

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université 8 mai 1945 Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Magister
Spécialité : Génie mécanique Option : mécanique de matériaux

Par

GAAGAIA Djamel Edinne

**Homogénéisation Des Equations de Reynolds Laminaire et
Turbulente : Application à l'Etude Des Paliers
Hydrodynamiques Rugueux**

Soutenu le

JURY

Président : **Dr. GUENFOUD SALAH** Pr Université 08 mai 1945 Guelma
Encadreur : **Dr. LAHMAR MUSTAPHA** Pr. Université 08 mai 1945 Guelma
Examineurs : **Dr. ELLAGOUNE SALAH** M. de Conférences-A Université Guelma
Dr. BELBAH AHMED M. de conférences-A Université de Guelma

2011

SOMMAIRE

Avant-propos	i
INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I Caractérisation géométrique des surfaces industrielles	4
CHAPITRE II Théorie de la lubrification hydrodynamique en régime laminaire	21
CHAPITRE III : Théorie des paliers hydrodynamiques en régime turbulent	45
CHAPITRE IV Homogénéisation des équations de Reynolds laminaire et turbulente	63
CHAPITRE V Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées d'un palier hydrodynamique rugueux en régimes laminaire et turbulent	79
CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES	94
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	96

AVANT PROPOS

Ce travail de recherche a été effectué au sein du Laboratoire de Mécanique et des Structures (LMS) de l'Université 8 mai 1945 Guelma en vue d'obtenir le diplôme de Magister en génie mécanique, option : Mécanique des matériaux.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance au Pr. Mustapha LAHMAR, qui m'a permis de réaliser ce travail sous sa direction et pour son soutien et ses conseils précieux tout au long du travail.

Je remercie vivement :

- Dr. GUENFOUD Salah, Professeur à l'Université de Guelma qui a bien voulu accepter de présider le jury de soutenance.
- Dr. ELLAGOUNE Salah, Maître de Conférences à l'Université de Guelma pour avoir accepté de participer au jury de soutenance en qualité d'examineur
- Dr. BELBAH Ahmed, Maître de conférences à l'Université de Guelma pour avoir accepté de participer au jury de soutenance en qualité d'examineur.

J'adresse tous mes remerciements aux personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Homogénéisation des équations de Reynolds laminaire et turbulente : Application à l'étude des paliers hydrodynamiques rugueux

Résumé

La théorie de la lubrification hydrodynamique fondée par Osborne Reynolds en 1886 est basée sur plusieurs hypothèses parmi lesquelles les surfaces formant les contacts sont parfaitement lisses et le régime d'écoulement du lubrifiant s'écoulant entre ces surfaces est laminaire. Cependant, il a été montré que dans le cas des paliers de machines tournantes modernes fonctionnant dans des conditions sévères (charge et vitesse élevées), ces hypothèses sont mises en défaut. La prise en compte des effets de la rugosité des surfaces et de la turbulence est alors indispensable pour une meilleure prédiction des performances d'un palier hydrodynamique.

L'approche adoptée dans ce mémoire est basée sur l'application du processus d'homogénéisation à l'équation de Reynolds turbulente dérivée à partir des équations de mouvement moyen d'un fluide newtonien.

Le développement multi-échelle de la pression conduit à une cascade d'équations aux dérivées partielles gouvernant un problème local et un problème global dont les solutions sont les fonctions périodiques et la pression homogénéisée.

Les études de simulation sont effectuées en considérant des rugosités isotropes distribuées de façon périodique sur toute la surface du coussinet pour différentes valeurs du nombre sans dimension de Taylor.

La comparaison des solutions homogénéisées et directes a permis de conclure que la méthode d'homogénéisation est efficace aussi bien en espace mémoire qu'en temps de calcul car elle ne nécessite pas des maillages fins comme dans la méthode directe.

Mots clés : Lubrification hydrodynamique/ Rugosité de surface/ Ecoulement laminaire/Ecoulement turbulent/ Méthode d'homogénéisation/Méthode directe.

Homogenization of laminar and turbulent Reynolds' equations: Application to the analysis of rough hydrodynamic journal bearings

Abstract

The hydrodynamic lubrication theory founded by Osborne Reynolds in 1886 is based upon several assumptions among them the contact surfaces are perfectly smooth, and the flow regime of lubricant flowing between these surfaces is laminar. However, it was shown that for the journal bearings of modern rotating machinery which operate under severe conditions, these hypotheses lose their validity. In these conditions, the consideration of surface roughness and turbulence effects is then of a cardinal importance to accurately predict the performance characteristics of such journal bearings.

The approach adopted in this report is based on the application of the homogenization process to the turbulent Reynolds' equation derived from the mean flow momentum equations.

The multi-scale expansion of the fluid pressure leads to a system of four partial differential equations governing two types (local and global) problems whose the solutions are the periodic functions and the homogenized pressure.

The numerical simulation studies are performed by considering isotropic roughness patterns periodically distributed over the all stationary bush surface, and various values of the Taylor's dimensionless number.

The comparison between the homogenized and direct solutions shows that the homogenization approach is more efficient in both memory storage and CPU time than the direct one since it doesn't require finer meshes like in the direct approach.

Keywords: Hydrodynamic lubrication / Surface roughness / Laminar flow/
Turbulent flow / Homogenization method / Direct method.

ملخص

تستند نظرية التشحيم الهيدروديناميكي التي أسسها العالم الفيزيائي اوزبون رينولدز في عام 1886 على افتراضات عدة من بينها أن سطوح الأجسام المتصلة ملساء وان سيلان زيت التشحيم بين السطوح يتم بطريقة معتدلة وغير مضطربة، إلا انه تبين أن في حالة المحامل المستعملة في الآليات العصرية تشتغل في ظروف قاسية.

حيث في هذه الحالة كل هذه الافتراضات تعتبر غير مقبولة، وبالتالي يجب الأخذ بعين الاعتبار الحالة الحقيقية للسطوح الصناعية وكذا الاضطرابات الناتجة عن السيلان من اجل تنبؤ أحسن للخصائص الهيدروديناميكية للمحامل.

المنهج المعتمد في هذه المذكرة يعتمد على تطبيق طريقة التجانس على معادلة رينولدز المضطربة مستمدة من معادلات الحركة للسوائل النيوتونية.

الكلمات المفتاحية :

التشحيم الهيدروديناميكي/ السطوح الخشنة/ السيلان المعتدل/ السيلان المضطرب/ طريقة التجانس/ الطريقة المباشرة.

Introduction générale

Un système mécanique est constitué d'un ensemble de pièces liées entre elles qui sont en mouvement les unes par rapport aux autres. Ces pièces sont séparées partiellement ou complètement par un film lubrifiant afin d'éviter tout risque d'avarie dû à une usure trop rapide ou un grippage.

Les pièces mécaniques manufacturées sont limitées par des surfaces qui ne sont jamais parfaites. En effet, elles présentent des défauts de nature géométrique et physico-chimique résultant du procédé de fabrication utilisé et du matériau constituant ces pièces.

Les défauts géométriques qui sont des défauts de forme et de rugosité sont dus principalement aux vibrations relatives entre l'outil et la pièce usinées ainsi qu'à la rigidité de la machine outil.

Sur le plan industriel, l'étude de l'influence de ces défauts présents sur la surface des pièces sur le comportement des contacts lubrifiés est indispensable tant pour prévoir les conditions de fonctionnement que pour estimer la durée de vie des mécanismes. Ainsi, la détermination théorique des performances d'un contact lubrifié dépend d'une caractérisation rigoureuse des surfaces formant le contact surtout lorsque les conditions de fonctionnement du contact sont sévères (charge et vitesse élevées).

La théorie de la lubrification HD fondée par Osborne Reynolds en 1886 est basée sur plusieurs hypothèses simplificatrices parmi lesquelles les surfaces sont supposées parfaitement lisses et le régime d'écoulement est laminaire. Dans la littérature technique, plusieurs investigateurs ont montré que de telles hypothèses sont peu réalistes surtout pour l'étude des contacts sévèrement chargés fonctionnant avec de faibles épaisseurs de film et lubrifiés à l'aide de fluides de faible viscosité .

Dans les systèmes mécaniques lubrifiés en régime hydrodynamique ou élasto-hydrodynamique (EHD), l'épaisseur du film lubrifiant h est censée d'une part être plus grande que la hauteur des aspérités et d'autre part elle doit être très faible devant la longueur d'onde

de la rugosité λ (rugosité de Reynolds); c'est-à-dire $h \ll \lambda$. Dans ces conditions, l'équation de Reynolds peut être appliquée pour décrire le comportement hydrodynamique des contacts rugueux. En revanche, lorsque $\lambda \ll h$ (rugosité de Stokes), les approches de la mécanique des fluides numérique CFD (Computational Fluid Dynamics) basée sur la résolution des équations de Navier-Stokes doivent être utilisées.

Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour l'étude des effets des rugosités de surface sur les performances des contacts hydrodynamiques, à savoir : la méthode stochastique, la méthode directe et plus récemment la technique d'homogénéisation.

A travers cette étude, notre contribution sera de mettre en place un modèle numérique qui prend en considération les effets de la rugosité de surface et de la turbulence sur les performances hydrodynamiques d'un palier cylindrique, à savoir : la pression, la capacité de charge, la force de frottement, le débit et l'angle de calage, en utilisant une nouvelle technique de calcul dite technique d'homogénéisation que l'on développera ultérieurement. Pour conserver le caractère stationnaire de l'équation de Reynolds, nous considérons que la surface stationnaire (le coussinet) du contact est rugueuse tandis que la surface mobile (l'arbre) est parfaitement lisse.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous présentons une synthèse de l'étude bibliographique effectuée sur la caractérisation géométrique des surfaces technologiques (industrielles) ainsi que les différentes méthodes d'analyse proposées dans la littérature technique pour l'étude des contacts lubrifiés en régime hydrodynamique dont les surfaces sont rugueuses.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la théorie de la lubrification hydrodynamique en régime laminaire supposant que les surfaces antagonistes sont séparées par un film fluide newtonien très mince. Ces hypothèses permettent d'utiliser les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus pour décrire l'écoulement du fluide lubrifiant dans les contacts.

Dans le troisième chapitre, nous présentons les équations générales de la théorie de la lubrification en régime non laminaire appliquée aux paliers cylindriques.

Le quatrième chapitre est dévolu à l'homogénéisation des équations de Reynolds modifiées écrites en régimes laminaire et turbulent.

Enfin, le cinquième chapitre est réservé au traitement numérique des différentes EDPs décrivant problèmes direct et homogénéisé à la comparaison des solutions obtenues par la méthode d'homogénéisation et la méthode directe en régimes d'écoulement laminaire et non laminaire (turbulent) en vue de valider les programmes de calcul développés.

CHAPITRE I

Caractérisation géométrique des surfaces industrielles

I.1 Introduction

Nous présentons dans la première partie de ce chapitre, une étude bibliographique sur la caractérisation géométrique des surfaces technologiques (engineering surfaces), la modélisation des rugosités et les techniques de mesure des défauts de rugosité. La seconde partie est dévolue à la description des différentes méthodes d'analyse proposées dans la littérature technique pour l'étude des contacts lubrifiés dont les surfaces sont rugueuses. Ces méthodes se classent en trois catégories, à savoir : la méthode stochastique, la méthode directe et la méthode dite d'homogénéisation.

I.2. Description des surfaces

L'étude des surfaces revêt de l'importance dans un grand nombre d'applications industrielles. Par exemple, dans les procédés de fabrication par injection, le fini de surfaces du moule est un facteur important qui gouverne la qualité de la pièce. Dans certaines applications technologiques, les qualités des surfaces doivent être meilleures pour garantir le bon fonctionnement du système (par exemple, le cas des pièces de frottement, d'étanchéité, de précision...). En effet, l'usure d'un joint dynamique ou d'une garniture mécanique est souvent fonction de l'état géométrique de la surface sur laquelle il vient se frotter.

En tribologie, la caractérisation, la métrologie et la simulation numérique des surfaces rugueuses constituent une étude préalable et indispensable avant d'effectuer une approche déterministe ou stochastique des contacts lubrifiés. Les techniques de caractérisation ont pour but de décrire la microtopographie des surfaces afin de mieux comprendre leurs propriétés fondamentales.

1.2.1. Etat géométrique des surfaces

Les pièces mécaniques manufacturées sont limitées par des surfaces qui ne sont jamais conformes à celles géométriquement idéales représentées sur les dessins de définition et de fabrication. En effet, elles présentent des défauts de nature géométrique et physico-chimique résultant du procédé de fabrication utilisé et du matériau constituant ces pièces.

Les caractéristiques de l'état de surface d'une pièce peuvent intervenir de façon prépondérante sur son aptitude à remplir une fonction donnée. Le terme état de surface englobe à la fois :

- l'état géométrique de la surface défini par l'ensemble des écarts géométriques de la pièce réalisée en fabrication par rapport à celle géométriquement idéale;
- l'état physico-chimique défini par les diverses caractéristiques de la couche superficielle : structure et texture cristallines, adsorption, etc.

Selon la normalisation française (NF E 05-515), les défauts ou les irrégularités géométriques de surface se classent conventionnellement sous six numéros d'ordre, à savoir:

Ordre 1: Défauts de forme et de position qui sont imputables à un manque de rectitude, à une ovalisation ou à un manque de cylindricité. Leur amplitude varie de 2.5 à plus de 100 microns et leur période est de plusieurs ordres de grandeur plus grande que leur amplitude.

Ordre 2: Défauts d'ondulation (défauts macroscopiques) possédant généralement un caractère périodique dû essentiellement à des vibrations de basses fréquences de la pièce et/ou de l'outil générateur. La période de ces défauts est de quelques ordres de grandeur plus grande que leur amplitude, soit de 0,1 à 50 microns.

Ordre 3: Stries, sillons qui sont des défauts périodiques ou pseudo-périodiques.

Ordre 4: Défauts localisés (échelle microscopique) : arrachement, marque d'outil, ... ; ce type de défaut a un caractère aperiodique.

Ordre 5: Structure cristalline (échelle mésoscopique).

Ordre 6: Réseau cristallin (échelle nanoscopique).

Les défauts des 3^{ème} et 4^{ème} ordres, qui sont intéressants du point de vue tribologique, sont désignés par le terme général de rugosités. Il convient de préciser que le profil d'une surface mesuré à l'aide d'un profilographe est le résultat de la superposition des défauts de forme, d'ondulation et de rugosité figure I.1.

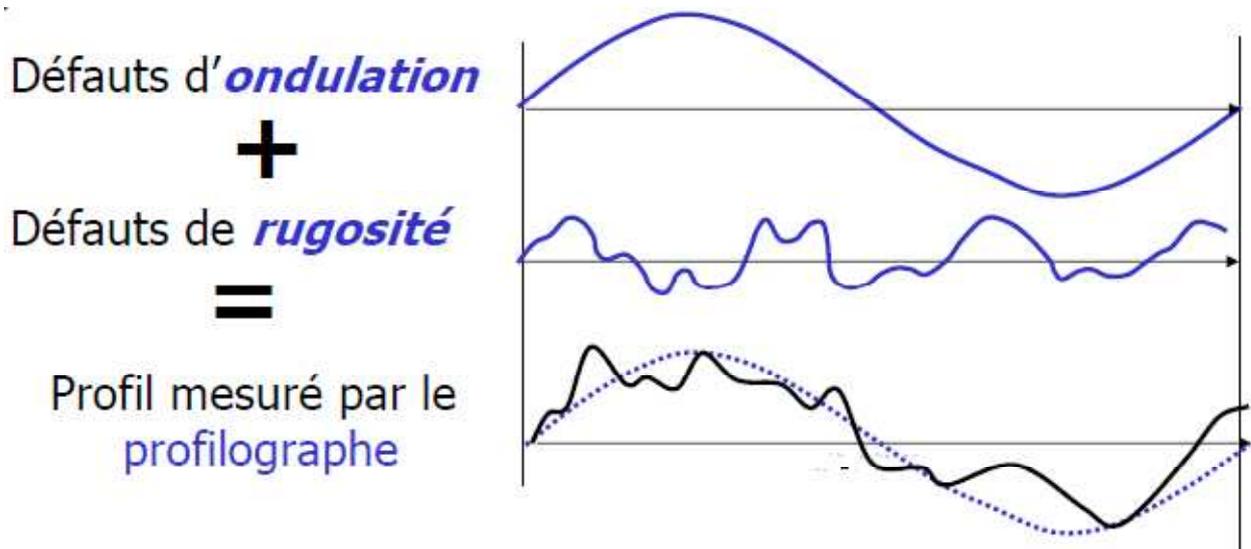


Fig. I.1 Schématisation d'un profil mesuré par le profilographe.

1.2.2. Mesure des défauts

L'étude des états de surface remonte aux années 30, avec le développement des appareils de mesure de profil. Après 1950, les premiers appareils analogiques ont fait leur apparition et permirent de mesurer quelques paramètres. Les années 70 ont vu l'apparition de nouveaux moyens informatiques et électroniques qui permirent de définir un plus grand nombre de paramètres caractérisant l'état de surface.

Aujourd'hui, les moyens métrologiques modernes et les techniques d'imagerie topographique permettent d'extraire des paramètres pertinents des surfaces industrielles.

Le profil d'une surface est le résultat de la superposition des défauts de forme (shape defects), des défauts d'ondulation (waviness defects) et des défauts de rugosité (roughness defects). Les défauts de forme sont facilement mesurés avec les instruments de métrologie classiques comme le micromètre parce que leur période est grande. La période des défauts d'ondulation et de rugosité étant plus petite, un palpeur capable de les détecter doit aussi être petit. L'appareil le plus utilisé pour cette tâche est le *profilographe* figure I.2. Cet appareil comprend un stylet durci (diamant), qui se déplace sur la surface à très basse vitesse (1 mm/s). Le stylet est terminé par une petite pointe ($\approx 0,5 \mu\text{m}$ de rayon) qui agit un peu comme un filtre à haute fréquence : les contours plus petits que le rayon de la pointe du palpeur ne sont pas

enregistrés. Le déplacement du stylet sur le profil est transformé en signal électrique par le capteur, numérisé et ensuite traité par un ordinateur à l'aide de techniques statistiques.

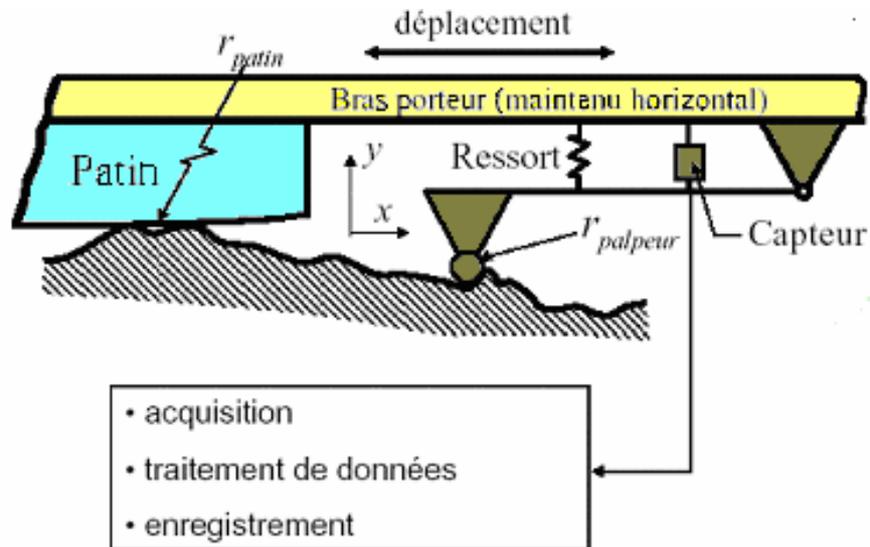


Fig. I.2 Schéma d'un profilographe

1.2.3 Topographie des surfaces

Le profilographe mesure et enregistre les variations de hauteur d'une surface sur une ligne. Les paramètres mesurés à partir de ces enregistrements ne valent ainsi que sur une ligne. Cependant, les surfaces existent en trois dimensions. Pour les caractériser en trois dimensions, il faut utiliser une technique de mesure autre que le profilographe (optique, par exemple) figure I.3 ou effectuer plusieurs passes parallèles avec le profilographe et les juxtaposer figure I.4. Selon le procédé par lequel la surface est usinée, sa topographie en trois dimensions peut s'apparenter soit à des cylindres parallèles, soit à des sphères de différentes hauteurs figure I.4.



Fig. I.3 Station de topographie de surface

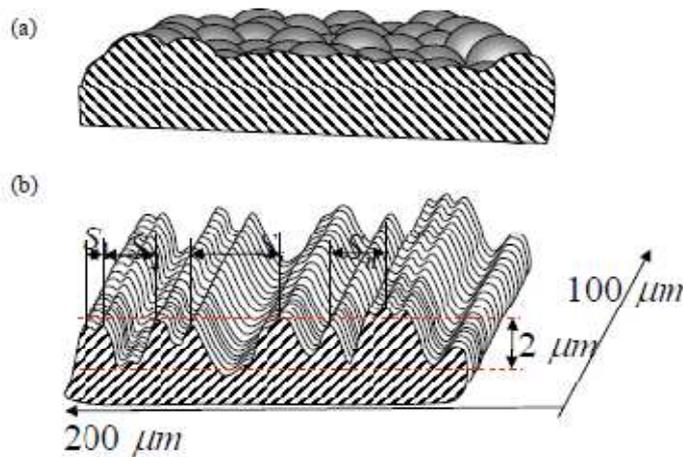


Fig. I.4 Représentation tridimensionnelle de la topographie de surface à partir de mesures réalisées avec un profilographe : a) surface usinée au tour ou à la fraise b) surface grenillée.

Afin de comprendre les phénomènes tels que l'usure, la friction et la lubrification, la quantification de la topographie de la surface est importante. De plus, le design des surfaces esthétiques telles que les surfaces de miroir, nécessite un contrôle de la texture de la surface à une échelle très fine.

Depuis son invention par Abbot *et al.* [1] dans les années 30, la profilométrie décrite précédemment a été employée de façon extensive afin d'estimer la quantité et la fonctionnalité des surfaces industrielles.

Les différentes applications de la profilométrie ont généré de nombreux paramètres permettant de quantifier les propriétés de surface. Le paramètre le plus connu est la rugosité

moyenne ou la hauteur arithmétique moyenne, R_a , qui est fréquemment utilisée, même aujourd'hui. Bien que de concept simple, R_a ne décrit pas très bien les surfaces usinées.

Avec la venue des ordinateurs puissants et les systèmes de mesure plus sophistiqués, la topographie (2-D) traditionnelle a été substituée par les techniques de mesure tridimensionnelle (3-D) dans la mesure où la caractérisation des surfaces en (3-D) permet des interprétations faciles et intuitives. Aujourd'hui, les techniques de mesure (3-D) les plus couramment utilisées sont :

-Microscopie d'interférence :

Il s'agit d'une technique optique utilisant l'interférométrie pour déterminer la distance de l'objectif à la surface de l'échantillon. En variant la hauteur des lentilles optiques au dessus de l'échantillon et en enregistrant les franges d'interférences, une carte en hauteur est construite par l'ordinateur figure I.5.

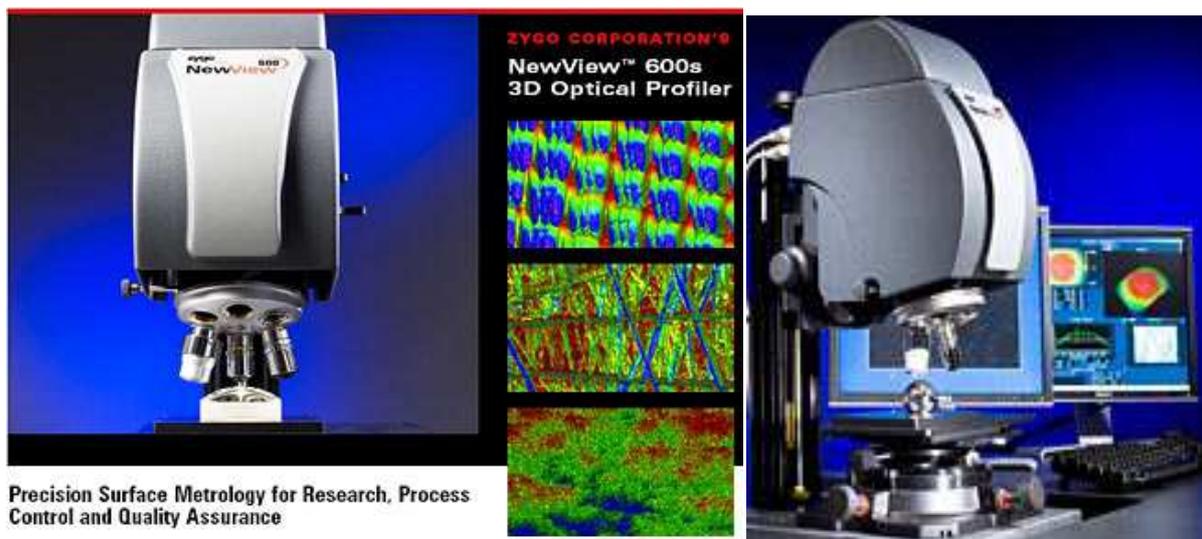


Fig. I.5 Photographie d'un microscope d'interférences.

-Microscopie à force atomique (AFM) :

La MFA (Atomic Force Microscopy, en anglais) mesure la surface à l'aide d'une pointe silicone extrêmement aiguë avec un rayon d'incurvation de quelques dizaines de nanomètres offrant une plage de résolution en nanomètres. Cette **technique** extrêmement précise est utilisée pour des surfaces avec des détails et textures extrêmement fines (moins de 5 microns). La figure I.6 montre un instrument MFA numérique.

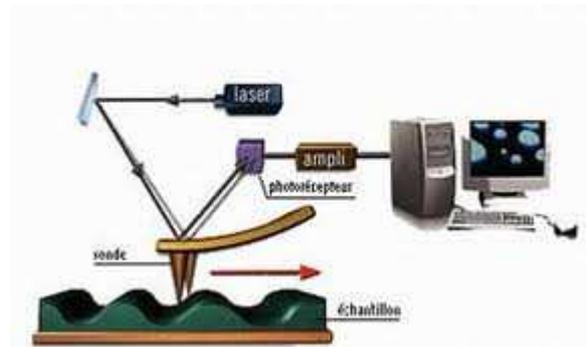


Fig. I.6 Microscope à force atomique (AFM).

- La microscopie 4-D

L'objectif de la microscopie 4-D est la mesure et la caractérisation des structures microscopiques en mouvement (Micro-Electro-Mechanical-Systems MEMS, nanotechnologies, procédés de gravure, attaques chimiques...) en utilisant la technique de la microscopie interférométrique figure I.7. Cette technique consiste à balayer en continu les franges d'interférence sur toute la profondeur de la surface à mesurer, d'acquérir les images avec une caméra rapide et d'effectuer un traitement d'images fortement parallélisé en logique câblée pour mesurer la hauteur du relief de la surface. Cette technique nous permet de réaliser aussi bien des mesures a périodiques que périodiques. La figure I.8 montre le schéma du système CAM 4-D.



Fig. I.7 Banc de mesure utilisant le système de microscopie CAM 4-D

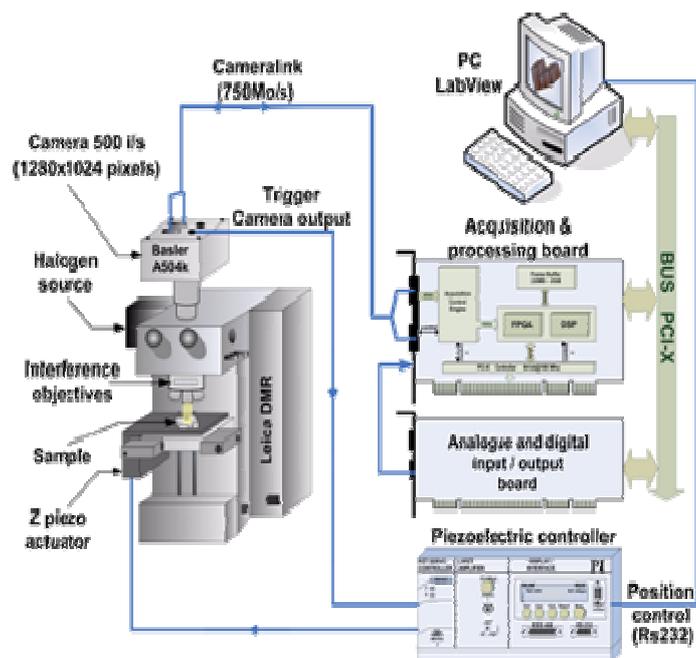


Fig. I.8 : Schéma du système de microscopie 4-D

Ce prototype peut être décomposé en deux parties. Une première partie, optique, est constituée d'un microscope Leica DMRX équipé d'objectifs interférométriques (Michelson ou Mirau), d'une source de lumière, d'une caméra rapide numérique et d'un module de translation verticale piézoélectrique avec une dynamique de 100 μm . Une série de franges peut alors être observée dans le détecteur de la caméra montrant les variations de contraste au niveau de chaque pixel. Une seconde partie, électronique/informatique, est constituée d'une carte d'acquisition (dotée d'un FPGA Virtex 2P de Xilinx et de mémoires SRAM et DDR) et d'un ordinateur. Elle sert à contrôler les différents systèmes de translation et à assurer l'acquisition, le stockage et le traitement des données d'interférence issues de la partie optique. L'ensemble des composants doit être soigneusement synchronisé afin que le système puisse fonctionner correctement.

