République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

<u>Mémoire</u>

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP Et Analyse numérique**

Par : AISSAOUI Insaf
GUELMI Henen

Intitulé

Sur Les Systèmes Dynamiques Hamiltoniens

<u>Dirigé par</u> : SELLAMI Nabil

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. BOUAFIA Moussaab	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. SELLAMI Nabil	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. BENARIOUA Khadir	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2019

Remerciements

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Toute notre gratitude à notre promoteur :

Dr.SELLAMI NABIL d'avoir accepté d'encadrer ce travail, Nous remercions pour ses conseils judicieux, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Nous remercions également tous les membres de jury pour avoir accepté d'évaluer, discuter et examiner ce modeste travail.

Dernier grâce, surtout, allé à mes parents.

Nous remerciements à tout le personnel du département de Mathématique.

Dédicace

Je dédie ce fameux travail à ceux qui me sont les plus chers au monde.

Ma mère ; à qui je dois tout le respect pour sa gentillesse, sa noblesse et son amour.

Mon père ; qui m'a suivi le long de mon chemin scolaire, qu'il n'a jamais

Cesse de consentir pour ma réussite et mon bonheur, je lui offre ce modeste

Ouvrage pour témoigner tout mon respect et mon amour et j'espère qu'il serait très fier.

A mon mari et mon fils.

Spécialement aux poussins **: Mouamin, Marwan, Ranya, Lamar, Yahia, Mouatez,**

Anfel, Rahim.

A mes oncles et mes tantes et leurs maris

Atout ma famille. Surtout mes sœurs **Linda, sabrina, Saliha** et mes frère **Mohamed,**

Yazid, Fateh, Khemissi.

A mon binôme : **Aissaoui Insaf**

A tous mes amis **: Karima, Selma, Soheyr, Imen.**

HENEN

Dédicace

Je dédie ce fameux travail à ceux qui me sont les plus chers au monde.

Ma mère ; à qui je dois tout le respect pour sa gentillesse, sa noblesse et son amour.

Mon père ; qui m'a suivi le long de mon chemin scolaire, qu'il n'a jamais

Cesse de consentir pour ma réussite et mon bonheur, je lui offre ce modeste

Ouvrage pour témoigner tout mon respect et mon amour et j'espère qu'il serait très fier.

A mon mari et mon fils qui et m'ont toujours apporté leur support moral, et lui souhaite une vie pleine de santé et d'amour.

A mes grands-parents pour leur soutien.

A mes frères : **Nacereddine, Charafeddine, Nedjmeddine**.

Ames cousines : **Zeyneb, Asmaa (**je lui souhaite de réussir au baccalauréat**).**

A mon binôme : **Guelmi Henen**

A tous mes amis : **Karima, Selma, Soheyr, Imen, Mouna, Salwa, Amira, Rawiya.**

INSAF

ملخص

مغزى هده المدكرة هو دراسة الجمل الميكانيكية الهاميلتونية نقوم بعرش تمهيدي مختصر لهدا النوع الهام من الجمل التفاضلية ودلك من خلال دراج

{ النواس .البسيط. المدبدب. المتناسق......}

بعد دلك نهتم أساسا بدراسة جمل هاملتون القابلة لمكاملة و ميزاتها البارزة

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire, on étudie les systèmes dynamiques hamiltoniens. On présente une brève introduction à ce type important de systèmes différentiels en introduisant leurs propriétés essentielles et on donne des exemples concrets (Pendule simple, oscillateur harmonique,...) qui illustrent leurs comportements, puis on s'intéresse à l'étude des systèmes hamiltoniens intégrables et leurs caractéristiques remarquables.

Introduction

Les systèmes dynamiques modélisent beaucoup de phénomènes physiques, astronomiques,...,ils sont divisés en deux grandes catégories : les systèmes dissipatifs, qui sont soumis à des frottements et les systèmes non dissipatifs, ou Hamiltoniens, sans frottements, dont l'énergie se conserve au cours du temps. Les mouvements des corps célestes, planètes, étoiles, astéroïdes dont les frottements sont négligeables sont des exemples de mouvements Hamiltoniens.

La mécanique hamiltonienne a été présentée en 1833 par le mathématicien, physicien et astronome irlandais William Rowan Hamilton, c'est une reformulation de la mécanique classique donnée par Joseph Louis Lagrange en 1788.

Un système hamiltonien est un système mécanique régi par les équations de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}, \ i = 1, ..., n \ ,$$

avec H est le hamiltonien qui est une fonction qui ne dépend pas explicitement du temps, i.e $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = 0$ et H =constante s'interprète comme l'énergie totale invariante du système ou l'intègrale première du système.

S'il arrive que d'autres quantités que l'énergie soient conservées, elles aussi, on les appelle des intégrales premières du système hamiltonien. En 1835, J Liouville a démontré que la connaissance de n intégrales premières indépendantes en involution (n fonctions $f_1, ..., f_n$ vérifiant $[f_i, f_j] = 0$, $\forall i, j = 1, ..., n$), implique la nature quasi-périodique des solutions et qu'on peut résoudre le système par des quadratures en calculant des intégrales. De nos jours, les systèmes qui satisfont cette condition de Liouville sont dits "intégrables". Le crochet utilisé ici est le crochet de Poisson introduit par le mathématicien français Siméon Denis Poisson en 1809, qui joue un rôle fondamental en mécanique et en physique.

Ce mémoire représente une introduction à la théorie des systèmes hamiltoniens, il comporte trois chapitres :
Le premier chapitre est un chapitre préliminaire sur la théorie qualitative des équations différentielles et des systèmes dynamiques. On commence par les systèmes différentiels autonomes et non autonomes, les points critiques, la linéarisation et on termine par la classificationdes points critiques d'un système autonome dans $\mathbb{R}^2$.
Dans le deuxième chapitre, on étudie les systèmes hamiltoniens. Après avoir définit les systèmes hamiltoniens et donner des exemples concrets à savoir le pendule simple et l'oscillateur harmonique, on caractérise les points critiques non dégénérées d'un système hamiltonien et on passe à démontrer qu'un système hamiltonien est conservatif puis on termine par l'étude des transformations canoniques qui conservent la forme hamiltonienne du système.
Le dernier chapitre est consacré à l'étude des système hamiltoniens intégrables. Premièrement, on introduit le crochet de Poisson avec ses propriétés, ensuite on passe à la notion d'intégrabilité d'un système hamiltonien et on termine par les deux théorèmes de Liouville sur les variables d'action et angulaires et sur la conservation du volume.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Système autonome et non autonome

Considérons un système de n équations différentielles du premir ordre :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

Avec : $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ est un champ de vecteurs, nous supposons que f_i sont de classe $C^r (r \geq 1)$ en x et t, dans ce cas les fonctions $x_i(t)$ sont aussi de classe C^r.

Par un changement de variables approprié, les équations différentielles d'ordre n, $n > 1$, peuvent se transformer en un système d'équations différentielles d'ordre 1.

