République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

<u>Mémoire</u>

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par :

Melle Azaizia Assia

Intitulé

Les inégalités de type Ostrowski

Dirigé par : Badreddine Meftah

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. Chiheb Tarik**	**MCB**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. Meftah Badreddine**	**MCB**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. Aissaoui Fatima**	**MCB**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2019

ملخص

في هذه الأطروحة ، سنركّز على دراسة المتباينة التكاملية من نوع أستروفسكي

في الفصل الأول، نذكّر ببعض تعريفات التحدب الكلاسيكي والمعمم، بالإضافة إلى بعض المساواة المتكاملة التي سنستدعيها في الفصل التالي

في الفصل الثاني، سنذكّر ببعض النتائج المعروفة في الأدب حول هذا النوع من المتباينات

في حين أن الفصل الأخير سيخصص بالكامل لنتائج جديدة من نوع أوستروفسكي، نذكر أن هذه النتائج تم قبولها على شكل منشور دولي

B. Meftah and A. Azaizia, Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are strongly beta-convex, Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, (accepted).

.وأن أربعة أعمال أخرى قدمت لإمكانية النشر

كلمات مفتاحية

عدم المساواة أستروفسكي، متباينة هولدر، الدوال محدبة، دوال ذات تحدب معمم..

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous concentrerons sur l'étude des inégalités intégrales de type Ostrowski.
Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de convexité classique et généralisée, ainsi que des identités intégrales que nous invoquerons dans le chapitre suivant.
Dans le deuxième chapitre, nous citons certains résultats déjà connus dans la littérature.
Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré aux nouvelles inégalités de type Ostrowski, nous mentionnons que ces résultats ont fait l'objet de la publication internationale

B. Meftah and A. Azaizia, Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are strongly beta-convex, Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, (accepted).

Mots clés: inégalité d'Ostrowski, inégalité de Hölder, fonctions bêta-convexes, fonctions s-préinvexes.

Remerciements

Avant tout, louange à **Allah** pour les innombrables choses dont il m'a fait cadeau, pour cette force, cette volonté et ce moral qui m'ont permis de mener à bien mes études.

J'exprime toute ma gratitude à **Dr. Badreddine Meftah**. Pour m'avoir proposé ce sujet et pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée, à**. Dr. Chiheb Tarik** Pour avoir accepté de présider le Jury, et à **Dr. Aissaoui Fatima**. Pour avoir accepté d'en faire partie.

Ma profonde reconnaissance à tous mes parents, ma mère, mon père, mes sœurs, et mes frères, qui ont été pour moi une source inépuisable d'encouragements.

Enfin, ma pensée va à tous mes camarades de la promotion 2019, pour les bons moments que nous avons passés ensemble.

Table des matières

Introduction

Les inégalités jouent un rôle important dans divers branches de mathématiques moderne telles que la théorie des espaces de Hilbert, la théorie des probabilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'analyse numérique, la théorie qualitative des équations différentielles et des équations aux différences, etc. Cette dernière représente un outil puissant et indispensable.

Le fondement mathématique de cette théorie a été établi en partie au cours du $18^{ème}$ et $19^{ème}$ siècle par des éminents mathématiciens tels que : Gauss, Cauchy, Čebyšev dans les années qui suivirent le sujet attira de nombreux mathématiciens : Poincaré, Lyapunov, Gronwall, Hölder, Hadamard, Pólya, Bellman et Ostrowski. La littéraire dans ce contexte est vaste et variées parmi les ouvrages dont on peut trouver une très bonne description de l'évolution historique des inégalités on peut consulter, Mitrinović, Pečarić et Fink [26, 27, 28].

Cette théorie ne cesse d'évoluer dans plusieurs directions et par différentes manières. Des nouvelles inégalités ont été établies, des généralisations, des raffinements, extensions ainsi que des variantes sur plusieurs axes unidimensionnels, multidimensionnels, fractionnaires et discrets.

L'objectif de cette thèse est de faire une petite synthèse concernant les inégalités intégrales de type Ostrowski et d'établir de nouvelles généralisations de ce type d'inégalités intégrales.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques types de convexité classique et de convexité généralisée pour les fonctions à une variable, une esquisse concernant l'intégration fractionnaire ainsi que quelques identités intégrales utiles pour notre étude.

Dans le second chapitre nous énoncerons sans démonstration certain résultat concernant les inégalités intégrales de type Ostrowski unidimensionnelle.

Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré à des nouvelles inégalités de type Ostrowski dans ces nouveaux résultats en fait l'objet de la publication internationale suivante : **B. Meftah and A. Azaizia, Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are strongly beta-convex, Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, (accepted).**

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques type de convexité ainsi que quelques identités de fonctions, concernant la convexité en peut consulter [31].

1.0.1 Convexité classique

Dans tout ce qui va suivre nous désignons par $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.1 ([14]) *Un ensemble $I \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit convexe si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0,1]$, nous avons*

$$tx + (1-t)\, y \in I.$$

Définition 1.2 ([31]) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe, si*

$$f\,(tx + (1-t)\, y) \leq tf\,(x) + (1-t)\, f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0,1]$.

Définition 1.3 ([32]) *$f : I \to \mathbb{R}$ est appelée fortement convexe de module c avec $c > 0$, si*

$$f\,(tx + (1-t)\, y) \leq tf\,(x) + (1-t)\, f\,(y) - ct(1-t)\,(x-y)^2$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et $t \in (0,1)$.

Définition 1.4 ([6]) *Une fonction positive $f : I \to \mathbb{R}$ est dite P-convexe, si*

$$f\left(tx + (1-t)\,y\right) \leq f\left(x\right) + f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0,1]$.

Définition 1.5 ([1]) *Une fonction positive $f : I \to \mathbb{R}$ est dite fortement P-convexe, si*

$$f\left(tx + (1-t)\,y\right) \leq f\left(x\right) + f(y) - ct(1-t)\left(x-y\right)^2$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I, c > 0$ et tout $t \in [0,1]$.

Définition 1.6 ([7]) *Une fonction positive $f : I \to \mathbb{R}$ est dite fonction s-Godunova-Levin, où $s \in [0,1]$, si*

$$f\left(tx + (1-t)\,y\right) \leq \frac{f\left(x\right)}{t^s} + \frac{f(y)}{\left(1-t\right)^s}$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in (0,1)$.

Définition 1.7 ([2]) *Une fonction positive $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ est dite s-convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0,1]$, si*

$$f(tx + (1-t)y) \ \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$.

Définition 1.8 ([1], [10]) *Une fonction positive $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ est dite fortement s-convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0,1]$ et $c > 0$, si*

$$f(tx + (1-t)y) \ \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y) - ct(1-t)\left(x-y\right)^2$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$.

Définition 1.9 ([40]) *Une fonction positive $f : I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$ est dite étendu s-convexe pour un certain nombre fixé $s \in (-1, 1]$, si*

$$f(tx + (1-t)y) \ \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et $t \in (0, 1)$.

Définition 1.10 ([35]) *Une fonction positive $f : I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$ est dite fortement étendu s-convexe pour un certain nombre fixé $s \in (-1, 1]$ et $c > 0$, si*

$$f(tx + (1-t)y) \ \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y) - ct(1-t)\,(x-y)^2$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et $t \in (0, 1)$.

Définition 1.11 ([36]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive. f est dite tgs-convexe sur I, si l'inégalité*

$$f\,(tx + (1-t)\,y) \leq t\,(1-t)\,[f\,(x) + f\,(y)]$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$, et $t \in (0, 1)$.

Définition 1.12 ([37]) *Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite bêta-convexe sur I, si*

$$f\,(tx + (1-t)\,y) \leq t^p\,(1-t)^q\, f\,(x) + t^q\,(1-t)^p\, f\,(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$, et $t \in (0, 1)$, où $p, q > -1$.

1.0.2 Convexité généralisée

Le concept de fonctions préinvexes est une généralisation de la notion de convexité classique, cette dernière a été introduite par Hanson [9].

Dans tous ce qui suit on considère que le sous-ensemble $K \subseteq \mathbb{R}$ et les fonctions $f : K \to \mathbb{R}$ et $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$.

Définition 1.13 ([39]) *Un ensemble K est dit invex au point x par rapport à η, si*

$$x + t\eta\,(y, x) \in K$$

est satisfaite pour tout $y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

Remarque 1.1 *K est dit un ensemble invex par rapport à η, si K est invex en chaque points $x \in K$.*

Définition 1.14 ([39]) *Une fonction f sur l'ensemble invex K est dite préinvexe par rapport à η, si*

$$f\,(x + t\eta\,(y, x)) \leq (1 - t)\, f\,(x) + tf(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.15 ([38]) *Une fonction positive f sur l'ensemble invex $K \subseteq [0, \infty)$ est dite s-préinvexe au second sens par rapport à η, pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$, si*

$$f\,(x + t\eta\,(y, x)) \leq (1 - t)^s f\,(x) + t^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.16 ([29] , **Condition C**) *Soit $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble invex par rapport à η, alors pour tout $a, b \in K$ et $t \in [0, 1]$, on a*

$$\eta\,(a, a + t\eta(b, a)) = -\eta(b, a) \text{ et } \eta\,(a, b + t\eta(a, b)) = (1 - t)\,\eta\,(a, b)\,.$$

Remarque 1.2 *Il s'ensuit de la Condition C*

$$\eta\,(a + t_2\eta(b, a), a + t_1\eta(b, a)) = (t_2 - t_1)\,\eta\,(b, a)$$

pour tout $a, b \in K$ *et* $t_1, t_2 \in [0, 1]$.

1.0.3 Quelques fonctions spéciales

Fonction gamma

La fonction gamma d'Euler est une fonction complexe, considérée comme fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes à l'exception des entiers négatifs

Définition 1.17 ([3]) *Pour tout nombre complexe* z *tel que* $\mathrm{Re}(z) > 0$, *on définit la fonction suivante, appelée fonction gamma comme suit*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Remarque 1.3 *Pour* $z \in \mathbb{N}$, *on a* $\Gamma(z) = (z-1)! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (z-1)$.

Fonction bêta

Définition 1.18 ([33]) *La fonction bêta d'Euler est définie pour tous nombres complexes* x *et* y *de parties réelles strictement positives par*

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Remarque 1.4 *La relation entre la fonction gamma et la fonction bêta est la suivante*

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Fonction bêta incomplète

Définition 1.19 ([4]) *La fonction bêta incomplète est définie pour tous nombres complexes x et y de parties réelles strictement positives et $\alpha \in [0,1)$ par*

$$B_{\alpha}(x,y) = \int_{0}^{\alpha} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

1.1 Calcul fractionnaire

L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale de la fin du 17 ^{ème} siècle jusqu'à nos jours. Les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin de l'année 1695 quand L'Hospital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur la signification de $\frac{d^n y}{dx^n}$ lorsque $n = \frac{1}{2}$. Leibniz, dans sa réponse voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et à répondu à L'Hospital : "... cela conduirait à un paradoxe ...". Il a fallu attendre les années 1990 pour voir apparaître les premières conséquences utiles. La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le non "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories on fait leurs apparitions comme celle de Grünwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo etc. Cette théorie n'a cessé d'attirer l'attention des chercheurs vu l'ampleur de son champ d'application en traitement d'images, biologie, génie civil mécanique, équations différentielle.

Intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.20 ([12]) *Soit $f \in L^1([a,b])$, l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville $I_{a^+}^{\alpha} f(x)$ d'ordre $\alpha > 0$, où $a > 0$ est définie par*

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha\ )} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a,$$

où $\Gamma(.)$ est la fonction gamma d'Euler.

Remarque 1.5 *Lorsque $\alpha = n$, l'intégrale de la définition précédente coïncide avec la $n^{ième}$ intégrale, c'est-à-dire*

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{n} f(x) &= \tfrac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \\ &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n. \end{aligned}$$

Remarque 1.6 *Par convention on pose $I_{a^+}^{0} f(x) = f(x)$.*

Remarque 1.7 *Généralement nous utilisons les écritures suivantes*

$$\begin{aligned} J_{a^+}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a > 0 \\ J_{b^-}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad b > x, \end{aligned}$$

où $f \in L^1([a,b])$, $\alpha > 0$, $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$, est la fonction gamma d'Euler et $J_{a^+}^{0} f(x) = J_{b^-}^{0} f(x) = f(x)$.

1.1.1 Quelques identités intégrales importantes

Lemme 1.1 ([34]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° (I° l'intérieur de I) où $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $f' \in L^1([a,b])$, alors pour tout $t \in [0,1]$, l'égalité suivante est satisfaite*

$$f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du = (a-b)\int_0^1 p(t)\, f'(ta + (1-t)b)\,dt,$$

où

$$p(t) = \begin{cases} t & , t \in \left[0, \frac{b-x}{b-a}\right] \\ t-1 & , t \in \left(\frac{b-x}{b-a}, 1\right], \end{cases}$$

et $x \in [a,b]$.

Lemme 1.2 ([11]) *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble invex ouvert par rapport à la fonction $\eta : A \times A \to \mathbb{R}$ et $a, b \in A$ avec $a < a + \eta(b,a)$. Supposons que $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable. Si f' est intégrable sur $[a, a+\eta(b,a)]$, alors l'égalité suivante :*

$$\begin{aligned} & f(x) - \tfrac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du \qquad (1.1) \\ = \; & \eta(b,a)\left(\int_0^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t f'(a + t\eta(b,a))\,dt + \int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^1 (t-1) f'(a + t\eta(b,a))\,dt \right) \end{aligned}$$

est satisfaite pout tout $x \in [a, a+\eta(b,a)]$.

Lemme 1.3 ([41]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° où $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $f' \in L^1([a,b])$ alors, pour tout $x, t \in [a,b]$ et $\alpha > 0$ on a :*

$$\begin{aligned} & \left| \left[\frac{(x-a)^{\alpha} + (b-x)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha+1}} \right] f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} \left[J_{x^+}^{\alpha} f(b) + J_{x^-}^{\alpha} f(a) \right] \right| \\ = \; & \int_0^1 m(t)\, f'(ta + (1-t)b)\,dt, \end{aligned}$$

où

$$m(t) = \begin{cases} -t^{\alpha}, & t \in \left[0, \frac{b-x}{b-a}\right] \\ (1-t)^{\alpha}, & t \in \left(\frac{b-x}{b-a}, 1\right]. \end{cases}$$

Lemme 1.4 ([15]) *Soit $f : [a, a+\eta(b,a)] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable avec $a < a+\eta(b,a)$. Si $f' \in L^1([a, a+\eta(b,a)])$, alors l'égalité fractionnaire suivante*

$$\begin{aligned} & \left(\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha} + \left(1 - \tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha}\right) f(x) - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(\eta(b,a))^{\alpha}} \left(J_{x^-}^{\alpha} f(a) + J_{x^+}^{\alpha} f(a+\eta(b,a))\right) \\ = \ & \eta(b,a) \left(\int_0^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t^{\alpha} f'(a+t\eta(b,a))dt - \int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1} (1-t)^{\alpha} f'(a+t\eta(b,a))dt \right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

est satisfaite pour tout $x \in [a, a+\eta(b,a)]$.

Inégalité d'Hermite-Hadamard

Nous rappelons la fameuse inégalité dite Hermite-Hadamard pour les fonctions convexes ensuite nous énoncerons sa généralisation pour les fonctions s-convexes

Lemme 1.5 ([27]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction convexe, alors*

$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leq \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \tfrac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Lemme 1.6 ([5]) *Supposons que $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ est une fonction s-convexe au second sens, où $s \in (0,1)$ et $a, b \in [0,\infty)$ tel que $a < b$. Si $f \in L^1([a,b])$, alors l'inégalité suivante à lieu*

$$2^{s-1} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leq \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq \tfrac{f(a)+f(b)}{s+1}. \tag{1.3}$$

Inégalité de Hölder

Lemme 1.7 ([26]) *Soit* $p > 0$ *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Si* f *et* g *sont deux fonctions réelles définies sur* $[a, b]$ *et si* $|f|^p$ *et* $|g|^q$ *sont des fonctions intégrables sur* $[a, b]$*, alors*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq \left(\int_a^b f^p(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)\, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Chapitre 2

Inégalités intégrales de type Ostrowski

2.0.2 Inégalité d'Ostrowski

En 1938, Ostrowski prouva le théorème suivant :

Théorème 2.1 ([30]) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction dérivable à l'intérieur de $I \subset \mathbb{R}$ ($a, b \in I^{\circ}$avec $a < b$). Si $|f'(t)| \leq M$ pour tout $t \in [a, b]$, alors*

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{(x - \frac{(a+b)}{2})^2}{(b-a)^2} \right] (b-a)M \tag{2.1}$$

est satisfaite pour tout $x \in [a, b]$.

Ce type d'inégalités fournit des estimations d'erreurs nettes dans l'approximation de la valeur d'une fonction par rapport à sa moyenne intégrale. Elles s'appliquent pour l'obtention des approximations à priori et le calcul des bornes d'erreurs pour différentes règles de quadratures. De nombreuses extensions et généralisations aussi bien dans le cas continu que dans le cas discret ont été élaborées ainsi que de nombreuses applications dans l'analyse numérique et la théorie des probabilités, pour plus de détails se référer à [5, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19] et les références qui s'y sont citées.

2.0.3 Les inégalités de type Ostrowski pour les fonctions dont les dérivées sont s-convexe au second sens

Dans tout ce que suit I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, dont l'intérieur est noté par I°, $a, b \in I^{\circ}$ avec $a < b$, $L^1([a,b])$ l'espace des fonctions intégrables sur $[a,b]$, s un nombre fixé dans $(0,1]$.

Théorème 2.2 **(**[34]**)** *Soit $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° telle que $f' \in L^1([a,b])$. Si $|f'|$ est s-convexe au second sens sur $[a,b]$, alors l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{(s+1)(s+2)} \left\{ \left[2(s+1)\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+2} - (s+2)\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+1} + 1 \right] |f'(a)| \right. \\
& \left. + \left[2(s+1)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+2} - (s+2)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+1} + 1 \right] |f'(b)| \right\}
\end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $x \in [a,b]$.

Corollaire 2.1 **(**[34]**)** *Dans le Théorème 2.2, si on prend $x = \frac{a+b}{2}$, on obtient l'inégalité du point milieu suivante pour les fonctions s-convexes*

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \leq \frac{b-a}{(s+1)(s+2)}\left(1 - \frac{1}{2^{s+1}}\right)\left[|f'(a)| + |f'(b)|\right].$$

De plus si on pose $s = 1$, on obtient l'inégalité du point milieu pour les fonctions convexes

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \leq \frac{b-a}{4}\left[\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2}\right].$$

Théorème 2.3 **(**[34]**)** *Soit $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° telle que $f' \in L^1([a,b])$. Si $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$, telle que $q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors* *l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \\
\leq\ & (b-a)\,\frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\frac{1}{(s+1)^{\frac{1}{q}}} \\
&\times \left\{ \left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{p}} \left(\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{s+1} |f'(a)|^q + \left[1 - \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{s+1}\right] |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. + \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{p}} \left(\left[1 - \left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{s+1}\right] |f'(a)|^q + \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{s+1} |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $x \in [a,b]$.

Remarque 2.1 *Dans le Théorème 2.3, si on choisit $x = \frac{a+b}{2}$ et $s = 1$, alors on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\tfrac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(|f'(a)|^q + 3\,|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(3\,|f'(a)|^q + |f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \right].
\end{aligned}$$

Théorème 2.4 ([34]) *Soit $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° telle que $f' \in L^1([a,b])$. Si $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$, telle que $q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ \left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^2 \left(\tfrac{|f'(x)|^q + |f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^2 \left(\tfrac{|f'(a)|^q + |f'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $x \in [a,b]$.

Corollaire 2.2 ([34]) *Dans le Théorème 2.4, si on choisit* $x = \frac{a+b}{2}$*, alors*

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\,du \right| \\ \leq\ & \tfrac{b-a}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ \left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(b)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{|f'(a)|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}. \end{aligned}$$

De plus si on suppose $f'(a) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'(b)$ *et* $s = 1$*, on obtient*

$$\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\,du \right| \leq \tfrac{b-a}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\tfrac{|f'(a)| + |f'(b)|}{4} \right).$$

Théorème 2.5 ([34]) *Soit* $f : I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* I° *telle que* $f' \in L^1([a,b])$*. Si* $|f'|^q$ *est s-convexe sur* $[a,b]$*, telle que* $q > 1$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, alors l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} & \left| f(x) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\,du \right| \\ \leq\ & \tfrac{b-a}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\left(\tfrac{b-x}{b-a} \right)^{p+1} + \left(\tfrac{x-a}{b-a} \right)^{p+1} \right]^{\frac{1}{p}} \left(\tfrac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{2.2}$$

est satisfaite pour tout $x \in [a,b]$*.*

Corollaire 2.3 ([34]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.5, de plus si on suppose que* $p = q = 2$*, on obtient*

$$\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\,du \right| \leq \tfrac{b-a}{\sqrt{3}} \left[\tfrac{1}{4} + \tfrac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{|f'(a)|^2 + |f'(b)|^2}{s+1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus si on prend $x = \frac{a+b}{2}$ *et* $s = 1$*, on trouve*

$$\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\, du \right| \leq \tfrac{b-a}{2} \left(\tfrac{|f'(a)|^2 + |f'(b)|^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 2.2 *Sous les hypothèses du Théorème 2.5, si de plus on suppose que* $p = q = 2$, $|f'| \leq M$, $M > 0$ *et* $s = 1$*, on obtient*

$$\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\, du \right| \leq \tfrac{M(b-a)}{\sqrt{3}} \left[\tfrac{1}{4} + \tfrac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

