

République Algérienne Démocratique & Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 08 Mai 1945 de Guelma
Département de Génie Mécanique
Ecole Doctorale Nationale de Mécanique de Construction «EDNMC»



Mémoire de magister

**DEVELOPPEMENT D'UN LOGICIEL POUR LE
CALCUL DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE
DES PONTS ROUTIERS**

Option : **Mécanique & Maintenance Industrielle**

Présenté et soutenu publiquement par : **GUEBAILIA Moussa**

Devant le jury composé de:

FATMI	Louendi	Professeur	Université de Guelma	Président
OUELAA	Nouredine	Professeur	Université de Guelma	Rapporteur
GUENFOUD	Salah	Professeur	Université de Guelma	Examineur
DJAMAA	Med Chérif	M.C.A.	Université de Guelma	Examineur
BEZAZI	Abderrezak	M.C.A.	Université de Guelma	Examineur

2010

R e m e r c i e m e n t s

Je tiens tout d'abord à remercier mon encadreur Nouredine OUELAA, Professeur au département de Génie Mécanique à l'Université de Suelma pour son aide scientifique et son assistance jusqu'à la fin de cette recherche, ainsi que pour les encouragements qu'il n'a cessé d'apporter à mes travaux durant cette période.

J'adresse aussi mes remerciements à Monsieur Louendi FATMI, Professeur au département de Mécanique à l'université de Suelma d'avoir accepté de présider mon jury de soutenance.

Je remercie Monsieur Salah GUENFOUD, Professeur au département de Mécanique à l'Université de Suelma d'avoir pris le soin d'examiner ce travail et me faire l'honneur de participer au jury.

Je remercie Monsieur Med Chérif DJAMAA, Maître de conférences au département de Mécanique à l'Université de Suelma d'avoir pris le soin d'examiner ce travail et me faire l'honneur de participer au jury.

Je remercie Monsieur Abderrezak BEZAZI, Maître de conférences au département de Mécanique à l'Université de Suelma d'avoir pris le soin d'examiner ce travail et me faire l'honneur de participer au jury.

Mes remerciements sont aussi tout particulièrement à l'ensemble des membres du laboratoire L.M.S. et du département de mécanique. Leur contribution a été essentielle dans la réalisation de ce travail.

Un grand merci à toute ma famille (mes parents, mon frère et mes sœurs) pour leur soutien constant dans l'avancement de mon travail. Ma petite famille (ma femme, mes deux filles et mon fils) pour avoir créé l'environnement meilleur pour réaliser mes tâches.

S O M M A I R E

Résumé

CHAPITRE I «Introduction et synthèse bibliographique»

1.1 Introduction	1
1.2 Synthèse bibliographique	2
1.3 Organisation du travail réalisé	8

CHAPITRE II : «Logiciel d'analyse des structures par éléments finis CLEF»

2.1. Introduction à Unix	10
2.2 Les différentes distributions Linux	11
2.3 Structure de CLEF	12
2.3.1 Maillage sous CLEF	15
2.3.1.1 Procédure réalisée pour le maillage	18
2.3.1.2 Exemple de maillage	20
2.3.2 Modèle de véhicule sous CLEF	21
2.3.2.1 Exemple de fichier véhicule	21
2.3.3 Méthode de résolution du système dynamique	23
2.3.3.1 Algorithme de résolution	23
2.4 Exemple de validation	24
2.4.1 Exemple 1	24
2.4.2 Exemple 2	28
2.5 Conclusion	32

CHAPITRE III: «Développement d'un logiciel interactif pour l'étude de l'interaction pont - véhicule»

3.1 Introduction	33
3.2 Hypothèses de modélisation	34
3.3 Modélisation du pont	34
3.4 Fréquences et modes propres	36
3.5. La structure du logiciel développé	41
3.5.1 Interfaces	42

3.5.2	Résolution au sens de la moyenne	44
3.5.3	Résolution au sens de la distribution	50
3.5.4	Exemple de validation [MAR99]	57
3.5.4.1	Fréquences propres du pont	59
3.5.4.1.1	Résultats au sens de la moyenne	59
3.5.4.1.2	Résultats au sens de la distribution	60
3.5.4.1.2	Identification des positions de x le long du pont permettant la détermination exacte des fréquences propres	64
3.5.4.2	Réponse dynamique du pont	67
3.5.4.2.1	Résolution au sens de la moyenne	67
3.5.4.2.2	Résolution au sens de la distribution	70
3.5.5	Exemple 'un pont isotrope à trois travées [MAR9]	72