L'équation :

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt^2}, ..., \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}, t\right) \tag{1.2}$$

peut s'écrire sous la forme d'un système :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ . \\ . \\ . \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \frac{dx_n}{dt} = f(x_1, x_2, ..., x_n, t) \end{cases} \tag{1.3}$$

En effet ; si on pose

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \frac{dx}{dt} \\ x_3 = \frac{d^2x}{dt^3} \\ . \\ . \\ . \\ x_n = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \end{cases} \text{, On obtient : } \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ . \\ . \\ . \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \frac{dx_n}{dt} = f(x_1, x_2...., x_n) \end{cases}$$

Définition 1.1 [6]
Lorsque le champ de vecteur f dépend explicitement du temps, le système est dit non autonome.
Dans le cas contraire, on dit que le système est autonome.
Dans un système autonome, la trajectoire $x(x_0, t)$ ne dépend pas du temps initial t_0, alors. que dans un système non autonome elle dépend de t_0.
Définition 1.2 (flôt)
L'ensemble des applications : $e^{At} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ décrivent le mouvement des points $x_0 \in \mathbb{R}^n$ le long des trajectoires du système :

$$\dot{x} = Ax$$

Cet ensemble des applications est applé le flôt du système linéaire $\dot{x} = Ax$.

1.2 Points critiques

Définition 1.3 [6]
Soit le système non linéaire suivant :

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.4}$$

on appelle point critique (ou point fixe ou point d'équilibre ou point stationaire), le point $\hat{x}$ de l'espace des phases obtenu en annulant le second membre de (1.4).

$f(\hat{x}) = 0 \Rightarrow \hat{x}$ est un point critique.

Définition 1.4 [6]
Si aucune des valeurs propres de $A = Df(0)$ n'a de partie réelle nulle, ou $Df(0)$ est la matrice jacobienne de f en $x = 0$, alors le point $x = 0$ est appelé point critique hyperbolique de système (1.4)

Exemple 1.1
Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

Le point critique est $(0, 0)$.
Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 - 1 \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$$

les points critiques sont $(1, 0)$, $(-1, 0)$.

1.3 Linéarisation et Système linéarisé

Soit le système : (1.4)
Supposons que par un changement de coordonnées, le point fixe ait été ramené à l'origine ; $f(0) = 0$, le développement de Taylor de f en $x = 0$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
f(x) &= Df(0)x + \frac{1}{2}D^2f(0)(x,x) + \frac{1}{3}D^3f(0)(x,x,x) + ... \\
Df(x)x &= \sum_j (\frac{\partial f(x)}{\partial x_j})x_j \\
Df(x)(x,x) &= \sum_{ij} (\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j})x_i x_j \\
f(x)(x,x,x) &= \sum_{ijk} (\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k})x_i x_j x_k \\
&\;\;. \\
&\;\;. \\
&\;\;.
\end{aligned}$$

La matrice $Df(x) = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ s'appelle matrice jacobienne de $f(x)$. (Son déterminant est le jacobien).
Le système : $\dot{x} = Ax$ où $A = Df(0)$ est appelé système linéarisé du système (1.4)
Dans $\mathbb{R}^2$, on considère le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{array} \right. \tag{1.5}$$

Le système linéarisé s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial g(0,0)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où $(0,0)$ est le point critique.
Exemple 1.2
Soit le système non linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = -x - 3y^3 \end{array} \right.$$

Le point critique est (0.0).
Le linéarisé de ce système en (0.0) est :
$\dot{X} = Df(0,0)X$ où $Df(x,x) = \begin{pmatrix} -3x^3 & 1 \\ -1 & -9y^3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Donc le système devient :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Théorème 1.1 [6]

Si x_0 est un point d'équilibre hyperbolique du système $\dot{x} = f(x)$, alors il existe un voisinage de ce point dans lequel le dernier système est topologiquement équivalent à son linéarisé $\dot{x} = Df(0)x$ c-à-d il existe un homéomorphisme préservant l'orientation qui applique les trajectoires de $\dot{x} = f(x)$ sur celle de $\dot{x} = Df(0)x$.

1.4 Portrait de phase et plans de phase

Définition 1.5 [6]

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases} \tag{1.6}$$

où P, Q sont des polynômes en x et y.

– Les solutions $(x(t), y(t))$ de (1.6) représentées dans le plan x, y par des courbes applées orbites (trajectoires).

– Les points critiques de (1.6) sont des solutions constantes.

– La figure complète des orbites du système (1.6), ainsi que les points critiques représentées dans le plan x, y s'appelle portrait de phase, et le plan x, y est appelé plan de phase.

1.5 Classification des points critiques

1.5.1 Pour les systèmes linéaires.

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \tag{1.7}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Nous allons distnguer plusieurs cas , selon les valeurs propres de A.

1) A a deux valeurs propres réelles distinctes.

Soit λ_1 et λ_2 sont des valeurs propres, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dans ce cas la matrice A est diagonalisable, après un changement de base, on peut supposer :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et le système se réduit à :

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases} \tag{1.8}$$

la solution de (1.8) avec $x(0) = (x_0, y_0)$ est :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

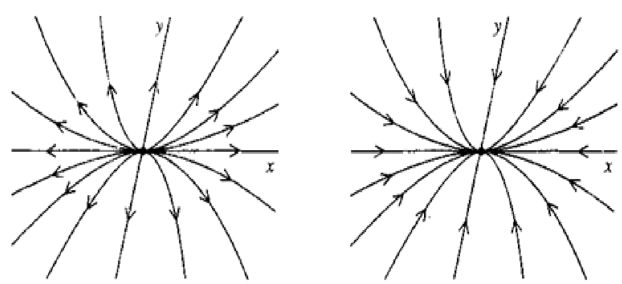
de sorte que les courbes intégrales (les orbites) sont les courbes $y = cx^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$.

Deux sous cas sont distingués :

a) Cas où les valeurs propres de A sont de même signe

Désignons par : $|\lambda_1| < |\lambda_2|$.

on dit qu'on a affaire à un nœud impropre.



$0 < \lambda_1 < \lambda_2$ $\qquad$ $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

Figure (1.1) : Nœud impropre.

b) Cas où les valeurs propres de A sont de signes contraires

Supposons par exemple que : $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

il s'agit d'un col (selle) :

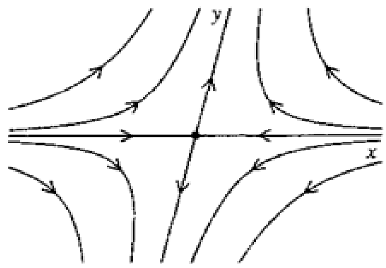


Figure (1.2) : Col (Selle).

2) A a une valeur propre double
Soit λ cette valeur propre, nous avons, $\lambda \neq 0$, deux sous cas doivent être distingués.
a) A **est diagonalisable**
Dans ce cas, les courbes intégrales sont données par

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda t} \end{cases}$$

ce sont les droites $y = cx$, c est une constante, on dit qu'on a affaire à un nœud propre.

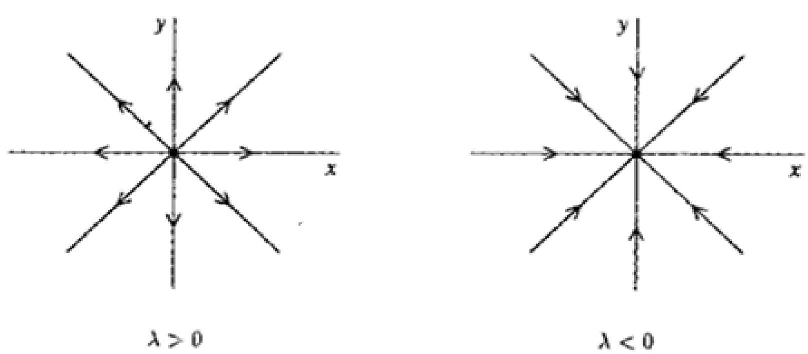


Figure (1.3) :Nœud propre.