2.0.4 Inégalités fractionnaire de type Ostrowski pour les fonctions convexe

Théorème 2.6 ([41]) *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*, une fonction différentiable sur* (a,b) *avec* $a < b$ *telle que* $f' \in L^1([a,b])$*. Si* $|f'|$ *est convexe dans* $[a,b]$ *et* $x \in [a,b]$*, alors l'inégalité fractionnaire*

$$\begin{aligned} & \left| \left[\tfrac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}} \right] f(x) - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} \left[J_{x^+}^\alpha f(b) + J_{x^-}^\alpha f(a) \right] \right| \\ \leq \; & \tfrac{1}{\alpha+2} \left\{ \left(\tfrac{(b-x)^{\alpha+2}}{(b-a)^{\alpha+2}} + \tfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{(b-a)^{\alpha+1}} \left[\tfrac{1}{\alpha+1} + \tfrac{b-x}{b-a} \right] \right) |f'(a)| \right. \\ & \left. + \left(\tfrac{(x-a)^{\alpha+2}}{(b-a)^{\alpha+2}} + \tfrac{(b-x)^{\alpha+1}}{(b-a)^{\alpha+1}} \left[\tfrac{1}{\alpha+1} + \tfrac{x-a}{b-a} \right] \right) |f'(b)| \right\} \end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $x \in [a,b]$*, où* $\alpha > 0$ *et* Γ *est la fonction gamma d'Euler.*

Corollaire 2.4 ([41]) *Dans le Théorème 2.6, si on prend* $x = \frac{a+b}{2}$*, on obtient*

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)}^\alpha + f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)}^\alpha + f(a) \right] \right| \\ \leq \; & \tfrac{b-a}{2(\alpha+1)} \left(\tfrac{|f'(a)| + |f'(b)|}{2} \right). \end{aligned}$$

Théorème 2.7 ([41]) *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*, une fonction différentiable sur* (a,b) *avec* $a < b$ *telle que* $f' \in L^1([a,b])$*. Si* $|f'|^q$ *est convexe dans* $[a,b]$*, telle que* $q > 1$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *alors l'inégalité fractionnaire*

$$\begin{aligned}
&\left|\left[\tfrac{(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha+1}}\right] f\left(x\right)-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[J_{x^{+}}^{\alpha} f\left(b\right)+J_{x^{-}}^{\alpha} f\left(a\right)\right]\right| \\
\leq\ & \tfrac{1}{(b-a)^{\alpha+1}(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[(b-x)^{\alpha+1}\left(\tfrac{|f'(x)|^{q}+|f'(b)|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(x-a\right)^{\alpha+1}\left(\tfrac{|f'(x)|^{q}+|f'(a)|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $x \in [a,b]$, où $\alpha > 0$ et Γ est la fonction gamma d'Euler.

Corollaire 2.5 ([41]) *Dans le Théorème 2.7, si on prend $x = \frac{a+b}{2}$, on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)}^{\alpha}+f\left(b\right)+J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)}^{\alpha}+f\left(a\right)\right]\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)^{q}\right|+|f'(b)|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)^{q}\right|+|f'(a)|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right].
\end{aligned}$$

2.0.5 Inégalités de type Ostrowski pour les fonctions préinvexe

Théorème 2.8 ([11]) *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble ouvert invex par rapport à $\eta : A \times A \to \mathbb{R}$ et $a, b \in A$ avec $a < a + \eta(b,a)$. Supposons que $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable et $|f'|$ est une fonction préinvexe sur A. Si $f' \in L^1([a, a+\eta(b,a)])$, alors l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(x\right)-\tfrac{1}{\eta(b,a)}\int\limits_{a}^{a+\eta(b,a)} f\left(u\right)du\right| \\
\leq\ & \tfrac{\eta(b,a)}{6}\left\{\left[3\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{2}-2\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{3}+3\left(\tfrac{a+\eta(b,a)-x}{\eta(b,a)}\right)^{3}\right]\left|f'\left(a\right)\right|\right. \\
&\left.+\left[1-3\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{2}+4\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{3}\right]\left|f'\left(b\right)\right|\right\} \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $x \in [a, a+\eta(b,a)]$.

Remarque 2.3 *Sous les hypothèses du Théorème 2.8, on a* *(a) Pour $\eta(b,a) = b - a$ et $x = \frac{2a+\eta(b,a)}{2}$, on a l'inégalité suivante*

$$\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\, du \right| \leq \tfrac{b-a}{8} \left(|f'(a)| + |f'(b)| \right). \tag{2.4}$$

(b) Si de plus nous supposons que $|f'(x)| \leq M$, $M > 0$, on obtient l'inégalité suivante

$$\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\, du \right| \leq M \tfrac{(b-a)}{4}.$$

*(c) Si η satisfait la condition **C**, d'après la préinvexité de $|f'|$ on a*

$$\begin{aligned} |f'(a + t\eta(b,a))| &= |f'(a + \eta(b,a) + (1-t)\,\eta(a, a+\eta(b,a)))| \\ &\leq t\,|f'(a+\eta(b,a))| + (1-t)\,|f'(a)| \end{aligned} \tag{2.5}$$

pour tout $t \in [0,1]$.

Et en utilisant l'inégalité (2.17) dans la preuve de Théorème 2.8, l'inégalité (2.15) devient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} &\left| f(x) - \tfrac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\, du \right| \\ \leq\ & \tfrac{\eta(b,a)}{6} \left\{ \left[3\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^2 - 2\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^3 + 2\left(\tfrac{a+\eta(b,a)-x}{\eta(b,a)}\right)^3 \right] |f'(a)| \right. \\ & \left. + \left[1 - 3\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^2 + 4\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^3 \right] |f'(a+\eta(b,a))| \right\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

On note que d'après la préinvexité de $|f'|$, on a

$$|f'(a+\eta(b,a))| \leq |f'(b)|$$

donc, l'inégalité (2.18) est plus fine que l'inégalité (2.15).

Théorème 2.9 ([11]) *Soit $A \subset R$ un sous ensemble ouvert invex par rapport à $\eta : A \times A \to \mathbb{R}$ et $a, b \in A$ avec $a < a + \eta(b,a)$. Supposons que $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable telle que $|f'|^q$ est fonction préinvexe sur $[a, a+\eta(b,a)]$ pour un certain nombre fixé $q > 1$ telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f' \in L^1([a, a+\eta(b,a)])$ et η satisfait à la Condition C, alors l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} & \left| f(x) - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\, du \right| \\ \leq & \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \frac{(x-a)^2}{\eta(b,a)} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(x)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} + \frac{(a+\eta(b,a)-x)^2}{\eta(b,a)} \left(\frac{|f'(a+\eta(b,a)-x)|^q + |f'(x)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

est satisfaite pour chaque $x \in [a, a+\eta(b,a)]$.

Corollaire 2.6 ([11]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.9. Si de plus on suppose que $|f'(x)| \leq M$, $M > 0$, alors*

$$\left| f(x) - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\, du \right| \leq \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} M \left(\frac{(x-a)^2 + (a+\eta(b,a)-x)^2}{\eta(b,a)} \right)$$

est satisfaite pour tout $x \in [a, a+\eta(b,a)]$.

Corollaire 2.7 ([11]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.9. Si de plus on choisit $x = \frac{2a+\eta(b,a)}{2}$, on obtient*

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\, du \right| \\ \leq & \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \frac{\eta(b,a)}{4} \left(\frac{3|f'(a)|^q + |f'(a+\eta(b,a))|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \frac{\eta(b,a)}{4} \left(\frac{3|f'(a+\eta(b,a))|^q + |f'(a)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}. \end{aligned}$$

Remarque 2.4 *Si on prend $\eta(b,a) = b - a$, alors le Corollaire 2.7, devient*

$$\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\, du \right|$$
$$\leq \tfrac{b-a}{16}\left(\tfrac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(3\left|f'(a)\right|^q + \left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(3\left|f'(b)\right|^q + \left|f'(a)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

soit $a_1 = 3\left|f'(a)\right|^q$, $b_1 = \left|f'(b)\right|^q$, $a_2 = 3\left|f'(b)\right|^q$, $b_2 = \left|f'(a)\right|^q$. Comme $0 < 1/q < 1$ car $q > 1$, d'après l'inégalité algébrique ci-dessous

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^s \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^s + \sum_{k=1}^{n} b_k^s \tag{2.8}$$

pour $(0 < s < 1)$, $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ et $b_1, b_2, ..., b_n \geq 0$, on obtient l'inégalité suivante

$$\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\, du \right| \leq \tfrac{b-a}{4}\left(\tfrac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\left|f'(a)\right|^q + \left|f'(b)\right|^q\right).$$

2.0.6 Inégalités de type Ostrowski pour les fonctions s-préinvexe

Théorème 2.10 ([20]) *Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que $f' \in L^1([a, a + \eta(b,a)])$ avec $\eta(b,a) > 0$. Si $|f'|$ est s-préinvexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0,1]$, alors nous avons l'inégalité suivante*

$$\left| f(x) - \tfrac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\, du \right| \leq \tfrac{\eta(b,a)}{(s+1)(s+2)} \left[\Psi_1 \left|f'(a)\right| + \Psi_2 \left|f'(b)\right|\right], \tag{2.9}$$

où

$$\Psi_1 = 1 - (s+2)\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\left(1 - \tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+1} + s\left(1 - \tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+2} \tag{2.10}$$

et

$$\Psi_2 = 1 - (s+2)\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+1} + 2(s+1)\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+2}. \tag{2.11}$$

Corollaire 2.8 ([20]) *Dans le Théorème 2.10, si on choisit $\eta(b,a) = b - a$ et $s = 1$, on* *obtient l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\, du \right| \\
\leq\ & \frac{1}{6(b-a)^2} \left\{ \left((b-a)^3 - 3(b-a)(b-x)^2 + 4(b-x)^3 \right) |f'(a)| \right. \\
& \left. + \left((b-a)^3 - 3(b-a)(x-a)^2 + 4(x-a)^3 \right) |f'(b)| \right\}.
\end{aligned}$$

Corollaire 2.9 **(**[20]**)** *Dans le Théorème 2.10, si on prend* $x = \frac{2a+\eta(b,a)}{2}$*, on obtient l'inégalité du point milieu suivante*

$$\left| f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\, du \right| \leq \frac{\eta(b,a)}{(s+1)(s+2)} \left[1 - \frac{1}{2^{s+1}}\right] \left[|f'(a)| + |f'(b)|\right].$$

Théorème 2.11 **(**[20]**)** *Soit* $f : K \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable telle que* $f' \in L^1([a, a+\eta(b,a)])$ *avec* $\eta(b,a) > 0$*, et soit* $q > 1$ *telle que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Si* $|f'|^q$ *est fonction s-préinvexe au second sens pour un certain nombre fixé* $s \in (0,1]$*, alors l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\, du \right| \\
\leq\ & \frac{\eta(b,a)}{(p+1)^{\frac{1}{p}} (s+1)^{\frac{1}{q}}} \left(\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^{1+\frac{1}{p}} \right. \\
& \times \left(\left(1 - \left(1 - \frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^{1+s} \right) |f'(a)|^q + \left(\frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^{1+s} |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(1 - \frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^{1+\frac{1}{p}} \\
& \left. \times \left(\left(1 - \frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^{1+s} |f'(a)|^q + \left(1 - \left(\frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^{1+s} \right) |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $x \in [a, a+\eta(b,a)]$.

