظرية الذبذبة يطلق عليها اسم نظرية المتوسطة

- يتم توضيح هذه الدراسة من خلال تطبيقات

## - الكلمات المفتاحية

استقرار - معادلات تفاضلية - حلول الدورية - دورة الحد - الذبذبة - طريقة المتوسطة .



# *Introduction*

La théorie des systèmes dynamiques est très vaste et très active en termes de recherche. Généralement, un système est dit dynamique lorsqu'il évolue au cours du temps. Ainsi, l'étude des systèmes dynamiques traite l'évolution temporelle des systèmes physiques, économiques, chimiques sans pour autant faire référence à la théorie sous-jacente qui détermine leurs équations d'évolution. On représente cette évolution par des équations différentielles ou des applications.

Le terme "**système dynamique**" est apparu au début du **XX<sup>ème</sup>** siècle. Le premier objectif des chercheurs est l'étude des systèmes dynamiques, c'est à dire l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires.

La notion des équations différentielles est apparue à la fin du **17<sup>ème</sup>** siècle, à cette époque, les équations différentielles s'introduisent par le biais de problèmes d'origine mécanique ou géométrique comme par exemple : le mouvement du pendule circulaire, le problème du mouvement de deux corps s'attirant mutuellement suivant la loi de la gravitation newtonienne ,....etc.

Un des principaux problèmes de la théorie des équations différentielles est l'étude des cycles limites : leur existence, leur stabilité. Un cycle limite pour

un système différentiel plan, est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodique. la notion des cycles limites stables est très importante car elle modélise des systèmes a ossillation auto-entretenues, voici quelques exemples : les battements du coeur, les vibration d'un pont, ou des ailes d'un avion. Les cycles limites on été introduits pour la première fois par **H.Poincaré en 1881** dans son "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle il s'est intéressé à l'étude qualitative des solutions des équations différentielles, c'est à dire aux points d'équilibre, aux cycles limites et leur stabilité, ce qui permet d'avoir une idée globale des autres orbites du système étudié.

Un des théorèmes les plus importants de la dynamique non linéaire est le théorème de poincaré-Bendixson qui affirme que dans une région bornée et compacte du plan, une trajectoire d'un système planaire converge vers un cycle limite ou un point critique. Pour la non-existence des solutions périodiques, il existe les critères de **Bendixson** et celui de **Dulac** , qui affirment que sous certaines conditions le système différentiel planaire n'admet aucune solution périodique.

En effet, un aspect fondamental de l'analyse des systèmes dynamiques est la théorie de la bifurcation, introduite par **Poincaré** en 1892 pour décrire les changements qualitatifs des point d'équilibre d'une équation différentielle, obtenue selon une faible variation d'un paramètre, ensuite a été discuté par **Andronov** et **Witt** et leurs collègues de travail commençant en 1930.

En général, obtenir des solutions périodiques est un problème difficile et souvent impossible. En utilisant la méthode de moyennisation, on réduit ce problème difficile des équations différentielles à la recherche des racines d'un système algébrique. La méthode de moyennisation (Averaging Theory) est l'une des plus importantes méthodes utilisées actuellement dans l'étude des solutions périodiques des systèmes différentiels. L'idée de base de cette méthode peut être datée de la fin du 18<sup>ème</sup> siècle avec les travaux de Lagrange et Laplace en 1788 qui ont donné une justification intuitive de la méthode. Dans ce mémoire, on va appliquer la méthode de moyennisation dans le but de déterminer le nombre de solutions périodiques que peut avoir un système différentiel plan polynomial.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

**Dans le chapitre un** : on rappelle les notions générales. On introduira des définitions élémentaires tels que : le système dynamique, les points d'équilibre et leur nature, la linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre, les cycles limites, ainsi que des théorèmes sur l'existence et la non-existence des cycles limites. On introduira aussi un rappel sur la théorie de bifurcation.

**Dans le chapitre deux** : on expose la méthode de moyennisation d'ordre un, qui est l'outil utilisé dans notre étude.

**Dans le chapitre trois** : on applique la méthode de moyennisation d'ordre un sur différents systèmes différentiels à titre d'applications.

# Chapitre 1

## Notions Préliminaires

Ce chapitre contient des notions générales et principales pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des équations différentielles ordinaires.

### 1.1 Existence et unicité de la solution

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $f : U \mapsto \mathbb{R}^n$  une fonction continue.

**Définition 1.1.1** *i)* Une équation différentielle ordinaire (EDO) sur  $U$  est une relation de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

que l'on note brièvement

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \tag{1.1}$$

*ii)* Pour  $(t_0, x_0)$  donné, un problème à valeur initiale associé à l'équation (1.1) est donné sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

**Définition 1.1.2 i)** La fonction  $x(t)$  est dite solution de l'équation (1.1) sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  si elle est définie et continument dérivable sur  $I$  et si  $(t, x(t)) \in U, \forall t \in I$  et si  $x(t)$  satisfait la relation (1.1) sur  $I$ .

**ii)** Soit  $(t_0, x_0) \in U$  donnée, la fonction  $x$  est dite solution du problème à valeur initiale (1.2) s'il existe un intervalle  $I$  contenant  $t_0$  tel que  $x$  est une solution de l'équation (1.1) sur  $I$  et vérifie  $x(t_0) = x_0$ .

**Définition 1.1.3** Considérons la fonction  $f(t, x)$  avec :

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n, |t - t_0| \leq a, \text{ et } x \in D \subset \mathbb{R}^n.$$

On dit que la fonction  $f(t, x)$  est lipschitzienne par rapport à  $x$ , s'il existe  $K > 0$  telle que :

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K|x_1 - x_2|, \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in |t_0 - a, t_0 + a| \times D.$$

La constante  $K$  est appelée constante de lipshitz.

**Théorème 1.1.1** On considère le système différentiel :

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R},$$

et on suppose que la fonction vectorielle  $f(x, t)$  est lipschitzienne de rapport  $K$  par rapport à  $x$ , uniformément en  $t \in [-a, a]$ . Soit  $x_0$  une donnée initiale, il existe une seule solution  $x(t)$  du système différentiel qui satisfait  $x(0) = x_0$  et qui est définie sur l'intervalle  $[-c, c]$  avec  $c < \min(a, \frac{1}{K})$ .

**Preuve 1.1.1** Cette solution satisfait l'équation intégrale

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(u, x(u))du,$$

on considère l'espace des fonctions continues  $y \in C^0([-a, a])$  muni de la norme  $\|y\| = \max_{t \in [-a, a]} \|y(t)\|$ . Soit  $L : C^0([-a, a]) \rightarrow C^0([-a, a])$  l'opérateur définit par

$$L(y)(t) = x(0) + \int_0^t f(u, y(u))du,$$

cet opérateur satisfait

$$L(y)(t) - L(y')(t) = \int_0^t [f(u, y(u)) - f(u, y'(u))]du$$

et donc

$$\|L(y) - L(y')\| \leq cK\|y - y'\|.$$

Si on pose  $c < \min(a, \frac{1}{K})$ , on obtient que l'opérateur  $L$  est une contraction. Il possède donc un point fixe dans l'espace fonctionnel  $C^0([-a, a])$ . Cet unique point fixe est une fonction continue qui est solution du système différentiel et ceci démontre l'existence et l'unicité cherchées.

## 1.2 Stabilité de la solution

La stabilité est l'un des aspects essentiels dans l'étude des systèmes dynamiques. Cette notion a été étudiée par Liapunov (1857-1918)

**Définition 1.2.1** Soit le problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \dots\dots & (I) \\ x(t_0) = x_0 \dots & (II) \end{cases} \quad (1.3)$$

Supposons que  $f$  satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution. Une solution  $\Phi(t)$  du système (I) telle que  $\Phi(t_0) = \Phi_0$  est dite stable au sens de Lyapunov si :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  telle que pour toute solution  $x(t)$  de (I) dont la valeur initiale  $x(t_0) = x_0$  vérifie

$$\|x(t_0) - \Phi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \Phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Si de plus

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \Phi(t)\| = 0,$$

alors la solution  $\Phi(t)$  est dite asymptotiquement stable.