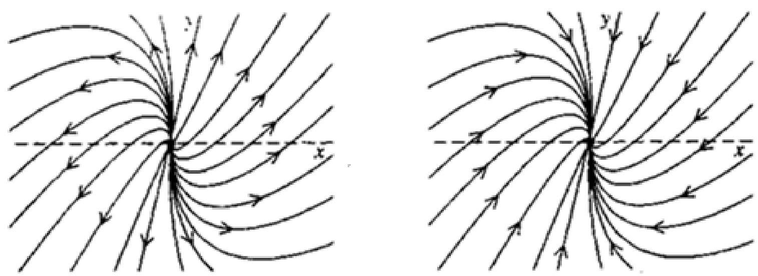
b) A est non diagonalisable
Alors il existe une base dans laquelle la matrice A et le système s'écrivent :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = x + \lambda \end{array} \right.$$

les courbes intégrale sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = (y_0 + x_0 t) e^{\lambda t} \end{array} \right.$$

Donc $y = (c + t)x$ où $c \in \mathbb{R}$, $t = \frac{\ln x - \ln x_0}{\lambda}$.
on dit qu'il s'agit d'un nœud exceptionnel



$\lambda > 0$ $\lambda < 0$

Figure (1.4) : Nœud exceptionnel.

3) Cas où A à deux valeurs propres complexes conjuguées
On notera ces deux valeurs propres par $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, avec α et β sont réels et $\beta > 0$.
on sait qu 'il existe une base dans laquelle la matrice A et le système s'écrivent :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \alpha x - \beta y \\ \dot{y} = \beta x + \alpha y \end{array} \right.$$

sa solution générale est

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = (x(0) \cos \beta(t) - y(0) \sin \beta(t)) e^{\alpha t} \\ y(t) = (y(0) \cos \beta(t) - x(0) \sin \beta(t)) e^{\alpha t} \end{array} \right.$$

► Lorsque $\alpha = 0$:
L'origine est le point d'équilibre, on dit que c'est un centre, le portrait de phase correspondant est représenté sur la partie centrale de la Figure (1.5).
► Lorsque $\alpha < 0$:
L'origine est le point d'équilibre, on dit que c'est un foyer, le portrait de phase correspondant est représenté sur la partie droite de la figure (1.5).
► Lorsque $\alpha > 0$:
L'origine est le point d'équilibre, on dit que c'est un foyer aussi, le portrait de phase correspondant est représenté sur la partie gauche de la figure (1.5).

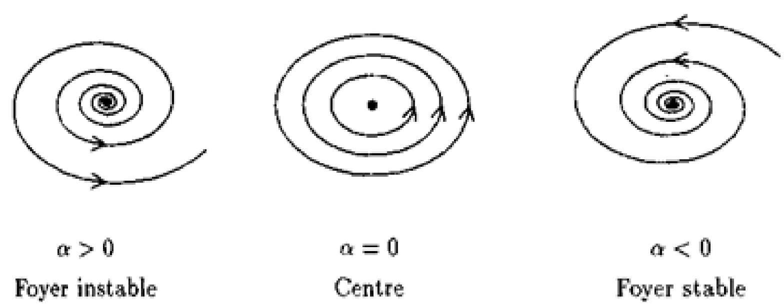


Figure (1.5)

1.5.2 Pour les systèmes non linéaires
Soit le système non linéaire :

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.9}$$

où $x = (x_1, x_2, ...x_n)^t$ et $f = (f_1, f_2, ..., f_n)^t$
Un point critique x_0 de (1.9) est applé :
1.Puits, Si toutes les valeurs propres de $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives.
2.Source, Si toutes les valeurs propres de $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles positives.
3.Selle, S'il est hyperbolique et si $A = Df(x_0)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle négative et au moins une valeur propre avec partie réelle positive.

Chapitre 2

Systèmes hamiltoniens

2.1. Système hamiltonien dans $\mathbb{R}^2$

Définition 2.1 [2]
Un système différentiel dans $\mathbb{R}^2$ est dit hamiltonien à un degré de liberté s'il s'ecrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}=\frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \tag{2.1}$$

où $H(x, y)$ est une fonction deux fois différentiable.
Proposition 2.1 [4]
$H(x, y)$ est une intégrale première du système (2.1) .
Preuve :
Soit $(x(t), y(t))$ une solution du système (2.1), on a

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt}(x(t), y(t)) &= \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{dy}{dt} \qquad (2.2) \\ &= \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t)) + \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t))\left(-\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t))\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui implique que $H(x(t), y(t))$ est constante sur chaque solution .
Les orbites se trouvent sur les courbes définies par $H(x, y) = c$ où $c = constante$ $\square$

Exemple 2.1.(Pendule non linéaire simple).
L'équation différentielle de ce pendule est :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0 \tag{2.3}$$

où θ est le déplacement de l'angle de la verticale, l est la longueur du pendule.
Posons

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \phi \\ \dot{\phi} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) \end{cases} \tag{2.4}$$

Le hamiltonien de ce syetème est :

$$H(\theta,\phi) = \frac{\phi^2}{2} - \frac{g}{l}\cos(\theta) \tag{2.5}$$

ses points critiques sont : $(\theta,\phi) = (n\pi, 0)$, où $n \in \mathbb{Z}$.
Si n est impair : $(n\pi, 0)$ sont des selles (hyperboliques).
Si n est pair : $(n\pi, 0)$ sont des centres.
Le système linéarisé au voisinage des points $(n\pi, 0)$ est :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{d\xi_1}{dt} \\ \frac{d\xi_2}{dt} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial\theta}(n\pi,0) & \frac{\partial f_1}{\partial\phi}(n\pi,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial\theta}(n\pi,0) & \frac{\partial f_2}{\partial\phi}(n\pi,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(n\pi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}(-1)^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = \xi_2 \\ \frac{d\xi_2}{dt} = -\frac{g}{l}(-1)^n\xi_1 \end{cases}$$

Cas 01 : Si n est impair, on a :

$$\begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = \xi_2 \\ \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{g}{l}\xi_1 \end{cases} \tag{2.6}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \lambda^2 - \frac{g}{l} = 0, (g/l > 0) \\ &\Longrightarrow \lambda^2 = \frac{g}{l} \\ &\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \\ \lambda_2 = -\sqrt{\frac{g}{l}}, (\lambda_1 > 0), (\lambda_2 < 0) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Alors, les points $(n\pi, 0)$ sont des points selles pour le système linéarisé, donc c'est des points selles pour le système initial.
Cas 2 : Si n est pair on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi_1}{dt} = \xi_2 \\ \frac{d\xi_2}{dt} = -\frac{g}{l}\xi_1 \end{array} \right. \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} \\ P_A(\lambda) &= \lambda^2 + \frac{g}{l} = 0 \\ &\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = i\sqrt{\frac{g}{l}} \\ \lambda_2 = -i\sqrt{\frac{g}{l}} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont immaginaires pures donc $(n\pi, 0)$ sont des centres pour le système linéarisé, ce qui implique que les points $(n\pi, 0)$ sont soit des centres soit des foyers pour le système non linéaire.
Maintenant, traçons les trajectoires ou les orbites dans l'espace (θ, ϕ) on sait que l'hamiltonien est une intégrale première du système.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} = \phi \\ \dot{\phi} = -\frac{g}{l}\sin\theta \end{array} \right. \tag{2.8}$$

c-à-d :
$H(\theta, \phi) = \frac{\phi^2}{2} - \frac{g}{l}\cos(\theta) = h$, ($h$ const)
l'équation qui nous permet de tracer les orbites est

$$\phi^2 = 2\left(\frac{g}{l}\cos\theta + h\right) \Longrightarrow \phi = \mp\sqrt{2(\frac{g}{l}\cos(\theta) + h)} \tag{2.9}$$

on choisit :

$\phi = +\sqrt{2(\frac{g}{l}\cos\theta + h)}$ et on complete pour $\phi = -\sqrt{2(\frac{g}{l}\cos\theta + h)}$.