Le dispositif est posé sur une table anti-vibration (SmartTable de Newport) équipée d'un système de compensation actif qui limite les vibrations résiduelles du banc optique.

Le principe de fonctionnement du système CAM 4-D est le suivant : la surface de l'échantillon à analyser est balayée sur toute sa profondeur par une sonde virtuelle au moyen d'un translateur vertical piézoélectrique. Les images ainsi formées sont envoyées, via une liaison « CameraLink », vers la carte d'acquisition et sont traitées dans le FPGA, où les informations d'altitude (3-D) sont extraites. Les résultats sont ensuite envoyés vers le PC, où ils sont visualisés et analysés. Ce système a l'avantage d'une grande souplesse en terme de choix de taille d'images, de cadence d'acquisition, de profondeur de mesure et de type d'algorithme employé.

Les logiciels de contrôle du système, de visualisation, de sauvegarde et d'analyse des résultats ont été développés sous l'environnement de développement graphique LabView (Laboratory Virtual Instrumentation Engineering Workbench). La figure I.9 donne un aperçu du logiciel de visualisation des résultats en 3-D temps réel.

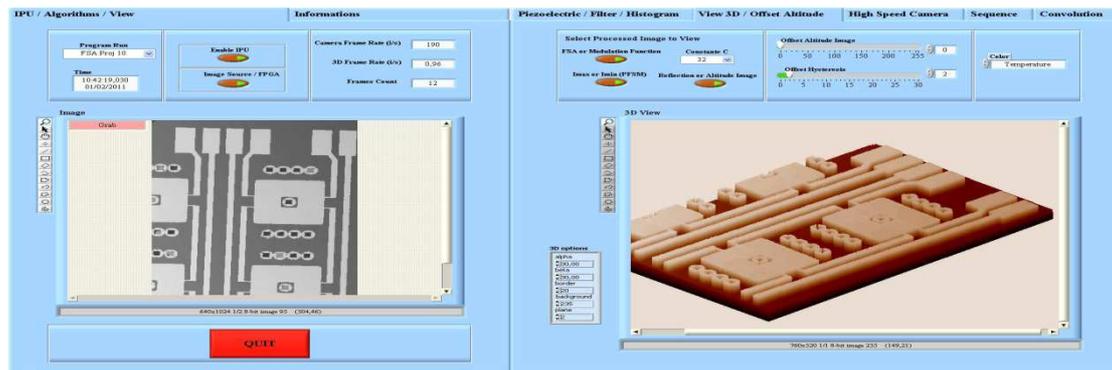


Fig.1.9 : Logiciel de visualisation des résultats du système CAM 4-D

Il existe d'autres procédés exploitant une propriété particulière de la surface à usiner. Par exemple, les mesures de capacité peuvent être utilisées pour analyser les surfaces conductrices et celles par ultrasons permettent d'étudier les surfaces immergées. La figure I.10 illustre différentes micro-topographies (3-D) de surfaces industrielles obtenues par la technique optique décrite précédemment.

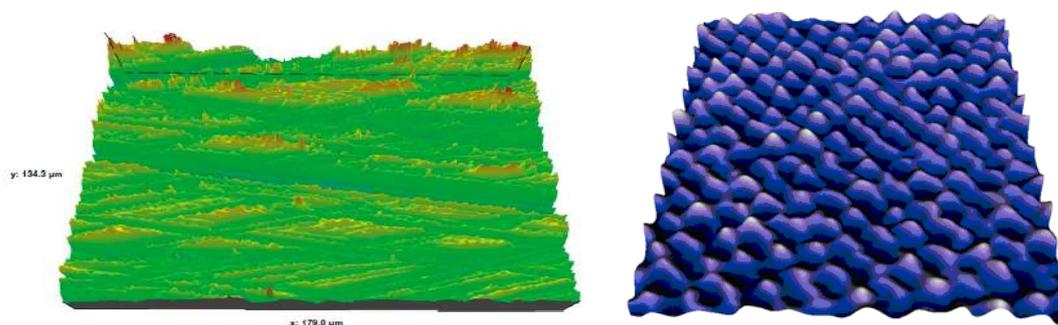


Fig. I.10 Topographies réelles de surfaces industrielles obtenues par la technique optique de mesure (3-D)

1.2.4 Modélisation de la rugosité des surfaces

La hauteur d'une surface rugueuse peut être considérée comme une variable aléatoire à deux dimensions $z(x,y)$ où z se mesure à partir du plan moyen de la surface. La densité de probabilité de cette variable par l'examen de sa courbe représentative et de celles de ses moments centrés, permet d'illustrer certains aspects de la rugosité tels que la dispersion ou

l'asymétrie (moments d'ordre 3 et 4). En adoptant la notation indicielle, les principaux paramètres de la caractérisation statistique des surfaces s'expriment :

- *Hauteur de la surface moyenne*

$$\langle z_{ij} \rangle = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M z_{ij} \quad (\text{I.1})$$

où N et M sont respectivement le nombre de points suivant les directions x et y et $z_{ij} = z(x_i, y_j)$

Il est à préciser que la moyenne des hauteurs de la surface est supposée nulle (surface normalisée) ; c'est à dire : $\langle z_{ij} \rangle = 0$

- *Ecart type quadratique*

Le calcul de l'écart-type quadratique de la distance des hauteurs de rugosité S_q permet d'évaluer l'intervalle de variation de la hauteur de rugosité. Il est préféré à l'écart arithmétique moyen S_a du fait de son usage fréquent en statistique :

$$S_q = \sigma = \left(\frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M z_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad (\text{I.2})$$

Par définition, l'écart-type d'une distribution statistique est la racine carrée de son moment centré calculé à l'ordre 2 :

$$m_k = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (z_{ij} - \langle z_{ij} \rangle)^k \quad (\text{I.3})$$

Ces moments sont à l'origine de deux nouveaux termes décrivant la distribution statistique, le paramètre d'asymétrie SSk (Skewness) et le paramètre d'étalement SKu (Kurtosis) :

$$SSk = \frac{m_3}{S_q^3} = \frac{1}{NM} \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M z_{ij}^3}{S_q^3} \quad (\text{I.4})$$

$$SKu = \frac{m_4}{S_q^4} = \frac{1}{NM} \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M z_{ij}^4}{S_q^4} \quad (\text{I.5})$$

Dans cette nouvelle notation, la lettre initiale S indique que le paramètre considéré se rapporte à une surface rugueuse et non à un simple profil.

Les deux paramètres SSk et SKu sont utilisés pour définir la forme et l'agencement de la rugosité d'une surface. Toute distribution gaussienne possède un coefficient d'asymétrie nul et un coefficient d'étalement égal à 3. Une valeur nulle du paramètre SSk indique que la distribution est symétrique figure I.11a. Dans le contexte des surfaces rugueuses, cela signifie que les vallées et les pics (sommets) sont répartis de manière égale de part et d'autre du plan moyen ; c'est le cas des surfaces de forme sinusoïdale. Une valeur négative du paramètre SSk est caractéristique d'une surface présentant plus de vallées que de pics figure I.11a. Autrement dit, une valeur positive de ce paramètre signifie que la surface présente moins de vallées que de pics.

La valeur de SKu renseigne sur l'aplatissement de la courbe de distribution des hauteurs figure I.11b. Lorsque les motifs de la rugosité (pics, vallées) sont larges et leur extrémité peu éloignée du plan moyen, alors $SKu < 3$ et la distribution est reserrée autour de la valeur médiane. En revanche, si les pics pointus et les vallées étroites et profondes prédominent, alors $SKu > 3$ et la distribution est plus large que la distribution normale. En général, les paramètres d'asymétrie et d'étalement varient simultanément.

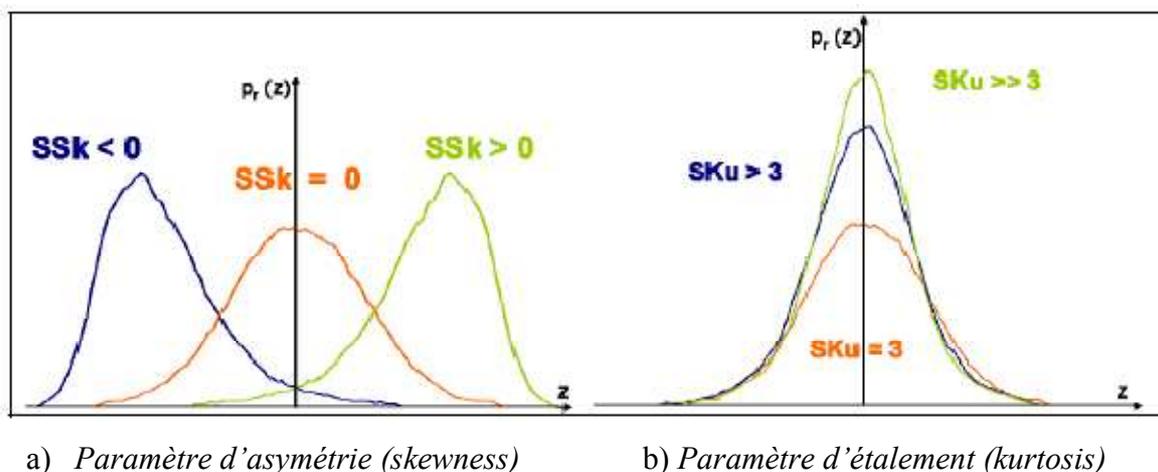


Fig. I.11 Variations de la distribution statistique des hauteurs d'une surface rugueuse pour différentes valeurs des paramètres d'asymétrie et d'étalement.

L'étude des propriétés spectrales d'une surface rugueuse (fonction d'autocorrélation) constitue un bon complément des méthodes statistiques figure I.12.

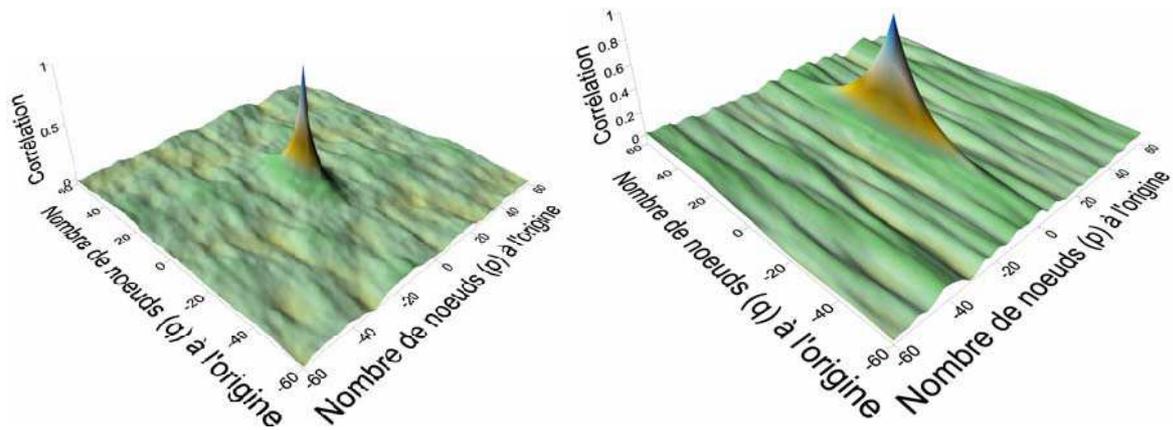


Fig. I.12 – Exemples de Fonction d’Auto-Corrélation (FAC) de surfaces rugueuses.

Il est intéressant de noter que les surfaces rugueuses gaussiennes ou non peuvent être générées numériquement figures I.13 en faisant généralement appel à des séries harmoniques de la forme :

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_{kl} [\cos(\omega_k x_i + \phi_k) \cos(\omega_l y_j + \phi_l)] \quad (I.6)$$

Dans cette équation, a_{kl} est un terme d’amplitude, ω_k et ω_l désignent les pulsations spatiales, ϕ_k et ϕ_l sont des déphasages introduits pour donner un caractère aléatoire aux hauteurs z .

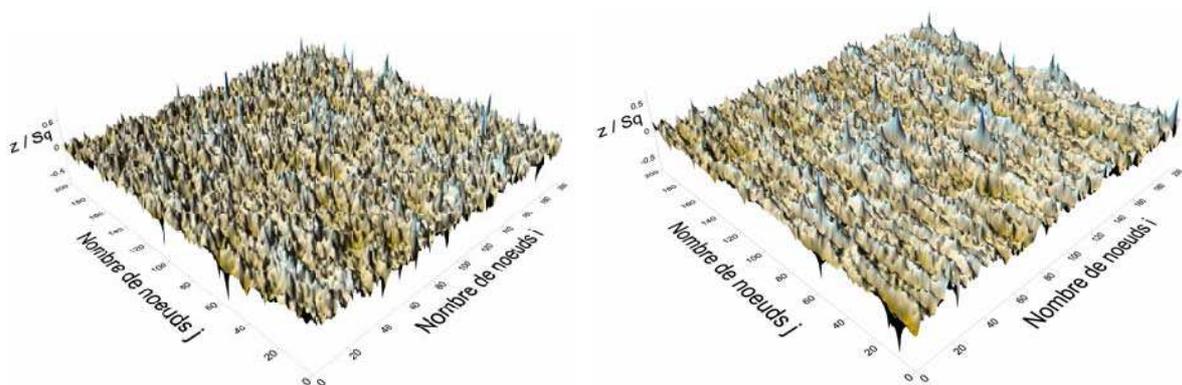


Fig. I.13 Exemples de surfaces anisotropes générées automatiquement.

I.3 Méthodes d'analyse des contacts rugueux lubrifiés

La théorie de lubrification hydrodynamique classique fondée par Osborne Reynolds en 1886 est principalement basée sur l'hypothèse de surfaces parfaitement lisses [2]. Cependant, il a été montré qu'une telle hypothèse est peu réaliste surtout pour l'étude des contacts lubrifiés sévèrement chargés fonctionnant avec de faibles épaisseurs de film.

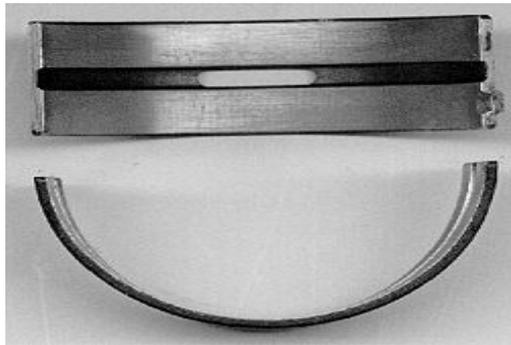
Dans les systèmes mécaniques lubrifiés en régime hydrodynamique ou élasto-hydrodynamique (EHD) tels que les paliers, les butées, les garnitures mécaniques d'étanchéité, les engrenages et les roulements figure I.14, l'épaisseur du film lubrifiant h est censée d'une part être plus grande que la hauteur des aspérités et d'autre part elle doit être très faible devant la longueur d'onde de la rugosité (rugosité de Reynolds); c'est-à-dire $h \ll \lambda$. Dans ces conditions, l'équation de Reynolds peut être appliquée pour décrire le comportement hydrodynamique des contacts rugueux.

Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour l'étude des effets des rugosités de surface sur les performances des contacts hydrodynamiques, à savoir les méthodes stochastiques et les méthodes déterministes (directes). Par comparaison aux modèles stochastiques, les modèles déterministes permettent de prendre en compte de manière plus réaliste la texture et la microtopographie des surfaces dans les études de simulation.

I.3.1 Méthode stochastique

Le concept stochastique a été introduit pour la première fois par Tzeng et Saibel [3] en 1967 pour l'étude de l'influence d'une rugosité transversale sur les performances d'un patin incliné bidimensionnel.

L'approche stochastique est basée sur l'introduction de facteurs d'écoulement dans l'équation de Reynolds et d'une rugosité aléatoire sur les surfaces en contact. La génération de rugosité se fait suivant une loi gaussienne. Cette approche stochastique connaît des limites. En effet, seule une description globale est possible, on ne peut avoir accès aux informations locales. Ainsi, deux profils de rugosités différents mais possédant les mêmes propriétés statistiques conduiront aux mêmes répartitions de pression.



a) Palier lisse



b) Palier à roulement

Fig. I.19 Exemples de systèmes mécaniques lubrifiés.

I.3.2 Méthode directe

Ce type d'analyse est basé sur une résolution numérique directe de l'équation de Reynolds et une description de profils de surfaces simplifiées, en prenant par exemple un profil modélisé par une fonction périodique ou des profils réels figure I.10. Il n'est plus nécessaire de connaître les paramètres statistiques relatifs au type de rugosité. Au lieu de considérer des facteurs de flux dans l'équation de Reynolds, on l'utilise sous la forme classique. C'est dans l'équation de l'épaisseur du film où sont prises en compte les rugosités.

L'approche directe permet de prendre en compte la variance la plus réaliste des rugosités. Les travaux effectués avec ce type d'approche sont basés sur l'application de l'équation de Reynolds et montrent qu'une description précise de la rugosité est une donnée importante. Elle permet d'obtenir des informations locales telles que les variations rapides locales de la pression. Cependant, cette approche nécessite un espace mémoire important et de grands efforts de calcul car il faut raffiner au maximum le maillage pour pouvoir décrire les plus petites ondulations de la rugosité.

I.3.3 Méthode d'homogénéisation

La méthode d'homogénéisation dite aussi méthode de moyennisation est une théorie mathématique qui inclut l'étude des équations aux dérivées partielles à coefficients à

oscillation rapide [4]. Depuis quelques décennies, cette méthode a été utilisée avec succès pour le traitement des problèmes ayant trait, par exemple, à l'élasticité des milieux anisotropes tels que les matériaux composites. En revanche, cette méthode n'est pas fréquemment utilisée dans le domaine de la tribologie. Récemment, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'application du concept d'homogénéisation dans les études de simulation des problèmes de lubrification par fluides compressibles et incompressibles dont le comportement peut être newtonien ou non newtonien [5 à 8].

L'approche d'homogénéisation consiste à réécrire le problème posé en deux autres :

- Un problème local gouverné par 3 équations aux dérivées partielles du second ordre dont les inconnues sont les fonctions périodiques locales.
- Un problème homogénéisé régi par une équation aux dérivées partielles dont l'inconnue est la pression homogénéisée supposée nulle sur la frontière du domaine global.

La difficulté majeure de cette technique réside dans le découplage des deux problèmes à partir du problème global. Les coefficients du problème homogénéisé dépendent de la solution locale et ne peuvent être calculés qu'après traitement du problème local.

I.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord présenté l'état géométrique des surfaces industrielles ainsi que les paramètres statistiques couramment employés pour caractériser la rugosité des surfaces tout en évoquant quelques techniques de mesure topographique (3-D) et (4-D) permettant de les obtenir. L'évaluation de la texture et de la topographie des surfaces mécaniques, qui est un domaine en expansion, est primordiale pour déterminer leurs propriétés tribologiques.

D'après la recherche bibliographique effectuée sur les différentes méthodes d'analyse des contacts lubrifiés rugueux, il ressort que la méthode d'homogénéisation s'avère être une alternative intéressante à la méthode directe spécifiquement dans le cas de rugosités périodiques car elle ne nécessite qu'une allocation mémoire réduite. De plus, elle présente des résultats plus réalistes comparés à ceux issus des approches stochastiques. Par comparaison à la méthode déterministe décrite précédemment, la technique d'homogénéisation ne nécessite

pas un maillage très fin pour prendre en compte l'effet de la rugosité car cette dernière est prise en compte pendant la résolution des problèmes locaux. Dans ce travail, nous avons retenu la technique d'homogénéisation pour l'analyse statique d'un palier cylindrique rugueux. Le processus d'homogénéisation du problème de lubrification hydrodynamique sera présenté en détail dans le quatrième chapitre.

CHAPITRE II

Théorie de la lubrification hydrodynamique en régime laminaire

II .1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à l'étude des contacts hydrodynamiques en supposant que les surfaces antagonistes sont séparées par un film fluide très mince, continu dont le comportement est newtonien figure II.1. Ces hypothèses permettent d'utiliser les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus pour décrire l'écoulement du fluide lubrifiant dans les contacts.

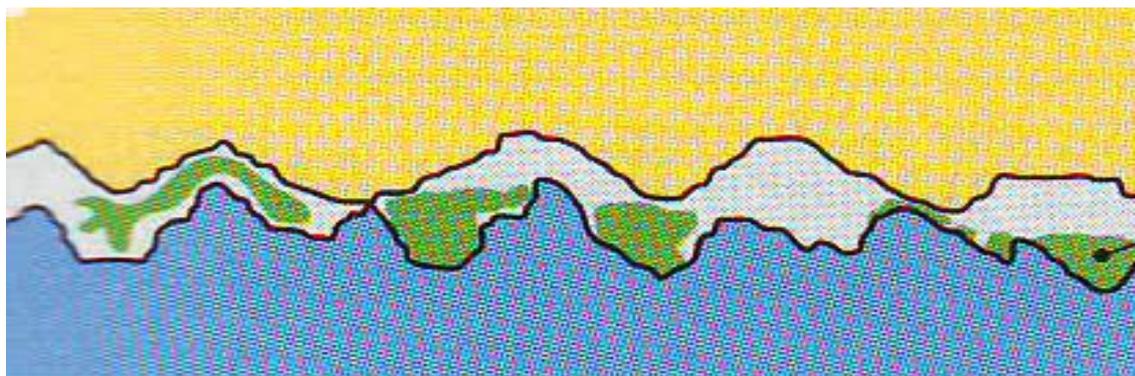


Fig. II.1 Schéma d'un contact rugueux.

La lubrification est une science qui s'intéresse à l'étude des phénomènes d'interaction entre deux corps en contact entre lesquels est intercalé un troisième corps appelé lubrifiant qui peut être fluide, solide ou semi-solide. Selon la nature du lubrifiant utilisé, on distingue deux types de lubrification, à savoir : la lubrification solide et la lubrification fluide. Dans cette dernière, Le fluide peut être un liquide pratiquement incompressible ou isovolume tels que de l'huile, de l'eau ou, même un métal fondu (Sodium liquide à 400 °C) comme il peut être un gaz compressible le plus souvent de l'air : c'est le cas des paliers et butées à gaz.

Différents régimes de lubrification

Il est commode de présenter les différents régimes de lubrification à partir de la courbe de variation du frottement en fonction de la vitesse. Quelque soit le contact lubrifié à basse pression ou à haute pression (contacts rencontrés dans les engrenages et les roulements), cette courbe dite courbe de Stribeck (1902) a toujours la même allure (Fig II.2). On distingue trois zones qui correspondent chacune à un type de lubrification dont la nature dépend aussi de la pression régnant dans le contact.

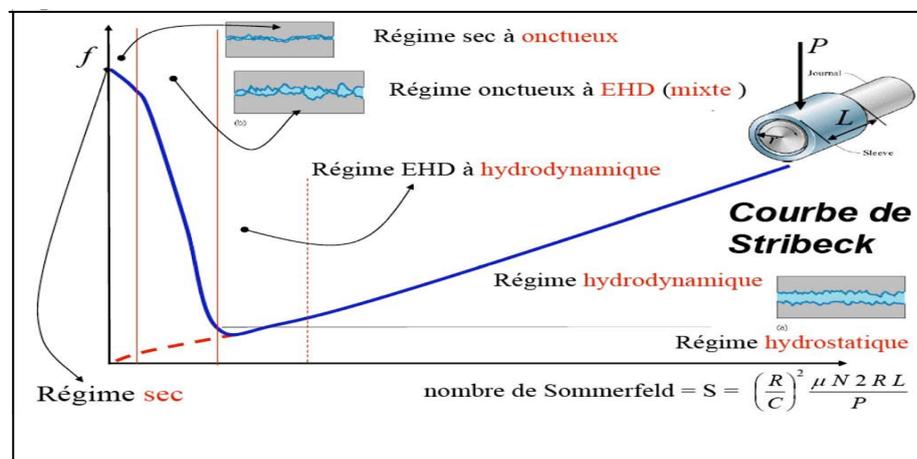


Fig. II.2 Diagramme de Stribeck

- *Contacts à basse pression*

- *Lubrification limite :*

Le graissage limite ou onctueux est le régime où le film lubrifiant est rompu et que seules des molécules de lubrifiant adsorbées aux surfaces métalliques réduisent le frottement, mais sans pouvoir empêcher les aspérités des surfaces de venir en contact, et de créer des microsoudures suivies d'arrachements de métal. L'épaisseur de la couche moléculaire (épilamen) est de l'ordre de 10 à 50 nm et la valeur du coefficient de frottement s'échelonne entre 0.05 et 0.15. Ce type de lubrification est rencontré lors du démarrage et l'arrêt des machines, c'est à ce moment qu'il se produit l'usure la plus importante car les surfaces ne sont pas complètement séparées. Dans ces conditions, l'onctuosité est la propriété prédominante du lubrifiant.

- *Lubrification mixte* :

Il s'agit d'un régime de transition dans lequel la lubrification hydrodynamique ou fluide prend progressivement de l'importance et tend à séparer les surfaces qui restent encore en contact sur une partie de leurs aspérités

- *Lubrification hydrodynamique ou fluide* :

La lubrification hydrodynamique est le régime où un film lubrifiant sépare complètement les surfaces en mouvement et empêche par conséquent tout contact solide entre elles (Figs II.3).

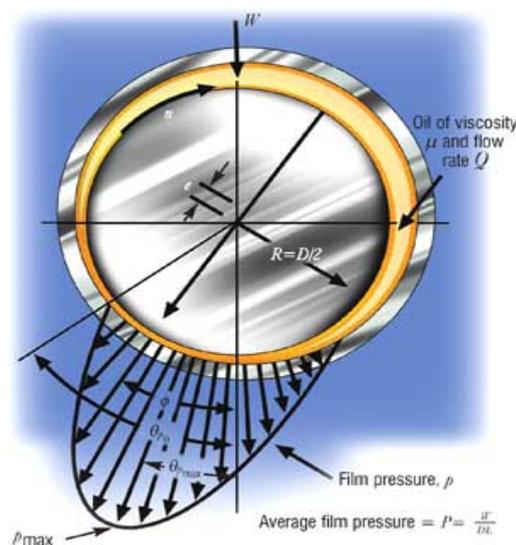


Fig. II.3: Schéma d'un contact lubrifié en régime hydrodynamique (paliers lisse).

- *Contacts à haute pression (jusqu'à 3GPa)*

Ce sont les contacts hertziens lubrifiés rencontrés dans certains éléments de machines tels que les roulements et les engrenages.

- *Zone (I)*

Cette zone correspond à la lubrification extrême pression (EP), les surfaces sont protégées par des films formés par réaction chimique des additifs EP contenus dans l'huile et activés par les pressions, les contraintes de cisaillement et les températures existants dans le contact. Le coefficient de frottement est de 0.02 à 0.2.

- *Zone (II)*

C'est la zone de transition entre la lubrification extrême pression et la lubrification élasto-hydrodynamique (EHD) qui correspond à la zone (III) du diagramme de Stribeck figure II.2.

- Zone (III)

La lubrification EHD concerne les contacts lourdement chargés pour lesquels la pression engendrée dans le film lubrifiant est suffisamment élevée pour déformer élastiquement les surfaces et modifier le comportement rhéologique du lubrifiant. Ce type de contact correspond au contact entre les bagues et les éléments roulants d'un palier de roulement à billes ou à rouleaux. Dans ce type de lubrification, on est en présence de deux effets :

- Effet hydrodynamique;
- Effet des déformations élastiques des solides formant le contact.

Le coefficient de frottement est de 10^{-2} à 8×10^{-2} .

En régime isotherme, la lubrification élasto-hydrodynamique est gouvernée par les équations suivantes :

- Equation de Reynolds pour déterminer la pression dans le film lubrifiant;
- Equations de l'élasticité linéaire pour calculer les déformations élastiques des surfaces;
- Lois de variation viscosité-pression pour déterminer la variation de la viscosité du fluide en fonction de la pression

II.3 Equations générales de la dynamique des fluides visqueux

Les équations générales de la dynamique des fluides visqueux (réels) sont établies à partir des lois de conservation de la mécanique des milieux continus et de la loi de comportement rhéologique du fluide considéré. Dans le cas d'un fluide newtonien et compressible, les équations générales sont les suivantes :

- Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{II.1})$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho\gamma_i = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{II.2})$$

avec $\gamma_i = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ et $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$

- Loi de comportement rhéologique :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad i, j=1, 2, 3 \quad (\text{II.3})$$

où $\tau_{ij} = \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); k = 1, 2, 3 \quad (\text{II.4})$

En reportant l'équation (II.3) dans l'équation (II.2) et en négligeant les forces massiques extérieures f_i , nous obtenons les équations de Navier :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \quad (\text{II.5})$$

avec $i, j = 1, 2, 3$

Pour un fluide isovolume ou incompressible caractérisé par une masse volumique constante $\rho = \rho_0 = \text{constante}$, les équations (II.1), (II.4), et (II.5) deviennent :

- Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad i=1, 2, 3 \quad (\text{II.6})$$

- Equation constitutive du fluide :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{II.7})$$

- Equations de Navier :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \quad (\text{II.8})$$

Les différents paramètres intervenant dans les équations (II.1) à (II.8) sont définis comme suit :

x_i, t Variables d'espace et de temps,

u_i	Composantes de la vitesse d'une particule de fluide,
γ_i	Composantes de l'accélération d'une particule de fluide,
f_i	Forces massiques extérieures (gravité,...),
σ_{ij}	Tenseur des contraintes en un point du fluide,
$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$	Tenseur des taux de déformation symétrique,
δ_{ij}	Tenseur unité ou symbole de Kronecker,
$\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$	
ρ	Masse volumique du fluide,
p	Pression dans le fluide,
λ	Coefficient de viscosité de dilatation du fluide,
μ	Coefficient de viscosité de cisaillement ou viscosité dynamique du fluide.