CHAPITRE IV : «Comportement vibratoire d'un pont de chaussée à n travées»

4.1	Introduction	74
4.2	Détermination des fréquences et modes propres du pont par la résolution de l'équation du mouvement au sens de la distribution	74
4.3	Généralisation du logiciel développé pour n travées	77
4.3.1	Exemple pour un pont à 4 travées	78
4.3.2	Validation de la réponse dynamique du pont à 4 travées par Le logiciel CLEF	82
4.3.3	Comparaison entre la réponse dynamique d'un pont à 3 et 4 travées	83
4.3.4	Réponse dynamique d'un pont à 6 travées	74
	Conclusion générale	86
	Bibliographie	88
Annexe 1	«Détermination des nombres d'ondes k_i »	92
Annexe 2	«Schémas du modèle de véhicule»	95
Annexe 3	«Modélisation du profil de la chaussée»	101

Résumé

L'étude du comportement dynamique des ponts routiers sollicités par le passage des véhicules mobiles a fait l'objet de plusieurs recherches dans différentes disciplines. Notre travail est structuré en quatre parties:

La première partie concerne la mise en marche du logiciel CLEF, développé par un groupe de chercheurs multi disciplinaire Canadien sur la base des travaux de kamel Henchi basé sur la méthode des éléments finis et développé sous environnement Unix. Ce logiciel est destiné à la modélisation par éléments finis des ponts routiers lors du passage des véhicules. Comme la validation expérimentale des résultats obtenus par la modélisation mathématique du comportement dynamique du système pont-véhicule est difficile, nous avons choisi de valider les résultats obtenus par les chercheurs de notre laboratoire dans ce domaine avec ceux obtenus par le logiciel CLEF.

La deuxième partie consiste à développer un logiciel interactif en langage C++, permettant l'étude du comportement dynamique d'un pont routier sollicité par des véhicules mobiles basé sur la modélisation mathématique réalisée dans notre laboratoire, nous avons intégré dans le logiciel un résolveur graphique des équations de fréquences ce qui évite le recours à d'autres logiciels.

La troisième partie de notre travail, consiste à résoudre l'équation du mouvement couplée au sens de la distribution pour chaque valeur de x le long du pont. L'utilisation de cette méthode, permet d'éviter d'effectuer plusieurs intégrations et les résultats obtenus sont très proches des résultats obtenus numériquement par le logiciel ANSYS. Cette méthode est l'une des contributions principales de notre travail.

Finalement, dans la quatrième partie et afin de laisser à l'utilisateur du logiciel développé le choix du nombre de travées, nous avons intégré dans le logiciel la généralisation pour n travées. Le logiciel donne la possibilité du choix de la méthode de résolution de l'équation du mouvement du pont, soit au sens de la moyenne soit au sens de la distribution.

Mot clés : Comportement Dynamique, Pont routier multi travées, fréquences propres, Déformés propres, Résolution au sens de la moyenne, Résolution au sens de la distribution

Abstract

The study of the dynamic behavior of the road bridges solicited by the passage of the mobile vehicles was the several research object in various disciplines. Our work is structured into four parts:

The first part relates to use the CLEF software, developed by a group of Canadian multi disciplinary researchers on the basis of kamel Henchi' works based on the finite element method and developed under Unix environment. This software is intended for modeling by finite elements the road bridges when the vehicles interact with it. As the experimental validation of the results obtained by the mathematical modeling of the dynamic behavior of the system bridge-vehicle is difficult, we chose to validate the results obtained by the researchers of our laboratory in this field with those obtained by CLEF software.

The second part consists in developing an interactive software based on C++ language, allowing the study of the dynamic behavior of a road bridge solicited by mobile vehicles based on mathematical modeling carried out in our laboratory, we integrated in the software a graphic resolver of the frequencies' equation what avoids the recourse to other software.

The third part of our work, consists in solving the equation of the movement coupled within the meaning of the distribution for each value of x along the bridge. The use of this method, makes it possible to avoid carrying out several integrations and the results obtained are very close to the results obtained numerically by software ANSYS. This method is one of the principal contributions of our work.