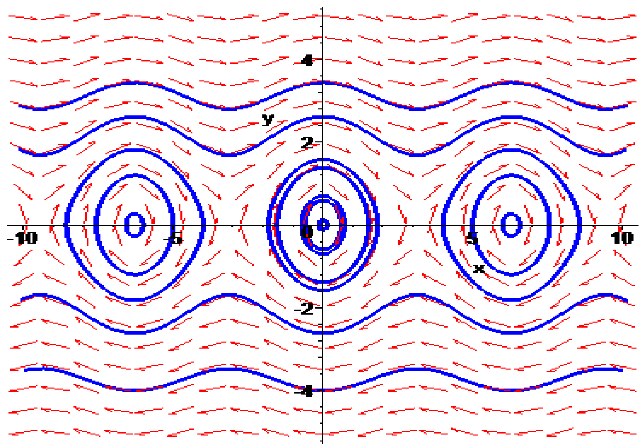


figure (2.1) : Portrait de phase du pendule simple

Proposition 2.2 [4]
Chaque point critique non dégénéré d'un système hamiltonien est soit une selle soit un centre.
Preuve :
Supposons que le point critique est à l'origine $(0,0)$, posons

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{array} \right. , \quad H = H(x,y). \tag{2.10}$$

on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial x}(0,0) = 0 \end{array} \right. \tag{2.11}$$

Le système linéarisé au voisinage de $(0,0)$ est :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{d\xi_1}{dt} \\ \frac{d\xi_2}{dt} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(0,0) \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0,0) & -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \\ &= J_0 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les valeurs propres de J_0 sont les racines de l'équation $\det(J_0 - \lambda I) = 0$,or $trace\ J_0 = 0 \Rightarrow \det(J_0 - \lambda I) = \lambda^2 + \det J_0 = 0$.
on a : det $J_0 \neq 0$ (car le point critique $(0,0)$ est supposé non dégénérée).
1) Si det $J_0 < 0$: on a : $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\det J_0}$ ce qui implique que le point $(0,0)$ est une selle.
2) Si det $J_0 > 0$: $\lambda_1 = i\sqrt{\det J_0}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{\det J_0}$ ce qui implique que le point $(0,0)$ est un centre pour le système linéairisé.
Montrons qu'il est aussi un centre pour le système non linéaire.
Les égalités (2.11) implique que $(0,0)$ est un point stationnaire pour la surface $z = H(x,y)$.
Comme $\det J_0 > 0$, alors $(0,0)$ est un minimum local strict de $H(x,y)$.
Supposons que $(0,0)$ est un foyer stable alors pour $(x_0,y_0) \in V_\xi(0,0)$ un voisinage de $(0,0)$ on a :

$$\begin{aligned} H(x_0,y_0) &= H(x(t,x_0,y_0),y(t,x_0,y_0)) = \lim_{t\to+\infty} H(x(t,x_0,y_0),y(t,x_0,y_0)) \\ &= H(\lim_{t\to+\infty} x(t,x_0,y_0), \lim_{t\to+\infty} y(t,x_0,y_0)) \overset{foyer}{\underset{stable}{=}} H(0,0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow H(x_0,y_0) = H(0,0)$
Ceci est impossible car $(0,0)$ est un minimum strict de $H(x,y)$.c-à-d on a :

$$H(x,y) > H(0,0), \forall (x,y) \in V_\xi(0,0).$$

Alors $(0,0)$ n'est pas un foyer stable.
Si $(0,0)$ est un foyer instable (même chose) pour $(x_0,y_0) \in V_\xi(0,0)$.

$$\begin{aligned} H(x_0,y_0) &= H(x(t,x_0,y_0),y(t,x_0,y_0)) = \lim_{t\to-\infty} H(x(t,x_0,y_0),y(t,x_0,y_0)) \\ &= H(\lim_{t\to-\infty} x(t,x_0,y_0), \lim_{t\to-\infty} y(t,x_0,y_0)) = H(0,0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow H(x_0,y_0) = H(0,0)$
Ceci est impossible car $(0,0)$ est un minimum strict de H, ce qui implique que $(0,0)$ n'est pas un foyer instable.
Alors il n'y a pas de foyer donc $(0,0)$ est un centre $\square$.

Exemple 2.2
Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = x + x^2 = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

Le hamiltonien de ce système est donné par

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}, H(x,y) = c$$

Les courbes sont données par l'équation :

$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = h$$

On a

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \\ \frac{-\partial H}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(x+1) = 0 \end{cases}$$

Alors les points critiques sont $(0,0)$ et $(-1,0)$.
Le point critique $(0,0)$ est non dégénérée car si on pose $f\,(x,y) = (\frac{\partial H}{\partial y}, \frac{-\partial H}{\partial x})$, on obtient

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x+1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où

$$Jf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui possède les valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.
Il n'y a pas de valeur propre égale à zéro, alors $(0,0)$ est une selle.
Le point critique $(-1,0)$ est non dégénérée car

$$Jf(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui possède les valeurs propres $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.
Il n'ya pas de valeur propre égal à zéro, alors $(-1,0)$ est un centre.

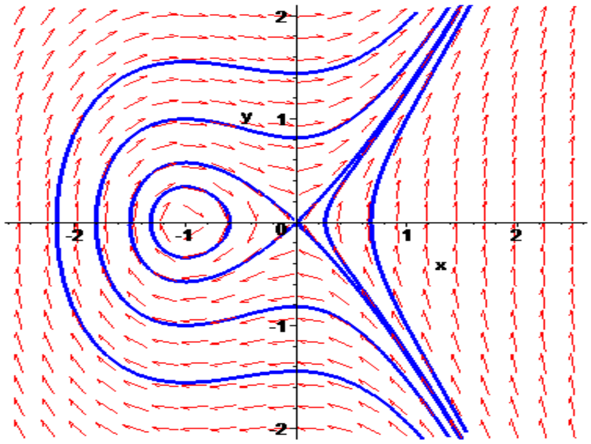


Figure (2.2) : Portrait de phase de l'exemple 2.2

2.2. Systèmes hamiltoniens à n degré de liberté.

Définition 2.2 [2]
Un système hamiltonien à n degré de liberté est un système d'équations de mouvement de la forme.

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = \frac{-\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad i = \overline{1, n} \tag{2.12}$$

où $H = H(q, p, t)$ est le hamiltonien. $q = (q_1, ..., q_n)$; $p = (p_1, ..., p_n)$; $q = q(t)$; $p = p(t)$.
L'espace des phases du système (2.12) est $\mathbb{R}^{2n}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{2.13}$$

on déduit de cela que si H ne dépend pas explicitement du temps t, $\frac{dH}{dt} = 0$, alors $H(q,p) = E$ (const) donc H est conservée au cours du temps. H est une intégrale première du système.

Exemple 2.3

Soit l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{q} + w_0^2 q = 0 \tag{2.14}$$

l'équation (2.14) s'écrit sous la forme.

$$\begin{cases} \dot{q} = p = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -w_0^2 = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \tag{2.15}$$

où :

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} + \frac{w_0^2}{2} q^2.$$

ce qui implique que l'oscillateur harmonique est un système hamiltonien à 1 degré de liberté.