**Remarque 1.2.1** Une solution  $\Phi(t)$  qui n'est pas stable est dite instable.

**Exemple 1.2.1** Soit le problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 1 \dots (*) \\ x(0) = 1, \end{cases} \quad (1.4)$$

la solution de (1.4) est

$$\Phi(t) = 1.$$

la solution de (\*) telle que  $x(0) = x_0$  est

$$x(t) = (x_0 - 1)e^{-t} + 1.$$

On a :

$$|x(t) - \Phi(t)| = |(x_0 - 1)e^{-t}| < |x_0 - 1|, \quad \forall t \geq 0.$$

Il suffit de prendre  $\delta = \varepsilon \Rightarrow \Phi(t) = 1$  est stable

### 1.3 Systèmes dynamiques

**Définition 1.3.1** Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est une application :

$$U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

définie sur tout  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , telle que :

1.  $U(\cdot, x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
2.  $U(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
3.  $U(0, x) = x$ .
4.  $U(t + s, x) = U(t, U(s, x)), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

**Proposition 1.3.1** Les systèmes dynamiques sont engendrés par des systèmes différentiels.

**Exemple 1.3.1** Soit le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $A$  est une matrice constante,  $t \in \mathbb{R}^+$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ . La solution de (1.5) est donnée par

$$x(t) = e^{tA}x_0,$$



le système (1.5) engendre un système dynamique

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, U(t, x) = e^{tA}x.$$

En effet :

1. On a  $\forall t, \tau \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} \|U(t+\tau, x) - U(t, x)\| &= \|e^{(t+\tau)A}x - e^{tA}x\| \leq \|e^{tA}\| \|e^{\tau A}x - x\| \leq e^{t\|A\|} \|e^{\tau A} - I\| \|x\| \\ &\leq e^{t\|A\|} (e^{\tau\|A\|} - I) \|x\| \rightarrow 0 \text{ quand } \tau \rightarrow 0, \end{aligned}$$

d'où  $U(\cdot, x)$  est continue.

2. On a  $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$  :

$$\|U(t, x) - U(t, y)\| = \|e^{At}x - e^{At}y\| = \|e^{At}\| \|x - y\| < M \|x - y\|,$$

où  $M$  est une constante et puisque  $t$  est fixé, d'où la continuité de  $U(t, \cdot)$ .

3.  $U(0, x) = e^{A0}x = Ix = x$ .

4.  $\forall t, s \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$U(t + s, x) = e^{At}e^{As}x = U(t, e^{As}x) = U(t, U(s, x)).$$

**Définition 1.3.2** Un système dynamique  $U$  sur  $\mathbb{R}^n$  est linéaire si :

$$U(t, \alpha x + \beta y) = \alpha U(t, x) + \beta U(t, y),$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

## 1.4 Notion de Flot

### 1.4.1 Cas d'un système d'équations différentielles linéaires

*Soit le système linéaire*

$$\dot{x} = Ax, x \in \mathbb{R}^n \quad (*)$$

où  $A$  une matrice constante. La solution du système  $(*)$  avec la valeur initiale  $x(0) = x_0$  est  $x(t) = e^{tA}x_0$ .

**Définition 1.4.1** L'ensemble des applications  $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est appelé le flot du système  $(*)$

### 1.4.2 Cas d'un système d'équations différentielles non linéaires

*Soit le système non linéaire*

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n.$$

On note par  $I(x_0)$  l'intervalle maximum d'existence de la solution  $\Phi(t, x)$  du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.6)$$

**Définition 1.4.2** Soit  $E$  un sous ensemble ouvert dans  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in C^1(E)$ , et soit pour  $x_0 \in E$  la solution  $\Phi(t, x_0)$  du problème (1.6) définie sur  $I(x_0)$ .

Alors pour  $t \in I(x_0)$ , l'ensemble des applications  $\Phi_t$  définit par

$$\Phi_t = \Phi(t, x_0),$$

est appelé le flot du système différentiel (1.6).

$\Phi_t(x_0)$  possède les propriétés suivantes :

1.  $\Phi_t(x_0)$  est de classe  $C^1$ .
2.  $\Phi_0(x_0) = x_0$ .
3.  $\Phi_{t+s}(x_0) = \Phi_t(\Phi_s(x_0))$ .

**Remarque 1.4.1** Le flot est dit autonome si  $f$  ne dépend pas explicitement du temps  $t$ , sinon il est dit non autonome .

**Exemple 1.4.1** On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La solution de ce problème est :  $\Phi(t, x_0) = e^{At}x_0$  avec

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

donc le flot associé à ce problème est défini par :

$$\Phi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x_0 \mapsto \Phi_t(x_0) = e^{At}x_0 = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} x_0 .$$

## 1.5 Théorie des systèmes différentiels non linéaires autonomes.

Dans cette section, on considère le système non linéaire autonome

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.7}$$

### 1.5.1 Points D'équilibre et linéarisation

**Définition 1.5.1 (Point critique).**

On appelle point critique (ou point d'équilibre ou point singulier ou point fixe) du système (1.7), tout point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  qui vérifie :

$$f(x_0) = 0.$$

**Remarque 1.5.1** Un point qui n'est pas critique est dit régulier.

**Définition 1.5.2** Un point critique  $x = a$  du système (1.7) est appelé attracteur positif s'il existe un voisinage  $V_a$  de  $a$  tel que si :

$$x(t_0) \in V_a \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = a.$$

Si un point critique  $x = a$ , a cette propriété quand  $t \rightarrow -\infty$ , alors  $x = a$  est appelé attracteur négatif.

**Exemple 1.5.1** Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -2y \end{cases},$$

l'origine est le seul point critique pour ce système.

On voit sur la figure 1.1 que le point critique (0.0) est un attracteur positif.

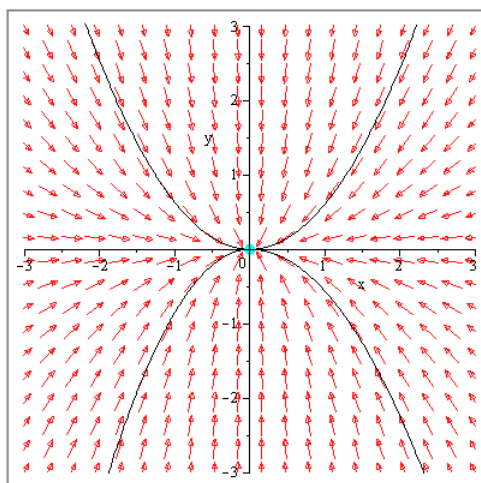


FIGURE 1.1 – Attracteur positif

**Définition 1.5.3 (Linéaritation).** Considérons le système non linéaire autonome (1.7), où  $x_0$  est le point d'équilibre .

Le système suivant est appelé le système linéarisé de (1.7) en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  :

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{ou } A = Df(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (1.8)$$

**Exemple 1.5.2** Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2, \end{cases}$$

d'où

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{pmatrix},$$

alors les points critiques de  $f(x) = 0$  sont  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$ . La Jacobienne de  $f$  en  $(x_1, x_2)$  est :

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

au point  $(1, 0)$  :

$$Df(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

au point  $(-1, 0)$  :

$$Df(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les systèmes linéarisés associés sont :

a) Au point  $(1, 0)$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2. \end{cases}$$

b) Au point  $(-1, 0)$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2. \end{cases}$$

**Définition 1.5.4** Un point critique  $x_0$  du système  $\dot{x} = f(x)$  est dit hyperbolique si  $Df(x_0)$  n'admet aucune valeur propre avec une partie réelle nulle.

**Remarque 1.5.2** La linéarisation d'un système différentiel nous amène à l'étude de la nature des points critiques.

## 1.5.2 Classification et nature des points d'équilibre

**Définition 1.5.5** On considère le système :

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

soit  $x_0$  son point critique.

1. Le point critique est appelé **selle** s'il est hyperbolique et si  $A = Df(x_0)$  a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.
2. Le point critique est appelé **puits** si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x_0)$  ont des parties réelle négative.
3. Le point critique est appelé **source** si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x_0)$  ont des parties réelle positives.