Corollaire 2.10 **(**[20]**)** *Si on prend* $s = 1$ *dans le Théorème 2.11, on obtient l'inégalité* *suivante*

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{(p+1)^{\frac{1}{p}}2^{\frac{1}{q}}}\left(\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^2\left(\left(2-\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)|f'(a)|^q+\frac{x-a}{\eta(b,a)}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^2\left(\left(1-\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)|f'(a)|^q+\left(1+\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Corollaire 2.11 ([20]) *Dans le Corollaire 2.10, si on choisit $\eta(b,a)=b-a$, on obtient l'inégalité suivante*

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{(p+1)^{\frac{1}{p}}2^{\frac{1}{q}}}\left(\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2\left(\left(1+\frac{b-x}{b-a}\right)|f'(a)|^q+\frac{x-a}{b-a}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{x-a}{b-a}\right)^2\left(\frac{b-x}{b-a}|f'(a)|^q+\left(1+\frac{x-a}{b-a}\right)|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Corollaire 2.12 ([20]) *Dans le Théorème 2.11, si on choisit $x=\frac{2a+\eta(b,a)}{2}$, alors on obtient l'inégalité du point milieu suivante*

$$\left|f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du\right|\leq \frac{\eta(b,a)}{(p+1)^{\frac{1}{p}}(s+1)^{\frac{1}{q}}2^{2+\frac{s}{q}}}$$
$$\times\left(\left(\left(2^{s+1}-1\right)|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(|f'(a)|^q+\left(2^{s+1}-1\right)|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Corollaire 2.13 ([20]) *Dans le Corollaire 2.12, si on prend $s=1$, on obtient l'inégalité du point milieu suivante*

$$\left|f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du\right|$$
$$\leq \frac{\eta(b,a)}{(p+1)^{\frac{1}{p}}4^{1+\frac{1}{q}}}\left(\left(3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Corollaire 2.14 ([20]) *Dans le Corollaire 2.12, si on choisit $\eta(b,a)=b-a$, on obtient l'inégalité du point milieu suivante*

$$\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \leq \tfrac{b-a}{(p+1)^{\frac{1}{p}}(s+1)^{\frac{1}{q}}2^{2+\frac{s}{q}}}$$
$$\times\left(\left(\left(2^{s+1}-1\right)|f'(a)|^q + |f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(|f'(a)|^q + \left(2^{s+1}-1\right)|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

2.0.7 Inégalités fractionnaire de type Ostrowski pour les fonctions s-préinvexe

Théorème 2.12 ([15]) *Soit $f:[a,a+\eta(b,a)]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que $\eta(b,a)>0$ et $f'\in L^1([a,a+\eta(b,a)])$. Si $|f'|$ est s-préinvexe au second sens pour un certain nombre fixé $s\in(0,1]$, alors l'inégalité fractionnaire suivante*

$$\begin{aligned} &\left|\left(\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha} + \left(1-\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha}\right) f(x) - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(\eta(b,a))^{\alpha}}\left(J^{\alpha}_{x^-}f(a) + J^{\alpha}_{x^+}f(a+\eta(b,a))\right)\right| \\ \leq\ & \eta(b,a)\left(\left(\beta_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}(\alpha+1,s+1) + \tfrac{1}{s+\alpha+1}\left(1-\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha+s+1}\right)|f'(a)|\right. \\ & \left. + \left(\tfrac{1}{s+\alpha+1}\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha+s+1} + \beta(s+1,\alpha+1) - \beta_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}(s+1,\alpha+1)\right)|f'(b)|\right) \end{aligned} \tag{2.13}$$

est satisfaite pour tout $x\in[a,a+\eta(b,a)]$.

Corollaire 2.15 ([15]) *Dans le Théorème 2.12, si on choisit $x=\frac{2a+\eta(b,a)}{2}$, on obtient l'inégalité fractionnaire du point milieu suivante*

$$\begin{aligned} &\left| f\left(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) - \tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\eta(b,a))^{\alpha}}\left(J^{\alpha}_{\frac{2a+\eta(b,a)}{2}^-}f(a) + J^{\alpha}_{\frac{2a+\eta(b,a)}{2}^+}f(a+\eta(b,a))\right)\right| \\ \leq\ & \eta(b,a)\left(\left(\beta_{\frac{1}{2}}(\alpha+1,s+1) + \tfrac{1}{(s+\alpha+1)2^{\alpha+s+1}}\right)|f'(a)|\right. \\ & \left. + \left(\tfrac{1}{(s+\alpha+1)2^{\alpha+s+1}} + \beta(s+1,\alpha+1) - \beta_{\frac{1}{2}}(s+1,\alpha+1)\right)|f'(b)|\right). \end{aligned}$$

Théorème 2.13 ([15]) *Soit $f:[a,a+\eta(b,a)]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que $\eta(b,a)>0$ et $f'\in L^1([a,a+\eta(b,a)])$ et soit $q>1$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Si $|f'|^q$ est s-préinvexe au* *second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0,1]$, alors l'inégalité fractionnaire suivante*

$$\begin{aligned}
& \left| \left(\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^{\alpha} + \left(1 - \tfrac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^{\alpha} \right) f(x) - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(\eta(b,a))^{\alpha}} \left(J_{x^-}^{\alpha} f(a) + J_{x^+}^{\alpha} f(a+\eta(b,a)) \right) \right| \\
\leq \;& \tfrac{\eta(b,a)}{(s+1)^{\frac{1}{q}} (\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^{\alpha+\frac{1}{p}} \left(\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^{s+1} |f'(b)|^{q} \right.\right. \\
& + \left. \left(1 - \left(1 - \tfrac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^{s+1} \right) |f'(a)|^{q} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(1 - \tfrac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^{\alpha+\frac{1}{p}} \\
& \times \left. \left(\left(1 - \tfrac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^{s+1} |f'(a)|^{q} + \left(1 - \left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^{s+1} \right) |f'(b)|^{q} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $x \in [a, a+\eta(b,a)]$.

Corollaire 2.16 ([15]) *Dans le Théorème 2.13, si on choisit $x = \frac{2a+\eta(b,a)}{2}$, on obtient l'inégalité fractionnaire du point milieu suivante*

$$\begin{aligned}
& \left| f\left(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) - \tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\eta(b,a))^{\alpha}} \left(J_{\frac{2a+\eta(b,a)}{2}^-}^{\alpha} f(a) + J_{\frac{2a+\eta(b,a)}{2}^+}^{\alpha} f(a+\eta(b,a)) \right) \right| \\
\leq \;& \tfrac{\eta(b,a)}{2^{\alpha+\frac{1}{p}} (s+1)^{\frac{1}{q}} (\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\left(\tfrac{|f'(b)|^{q} + \left(2^{s+1}-1\right)|f'(a)|^{q}}{2^{s+1}} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{|f'(a)|^{q} + \left(2^{s+1}-1\right)|f'(b)|^{q}}{2^{s+1}} \right)^{\frac{1}{q}} \right).
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Nouveaux résultats

Définition 3.1 *Une fonction positive $f : I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$ est dite fortement bêta-convexe sur I, si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^p (1-t)^q f(x) + t^q (1-t)^p f(y) - ct(1-t)(x-y)^2$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$, où $c \geq 0$ et $p, q > -1$.

Remarque 3.1 *La Définition 3.1 reprend la Définition 1.2 pour $c = q = 0$ et $p = 1$, la Définition 1.3 pour $q = 0$ et $p = 1$, la Définition 1.4 pour $p = q = c = 0$, la Définition 1.5 pour $p = q = 0$, la Définition 1.6 pour $p \in (-1, 0]$ et $q = c = 0$, la Définition 1.11 pour $c = 0$ et $p = q = 1$, la Définition 1.12 pour $c = 0$, la Définition 1.7 pour $p \in (0, 1]$ et $q = c = 0$, la Définition 1.8 pour $p \in (0, 1]$ et $q = 0$, la Définition 1.9 pour $p \in (-1, 1]$ et $q = c = 0$ et la Définition 1.10 pour $p \in (-1, 1]$ et $q = 0$.*

Définition 3.2 *Une fonction positive $f : I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$ est dite fortement tgs-convexe sur I, si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq t(1-t)(f(x) + f(y)) - ct(1-t)(x-y)^2$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I, c > 0$ et $t \in (0, 1)$.

Définition 3.3 *Une fonction positive $f : I \to \mathbb{R}$ est dite fonction fortement s-Godunova-Levin, où $s \in [0,1]$, si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq \frac{f(x)}{t^s} + \frac{f(y)}{(1-t)^s} - ct(1-t)(x-y)^2$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I, c > 0$ et tout $t \in (0,1)$.

Théorème 3.1 *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° où $a, b \in I$ avec $a < b$, et $f' \in L^1([a,b])$. Si $|f'|$ est fortement bêta-convexe de module $c > 0$, alors l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt \right| \\
\leq\ & (b-a) \Big(\Big(B_{\frac{b-x}{b-a}}(p+2, q+1) + B_{\frac{x-a}{b-a}}(q+2, p+1) \Big) |f'(a)| \\
& + \Big(B_{\frac{b-x}{b-a}}(q+2, p+1) + B_{\frac{x-a}{b-a}}(p+2, q+1) \Big) |f'(b)| \\
& - \tfrac{c}{(b-a)^3} \Big((b-x)^5 \Big(\tfrac{1}{3} - \tfrac{b-x}{4(b-a)} \Big) + (x-a)^5 \Big(\tfrac{1}{3} - \tfrac{x-a}{4(b-a)} \Big) \Big) \Big)
\end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $x \in [a,b]$, où $\beta_x(.,.)$ est la fonction bêta incomplète et $p, q > -1$.

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux deux membres de l'identité du Lemme 1.1, et en utilisant le fait que $|f'|$ est fortement *bêta*-convexe, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \\
\leq\ & (b-a)\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t\,|f'(ta+(1-t)b)|\,dt + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)\,|f'(ta+(1-t)b)|\,dt \right) \\
\leq\ & (b-a)\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t\left(t^p(1-t)^q|f'(a)| + t^q(1-t)^p|f'(b)| - ct(1-t)(b-x)^2\right)dt \right. \\
& \left. + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)\left(t^p(1-t)^q|f'(a)| + t^q(1-t)^p|f'(b)| - ct(1-t)(x-a)^2\right)dt \right) \\
=\ & (b-a)\left(|f'(a)|\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{p+1}(1-t)^q\,dt + |f'(b)|\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{q+1}(1-t)^p\,dt \right. \\
& -c(b-x)^2\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^2(1-t)\,dt + |f'(a)|\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 t^p(1-t)^{q+1}\,dt \\
& \left. + |f'(b)|\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 t^q(1-t)^{p+1}\,dt - c(x-a)^2\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 t(1-t)^2\,dt \right) \\
=\ & (b-a)\left(|f'(a)|\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{p+1}(1-t)^q\,dt + \int_0^{\frac{x-a}{b-a}} t^{q+1}(1-t)^p\,dt \right) \right. \\
& + |f'(b)|\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{q+1}(1-t)^p\,dt + \int_0^{\frac{x-a}{b-a}} t^{p+1}(1-t)^q\,dt \right) \\
& \left. - c\left((b-x)^2\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^2(1-t)\,dt + (x-a)^2\int_0^{\frac{x-a}{b-a}} (1-t)\,t^2dt \right) \right) \\
=\ & (b-a)\left(\left(B_{\frac{b-x}{b-a}}(p+2,q+1) + B_{\frac{x-a}{b-a}}(q+2,p+1) \right)|f'(a)| \right. \\
& + \left(B_{\frac{b-x}{b-a}}(q+2,p+1) + B_{\frac{x-a}{b-a}}(p+2,q+1) \right)|f'(b)| \\
& \left. - \tfrac{c}{(b-a)^3}\left((b-x)^5\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{b-x}{4(b-a)}\right) + (x-a)^5\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{x-a}{4(b-a)}\right) \right) \right).
\end{aligned}
$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 3.1 *Dans le Théorème 3.1, si on prend* $x = \frac{a+b}{2}$, *on a*

$$\begin{aligned} &\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \right| \\ \leq\ & (b-a)\Big(\Big(B_{\frac{1}{2}}(p+2,q+1) + B_{\frac{1}{2}}(q+2,p+1)\Big)|f'(a)| \\ & + \Big(B_{\frac{1}{2}}(q+2,p+1) + B_{\frac{1}{2}}(p+2,q+1)\Big)|f'(b)| - \tfrac{5c(b-a)^2}{384}\Big). \end{aligned}$$