Théorème 2.1 (de la divergence) [4]

Soit ϕ_t le flôt de

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.16}$$

$f \in C^r(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $r \geq 1$.

et soit V une volume de l'espace des phases au temps $t = 0$, $\phi_t(V)$: l'image de V par ϕ_t, on a :

$$\frac{d\phi_t(V)}{dt} \mid_{t=0} = \int\limits_V \operatorname{div} f dx_1 ... dx_n \tag{2.17}$$

où

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

Corollaire 2.1 [4]

Si $\operatorname{div} f = 0$ alors $vol\phi_t(V) = V$.

Preuve :

$$\frac{d\phi_t(V_0)}{dt} \mid_{t=t_0} = \int\limits_V \operatorname{div} f(x)\ dx_1...dx_n$$

Donc si

$$\operatorname{div} f = 0 \Longrightarrow \frac{d\phi_t(V_0)}{dt} \mid_{t=t_0} = 0 \Longrightarrow \phi_t(V) = V_0 \qquad \square$$

On considère le système (2.12) sous la forme (2.16), avec

$$\begin{aligned} x_i &= q_i, i = 1, ..., n \\ x_{n+i} &= p_i, i = 1, ..., n \end{aligned}$$

on a :

$$\operatorname{div} f = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0 \tag{2.18}$$

donc le flôt hamiltonien conserve le volume.
On dit que le système est conservatif.

2.3 Transformation canonique

Définition 2.3 [3]
Un changement de variables :

$$\begin{cases} q_i = q_i(Q_j, P_j) \\ p_i = p_i(Q_j, P_j) \end{cases} i, j = 1, ..., n \tag{2.19}$$

est dit canonique s'il préserve la forme hamiltonienne des équations d'évolution :

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}(Q, P) \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}(Q, P) \end{cases} i = 1, ..., n \tag{2.20}$$

où $H(Q, P)$ est le hamiltonien transformé

$$H(q, p) = H(q(Q, P), p(Q, P)) = K(Q, P)$$

Cherchons les conditions pour que (2.19) soit une transformation canonique.
Théorème 2.2 [4]
Pour que (2.19) soit une transformation canonique il faut et il suffit que .

$$\begin{aligned} \{Q_k, Q_l\} &= \{P_k, P_l\} = 0 \\ \{Q_k, P_l\} &= -\{P_k, Q_l\} = \delta_{kl} \end{aligned} \tag{2.21}$$

où $\{\alpha, \beta\}$ designe le crochet de lagrange.

$$\{\alpha, \beta\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \frac{\partial p_i}{\partial \beta} - \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \frac{\partial q_i}{\partial \beta} \right) \tag{2.22}$$

Preuve :
On déduit de (2.19) :

$$\frac{dq_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial P_k} \dot{P}_k = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p) \tag{2.23}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial P_k} \dot{P}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p) \tag{2.24}$$

Multiplions (2.23) et (2.24) respectivement par $\frac{\partial p_i}{\partial P_l}$ et $\frac{-\partial q_i}{\partial Q_l}$, additionnons les équations obtenues sur i, nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{n} \{Q_k, P_l\} \dot{Q}_k + \sum_{k=1}^{n} \{P_k, P_l\} \dot{P}_k = \frac{\partial H}{\partial P_l} \tag{2.25}$$

On obtient une relation analogue pour : $\frac{\partial H}{\partial Q_l}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \{Q_k, Q_l\} \dot{Q}_k + \sum_{k=1}^{n} \{P_k, Q_l\} \dot{P}_k = \frac{\partial H}{\partial Q_l} \tag{2.26}$$

d'où on déduit les conditions (2.21) □

Théorème 2.3 [4]
Posons :

$$A = \left\| \frac{\partial q}{\partial Q} \right\|, B = \left\| \frac{\partial q}{\partial P} \right\|, C = \left\| \frac{\partial p}{\partial Q} \right\|, D = \left\| \frac{\partial p}{\partial P} \right\| \tag{2.27}$$

d'où :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est la jacobienne de (2.19) .
Pour que (2.19) soit une transformation canonique il faut et il suffit que.

$$M^T J M = J \tag{2.28}$$

où :

$$M^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$$

est la transposée de M et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n.
Preuve :
Montrons que (2.28) est équivalente à (2.21)
Prenons $n = 1$, alors

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} M^T J M &= J \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial Q} \\ \frac{\partial q}{\partial P} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial Q} \\ \frac{\partial q}{\partial P} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \\ -\frac{\partial q}{\partial Q} & -\frac{\partial q}{\partial P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par identification, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial Q}-\frac{\partial p}{\partial Q}\frac{\partial q}{\partial Q} &= 0, \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q}-\frac{\partial p}{\partial P}\frac{\partial q}{\partial Q}=-1\\ \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P}-\frac{\partial p}{\partial Q}\frac{\partial q}{\partial P} &= 1, \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial P}-\frac{\partial p}{\partial P}\frac{\partial q}{\partial P}=0\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\{Q,Q\} &= 0, \{P,Q\}=-1\\ \{Q,P\} &= 1, \{P,P\}=0\end{aligned}$$

La matrice M qui satisfait (2.28) est dite matrice symplectique.
L'égalité (2.28) implique que $(\det M)^2=1$ (on fait $\det M=1$).
d'où : M^{-1} existe et :

$$M^{-1}=-JM^TJ$$

car

$$J^{-1}=-J, J^2=-E\,(\textit{identité}) \qquad \square.$$

Exemple 2.4
Soit l'oscillateur harmonique :

$$\begin{cases}\dot q = p\\ \dot p=-\omega_0^2 q\end{cases} \quad \text{où } H(q,p)=\frac{1}{2}(p^2+\omega_0^2q^2)$$

La trasformation :

$$\begin{cases} q(Q,P)=\sqrt{\frac{2P}{\omega_0}}\sin Q\\ p(Q,P)=\sqrt{2\omega_0 P}\cos Q\end{cases}$$

est canonique car :

$$\begin{aligned} M^TJM &= J\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial Q}\\ \frac{\partial q}{\partial P} & \frac{\partial p}{\partial P}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P}\\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

on a :

$$M^T=\begin{pmatrix}\frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial Q}\\ \frac{\partial q}{\partial P} & \frac{\partial p}{\partial P}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{2P}{\omega_0}}\cos Q & -\sqrt{2\omega_0P}\sin Q\\ \frac{1}{\sqrt{2P\omega_0}}\sin Q & \sqrt{\frac{\omega_0}{2P}}\cos Q\end{pmatrix}$$

et on a :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2P}{\omega_0}}\cos Q & \frac{1}{\sqrt{2P\omega_0}}\sin Q \\ -\sqrt{2\omega_0 P}\sin Q & \sqrt{\frac{\omega_0}{2P}}\cos Q \end{pmatrix}$$

alors :

$$\begin{aligned} M^T J M &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2P}{\omega_0}}\cos Q & -\sqrt{2\omega_0 P}\sin Q \\ \frac{1}{\sqrt{2P\omega_0}}\sin Q & \sqrt{\frac{\omega_0}{2P}}\cos Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2P}{\omega_0}}\cos Q & \frac{1}{\sqrt{2P\omega_0}}\sin Q \\ -\sqrt{2\omega_0 P}\sin Q & \sqrt{\frac{\omega_0}{2P}}\cos Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2P}{\omega_0}}\cos Q & -\sqrt{2P\omega_0}\sin Q \\ \frac{1}{\sqrt{2P\omega_0}}\sin Q & \sqrt{\frac{\omega_0}{2P}}\cos Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2P\omega_0}\sin Q & \sqrt{\frac{\omega_0}{2P}}\cos Q \\ -\sqrt{\frac{2P}{\omega_0}}\cos Q & -\frac{1}{\sqrt{2P\omega_0}}\sin Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J. \end{aligned}$$