Finally, in the fourth part and in order to leave the users of our developed software, the choice of the spans' number, we integrated in the software a generalization for n spans. The software gives the possibility to choice the resolution method of the movement equation of the bridge, either within the meaning of the average or within the meaning of the distribution.

Key words: Dynamic behavior, Road bridge multi spans, Eigen frequencies, Mode shape, Resolution within the meaning of the average, Resolution within the meaning of the distribution

ملخص

إن دراسة السلوك الديناميكي للحسور المتأثرة بعبور عربات متحركة كان و لا يزال موضوع الكثير من البحوث العلمية في العديد من التخصصات.

عملنا المقدم ينقسم إلى أربعة أجزاء:

الجزء الأول يهتم بكيفية استغلال البرنامج CLEF الذي تمت برمجته على أساس أبحاث كمال حنشي من طرف مجموعة باحثين كنديين على قاعدة طريقة العناصر المحدودة، برنامج CLEF يعمل داخل نظام UNIX. لصعوبة التحقق من النتائج المتوصل إليها من طرف باحثينا عن الطريق التجربة لجأنا لاستخدام CLEF بغرض تأكيد النتائج المتوصل إليها في هذا المجال.

في الجزء الثاني نهتم ببرمجة برنامج متفاعل بلغة C++ يسمح لنا بدراسة السلوك الديناميكي لجسر متأثر بعبور عربات سيارة على أساس النموذج الرياضي المنجز في مخبرنا. لقد أدرجنا حل المعادلات في البرنامج المنجز و بهذا تم الاستغناء عن اللجوء لبرامج أخرى خارج البرنامج المنجز.

في الجزء الثالث من العمل نهتم بحل معادلة الحركة في اتجاه التوزيع لكل X على كامل طول الجسر، وهذا العمل يعتبر إسهامنا الرئيسي. و باستعمال هذه الطريقة نتجنب القيام بإنجاز الكثير من التكاملات.

أما في الجزء الرابع و لجعل البرنامج أكثر فاعلية و لترك الاختيار لمستخدم البرنامج في عدد المسافات بين عارضتين، قمنا بإدراج التعميم لـ n مسافة بين عارضتين.

CHAPITRE I

INTRODUCTION ET SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1 Introduction :

Durant les années récentes, les transports ferroviaires et routiers, aussi bien pour les voyageurs que pour les marchandises, se sont beaucoup développés avec comme conséquence un trafic qui devient plus rapide et plus sûr. Des recherches ont été réalisées afin d'améliorer la vitesse des véhicules (trains) surtout dans les pays développés: le TGV en France, le Shinkansen au Japon, l'ICE en Allemand, l'X2000 en Suède, le Pendolino en Italie, le Thalys et l'EuroStar...etc. Des vitesses qui peuvent atteindre les 300Km/h en régime commercial et de 500Km/h en essai. [NGU 02]. La commercialisation du 1er train haute-vitesse a eu lieu en 1964 avec une vitesse de 210Km/h dans "The Japanese railways connecting Tokyo and Osaka".

L'interaction entre un pont et les véhicules traversant est un problème de dynamique non linéaire. La majorité des chercheurs s'intéressaient auparavant à la réponse d'impact du pont et non à la réponse des véhicules traversant. Pour le cas où seulement la réponse du pont est cherchée, les véhicules sont approximés par un nombre de charges mobiles. L'interaction dynamique entre un pont et un véhicule représente une discipline spéciale dans le domaine de la dynamique des structures [YAN 04].

Les structures destinées au transport sont soumises aux charges qui varient dans le temps et l'espace. En mécanique les charges peuvent être des charges mobiles (véhicules).

La prédiction de la réponse dynamique des ponts qui résulte du passage des charges vives le long des travées est un important problème dans le domaine de l'analyse et de la conception des ponts. Le pont et le véhicule peuvent être simulés comme deux structures élastiques, dont chacune est caractérisée par un certain nombre de fréquences propres de vibration. L'interaction des deux sous – systèmes est le résultat des forces de contact. Puisque le point de contact se déplace (déplacement des forces de contact) dans le temps, les matrices du système dépendent généralement du temps, elles doivent être recalculées pour chaque pas de temps. Dans la plus part des cas, quand le rapport de masse véhicule / pont est minime, les effets élastiques et d'inerties du véhicule sont négligés, dans ce cas un modèle simple peut être adopté pour le véhicule. Dans ce cas typique le déplacement du véhicule sur le pont est simulé par une charge mobile.