**Exemple 1.5.3** Soit le système non linéaire autonome :

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y^2, \\ \dot{y} = 3x^3 + y. \end{cases} \quad (1.9)$$

Le système (1.9) a un seul point d'équilibre qui est l'origine (0.0), et le système linéarisé en ce point est

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

ce système a deux valeurs propres réelles de même signe positif  $\lambda_1 = 2$  et  $\lambda_2 = 1$ . Alors le point critique (0.0) est une source.

**Remarque 1.5.3** L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre nous amène à connaître le comportement des trajectoires voisines de ce point d'équilibre (comportement local).

Dans cette section on considère le système différentiel plan linéaire à coefficient constant :

$$\dot{x} = Ax ,$$

où  $A$  est une matrice constante  $2 \times 2$  et soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon ces valeurs propres :

- (1) Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles non nulles et de signe différent alors le point critique  $x = (0,0)$  est appelé un point selle il est toujours instable.

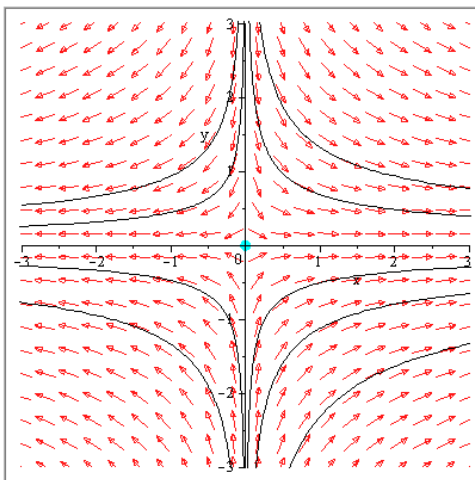


FIGURE 1.2 – Selle instable



(2) Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles de même signe on a trois cas :

(a) Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$  le point critique  $x = (0, 0)$  est appelé un noeud stable.

(b) Si  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  le point critique  $x = (0, 0)$  est appelé un noeud instable.

(c) Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  le point critique  $x = (0, 0)$  est appelé noeud propre il est stable pour  $\lambda < 0$  et instable pour  $\lambda > 0$ .

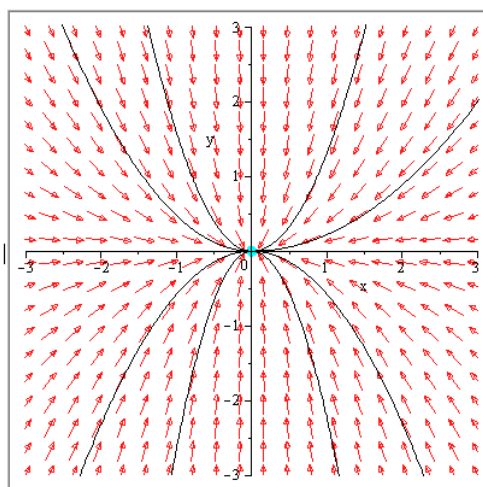


FIGURE 1.3 – noeud stable

- (3) Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont complexes et  $\text{Im}(\lambda_{1,2}) < 0$  alors le point critique  $x = (0,0)$  est appelé un foyer. Il est stable si  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$  et instable si  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$ .

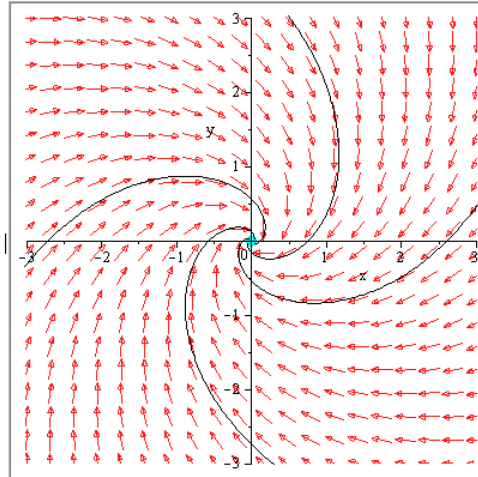


FIGURE 1.4 – foyer stable

- (4) Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont imaginaires pures, alors le point critique  $x = (0,0)$  est appelé un centre, il est stable mais pas asymptotiquement stable.

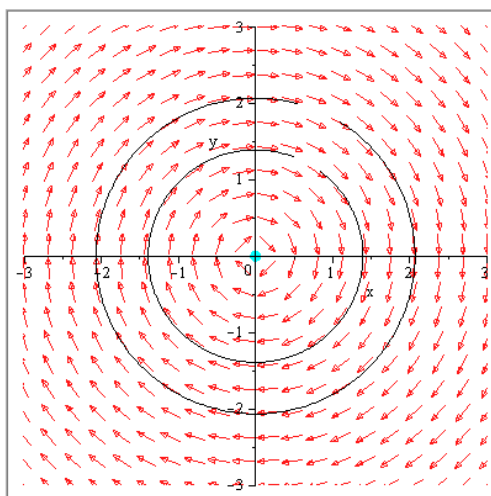


FIGURE 1.5 – Centre stable

**Exemple 1.5.4** On étudie la nature du point critique  $(0, 0)$  du système :

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - y \\ \dot{y} = 2x + y, \end{cases}$$

écrivons l'équation caractéristique de la matrice associée à ce système on a :

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

d'où  $\lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0$ .

Ses racines  $\lambda_1 = 3 + \sqrt{2} > 0$ ,  $\lambda_2 = 3 - \sqrt{2} > 0$  sont réelles distinctes et positives par suite, le point critique  $(0, 0)$  est un noeud instable.

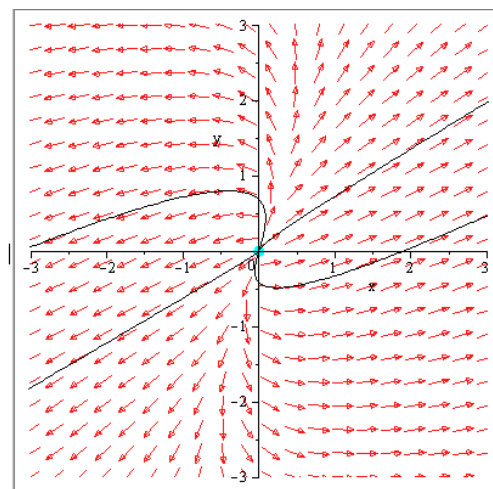


FIGURE 1.6 – noeud instable

### 1.5.3 Portrait de phase

*Définition 1.5.6* Soit le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.10)$$

où  $P, Q$  sont des polynômes en  $x$  et  $y$  à coefficients réels de degré maximal  $d$ . Le portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase. Les solutions  $(x(t), y(t))$  du système (1.10) représentent dans le plan  $(x, y)$  des courbes appelées orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase, et le plan  $(x, y)$  est appelé plan de phase.

### 1.5.4 Théorème de Hartman-Grobman

*Le théorème de Hartman-Grobman est un résultat important dans la théorie qualitative locale des systèmes différentiels. Il montre qu'au voisinage d'un point critique hyperbolique  $x_0$  le système non linéaire*

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.11}$$

*a la même structure qualitative du système linéarisé*

$$\dot{x} = Df(x_0).x. \tag{1.12}$$

*Autrement dit, si l'origine est un point selle ou foyer ou noeud pour le système (1.12) alors le point critique  $x_0$  sera respectivement selle ou foyer ou noeud pour le système (1.11).*

*Cependant si l'origine est de type centre pour le système (1.12) alors on ne peut rien dire sur la nature du point critique  $x_0$  de (1.11).*

**Exemple 1.5.5** *Soit le système non linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2xy^2, \\ \dot{y} = -2y + 4x^2y, \end{cases}$$

*l'origine (0,0) est le seul point critique de ce système, et le système linéarisé en ce point est*

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

*Ce système a deux valeurs propres réelles de signes différents  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -2$ . Alors le point (0,0) est un point selle instable. Donc le point critique (0,0) du système non linéaire est aussi du type selle instable*

**Exemple 1.5.6** Soit le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3, \\ \dot{y} = -x - 3y^3, \end{cases}$$

l'origine  $(0,0)$  est le seul point critique de ce système, et le système linéarisé en ce point est

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il admet deux valeurs propres imaginaires pures  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . Alors le point critique  $(0,0)$  est un centre stable, mais pour le système non linéaire on ne peut rien dire.