II.4 Analyse dimensionnelle des équations de Navier-Stokes

En mécanique des films minces visqueux, les équations de Navier (II.5) ou (II.8) se simplifient très sensiblement car l'épaisseur du film suivant ox_3 est très faible par rapport aux deux autres dimensions du contact.

Pour mettre en évidence les termes prépondérants, il est commode de réécrire les équations relatives au fluide incompressible sous forme adimensionnée. Le changement de variables adopté est le suivant :

- Variables d'espace et de temps :

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1}{L}, \tilde{x}_2 = \frac{x_2}{L}, \tilde{x}_3 = \frac{x_3}{h}, \tilde{t} = t \frac{V}{L} \quad (\text{II.9})$$

- Composantes de la vitesse de l'écoulement :

$$\tilde{u}_1 = \frac{u_1}{V}, \tilde{u}_2 = \frac{u_2}{V}, \tilde{u}_3 = u_3 \frac{L}{Vh}, \quad (\text{II.10})$$

- Constantes physiques du fluide :

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}$$

Ce changement nous conduit à poser :

$$\tilde{p} = p \frac{h^2}{\mu_0 VL} \quad (\text{II.11})$$

Où :

V est la vitesse d'une des parois du contact,

L est la dimension caractéristique du contact,

μ_0 et ρ_0 sont respectivement la viscosité dynamique et la masse volumique de référence à $T = T_0$.

Compte tenu de ces changements de variables, l'équation (II.8) écrites dans le cas d'un fluide iso-volume devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_1} = & -\xi \mathfrak{R}_h \tilde{\rho} \frac{D\tilde{u}_1}{D\tilde{t}} + \xi^2 \left[\tilde{\mu} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_2^2} \right) \tilde{u}_1 + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} \right) \right) + 2 \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_1} + \right. \\ & \left. \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1} \right) + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_3} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1} \right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_2} = & -\tilde{\rho} \xi \mathfrak{R}_h \frac{D\tilde{u}_2}{D\tilde{t}} + \xi^2 \left[\tilde{\mu} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_2^2} \right) \tilde{u}_2 + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} \right) \right) + \right. \\ & \left. \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_1} \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1} + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2} \right) + 2 \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_2} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_3} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2} \right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_3} = & -\xi^3 \mathfrak{R}_h \tilde{\rho} \frac{D\tilde{u}_3}{D\tilde{t}} + \xi^4 \left[\tilde{\mu} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2^2} \right) + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1} + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_2} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2} \right] + \\ & \xi^2 \left[\tilde{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_3^2} \right) + 2 \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_3} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_3} + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3} + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_2} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

avec : $\xi = \frac{h}{L}$ paramètre d'échelle qui est de l'ordre de 10^{-3} ou 10^{-4} .

$$\frac{D\tilde{u}_i}{D\tilde{t}} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} \quad \text{et} \quad \mathfrak{R}_h = \xi \mathfrak{R}_L = \frac{\rho_0 V h}{\mu_0} = \frac{V h}{\nu_0}$$

\mathfrak{R}_h et \mathfrak{R}_L étant respectivement les nombres de Reynolds relatif à l'épaisseur et à la longueur de l'écoulement.

En négligeant les termes multipliés soit par ξ^2 , soit par ξ^3 ou ξ^4 , il reste :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} = -\xi \mathfrak{R}_h \tilde{\rho} \frac{D \tilde{u}_i}{D \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_3} \right), \quad i = 1, 2 \quad (\text{II.15})$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_3} = 0 \quad (\text{II.16})$$

L'équation (II.16) montre que la pression est indépendante de la variable d'espace x_3 .

Les termes en $\xi \mathfrak{R}_h$ ou termes d'inertie de l'équation (II.15) sont plus souvent négligeables devant les termes de viscosité ; ceci est vérifié dans la plupart des écoulements rencontrés en lubrification hydrodynamique. Quelques exceptions se rencontrent toutefois quand la viscosité cinématique du fluide $\left(\nu = \frac{\mu}{\rho} \right)$ est faible (cas des métaux liquides), quand l'épaisseur du film est importante ou quand les vitesses linéaires sont très élevées.

Si $\xi \mathfrak{R}_h \ll 1$,

les équations de Navier s'écrivent :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3} \right) \quad (\text{II.17a})$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_2} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3} \right) \quad (\text{II.17b})$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_3} = 0 \quad (\text{II.17c})$$

II.5. Equations de la lubrification hydrodynamique par fluide incompressible.

II.5.1 Equation de la mécanique des films minces visqueux généralisée :

En revenant aux variables dimensionnées, le système (II.17) s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \quad (\text{II.18a})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \quad (\text{II.18b})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \rightarrow p = p(x_1, x_2, t) \quad (\text{II.18c})$$

où : $p = p(x_1, x_2, t)$, $\mu = \mu(x_1, x_2, x_3, t)$ et $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3, t)$

L'intégration des équations de Navier (II.18) nécessite la connaissance des conditions limites sur la vitesse (conditions de non glissement) figure II.4 :

-Pour $x_3 = h_1(x_1, x_2, t)$: paroi (S_1)

$$u_1(x_1, x_2, h_1) = U_{11} ; u_2(x_1, x_2, h_1) = U_{12} ; u_3(x_1, x_2, h_1) = U_{13} \quad (\text{II.19})$$

-Pour $x_3 = h_2(x_1, x_2, t)$: paroi (S_2)

$$u_1(x_1, x_2, h_2) = U_{21} ; u_2(x_1, x_2, h_2) = U_{22} ; u_3(x_1, x_2, h_2) = U_{23} \quad (\text{II.20})$$

h_1 et h_2 étant les équations des surfaces ou des parois (S_1) et (S_2).

Dans les équations (II.19) et (II.20), les termes U_{ij} ($i = 1, 2$ et $j = 1, 2, 3$) représentent les composantes des vitesses des surfaces, le premier indice se réfère aux surfaces (S_1) ou (S_2), le second aux directions x_1, x_2 ou x_3 comme c'est illustré sur la figure II.4 .

Une première intégration des équations (II.18.a) et (II.18.b) par rapport à la variable x_3 donne :

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_3 + \frac{C_1}{\mu} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \quad (\text{II.21a})$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} x_3 + \frac{C_2}{\mu} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \quad (\text{II.21b})$$

où $C_i = C_i(x_1, x_2, t)$; $i = 1, 2$

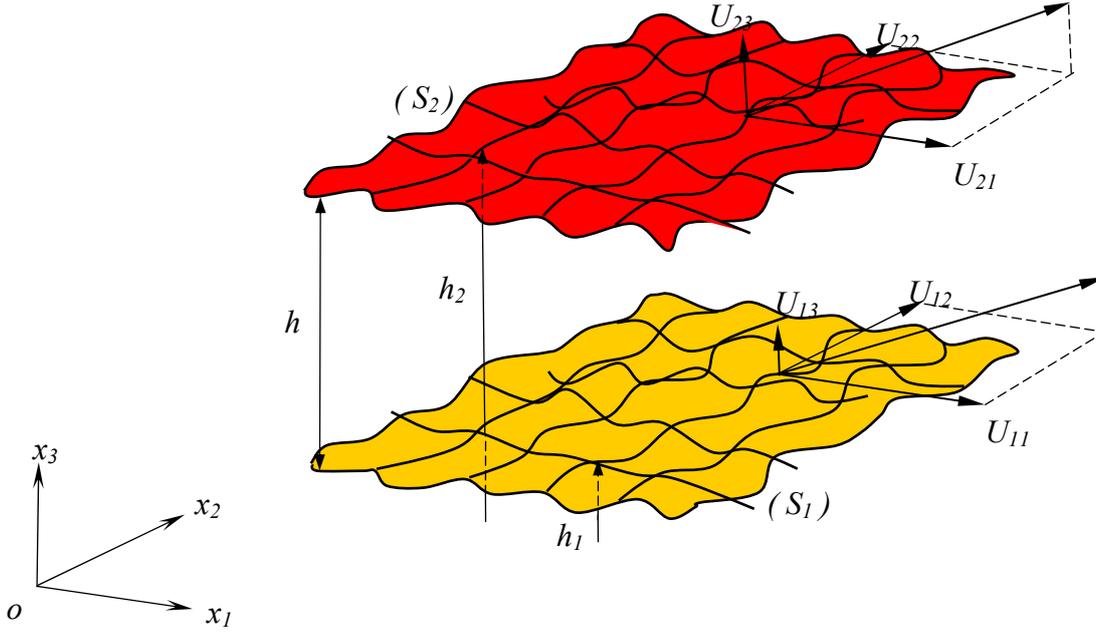


Fig. II.4 Géométrie et Cinématique d'un contact hydrodynamique.

Une deuxième intégration par rapport à x_3 , conduit aux relations suivantes :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} I + C_1 J = \int_{h_1}^{x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \quad (\text{II.22a})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} I + C_2 J = \int_{h_1}^{x_3} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \quad (\text{II.22b})$$

$$\text{où } I = \int_{h_1}^{x_3} \frac{\zeta d\zeta}{\mu(x_1, x_2, \zeta, t)} \quad \text{et } J = \int_{h_1}^{x_3} \frac{d\zeta}{\mu(x_1, x_2, \zeta, t)}$$

Détermination de la constante C_1 :

Nous remarquons que pour $x_3 = h_1$, nous avons $I = J = 0$ et pour $x_3 = h_2$,

$$I_2 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{x_3 dx_3}{\mu(x_1, x_2, x_3, t)} \quad \text{et } J_2 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{dx_3}{\mu(x_1, x_2, x_3, t)}$$

Notons $U_{21} = u_1(x_1, x_2, h_2, t)$ pour $x_3 = h_2(x_1, x_2, t)$ et pour $x_3 = h_2$, l'équation (II.22a) s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} I_2 + C_1 J_2 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 = U_{21} - U_{11}$$

$$\text{Soit : } C_1 = \frac{1}{J_2} \left(U_{21} - U_{11} - I_2 \frac{\partial p}{\partial x_1} \right)$$

En remplaçant C_1 par son expression, l'équation (II.22a) prend la forme suivante :

$$u_1(x_1, x_2, x_3, t) = U_{11} + \left(I - \frac{I_2}{J_2} J \right) \frac{\partial p}{\partial x_1} + J \frac{(U_{21} - U_{11})}{J_2} \quad (\text{II.23})$$

En procédant de la même manière pour l'équation (II.22b), nous trouvons :

$$u_2(x_1, x_2, x_3, t) = U_{12} + \left(I - \frac{I_2}{J_2} J \right) \frac{\partial p}{\partial x_2} + J \frac{(U_{22} - U_{12})}{J_2} \quad (\text{II.24})$$

L'intégration de l'équation de continuité (II.1) à travers l'épaisseur du film donne :

$$\int_{h_1(x_1, x_2, t)}^{h_2(x_1, x_2, t)} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho u_3) \right] dx_3 + \int_{h_1(x_1, x_2, t)}^{h_2(x_1, x_2, t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx_3 = 0 \quad (\text{II.25})$$

ou encore :

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u_1) dx_3 + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho u_2) dx_3 + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho u_3) dx_3 + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx_3 = 0$$

$$\text{avec : } \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho u_3) dx_3 = [\rho u_3]_{h_1}^{h_2} = \rho_2 U_{23} - \rho_1 U_{13}$$

Pour calculer les trois autres intégrales, nous devons utiliser la règle de dérivation sous le signe intégrale dite règle de Leibnitz :

$$\int_{h_1(x_1, x_2, t)}^{h_2(x_1, x_2, t)} \frac{\partial F(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_i} dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_{h_1}^{h_2} F(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 \right) - F(x_1, x_2, h_2, t) \frac{\partial h_2}{\partial x_i} + F(x_1, x_2, h_1, t) \frac{\partial h_1}{\partial x_i} \quad (\text{II.26})$$

où F est une fonction continument dérivable et $i = 1, 2, 3$

Il vient alors :

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u_1) dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_{h_1}^{h_2} \rho u_1 dx_3 \right) - \rho_2 U_{21} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \rho_1 U_{11} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho u_2) dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\int_{h_1}^{h_2} \rho u_2 dx_3 \right) - \rho_2 U_{22} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} + \rho_1 U_{12} \frac{\partial h_1}{\partial x_2}$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx_3 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{h_1}^{h_2} \rho dx_3 \right) - \rho_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial h_1}{\partial t}$$

L'équation (II.25) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_{h_1}^{h_2} \rho u_1 dx_3 \right) - \rho_2 U_{21} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \rho_1 U_{11} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\int_{h_1}^{h_2} \rho u_2 dx_3 \right) - \rho_2 U_{22} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} + \rho_1 U_{12} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \rho_2 U_{23} - \rho_1 U_{13} + \\ \frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

$$\text{avec : } R_2 = \int_{h_1}^{h_2} \rho dx_3$$

Après intégration par parties, les deux intégrales figurant dans l'équation (II.27) s'expriment comme suit :

$$\int_{h_1}^{h_2} \rho u_1 dx_3 = R_2 U_{21} - G \frac{\partial p}{\partial x_1} - F(U_{21} - U_{11})$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \rho u_2 dx_3 = R_2 U_{22} - G \frac{\partial p}{\partial x_2} - F(U_{22} - U_{12})$$

Soit par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} [U_{21}(R_2 - F) + U_{11}F] + \\ \frac{\partial}{\partial x_2} [U_{22}(R_2 - F) + U_{12}F] - \rho_2 U_{21} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \\ \rho_1 U_{11} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \rho_2 U_{23} - \rho_1 U_{13} - \rho_2 U_{22} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} + \\ \rho_1 U_{12} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

$$\text{avec : } F = \frac{1}{J_2} \int_{h_1}^{h_2} \frac{R}{\mu} dx_3 ; G = \int_{h_1}^{h_2} \frac{R}{\mu} \left(x_3 - \frac{I_2}{J_2} \right) dx_3 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{R}{\mu} x_3 dx_3 - I_2 F$$

L'équation (II.28) est l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée. Pour l'obtenir, il a été nécessaire de poser les hypothèses suivantes :

- le milieu est continu,
- le fluide est newtonien,
- l'écoulement est laminaire,

- les forces de volume et d'inertie sont négligeables,
- il n'y a pas de glissement entre la particule de fluide et les parois du contact,
- l'épaisseur du film mesurée suivant la direction ox_3 est toujours très faible devant les autres dimensions du contact; c'est l'hypothèse de base de la lubrification.

Dans l'équation (II.28) :

- le terme $\frac{\partial}{\partial x_1} [U_{21}(R_2 - F) + U_{11}F] - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_1} \right)$ représente la variation du débit massique dans la direction x_1 pour une section de dimension $(h_2 - h_1)$ suivant x_3 et unité suivant x_2 .

- le terme $\frac{\partial}{\partial x_2} [U_{22}(R_2 - F) + U_{12}F] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_2} \right)$ représente la variation du débit massique dans la direction x_2 pour une section de dimension $(h_2 - h_1)$ suivant x_3 et unité suivant x_1 .

Dans les deux expressions ci-dessus le premier terme correspond au débit dû au déplacement des parois (écoulement de Couette dû au cisaillement du fluide). Le second terme correspond au débit dû au gradient de pression (écoulement de Poiseuille dû à la pression).

-le terme $\rho_1 \left(U_{11} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + U_{12} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} - U_{13} \right) - \rho_2 \left(U_{21} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + U_{22} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} - U_{23} \right)$ représente la variation du débit massique dans la direction x_3 pour une section unité.

-le terme $\frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial h_1}{\partial t}$ caractérise l'effet transitoire dû à la compressibilité du fluide.

Notons que l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée s'applique à différents lubrifiants et à différents type de contact. Nous pouvons distinguer :

-Fluide compressible ou incompressible, dans ce dernier cas la masse volumique peut être éliminée de l'équation (II.28).

-Fluide de viscosité variable ou constante, dans ce dernier cas cette équation se simplifie considérablement.

-Contact hydrodynamique ou hydrostatique dans ce dernier l'équation (II.28) se réduit

$$\text{à : } \frac{\partial}{\partial x_1} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (\text{II.29})$$

Notons que l'équation différentielle aux dérivées partielles (II.29) admet une solution non triviale si et seulement si p n'est pas nulle en tous points de la frontière du domaine d'intégration ; ce qui impose physiquement une source de pression extérieure au contact (cavité, alvéole, ...).

-régime transitoire et régime permanent : nous définissons en mécanique des films minces visqueux, le régime permanent comme un régime de fonctionnement tel que dans un repère particulier mobile ou non, les paramètres géométriques du contact et les vitesses des parois sont indépendants du temps.

II.5.2 Equation de la mécanique des films minces visqueux

Dans le cas où la température ne varie pas selon l'épaisseur du film ; i.e. $\frac{\partial T}{\partial x_3} = 0$ et si nous supposons que la viscosité μ et la masse volumique ρ du fluide ne sont fonction que de la température et de la pression, nous pouvons écrire :

$$\mu = \mu(T, p) \text{ et } \rho = \rho(T, p)$$

$$\text{avec } T = T(x_1, x_2, t) \text{ et } p = p(x_1, x_2, t)$$

Il vient alors : $\mu = \mu(x_1, x_2, t)$ et $\rho = \rho(x_1, x_2, t)$; c'est-à-dire $\frac{\partial \mu}{\partial x_3} = \frac{\partial \rho}{\partial x_3} = 0$. Dans ces

conditions, on peut écrire : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$; $R_2 = \int_{h_1}^{h_2} \rho(x_1, x_2, t) dx_3 = \rho(h_2 - h_1)$;

$$I_2 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{x_3 dx_3}{\mu(x_1, x_2, t)} = \frac{1}{2\mu} (h_2^2 - h_1^2) ; J_2 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{dx_3}{\mu(x_1, x_2, t)} = \frac{1}{\mu} (h_2 - h_1) ;$$

$$R = \int_{h_1}^{x_3} \rho(x_1, x_2, t) dx_3 = \rho(x_3 - h_1) ; I = \frac{1}{\mu} \left(\frac{x_3^2 - h_1^2}{2} \right) ; J = \frac{1}{\mu} (x_3 - h_1) ; F = \frac{\rho(h_2 - h_1)}{2} ;$$

$$G = \frac{1}{\mu} \int_{h_1}^{h_2} R \left(x_3 - \frac{I_2}{J_2} \right) dx_3 = \frac{1}{\mu} \int_{h_1}^{h_2} \rho(x_3 - h_1) \left(x_3 - \frac{I_2}{J_2} \right) dx_3 = \frac{\rho}{12\mu} (h_2 - h_1)^3 ;$$

$$U_{21}(R_2 - F) + U_{11}F = \frac{\rho}{2}(h_2 - h_1)(U_{21} + U_{11}) ; U_{22}(R_2 - F) + U_{12}F = \frac{\rho}{2}(h_2 - h_1)(U_{22} + U_{12})$$

Compte tenu de ces relations, l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée (II.28) se réduit à :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\rho \frac{(h_2 - h_1)^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\rho \frac{(h_2 - h_1)^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} \right] = \\ & 6 \frac{\partial}{\partial x_1} [\rho(U_{11} + U_{21})(h_2 - h_1)] - 12\rho U_{21} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + 12\rho U_{11} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \\ & 6 \frac{\partial}{\partial x_2} [\rho(U_{12} + U_{22})(h_2 - h_1)] - 12\rho U_{22} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} + 12\rho U_{12} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \\ & 12\rho(U_{23} - U_{13}) + 12(h_2 - h_1) \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

L'équation (II.30) est appelée : équation de la mécanique des films minces visqueux.

Cette équation est généralement employée pour étudier l'effet des défauts de forme et des rugosités de surfaces sur les caractéristiques de fonctionnement d'un contact en régime isotherme. Notons cependant que la viscosité et la masse volumique du fluide peuvent varier en fonction des variables x_1, x_2 et t .

Les vitesses u_1 et u_2 s'expriment cette fois-ci par :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} [x_3^2 - x_3(h_1 + h_2) + h_1 h_2] + \frac{U_{11} - U_{21}}{h_1 - h_2} (x_3 - h_1) + U_{11} \\ u_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} [x_3^2 - x_3(h_1 + h_2) + h_1 h_2] + \frac{U_{12} - U_{22}}{h_1 - h_2} (x_3 - h_1) + U_{12} \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

Les contraintes de cisaillement dans le film s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_{13}(x_1, x_2, x_3) = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_1} (2x_3 - h_1 - h_2) + \mu \frac{(U_{11} - U_{21})}{h_1 - h_2} \\ \sigma_{23}(x_1, x_2, x_3) = \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_2} (2x_3 - h_1 - h_2) + \mu \frac{(U_{12} - U_{22})}{h_1 - h_2} \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

II.5.3 Equation de Reynolds généralisée

Lorsque la vitesse d'une paroi du contact est tangente en tous points à cette paroi (cas fréquent en lubrification), l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée

(II.28) se simplifie car en plaçant l'origine du système d'axes sur cette paroi, nous pouvons poser $h_1 = 0$ et $h_2 = h$ figure (II.5).

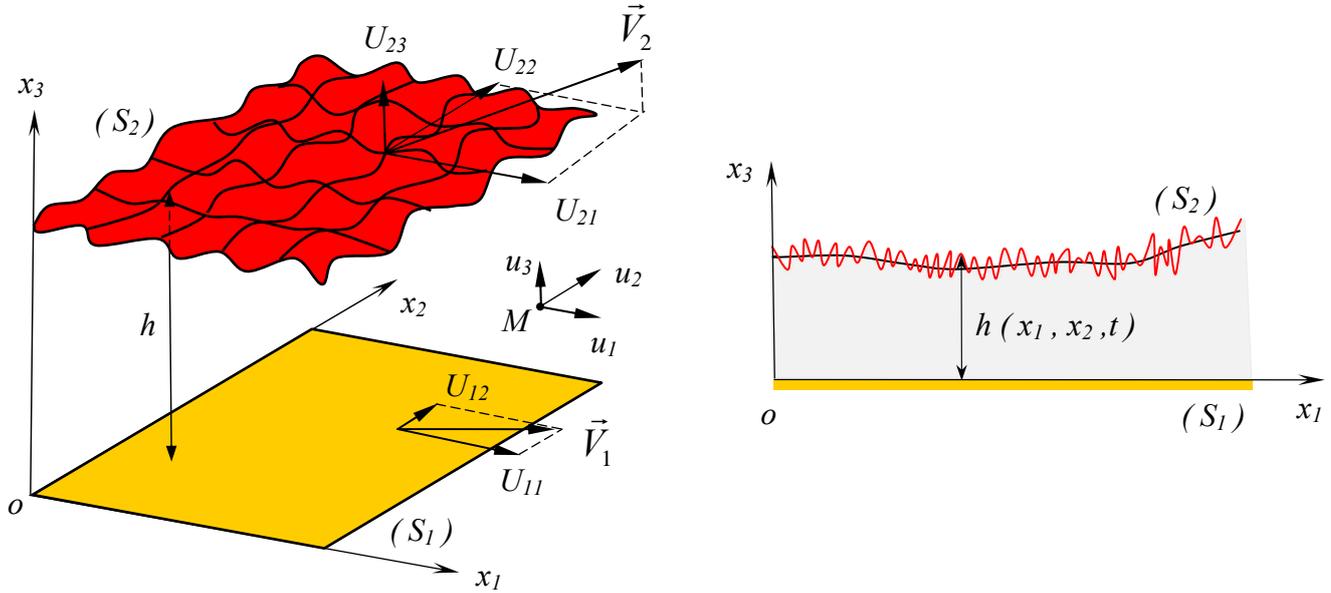


Fig. II.5 Système d'axes et conditions aux limites sur les vitesses.

Dans le système d'axes choisi, les conditions aux limites sur la vitesse s'écrivent :

- Sur la paroi (S_1) , pour $x_3 = 0, u_1 = U_{11}, u_2 = U_{12}, u_3 = 0$
- Sur la paroi (S_2) , pour $x_3 = h, u_1 = U_{21}, u_2 = U_{22}, u_3 = U_{23}$

Remarquons que le choix du système d'axes impose à la vitesse U_{13} de la paroi (S_1) dans la direction x_3 d'être identiquement nulle. Les vitesses u_1 et u_2 du fluide s'écrivent alors :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\partial p}{\partial x_1} \left(I - \frac{I_2}{J_2} J \right) + \frac{U_{21} - U_{11}}{J_2} J + U_{11} \\ u_2 = \frac{\partial p}{\partial x_2} \left(I - \frac{I_2}{J_2} J \right) + \frac{U_{22} - U_{12}}{J_2} J + U_{12} \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

Dans ces relations :

$$I = \int_0^{x_3} \frac{\zeta d\zeta}{\mu} ; J = \int_0^{x_3} \frac{d\zeta}{\mu} ; I_2 = \int_0^h \frac{x_3}{\mu} dx_3 ; J_2 = \int_0^h \frac{dx_3}{\mu}$$

De ces expressions, nous déduisons les contraintes de cisaillement dans le fluide :

$$\begin{cases} \sigma_{13} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \left(x_3 - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{U_{21} - U_{11}}{J_2} \\ \sigma_{23} = \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \left(x_3 - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{U_{22} - U_{12}}{J_2} \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

Dans ces conditions, l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée (II.28) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} [U_{21}(R_2 - F) + U_{11}F] - \rho_2 U_{21} \frac{\partial h}{\partial x_1} + \\ \frac{\partial}{\partial x_2} [U_{22}(R_2 - F) + U_{12}F] - \rho_2 U_{22} \frac{\partial h}{\partial x_2} + \frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial h}{\partial t} + \rho_2 U_{23} \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

avec $G = \int_0^h \frac{R}{\mu} x_3 dx_3 - I_2 F$; $F = \frac{1}{J_2} \int_0^h \frac{R}{\mu} dx_3$; $R = \int_0^{x_3} \rho(x_1, x_2, \zeta, t) d\zeta$ et $R_2 = \int_0^h \rho dx_3$

L'équation (II.35) est communément connue sous le nom d'équation de Reynolds généralisée.

Les relations (II.33), (II.34) et l'équation de Reynolds généralisée (II.35) doivent être utilisées pour l'étude des contacts lubrifiés dans lesquels nous tenons compte des effets thermiques.

Il faut de plus :

- l'équation de continuité pour calculer la vitesse u_3 dans le fluide,
- l'équation de l'énergie pour calculer le champ de température dans le fluide,
- les relations qui donnent les variations de la masse volumique et de la viscosité avec la température. Dans le cas des lubrifiants liquides, la masse volumique est généralement supposée constante.
- l'équation de la chaleur pour déterminer le champ de température dans les solides délimitant le contact.
- l'équation d'état du gaz $f(p, \rho, t) = 0$.