Corollaire 3.2 *Sous les hypothèses du Théorème 3.1 et si* $|f'|$ *est fortement étendu s-convexe où* $s \in (-1, 1]$, *on a*

$$\begin{aligned} &\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \right| \\ \leq\ & (b-a)\Big(\Big(\tfrac{1}{(s+1)(s+2)} - \tfrac{1}{s+1}\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{s+1} + \tfrac{2}{s+2}\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{s+2}\Big)|f'(a)| \\ & + \Big(\tfrac{1}{(s+1)(s+2)} - \tfrac{1}{s+1}\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{s+1} + \tfrac{2}{s+2}\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{s+2}\Big)|f'(b)| \\ & - \tfrac{c}{(b-a)^3}\Big((b-x)^5\Big(\tfrac{1}{3} - \tfrac{b-x}{4(b-a)}\Big) + (x-a)^5\Big(\tfrac{1}{3} - \tfrac{x-a}{4(b-a)}\Big)\Big)\Big). \end{aligned}$$

De plus si on choisit $x = \frac{a+b}{2}$, *on obtient*

$$\begin{aligned} &\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \right| \\ \leq\ & (b-a)\Big(\tfrac{1}{(s+1)(s+2)}\left(1 - \tfrac{1}{2^{s+1}}\right)(|f'(a)| + |f'(b)|) - \tfrac{5c(b-a)^2}{384}\Big). \end{aligned}$$

Corollaire 3.3 *Sous les hypothèses du Théorème 3.1 et si* $|f'|$ *est fortement tgs-convexe,* *on a*

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|\leq(b-a)$$
$$\times\left(\left(\frac{4\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3-3\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^4+4\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3-3\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^4}{12}\right)(|f'(a)|+|f'(b)|)\right.$$
$$\left.-\frac{c}{(b-a)^3}\left((b-x)^5\left(\frac{1}{3}-\frac{b-x}{4(b-a)}\right)+(x-a)^5\left(\frac{1}{3}-\frac{x-a}{4(b-a)}\right)\right)\right).$$

De plus si on choisit $x=\frac{a+b}{2}$, *on obtient*

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|\leq\frac{5(b-a)}{96}\left((|f'(a)|+|f'(b)|)-\frac{c(b-a)^2}{4}\right).$$

Corollaire 3.4 *Sous les hypothèses du Théorème 3.1 et si* $|f'|$ *est fortement convexe, on a*

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|$$
$$\leq (b-a)\left(\left(\frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3+\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3\right)|f'(a)|\right.$$
$$+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3\right)|f'(b)|$$
$$\left.-\frac{c}{(b-a)^3}\left((b-x)^5\left(\frac{1}{3}-\frac{b-x}{4(b-a)}\right)+(x-a)^5\left(\frac{1}{3}-\frac{x-a}{4(b-a)}\right)\right)\right).$$

De plus si on choisit $x=\frac{a+b}{2}$, *on obtient*

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|\leq\frac{b-a}{8}\left(|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{5c(b-a)^2}{48}\right).$$

Corollaire 3.5 *Sous les hypothèses du Théorème 3.1 et si* $|f'|$ *est une fonction fortement*

P-convexe, on a

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt \right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{2} \left(\left(\left(\frac{b-x}{b-a} \right)^2 + \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2 \right) \left(|f'(a)| + |f'(b)| \right) \right. \\
& \left. - \frac{c}{(b-a)^3} \left((b-x)^5 \left(\frac{1}{3} - \frac{b-x}{4(b-a)} \right) + (x-a)^5 \left(\frac{1}{3} - \frac{x-a}{4(b-a)} \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

De plus si on choisit $x = \frac{a+b}{2}$, on obtient

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2} \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \frac{b-a}{4} \left(|f'(a)| + |f'(b)| - \frac{5c(b-a)^2}{192} \right).$$

Corollaire 3.6 *Sous les hypothèses du Théorème 3.1 et si $|f'|$ est bêta-convexe, on a*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt \right| \\
\leq\ & (b-a) \left(\left(B_{\frac{b-x}{b-a}}(p+2, q+1) + B_{\frac{x-a}{b-a}}(q+2, p+1) \right) |f'(a)| \right. \\
& \left. + \left(B_{\frac{b-x}{b-a}}(q+2, p+1) + B_{\frac{x-a}{b-a}}(p+2, q+1) \right) |f'(b)| \right).
\end{aligned}$$

De plus si on choisit $x = \frac{a+b}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2} \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt \right| \\
\leq\ & (b-a) \left(\left(B_{\frac{1}{2}}(p+2, q+1) + B_{\frac{1}{2}}(q+2, p+1) \right) |f'(a)| \right. \\
& \left. + \left(B_{\frac{1}{2}}(q+2, p+1) + B_{\frac{1}{2}}(p+2, q+1) \right) |f'(b)| \right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.7 *Sous les hypothèses du Théorème 3.1 et si $|f'|$ est étendu s-convexe, on* *a*

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|$$
$$\leq (b-a)\left(\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}-\frac{1}{s+1}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+1}+\frac{2}{s+2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+2}\right)|f'(a)|\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}-\frac{1}{s+1}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+1}+\frac{2}{s+2}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+2}\right)|f'(b)|\right).$$

De plus si on choisit $x=\frac{a+b}{2}$*, on obtient*

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|\leq\frac{b-a}{(s+1)(s+2)}\left(1-\frac{1}{2^{s+1}}\right)(|f'(a)|+|f'(b)|).$$

Remarque 3.2 *Le Corollaire 3.7 sera réduit au Théorème 2.1 de* [34] *si on suppose que* $s\in(0,1]$*. De plus si on prend* $x=\frac{a+b}{2}$ *on obtient le Corollaire 2.1 de* [34]*.*

Corollaire 3.8 *Sous les hypothèses du Théorème 3.1 et si* $|f'|$ *est tgs-convexe, on a*

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|\leq\frac{b-a}{12}(|f'(a)|+|f'(b)|)$$
$$\times\left(4\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3-3\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^4+4\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3-3\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^4\right).$$

De plus si on choisit $x=\frac{a+b}{2}$*, on obtient*

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|\leq\frac{5(b-a)}{96}(|f'(a)|+|f'(b)|).$$

Corollaire 3.9 *Sous les hypothèses du Théorème 3.1 et si* $|f'|$ *est convexe, on a*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \right| \\
\leq\ & (b-a)\left(\left(\frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3\right)|f'(a)| \right.\\
&\left. + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3\right)|f'(b)|\right).
\end{aligned}$$

De plus si on choisit $x = \frac{a+b}{2}$*, on obtient le Théorème 2.2 de* [13].

Corollaire 3.10 *Sous les hypothèses du Théorème 3.1 et si* $|f'|$ *est une fonction* P*-convexe, on a*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2\right)(|f'(a)| + |f'(b)|).
\end{aligned}$$

De plus si on choisit $x = \frac{a+b}{2}$*, on obtient*

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \frac{b-a}{4}(|f'(a)| + |f'(b)|).$$

Théorème 3.2 *Soit* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* I° *où* $a, b \in I$ *avec* $a < b$*, et* $f' \in L^1([a,b])$*, et soit* $\mu > 1$ *avec* $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 1$*. Si* $|f'|^{\mu}$ *fortement bêta-convexe de* *module $c>0$, alors l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}} \Bigg(\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{\lambda}} \Big(|f'(a)|^{\mu} \beta_{\frac{b-x}{b-a}}(p+1,q+1) + |f'(b)|^{\mu} \beta_{\frac{b-x}{b-a}}(q+1,p+1) \\
& - c\tfrac{(b-x)^4}{(b-a)^2}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{b-x}{3(b-a)}\right)\Big)^{\frac{1}{\mu}} \\
& + \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{\lambda}} \Big(|f'(a)|^{\mu} \beta_{\frac{x-a}{b-a}}(q+1,p+1) + |f'(b)|^{\mu} \beta_{\frac{x-a}{b-a}}(p+1,q+1) \\
& - c\tfrac{(x-a)^4}{(b-a)^2}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{x-a}{3(b-a)}\right)\Big)^{\frac{1}{\mu}} \Bigg)
\end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $x \in [a,b]$, où $\beta_x(.,.)$ est la fonction bêta incomplète et $p,q>-1$.

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux deux membres de l'identité du Lemme 1.1 et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \\
\leq\ & (b-a) \left(\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\lambda} dt \right)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} |f'(ta+(1-t)b)|^{\mu} dt \right)^{\frac{1}{\mu}} \right. \\
& \left. + \left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} (1-t)^{\lambda} dt \right)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} |f'(ta+(1-t)b)|^{\mu} dt \right)^{\frac{1}{\mu}} \right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}} \left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{\lambda}} \left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} |f'(ta+(1-t)b)|^{\mu} dt \right)^{\frac{1}{\mu}} \right. \\
& \left. + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{\lambda}} \left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} |f'(ta+(1-t)b)|^{\mu} dt \right)^{\frac{1}{\mu}} \right). \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Puisque $|f'|^{\mu}$ est fortement *bêta*-convexe, on en déduit

$$\begin{aligned}
& \left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}} \left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{\lambda}} \right. \\
& \times \left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left(t^p (1-t)^q |f'(a)|^{\mu} + t^q (1-t)^p |f'(b)|^{\mu} - ct(1-t)(b-x)^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{\mu}} \\
& + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{\lambda}} \\
& \left. \times \left(\int_0^{\frac{x-a}{b-a}} \left(t^q (1-t)^p |f'(a)|^{\mu} + t^p (1-t)^q |f'(b)|^{\mu} - ct(1-t)(x-a)^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{\mu}} \right) \\
=\ & \frac{b-a}{(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}} \left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{\lambda}} \left(|f'(a)|^{\mu} \beta_{\frac{b-x}{b-a}}(p+1,q+1) + |f'(b)|^{\mu} \beta_{\frac{b-x}{b-a}}(q+1,p+1) \right. \right. \\
& \left. - c\frac{(b-x)^4}{(b-a)^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{b-x}{3(b-a)} \right) \right)^{\frac{1}{\mu}} \\
& + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{\lambda}} \left(|f'(a)|^{\mu} \beta_{\frac{x-a}{b-a}}(q+1,p+1) + |f'(b)|^{\mu} \beta_{\frac{x-a}{b-a}}(p+1,q+1) \right. \\
& \left. \left. - c\frac{(x-a)^4}{(b-a)^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{x-a}{3(b-a)} \right) \right)^{\frac{1}{\mu}} \right).
\end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 3.11 *Dans le Théorème 3.2, si on prend* $x = \frac{a+b}{2}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
& \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \leq \frac{b-a}{2^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} (\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}} \\
& \times \left(\left(|f'(a)|^{\mu} \beta_{\frac{1}{2}}(p+1,q+1) + |f'(b)|^{\mu} \beta_{\frac{1}{2}}(q+1,p+1) - c\frac{(b-a)^2}{48} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right. \\
& \left. + \left(|f'(a)|^{\mu} \beta_{\frac{1}{2}}(q+1,p+1) + |f'(b)|^{\mu} \beta_{\frac{1}{2}}(p+1,q+1) - c\frac{(b-a)^2}{48} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.12 *Sous les hypothèses du Théorème 3.2 et si* $|f'|$ *est fortement étendu* *s-convexe où $s \in (-1, 1]$, on a*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}} \left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \left(\frac{1}{s+1}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+1} |f'(a)|^{\mu} + \frac{1}{s+1}\left(1 - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{1+s}\right) |f'(b)|^{\mu} \right.\right. \\
&\left. - c\frac{(b-x)^4}{(b-a)^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{b-x}{3(b-a)}\right)\right)^{\frac{1}{\mu}} \\
&+ \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \left(\frac{1}{s+1}\left(1 - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{1+s}\right) |f'(a)|^{\mu} + \frac{1}{s+1}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+1} |f'(b)|^{\mu} \right. \\
&\left.\left. - c\frac{(x-a)^4}{(b-a)^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{x-a}{3(b-a)}\right)\right)^{\frac{1}{\mu}} \right).
\end{aligned}$$