Chapitre 3

Systèmes hamiltoniens intégrables

3.1 Crochet de Poisson

Définition 3.1 [7]
On considère le système hamiltonien :

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = \frac{-\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad i = 1, n \tag{3.1}$$

Si $H = H(q,p)$, on sait que $H(q,p) = cte$.
Plus généralement, une fonction $f(q,p)$ est constante du mouvement si $f(q,p) = cte.$ quand $q(t)$ et $p(t)$ evoluent selon le système hamiltonien (3.1), on a donc :

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{df}{dt} = \frac{df}{dt}(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cette expression s'appelle le crochet de Poisson de H et f et il est noté $[f, H]$.

où l'expression dans les coordonnées locales (q, p) est :

$$[f_1, f_2]_{q,p} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial f_2}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \right) \tag{3.2}$$

Théorème 3.1 (de Poisson) [3]
f est une constante du mouvement $\iff [f, H] = 0$.
On a toujours $[H, H] = 0$.
Théorème 3.2 (de Poisson) [3]
Soient $F(q, p)$ et $G(q, p)$ deux intégrales premières du mouvement. Alors $h(q, p) = [F, G]$ est aussi une intégrale première.
Preuve :
Soit $h = [F, G]$; on écrit l'identité de Jacobi pour F, G et H :

$$[F, [G, H]] + [G, [H, F]] + [H, [F, G]] = 0.$$

Comme F et G sont deux intégrales premières, l'identité devient :

$$[F, -\partial G/\partial t] + [G, \partial F/\partial t] + [H, h] = 0$$

En développant les deux premiers crochets de poisson de cette dernière égalita, et en utilisant le théorème de schwarz, on obtient facilement :

$$-\partial/\partial t\,([F, G]) + [H, h] = 0$$

Soit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + [h, H] = 0 \qquad \square$$

Ce théorème est toutefois un peu décevant en ce sens qu'il fournit souvent des intégrales premières évidentes (0 par exemple) ou des fonctions de F ou de Y...
A l'aide de l'expression locale on déduit un certain nombre de propriétés essentielles du crochet de Poisson :

Proposition 3.1 $[3], [7]$
1. Antisymétrie $[f, g] = -[g, f]$.
2. Identité de Jacobi $[f, [g, h]] + [h, [f, g]] + [g, [h, f]] = 0$.
3. Relations sur les coordonnées locales $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$; $[p_i, q_j] = \delta_{ij}$.
4. Distributivité gauche par rapport à l'addition (ou encore linéarité droite) $[f, g + h] = [f, g] + [f, h]$.
5. Distributivité droite par rapport à l'addition (ou encore linéarité gauche) $[f + g, h] = [f, h] + [g, h]$.
6. $[\alpha f, \beta g] = \alpha\beta [f, g]$.
7. Identité de Leibniz (droite et agauche) :
   - $[f, gh] = g [f, h] + [f, g] h$.
   - $[fg, h] = f [g, h] + [f, h] g$.

Proposition 3.2 [3] (Dynamique et crochets de Poisson, equations du mouvement) :
Si on réalise le crochet de Poisson d'un q_k ou d'un p_k avec le hamiltonien H du système, on obtient :

$$[q_k, H] = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad ; \quad [p_k, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

En injectant les équations de Hamilton dans ces résultats, on déduit les équations du mouvement dans le langage des crochets de Poisson :

$$\left\{ \begin{array}{l} [q_k, H] = \dot{q}_k \\ [p_k, H] = \dot{p}_k \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} [q, H] = \dot{q} \\ [p, H] = \dot{p} \end{array} \right.$$

Proposition 3.3 [3] (Crochets de Poisson et trasformations canoniques)
On considère le système hamiltonien (3.1) et soit la transformation canonique :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_i = q_i(Q_j, P_j) \\ p_i = p_i(Q_j, P_j) \end{array} \right. \quad i, j = 1, ..., n$$

on pose $Q = (Q_1, ..., Q_n)$ et $P = (P_1, ..., P_n)$, alors on a

$$[f, g]_{q,p} = [f, g]_{Q,P}$$

Preuve :
On a :

$$[f,g]_{Q,P} = \frac{\partial f}{\partial Q} \cdot \frac{\partial g}{\partial P} - \frac{\partial f}{\partial P} \cdot \frac{\partial g}{\partial Q}$$

Mais, en considérant maintenant f et g comme des fonctions des variables (q,p) : $f = f(q,p,t)$ et $g = g(q,p,t)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial Q} &= \left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)^T \frac{\partial f}{\partial q} + \left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)^T \frac{\partial f}{\partial p} \\
\frac{\partial f}{\partial P} &= \left(\frac{\partial q}{\partial P}\right)^T \frac{\partial f}{\partial q} + \left(\frac{\partial p}{\partial P}\right)^T \frac{\partial f}{\partial p}
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial Q} &= \left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)^T \frac{\partial g}{\partial q} + \left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)^T \frac{\partial g}{\partial p} \\
\frac{\partial g}{\partial P} &= \left(\frac{\partial q}{\partial P}\right)^T \frac{\partial g}{\partial q} + \left(\frac{\partial p}{\partial P}\right)^T \frac{\partial g}{\partial p}
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
[f,g]_{Q,P} &= \left[\left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)^T \frac{\partial f}{\partial q} + \left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)^T \frac{\partial f}{\partial p}\right] \cdot \left[\left(\frac{\partial q}{\partial P}\right)^T \frac{\partial g}{\partial q} + \left(\frac{\partial p}{\partial P}\right)^T \frac{\partial g}{\partial p}\right] \\
&\quad - \left[\left(\frac{\partial q}{\partial P}\right)^T \frac{\partial f}{\partial q} + \left(\frac{\partial p}{\partial P}\right)^T \frac{\partial f}{\partial p}\right] \cdot \left[\left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)^T \frac{\partial g}{\partial q} + \left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)^T \frac{\partial g}{\partial p}\right]
\end{aligned}$$

En développant cette expression, on obtient 8 termes du type $(Mu)\cdot(Nv)$, où M et N sont des matrices. Chacun de ces termes va pouvoir être modifié grâce à la propriété suivante : $(Mu)\cdot w = \left(M^T w\right)\cdot u$. Comme ici $w = Nv$, on aura ainsi : $(Mu)\cdot(Nv) = \left(M^T N\right) v \cdot u$. L'expression de $[f,g]_{Q,P}$ devient alors :
On pose :

$$\begin{aligned}
M_1 &= \left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)^T,\ u_1 = \frac{\partial f}{\partial q},\ N_1 = \left(\frac{\partial q}{\partial P}\right)^T,\ v_1 = \frac{\partial g}{\partial q} \\
M_2 &= \left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)^T,\ u_2 = \frac{\partial f}{\partial p},\ N_2 = \left(\frac{\partial p}{\partial P}\right)^T,\ v_2 = \frac{\partial g}{\partial p}
\end{aligned}$$

alors, on a :