II.5.4 Equation de Reynolds

Très souvent nous admettons que la masse volumique et la viscosité ne varient pas selon l'épaisseur du film et nous plaçons l'origine du système d'axes sur l'une des parois du contact. L'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée (II.28) prend alors

une forme simple ; c'est l'équation de Reynolds qui s'écrit en coordonnées cartésiennes (figure II.5) :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) = 6\rho(U_{11} - U_{21}) \frac{\partial h}{\partial x_1} + 6\rho(U_{12} - U_{22}) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6h \frac{\partial}{\partial x_1} [\rho(U_{11} + U_{21})] + 6h \frac{\partial}{\partial x_2} [\rho(U_{12} + U_{22})] + 12\rho U_{23} + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{II.36})$$

$$\text{où } U_{23} = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U_{21} \frac{\partial h}{\partial x_1} + U_{22} \frac{\partial h}{\partial x_2} \quad (\text{II.37})$$

Les composantes de la vitesse du fluide u_1 et u_2 dans les directions x_1 et x_2 s'écrivent :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_3(x_3 - h) + \frac{h - x_3}{h} U_{11} + \frac{x_3}{h} U_{21} \\ u_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} x_3(x_3 - h) + \frac{h - x_3}{h} U_{12} + \frac{x_3}{h} U_{22} \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

De ces relations, nous déduisons les contraintes de cisaillement dans le fluide :

$$\begin{cases} \sigma_{13}(x_1, x_2, x_3) = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_1} (2x_3 - h) + (U_{21} - U_{11}) \frac{\mu}{h} \\ \sigma_{23}(x_1, x_2, x_3) = \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_2} (2x_3 - h) + (U_{22} - U_{12}) \frac{\mu}{h} \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

Autre écriture de l'équation de Reynolds :

En remplaçant U_{23} par son expression (Eq. II.37), l'équation de Reynolds (II.36) prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) = 6\rho(U_{11} + U_{21}) \frac{\partial h}{\partial x_1} + 6\rho(U_{12} + U_{22}) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6h \frac{\partial}{\partial x_1} [\rho(U_{11} + U_{21})] + 6h \frac{\partial}{\partial x_2} [\rho(U_{12} + U_{22})] + 12 \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) \quad (\text{II.40})$$

ou encore :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \vec{\nabla} p \right) = 6\vec{\nabla} \cdot (\rho h \vec{U}) + 12 \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) \quad (\text{II.41})$$

$$\text{avec } \vec{U} = \begin{Bmatrix} U_{11} + U_{21} \\ U_{12} + U_{22} \end{Bmatrix} \text{ et } \vec{\nabla} p = \begin{Bmatrix} \partial p / \partial x_1 \\ \partial p / \partial x_2 \end{Bmatrix}$$

En utilisant la notation matricielle, l'équation (II.41) peut s'écrire :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} ; \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \begin{Bmatrix} \frac{\rho h^3}{\mu} & \partial p / \partial x_1 \\ \frac{\rho h^3}{\mu} & \partial p / \partial x_2 \end{Bmatrix} = 6 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} ; \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \begin{Bmatrix} \rho h (U_{11} + U_{21}) \\ \rho h (U_{12} + U_{22}) \end{Bmatrix} + 12 \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) \quad (\text{II.42})$$

Si le liquide est incompressible; c'est-à-dire $\rho = \text{constante}$, l'équation (II.41) devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{h^3}{\mu} \vec{\nabla} p \right) = 6 \vec{\nabla} \cdot (h \vec{U}) + 12 \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.43})$$

En régime permanent ou stationnaire, l'équation (II.43) se réduit à :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{h^3}{\mu} \vec{\nabla} p - 6h \vec{U} \right) = 0 \quad (\text{II.44})$$

II.5.5 Conditions limites associées à l'équation de Reynolds incompressible

Le champ de pression p dans le film fluide doit satisfaire à l'équation de Reynolds (II.43) ainsi qu'aux conditions limites suivantes figure II.6 :

$$\begin{cases} p = p_0 & \text{sur } (\Gamma_1) \\ \vec{n} \cdot \left(\frac{\vec{U}h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \vec{\nabla} p \right) = q_n & \text{sur } (\Gamma_2) \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

où : \vec{n} est le vecteur normal unitaire, $q_n = \vec{Q} \cdot \vec{n}$ est le débit volumique normal à travers la frontière (Γ_2) , (Γ_1) et (Γ_2) sont les frontières du domaine d'intégration $(\Omega) \subset R^2$ tel que

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega \text{ et } \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset.$$

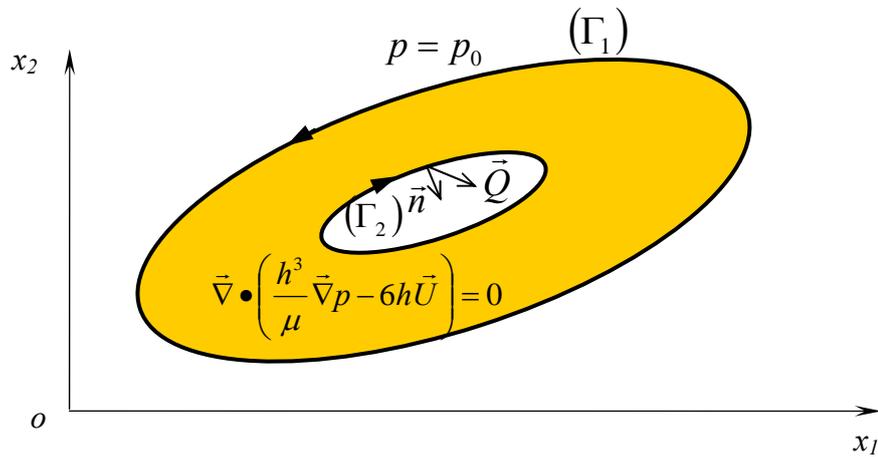


Fig. II.6 Représentation du domaine d'intégration de l'équation de Reynolds et des conditions limites sur les frontières.

Remarque :

Selon la géométrie et la cinématique du contact étudié, la pression calculée à partir de l'équation de Reynolds (II.43) ou (II.44) et des conditions limites qui lui sont associées peut être inférieure à la pression atmosphérique (dépression) en certains points du domaine (Ω).

Ces dépressions entraînent une rupture du film lubrifiant. Ainsi, dans le domaine (Ω), nous distinguons figure II.7 :

- des régions actives où la pression relative est positive, donc génératrice d'une force portante ;
- des régions inactives ou de cavitation où la pression relative qui y règne est négative ou nulle. Dans ces conditions, l'air ambiant peut y être aspiré et le lubrifiant liquide se vaporise à température ambiante.

Les visualisations de l'écoulement dans certains contacts mettent en évidence dans la zone de rupture de film, une juxtaposition de filets d'air (gaz) et de lubrifiant (liquide).

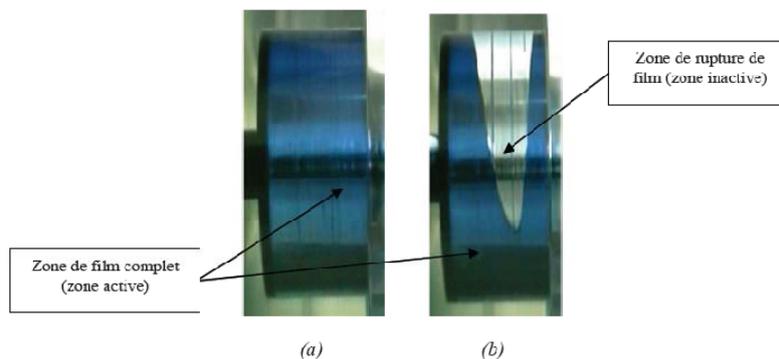


Fig. II.7 Représentation des zones active et inactive dans un palier lisse soumis à un chargement statique : (a) Film complet, (b) Film rompu.

Les études expérimentales montrent que dans la zone de rupture, la pression est constante et égale ou légèrement inférieure à la pression atmosphérique car le lubrifiant est souvent en

contact avec le milieu extérieur, la pression atmosphérique et la pression de vapeur saturante sont voisines.

II.6. Calcul des performances hydrodynamiques du contact

II.6.1. Champ de pression dans le film

Le champ de pression hydrodynamique est obtenu à partir de l'intégration de l'équation de Reynolds (II.44) en satisfaisant les différentes conditions aux limites sur la pression liées à l'alimentation, à l'écoulement du fluide dans le contact (phénomène de cavitation) et à l'environnement dans lequel fonctionne le mécanisme. La connaissance du champ de pression permettra de déduire aisément les différentes caractéristiques du contact tel que la portance, la force de frottement, les débits de fuite et la puissance dissipée.

II.6.2. Action du fluide sur les surfaces du contact

L'action de contact \vec{t} figure II.8, appelée habituellement le vecteur contrainte, exercée en un point M de la paroi, dépend uniquement du tenseur des contraintes en ce point et du vecteur normal \vec{n} , i.e.

$$t_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} n_j \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{II.46})$$

où : $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$ est le tenseur des contraintes et n_j représente les composantes du vecteur normal en M_1 ou M_2 orienté de la surface vers le fluide (normale extérieure).

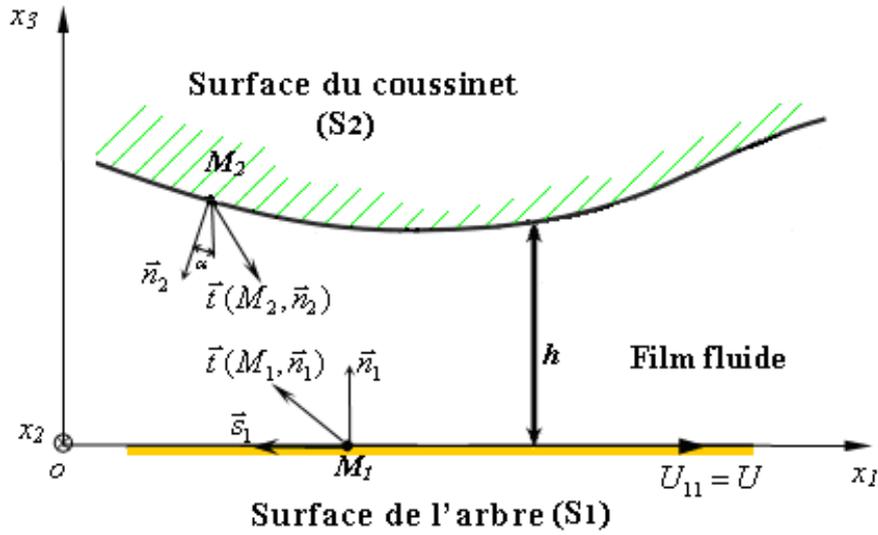


Fig. II.8 Action du fluide sur les surfaces d'un palier hydrodynamique développé.

En un point M du fluide, la matrice représentative du tenseur des contraintes s'écrit :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ 0 & -p & \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & -p \end{bmatrix} \quad (\text{II.47})$$

Les éléments de réduction en un point C quelconque du tenseur des actions de contact du fluide sur la surface (Ω) du contact seront donc

$$\begin{aligned} - \text{Résultante} : \quad \vec{R} &= \iint_{\Omega} \vec{t} d\Omega = \iint_{\Omega} [\sigma_{ij}] \{n\} d\Omega \\ - \text{Moment en C} : \quad \vec{M}(C) &= \iint_{\Omega} \vec{CM} \wedge \vec{t} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

Dans un repère (x_1, x_2, x_3) (figure II.8), les cosinus directeurs de la normale sont :

$$\{\vec{n}_2\} = \begin{Bmatrix} -\sin \alpha \\ 0 \\ -\cos \alpha \end{Bmatrix} \quad (\text{II.49})$$

Soit :

$$[\sigma_{ij}(M_2)]\{\vec{n}_2\} = \left\{ \begin{array}{l} p \sin \alpha - \mu \cos \alpha \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0,h} \\ - \mu \cos \alpha \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0,h} \\ - \sin \alpha \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0,h} + p \cos \alpha \end{array} \right\} \quad (\text{II.50})$$

α étant petit, nous pouvons écrire :

$$\cos \alpha \approx 1, \quad \sin \alpha \approx \text{tg } \alpha = \alpha \quad \text{avec} \quad \text{tg } \alpha = \frac{\partial h}{\partial x_1}$$

Par conséquent, les composantes de la résultante \vec{R} se réduisent à :

$$\vec{R} = \iint_{\Omega} \left\{ \begin{array}{l} - \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0,h} \\ - \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0,h} \\ p \end{array} \right\} d\Omega \quad (\text{II.51})$$

La première et la deuxième composante du vecteur \vec{R} représentent les forces de frottement F_1 et F_2 exercées par le fluide sur les parois selon x_1 et x_2 tandis que la troisième composante $\iint_{\Omega} p d\Omega$ représente la portance hydrodynamique du contact notée W .

Pour le contact schématisé sur la figure II.10, le nombre de frottement se calcule par :

$$C_f = \frac{|F_1|}{W} \quad (\text{II.52})$$

II.7 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté les différentes formes que peut prendre l'équation de la mécanique des films minces visqueux qui va être utilisée au cours de notre étude pour déterminer les caractéristiques d'écoulement de films minces entre parois mobiles, lisses ou rugueuse en régime laminaire. L'intégration de l'équation de la mécanique des films minces visqueux permet de calculer la répartition de la pression qui existe en tout point du fluide. Un certain nombre de caractéristiques telles que la portance hydrodynamique et la force de frottement dans le contact s'en déduisent aisément.

Chapitre III

Théorie des paliers hydrodynamiques en régime turbulent

III.1 Introduction

La théorie de la lubrification hydrodynamique en régime laminaire, exposée dans le chapitre précédent, suppose qu'à l'intérieur du fluide en écoulement les forces d'inertie sont négligeables devant les forces de viscosité et de pression. Dans le cas d'un palier hydrodynamique, ces forces deviennent prépondérantes lorsque la viscosité cinématique du fluide est faible (eau, mercure,.....), les jeux de fonctionnement importants ou la vitesse linéaire de l'arbre en rotation élevée. C'est le cas des paliers lisses des grandes turbomachines modernes dont le diamètre peut dépasser un mètre, c'est aussi le cas des paliers de certaines pompes de centrales nucléaires. Lorsque les forces d'inertie atteignent une certaine valeur, elles modifient la structure de l'écoulement qui devient graduellement turbulent figure III.1. En effet, lorsque le nombre de Reynolds, qui est le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité exercées sur une particule de fluide, augmente le régime d'écoulement devient non laminaire ou turbulent. Dans le cas des paliers hydrodynamiques, on rencontre également un autre régime non laminaire appelé régime des tourbillons de Taylor qui est un régime de transition figure III.2. La turbulence est un mouvement irrégulier dans lequel les différentes propriétés de l'écoulement telles que la vitesse et la pression varient de façon aléatoire en fonction du temps et de l'espace. Il est à noter que la turbulence est parfois utile dans certaines applications technologiques car elle favorise les processus de mélange (chambre de combustion d'un moteur à combustion interne,.....) ainsi que les transferts de chaleur et/ou de masse.

En général, un écoulement turbulent peut être caractérisé par les propriétés suivantes :

- L'écoulement est tridimensionnel (3-D) et instationnaire
- Le vecteur vitesse varie de façon aléatoire en module et en direction
- L'écoulement contient un grand nombre de tourbillons de tailles très variées.

En régime d'écoulement turbulent, les équations de Navier-Stokes présentées dans le chapitre précédent sont toujours valables. On se limitera au cas d'un palier lubrifié par un fluide incompressible en écoulement isotherme et stationnaire.



Fig. III.1 un bel exemple d'un écoulement (jet) turbulent (éruption volcanique)

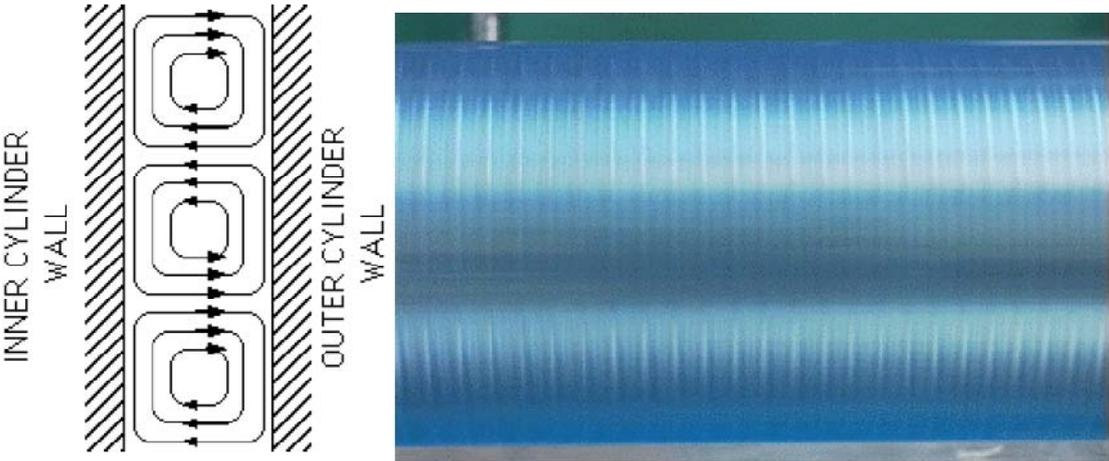


Fig. III.2 Tourbillons de Taylor pour un écoulement entre deux cylindres concentriques tournants

Différentes approches plus ou moins empiriques ont été proposées dans la littérature technique. Elles peuvent être classées en deux catégories :

- méthodes basées sur la théorie de longueur de mélange de Prandtl ;
- méthodes basées sur des considérations expérimentales.

III.2 Approche utilisant la longueur de mélange

Rappelons que la turbulence étant un phénomène aléatoire, toute grandeur physique $g(x_1, x_2, x_3, t)$ qui décrit l'écoulement figure III.3, présente une fluctuation $g'(x_1, x_2, x_3, t)$ qui, si l'écoulement est stationnaire, se situe autour d'une valeur moyenne $\bar{g}(x_1, x_2, x_3)$. On aura donc :

$$g(x_1, x_2, x_3, t) = \bar{g}(x_1, x_2, x_3) + g'(x_1, x_2, x_3, t) \quad (\text{III.1})$$

tel que $g' \ll \bar{g}$

où :

$$\bar{g} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_t^{t+T} g dt \right) \quad (\text{III.2})$$

et

$$\bar{g}' = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_t^{t+T} g' dt \right) = 0$$

La décomposition (III.1) qui est due à Osborne Reynolds, ainsi que la définition de la valeur moyenne selon (III.2) s'appliquent donc uniquement pour les écoulements qui sont en moyenne stationnaires.

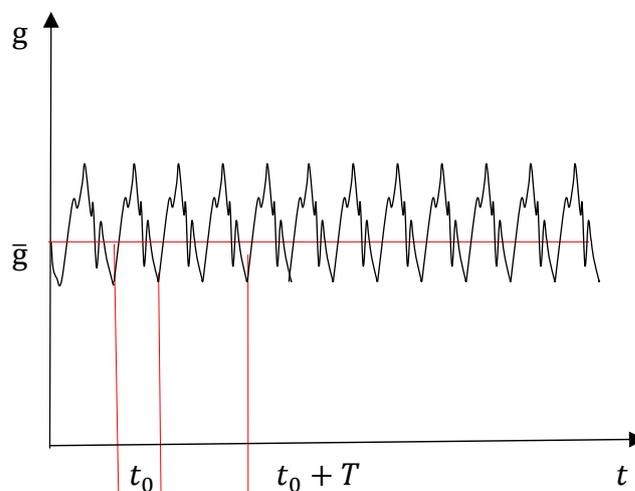


Fig. III.3 Variation instantanée d'une grandeur physique de l'écoulement(vitesse)

III.3 Equations de Reynolds

On considère l'écoulement turbulent d'un fluide newtonien et incompressible ($\rho = \rho_0 = \bar{\rho}$) en régime permanent ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$). En régime turbulent, on a deux écoulements séparés : moyen et de fluctuation ou d'agitation. On se propose de déterminer les équations du mouvement moyen :

III.3.1 Equation de continuité pour un fluide incompressible :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (III.3)$$

où $i=1,2,3$

En prenant la moyenne, on obtient :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (III.4)$$

III.3.2 Equations dynamiques ponctuelles :

Les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\rho_0 \gamma_i = \rho_0 f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (III.5)$$

où: $\gamma_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j)$ en vertu de l'équation. (III.3)

et $\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ qui est le tenseur des contraintes ou tensions visqueuses.

En prenant la moyenne des équations (III.5), on trouve :

$$\rho_0 \bar{\gamma}_i = \rho_0 \bar{f}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j}$$

Soit :

$$\rho_0 \bar{\gamma}_i = \rho_0 \bar{f}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \rho_0 \overline{u'_i u'_j}) \quad (\text{III.6})$$

$$\text{avec } \bar{\gamma}_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j})$$

$$\text{Posons : } \tau_{ij}^* = \bar{\tau}_{ij} - \rho_0 \overline{u'_i u'_j} = \bar{\tau}_{ij} + \tau_{ij}^{(t)}$$

τ_{ij}^* est le tenseur des contraintes totales incluant les contributions dues à la viscosité du fluide et à la turbulence, $\bar{\tau}_{ij}$ le tenseur des contraintes visqueuses dues à la viscosité du fluide et $\tau_{ij}^{(t)} = -\rho_0 \overline{u'_i u'_j}$ le tenseur de Reynolds regroupant les tensions de turbulence.

Dans un système cartésien et en utilisant la notation classique, on a :

- Contraintes totales

$$\tau_{xx}^* = 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho_0 \bar{u}'^2 ; \tau_{xy}^* = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho_0 \overline{u'v'}$$

$$\tau_{yy}^* = 2\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \rho_0 \bar{v}'^2 ; \tau_{yz}^* = \mu \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) - \rho_0 \overline{v'w'}$$

$$\tau_{zz}^* = 2\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - \rho_0 \bar{w}'^2 ; \tau_{zx}^* = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) - \rho_0 \overline{u'w'}$$

- Composantes du tenseur de Reynolds

$$\tau_{ij}^{(t)} = -\rho_0 \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix}$$

Les contraintes ou tensions de Reynolds sont des quantités mesurables.

Par conséquent, les équations de Reynolds s'écrivent :

$$\rho_0 \bar{\gamma}_i = \rho_0 \bar{f}_i + \frac{\partial \tau_{ij}^*}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \quad (\text{III.7})$$

En tout, on a quatre équations (trois équations de Reynolds (III.7)+l'équation de continuité (III.4)) et dix inconnues : $\bar{u}_i, \bar{p}, \tau_{ij}^{(t)}$; $i, j = 1, 2, 3$

Nous voyons donc que dans le cas d'un mouvement moyen, les équations dynamiques et l'équation de continuité sont absolument analogues aux équations dynamiques et à l'équation de continuité dans le cas d'un mouvement laminaire à condition d'ajouter aux tensions visqueuses les tensions de turbulence.

Remarques :

- en régime laminaire: $\bar{p} = p, \bar{u}_i = u_i$ et $\rho_0 \overline{u'_i u'_j} = 0$.
- en général, $|\rho_0 \overline{u'_i u'_j}| \gg |\bar{\tau}_{ij}| \rightarrow \tau^*_{ij} \approx -\rho_0 \overline{u'_i u'_j} = \tau_{ij}^{(t)}$
- les fluctuations superposées au vecteur vitesse moyen sont (3-D) même si l'écoulement moyen est mono ou (2-D). Donc, la turbulence est toujours (3-D)
- on définit l'intensité de la turbulence par l'expression :

$$(u'^2 + v'^2 + w'^2)^{\frac{1}{2}}$$

Cette même expression élevée au carré et multipliée par $\frac{\rho_0}{2}$ exprime l'énergie cinétique de la turbulence, notée k

L'apparition des tensions de Reynolds dans les équations du mouvement pose un problème de « fermeture » car on obtient plus d'inconnues que d'équations. On dit alors que l'on a un système d'équations « ouvert ». Pour fermer le système d'équations, il faut élaborer un modèle de turbulence dont le but serait le développement d'équations supplémentaires pour les tensions de Reynolds. La littérature nous propose plusieurs modèles de turbulence. Les modèles les plus utilisés sont ceux de Boussinesq, de Prandtl et le modèle k, ϵ . Ces modèles sont des modèles semi-empiriques basés sur des résultats expérimentaux.

III.4 Modèle de Boussinesq

En 1877, Boussinesq a proposé le premier modèle mathématique de la turbulence. La relation entre les tensions de Reynolds et le gradient de la vitesse moyenne est de la forme :

$$\tau_{ij}^{(t)} = -\rho_0 \overline{u'_i u'_j} = \rho_0 \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{III.8})$$

Le tenseur de contraintes s'écrit alors :

$$\sigma_{ij} = -\bar{p}\delta_{ij} + \mu \left(1 + \frac{\nu_t}{\nu}\right) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) \quad (\text{III.8})$$

Cette équation est analogue à l'équation constitutive pour un écoulement laminaire.

Dans l'équation (III.8), μ est la viscosité moléculaire et ν_t la viscosité turbulente ou viscosité tourbillonnaire (the eddy viscosity) qui ne dépend pas des propriétés du fluide. ν_t est reliée à des quantités mesurables de l'écoulement turbulent.

Prandtl [9] exprime ν_t sous la forme :

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad (\text{III.9})$$

où l est dénommée longueur de mélange de Prandtl (mixing length) figure III.4.

La valeur absolue est introduite afin d'assurer $\nu_t \geq 0$.

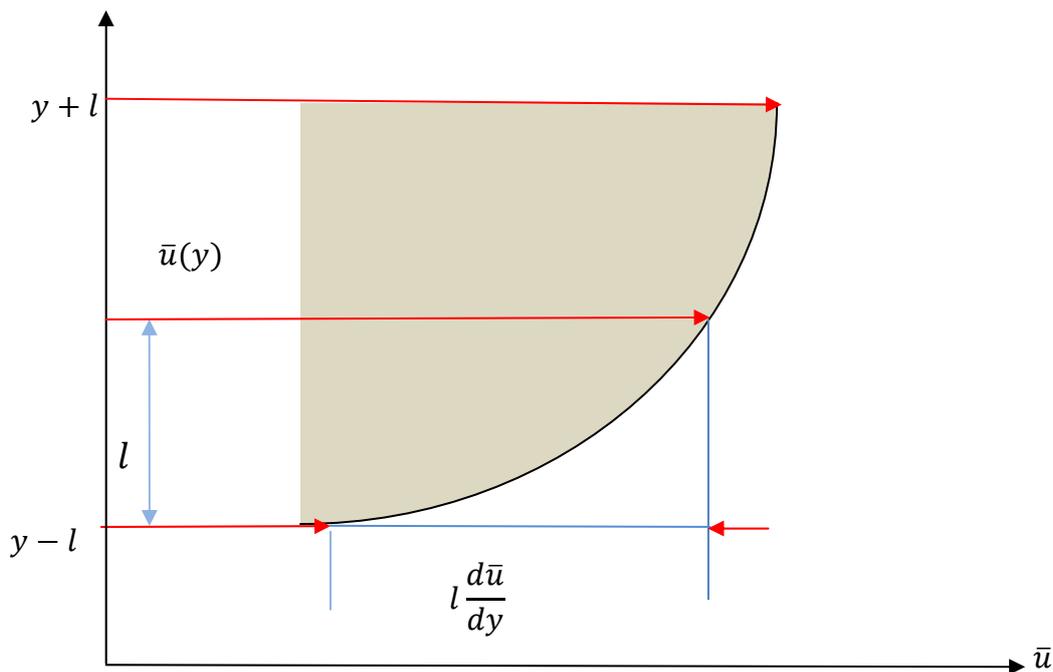


Fig. III.4 Longueur de mélange l .

III.5 Equations de Reynolds pour un écoulement en film mince

En plus des hypothèses classiques de la mécanique des films minces utilisées dans le chapitre précédent (forces massiques négligées, fluide isovisqueux, ...), on pose que les gradients, par

rapport à x_1 et x_3 , des tensions de Reynolds $u'_i u'_j$ sont négligeables devant ceux par rapport à x_2 (coordonnée dirigée suivant l'épaisseur du film). Dans ces conditions, il vient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} &= \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\rho_0 \overline{u'_i u'_2} \right) \quad i=1,3 \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\rho_0 \bar{u}_2'^2 \right)\end{aligned}\tag{III.10}$$

En intégrant, la deuxième équation du système (III.10), on obtient :

$$\bar{p}(x_1, x_2, x_3, t) = -\rho_0 \bar{u}_2'^2 + p_{II}(x_1, x_3, t) = p_I(x_1, x_2, x_3, t) + p_{II}(x_1, x_3, t)$$

Les équations (III.10) indiquent que les vitesses moyennes du fluide \bar{u}_1 et \bar{u}_3 sont influencées

par les gradients de pression moyenne $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3}$ et par conséquent $\frac{\partial p_{II}}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial p_{II}}{\partial x_3}$, car

$\frac{\partial p_I}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial p_I}{\partial x_3}$ sont de l'ordre de h/L (L étant une longueur caractéristique du contact) par

rapport aux autres termes des équations (III.10). Le terme p_I peut être négligé tant pour la distribution de vitesse que la distribution de pression puisque la pression est importante aux limites où $u'_2 = p_I = 0$. Par conséquent $\bar{p} = p_{II}(x_1, x_3, t)$ qui est indépendante de la variable x_2 ; c'est-à-dire le gradient selon l'épaisseur du film $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2}$ est identiquement nul.

Il reste donc :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\rho_0 \overline{u'_i u'_3} \right)\tag{III.11}$$

Dans ce qui suit, l'indice i ne prendra que les valeurs 1 et 3.

III.5.1 Répartition des vitesses moyennes

En intégrant une première fois par rapport à x_3 les équations (III.11), il vient :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} x_2 + C_i(x_1, x_2) = \mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_2} - \rho_0 \overline{u'_i u'_2}\tag{III.12}$$

où C_i sont des constantes d'intégration définies par les conditions aux limites sur la vitesse de l'écoulement :

$$\begin{aligned}
\text{pour } x_2=0 & \quad \bar{u}_1 = \bar{u}_3 = 0 \\
\text{pour } x_2=h & \quad \bar{u}_1 = V; \quad \bar{u}_3 = 0
\end{aligned} \tag{III.13}$$

L'intégration de l'équation (III.12) nécessite de poser de nouvelles hypothèses sur la valeur des tensions de Reynolds. D'après [10 à 19], on peut écrire :

$$-\rho_0 \overline{u'_i u'_2} = \rho_0 l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_2} \right| \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_2} \tag{III.14}$$

où l , fonction de x_2 , est la longueur du mélange [20]. En général, on pose :

$$\begin{aligned}
l &= kx_2 \quad \text{pour } 0 < x_2 < h/2 \\
l &= k(h - x_2) \quad \text{pour } h/2 < x_2 < h
\end{aligned} \tag{III.15}$$

Les fonctions suivantes ont toutefois aussi été utilisées :

$$\begin{aligned}
l^2 &= k^2 x_2 (h - x_2) \\
l &= kx_2 \left(1 - \frac{x_2}{h}\right) \\
l &= \frac{k}{\pi} \sin\left(\pi \frac{x_2}{h}\right)
\end{aligned} \tag{III.16}$$

Dans toutes ces expressions, k est une constante dont la valeur peut varier entre 0,2 et 0,4.

Tipei, Constantinescu et Galetuse [21 à 22] ont montré que le champ de vitesse variait relativement peu d'une loi à l'autre et ont ainsi justifié l'emploi de la relation linéaire (III.15).