### 1.5.5 Orbites périodiques et Cycles limites

Soit le système différentiel

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.13}$$

**Définition 1.5.7 (Orbites périodiques)** On appelle orbite périodique toute trajectoire fermée  $\phi(t, x)$  du système (1.13) telle qu'il existe un nombre  $T$ , vérifiant :

$$\phi(t + T) = \phi(t),$$

le plus petit réel  $T > 0$  qui vérifie cette égalité est appelé période.

**Définition 1.5.8 (Cycle limite)** Pour un système plan, on appelle cycle limite une orbite périodique qui est isolée dans l'ensemble des orbites périodiques.

**Définition 1.5.9 (Amplitude)** L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable  $x$  du cycle limite.

**Théorème 1.5.1 (Stabilité des Cycles limites).**  $C$  étant la trajectoire correspondante au cycle limite, toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de  $C$  sont telles que : soit elles s'enroulent toutes en spirales autour de  $C$  pour  $t \rightarrow +\infty$  ou bien  $t \rightarrow -\infty$ .

1. Le cycle limite est dit **stable**, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont attirées vers  $C$ .
2. Le cycle limite est dit **instable**, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont repoussées de  $C$ .
3. Le cycle limite est dit **semi-stable**, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont attirées d'un côté et repoussées de l'autre côté.

**Exemple 1.5.7** Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - 2x(x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + 2y - 2y(x^2 - y^2), \end{cases} \quad (1.14)$$

En coordonnées polaires  $x = r \cos(\theta)$  et  $y = r \sin(\theta)$ , avec  $r > 0$ , il devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = 2r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \quad (1.15)$$

D'où

$$\dot{r} = 0 \implies r = \pm 1 \text{ ou } r = 0.$$

Comme  $r > 0$ , on n'accepte que la racine positive  $r = 1$ . Donc pour  $r = 1$  on a la solution périodique  $(x(t), y(t)) = (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0))$ , avec  $\theta(0) = \theta_0$ . Dans le plan de phase il y a un seul cycle limite dont l'équation  $x^2 + y^2 = 1$  et d'amplitude  $r = 1$ .

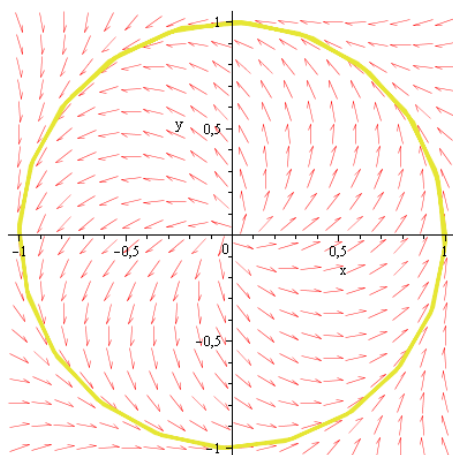


FIGURE 1.7 – cycle limite

**Remarque 1.5.4** Les cycles limites apparaissent seulement pour les systèmes différentiels non linéaires.

## 1.6 Existence et non-existence des Cycles limites

Soit  $X$  un champ de vecteurs de classe  $C^k$  sur  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , donné par l'application  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ .

$$X : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)). \quad (*)$$



On lui associe le système différentiel

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (**)$$

où les fonctions  $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f_i(x)$  (appelées composantes du champ de vecteurs  $X$ ) sont des fonctions de classe  $C^k$  sur l'ouvert  $U$ .

**Définition 1.6.1** L'orbite  $\gamma$  du champ de vecteurs  $X$  passant par le point  $x_0$  est la courbe différentiable formée des points  $x(t)$  de  $U$  de donnés par la solution  $\Phi(x_0, t)$  du système  $(**)$  avec la donnée initiale  $x_0$ . Cette courbe est orientée selon le sens de variation de  $t$ . On distingue éventuellement l'orbite positive  $\gamma_+(p) = \{\phi(p, t), t \geq 0\}$  et l'orbite négative  $\gamma_-(p) = \{\phi(p, t), t \leq 0\}$  passant par le point  $x(0) = x_0$ .

**Théorème 1.6.1 (Poincaré-Bendixson).** Soit le système plan suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (1.16)$$

supposons que  $f, g$  sont des fonctions de classe  $C^1$  sur  $E$ , où  $E$  est un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , le système (1.16) a une orbite  $\gamma$  telle que l'orbite positive  $\gamma_+(p) = \{\phi(p, t), t \geq 0\}$  passant par le point  $p$  est contenue dans un sous ensemble compact  $A$  de  $E$ . Alors on est dans l'un des trois cas suivants :

1. Soit  $\gamma_+(p)$  tend vers un point d'équilibre.
2. Soit  $\gamma_+(p)$  tend vers une orbite périodique.
3. Soit  $\gamma_+(p)$  est une orbite périodique.

Une conséquence très importante de ce théorème est quand  $A$  ne contient pas de points critiques où dans ce cas, on est certain de l'existence d'une solution

périodique.

La difficulté pour l'application de ce résultat est bien la construction de la région (elle correspond souvent à un anneau)  $A$ . Pour cela, cherchons deux cercles  $(C_1)$  et  $(C_2)$  telle que  $(C_1)$  soit à l'intérieur de  $(C_2)$ .

La recherche des cercles  $(C_1)$  et  $(C_2)$  ressemble à la recherche de la fonction de Lyapunov  $v(x, y) = x^2 + y^2, x^4 + y^4, x^4 + y^4, \dots$

Soit  $(C) : v(x, y) = x^2 + y^2 = c$

$$c_1 > 0 : (C_1) : x^2 + y^2 = c_1$$

$$c_2 > 0 : (C_2) : x^2 + y^2 = c_2, \text{ telle que } c_1 < c_2,$$

soit  $C : v(x, y) = x^2 + y^2 = c > 0$ .

Si pour tout point  $p \in (C)$ , on a

$$\left[ \frac{dv}{dt} \right]_p = \frac{dv}{dx} \dot{x} + \frac{dv}{dy} \dot{y} > 0$$

$\Rightarrow$  Toute trajectoire, qui passe par le point  $p$  se dirige vers son extérieur.

respectivement

$$\left[ \frac{dv}{dt} \right]_p = \frac{dv}{dx} \dot{x} + \frac{dv}{dy} \dot{y} < 0$$

$\Rightarrow$  Toute trajectoire, qui passe par le point  $p$  se dirige vers son intérieur.

**Exemple 1.6.1** Montrons que le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + x, \\ \dot{y} = -x - y^3 + y, \end{cases}$$

admet au moins une solution périodique dans une région de  $\mathbb{R}^2$ .

On a le point  $(0,0)$  est le seul point d'équilibre, la matrice jacobienne en  $(0,0)$

est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice admet deux valeurs propres complexes  $\lambda_1 = i + 1$ ,  $\lambda_2 = i - 1$ , donc  $(0,0)$  est un foyer instable pour le système linéarisé  $\Rightarrow$  il reste foyer instable pour le système non linéaire d'après le théorème de Hartman-Grobman.

Cherchons l'anneau  $A$  :

Soit  $v(x, y) = x^2 + y^2 = c_1$

$$\begin{aligned} \left[\frac{dv}{dt}\right]_p &= \frac{dv}{dx}\dot{x} + \frac{dv}{dy}\dot{y} = 2x(y - x^3 + x) + 2y(-x - y^3 + y) \\ &= 2[(x^2 + y^2) - (x^4 + y^4)] \end{aligned}$$

On a si

$$0 < x^2 + y^2 = c_1 < 1$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 < x^2 + y^2$$

donc si on prend  $(C_1) : x^2 + y^2 = c_1$  avec  $0 < c_1$ , on aura  $\frac{dv}{dt} > 0$ .