$$
\begin{aligned}
[f,g]_{Q,P} &= (M_1u_1 + M_2u_2)(N_1v_1 + N_2v_2) - (N_1u_1 + N_2u_2)(M_1v_1 + M_2v_2) \\
&= (M_1u_1)(N_1v_1) + (M_1u_1)(N_2v_2) + (M_2u_2)(N_1v_1) + (M_2u_2)(N_2v_2) \\
&\quad - (N_1u_1)(M_1v_1) - (N_1u_1)(M_2v_2) - (N_2u_2)(M_1v_1) - (N_2u_2)(M_2v_2) \\
&= \left(M_1^TN_1\right) v_1 \cdot u_1 + \left(M_1^TN_2\right) v_2 \cdot u_1 + \left(M_2^TN_1\right) v_1 \cdot u_2 + \left(M_2^TN_2\right) v_2 \cdot u_2 \\
&\quad - \left(N_1^TM_1\right) v_1 \cdot u_1 - \left(N_1^TM_2\right) v_2 \cdot u_1 - \left(N_2^TM_1\right) v_1 \cdot u_2 - \left(N_2^TM_2\right) v_2 \cdot u_2
\end{aligned}
$$

en regroupant les termes en fonction des produits scalaires qui vont survenir :

$$
\begin{aligned}
[f,g]_{Q,P} &= \left(M_1^TN_1 - N_1^TM_1\right) v_1 \cdot u_1 + \left(M_1^TN_2 - N_1^TM_2\right) v_2 \cdot u_1 \\
&\quad + \left(M_2^TN_1 - N_2^TM_1\right) v_1 \cdot u_2 + \left(M_2^TN_2 - N_2^TM_2\right) v_2 \cdot u_2
\end{aligned}
$$

alors :

$$
\begin{aligned}
[f,g]_{Q,P} &= \left[\frac{\partial q}{\partial Q}\left(\frac{\partial q}{\partial P}\right)^T - \frac{\partial q}{\partial P}\left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)^T\right] \frac{\partial g}{\partial q} \cdot \frac{\partial f}{\partial q} \\
&\quad + \left[\frac{\partial p}{\partial Q}\left(\frac{\partial p}{\partial P}\right)^T - \frac{\partial p}{\partial P}\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)^T\right] \frac{\partial g}{\partial p} \cdot \frac{\partial f}{\partial p} \\
&\quad + \left[\frac{\partial q}{\partial Q}\left(\frac{\partial p}{\partial P}\right)^T - \frac{\partial q}{\partial P}\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)^T\right] \frac{\partial g}{\partial p} \cdot \frac{\partial f}{\partial q} \\
&\quad + \left[\frac{\partial p}{\partial Q}\left(\frac{\partial q}{\partial P}\right)^T - \frac{\partial p}{\partial P}\left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)^T\right] \frac{\partial g}{\partial q} \cdot \frac{\partial f}{\partial p}
\end{aligned}
$$

où :

$$
\frac{\partial p}{\partial Q} = -\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T ; \frac{\partial p}{\partial P} = \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^T ; \frac{\partial q}{\partial Q} = \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^T ; \frac{\partial q}{\partial P} = -\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^T
$$

On peut donc utiliser ces relations pour remplacer chaque matrice transposée dans l'expression précédente de $[f,g]_{Q,P}$ pour obtenir :

$$
\begin{aligned}
[f,g]_{Q,P} &= -\left[\frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p}\right] \frac{\partial g}{\partial q} \cdot \frac{\partial f}{\partial q} + \left[\frac{\partial p}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial p}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q}\right] \frac{\partial g}{\partial p} \cdot \frac{\partial f}{\partial p} \\
&\quad + \left[\frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q}\right] \frac{\partial g}{\partial p} \cdot \frac{\partial f}{\partial q} + \left[\frac{\partial p}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial p}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p}\right] \frac{\partial g}{\partial q} \cdot \frac{\partial f}{\partial p}
\end{aligned}
$$

Or, on se convainc facilement que les matrices entre crochets dans cette dernière égalité ne sont que les expressions matricielles de l'ensemble des dérivées partielles des variables p et q entre elles au travers de la règle de dérivation en chaîne via les variables P et Q.

$$\frac{\partial p}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p}+\frac{\partial p}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p}=\frac{\partial p}{\partial p}=I_n$$

où I_n est la matrice identité $(n\times n)$. soit O_n la matrice nulle $(n\times n)$, alors

$$\begin{aligned}[f,g]_{Q,P} &= -O_n\frac{\partial g}{\partial q}\cdot\frac{\partial f}{\partial q}+O_n\frac{\partial g}{\partial p}\cdot\frac{\partial f}{\partial p}\\ &\quad +I_n\frac{\partial g}{\partial p}\cdot\frac{\partial f}{\partial q}-I_n\frac{\partial g}{\partial q}\cdot\frac{\partial f}{\partial p}\end{aligned}$$

Soit finalement :

$$[f,g]_{Q,P}=\frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{\partial g}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\partial g}{\partial q}=[f,g]_{q,p} \qquad \square.$$

3.2 Systèmes intégrables

Définition 3.2 [7]
Un hamiltonien $H(q,p)$ à n degrés de libertés est dit intégrable s'il existe n constantes du mouvements linéairement indépendantes :

$$f_1(q,p)=H(q,p)=h_1,\ \ f_2(q,p)=h_2,...,\ \ f_n(q,p)=h_n.$$

avec

$$[f_i,f_j]=0,\forall i,j \tag{3.3}$$

Les constantes h_i sont dites intégrales premières, (3.3) veut dire que les $f_i(q,p)$ sont en involution.

Exemple 3.1
Soit le hamiltonien :

$$H=\frac{1}{2}(P_x^2+P_y^2)+\frac{1}{4}x^2+y^2+x^2y+2y^3$$

cet hamiltonien possède une deuxième intégrale première :

$$G=x^4+4x^2y^2-4\dot{x}(\dot{x}y-\dot{y}x)+8Ax^2y+(4A-B)(\dot{x}^2+Ax^2)$$

On a

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P_x} = P_x \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial P_y} = P_y \\ \dot{P}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{2}x + 2xy \\ \dot{P}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 2y + x^2 + 6y^2 \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} G &= x^4 + 4x^2y^2 - 4\dot{x}(\dot{x}y - \dot{y}x) + 2x^2y \\ &= x^4 + 4x^2y^2 - 4P_x(P_xy - P_yx) + 2x^2y \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} [H,G] &= \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial P_x} - \frac{\partial H}{\partial P_x}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial P_y} - \frac{\partial H}{\partial P_y}\frac{\partial G}{\partial y} \\ &= \left(\frac{1}{2}x + 2xy\right)(-8yP_x + 4xP_y) - P_x\left(4x^3 + 8xy^2 + 4P_xP_y + 4xy\right) \\ &\quad + \left(2y + x^2 + 6y^2\right)(4xP_x) - P_y\left(8x^2y - 4P_x^2 + 2x^2\right) \\ &= -4xyP_x + 2x^2P_y - 16xy^2P_x + 8x^2yP_y - 4x^3P_x - 8xy^2P_x - 4P_x^2P_y \\ &\quad -4xyP_x + 8xyP_x + 4x^3P_x + 24xy^2P_x - 8x^2yP_y + 4P_x^2P_y - 2x^2P_y \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc

$$[H,G] = 0$$

Donc il est intégrable.