De plus si on choisit $x = \frac{a+b}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \frac{b-a}{(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}} 2^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}} \\
&\times \left(\left(\frac{1}{s+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{s+1} |f'(a)|^{\mu} + \frac{1}{s+1}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1+s}\right) |f'(b)|^{\mu} - c\frac{(b-a)^2}{48} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right. \\
&\left. + \left(\frac{1}{s+1}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1+s}\right) |f'(a)|^{\mu} + \frac{1}{s+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{s+1} |f'(b)|^{\mu} - c\frac{(b-a)^2}{48} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.13 *Sous les hypothèses du Théorème 3.2 et si $|f'|$ est fortement tgs-convexe, on a*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}} \left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{2+\frac{1}{\mu}} \left(\frac{1}{2} - \frac{b-x}{3(b-a)}\right)^{\frac{1}{\mu}} \left(|f'(a)|^{\mu} + |f'(b)|^{\mu} - c(b-x)^2\right)^{\frac{1}{\mu}} \right. \\
&\left. + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{2+\frac{1}{\mu}} \left(\frac{1}{2} - \frac{x-a}{3(b-a)}\right)^{\frac{1}{\mu}} \left(|f'(a)|^{\mu} + |f'(b)|^{\mu} - c(x-a)^2\right)^{\frac{1}{\mu}} \right).
\end{aligned}$$

De plus si on choisit $x=\frac{a+b}{2}$*, on obtient*

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)\,dt\right|\leq\frac{b-a}{2^{1+\frac{1}{\mu}}(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}}\left(\frac{|f'(a)|^{\mu}+|f'(b)|^{\mu}}{3}-\frac{c(b-a)^2}{12}\right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Corollaire 3.14 *Sous les hypothèses du Théorème 3.2 et si* $|f'|$ *est fortement convexe, on a*

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(u)\,du\right|\\
\leq\ &\frac{b-a}{(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}}\left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{\lambda}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2|f'(a)|^{\mu}+\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2\right)|f'(b)|^{\mu}\right.\right.\\
&\left.-c\frac{(b-x)^4}{(b-a)^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{b-x}{3(b-a)}\right)\right)^{\frac{1}{\mu}}\\
&+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{\lambda}}\left(\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2\right)|f'(a)|^{\mu}+\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2|f'(b)|^{\mu}\right.\\
&\left.\left.-c\frac{(x-a)^4}{(b-a)^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{x-a}{3(b-a)}\right)\right)^{\frac{1}{\mu}}\right).
\end{aligned}$$

De plus si on choisit $x=\frac{a+b}{2}$*, on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(u)\,du\right|\\
\leq\ &\frac{b-a}{2^{1+\frac{1}{\lambda}}(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}}\left(\left(\frac{1}{8}|f'(a)|^{\mu}+\frac{3}{8}|f'(b)|^{\mu}-c\frac{(b-a)^2}{48}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right.\\
&\left.+\left(\frac{3}{8}|f'(a)|^{\mu}+\frac{1}{8}|f'(b)|^{\mu}-c\frac{(b-a)^2}{48}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.15 *Sous les hypothèses du Théorème 3.2 et si* $|f'|$ *est une fonction forte-*

ment P-convexe, on a

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\, du \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}} \left(\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^2 \left(|f'(a)|^\mu + |f'(b)|^\mu - c\tfrac{(b-x)^3}{b-a} \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{b-x}{3(b-a)} \right) \right)^{\frac{1}{\mu}} \right. \\
&\left. + \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^2 \left(|f'(a)|^\mu + |f'(b)|^\mu - c\tfrac{(x-a)^3}{b-a} \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{x-a}{3(b-a)} \right) \right)^{\frac{1}{\mu}} \right).
\end{aligned}$$

De plus si on choisit $x = \frac{a+b}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\, du \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}} \left(|f'(a)|^\mu + |f'(b)|^\mu - c\tfrac{(b-a)^3}{24} \right)^{\frac{1}{\mu}}.
\end{aligned}$$

Corollaire 3.16 *Sous les hypothèses du Théorème 3.2 et si $|f'|$ est bêta-convexe, on a*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\, du \right| \leq \tfrac{b-a}{(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}} \\
&\times \left(\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{\lambda}} \left(|f'(a)|^\mu \beta_{\frac{b-x}{b-a}}(p+1,q+1) + |f'(b)|^\mu \beta_{\frac{b-x}{b-a}}(q+1,p+1) \right)^{\frac{1}{\mu}} \right. \\
&\left. + \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{\lambda}} \left(|f'(a)|^\mu \beta_{\frac{x-a}{b-a}}(q+1,p+1) + |f'(b)|^\mu \beta_{\frac{x-a}{b-a}}(p+1,q+1) \right)^{\frac{1}{\mu}} \right).
\end{aligned}$$

De plus si on choisit $x = \frac{a+b}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\, du \right| \leq \tfrac{b-a}{2^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}} \\
&\times \left(\left(|f'(a)|^\mu \beta_{\frac{1}{2}}(p+1,q+1) + |f'(b)|^\mu \beta_{\frac{1}{2}}(q+1,p+1) \right)^{\frac{1}{\mu}} \right. \\
&\left. + \left(|f'(a)|^\mu \beta_{\frac{1}{2}}(q+1,p+1) + |f'(b)|^\mu \beta_{\frac{1}{2}}(p+1,q+1) \right)^{\frac{1}{\mu}} \right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.17 *Sous les hypothèses du Théorème 3.2 et si $|f'|$ est étendu s-convexe où $s \in (-1,1]$, on a*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\,du \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{(s+1)^{\frac{1}{\mu}} (\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}} \left(\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{\lambda}} \left(\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{s+1} |f'(a)|^{\mu} + \left(1 - \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{1+s}\right) |f'(b)|^{\mu} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right. \\
& \left. + \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{\lambda}} \left(\left(1 - \left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{1+s}\right) |f'(a)|^{\mu} + \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{s+1} |f'(b)|^{\mu} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right).
\end{aligned}$$

De plus si on choisit $x = \frac{a+b}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \tfrac{b-a}{(s+1)^{\frac{1}{\mu}} (\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}} 2^{1+\frac{1}{\lambda}}} \\
&\times \left(\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{s+1} |f'(a)|^{\mu} + \left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1+s}\right) |f'(b)|^{\mu} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right. \\
&\left. + \left(\left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1+s}\right) |f'(a)|^{\mu} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{s+1} |f'(b)|^{\mu} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right).
\end{aligned}$$

Remarque 3.3 *Le Corollaire 3.17 sera réduit au Théorème 2.2 de* [34] *si on suppose que $s \in (0,1]$.*

Corollaire 3.18 *Sous les hypothèses du Théorème 3.2 et si $|f'|$ est tgs-convexe, on a*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\,du \right| \leq \tfrac{b-a}{(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}} \left(|f'(a)|^{\mu} + |f'(b)|^{\mu} \right)^{\frac{1}{\mu}} \\
&\times \left(\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{2+\frac{1}{\mu}} \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{b-x}{3(b-a)} \right)^{\frac{1}{\mu}} + \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{2+\frac{1}{\mu}} \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{x-a}{3(b-a)} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right).
\end{aligned}$$

De plus si on choisit $x = \frac{a+b}{2}$, on obtient

$$\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \tfrac{b-a}{2(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}} \left(\tfrac{|f'(a)|^{\mu} + |f'(b)|^{\mu}}{6} \right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Corollaire 3.19 *Sous les hypothèses du Théorème 3.2 et si $|f'|$ est convexe, on a*

$$\begin{aligned}&\left|f(x)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\ \leq\ &\tfrac{b-a}{2^{\frac{1}{\mu}}(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}}\left(\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{\lambda}}\left(\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^2|f'(a)|^\mu+\left(1-\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^2\right)|f'(b)|^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}}\right.\\ &\left.+\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{\lambda}}\left(\left(1-\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^2\right)|f'(a)|^\mu+\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^2|f'(b)|^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}}\right).\end{aligned}$$

De plus si on choisit $x=\frac{a+b}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned}&\left|f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\ \leq\ &\tfrac{b-a}{4(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^\mu+3|f'(b)|^\mu}{4}\right)^{\frac{1}{\mu}}+\left(\tfrac{3|f'(a)|^\mu+|f'(b)|^\mu}{4}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right).\end{aligned}$$

Corollaire 3.20 *Sous les hypothèses du Théorème 3.2 et si $|f'|$ est une fonction P-convexe, on a*

$$\begin{aligned}&\left|f(x)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\ \leq\ &\tfrac{b-a}{(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}}\left(\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^2+\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^2\right)\left(|f'(a)|^\mu+|f'(b)|^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}}.\end{aligned}$$

De plus si on choisit $x=\frac{a+b}{2}$, on obtient

$$\left|f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\leq\tfrac{b-a}{2(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}}\left(|f'(a)|^\mu+|f'(b)|^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Théorème 3.3 *Soit $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° où $a,b\in I$ avec $a<b$, et $f'\in L^1([a,b])$, et soit $\mu\geq 1$. Si $|f'|^q$ fortement bêta-convexe de module $c>0$,* *alors l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\,du \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2^{1-\frac{1}{\mu}}} \Bigg(\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)} \Big(B_{\frac{b-x}{b-a}}(p+2,q+1)\,|f'(a)|^{\mu} \\
&+ B_{\frac{b-x}{b-a}}(q+2,p+1)\,|f'(b)|^{\mu} - c\,(b-x)^2 \left(\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^3 - \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^4 \right) \Big)^{\frac{1}{\mu}} \\
&+ \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)} \Big(B_{\frac{x-a}{b-a}}(q+2,p+1)\,|f'(a)|^{\mu} \\
&+ B_{\frac{x-a}{b-a}}(p+2,q+1)\,|f'(b)|^{\mu} - c\,(x-a)^2 \left(\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^3 - \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^4 \right) \Big)^{\frac{1}{\mu}} \Bigg)
\end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $x \in [a,b]$, où $\beta_x(.,.)$ est la fonction bêta incomplète et $p, q > -1$.