$\Rightarrow$  toute trajectoire coupant  $C_1$  se dirige vers l'extérieur.

Maintenant si on prend :

$$c_2 = x^2 + y^2 > 2$$

$$\Rightarrow 2(x^4 + y^4) > (x^2 + y^2)^2 > 2(x^2 + y^2) \Rightarrow \frac{dv}{dt} < 0$$

donc pour  $c_2 > 2$  on aura  $\frac{dv}{dt} < 0$ .

$\Rightarrow$  toute trajectoire coupant  $(C_2)$  se dirige vers l'intérieur.

Alors d'après le théorème de Poincaré-Bendixon, il existe au moins une solution périodique dans l'anneau  $A$  formé des deux cercles  $(C_1)$  et  $(C_2)$ . Puisque cet l'anneau ne contient pas de points critiques, alors, il existe au moins une solution périodique dans l'anneau  $A$ .

**Théorème 1.6.2 (Critère de Bendixon).** Soit le système plan

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

et soit  $F = (f, g)^T \in C^1(E)$ ,  $E$  est une région simplement connexe dans  $\mathbb{R}^2$ . Si la divergence du champ de vecteur  $F$  (notée  $\nabla F$ ) et non identiquement nulle et ne change pas de signe dans  $E$ , alors ce système n'a aucune orbite fermée entièrement contenue dans  $E$ .

**Preuve 1.6.1** Supposons que (1.16) possède une solution périodique de période  $T$  noté  $\tau$ , elle correspond à une courbe (orbite) fermée dans  $E$ .

D'après la formule de Green on a :

$$\begin{aligned} \int \int_{G=\text{intérieur de } \tau} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{\tau} f dy - g dx \\ &= \int_0^T [f(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} - g(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}] dt \\ &= \int_0^T [f(x(t), y(t))g(x(t), y(t)) - g(x(t), y(t))f(x(t), y(t))] dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ceci est une contradiction, puisque  $\text{div}F$  est non identiquement nulle et ne change pas de signe, c'est-à-dire, soit négatif soit positif, donc l'intégrale ne

peut pas être nulle . Alors il ne peut pas avoir de solution périodique contenue dans  $E$ .

**Exemple 1.6.2** Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y^4, \\ \dot{y} = x^2 - y^2 - x^2y^3. \end{cases}$$

Soit  $F = (2xy - 2y^4, x^2 - y^2 - x^2y^3)^T$ . On calcule la divergence du champ de vecteur  $F$  on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \nabla F = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - 2y^4) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2 - x^2y^3), \\ &= 2y - 2y - 3x^2y^2 = -3x^2y^2 < 0. \end{aligned}$$

D'où, d'après le critère de Bendixson ce système n'a aucun cycle limite dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Théorème 1.6.3 (Critère de Dulac).** Soit  $F = (f, g)^T \in C^1(E)$  ou  $E$  est une région simplement connexe dans  $\mathbb{R}^2$ . S'il existe une fonction  $B \in C^1(E)$  telle que  $\nabla(BF)$  est non identiquement nulle et ne change pas de signe dans  $E$ , alors le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

n'admet aucune orbite fermée entièrement contenue dans  $E$ .

**Preuve 1.6.2** Supposons qu'il existe une solution périodique de période  $T$  notée  $\tau$ , elle correspond à une courbe (orbite) fermée dans  $E$ .

D'après la formule de Green on a :

$$\iint_{G=\text{intérieur de } \tau} \left( \frac{\partial(Bf(x, y))}{\partial x} + \frac{\partial(Bg(x, y))}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\tau} Bf dy - Bg dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T B[f(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} - g(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}] dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ceci est une contradiction, puisque  $\text{div}F$  est non identiquement nulle et ne change pas de signe, c'est-à-dire, soit négatif soit positif, donc l'intégrale ne peut pas être nulle. Alors il ne peut pas avoir de solution périodique contenue dans  $E$ .

**Exemple 1.6.3** Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ax - by - \alpha x^2 - \beta y^2, \end{cases}$$

soit  $B(x, y) = be^{-2\beta x}$  avec  $F = (y, -ax - by - \alpha x^2 - \beta y^2)^T$ . On calcule la divergence de  $BF$  on obtient :

$$\begin{aligned}
\nabla(BF) &= \frac{\partial}{\partial x}(be^{-2\beta x}y) + \frac{\partial}{\partial y}be^{-2\beta x}(-ax - by - \alpha x^2 - \beta y^2) \\
&= -2\beta be^{-2\beta x}y - b^2e^{-2\beta x} + 2\beta be^{-2\beta x}y = -b^2e^{-2\beta x} < 0,
\end{aligned}$$

donc ce système n'a aucun cycle limite dans  $\mathbb{R}^2$ .

### 1.6.1 Méthode pour obtenir les fonctions de Dulac

La liste des fonctions  $B$  données ci-dessus ne sert qu'à un nombre limité de systèmes. On discute quelques situations plus générales.

On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x, y), \\ \dot{x}_2 = f_2(x, y). \end{cases} \quad (1.17)$$

1. *Premièrement, proposons une autre fonction positive ou négative  $K(x_1, x_2)$  qui s'annule seulement sur un ensemble de mesure nulle qui satisfait*

$$\frac{\partial(f_1 B)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2 B)}{\partial x_2} = K(x_1, x_2).$$

2. *Maintenant choisissons  $K$  pour obtenir quelques résultats.*

*Alors prenons  $K(x_1, x_2) = C(x_1, x_2) \times B(x_1, x_2)$ , avec  $c$  est une fonction positive ou négative qui s'annule uniquement sur un ensemble de mesure nulle, et substituons cette relation dans l'équation précédente pour obtenir l'expression suivante :*

$$f_1 \frac{\partial(B)}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial(B)}{\partial x_2} + B \left( \frac{\partial(f_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2)}{\partial x_2} \right) = C(x_1, x_2) \times B(x_1, x_2). \quad (1.18)$$

*On peut réécrire cette équation comme suit :*

$$f_1 \frac{\partial(B)}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial(B)}{\partial x_2} = B \left( C(x_1, x_2) - \left( \frac{\partial(f_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2)}{\partial x_2} \right) \right). \quad (1.19)$$

3. *Trouvons la solution de cette équation aux dérivées partielles quasiliénaire de premier ordre.*
4. *Finalement, voyons si  $B$  est une fonction de Dulac pour le système (1.17). Jusqu'ici, on a construit une méthode qui nous permet d'écartier les orbites périodiques associées au système d'équations différentielles dans le plan telle qu'elle est résumée dans ce qui suit.*

**Théorème 1.6.4** *Pour le système d'équations différentielles (1.17). une solution  $B$  du système associées (1.19) (pour quelques fonctions  $c$  qui ne changent*

pas de signe et s'annulent seulement sur un sous-ensemble de mesure nulle), est une fonction de Dulac pour le système (1.17) dans toute région  $A$  simplement connexe contenue dans  $D/\{B^{-1}(0)\}$ .

**Corollaire 1.6.1** Pour le système d'équations différentielles (1.17), si (1.19) (pour quelques fonctions  $c$  qui ne changent pas de signe et s'annulent seulement sur un sous-ensemble de mesure nulle) a une solution  $B$  sur  $D$  telle que  $B$  ne change pas de signe et s'annule sur un sous-ensemble de mesure nulle, alors  $B$  est une fonction de Dulac pour le système (1.17) sur  $D$

**Remarque 1.6.1** Avec le choix de  $K$  dans l'étape 2, on obtient une équation linéaire (1.17) qui est simple à manipuler.

**Remarque 1.6.2** Avec le choix de  $c$  utilisé pour simplifier l'équation (1.18), on peut toujours prendre  $c$  une constante non nulle.