Les recherches sur la réponse dynamique des ponts causée par les véhicules traversant débutent vers le mi – 19ème siècle, par le travail de Willis et Stokes en 1849 en étudiant

l'effondrement du Chaster Rail Bridge en Angleterre en 1847, c'est le premier effondrement enregistré dans l'histoire des ponts. Dans leur travail, l'effet d'inertie de la poutre est négligé et le véhicule est modélisé comme une masse mobile concentrée traversant le pont à une vitesse constante. Les études dans ce domaine se multiplient grâce au développement avancé du train à grande vitesse au Japon et dans quelques pays Européens. Mais avant l'invention des ordinateurs (1940), les recherches concernant la dynamique des ponts s'orientent vers le développement des solutions exactes ou approchées pour des problèmes simples et fondamentales, tels que les travaux de Timoshenko en 1922 [YAN 04]. En négligeant l'effet d'inertie du véhicule modélisé par une masse mobile, Timoshenko a aboutit à un grand nombre de solutions approchées pour une poutre simple avec une charge mobile. Des modèles semblables sont adoptés [YAN 04].

Dans le cas où l'effet d'inertie ne peut pas être supposé négligeable rapport de masse véhicule/pont non négligé le modèle de masse mobile est adopté. Ce dernier modèle a été utilisé la première fois par Ting et al en 1974 [YAN 04]. Le modèle masse mobile suppose que le contact est parfait entre les deux sous-systèmes, ce qui est faux en présence des défauts de pavement (chaussée) ou défauts de la roue. Le modèle de véhicule est amélioré en tenant compte de l'effet élastique et l'amortissement de système de suspension de véhicule. Le modèle le plus simple est une masse mobile attachée à un ressort. Plusieurs modèles de véhicules ont été réalisés à partir de ce modèle simple (1ddl, 2ddl, ...11ddl).

Les modèles des ponts disponibles dans la littérature:

Une poutre simplement appuyée aux deux extrémités est la structure la plus adoptée pour étudier l'interaction pont-véhicule. Dans la littérature plusieurs chercheurs modélisent le pont par une plaque mince isotrope ou orthotrope afin d'étudier les effets dynamiques provoqués par le trafic routier.

Plusieurs types de pont sont considérés dans les études de l'interaction pont-véhicule, comme: Les ponts multi-travées «Uniformes ou non-uniformes» [MAR 99], Les ponts-poutre. D'autres considérations dans la simulation de la réponse dynamique du pont est l'inclusion des irrégularités de la chaussée, elle influe significativement sur la réponse d'impact du pont [ZHU 02].

1.2 Synthèse bibliographique:

Dans l'article [BRO 99], l'auteur a étudié le comportement dynamique des ponts sollicités par le trafic routier. L'évaluation des dalles de roulements des ponts est proposée en deux volets. Le premier propose, à certaines conditions, une évaluation simplifiée basée sur une analyse statique dans laquelle les effets sont déterminés par l'application d'un modèle de charge actualisée majoré

par un facteur d'amplification dynamique. Si l'évaluation simplifiée ne peut pas être appliquée, le deuxième volet propose une évaluation de la dalle de roulement basée sur une analyse dynamique dans laquelle intervient une approche numérique ou expérimentale. Il a évalué l'influence des paramètres suivants sur la réponse dynamique de la dalle de roulement, la planéité de la chaussée la masse du camion ou la charge, les vitesses de passages des camions...

Dans l'article [GER 01], l'auteur, en se basant sur le logiciel d'éléments finis CLEF a étudié le phénomène d'interaction pont-train, en ajoutant la modélisation mathématique du train en tenant compte de la présence d'une locomotive, wagon vide et wagon plein.