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux deux membres de l'identité du Lemme 1.1 et l'inégalité de moyenne d'ordre q, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\,du \right| \\
\leq\ & (b-a) \left(\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t\,dt \right)^{1-\frac{1}{\mu}} \left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t\,|f'(ta+(1-t)b)|^{\mu}\,dt \right)^{\frac{1}{\mu}} \right. \\
&\left. + \left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} (1-t)\,dt \right)^{1-\frac{1}{\mu}} \left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} (1-t)\,|f'(ta+(1-t)b)|^{\mu}\,dt \right)^{\frac{1}{\mu}} \right) \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2^{1-\frac{1}{\mu}}} \left(\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)} \left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t\,|f'(ta+(1-t)b)|^{\mu}\,dt \right)^{\frac{1}{\mu}} \right. \\
&\left. + \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)} \left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} (1-t)\,|f'(ta+(1-t)b)|^{\mu}\,dt \right)^{\frac{1}{\mu}} \right).
\end{aligned}$$

Puisque $|f'|^{\mu}$ est fortement *bêta*-convexe, on en déduit

$$
\begin{aligned}
&\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\, du \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2^{1-\frac{1}{\mu}}} \left(\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)} \left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t \left(t^p (1-t)^q |f'(a)|^{\mu} \right.\right.\right. \\
&+ \left.\left. t^q (1-t)^p |f'(b)|^{\mu} - ct(1-t)(b-x)^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{\mu}} \\
&+ \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)} \left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} (1-t) \left(t^p (1-t)^q |f'(a)|^{\mu} \right.\right. \\
&+ \left.\left.\left. t^q (1-t)^p |f'(b)|^{\mu} - ct(1-t)(x-a)^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{\mu}} \right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{2^{1-\frac{1}{\mu}}} \left(\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)} \left(|f'(a)|^{\mu} \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{p+1} (1-t)^q\, dt \right.\right. \\
&+ \left. |f'(b)|^{\mu} \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{q+1} (1-t)^p\, dt - c(b-x)^2 \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^2 (1-t)\, dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)} \left(|f'(a)|^{\mu} \int_0^{\frac{x-a}{b-a}} t^{q+1} (1-t)^p\, dt \right. \\
&+ \left.\left. |f'(b)|^{\mu} \int_0^{\frac{x-a}{b-a}} t^{p+1} (1-t)^q\, dt - c(x-a)^2 \int_0^{\frac{x-a}{b-a}} t^2 (1-t)\, dt \right)^{\frac{1}{\mu}} \right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{2^{1-\frac{1}{\mu}}} \left(\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)} \left(B_{\frac{b-x}{b-a}}(p+2,q+1) |f'(a)|^{\mu} + B_{\frac{b-x}{b-a}}(q+2,p+1) |f'(b)|^{\mu} \right.\right. \\
&- \left. c(b-x)^2 \left(\tfrac{1}{3} \left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^3 - \tfrac{1}{4} \left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^4 \right) \right)^{\frac{1}{\mu}} \\
&+ \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)} \left(B_{\frac{x-a}{b-a}}(q+2,p+1) |f'(a)|^{\mu} + B_{\frac{x-a}{b-a}}(p+2,q+1) |f'(b)|^{\mu} \right. \\
&- \left.\left. c(x-a)^2 \left(\tfrac{1}{3} \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^3 - \tfrac{1}{4} \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^4 \right) \right)^{\frac{1}{\mu}} \right)
\end{aligned}
$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 3.21 *Dans le Théorème 3.3, si on prend* $x = \frac{a+b}{2}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2^{3-\frac{3}{\mu}}} \left(\left(B_{\frac{1}{2}}(p+2,q+1)\left|f'(a)\right|^{\mu} + B_{\frac{1}{2}}(q+2,p+1)\left|f'(b)\right|^{\mu} - \tfrac{5c(b-a)^2}{768} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right. \\
&\left. + \left(B_{\frac{1}{2}}(q+2,p+1)\left|f'(a)\right|^{\mu} + B_{\frac{1}{2}}(p+2,q+1)\left|f'(b)\right|^{\mu} - \tfrac{5c(b-a)^2}{768} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.22 *Sous les hypothèses du Théorème 3.3 et si* $|f'|$ *est fortement étendu s-convexe où* $s \in (-1,1]$, *on a*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2^{1-\frac{1}{\mu}}} \left(\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)} \left(\tfrac{1}{s+2}\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{s+2} \left|f'(a)\right|^{\mu} \right. \right. \\
&+ \left(\tfrac{1}{(s+1)(s+2)} - \tfrac{1}{s+1}\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{s+1} + \tfrac{1}{s+2}\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{s+2} \right) \left|f'(b)\right|^{\mu} \\
&\left. - c(b-x)^2 \left(\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^3 - \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^4 \right) \right)^{\frac{1}{\mu}} \\
&+ \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)} \left(\left(\tfrac{1}{(s+1)(s+2)} - \tfrac{1}{s+1}\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{s+1} + \tfrac{1}{s+2}\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{s+2} \right) \left|f'(a)\right|^{\mu} \right. \\
&\left. \left. + \tfrac{1}{s+2}\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{s+2} \left|f'(b)\right|^{\mu} - c(x-a)^2 \left(\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^3 - \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^4 \right) \right)^{\frac{1}{\mu}} \right)
\end{aligned}$$

De plus si on choisit $x = \frac{a+b}{2}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2^{3\left(1-\frac{1}{\mu}\right)}} \left(\left(\tfrac{1}{(s+2)2^{s+2}}\left|f'(a)\right|^{\mu} + \tfrac{2^{s+2}-(s+3)}{(s+1)(s+2)2^{s+2}}\left|f'(b)\right|^{\mu} - \tfrac{5c}{768}(b-a)^2 \right)^{\frac{1}{\mu}} \right. \\
&\left. + \left(\tfrac{2^{s+2}-(s+3)}{(s+1)(s+2)2^{s+2}}\left|f'(a)\right|^{\mu} + \tfrac{1}{(s+2)2^{s+2}}\left|f'(b)\right|^{\mu} - \tfrac{5c}{768}(b-a)^2 \right)^{\frac{1}{\mu}} \right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.23 *Sous les hypothèses du Théorème 3.3 et si $|f'|$ est fortement tgs-convexe, on a*

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\;& \frac{b-a}{2^{1-\frac{1}{\mu}}}\left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\left(2-\frac{2}{\mu}\right)}\left(|f'(a)|^{\mu}+|f'(b)|^{\mu}-c(b-x)^2\right)^{\frac{1}{\mu}}\right. \\
&\times\left(\frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^4\right)^{\frac{1}{\mu}}+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\left(2-\frac{2}{\mu}\right)} \\
&\left.\times\left(|f'(a)|^{\mu}+|f'(b)|^{\mu}-c(x-a)^2\right)^{\frac{1}{\mu}}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^4\right)^{\frac{1}{\mu}}\right).
\end{aligned}$$

De plus si on choisit $x=\frac{a+b}{2}$, on obtient

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\leq\frac{b-a}{4}\left(\frac{5}{24}\right)^{\frac{1}{\mu}}\left(|f'(a)|^{\mu}+|f'(b)|^{\mu}-\frac{c(b-a)^2}{4}\right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Corollaire 3.24 *Sous les hypothèses du Théorème 3.3 et si $|f'|$ est fortement convexe, on a*

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\;& \frac{b-a}{2^{1-\frac{1}{\mu}}}\left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2\left(\frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)|f'(a)|^{\mu}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)\right)|f'(b)|^{\mu}\right.\right. \\
&\left.-\,c(b-x)^2\left(\frac{b-x}{b-a}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)\right)\right)^{\frac{1}{\mu}} \\
&+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right)|f'(a)|^{\mu}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)|f'(b)|^{\mu}\right. \\
&\left.\left.-\,c(x-a)^2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right)\right)^{\frac{1}{\mu}}\right).
\end{aligned}$$

De plus si on choisit $x = \frac{a+b}{2}$, on obtient

$$\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(u)\, du \right| \leq \tfrac{b-a}{8}$$
$$\times \left(\left(\tfrac{|f'(a)|^\mu + 2|f'(b)|^\mu}{3} - \tfrac{c5(b-a)^2}{96} \right)^{\frac{1}{\mu}} + \left(\tfrac{2|f'(a)|^\mu + |f'(b)|^\mu}{3} - \tfrac{c5(b-a)^2}{96} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right).$$

Corollaire 3.25 *Sous les hypothèses du Théorème 3.3 et si $|f'|$ est une fonction fortement P-convexe, on a*

$$\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(u)\, du \right|$$
$$\leq \tfrac{b-a}{2^{1-\frac{1}{\mu}}} \left(\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^2 \left(\tfrac{|f'(a)|^\mu + |f'(b)|^\mu}{2} - \tfrac{c(b-x)^3}{b-a} \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)\right)\right)^{\frac{1}{\mu}} \right.$$
$$\left. + \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^2 \left(\tfrac{|f'(a)|^\mu + |f'(b)|^\mu}{2} - \tfrac{c(x-a)^3}{b-a} \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)\right)\right)^{\frac{1}{\mu}} \right).$$

De plus si on choisit $x = \frac{a+b}{2}$, on obtient

$$\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(u)\, du \right| \leq \tfrac{b-a}{4} \left(|f'(a)|^\mu + |f'(b)|^\mu - \tfrac{c5(b-a)^2}{96} \right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Corollaire 3.26 *Sous les hypothèses du Théorème 3.3 et si $|f'|$ est bêta-convexe, on a*

$$\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(u)\, du \right| \leq \tfrac{b-a}{2^{1-\frac{1}{\mu}}}$$
$$\times \left(\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)} \left(B_{\frac{b-x}{b-a}}(p+2, q+1) |f'(a)|^\mu + B_{\frac{b-x}{b-a}}(q+2, p+1) |f'(b)|^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}} \right.$$
$$\left. + \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)} \left(B_{\frac{x-a}{b-a}}(q+2, p+1) |f'(a)|^\mu + B_{\frac{x-a}{b-a}}(p+2, q+1) |f'(b)|^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}} \right).$$