## 1.6.2 Application :

Dans cette partie on considère des exemples sur la détermination de la fonction de Dulac

**Exemple 1.6.4** Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2), \\ \dot{x}_2 = 3x_1^2 x_2. \end{cases}$$

D'après l'équation(1.19), on obtient :

$$x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) \frac{\partial B}{\partial x_1} + 3x_1^2 x_2 \frac{\partial B}{\partial x_2} = B[c(x_1, x_2) - (2x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) + 3x_1^2 x_2)],$$

qui est une équation différentielle aux dérivées partielles quasilinéaire.



En appliquant la méthode des caractéristiques, on obtient le système associé suivant

$$\begin{cases} dx_1 = x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) dt, \\ dx_2 = 3x_1^2 x_2 dt, \\ dB = B[c(x_1, x_2) - (2x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) + 3x_1^2 x_2)] dt, \end{cases}$$

des deux premières équations, on élimine le paramètre  $t$  on obtient

$$3x_1^2 x_2 dx_1 = x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) dx_2.$$

Résolvons cette équation, on obtient la première caractéristique

$$3x_1 + x_2 \sin x_2 + \cos x_2 - \frac{1}{2} x_2^2 = c_1,$$

prenons  $c = 3x_1^2$  dans la dernière équation et on multiplie l'équation par  $x_1$ , on trouve

$$x_1 dB = -B(2x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2)) dt.$$

Alors la solution est

$$B = \exp\left(-\int 2x_1 x_2^2 (1 - \cos x_2) dt\right).$$

**Exemple 1.6.5** Considérons le système :

$$\begin{cases} dx_1 = -2x_1 x_2, \\ dx_2 = x_1^2 x_2^2 \cos x_1 + (1 + x_1^2) x_2 + x_2^2. \end{cases}$$

Utilisons l'équation(1.19), et prenons  $c = 1 + x_1^2$  on obtient :

$$-2x_1x_2\frac{\partial B}{\partial x_1} + (x_1^2x_2^2 \cos x_1 + (1 + x_1^2)x_2 + x_2^2)\frac{\partial B}{\partial x_2} = -B(x_1^2x_2^2 \cos x_1).$$

Supposons que  $B$  dépend uniquement de  $x_1$ , on trouve

$$-2x_1x_2\frac{\partial B}{\partial x_1} = -B(2x_1^2x_2 \cos x_1),$$

Alors la solution est

$$B = \exp\left(\int x_1 \cos x_1\right).$$

## 1.7 Théorie de bifurcation

*Les systèmes d'équations différentielles paramétrées peuvent avoir différents comportements asymptotiques (tendre vers un équilibre, un cycle limite ,....) en fonction des valeurs de leurs paramètres. Ils existent certaines valeurs pour lesquelles le comportement du système passe d'un état qualitatif à un autre. Ce changement d'état qualitatif est une bifurcation et la valeur associée du paramètre est appelée valeur de bifurcation.*

*La théorie de bifurcation des champs de vecteurs a pour but de décrire les modifications du portrait de phase des champs de vecteurs qui dépendent différemment d'un paramètre  $\mu$*

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (1.20)$$

où  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1(E)$ ,  $E$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemple 1.7.1** soit le système différentiel paramétré :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \mu x, \\ \dot{y} = -x + \mu y. \end{cases} \quad (1.21)$$

le système (1.21) a un seul point d'équilibre (0.0) la matrice associée est :

$$\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$$

elle admet les valeurs propres  $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$ .

-si  $\mu < 0$ , alors l'origine est foyer stable.

-si  $\mu > 0$ , alors l'origine est foyer instable.

-si  $\mu = 0$ , cette matrice admet une pair de valeurs propres imaginaires pures, donc l'origine est un centre.

Quand ce paramètre change de signe (c-à-d passant du négatif au positif), le système change de stabilité et passe de stable à instable.

On dit qu'il y a une bifurcation et dans ce cas  $\mu=0$  est la valeur de bifurcation.

**Exemple 1.7.2** (Bifurcation selle-noeud). Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + \mu, \\ \dot{y} = -y. \end{cases} \quad (1.22)$$

Selon le signe de  $\mu$ , on distingue trois cas :

1. Si  $\mu < 0$  dans ce cas le système admet deux points d'équilibre de coordonnées :  $(-\sqrt{-\mu}, 0)$  et  $(\sqrt{-\mu}, 0)$ .

La matrice jacobienne associée au système s'écrit

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Au point  $(-\sqrt{-\mu}, 0)$ , la matrice jacobienne s'écrit

$$J(-\sqrt{-\mu}, 0) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{-\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice admet deux valeurs propres réelles négatives  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -2\sqrt{-\mu}$  d'où le point d'équilibre  $(\sqrt{-\mu}, 0)$  est un noeud stable.

Au point  $(\sqrt{-\mu}, 0)$ , la matrice jacobienne s'écrit

$$J(\sqrt{-\mu}, 0) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{-\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice admet deux valeurs propres réelles de signes opposés

$\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 2\sqrt{-\mu}$  d'où le point d'équilibre est un point selle instable.

Donc, quand  $\mu < 0$ , le système admet deux points d'équilibre, le premier de type noeud et le deuxième de type selle.

2. Si  $\mu = 0$ , le système (1.22) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

L'unique point critique du système est l'origine. La matrice jacobienne associée s'écrit

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc le point d'équilibre  $(0,0)$  est non hyperbolique.

3. si  $-\mu > 0$ , dans ce cas le système (1.22) n'admet aucun point d'équilibre car  $x \in \mathbb{R}$ .

Cette bifurcation est une bifurcation appelée "**Selle-noeud**" correspond à l'apparition de deux points d'équilibre, l'un stable (un noeud) et l'autre instable (un point selle) et au point de bifurcation  $\mu = 0$  les deux points d'équilibre disparaissent et un point non hyperbolique apparaît, qui en  $\mu > 0$  lui-même disparaît : cette bifurcation correspond donc au changement de nombre de points d'équilibre et leur stabilité.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à un autre type de bifurcation locale appelée la **bifurcation d'un centre linéaire**. On considère un système différentiel plan paramétré (qui dépend de  $\varepsilon = 0$ ), on étudie s'il y a naissance d'orbites périodiques lorsqu'on varie le paramètre  $\varepsilon$ .

## Chapitre 2

# Méthode de moyennisation

*La méthode de la moyennisation est l'une des plus importantes méthodes perturbatives utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. Cette méthode donne une relation quantitative entre les solutions d'un système différentiel périodique non autonome et celle de son système différentiel moyenné lequel est autonome.*

*L'idée de base de cette méthode peut être datée de la fin du 18<sup>ème</sup> siècle avec les travaux de Lagrange et Laplace en 1788 qui ont donné une justification intuitive de la méthode. Dans ce chapitre, nous introduisons la théorie de moyennisation. Nous allons citer le théorème essentiel de moyennisation utilisé pour accomplir les travaux de ce mémoire, nous présentons la méthode de moyennisation d'ordre un appliquée aux équations différentielles contenant un petit paramètre  $\varepsilon$  de la forme*

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon),$$

où  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Définition 2.0.1** *On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $f(t, x, \varepsilon)$  continue par rapport à  $t \in \mathbb{R}$  et  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ , où  $\varepsilon$  est un petit paramètre. La*

fonction  $f$  est développable en série relativement à  $\varepsilon$ . Dans ce cas,  $f$  admet un développement en série de Taylor au voisinage de  $\varepsilon = 0$ , d'où

$$f(t, x, \varepsilon) = f(t, x, 0) + \varepsilon f_1(t, x) + \varepsilon^2 f_2(t, x) + \dots + \varepsilon^n f_n(t, x) + \dots$$

Les coefficients  $f_1, f_2, \dots, f_n$  dépendent de  $t$  et de  $x$ . Les expressions  $\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n$ , sont appelées des fonctions d'ordre.