En utilisant le changement de variable défini par :

$$Y = \frac{x_2}{h}; \quad L = \frac{l}{h} \quad \text{et} \quad \bar{U}_i = \frac{\bar{u}_i}{V} \tag{III.17}$$

Les équations (III.12) compte tenu des relations (III.14), s'écrivent :

$$\Re_h L^2 \left| \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial Y} \right| \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial Y} + \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial Y} + \bar{B}_i Y + D_i = 0 \tag{III.18}$$

où $\Re_h = \frac{\rho_0 V h}{\mu} = \frac{V h}{\nu}$ est le nombre de Reynolds local de l'écoulement et $\bar{B}_i = -\frac{h^2}{\mu V} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}$ est

un nombre sans dimension qui caractérise le gradient de pression.

Compte tenu du changement de variable (III.17), les conditions aux limites (III.13) deviennent :

$$\begin{aligned} \text{pour } Y=0 & \quad \bar{U}_1 = \bar{U}_3 = 0 \\ \text{pour } Y=1 & \quad \bar{U}_1 = 1 \text{ et } \bar{U}_3 = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Les équations (III.18) peuvent être intégrées soit analytiquement en utilisant les fonctions elliptiques de Weierstrass ou numériquement. Constantinescu [10 et 23] a été amené, pour trouver une solution analytique, à négliger près des parois, le terme de tension turbulente $\Re_h L^2 \left| \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial Y} \right| \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial Y}$ et loin des parois le terme de tension visqueuse $\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial Y}$.

Frêne [27] a effectué, sans approximation, l'intégration numérique de l'équation (III.18) pour différentes valeurs des paramètres \bar{B}_1 et \Re_h . La comparaison des profils de vitesses à l'intérieur du film obtenus numériquement avec ceux calculés analytiquement par Constantinescu pour un nombre de Reynolds de 10^3 , a montré que les écarts ne sont plus négligeables lorsque le gradient de pression moyenne est différent de zéro.

III.5.2 Répartition des pressions moyennes : Méthode analytique

Constantinescu [24,25] a montré que les relations entre les coefficients \bar{B}_i et les vitesses moyennes dans une section \bar{w}_i définies par $\bar{w}_i = \frac{1}{h} \int_0^h \bar{u}_i dx_3$ pouvaient être approchées par les

fonctions linéaires suivantes :

$$\bar{B}_1 = \eta_1 \left(\frac{\bar{w}_1}{V} - \frac{1}{2} \right) \text{ et } \bar{B}_3 = \eta_3 \frac{\bar{w}_3}{V}$$

où les coefficients η_i sont approchés par les expressions suivantes :

$$\eta_1 = 12 + 0,53(k^2 \Re_h)^{0,725} \text{ et } \eta_3 = 12 + 0,296(k^2 \Re_h)^{0,65}$$

C. W. Ng [26] propose pour η_1 l'expression :

$$\eta_1 = 12 + 0,00725 \Re_h^{1,003}$$

Ces relations permettent de déterminer les vitesses moyennes \bar{w}_i et de les reporter dans l'équation de continuité qui, en régime permanent, peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (h \bar{w}_i) = 0$$

On obtient l'équation de pression :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h^3}{\mu \eta_1} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h^3}{\mu \eta_3} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} \right) = \frac{V}{2} \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad (\text{III.20})$$

L'équation (III.20) a la même forme que l'équation de Reynolds laminaire ; elle peut être intégrée en utilisant les mêmes méthodes et en tenant compte des mêmes conditions aux limites.

Les répartitions de pression dans le film obtenues à partir de l'intégration de l'équation (III.20) pour $k=0.16$ et $k=0.4$ ne sont pas en accord avec le profil de pression obtenu par expérimentation même si l'allure des différentes courbes est semblable. Ceci est dû aux nombreuses simplifications introduites pour la dérivation de l'équation (III.20). En effet, l'obtention de cette équation n'est possible que moyennant une linéarisation des relations qui lient les vitesses moyennes \bar{w}_i aux coefficients \bar{B}_i de gradient de pression. D'autre part, les paramètres η_i ne dépendent pas seulement du nombre de Reynolds, mais aussi du gradient de pression.

Selon Frêne [27], l'emploi de la longueur de mélange doit être considéré avec beaucoup de réserves ; cette notion étant pratiquement exclue des études actuelles relatives aux écoulements turbulents classiques (couches limites, ...).

III.6 Approche basée sur des considérations empiriques

A partir de relations empiriques, de nombreux chercheurs ont tenté de déterminer le fonctionnement d'un palier en régime turbulent. C.W. Ng et C.H.T. Pan [28] présentent une approche qui débouche sur des résultats plus satisfaisants. Cette théorie est basée sur la notion de viscosité turbulente (eddy viscosity) ν_t introduite par Boussinesq et permettant de relier les tensions de Reynolds aux taux de déformation de l'écoulement moyen par les relations écrites en utilisant la notation classique :

$$\begin{aligned} -\overline{u'v'} &= \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \\ -\overline{v'w'} &= \nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

où $(x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$; $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \equiv (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ et $(u', v', w') \equiv (u'_1, u'_2, u'_3)$

Les contraintes totales τ_{xy}^* et τ_{yz}^* s'écrivent alors, dans le cas où seuls les gradients de vitesse moyenne par rapport à y sont importants :

$$\tau_{xy}^* = \mu \left(1 + \frac{\nu_t}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \text{et} \quad \tau_{yz}^* = \mu \left(1 + \frac{\nu_t}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$$

(III.22)

Dans la littérature, il existe plusieurs relations permettant d'exprimer la viscosité turbulente. En général, on utilise la relation empirique de Reichardt [29] :

$$\frac{\nu_t}{\nu} = k \left(y^+ - \delta^+ \text{th} \left(\frac{y^+}{\delta^+} \right) \right) \quad \text{avec } k=0,4 \text{ et } \delta^+ = 10,7 \quad \text{(III.23)}$$

y^+ coordonnée réduite définie à partir des lois universelles de variation de vitesse moyenne au voisinage d'une paroi .

Ces relations permettent de calculer les contraintes de cisaillement à l'intérieur du film en fonction du gradient de vitesse. Dans le cadre de la théorie des films minces, les gradients de vitesse sont donnés par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho_0 \overline{u'v'} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\nu_t}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} &= \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \rho_0 \overline{v'w'} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\nu_t}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad \text{(III.24)}$$

A partir de ces équations et compte tenu des conditions aux limites Ng et Pan déterminent les vitesses moyennes :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{\mu} \left[\tau_{xy} \left(\frac{h}{2} \right) \int_0^y \frac{dy'}{1 + \frac{\nu_t}{\nu}} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \int_0^y \frac{(y' - h/2) dy'}{1 + \frac{\nu_t}{\nu}} \right] \\ \bar{w} &= \frac{1}{\mu} \left[\tau_{yz} \left(\frac{h}{2} \right) \int_0^y \frac{dy'}{1 + \frac{\nu_t}{\nu}} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \int_0^y \frac{(y' - h/2) dy'}{1 + \frac{\nu_t}{\nu}} \right] \end{aligned} \quad \text{(III.25)}$$

où $\tau_{xy}(\frac{h}{2})$ et $\tau_{yz}(\frac{h}{2})$ sont des constantes d'intégration à déterminer à partir des conditions limites pour $y=h$.

Ces expressions reportées dans l'équation de continuité permettent après intégration à travers le film d'obtenir, en régime permanent, l'équation de Reynolds turbulente :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h^3}{\mu} G_{x_1} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h^3}{\mu} G_{x_2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} \right) = \frac{V}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{III.26})$$

Dans l'équation (III.26), G_{x_1} et G_{x_2} sont deux fonctions qui dépendent non seulement de l'épaisseur du film et du nombre de Reynolds local de l'écoulement, mais aussi des gradients de pression circonférentiel et axial. Ng et Pan [28] obtiennent les fonctions suivantes :

$$G_{x_1} = \int_0^1 d\bar{y} \int_0^{\bar{y}} \frac{1/2 - \eta}{f_c(\eta)} \left(1 - \frac{g_c(\eta)}{f_c(\eta)} \right) d\eta$$

$$G_{x_3} = \int_0^1 d\bar{y} \int_0^{\bar{y}} \frac{1/2 - \eta}{f_c(\eta)} d\eta \quad (\text{III.27})$$

où les fonctions f_c et g_c sont définies par les relations suivantes :

$$f_c(\eta) = 1 + k \left(\eta h_c^+ - \delta^+ t h \left(\eta \frac{h_c^+}{\delta^+} \right) \right) \text{ et } g_c(\eta) = \frac{k}{2} \eta h_c^+ t h^2 \left(\eta \frac{h_c^+}{\delta^+} \right)$$

avec $\eta = \frac{y}{h}$ variable sans dimension, $h_c^+ = \frac{h}{\nu} \sqrt{|\tau_c|}$ qui est la tension turbulente de Couette tel

que $|\tau_c| = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2}$.

Dans une analyse comportant moins d'hypothèses restrictives H. G. Elrod, G. W. Ng [30] obtiennent les fonctions suivantes :

$$G_{x_1} = J(1) \frac{\bar{I}}{I(1)} - \bar{J} + \frac{1/2 - \frac{\bar{I}}{I(1)} \frac{hV}{\nu}}{\frac{h^3}{\mu\nu} \frac{\partial p}{\partial x}}$$

$$G_{x_3} = J(1) \frac{\bar{I}}{I(1)} - \bar{J} \quad (\text{III.28})$$

où $I(\eta) = \int_0^\eta \frac{d\eta}{1 + \frac{v_t}{v}}$; $J(\eta) = \int_0^\eta \frac{\eta d\eta}{1 + \frac{v_t}{v}}$, et \bar{I} et \bar{J} sont respectivement les moyennes de 0 à 1 de

$I(\eta)$ et $J(\eta)$.

En considérant séparément les écoulements suivant x_1 et x_3 , Constantinescu [31] démontre que, compte tenu de la sous couche laminaire, les vitesses sont des fonctions quasi-linéaires des gradients de pression. Il propose alors pour les fonctions G_{x_1} et G_{x_3} :

- Ecoulement de Poiseuille dû au gradient de pression [32] :

$$G_{x_1} = G_{x_3} = \frac{6,8}{\left(\frac{V_m h}{v}\right)^{0,681}} \text{ où } V_m = \sqrt{u_m^2 + w_m^2} : \text{ vitesse moyenne du fluide} \quad (\text{III.29})$$

- Ecoulement de Couette dû à la vitesse de rotation [33] :

$$\begin{aligned} G_{x_1} &= \frac{1}{\left(12 + 0,0136 \Re_h^{0,9}\right)} \\ G_{x_3} &= \frac{1}{\left(12 + 0,0043 \Re_h^{0,96}\right)} \\ \Re_h &= \frac{Vh}{v} \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

En régime laminaire, les relations (III.30) deviennent :

$$G_{x_i} = \frac{1}{12}, i = 1, 3$$

Il convient de noter que par des approches différentes, Constantinescu en 1959 [24], et Ng et Pan en 1964 [28] obtiennent la même équation (III.26). Les valeurs numériques des coefficients G_{x_1} et G_{x_3} qui s'expriment en fonction de paramètres différents sont très voisines suivant que l'on utilise le modèle de Constantinescu ou d'Elrod [34].

Les expressions (III.30) pourraient être utilisées jusqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre de 5×10^4 et permettraient de déterminer avec une certaine précision les caractéristiques d'un palier fonctionnant en régime turbulent. Pour une meilleure prédiction des performances d'un

palier hydrodynamique, il faut connaître avec plus de précision les fonctions de turbulence G_{x_i} . Pour cela, on préfère pratiquement les lois empiriques de viscosité turbulente à la notion périmée de longueur de mélange, mais rien d'affirmer que ces lois déterminées pour des écoulements de grandes dimensions, soient toujours valables dans le cas des films minces. Il faut donc mesurer dans un film turbulent les différentes caractéristiques de la turbulence telles que les tensions de Reynolds, le profil des vitesses à l'aide d'anémomètres ainsi que l'intensité de la turbulence.

III.7 Transition entre les différents régimes

Entre le régime turbulent, qui existe dans les paliers pour des nombres de Reynolds ou de Taylor élevés, et le régime laminaire, on distingue trois types d'écoulements :

- 1) les forces d'inertie ou centrifuges sont faibles, mais non négligeables devant les forces de viscosité. Le comportement des paliers qui fonctionnent dans ces conditions ne peut plus être décrit par la théorie laminaire classique ;
- 2) les forces d'inertie sont du même ordre que les forces de viscosité. Il se produit alors à l'intérieur du film un écoulement secondaire communément connu sous le nom de tourbillons de Taylor (Taylor's vortices) [35] ;
- 3) les forces d'inertie sont importantes devant les forces de viscosité. Autrement dit, le nombre de Reynolds de l'écoulement, qui exprime le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité agissant sur une particule de fluide, dépasse de loin certaines valeurs dites critiques. Dans ces conditions, on atteint le régime turbulent.

III.7.1 Transition entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor

Depuis les travaux de G. I. Taylor [35], on sait que pour un écoulement entre deux cylindres coaxiaux tournants (cas d'un palier non chargé), les tourbillons se développent dans le film lorsque le nombre de Taylor moyen défini par :

$$T_m = \frac{\rho_0 V C}{\mu} \sqrt{C/R} = \Re_m \sqrt{C/R} \quad (\text{III.31})$$

atteint la valeur de 41,2. Ce nombre sans dimension exprime le rapport des forces centrifuges aux forces de viscosité agissant sur une particule de fluide. Cette valeur donne dans le cas du palier non chargé la transition entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor.

Dans l'expression du nombre de Taylor, ρ_0 et μ représentent la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide en écoulement, V la vitesse linéaire de l'axe (arbre) en rotation, C le jeu radial, R le rayon du palier et \Re_m le nombre de Reynolds moyen de l'écoulement. L'apparition de ces tourbillons figure III.2 qui forment des tores régulièrement superposées suivant l'axe de rotation du palier est liée aux forces d'inertie engendrées par la rotation de l'arbre. Précisons que dans le cas où l'alésage (coussinet) est en rotation autour d'un arbre fixe, les instabilités de Taylor n'existent pas. Dans le cas du palier chargé, c'est-à-dire pour un écoulement entre deux cylindres excentrés, il a été remarqué que le nombre de Taylor critique au-delà duquel la transition entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor se produit varie avec l'excentricité relative. Malgré de nombreuses études expérimentales qui avaient pour but de déterminer la valeur du nombre de Taylor critique en fonction de l'excentricité relative, il est encore difficile, pour un jeu relatif C/R donné, de connaître avec précision la variation du nombre de Taylor critique en fonction de l'excentricité relative $T_c(\varepsilon)$ tel que $\varepsilon=e/C$. Il est donc nécessaire, pour déterminer la transition, d'effectuer des essais expérimentaux dans les conditions réelles de fonctionnement d'un palier hydrodynamique.

Selon Frêne [27], la transition entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor dans un palier chargé s'effectue localement dès que le nombre de Taylor local défini par :

$$T_h = \frac{\rho_0 V h}{\mu} \sqrt{h/R} = \Re_h \sqrt{h/R} \quad (\text{III.32})$$

atteint la valeur critique donnée par la relation semi-empirique :

$$T_c = 63,3\varepsilon^2 - 38\varepsilon + 41,2 \quad (\text{III.33})$$

III.7.2 Transition entre le régime des tourbillons de Taylor et le régime turbulent

On admet que le régime turbulent peut être établi dans un palier chargé lorsque le nombre de Taylor local atteint la valeur de $2T_c$.

A partir de l'équation de Reynolds turbulente (III.26) et des relations (III.30), on est en mesure de calculer la pression engendrée dans le film et la charge que peut supporter un palier en régime turbulent. Pour le calcul de la force ou du couple de frottement, on utilisera pour la contrainte de cisaillement pariétale, l'expression suivante :

$$\tau_{xy}(y=0, h) = \mp \frac{h}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\mu V}{h} (1 + 0,0012 \Re_h^{0,94}) \quad (\text{III.34})$$

Par ailleurs, les vitesses moyennes de l'écoulement se calculent par :

$$\begin{aligned}
 u_m &= -\frac{h^2}{\mu} G_{x_1} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \frac{V}{2} \\
 w_m &= -\frac{h^2}{\mu} G_{x_2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2}
 \end{aligned}
 \tag{III.35}$$

Les composantes du vecteur débit volumique suivant les directions x et z peuvent se calculer, dans une section du palier, à partir des vitesses moyennes par une simple intégration.

On remarque ainsi que les performances hydrodynamiques (pression, capacité de charge, angle de calage, force ou couple de frottement, débits, ...) d'un palier en régime turbulent peuvent être déterminées en utilisant les mêmes méthodes de calcul qu'en régime laminaire.

III.8 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation de la théorie de la lubrification hydrodynamique en régime non laminaire en utilisant le modèle mathématique de Boussinesq. Cette théorie a permis de dériver, à partir des équations décrivant un écoulement turbulent, une équation de Reynolds modifiée appelée équation de Reynolds turbulente permettant d'étudier le comportement des paliers hydrodynamiques fonctionnant en régime turbulent pour des nombres de Reynolds allant jusqu'à 50000. L'intégration de cette équation moyennant certaines conditions limites permet de calculer la répartition de la pression dans le palier.

Dans le chapitre suivant, nous appliquerons le processus d'homogénéisation aux équations de Reynolds écrites en régimes laminaire et turbulent.

CHAPITRE IV

Homogénéisation des équations de Reynolds laminaire et turbulente

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous appliquons le processus d'homogénéisation pour l'analyse théorique du problème de lubrification hydrodynamique dans les contacts rugueux fonctionnant en régime laminaire et turbulent tels que les paliers fluides. Nous supposons, par hypothèse, que la surface stationnaire du contact (coussinet) est rugueuse tandis que la surface mobile (arbre) est parfaitement lisse. Cette hypothèse nous permettra d'utiliser les équations de Reynolds laminaire et turbulente dérivées dans les chapitres 2 et 3 sans la prise en considération du terme transitoire figurant dans le second membre des équations. Pour pouvoir appliquer la technique d'homogénéisation, nous supposerons d'autre part que la distribution des rugosités est périodique sur toute la surface stationnaire du contact. Nous montrerons que le processus d'homogénéisation des équations de Reynolds (2-D) conduit à la résolution de deux problèmes, à savoir :

- un problème local (échelle microscopique) gouverné par trois équations aux dérivées partielles (EDPs) du second ordre dont les inconnues sont des fonctions périodiques locales;
- un problème global (échelle macroscopique) régi par une équation aux dérivées partielles dont l'inconnue est la pression homogénéisée.

Dans le cas d'un palier long où l'écoulement est purement circonférentiel (1-D), les EDPs régissant les deux problèmes deviennent des équations différentielles ordinaires (EDO).

IV.2 Homogénéisation de l'équation de Reynolds laminaire

Le principe de la méthode d'homogénéisation appelée aussi méthode de moyennisation consiste à introduire deux variables (coordonnées) d'espace, une pour l'échelle macroscopique notée $\mathbf{x}=(x_1, x_2)$ appelée variable globale et l'autre pour l'échelle microscopique (rugosités distribuées de façon périodique) notée $\mathbf{y}=(y_1, y_2)$ appelée variable locale. On effectue ensuite un développement asymptotique de la fonction inconnue qui est ici la pression hydrodynamique.

Pour homogénéiser l'équation de Reynolds (2-D) laminaire (Eq. II.44), nous introduisons le développement asymptotique multi-échelle de la pression :

$$p(x_1, x_2, y_1, y_2) = p_0(x_1, x_2) + \varepsilon p_1(x_1, x_2, y_1, y_2) + \varepsilon^2 p_2(x_1, x_2, y_1, y_2) + \dots \quad (\text{IV.1})$$

où p_0 est la pression homogénéisée dépendant des variables globales $(x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$

et p_1 et p_2 sont des fonctions périodiques par rapport aux variables locales $(y_1, y_2) = \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right)$

tel que $(y_1, y_2) \in Y = (0,1) \times (0,1)$ qui est la cellule unitaire.

Dans ce qui suit, nous utiliserons la règle de différentiation suivante :

$$\bar{\nabla}(\circ) = \bar{\nabla}_x(\circ) + \varepsilon^{-1} \bar{\nabla}_y(\circ) \quad (\text{IV.2})$$

$$\text{avec } \bar{\nabla}_x(\circ) = \frac{\partial(\circ)}{\partial x_1} \bar{e}_1 + \frac{\partial(\circ)}{\partial x_2} \bar{e}_2 \text{ et } \bar{\nabla}_y(\circ) = \frac{\partial(\circ)}{\partial y_1} \bar{e}_1 + \frac{\partial(\circ)}{\partial y_2} \bar{e}_2$$

$\bar{\nabla}_x(\circ)$ et $\bar{\nabla}_y(\circ)$ regroupent respectivement les opérateurs différentiels par rapport aux variables globales (x_1, x_2) et variables locales (y_1, y_2) .

En notation indicielle, l'équation (IV.2) s'écrit : $\frac{\partial(\circ)}{\partial x_i} = \frac{\partial(\circ)}{\partial x_i} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial(\circ)}{\partial y_i}$; $i = 1, 2$

En limitant le développement de la pression p à l'ordre 1, l'équation de Reynolds (II.44) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_x \bullet (h^3 \bar{\nabla}_x p_0) + \bar{\nabla}_x \bullet (h^3 \bar{\nabla}_y p_1) + \bar{\nabla}_y \bullet (h^3 \bar{\nabla}_x p_1) + \\ \varepsilon \bar{\nabla}_x \bullet (h^3 \bar{\nabla}_x p_1) + \varepsilon^{-1} [\bar{\nabla}_y \bullet (h^3 \bar{\nabla}_x p_0) + \bar{\nabla}_y \bullet (h^3 \bar{\nabla}_y p_1)] = 6\mu \bar{\nabla}_x \bullet (h \bar{U}) + 6\mu \varepsilon^{-1} \bar{\nabla}_y \bullet (h \bar{U}) \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

Après identification par rapport à ε^j ($j=-1, 0, 1$), nous trouvons les équations suivantes :

- termes en ε^{-1} :

$$\vec{\nabla}_y \bullet (h^3 \vec{\nabla}_y p_1) = 6\mu \vec{\nabla}_y \bullet (h \vec{U}) - \vec{\nabla}_y \bullet (h^3 \vec{\nabla}_x p_0) \quad (\text{IV.4})$$

- termes en ε^0 :

$$\vec{\nabla}_x \bullet [h^3 (\vec{\nabla}_x p_0 + \vec{\nabla}_y p_1)] = 6\mu \vec{\nabla}_x \bullet (h \vec{U}) - \vec{\nabla}_y \bullet (h^3 \vec{\nabla}_x p_1) \quad (\text{IV.5})$$

- termes en ε^1 :

$$\vec{\nabla}_x \bullet (h^3 \vec{\nabla}_x p_1) = 0 \quad (\text{IV.6})$$

Si $\vec{U} = U \vec{e}_1$, les équations (IV.4) et (IV.5) s'écrivent :

$$\vec{\nabla}_y \bullet (h^3 \vec{\nabla}_y p_1) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial y_1} - \vec{\nabla}_y \bullet (h^3 \vec{\nabla}_x p_0) \quad (\text{IV.7})$$

$$\vec{\nabla}_x \bullet [h^3 (\vec{\nabla}_x p_0 + \vec{\nabla}_y p_1)] = \Lambda \frac{\partial h}{\partial x_1} - \vec{\nabla}_y \bullet (h^3 \vec{\nabla}_x p_1) \quad (\text{IV.8})$$

avec $\Lambda = 6\mu V$.

Pour découpler les équations (IV.6) à (IV.8), nous posons [37] :

$$p_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = v_1(x_1, x_2, y_1, y_2) \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + v_2(x_1, x_2, y_1, y_2) \frac{\partial p_0}{\partial x_2} + v_3(x_1, x_2, y_1, y_2) \quad (\text{IV.9})$$

v_1, v_2 et v_3 sont des fonctions périodiques.

En remplaçant l'équation (IV.9) dans l'équation (IV.7), nous obtenons :

$$\vec{\nabla}_y \bullet \left[h^3 \vec{\nabla}_y \left(v_1 \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial p_0}{\partial x_2} + v_3 \right) \right] = \Lambda \frac{\partial h}{\partial y_1} - \vec{\nabla}_y \bullet \left[h^3 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \vec{e}_2 \right) \right]$$

Par identification, nous trouvons les équations différentielles suivantes :

$$\vec{\nabla}_y \bullet (h^3 \vec{\nabla}_y v_1) = -\vec{\nabla}_y \bullet (h^3 \vec{e}_1)$$

$$\vec{\nabla}_y \bullet (h^3 \vec{\nabla}_y v_2) = -\vec{\nabla}_y \bullet (h^3 \vec{e}_2)$$

$$\vec{\nabla}_y \bullet (h^3 \vec{\nabla}_y v_3) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial y_1}$$

ou encore :

$$\vec{\nabla}_y \bullet (h^3 \vec{\nabla}_y v_1) = -\frac{\partial h^3}{\partial y_1} \quad (\text{IV.10})$$

$$\vec{\nabla}_y \bullet (h^3 \vec{\nabla}_y v_2) = -\frac{\partial h^3}{\partial y_2} \quad (\text{IV.11})$$

$$\vec{\nabla}_y \bullet (h^3 \vec{\nabla}_y v_3) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial y_1} \quad (\text{IV.12})$$

Le domaine d'intégration des équations (IV.10) à (IV.12) est défini par la cellule unitaire $Y = (0,1) \times (0,1)$.

L'intégration de l'équation (IV.8) sur la cellule Y conduit à :

$$\int_Y \left[\vec{\nabla}_y \bullet (h^3 \vec{\nabla}_x p_1) + \vec{\nabla}_x \bullet (h^3 \vec{\nabla}_y p_1) + \vec{\nabla}_x \bullet (h^3 \vec{\nabla}_x p_0) - \Lambda \frac{\partial h}{\partial x_1} \right] dY = 0 \quad (\text{IV.13})$$

avec $dY = dy_1 dy_2$

Puisque $h^3 \vec{\nabla}_x p_1$ est périodique, nous pouvons écrire : $\int_Y \vec{\nabla}_y \bullet (h^3 \vec{\nabla}_x p_1) dY = 0$.

L'équation (IV.13) se réduit à :

$$\int_Y \left(\vec{\nabla}_x \bullet \left[h^3 \vec{\nabla}_y \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial p_0}{\partial x_2} v_2 + v_3 \right) \right] + \vec{\nabla}_x \bullet (h^3 \vec{\nabla}_x p_0) - \Lambda \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) dY = 0 \quad (\text{IV.14})$$

Compte tenu de la relation (IV.9), l'équation (IV.13) peut s'écrire aussi :

$$\vec{\nabla}_x \bullet \left[\frac{\partial p_0}{\partial x_1} \int_Y (h^3 \vec{\nabla}_y v_1 + h^3 \vec{e}_1) dY + \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \int_Y (h^3 \vec{\nabla}_y v_2 + h^3 \vec{e}_2) dY \right] =$$

$$\vec{\nabla}_x \bullet \int_Y \left(\left\{ \begin{matrix} \Lambda h \\ 0 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} h^3 \partial v_3 / \partial y_1 \\ h^3 \partial v_3 / \partial y_2 \end{matrix} \right\} \right) dY \quad (\text{IV.15})$$

Soit par conséquent :

$$\vec{\nabla}_x \bullet (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vec{\nabla}_x p_0) = \vec{\nabla}_x \bullet \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) \text{ sur } (\Omega) \quad (\text{IV.16})$$

$$\text{avec } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(x_1, x_2) & a_{12}(x_1, x_2) \\ a_{21}(x_1, x_2) & a_{22}(x_1, x_2) \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\theta} = \begin{cases} \theta_1(x_1, x_2) \\ \theta_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Les coefficients a_{ij} et θ_i sont définis par :

$$a_{11} = \int_Y h^3 \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right) dY ; \quad a_{12} = \int_Y h^3 \frac{\partial v_2}{\partial y_1} dY ; \quad a_{21} = \int_Y h^3 \frac{\partial v_1}{\partial y_2} dY ; \quad a_{22} = \int_Y h^3 \left(1 + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} \right) dY$$

$$\theta_1 = \int_Y \left(\Lambda h - h^3 \frac{\partial v_3}{\partial y_1} \right) dY ; \quad \theta_2 = - \int_Y h^3 \frac{\partial v_3}{\partial y_2} dY \quad (\text{IV.17})$$

L'équation (IV.16) peut aussi s'écrire sous la forme développée comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(a_{11} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(a_{21} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \right) = - \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \right) \text{ sur } (\Omega) \quad (\text{IV.18})$$

La pression homogénéisée p_0 doit satisfaire à l'équation (IV.16) ou (IV.18) ainsi qu'à la condition de Dirichlet :

$$p_0 = 0 \text{ sur la frontière } \partial\Omega \quad (\text{IV.19})$$

Dans le cas lisse, c'est-à-dire : $h(\mathbf{x}) = h_0(\mathbf{x})$, l'équation (IV.16) se réduit à l'équation de Reynolds laminaire classique, i.e. :

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial x_1} (h_0(\mathbf{x})) - \vec{\nabla}_x \bullet (h_0^3(\mathbf{x}) \vec{\nabla}_x p_0(\mathbf{x})) = 0 \quad (\text{IV.20})$$

Dans le cas d'un palier infiniment long (écoulement 1-D), les équations locales et globales se réduisent à :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(h^3(x, y) \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y} \right) = - \frac{\partial (h^3(x, y))}{\partial y} \quad (\text{IV.21})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(h^3(x, y) \frac{\partial v_3(x, y)}{\partial y} \right) = \Lambda \frac{\partial h(x, y)}{\partial y}$$

$$\frac{d\theta(x)}{dx} - \frac{d}{dx} \left(A(x) \frac{dp_0(x)}{dx} \right) = 0 \quad (\text{IV.22})$$

où

$$\theta(x) = \int_Y \left(\Lambda h(x, y) - h^3(x, y) \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) dy \quad ; \quad A(x) = \int_Y h^3(x, y) \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dy \quad (\text{IV.23})$$

où : $(Y) = (0, 1)$ et $x \in (0, 2\pi R)$

IV.2 Homogénéisation de l'équation de Reynolds turbulente

En utilisant la notation vectorielle, l'équation de Reynolds écrite en régime turbulent (III.26) dont l'inconnue est la pression hydrodynamique p peut s'écrire dans le cas d'un fluide isovisqueux sous la forme suivante :

$$\vec{\nabla} \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla} p) = \frac{\mu}{2} \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{h} \vec{U}) \quad (\text{IV.24})$$

$$\text{avec } \underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^3 G_{x_1} & 0 \\ 0 & h^3 G_{x_2} \end{bmatrix} ; \quad \vec{U} = \begin{Bmatrix} U_1 + U_2 \\ W_1 + W_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V \\ 0 \end{Bmatrix}$$

G_{x_i} étant les fonctions de turbulence définies par les relations (III.30) et $V = \omega R$ la vitesse linéaire de l'arbre suivant la direction x_j .