3.3 Variables d'action et angulaires

Théorème 3.1 : (Liouville 1) [4]
Dans le cas d'un système intégrable, il existe une transformation canonique :

$$\begin{cases} q_i = q_i(\theta_j, J_j) \\ p_i = p_i(\theta_j, J_j) \end{cases}, \ i, j = 1, ..., n \tag{3.4}$$

où $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n),\ J = (J_1, J_2, ..., J_n)$.

telle que le nouveau hamiltonien ne dépend pas de θ_i, Les équations de hamilton s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i}(J) = \omega_i(J) \\ \dot{J}_i = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i}(J) = 0 \end{cases} \quad i, j = 1, ..., n \tag{3.5}$$

Le système (3.5) est intégrable et a pour solution :

$$\begin{cases} \theta_i = \omega_i t + \theta_i(0) \\ J_i = J_i(0) \end{cases} \quad i = 1, ..., n \tag{3.6}$$

Les J_i sont n constantes $(i = 1, ..., n)$.

Les variables J_i sont appelée les variables d'action et les variables θi des variables angulaires.Les trajectoires sont sur un tore T^n.

Définition 3.3 [4]

La trajectoire sur le tore T^n est dite quasi-périodique à n fréquences $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, s'il n'existe pas de $n - tuple$:

$$m = (m_1, m_2, ..., m_n), m_i \in \mathbb{Z} \tag{3.7}$$

tel que :

$$(m, \omega) = m_1\omega_1 + ... + m_n\omega_n = 0 \tag{3.8}$$

Dans ce cas, la trajectoire ne se referme jamais sur elle même et couvre de façon dense le tore T^n.

Par contre s'il existe $n - 1$ relations du type (3.8) alors la trajectoire se referme sur elle même et le mouvement est péroidique . Dans ce cas, on peut trouver un scalaire ω_0 et un n tuple m de type (3.7) tels que :

$$\omega = m\omega_0.$$

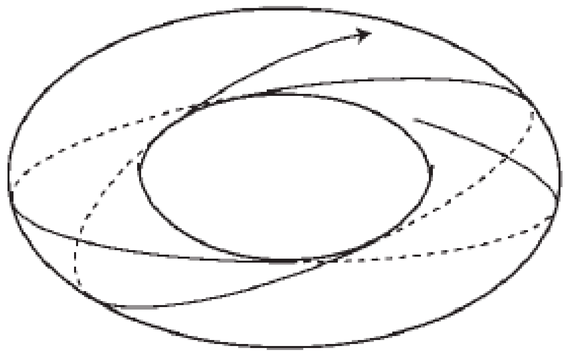


Figure (3.1) : Tore ($T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$)

Exemple 3.2
Soit le hamiltonien de deux oscillateurs harmoniques :

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2\right)$$

en variable d'action et angulaires $J_1, \theta_1, J_2, \theta_2$

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{\frac{2J_1}{\omega_1}} \sin\theta_1, p_1 = \sqrt{2\omega_1 J_1} \cos\theta_1 \\ q_2 &= \sqrt{\frac{2J_2}{\omega_2}} \sin\theta_2, p_2 = \sqrt{2\omega_2 J_2} \cos\theta_2 \end{aligned}$$

Le nouveau hamiltonien est :

$$H = H\left(J_1, J_2\right) = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2$$

et les équations hamiltoniennes s'ecrivent :

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 = \omega_1 \\ \dot{\theta}_2 = \omega_2 \\ \dot{J}_1 = 0 \\ \dot{J}_2 = 0 \end{array} \right.$$

d'où la solution :

$$\left\{ \begin{array}{c} \theta_1 = \omega_1 t + \omega_1\left(0\right) \\ \theta_2 = \omega_2 t + \omega_2\left(0\right) \\ J_1 = J_1(0) = cte \\ J_2 = J_2(0) = cte \end{array} \right.$$

les trajectoires sont sur un tore T^2. Elles sont périodiques si $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ est rationnel et quasi-périodique (dense) sur T_2 si $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ est irrationnel :

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 = 0 \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{m_2}{m_1}$$

Théorème 3.2 (de Liouville) [4]
Soit la transformation : $\eta \longmapsto \xi(\eta)$ où :
$\eta = (q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$, $\xi = (Q_1, ..., Q_n, P_1, ..., P_n)$.
alors les volumes des domaines des espaces q, p et Q, P qui correspondent sont les mêmes.
Preuve :
Soit la transformation :

$$(q,p) \longmapsto (Q,P)$$

où :

$$Q = Q(q,p), P = P(q,p)$$

cette transformation transforme le domaine R au domaine S.
Posons :

$$A_R = \iint\limits_R dqdp \ \text{ et } A_S = \iint\limits_S dQdP.$$

on a :

$$\iint\limits_S dqdp = \iint\limits_R |\det M|\, dQdP$$

où

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad |\det M| = 1$$

$$\frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} = 1$$

$$\Rightarrow \iint\limits_R dqdp = \iint\limits_S dQdP \qquad \square$$

Exemple de transformation canonique :

$$(q,p) \longmapsto (Q,P) = (p,-q)$$

plus généralement ; pour

$$\eta = (q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n) \text{ et } \xi = (Q_1, ..., Q_n, P_1, ..., P_n)$$

on a :

$$\int \cdots \int_S dq_1...dq_n dp_1...dp_n = \int \cdots \int_R |\det M| \, dQ_1...dQ_n dP_1...dP_n$$

où

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial Q_1}\cdots\cdots & \cdots\cdots\frac{\partial q_1}{\partial P_n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial p_n}{\partial Q_1}\cdots\cdots & \cdots\cdots\frac{\partial p_n}{\partial P_n} \end{pmatrix} ; |\det M| = 1$$

$$\Rightarrow \int \cdots \int_S dQ_1...dP_n = \int \cdots \int_R dq_1...dp_n. \qquad \square.$$

Conclusion

La plupart des systèmes dynamiques qu'on rencontre en mécanique classique et physique sont des systèmes hamiltoniens. Pour étudier le comportement de tels systèmes, on cherche à les intégrer et à savoir s'ils sont intégrables ou pas. En général, on peut obtenir des informations détaillées sur le comportement de ces systèmes seulement s'ils sont intégrables. Cependant, beaucoup de systèmes hamiltoniens connus ne sont pas intégrables.

Dans ce mémoire, on a étudié les systèmes hamiltoniens et on s'est intéressé aux systèmes hamiltoniens intégrables car beaucoup de phénomènes naturels peuvent être modélisés par des systèmes hamiltoniens intégrables ou leurs perturbations. Par exemple, notre système solaire est intégrable. Les systèmes intégrables ont une stabilité très remarquable, ce qui leur permet de persister dans la nature.

Parmi les questions essentielles non étudiées dans ce mémoire est la théorie des perturbations des systèmes hamiltoniens ainsi que leurs stabilité ou instabilité.

Bibliographie

[1] V.I.Arnold, Mathematical Methods of classical Mechanics, 2^{nd} edition.Springer-Verlag, 1989.

[2] Walter Craig, Hamiltonian Dynamical Systems and Applications,Université Canada, 2007.

[3] T. Gourieux, Eléments de dynamique Lagrangienne et Hamiltonienne, Université de Lorraine. Nancy. 2016.

[4] Amar. Makhlouf, Cours de systèmes dynamiques. P G : Université Badji Mokhtar Annaba, 2002 / 2003.

[5] Charles-Michel Marle, Systèmes Hamiltoniens et géométrie symplectique. Université Pierre et Marie Curie, 2013

[6] L.PerKo : "differential equations and dynamical systems, texts in applied mathematics" 7. third edition. springer-verlag, New York. 2001.

[7] Wallez Thomas, Systèmes hamiltoniens intégrables, Mémoire de Master, 2014.

[8] Eduard Zehnder, Lectures on Dynamical Systems : Hamiltonian vector fields and symplectic capacities, European Mathematical Society, 2010.