De plus si on choisit $x = \frac{a+b}{2}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\, du \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2^{3-\frac{3}{\mu}}} \left(\left(B_{\frac{1}{2}}(p+2, q+1) \left| f'(a) \right|^{\mu} + B_{\frac{1}{2}}(q+2, p+1) \left| f'(b) \right|^{\mu} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right. \\
& \left. + \left(B_{\frac{1}{2}}(q+2, p+1) \left| f'(a) \right|^{\mu} + B_{\frac{1}{2}}(p+2, q+1) \left| f'(b) \right|^{\mu} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.27 *Sous les hypothèses du Théorème 3.3 et si* $|f'|$ *est étendu* s*-convexe où* $s \in (-1, 1]$, *on a*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\, du \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2^{1-\frac{1}{\mu}}} \left(\left(\tfrac{b-x}{b-a} \right)^{2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)} \left(\tfrac{1}{s+2} \left(\tfrac{b-x}{b-a} \right)^{s+2} \left| f'(a) \right|^{\mu} \right. \right. \\
& \left. + \left(\tfrac{1}{(s+1)(s+2)} - \tfrac{1}{s+1} \left(\tfrac{x-a}{b-a} \right)^{s+1} + \tfrac{1}{s+2} \left(\tfrac{x-a}{b-a} \right)^{s+2} \right) \left| f'(b) \right|^{\mu} \right)^{\frac{1}{\mu}} \\
& + \left(\tfrac{x-a}{b-a} \right)^{2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)} \left(\left(\tfrac{1}{(s+1)(s+2)} - \tfrac{1}{s+1} \left(\tfrac{b-x}{b-a} \right)^{s+1} + \tfrac{1}{s+2} \left(\tfrac{b-x}{b-a} \right)^{s+2} \right) \left| f'(a) \right|^{\mu} \right. \\
& \left. \left. + \tfrac{1}{s+2} \left(\tfrac{x-a}{b-a} \right)^{s+2} \left| f'(b) \right|^{\mu} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right)
\end{aligned}$$

De plus si on choisit $x = \frac{a+b}{2}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\, du \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2^{3+\frac{s}{\mu}-\frac{1}{\mu}}} \left(\left(\tfrac{1}{s+2} \left| f'(a) \right|^{\mu} + \tfrac{2^{s+2}-(s+3)}{(s+1)(s+2)} \left| f'(b) \right|^{\mu} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right. \\
& \left. + \left(\tfrac{2^{s+2}-(s+3)}{(s+1)(s+2)} \left| f'(a) \right|^{\mu} + \tfrac{1}{s+2} \left| f'(b) \right|^{\mu} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.28 *Sous les hypothèses du Théorème 3.3 et si $|f'|$ est tgs-convexe, on a*

$$\begin{aligned}&\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \leq \frac{b-a}{2^{1-\frac{1}{\mu}}}\left(|f'(a)|^{\mu}+|f'(b)|^{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}}\\&\times\left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{2+\frac{1}{\mu}}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)\right)^{\frac{1}{\mu}}+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{2+\frac{1}{\mu}}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right)^{\frac{1}{\mu}}\right).\end{aligned}$$

De plus si on choisit $x=\frac{a+b}{2}$, on obtient

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{5}{24}\right)^{\frac{1}{\mu}}\left(|f'(a)|^{\mu}+|f'(b)|^{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Corollaire 3.29 *Sous les hypothèses du Théorème 3.3 et si $|f'|$ est convexe, on a*

$$\begin{aligned}&\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\ \leq\ & \frac{b-a}{2^{1-\frac{1}{\mu}}}\left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2\left(\frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)|f'(a)|^{\mu}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)\right)|f'(b)|^{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right.\\&\left.+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right)|f'(a)|^{\mu}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)|f'(b)|^{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right).\end{aligned}$$

De plus si on choisit $x=\frac{a+b}{2}$, on obtient

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \leq \frac{b-a}{8}\left(\left(\frac{|f'(a)|^{\mu}+2|f'(b)|^{\mu}}{3}\right)^{\frac{1}{\mu}}+\left(\frac{2|f'(a)|^{\mu}+|f'(b)|^{\mu}}{3}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right).$$

Remarque 3.4 *La deuxième inégalité du Corollaire 3.29 est l'estimation correcte du Corollaire 2.6 de* [34].

Corollaire 3.30 *Sous les hypothèses du Théorème 3.3 et si $|f'|$ est une fonction P-convexe, on a*

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \leq \frac{b-a}{2^{1-\frac{1}{\mu}}}\left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2\right)\left(\frac{|f'(a)|^{\mu}+|f'(b)|^{\mu}}{2}\right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Conclusion

La problématique de ce mémoire était d'étudier d'une part, certaine inégalités de type Ostrowski et de se familiarisé avec certaines outils nécessaires utiliser dans les démonstrations de ce genre de problèmes, et d'autre part essayer d'établir des nouvelles estimations concernant ce type d'inégalités.

Dans la première partie, nous nous sommes intéressés à rappeler quelques type de convexité classique et généralisé ainsi que quelques identités.

Dans la seconde partie nous avons étudié quelques inégalités de type Ostrowski classique et fractionnaire via certains genres de convexités.

Et dans la troisième partie nous avons discuté des nouveaux résultats concernant ce type d'inégalité qui en fait l'objet d'une publication internationale qui représente le fruit de notre travail.

Bibliographie

[1] H. Angulo, J. Gimenez, A. M. Moros and K. Nikodem, On strongly h-convex functions. Ann. Funct. Anal. 2 (2011), no. 2, 85–91.

[2] W. W. Breckner, Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen. (German) Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 23 (1978), no. 37, 13–20.

[3] P. J. Davis, Leonhard Euler's integral : A historical profile of the gamma function. Amer. Math. Monthly 66 1959 849–869.

[4] A. R. DiDonato, M.P. Jarnagin : The efficient calculation of the incomplete beta-function ratio for half-integer values of the parameters a, b. Math. Comp. 21 (1967), no. 100, 652–662.

[5] S. S. Dragomir and S. Fitzpatrick, Hadamard's inequality for s-convex functions in the first sense and applications. Demonstratio Math. 31 (1998), no. 3, 633–642.

[6] S. S. Dragomir, J. E. Pečarić, and L. E. Persson, Some inequalities of Hadamard type. Soochow J. Math. 21 (1995), no. 3, 335–341.

[7] S. S. Dragomir, nequalities of Hermite-Hadamard type for h-convex functions on linear spaces. Proyecciones 34 (2015), no. 4, 323–341.

[8] A. Guezane-Lakoud and F. Aissaoui, New fractional inequalities of Ostrowski type. Transylv. J. Math. Mech. 5 (2013), no. 2, 103–106.

[9] M. A. Hanson, On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions, J. Math. Anal. Appl. 80 (1981) 545-550.

[10] J. Hua, B.-Y. Xi and F. Qi, Some new inequalities of Simpson type for strongly s-convex functions. Afr. Mat. 26 (2015), no. 5-6, 741–752.

[11] İ. İşcan, Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are preinvex. Bull. Iranian Math. Soc. 40 (2014), no. 2, 373–386.

[12] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[13] U. S. Kirmaci, Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula. Appl. Math. Comput. 147 (2004), no. 1, 137–146.

[14] O. L. Mangasarian, Nonlinear programming. McGraw-Hill Book Co., New York-London-Sydney 1969.

[15] B. Meftah, Fractional Ostrowski type inequalities for functions whose first derivatives are s-preinvex in the second sense. International Journal of Analysis and Applications 15 (2017), no. 2, 146–154.

[16] B. Meftah, Some new Ostrwoski's inequalities for functions whose n^{th} derivatives are r-convex. Int. J. Anal. 2016, Art. ID 6749213, 7 pp.

[17] B. Meftah, Ostrowski inequalities for functions whose first derivatives are logarithmically preinvex. Chin. J. Math. (N.Y.) 2016, Art. ID 5292603, 10 pp

[18] B. Meftah and K. Boukerrioua, Some new Ostrowski type inequalities on time scales for function of two independent variables. Journal of Interdisciplinary Mathematics. 20(2017), no. 2, 397-415.

[19] B. Meftah, New Ostrowski's inequalities. Rev. Colombiana Mat. 51(2017), no. 1, 57–69.

[20] B. Meftah, Ostrowski inequality for functions whose first derivatives are s-preinvex in the second sense. Khayyam J. Math. 3 (2017), no. 1, 61–80.

[21] B. Meftah, Fractional Ostrowski type inequalities for functions whose first derivatives are φ-preinvex. J. Adv. Math. Stud. 10 (2017), no. 3, 335-347.

[22] B. Meftah, Some new Ostrowski's inequalities for n-times differentiable mappings which are quasi-convex. Facta Univ. Ser. Math. Inform. 32 (2017), no. 3, 319–327.

[23] B. Meftah, Some new Ostrowski's inequalities for functions whose n^{th} derivatives are logarithmically convex. Ann. Math. Sil. 32 (2018), no. 1, 275–284.

[24] B. Meftah, Some Ostrowski 's inequalities for functions whose n^{th} derivatives are s-convex. An Univ Oradea Fasc. Mat. 25 (2018), no. 2, 185–212.

[25] **B. Meftah and A. Azaizia, Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are strongly beta-convex, Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, (accepted).**

[26] D. S. Mitrinović, Analytic inequalities. In cooperation with P. M. Vasić. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 165 Springer-Verlag, New York-Berlin 1970.

[27] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Classical and new inequalities in analysis. Mathematics and its Applications, 61. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[28] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Inequalities for functions and their integrals and derivatives, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.

[29] S. R. Mohan and S. K. Neogy, On invex sets and preinvex functions. J. Math. Anal. Appl. 189 (1995), no. 3, 901–908.

[30] A. M. Ostrowski, Über die Absolutabweichung einer differentiebaren Funktion van ihrem Integralmittelwert, Comment. Math. Helv., 10 (1938), 226–227.

[31] J. E. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Mathematics in Science and Engineering, 187. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[32] B. T. Polyak, Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restictions, Soviet Math. Dokl. 7 (1966), 72-75.

[33] E. D. Rainville, Special functions. Reprint of 1960 first edition. Chelsea Publishing Co., Bronx, N.Y., 1971.

[34] E. Set, M. E. Özdemir, M. Z. Sarikaya, New inequalities of Ostrowski's type for s-convex functions in the second sense with applications. Facta Univ. Ser. Math. Inform. 27 (2012), no. 1, 67–82.

[35] Y. Sun and H. Yin, Some Integral Inequalities of Simpson Type for Strongly Extended s-Convex Functions. Advances in Pure Mathematics, 6 (2016), no.11, 745-753.

[36] M. Tunç, E. Göv, and Ü. Şanal, On tgs-convex function and their inequalities. Facta Univ. Ser. Math. Inform. 30 (2015), no. 5, 679–691.

[37] M. Tunç, U. Sanal and E. Gov, Some Hermite-Hadamard inequalities for $beta$-convex and its fractional applications. New Trends in Mathematical Sciences, 3 (2015), no 4, p. 18.

[38] Y. Wang, S.-H. Wang and F. Qi, Simpson type integral inequalities in which the power of the absolute value of the first derivative of the integrand is s-preinvex. Facta Univ. Ser. Math. Inform. 28 (2013), no. 2, 151–159.

[39] T. Weir and B. Mond, Pre-invex functions in multiple objective optimization. J. Math. Anal. Appl. 136 (1988), no. 1, 29–38.

[40] B.-Y. Xi and F. Qi, Inequalities of Hermite-Hadamard type for extended s-convex functions and applications to means. J. Nonlinear Convex Anal. 16 (2015), no. 5, 873–890.

[41] Ç. Yildiz, M. E. Özdemir and M. Z. Sarikaya, New generalizations of Ostrowski-like type inequalities for fractional integrals. Kyungpook Math. J. 56 (2016), no. 1, 161–172.

Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan
<transactions@imm.az>
À : Meftah Badri
8 mai à 13:18

Dear Prof. **Badreddine Meftah!**

We are pleased to inform you that your article has been accepted for publication in our "Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan,
Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, Issue Mathematics".
Please prepare your article in the style of our journal.
We attached our style file.

With best regards,
Editorial Office