En notation matricielle, l'équation (IV.24) s'écrit :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \frac{\mu}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \begin{Bmatrix} V \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.25})$$

Pour homogénéiser l'équation de Reynolds écrite en régime turbulent (IV.24), nous utilisons le même développement asymptotique de la pression (IV.1).

En limitant le développement de la pression p à l'ordre 1, c'est-à-dire $p_\varepsilon(x_1, x_2, y_1, y_2) = p_0(x_1, x_2) + \varepsilon p_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$, l'équation de Reynolds (IV.24) prend la forme suivante :

$$(\vec{\nabla}_x + \varepsilon^{-1} \vec{\nabla}_y) \cdot (\underline{\underline{G}}(\vec{\nabla}_x + \varepsilon^{-1} \vec{\nabla}_y)(p_0 + \varepsilon p_1)) = \frac{\mu}{2} (\vec{\nabla}_x + \varepsilon^{-1} \vec{\nabla}_y) \cdot (h_\varepsilon \vec{U})$$

Soit :

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla}_x \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_0) + \vec{\nabla}_x \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y p_1) + \vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_1) + \varepsilon \vec{\nabla}_x \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_1) + \varepsilon^{-1} [\vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_0) + \\ & \vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y p_1)] = \frac{\mu}{2} \vec{\nabla}_x \cdot (h \vec{U}) + \frac{\mu}{2} \varepsilon^{-1} \vec{\nabla}_y \cdot (h_\varepsilon \vec{U}) \end{aligned}$$

(IV.26)

Après identification par rapport à ε^j ($j=-1, 0, 1$), nous trouvons les équations suivantes :

- termes en ε^{-1} :

$$\vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y p_1) = \frac{\mu}{2} \vec{\nabla}_y \cdot (h \vec{U}) - \vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_0) \quad (IV.27)$$

- termes en ε^0 :

$$\vec{\nabla}_x \cdot [\underline{\underline{G}} (\vec{\nabla}_x p_0 + \vec{\nabla}_y p_1)] = \frac{\mu}{2} \vec{\nabla}_x \cdot (h \vec{U}) - \vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_1) \quad (IV.28)$$

- termes en ε^1 :

$$\vec{\nabla}_x \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_1) = 0 \quad (IV.29)$$

Si $\vec{U} = V \vec{e}_1$, les équations (IV.27) et (IV.28) s'écrivent :

$$\vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y p_1) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial y_1} - \vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_0) \quad (IV.30)$$

$$\vec{\nabla}_x \cdot [\underline{\underline{G}} (\vec{\nabla}_x p_0 + \vec{\nabla}_y p_1)] = \Lambda \frac{\partial h}{\partial x_1} - \vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_1) \quad (IV.31)$$

avec cette fois ci $\Lambda = \frac{1}{2} \mu V$.

Pour découpler les équations (IV.27) à (IV.29), nous utilisons la même relation (IV.9).

Compte tenu de l'équation (IV.9), l'équation (IV.30) s'écrit :

$$\vec{\nabla}_y \cdot \left[\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y (v_1 \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial p_0}{\partial x_2} + v_3) \right] = \Lambda \frac{\partial h}{\partial y_1} - \vec{\nabla}_y \cdot \left[G_{11} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} \vec{e}_1 + G_{22} \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \vec{e}_2 \right]$$

Par identification, nous trouvons les équations différentielles suivantes :

$$\vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y v_1) = -\vec{\nabla}_y \cdot (G_{11} \vec{e}_1)$$

$$\vec{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y v_2) = -\vec{\nabla}_y \cdot (G_{22} \vec{e}_2)$$

$$\bar{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \bar{\nabla}_y v_3) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial y_1}$$

ou encore :

$$\bar{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \bar{\nabla}_y v_1) = -\frac{\partial G_{11}}{\partial y_1} \quad \text{sur } Y = (0,1) \times (0,1) \quad (\text{IV.32})$$

$$\bar{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \bar{\nabla}_y v_2) = -\frac{\partial G_{22}}{\partial y_2} \quad \text{sur } Y = (0,1) \times (0,1) \quad (\text{IV.33})$$

$$\bar{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \bar{\nabla}_y v_3) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial y_1} \quad \text{sur } Y = (0,1) \times (0,1) \quad (\text{IV.34})$$

L'intégration de l'équation (IV.31) sur la cellule (Y) conduit à :

$$\int_Y \left[\bar{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \bar{\nabla}_y p_1) + \bar{\nabla}_x \cdot (\underline{\underline{G}} \bar{\nabla}_y p_1) + \bar{\nabla}_x \cdot (\underline{\underline{G}} \bar{\nabla}_x p_0) - \Lambda \frac{\partial h}{\partial x_1} \right] dY = 0 \quad (\text{IV.35})$$

$$\text{avec } \int_Y \bar{\nabla}_y \cdot (\underline{\underline{G}} \bar{\nabla}_y p_1) dY = 0 \quad \text{et} \quad dY = dy_1 dy_2$$

L'équation (IV.35) se réduit à :

$$\int_Y \left(\bar{\nabla}_x \cdot \left[\underline{\underline{G}} \bar{\nabla}_y \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial p_0}{\partial x_2} v_2 + v_3 \right) \right] + \bar{\nabla}_x \cdot (\underline{\underline{G}} \bar{\nabla}_x p_0) - \Lambda \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) dY = 0 \quad (\text{IV.36})$$

L'équation (IV.36) peut s'écrire aussi :

$$\bar{\nabla}_x \cdot \left[\frac{\partial p_0}{\partial x_1} \int_Y (\underline{\underline{G}} \bar{\nabla}_y v_1 + G_{11} \bar{e}_1) dY + \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \int_Y (\underline{\underline{G}} \bar{\nabla}_y v_2 + G_{22} \bar{e}_2) dY \right] =$$

$$\bar{\nabla}_x \cdot \int_Y \left(\left\{ \begin{matrix} \Lambda h \\ 0 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} G_{11} \frac{\partial v_3}{\partial y_1} \\ G_{22} \frac{\partial v_3}{\partial y_2} \end{matrix} \right\} \right) dY \quad (\text{IV.37})$$

Soit par conséquent :

$$\bar{\nabla}_x \cdot (\underline{\underline{A}}(\mathbf{x}) \bar{\nabla}_x p_0) = \bar{\nabla}_x \cdot \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) \quad \text{sur } (\Omega) \quad (\text{IV.38})$$

Les coefficients des matrices $\underline{\underline{A}}$ et $\boldsymbol{\theta}$ sont définis par :

$$a_{11} = \int_Y G_{11} \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right) dY ; \quad a_{12} = \int_Y G_{11} \frac{\partial v_2}{\partial y_1} dY ; \quad a_{21} = \int_Y G_{22} \frac{\partial v_1}{\partial y_2} dY ; \quad a_{22} = \int_Y G_{22} \left(1 + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} \right) dY$$

$$\theta_1 = \int_Y \left(\Lambda h - G_{11} \frac{\partial v_3}{\partial y_1} \right) dY ; \quad \theta_2 = - \int_Y G_{22} \frac{\partial v_3}{\partial y_2} dY \quad (\text{IV.39})$$

L'équation (IV.38) peut aussi s'écrire sous la forme développée comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(a_{11} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(a_{21} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \text{ sur } (\Omega) \quad (\text{IV.40})$$

Dans le cas lisse, c'est-à-dire : $h(\mathbf{x}) = h_0(\mathbf{x})$, l'équation (IV.40) se réduit à l'équation de Reynolds turbulente classique, i.e. :

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial x_1} (h_0(x)) - \vec{\nabla}_x \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_0) = 0 \quad (\text{IV.41})$$

$$\underline{\underline{G}} = h_0^3(x) \begin{bmatrix} 1/12 & 0 \\ 0 & 1/12 \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'un contact plan (écoulement 1-D), les équations locales et globales se réduisent à :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(G_{11} \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = - \frac{\partial G_{11}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(G_{11} \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial y} \quad (\text{IV.42})$$

$$\frac{d\theta(x)}{dx} - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{dp_0}{dx} \right) = 0 \quad (\text{IV.43})$$

où

$$\theta(x) = \int_Y \left(\Lambda h(x, y) - G_{11} \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) dy ; \quad a(x) = \int_Y G_{11} \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dy \quad (\text{IV.44})$$

où : $(Y) = (0,1)$

Comme dans le cas laminaire, l'équation (IV.40) dont l'inconnue est la pression homogénéisée p_0 n'admet pas de solution analytique, il est donc nécessaire d'utiliser les

méthodes de résolution numérique tels que les différences finies, les éléments finis et les volumes finis.

IV.3 Equation géométrique du film

Les deux surfaces d'un contact entre lesquelles s'écoule un lubrifiant, peuvent avoir les caractéristiques suivantes:

- (a) les deux surfaces sont lisses et mobiles,
- (b) les deux surfaces sont lisses et stationnaires (fixes),
- (c) les deux surfaces sont rugueuses et mobiles figure IV.1,
- (d) les deux surfaces sont rugueuses et stationnaires (contacts hydrostatiques),
- (e) une surface rugueuse et stationnaire tandis que l'autre est lisse et mobile figure IV.2,
- (f) une surface est rugueuse et mobile tandis que l'autre est lisse et mobile.

Dans le cas (f) où la surface mobile est rugueuse figure IV.1, l'équation de Reynolds laminaire ou turbulente devient instationnaire. Il y a lieu de rajouter le terme transitoire $\mu \frac{\partial h}{\partial t}$ dans le second membre de l'équation.

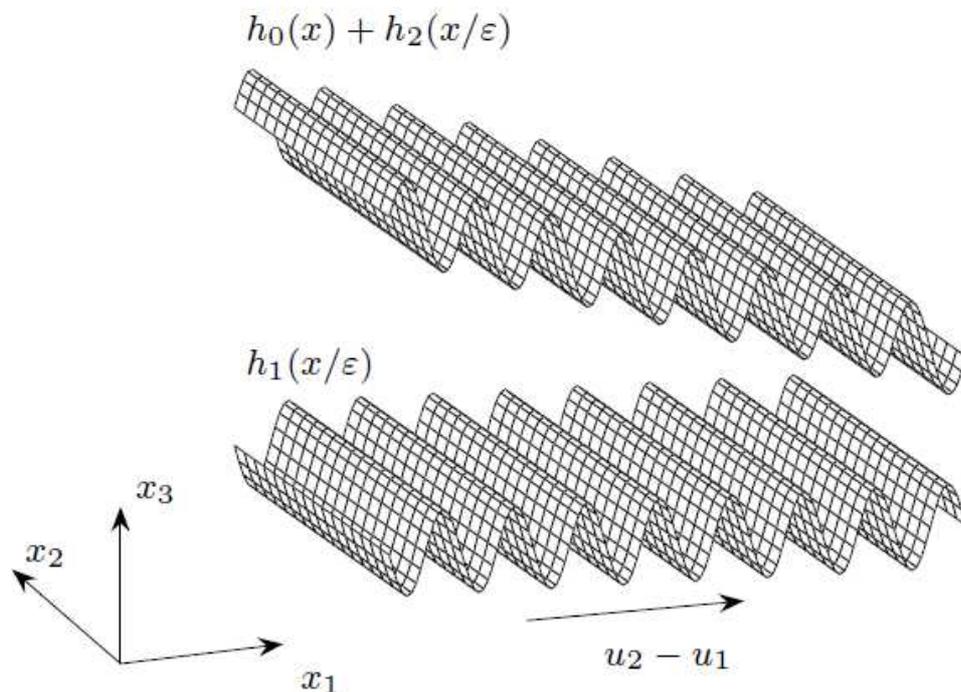
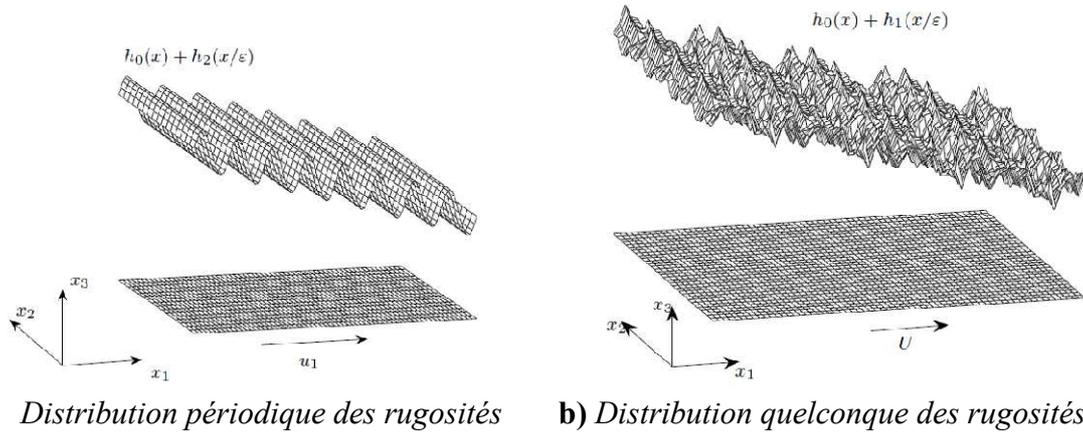


Fig. IV.1 Représentation schématique d'un contact dont les deux surfaces sont mobiles et présentant des distributions périodiques de rugosités.



a) Distribution périodique des rugosités b) Distribution quelconque des rugosités

Fig. IV.2 Représentation schématique d'un contact dont la surface stationnaire est rugueuse et la surface mobile est lisse.

Dans le cas d'un contact figure IV.1, l'expression générale de l'épaisseur du film est de la forme :

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h_0(\mathbf{x}) + h_1(\mathbf{y}) + h_2(\mathbf{y}) ; \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \quad (\text{IV.45})$$

Dans l'équation (IV.45), h_0 exprime la géométrie du film globale dans le cas où les deux surfaces sont parfaites (lisses), et h_1 et h_2 sont deux fonctions périodiques (sinusoïdales) dépendant des variables locales qui représentent les rugosités des deux surfaces. ε est un paramètre décrivant la longueur d'onde de la rugosité.

Dans le cas où la surface inférieure est lisse, l'expression (IV.45) se réduit à :

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h_0(\mathbf{x}) + h_1(\mathbf{y}) \quad (\text{IV.46})$$

Pour une rugosité isotrope figure IV.3, l'équation de h_1 s'écrit en coordonnées locales :

$$h_1(y_1, y_2) = \alpha(\sin(2\pi y_1) + \sin(2\pi y_2))$$

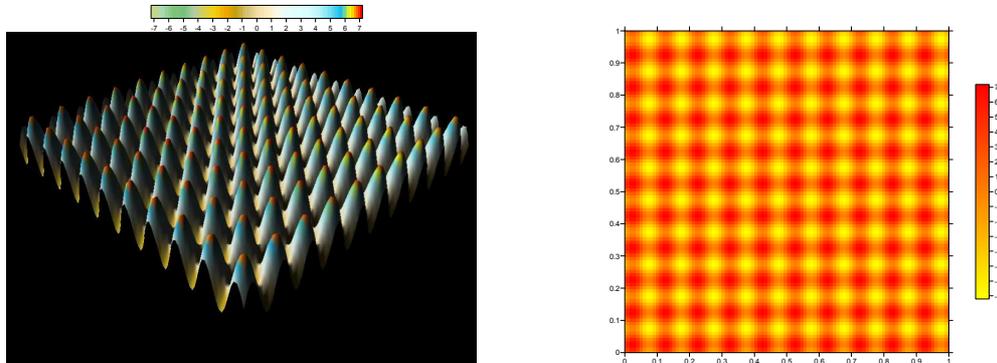


Fig. IV.3 Représentation du rugosité isotrope, $RMS = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 h_1^2(y_1, y_2) dy_1 dy_2} = \alpha\sqrt{2}$

L'expression mathématique de h_1 en fonction des coordonnées globales (méthode directe) est :

$$h_1 = \alpha \left(\sin \left(2\pi p_p \frac{x_1}{L} \right) + \sin \left(2\pi p_p \frac{x_2}{B} \right) \right) = \alpha \left(\sin \left(2\pi \frac{x_1}{\varepsilon L} \right) + \sin \left(2\pi \frac{x_2}{\varepsilon B} \right) \right)$$

IV.4 Caractéristiques hydrodynamiques homogénéisées

IV.4.1 Pression homogénéisée

La pression homogénéisée p_0 est calculée pour les deux régimes d'écoulement à partir de la résolution des équations de Reynolds laminaire (IV. 18) et turbulente (IV.40).

IV.4.2 Débit volumique homogénéisé

Les composantes du vecteur débit volumique peuvent être calculées par l'équation suivante :

$$Q_{\varepsilon 1} = \frac{1}{L_1} \iint_{\Omega} \left(\frac{V}{2} h - \frac{G_{11}}{\mu} \frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 \quad (\text{IV.46a})$$

$$Q_{\varepsilon 2} = \frac{1}{L_2} \iint_{\Omega} \left(-\frac{G_{22}}{\mu} \frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \quad (\text{IV.46b})$$

où L_1 et L_2 sont respectivement la longueur et la largeur du domaine global (Ω).

Compte tenu de l'équation (IV.1), les expressions des gradients de la pression sont :

$$\frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial x_i} = \frac{\partial p_0}{\partial x_i} + \varepsilon \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial p_1}{\partial y_i} \right) + \varepsilon^2 \times \dots = \frac{\partial p_0}{\partial x_i} + \frac{\partial p_1}{\partial y_i} + \varepsilon \frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \varepsilon^2 \times \dots \quad (\text{IV.47})$$

$i=1,2$

Dans cette équation, l'indice zéro indique une quantité homogénéisée.

L'intégration des équations (IV.46) sur la cellule unitaire (Y) donne :

$$Q_{\varepsilon 1} = \frac{1}{L_1} \iiint_{\Omega} \iiint_Y \left(\frac{V}{2} h - \frac{G_{11}}{\mu} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \varepsilon \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \dots \right) \right) dy_1 dy_2 dx_1 dx_2 \quad (\text{IV.48a})$$

$$Q_{\varepsilon 2} = \frac{1}{L_2} \iiint_{\Omega} \iiint_Y \left(-\frac{G_{22}}{\mu} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \varepsilon \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \dots \right) \right) dy_1 dy_2 dx_1 dx_2 \quad (\text{IV.48b})$$

Compte tenu de la relation (IV.9), les équations (IV.48) s'écrivent lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ comme suit :

$$Q_{01} = \frac{1}{L_1} \iiint_{\Omega} \iiint_Y \left(\frac{V}{2} h - \frac{G_{11}}{\mu} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_j} v_j + v_3 \right) \right) \right) dy_1 dy_2 dx_1 dx_2 \quad ; j=1,2 \quad (\text{IV.49a})$$

$$Q_{02} = \frac{1}{L_2} \iiint_{\Omega} \iiint_Y \left(-\frac{G_{22}}{\mu} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_j} v_j + v_3 \right) \right) \right) dy_1 dy_2 dx_1 dx_2 \quad (\text{IV.49b})$$

ou encore :

$$Q_{01} = \frac{1}{L_1} \frac{1}{\mu} \iiint_{\Omega} \iiint_Y \left(\Lambda h - G_{11} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_j} v_j + v_3 \right) \right) \right) dy_1 dy_2 dx_1 dx_2 \quad ; j=1,2 \quad (\text{IV.50a})$$

$$Q_{02} = \frac{1}{L_2} \frac{1}{\mu} \iiint_{\Omega} \iiint_Y \left(-G_{22} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_j} v_j + v_3 \right) \right) \right) dy_1 dy_2 dx_1 dx_2 \quad (\text{IV.50b})$$

Sachant que $p_0 = p_0(x_1, x_2)$, il vient donc :

$$Q_{0i} = \frac{1}{L_i} \frac{1}{\mu} \iint_{\Omega} \left(\theta_i - a_{ij} \frac{\partial p_0}{\partial x_j} \right) dx_1 dx_2 \quad i, j=1,2 \quad (\text{IV.51})$$

IV.4.3 Force de frottement homogénéisée

En régime turbulent, la force de frottement (action tangentielle du fluide sur la paroi) est calculée à partir de l'intégration sur la surface du contact de la contrainte de cisaillement à la paroi :

$$\tau_{xy}(y=0, h) = \mp \frac{h}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\mu V}{h} (1 + 0,0012 \mathfrak{R}_h^{0,94}) \quad (\text{IV.52})$$

Soit :

$$|F_\varepsilon| = \iint_{\Omega} \tau_{xy} dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} \left(\frac{\mu V}{h} (1 + 0,0012 \mathfrak{R}_h^{0,94}) + \frac{h}{2} \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 \quad (\text{IV.53a})$$

En intégrant sur la cellule (Y), il vient :

$$|F_\varepsilon| = \iiint_{\Omega} \iiint_Y \left(\frac{\mu V}{h} (1 + 0,0012 \mathfrak{R}_h^{0,94}) + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y_1} \right) (p_0 + \varepsilon p_1) \right) dy_1 dy_2 dx_1 dx_2 \quad (\text{IV.54})$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on a :

$$|F_0| = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\mu V}{h} (1 + 0,0012 \mathfrak{R}_h^{0,94}) + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_1} \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial y_1} + \frac{\partial v_3}{\partial y_1} \right) \right) dy_1 dy_2 dx_1 dx_2 \quad (\text{IV.55})$$

Soit par conséquent :

$$|F_0| = \iint_{\Omega} \left(2\Lambda\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma_j \frac{\partial p_0}{\partial x_j} \right) dx_1 dx_2 \quad ; j = 1,2 \quad (\text{IV.56})$$

où :

$$\alpha = \iint_Y \frac{1 + 0,0012 \mathfrak{R}_h^{0,94}}{h} dy_1 dy_2 \quad ; \quad \beta = \iint_Y h \frac{\partial v_3}{\partial y_1} dy_1 dy_2 \quad ; \quad \gamma_1 = \iint_Y h \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right) dy_1 dy_2 \quad ;$$

$$\gamma_2 = \iint_Y h \frac{\partial v_2}{\partial y_1} dy_1 dy_2$$

IV.4.4 Portance hydrodynamique homogénéisée

IV.4.4 Portance hydrodynamique homogénéisée

La portance homogénéisée du contact ou la capacité de charge se calcule par l'intégration de la pression sur la surface du contact :

$$W_\varepsilon = \iint_{\Omega} p_\varepsilon dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} (p_0 + \varepsilon p_1) dx_1 dx_2 \quad (\text{IV.57})$$

Si on fait tendre $\varepsilon \rightarrow 0$, on trouve la charge homogénéisée :

$$W_0 = \iint_{\Omega} p_0 dx_1 dx_2 \quad (\text{IV.58})$$

IV.5 Algorithme d'homogénéisation

L'algorithme ou le processus d'homogénéisation comprend les étapes suivantes :

Etape 1 :

Résolution numérique du problème local gouverné par le système d'équations (IV.10) à (IV.12) ou (IV.32) à (IV.34) dont les inconnues sont des fonctions périodiques $v_1(x, y)$ et $v_3(x, y)$.

Etape 2 :

Calcul des coefficients des matrices $A(\mathbf{x})$ et $\theta(\mathbf{x})$ définies par les expressions (IV.17) ou (IV.39) à l'aide d'une intégration numérique.

Etape 3 :

Résolution numérique du problème global régi par l'équation homogénéisée (IV.18) ou (IV.40) dont l'inconnue est la pression homogénéisée p_0 .

Il est utile de noter que les étapes 1 et 2 de l'algorithme d'homogénéisation s'appliquent à chaque point $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2 \rangle$ du domaine global $\Omega = (0, 2\pi R) \times (-L/2, L/2)$.

On présente dans la figure(IV.4) le schéma de résolution mis en place pour la résolution du problème homogénéisé :

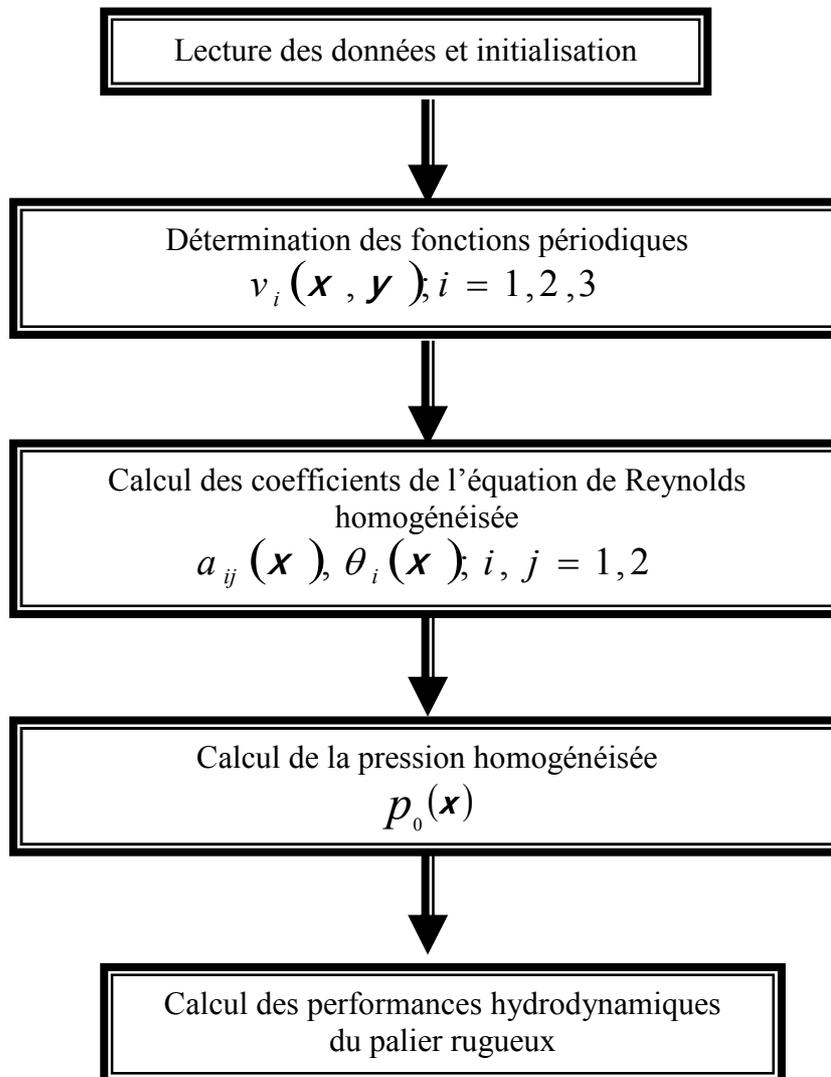


Fig. IV.4 Schéma de résolution du problème de lubrification par la méthode d'homogénéisation.

IV.6 Conclusion

L'application du processus d'homogénéisation aux équations de Reynolds laminaire et turbulente par l'introduction d'un développement asymptotique multi-échelle de la pression a conduit à une cascade d'équations aux dérivées partielles décrivant deux problèmes : un problème local (échelle microscopique) gouverné par trois EDPs et un problème global régi par une EDP dont l'inconnue est la pression homogénéisée p_0 . La connaissance de celle-ci permettra de calculer les caractéristiques hydrodynamiques homogénéisées du contact établies dans ce chapitre.

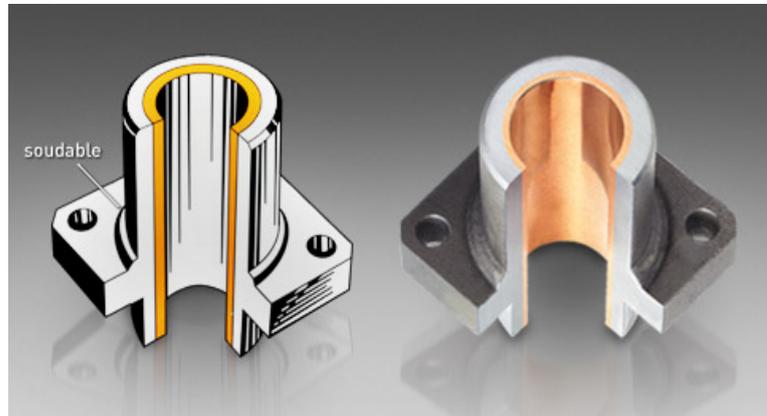
La validation de la technique d'homogénéisation sera effectuée dans le chapitre suivant en comparant les solutions obtenues à partir de cette technique avec celles issues de l'application de la méthode directe classique dans le cas d'un palier cylindrique de longueur finie (écoulement 2-D) pour les deux régimes d'écoulement laminaire et turbulent.