**Définition 2.0.2 (notation de  $O$ ).** Considérons les fonctions  $f(t, x, \varepsilon), g(t, x, \varepsilon)$  avec  $t \geq 0, x \in D \subset \mathbb{R}^n$ , la relation  $O$  est une relation de domination d'une fonction  $f$  par une fonction  $g$ . on écrit  $f = O(g)$  où  $f(t, x, \varepsilon) = O(g(t, x, \varepsilon))$  si :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t, x, \varepsilon)}{g(t, x, \varepsilon)} = 0$$

**Définition 2.0.3 (Le temp d'échelle).**

Considérons la fonction  $f(t, x, \varepsilon), t \geq 0, x \in D \subset \mathbb{R}^n$ , et les fonctions d'ordre  $\delta_1(\varepsilon)$  et  $\delta_2(\varepsilon)$ . On dit que

$$f(t, x, \varepsilon) = O(\delta_1(\varepsilon)) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0,$$

sur le temps d'échelle  $1/\delta_2(\varepsilon)$  si l'estimation est valide pour  $x \in D, 0 \leq \delta_2(\varepsilon)t \leq C$ , où  $C$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ .

**Exemple 2.0.3** Soit  $f(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^2 t \sin x, t \geq 0, x \in \mathbb{R}$ , on a

$$f(x, t, \varepsilon) = O(\varepsilon) \text{ sur le temp d'échelle } 1/\varepsilon,$$

$$f(x, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{1/2}) \text{ sur le temp d'échelle } 1/\varepsilon^{3/2}.$$

Maintenant Avant de présenter le théorème de moyennisation, on donne quelques définitions sur la moyenne d'une fonction.



**Définition 2.0.4** On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui est continue et  $T$ -périodique en la première variable  $t$ . On appelle fonction moyennée  $f^0$  de  $f$ , la fonction définie par

$$f^0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt.$$

**Définition 2.0.5** Soit  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue. On dit que  $f$  a une moyenne notée  $f^0$  si la limite

$$f^0(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\tau, x) d\tau,$$

existe et

$$\left\| \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\tau, x) d\tau - f^0(x) \right\| \leq k\sigma(T), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

avec  $k \geq 0$  et  $\sigma : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  est une fonction strictement décroissante continue et bornée telle que  $\sigma(T) \rightarrow 0$  quand  $T \rightarrow \infty$ .

## 2.1 Théorème de moyennisation

Considérons le problème à valeur initiale suivant

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0. \quad (2.1)$$

On suppose que  $f(t, x)$  est  $T$ -périodique en  $t$  et on introduit la moyenne

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt.$$

Considérons maintenant le problème

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0 \quad (2.2)$$

**Théorème 2.1.1** Soient les problèmes aux valeurs initiales (2.1) et (2.2) avec  $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ . Supposons que

1.  $f, g$  et  $D_x f$  sont continues et bornées par une constante  $M$  indépendante de  $\varepsilon$  dans  $[0, +\infty) \times D$ .
2.  $g$  est Lipschitzienne en  $x \in D$ .
3.  $f(t, x)$  est  $T$ -périodique en  $t$ ,  $T$  est indépendante de  $\varepsilon$ .
4.  $y(t)$  est continue dans l'intérieur de  $D$ .

Alors, on a  $x(t) - y(t)$  est de l'ordre  $O(\varepsilon)$  pendant un temps d'échelle  $1/\varepsilon$

**Lemme 2.1.1 (Gronwall).** Supposons que pour  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$

$$\Phi(t) \leq \delta_2(t - t_0) + \delta_1 \int_{t_0}^t \Phi(s) ds + \delta_3,$$

où  $\Phi(t)$  est une fonction continue,  $\Phi(t) \geq 0 \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T$ ,  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  sont des constantes avec  $\delta_1 > 0, \delta_2 \geq 0, \delta_3 \geq 0$ . Alors

$$\Phi(t) \leq \left( \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) e^{\delta_1(t-t_0) - \frac{\delta_2}{\delta_1}},$$

pour  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ .

**Preuve 2.1.1** Les hypothèses (1) et (2) nous assurent l'existence et l'unicité de la solution des problèmes aux valeurs initiales (2.1) et (2.2) sur l'échelle du temps  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Posons :

$$u(t, y) = \int_{t_0}^t (f(s, y) - f^0(y)) ds.$$

On a

$$\|u(t, y)\| \leq 2MT \text{ pour } t \geq t_0 \text{ et } y \in D,$$

maintenant , nous introduisons

$$z(t) = y(t) + \varepsilon u(t, y(t)).$$

Comme  $y(t) \in D$ ,  $\forall t \geq t_0$ , on a l'estimation

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq \|x(t) - z(t)\| + \|z(t) - y(t)\| \\ &\leq \|x(t) - z(t)\| + \varepsilon \|u(t, y(t))\| \\ &\leq \|x(t) - z(t)\| + 2\varepsilon MT. \end{aligned}$$

Notons que

$$x(t) - z(t) = \int_{t_0}^t \left( \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} \right) ds,$$

calculons

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} = \varepsilon f(t, x(t)) + \varepsilon^2 g(t, x(t), \varepsilon) - \frac{dy}{dt} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) \cdot \frac{dy}{dt} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(t, y(t)).$$

Remplaçons  $\frac{dy}{dt}$  par  $\varepsilon f^0(y)$ , on aura

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} = \varepsilon f(t, x(t)) + \varepsilon f(t, z(t)) + \mathbf{R},$$

où

$$\mathbf{R} = \varepsilon^2 g(t, x(t), \varepsilon) - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) f^0(y) - \varepsilon f(t, y(t)) - \varepsilon f(t, z(t)).$$

On a

$$\|f^0(y)\| \leq M \text{ et } \left\| \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) \right\| \leq 2MT,$$

grâce à la continuité lipschitzienne de  $f$  nous avons

$$\begin{aligned} \|f(t, z(t)) - f(t, y(t))\| &\leq L \|z(t) - y(t)\| \\ &\leq L\varepsilon \|u(t, y(t))\| \\ &\leq 2L\varepsilon MT, \end{aligned}$$

donc il existe une constante  $k$  telle que

$$\|\mathbf{R}\| \leq k\varepsilon^2.$$

C'est clair que

$$\begin{aligned} \|x(t) - z(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \left\| \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} \right\| \\ &\leq \varepsilon \int_{t_0}^t \|f(t, x(t)) - f(t, z(t)) + k\varepsilon\| ds \\ &\leq \varepsilon \int_{t_0}^t \|f(t, x(t)) - f(t, z(t)) + k\varepsilon\| ds \\ &\leq \varepsilon L \int_{t_0}^t \|f(t, x(t)) - f(t, z(t)) + k\varepsilon\| ds. \end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall

$$\|x(t) - z(t)\| \leq \varepsilon \frac{k}{L} e^{\varepsilon L(t-t_0)} - \varepsilon \frac{k}{L},$$

par conséquent

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon \left( \frac{k}{L} e^{\varepsilon L(t-t_0)} - \frac{k}{L} + 2MT \right).$$

Si  $e^{\varepsilon L(t-t_0)}$  est borné par une constante indépendante de  $\varepsilon$ , on aura l'approximation

$$x(t) = y(t) - O(\varepsilon) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

## 2.2 Théorème de moyennisation du premier ordre

On considère le problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \varepsilon F(t, \mathbf{x}(t)) + \varepsilon^2 R(t, \mathbf{x}(t), \varepsilon) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

avec  $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D$  est un domaine borné est  $t \geq 0$ . On suppose que  $F(t, \mathbf{x})$  et  $R(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$  sont des fonctions  $T$ -périodiques en  $t$ .

Le système moyenné associé au système (2.3) est défini par :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t) = \varepsilon f^0(\mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (2.4)$$

où

$$f^0(\mathbf{y}) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, \mathbf{y}) ds. \quad (2.5)$$

Le Théorème suivant nous donne les conditions pour lesquelles les points singuliers du système moyenné (2.4) fournissent des solutions périodiques pour le système (2.3).