Dans l'article [ZHU 02], les auteurs ont utilisé le modèle d'une plaque rectangulaire orthotrope continue multi-travées, avec des appuis intermédiaires rigides pour un pont routier multi-travées. Le véhicule est simulé par un modèle dynamique tridimensionnel à deux essieux et 07 degrés de liberté conforme à la norme H20-44 [AAS 05]. Dans l'article [ZHU 02], l'auteur utilise la méthode de Rayleigh-Ritz pour résoudre l'équation du mouvement du pont afin d'obtenir les fréquences propres de ce dernier. Nous avons constaté que cette méthode ne lui permet pas de déterminer les modes propres d'ordre trois et plus (1.3, 2.3, 3.3, 4.3, ...). Ils analysent la réponse dynamique du pont sollicité par un ou plusieurs véhicules en utilisant la théorie des plaques orthotropes et la technique de la superposition modale. Les auteurs ont étudié l'influence de la vitesse de roulement, le profil de la chaussée sur le facteur d'amplification dynamique (F.A.D) et la trajectoire du véhicule sur la réponse dynamique du pont. Les équations de mouvement de véhicules sont obtenues en utilisant la formule de Lagrange.

Dans l'article [MAR 99], les auteurs ont modélisé le pont par une plaque rectangulaire isotrope ayant plusieurs appuis intermédiaires. Le véhicule est modélisé par un système dynamique, se déplaçant à une vitesse constante sur une chaussée avec défauts. Ils présentent dans cet article une approche analytique. La réponse dynamique du pont est obtenue par la méthode de superposition modale. Les fréquences et modes propres sont calculés par la méthode de Rayleigh-Ritz. Le modèle adopté pour le véhicule est un système à sept degrés de liberté se déplaçant à une vitesse constante. Les auteurs tiennent compte de l'importance des modes propres de torsion, des irrégularités de la surface et de la vitesse de véhicule.

Dans l'article [HEN 98], les auteurs proposent une méthode générale pour la résolution du problème de l'interaction dynamique entre un pont discrétisé par un modèle tridimensionnel d'éléments finis et un système dynamique de véhicules. Ils utilisent la méthode de la superposition

modale pour avoir la solution du système dynamique couplé. La méthode présentée est bien adoptée pour un nombre limité de véhicules présent sur le pont en même temps. Dans un autre travail dans l'article [HEN 97], les auteurs présentent une approximation d'élément fini d'un élément à raideur dynamique pour étudier la réponse dynamique d'une structure multi-travées traversée par un convoi de charges mobiles. Ils utilisent un algorithme de FFT développé. Ils présentent les formulations de la raideur dynamique. Ils ont conclu que la réponse dynamique peut être calculée par une valeur exacte en utilisant seulement un élément par travée.

Dans l'article [CHE 99], en se basant sur l'approche de Lagrange, les auteurs étudient les vibrations d'un pont multi-travées non-uniforme traversé par un véhicule. Ils analysent son comportement en adoptant pour la déflexion du pont le modèle des fonctions de vibration d'une poutre modifiée. Le véhicule est modélisé par un système à deux degrés de liberté et le train est composé d'une série de système à deux-degrés de liberté.

Dans l'article [OUE 06], les auteurs présentent une modélisation vibro-acoustique d'un pont de chemin de fer, excité par un train en mouvement. Ils modélisent le système pont-train en utilisant la méthode de la superposition modale en tenant compte de la masse du train et la suspension visco-élastique des véhicules. La résolution numérique des équations couplées du mouvement est obtenue par la méthode de Newmark. Sur la base des accélérations du pont considérées comme des monopôles, ils déterminent la pression acoustique en résolvant l'équation d'onde, le but est de déterminer le bruit émit par le pont.

Dans l'article [YAG 06], les auteurs analysent les vibrations d'un pont modélisé comme une plaque isotrope simplement appuyée sur tous ces bords sous l'effet d'une charge mobile due au véhicule modélisé par sept degrés de liberté. Un modèle mathématique pour le pont est obtenu en appliquant la formulation de Lagrange aux modes propres orthogonaux et les forces en déplacement.

Dans l'article [HSI 09], les auteurs proposent d'utiliser la méthode d'assemblage numérique pour déterminer les fréquences et modes propres exactes de la poutre de Timoshenko multi-travées à plusieurs éléments concentrés, y compris masse ponctuelle avec inertie, ressort linéaire et système masse-ressort.

Dans l'article [YAN 04], les auteurs étudient l'extraction des fréquences fondamentales du pont à partir de la réponse dynamique due au passage de véhicule. Le but est de voir l'influence de

la vitesse de roulement sur les fréquences propres du pont. Ils ont modélisé le véhicule par un système masse-ressort se déplaçant sur une poutre simplement appuyée. Ils utilisent une méthode analytique et une simulation numérique par la méthode des éléments finis.