CHAPITRE V

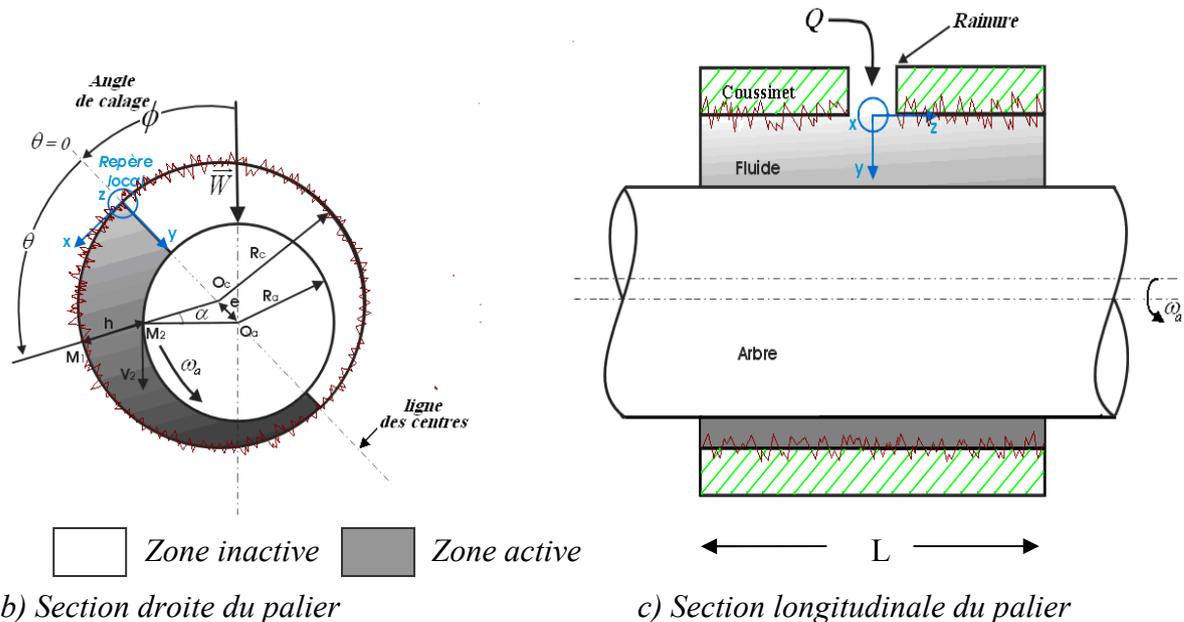
Comparaison entre les solutions directes et homogénéisées d'un palier hydrodynamique rugueux en régimes laminaire et turbulent

V.1 Description d'un palier hydrodynamique

Les paliers cylindriques ont pour objectif principal de supporter une charge radiale. Ces organes de support et de guidage en rotation sont de plus en plus utilisés dans les machines tournantes et alternatives. Ils sont constitués de trois parties : le coussinet (géométrie fixe), l'arbre en rotation et le film lubrifiant (troisième corps) qui les sépare (figure V.1).



a) Photographie d'un palier cylindrique



b) Section droite du palier

c) Section longitudinale du palier

Fig. V.1. Représentation d'un palier cylindrique.

La configuration géométrique d'un palier est définie grâce à trois grandeurs qui sont : sa longueur L , son diamètre D , ou son rayon R et le jeu radial C . Ce dernier paramètre représente le jeu qui existe entre l'arbre et le coussinet lorsque ces deux éléments sont coaxiaux ; il est déterminé par : $C = R_c - R_a$, R_c étant le rayon du coussinet et R_a le rayon de l'arbre géométriquement, un palier cylindrique est caractérisé par trois grandeurs:

- ◆ le jeu radial C ;
- ◆ le jeu relatif $\frac{C}{R}$;
- ◆ le rapport $\frac{L}{D}$.

Sous l'application d'une charge, les centres du coussinet et de l'arbre ne coïncident plus et il existe un coin convergent-divergent dans le film. La figure V.2 présente les trois phases que l'on observe lors de la mise en marche sous charge d'un palier lisse.

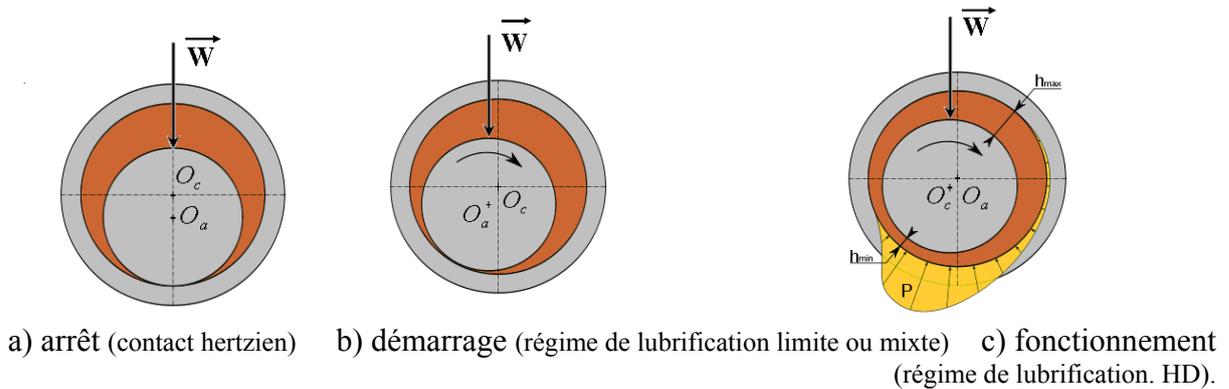


Fig. V.2. Les positions de l'arbre observées lors de la mise en marche d'un palier lisse.

A l'arrêt (figure V.2.a), l'arbre et le coussinet sont en contact, la génératrice commune est opposée à la charge et la distance $O_a O_c$ est égale au jeu radial C . Au démarrage (figure V.2.b), l'arbre roule en glissant à l'intérieur du coussinet, le régime de lubrification est dit mixte. Le lubrifiant est entraîné dans l'espace convergent par la rotation de l'arbre, et dès que la vitesse de rotation devient suffisante, il y a création d'un champ de pression hydrodynamique qui s'oppose à la charge et qui l'équilibre (fig. V.2.c). Pour une vitesse de rotation stable et une charge $|\vec{W}|$ constante, le centre de l'arbre O_a occupe une position fixe à l'intérieur du coussinet définie par les coordonnées polaires (ε_0, ϕ_0) .

Si l'on rapporte l'ensemble des forces exercées sur l'arbre au centre O_a du palier, on obtient la capacité de charge \vec{F} du palier.

Lorsque le palier fonctionne sous des conditions normales, c'est-à-dire lorsqu'il est aligné (i.e. les axes de l'arbre et du coussinet sont parallèles), la géométrie du contact est alors définie par l'excentricité e (distance entre les centres de l'arbre O_a et du coussinet O_c) et l'angle de calage ϕ (angle entre la ligne des centres et la direction de la charge) figure V.1.

Dans ce chapitre, on se limite au régime hydrodynamique pur et on suppose que l'écoulement du fluide à travers le palier est permanent et isotherme.

V.2. Equations géométriques du film

V.2.1. Cas du palier lisse

Dans le cas d'un palier cylindrique lisse, l'équation géométrique du film s'écrit :

$$h_0 = C(1 + \varepsilon_0 \cos \theta) \quad (\text{V.1})$$

où l'excentricité relative $\varepsilon_0 = \frac{e}{C}$ varie de 0 à 1 et $\theta = \frac{x_1}{R}$

V.2.1.2. Cas du palier rugueux

La prise en considération de la rugosité de la surface du coussinet conduit à la modification de la géométrie locale du film. Dans le cas d'une rugosité isotrope, l'équation géométrique du film devient :

$$h = h_0 + h_1(\theta, x_2) \quad (\text{V.2})$$

avec

$$h_1 = \alpha \left(\sin(n_p \theta) + \sin\left(\frac{2\pi n_p x_2}{L}\right) \right), \quad \alpha \text{ étant l'amplitude de la rugosité et } n_p \text{ le nombre de}$$

rugosités ou de périodes.

V.2.2. Equation de Reynolds turbulente pour un palier cylindrique

Les rayons R_a et R_c étant très voisins, on peut négliger la courbure du film et développer l'arbre et l'assimiler à un plan confondu avec le référentiel (o, x_1, x_2) (figure V.3).

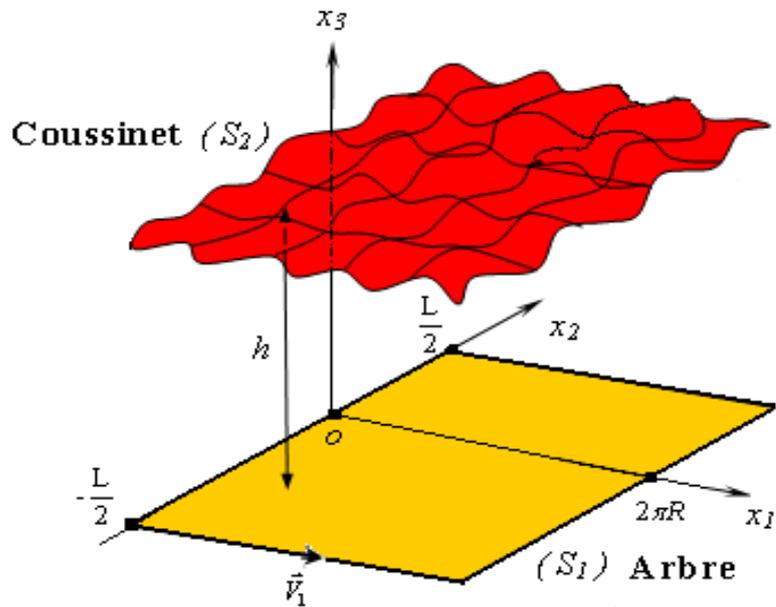


Fig. V.3. Palier développé.

Les conditions cinématiques relatives aux 2 surfaces du contact sont représentées sur la Figure V.4.

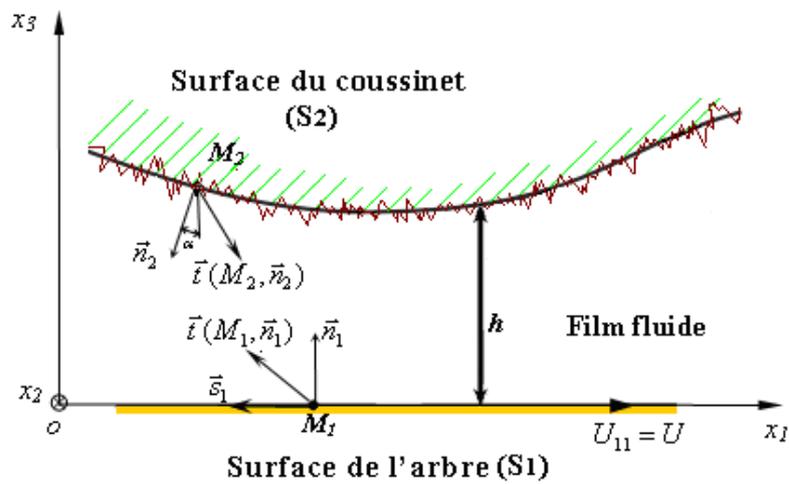


Fig. V.4. Section droite du palier développé.

En coordonnées cartésiennes, l'équation de Reynolds (III.26) peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(h^3 G_{x_1} \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(h^3 G_{x_2} \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial x_2} \right) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad (\text{V.3})$$

avec $\Lambda = \frac{1}{2} \mu U$; $U = \omega R$ (vitesse linéaire de l'arbre) (fig.V.4).

V.3. Solutions directe et homogénéisée

Les solutions directes et homogénéisées sont recherchées numériquement en résolvant l'équation de Reynolds turbulente (V.3) et l'équation de Reynolds homogénéisée (IV) par la méthode des différences finies centrées figure V.5. La discrétisation de ces équations conduit à la résolution de systèmes algébriques par la méthode itérative de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation. L'application de cet algorithme pose le problème de détermination de la valeur optimale du coefficient de sur-relaxation dont la valeur entre 1 et 2 ; celui-ci permet au processus de converger rapidement vers la solution en un nombre minimal d'itérations ou un temps CPU minimal. Nous avons déterminé cette valeur par expérimentation numérique. Les différentes simulations numériques effectuées nous ont permises de constater que la valeur optimale du facteur de relaxation dépend sensiblement des caractéristiques du maillage (nombre de points de discrétisation) et des conditions de fonctionnement du palier.

Le choix de l'algorithme de Gauss-Seidel est justifié par le fait qu'il permette de prendre en considération le phénomène de cavitation (rupture du film) se produisant dans la région divergente du palier, le système d'équations peut être aussi résolu à l'aide de la méthode itérative du gradient conjugué dont le principe est présenté dans l'[Annex A].

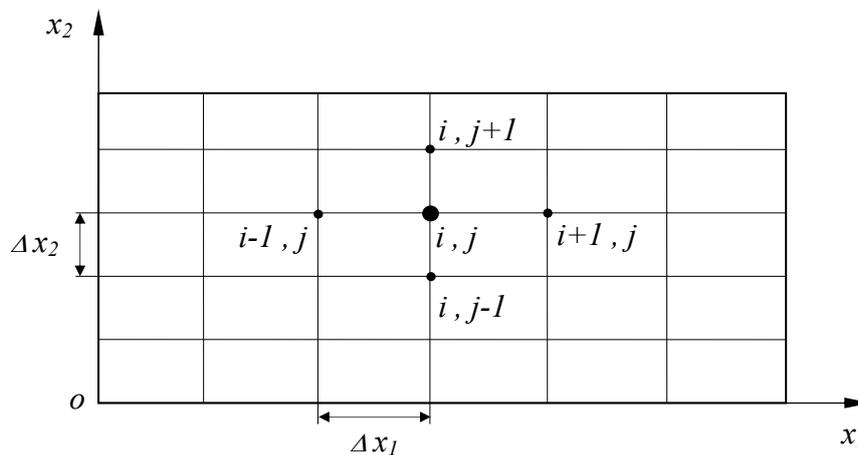


Fig. V.5 Discrétisation du film.

V.4 Comparaison des solutions directes et homogénéisées

Deux programmes de calcul ont été élaborés pour simuler le comportement du palier en régime laminaire ou turbulent en se basant sur le concept des deux méthodes d'analyse développées (directe et homogénéisation). Les données de cette étude sont reportées dans le tableau V.1.

Tableau V. 1 Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement du palier

Paramètres	Symboles	Valeurs	Unités
Longueur du palier	L	0.050	m
Rayon du palier	R	0.025	m
Jeu radial du palier	C	50.	μm
Excentricité relative	ε_0	0.5	-
Amplitude de rugosité	α	(0.0-0.5)	μm
Rugosité RMS	RMS	$\alpha \sqrt{2}$	μm
vitesse de rotation de l'arbre en laminaire	ω	3000	rpm
Vitesse de rotation de l'arbre en turbulent	ω	30000	rpm
Viscosité dynamique du lubrifiant	μ	0.005	$Pa.s$
masse volumique du fluide	ρ_0	900	$[kg/m^3]$

Les solutions directes et homogénéisées sont obtenues pour diverses valeurs de l'amplitude relative de rugosité ($\tilde{\alpha} = 0.0, 0.1, 0.15$ et 0.2) et du paramètre ε qui correspond à l'inverse du nombre de périodes ou de rugosités dont les valeurs sont $n_p = 10, 40, 60$. Notons que pour le cas d'un palier lisse, $\tilde{\alpha} = 0.0$

Tous les calculs sont effectués pour une valeur de l'excentricité relative $\varepsilon_0 = 0.50$.

Les caractéristiques des maillages utilisées pour la discrétisation spatiale des différentes équations différentielles sont indiquées dans le tableau V.2.

Tableau V.2 Caractéristiques des maillages par différences finies.

Méthodes d'analyse	EDPs gouvernant le problème	Nombre de mailles
Déterministe (directe)	Equation de Reynolds turbulente	1000 × 1000
Homogénéisation	Equations locales	40 × 40
	Equation globale	80 × 80

Les tableaux V.3 à V.6 représentent les répartitions de pression hydrodynamique (2-D) et (3-D) obtenues dans le cas du palier lisse et du palier rugueux pour les deux régimes d'écoulement laminaire et turbulent. D'après ces illustrations, nous observons clairement que les solutions directe et homogénéisée obtenues dans le cas lisse sont confondues ce qui nous permet de valider le programme de calcul basé sur l'homogénéisation de l'équation de Reynolds en régimes laminaire et turbulent. Dans le cas rugueux, nous remarquons que la solution directe obtenue pour une amplitude de rugosité relativement faible $\tilde{\alpha} = 0.1$ converge vers la solution homogénéisée pour un nombre de rugosités ou de périodes $n_p \geq 40$. Cependant, pour une amplitude relative plus grande, i.e. $\tilde{\alpha} = 0.2$, la convergence de la solution directe ne peut être obtenue que pour un nombre important de rugosités; c'est à dire $n_p > 60$.

Tableau V.3 Représentation (2-D) des solutions directes et homogénéisées dans la section médiane du palier en régimes laminaire et turbulent, $\varepsilon_0=0.5$

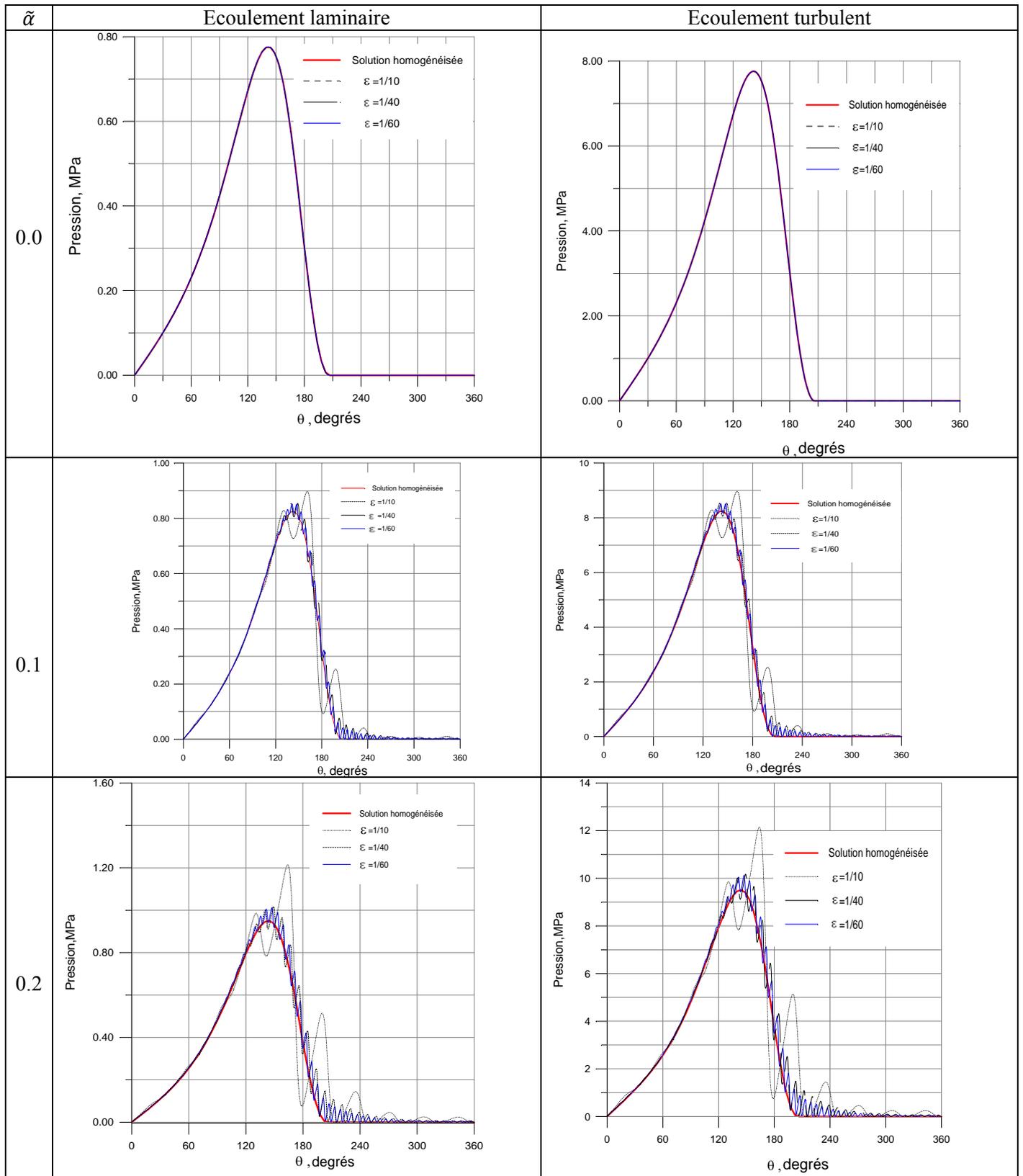


Tableau V.4 Représentation (3-D)des solutions directes et homogénéisées dans le cas lisse en régime laminaire et turbulent

pour $\tilde{\alpha}=0.00$; $\varepsilon_0=0.5$

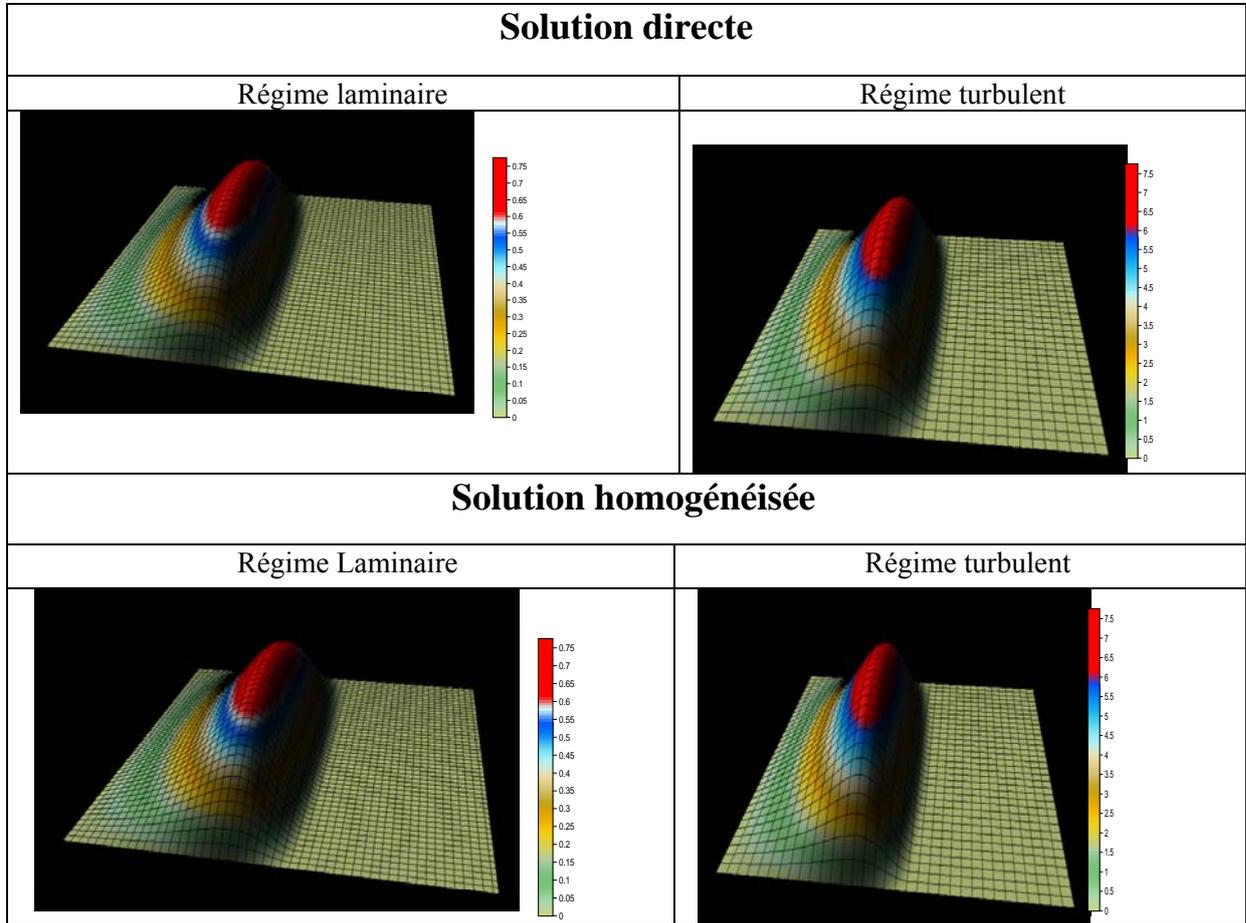


Tableau V.5 Représentation en (3-D) des solutions directes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité isotrope en régime laminaire et turbulent

pour $\tilde{\alpha}=0.1$; $\varepsilon_0=0.5$

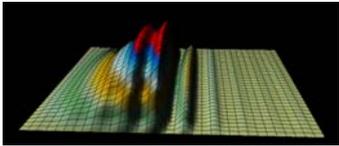
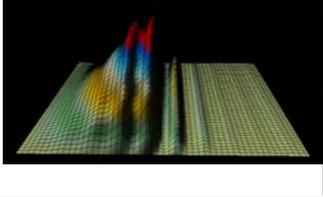
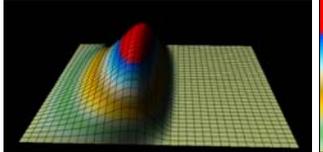
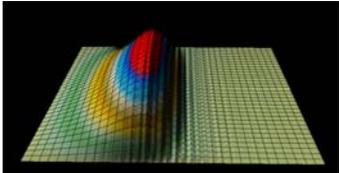
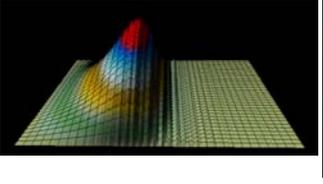
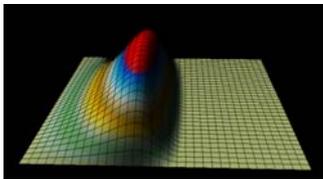
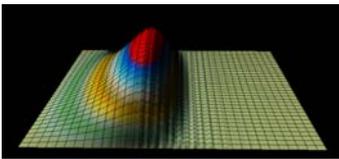
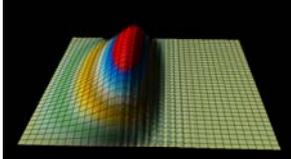
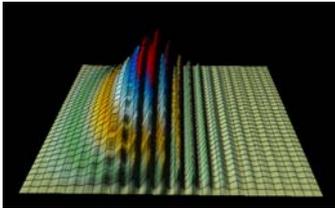
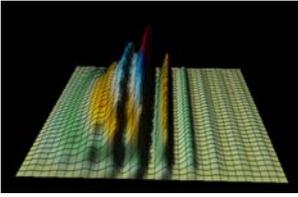
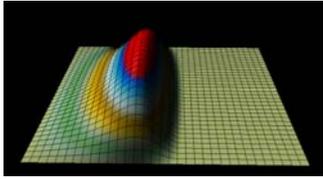
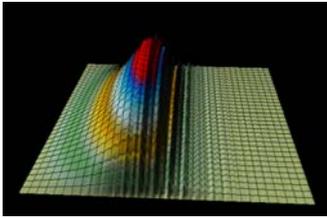
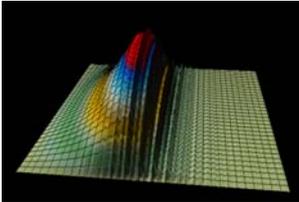
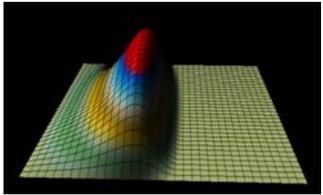
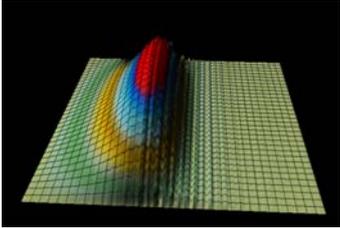
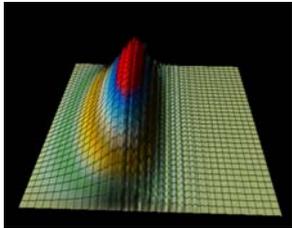
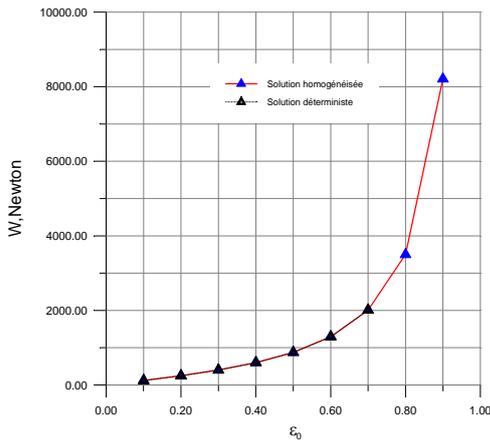
ε	Solution déterministe		Solution homogénéisée
	Régime Laminaire	Régime turbulent	
1/10			 Régime Laminaire
1/40			 Régime turbulent
1/60			

Tableau V.6 Représentation (3-D) des solutions directes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité isotrope en régime laminaire et turbulent

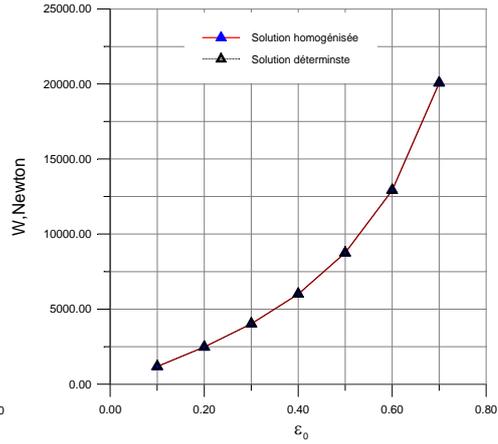
pour $\tilde{\alpha}=0.2$; $\varepsilon_0=0.5$

ε	Solution déterministe		Solution homogénéisée
	Régime Laminaire	Régime turbulent	
1/10			 Régime Laminaire
1/40			 Régime turbulent
1/60			

Les figures V.6 à V.8 montrent clairement que lorsque le nombre de périodes est suffisamment grand $n_p = 100$, les portances hydrodynamiques directes et homogénéisées, calculées à partir de l'intégration des pressions directes et homogénéisées sur la surface du palier, convergent bien même pour des grandes amplitudes relatives de rugosité.