**Théorème 2.2.1** *Considérons le système (2.3) et supposons que les fonctions vectorielles  $F, R, D_x F, D_x^2 F$ , et  $D_x, R$  sont continues et bornées par une constante  $M$  (indépendante de  $\varepsilon$ ) dans  $[0, \infty[ \times D$  avec  $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . De plus, on suppose que  $F$  et  $R$  sont  $\Gamma$ -périodiques en  $t$  avec  $\Gamma$  indépendante de  $\varepsilon$ .*

1. Si  $p \in D$  est un point singulier de système moyenné (2.4) tel que :

$$\det(D_x f^0(p)) \neq 0, \quad (2.6)$$

alors pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, il existe une solution  $\Gamma$ -périodiques  $x_\varepsilon(t)$  du système (2.3) telle que  $x_\varepsilon(t) \rightarrow p$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

2. Si le point singulier  $y = p$  du système moyenné (2.4) est hyperbolique alors pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, la solution périodique correspondante  $x_\varepsilon(t)$  du système (2.3) est unique, hyperbolique et de même stabilité que  $p$ .

# Chapitre 3

## Applications

*Dans ce chapitre, on s'intéresse à quelques applications de la méthode de moyennisation pour étudier les cycles limites des systèmes différentiels plan dépendant d'un paramètre  $\varepsilon$ .*

### 3.1 Applications 1.

*Considérons l'équation de Van Der Pol :*

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x},$$

*qui peut s'écrire sous la forme :*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases} \quad (3.1)$$

*En coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)$ , avec :*

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} \\ \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}, \end{cases}$$

ce système devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2(\theta), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \cos(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin(\theta), \end{cases}$$

en divisant  $\dot{r}$  par  $\dot{\theta}$ , on trouve :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2(\theta)}{-1 + \varepsilon \cos(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin(\theta)}.$$

Or :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + O(x^2), \quad |x| < 1.$$

En posant  $x = \varepsilon \sin(\theta) \cos(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta))$ , on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2(\theta) + O(\varepsilon^2).$$

On calcule la fonction moyennée :

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, r) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2(\theta) d\theta \\ &= f^0(r) = \frac{1}{8} r(r^2 - 4). \end{aligned}$$

Maintenant :

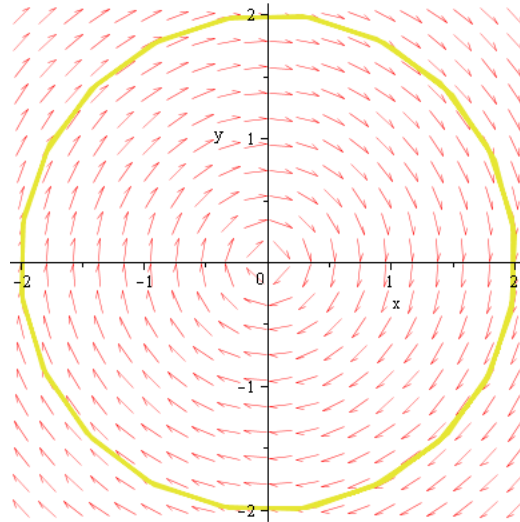
$$f^0(r) = \frac{1}{8} r(r^2 - 4) = 0 \Rightarrow r = 2, \text{ (puisque } r \text{ doit être positif).}$$

$$\text{(Sachant que : } f^{0'}(r) = \frac{1}{8}(3r^2 - 4)\text{).}$$

La seule racine positive de  $f^0(r)$  est  $r = 2$ . Comme  $(\frac{df^0}{dr})(2) = 1$ , d'après le Théorème (2.2.1) il suit que le système (3.1) pour  $|\varepsilon| \neq 0$  suffisamment petit, admet un cycle limite qui est l'orbite périodique de rayon 2 du système non perturbé (3.1) avec  $\varepsilon = 0$ .

De plus, comme  $(\frac{df^0}{dr})(2) = 1 > 0$ , ce cycle limite est instable.



FIGURE 3.1 – cycle limite instable de système (3.1) pour  $\varepsilon = 0.01$ 

## 3.2 Application 2.

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(-x + x^2y), \\ \dot{y} = x + \varepsilon(-y + yz + z^2), \\ \dot{z} = \varepsilon(y + x^2 + yz - 1), \end{cases} \quad (3.2)$$

En coordonnées cylindriques  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  et  $z = z$ , le système (3.2) devient :

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \varepsilon(r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) + \sin(\theta)z^2 - r + rz - rz \cos^2(\theta)), \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 + \frac{1}{r}\varepsilon(rz \cos(\theta) \sin(\theta) + \cos(\theta)z^2 - \cos^2(\theta)r^3 + r^3 \cos^4(\theta)), \\ \frac{dz}{dt} = \varepsilon(r \sin(\theta) + r^2 \cos^2(\theta) + rz \sin(\theta) - 1). \end{cases}$$

On considère  $\theta$  comme nouvelle variable indépendante. d'où

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon(r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) + \sin(\theta)z^2 - r + rz - rz \cos^2(\theta)), \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon(r \sin(\theta) + r^2 \cos^2(\theta) + rz \sin(\theta) - 1). \end{cases} \quad (3.3)$$

Le système (3.3) est de la forme

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta, z) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon F_2(r, \theta, z) + O(\varepsilon^2), \end{cases}$$

où  $F_1, F_2$  sont périodique de période  $2\pi$ , Calculons maintenant les fonctions moyennées, on obtient

$$\begin{cases} f_1(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta, z) d\theta = \frac{1}{2}r(z - 2), \\ f_2(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta, z) d\theta = \frac{1}{2}r^2 - 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

On résout le système :

$$\begin{cases} f_1(r, z) = \frac{1}{2}r(z - 2) = 0, \\ f_2(r, z) = \frac{1}{2}r^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

On obtient les deux racines :

$$(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2), \quad (r_2, z_2) = (-\sqrt{2}, 2).$$

Comme  $r$  doit être positif, la solution  $(r_1, z_1)$  est la seule qui fournisse un cycle limite.

On vérifie maintenant que le déterminant calculé en cette racine est non nul :

$$D(r_1, z_1) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z - 1 & \frac{1}{2}r \\ r & 0 \end{pmatrix}_{(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2)} = -1 \neq 0.$$

D'après le Théorème (2.2), le système (3.2) a pour  $|\varepsilon|$  suffisamment petit un seul cycle limite.

Le point singulier  $(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2)$  du système moyenné (3.4) est hyperbolique, donc la stabilité du cycle limite est de même stabilité que  $(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2)$ . Les valeurs propres  $\pm 1$  de  $D_{r,z}f^0$  sont de signe différents,

alors le point singulier est un point selle qui est toujours instable. Donc, le cycle limite est instable.

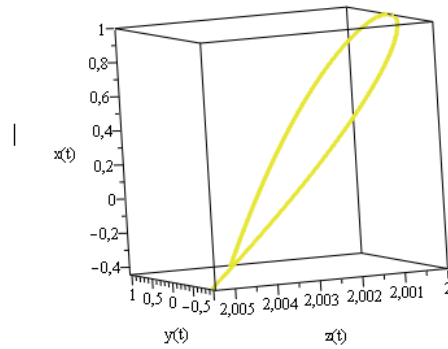


FIGURE 3.2 – cycle limite instable de système (3.2) pour  $\varepsilon = 0.001$

# *Conclusion*

*Ce mémoire porte sur un aspect important de la théorie qualitative des systèmes différentiels planaires, à savoir les cycles limites.*

*Un outil très important a été utilisé pour étudier les cycle limites des systèmes différentiels dépendant d'un paramètre est la théorie de moyennisation. Cette théorie a été abondamment utilisée ces dernières années, elle a donné de bon résultats et a été appliqué par différents Mathématiciens .*

# Bibliographie

- [1] *Badi sabrina*. Polycopiés de cours Master1, Cours : Introduction aux systèmes dynamiques .
- [2] *Bendib El-ouahma*, Thèse de Doctorat : Sur Le nombre maximum de cycles des équations différentielles de Liénard et bifurcation de hopf. Université Badji Mokhtar. Annaba. **2017**.
- [3] *Ellaggoune Selma* , Thèse de Doctorat : Le nombre maximum de cycles limites pour une classe généralisée des équations de Liénard. Université 8 Mais 1945 Guelma. **2018**.
- [4] *Sanders JA, F.Verhulst*. Averaging methods in nonlinear dynamical systems. Appelled Mthematical Sciences, New York : Springer-Velag, **1985**.