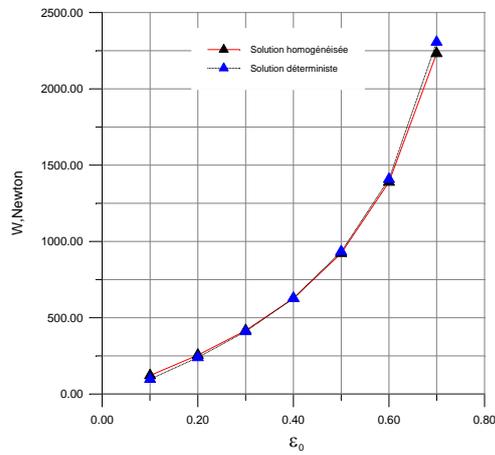


a) Régime laminaire

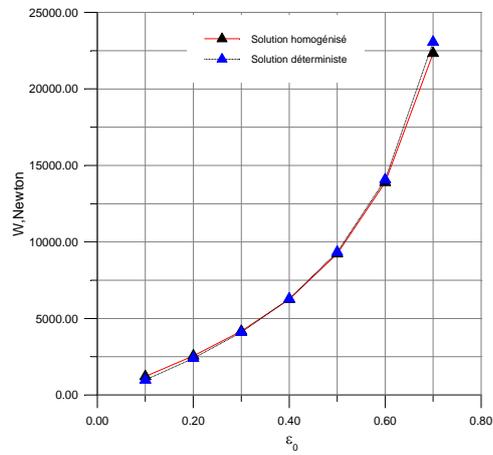


b) Régime turbulent

Fig. V.6 Comparaison des capacités de charge homogénéisées et directes dans le cas du palier lisse, ($\tilde{\alpha} = 0.0, \varepsilon_0 = 0.50$)

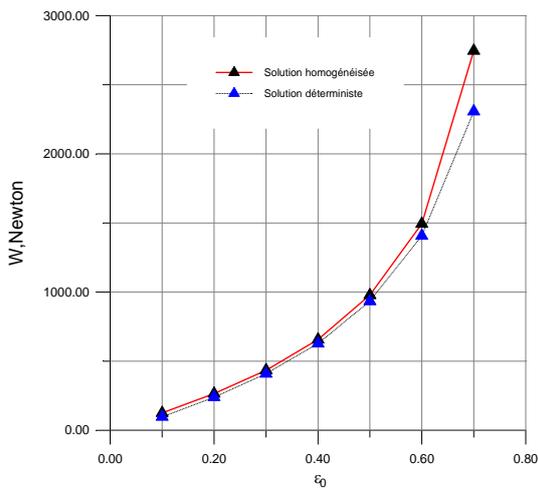


a) Régime laminaire

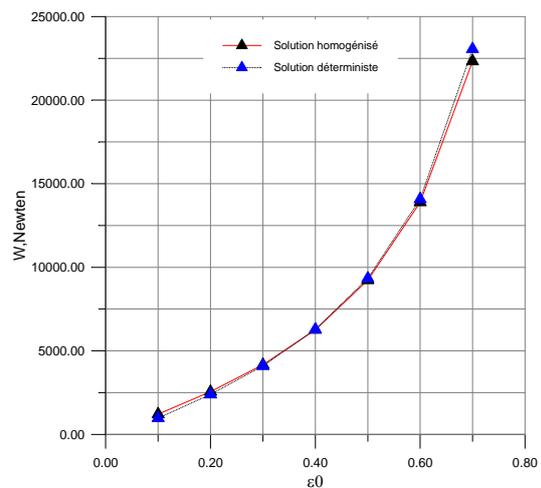


b) Régime turbulent

Fig. V.7 Comparaison des capacités de charge homogénéisée et directe dans le cas du palier rugueux, ($\tilde{\alpha} = 0.1, \varepsilon_0 = 0.50$)



a) Régime laminaire



b) Régime turbulent

Fig. V.8 Comparaison des capacités de charge homogénéisée et directe dans le cas du palier rugueux, ($\tilde{\alpha} = 0.15, \varepsilon_0 = 0.50$)

V.5 Application de la méthode d'homogénéisation à l'étude des effets de la rugosité et de la turbulence sur la pression et la capacité de charge d'un palier

Un programme de calcul a été élaboré en se basant sur l'algorithme d'homogénéisation exposé dans le chapitre précédent en vue de simuler le comportement d'un palier hydrodynamique rugueux en régime laminaire ou turbulent. Les données de cette étude sont reportées dans le tableau V.1.

La figure V.9 représente les profils de pressions homogénéisées calculées en régime turbulent pour trois valeurs de l'amplitude relative des rugosités. Nous observons que :

- les courbes de pression gardent la même allure pour les trois valeurs de l'amplitude
- la pression maximale augmente avec l'amplitude de rugosité.

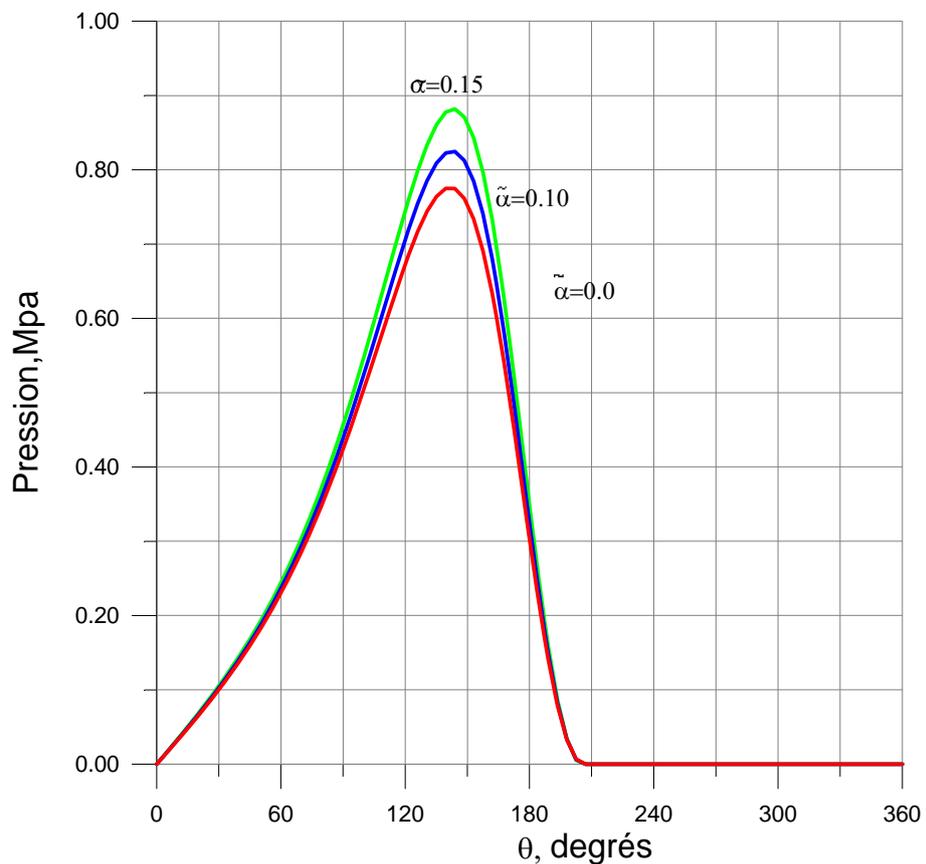


Fig. V.9 Effets de l'amplitude de la rugosité sur le profil de pression homogénéisé en régime turbulent

Les figures V.10 et V.11 mettent clairement en évidence les effets non négligeables de la turbulence sur le profil de pression ainsi que la capacité de charge du palier. En effet, pour une excentricité relative fixée, la portance calculée en régime turbulent est largement supérieure à celle calculée en laminaire aussi bien dans le cas lisse que rugueux. Nous pouvons conclure que la turbulence a un effet positif vis-à-vis de la capacité de charge du palier et que l'effet de l'amplitude de la rugosité sur le profil de pression et la charge n'est pas appréciable.

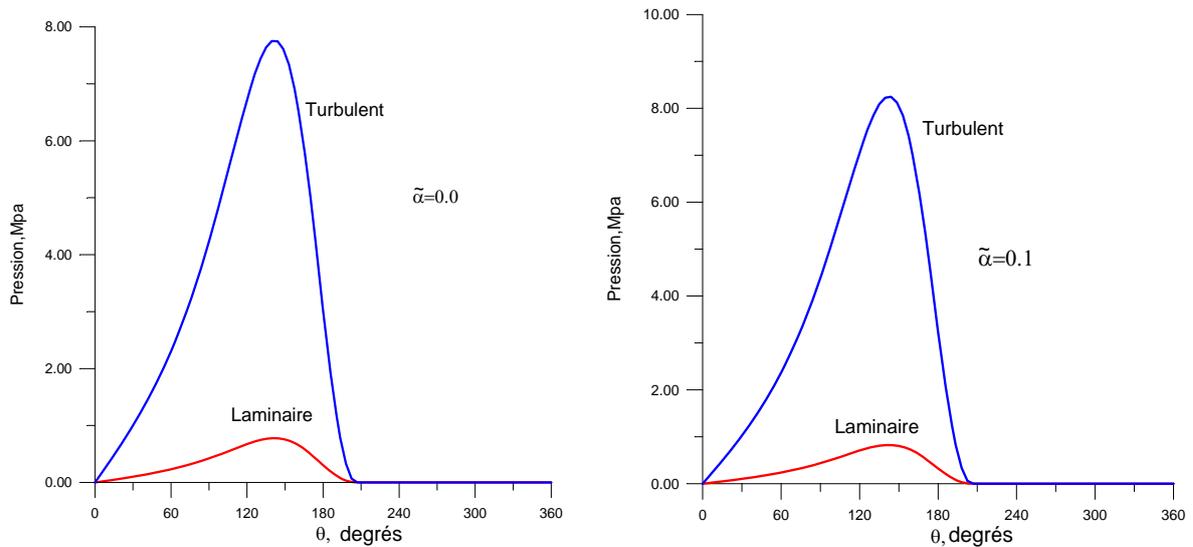


Fig. V.10 Comparaison des profils de pression homogénéisée calculés en régimes laminaire et turbulent pour $\varepsilon_0 = 0.5$ et différentes valeurs de $\tilde{\alpha}$.

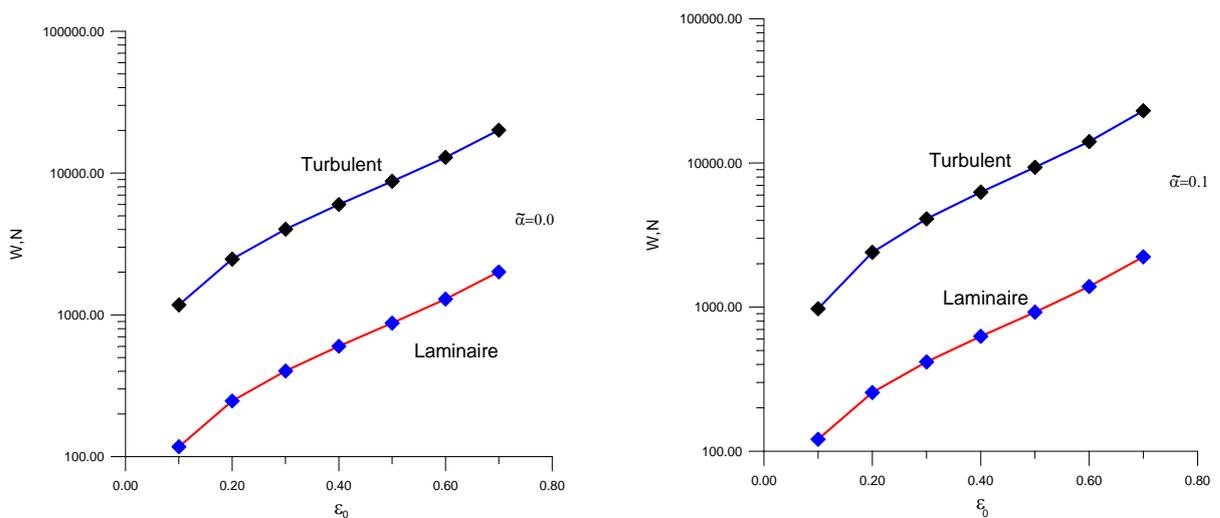


Fig. V.11 Comparaison des portances homogénéisées calculées en régimes laminaire et turbulent pour $\varepsilon_0 = 0.5$ et différentes valeurs de $\tilde{\alpha}$.

V.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la convergence des solutions directes obtenues par la résolution numérique directe des équations de Reynolds laminaire et turbulente vers les solutions homogénéisées p_0 pour une forme de rugosité isotrope. La comparaison des solutions obtenues représentées en (2-D) et en (3-D) par les méthodes d'analyse directe et d'homogénéisation a permis d'affirmer que la méthode d'homogénéisée est efficace aussi bien pour le cas laminaire que turbulent. Il a été trouvé que pour des amplitudes relatives de rugosité faibles et un nombre important de rugosités, la solution directe tend vers la solution homogénéisée p_0 .

Afin d'améliorer davantage l'efficacité de la méthode d'homogénéisation, il est nécessaire d'effectuer une étude de sensibilité des maillages (cellule unitaire (Y) domaine global (Ω)) pour optimiser le nombre de points de discrétisation spatiale.

L'application de cette méthode à l'étude du comportement d'un palier a permis de mettre en évidence les effets non négligeables de l'amplitude de rugosité sur le pic de pression. D'autre part, la prise en considération de la turbulence entraîne une augmentation significative du pic de pression et de la portance aussi bien dans le cas lisse que rugueux.

Conclusion générale & Perspectives

L'étude entreprise dans ce mémoire de Magister visait à développer un modèle de simulation numérique basé sur l'application du processus d'homogénéisation à l'équation de Reynolds turbulente considérée comme l'équation de base de la lubrification hydrodynamique. Ce modèle permet de prendre en considération la géométrie locale du contact (rugosités) ainsi que le phénomène de turbulence rencontré dans les paliers tournant à grande vitesse ou lubrifiés par des fluides de faible viscosité.

Parmi les méthodes d'analyse des contacts lubrifiés rugueux proposées dans la littérature technique, notre choix s'est porté sur la technique d'homogénéisation car cette technique est rigoureuse et la mieux adaptée dans le cas des contacts rugueux dont la distribution des rugosités est périodique. D'autre part, par comparaison à la méthode classique directe, la technique d'homogénéisation ne nécessite pas de maillages très fins ; c'est-à-dire des moyens de calcul importants pour prendre en compte l'effet de la rugosité.

L'homogénéisation de l'équation de Reynolds dans le cas laminaire et turbulent, basée sur un développement asymptotique multi-échelle de la pression, a conduit à l'écriture d'un système de quatre équations différentielles partielles gouvernant deux types de problème ; un problème local (échelle microscopique) et un autre global (échelle macroscopique).

La comparaison des solutions obtenues par les méthodes directe et d'homogénéisation a permis de conclure que la méthode d'homogénéisation est efficace du point de vue espace mémoire et temps de calcul. En effet, pour des amplitudes relativement faibles et un nombre important de rugosités, la solution directe obtenue par la résolution directe de l'équation de Reynolds tend vers la solution homogénéisée.

L'étude paramétrique effectuée à l'aide de la méthode d'homogénéisation a permis de mettre en évidence les effets non négligeables de l'amplitude relative des rugosités sur le pic de pression. Ce dernier augmentait avec l'amplitude. D'autre part, la prise en considération de la turbulence affecte sensiblement le profil de pression et la portance. Il a été trouvé que pour une valeur de l'excentricité, la portance homogénéisée calculée en régime turbulent est nettement plus grande que celle obtenue en laminaire.

Les prolongements possibles de cette étude sont :

- ✓ la prise en considération de la rugosité de la surface mobile (arbre),
- ✓ la prise en compte des effets non newtoniens des lubrifiants en écoulement turbulent.

Références bibliographiques

- [1] Abbott E. J., Firestone F. A., 1933, "Specifying Surface Quality: A Method Based on Accurate Measurement and Comparison", *Mechanical Engineering*, Vol. 55, pp. 569-572
- [2] Reynolds O. On the theory of lubrication and its application to M. Beauchamp Tower's experiments, *Phil. Trans. Roy. Soc. London, A* 177, 1886, 157-234
- [3] Tzeng S T, Saibel E., Surface roughness effect on slider lubrication, *ASLE Trans* 1967; vol. 10, 334
- [4] Marchenko V. A., Khruslov E. Ya. Homogenization of partial differential equations, Birkhäuser, Boston 2006
- [5] M. Jai. Homogenization and two-scale convergence of the compressible Reynolds lubrication equation modelling the flying characteristics of a rough magnetic head over a rough rigid-disk surface. *ASME Journal of Tribology*, 124, 327–335, 2002
- [6] G. Bayada, S. Ciuperca, M. Jai. Homogenization of variational equations and inequalities with small oscillating parameters: Application to the study of thin film unstationary lubrication flow. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 328, Série II b, 819–824, 2000.
- [7] G. C. Buscaglia, M. Jai. Homogenization of the generalized Reynolds equation for ultra-thin gas films and its resolution by FEM. *Journal of Tribology*, 126(3), 547–552, 2004
- [8] M. Kane, B. Bou-Said. Comparison of homogenization and direct techniques for the treatment of roughness in incompressible lubrication. *Journal of Tribology*, 126(4), 733–737, 2004
- [9] Ingel. Ryhmng. dynamique des fluid, Presses Polytechnique et Universitaire
- ROMONDES deuxième édition 1991
- [10] Constantinescu V.N. "on turbulent lubrication" *Proc. Inst. Mech. Eng. Vol* 173, n°38 (1959).
- [11] Constantinescu V.N. "Theory of, Turbulent Lubrication" *proceeding on lubrication and wear, Houston, symposium* 1963 (1965)
- [12] Constantinescu V.N. "calcul des paliers lisses fonctionnant en régime turbulent" *Revue de mécanique Appliquée, Tom* 1, n°6, Acad.R.P.R.(1961).
- [13] Constantinescu V.N. "Sur la lubrification non permanente en régime turbulent" *Revue de Mécanique Appliquée, Tom* IV, n°1, Acad.R.P.R.(1959).
- [14] Chou Y.T. et Saible E. "The Effect of Turbulence on Slider-bearing lubrication "

Trans A.S.M.E, Paper n°58 A 30 (1957).

[15] Arwas E.B. Sternlicht B. et Wernick R.J. "Analysis of Plain cylindrical Journal Bearings in Turbulent Regime" Trans. A.S.M.E, Paper n°63, Lub 11(1963).

[16] Saibel E. et Cameron A. "Turbulence in Lubrication" Principales of Lubrication. longmans(1966).

[17] Szeri A. et Powers D. "Full Journal Bearings in Turbulent and Laminar Regimes" journal MECH. Eng. sciences Vol 9, n°3 (1967).

[18] MC Grew J.M. et Mc HUGH J.D. "Analysis and test of the Screw Seal in laminar and turbulent Operation" Tans .A.S.M.E, serie D, n°1 (1965).

[19] Kettleborough C.F. "Turbulent and Inertia Flow in Slider Bearings" ASLE, trans., vol 8 (1965).

[20] Schlichting h. "boundary-layer theory" mc grw hill, new york (1968)

[21] tipei n. et Constantinescu V .N. "influence of the law of variation of the mixing length on the turbulent motion in the lubricant -layer" revue de mécanique appliqué, tom v

N°6, acad.r.p.r.(1960)

[22] Constantinescu V .N. et galetuse s. "study on the turbulent lubrication by using the mixing length hypothesis with a parabolic variation upon the normal to the film "rev.rom.

Sci.techn.-Mech.Appl., tome 11, n°2(1966)

[23] Constantinescu V .N. "on the improvement of the turbulent lubrication theory by using the mixing-length hypothesis" rev.rom.sci.techn.-mech.appl., tome 10, n°2(1965).

[24] Constantinescu V .N. "consideratii asupra lubrificatiei tridimensionale in regim turbulent" studii si cercetari de mecanica aplicata, tom 4 , n°10, acad R.P.R.(1959)

[25] Constantinescu V .N. "analysis of bearings in turbulent regime" trans.a.s.m.e., paper n°61, lub 5 (1961)

[26] NG C.W. "fluid dynamic foundation of turbulent lubrication theory" ASLE. Trans. n°7(1964)

[27] J.Frene, contribution à l'étude des régimes de transition dans les paliers lisses, thèse de docteur-ingenieur, insa-lyon, 1970

[28] NG C.W. et pan C.H.T. "a linearized lubrication theory" trans.A.S.M.E, serie d, n°3(1965)

[29] Constantinescu V .N et Galetuse S. "on the possibilities of using universal velocity laws for the study of turbulent lubrication" rev.rom.sci.techn.mech.appl., tome 12, n° (1967)

[30] Elrod H.G. et NG C.W."A Theory for turbulent fluid films and its application to Bearing"

Trans.A.S.M.E.Serie F,n°3(1967)

[31] Constantinescu V .N et Galetuse S,on the determination of friction forces in turbulent lubrication,ASME transaction,8,367-380,1965.

[32] Constantinescu V .N,Basic relation ship in Turbulent Lubrication and their extension to include thermal effects.Journal of ILubrication Technology.Transctions of

The ASME April 1973,147-154.

[33] Constantinescu V .N ,on the influence of inertia forces in hydrostatique turbulent lubrication,Rev Rom.

Sci. Tech.Mec.Appl.,Bucarest,18,n°2,283-310,1973.

[34].Frêne J. Régime d'écoulement non laminaire en films minces-application aux paliers lisses thèse de Docteur és Sciences physiques,Université claude-Bernard Lyon,octobre 1975

[35] Taylor G.I. ''Stability of a viscous Liquid Contained Between Two Rotating Cylinders''phil.Trans.A 223 (1923).

[36] M. Kane, B. Bou-Said. A study of roughness and non-newtonian effects in lubricated contacts. ASME Journal of Tribology, 127, 575–581, 2005.

REFERENCES COMPLEMENTAIRES

A.Z.Szeri,tribology friction-lubrication,and wear,Hewisphere publication cororation,MC Graw-Hill Booh Company.1980.

J. M. Georges, Frottement, usure et lubrification, 2000, CNRS Editions, Eyrolles, ISBN 2-212-05823-3.

.H. Yelle, Notes de cours de transmission de puissance, 2003, Ecole Polytechnique de Montréal, Canada

L. Goirand, Notes de cours de tribologie, 1984, Institut National de Génie Mécanique (INGM) de Boumerdès.

Christophe Minet, Lubrification mixte dans les étanchéités dynamiques application aux garnitures mécaniques d'étanchéité nouvelle thèse de Doctorat, Université de Poitiers, 10 Juillet 2009

Mouassa Ahcene, Contribution à l'étude de l'influence des défauts de forme et de rugosité.des surfaces sur les performances des contacts lubrifiés sévères .thèse de Doctorat, Université 08 mai 1945 Guelma, 2010.

Nomenclature

D_i	:Constantes d'intégration non dimensionnées.
G_x, G_z	:fonction de turbulence introduites par Ng et Pan
R, R_1, R_2	:Rayon du palier, de l'arbre, du coussinet
$R_h = \frac{\rho V h}{\mu}$:Nombre de Reynolds
u, v, w	:composantes des vitesses.
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$: composantes moyennes des vitesses.
u', v', w'	:composantes des fluctuations de vitesse
y^+	:Variable sans dimension.
ω	:vitesse angulaire.
$\varepsilon = \frac{e}{c}$:Excentricité relative.
μ	:viscosité dynamique.
ν	:viscosité cinématique
ρ	:Masse volumique.
τ	Contrainte de cisaillement à la paroi
τ_{XY}, τ_{ZY}	:Contraintes de cisaillement dans le film.
$\bar{\gamma}_i$:Composantes moyennes de l'accélération.
δ	Constante.
$T_c = \frac{\rho V_c c}{\mu} \sqrt{\frac{C}{R}}$:Nombre de Taylor critique.
$\bar{U}_i = \frac{u_i}{V}$: composantes ,sans dimension,de la vitesse
$V = \omega R$:vitesse linéaire de l'arbre en rotation.
w	:charge appliquée au palier.
$Y = \frac{x_2}{h}$:Variable sans dimension.
C_i	:Constantes d'intégration.

e	: Exentricité
h	:Epaisseur du film
l	:longueur de mélange.
T	:variable de temps.
u_i	composantes des vitesses
\bar{u}_i	composantes moyennes des vitesses
u'_i	composantes des fluctuations de vitesses
C_f	nombre de frottement
F	Force de frottement, (N)
h_0	épaisseur du film du contact parfait, (m)
h_1	amplitude des rugosités, (m)
h	épaisseur du film lubrifiant, $h = h_0 + h_1$, (m)
h_ε	épaisseur déterministe du film lubrifiant, (m)
n_p	nombre de périodes ou de rugosités, $n_p = 1/\varepsilon$
p	pression dans le film lubrifiant, (Pa)
p_0	pression, solution homogénéisée, (Pa)
p_ε	pression, solution déterministe, (Pa)
\bar{Q}	débit de fuite moyen, $m^3 \cdot s^{-1}$
U	vitesse de déplacement de la glissière, $m \cdot s^{-1}$
u_1, u_2	composantes du champ de vitesse de l'écoulement suivant x_1 et x_2 , $m \cdot s^{-1}$
\bar{u}_1, \bar{u}_2	vitesse moyennes de l'écoulement suivant x_1 et x_2 , $m \cdot s^{-1}$
W	portance hydrodynamique, (N)
\mathbf{x}	coordonnées d'espace globales, $\mathbf{x} = \langle x_1 \quad x_2 \rangle$
\mathbf{y}	coordonnées d'espace locales, $\mathbf{y} = \langle y_1 \quad y_2 \rangle$

Y	cellule unitaire, $Y = (0, 1) \times (0, 1)$
α	amplitude des rugosités, (m)
$\tilde{\alpha}$	amplitude adimensionnée, $\tilde{\alpha} = \alpha/h_{\min}$
E	paramètre inversement proportionnel au nombre de périodes, $\varepsilon = 1/n_p$
Φ	fonction de dissipation visqueuse, $W.m^{-3}$
η	constante physique due à la présence des couples de contraintes, (N.s)
λ	longueur d'onde des rugosités, (m)
$\lambda_{x_1}, \lambda_{x_2}$	longueurs d'onde des rugosités suivant les directions x_1 et x_2 , (m)
Λ	constante, $\Lambda = 6\mu U$, Pa.m cas laminaire
Λ	constante, $\Lambda = \frac{1}{2}\mu V$ Pa.m cas turbulent
ρ	masse volumique du lubrifiant, $kg.m^{-3}$
μ	viscosité dynamique du lubrifiant, (Pa.s)
$\vec{\nabla}_x(\bullet)$	opérateur différentiel, $\vec{\nabla}_x(\bullet) = \left\langle \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_2} \right\rangle$
$\vec{\nabla}_y(\bullet)$	opérateur différentiel, $\vec{\nabla}_y(\bullet) = \left\langle \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_1} \quad \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_2} \right\rangle$
$\vec{\nabla}(\bullet)$	gradient de la fonction (\bullet) , $\vec{\nabla}(\bullet) = \vec{\nabla}_x(\bullet) + \varepsilon^{-1}\vec{\nabla}_y(\bullet)$
$\vec{\nabla} \bullet$	opérateur de divergence

Abbreviations

EDPs : Equations aux dérivées partielles

RMS : Moyenne quadratique des écarts du profil de rugosité par rapport à la ligne moyenne de rugosité, notée aussi Rq ou σ .

SFDB : Squeeze Film Damper Bearing