Dans l'article [ZHU 03], les auteurs présentent une nouvelle méthode numérique d'identification des charges mobiles sur une poutre, en utilisant des réponses vibratoires mesurées. Ils étudient la possibilité d'appliquer cette méthode pour identifier les charges des essieux dans le cas réel d'un problème d'interaction pont-véhicule avec la prise en compte d'irrégularités de la chaussée et l'absence de valeur de la vitesse de roulement. Les résultats obtenus à partir de l'approche numérique pour les ponts à une ou plusieurs travées et ceux obtenus expérimentalement au laboratoire, montrent que la méthode permet l'identification de la charge individuelle d'un essieu se déplaçant à une vitesse non-uniforme avec une erreur minimale.

Dans la référence [ZHU 00], les auteurs présentent une nouvelle méthode d'identification des charges mobiles basée sur une procédure de régularisation. Le pont est modélisé par une plaque orthotrope rectangulaire simplement appuyée. La réponse dynamique du pont sollicité par des charges mobiles est analysée en tenant compte de la théorie des plaques orthotropes et le principe de la superposition modale, en appliquant la procédure de régularisation de Tikhonov. Les simulations et les résultats des tests au laboratoire sont donnés afin d'illustrer l'application de la méthode proposée pour identifier un système à deux forces.

Dans l'article [CHO 95], les auteurs présentent une analyse du problème d'interaction pont-véhicule en tenant compte des effets dynamiques dues au rebondissement des véhicules causés par l'irrégularité de la chaussée et la variation de la vitesse de roulement. La discrétisation spatiale des équations différentielles qui gouvernent le système pont-véhicule est basée sur la méthode des éléments finis. La solution est basée sur la méthode de Newmark (technique d'intégration temporelle) est référenciée comme étant la méthode numérique des lignes. Comme l'interaction pont-véhicule introduit la non-linéarité dans la formulation, les auteurs adoptent un schéma de multi-facteur de prédiction -correction dans la procédure de résolution pour obtenir les résultats précis.

Dans l'article [KIM 05], les auteurs proposent pour l'investigation de l'interaction pont-véhicule, une analyse tridimensionnelle. Les équations qui gouvernent le mouvement tridimensionnel tiennent compte de la rugosité de la surface. Ils utilisent la méthode d'intégration de

Newmark. Ils concluent que la corrélation entre les résultats analytiques et expérimentaux est satisfaisante.

Dans l'article [MIK 08], l'auteur traite la condition d'orthogonalité pour une poutre multi-travées, et son application à la vibration forcée d'une poutre à deux travées. La poutre est modélisée comme une poutre Bernoulli-Euler. Il a obtenu une solution exacte pour ce problème.

Dans l'article [WUS 04], les auteurs présentent une approche semi-analytique pour une analyse tridimensionnelle des vibrations du sol induites par le mouvement des trains sur les ponts. Le train est modélisé comme deux ensembles de charges mobiles, l'une en avant et l'autre en arrière. Le pont est modélisé par une série de poutres élastiques sur appuis et le sol comme un demi-espace viscoélastique. Ils considèrent trois éléments clés dans la solution:

- La solution analytique pour les vibrations d'une poutre élastique en appuis sous une série de charges mobiles;
- L'impédance du système fondation-sol;
- La fonction de Green pour le demi-espace élastique sous une charge ponctuelle harmonique.

La modélisation présentée par les auteurs est validée par des exemples numériques.

Dans l'article [GON 08], les auteurs ont étudié la réponse dynamique induite par l'interaction pont-véhicule. Pour obtenir un modèle mathématique tridimensionnel, ils utilisent la méthode des éléments finis. Le véhicule est modélisé par un système réel de trois essieux. Cette étude tient en compte : la vitesse du véhicule, le taux de la masse de véhicule par rapport au pont et les caractéristiques dynamiques du pont.

Dans l'article [FRY 09], les auteurs appliquent l'équation intégro-différentielle au vibration d'une poutre suspendue. En premier lieu, l'équation gouvernante est résolue analytiquement pour avoir une équation différentielle ordinaire et puis numériquement. Ils étudient l'effet de différents retards de l'arrivée du tremblement de terre parce que le tremblement de terre peut apparaître à tout moment quand le train se déplace sur un pont d'une large travée.

Dans l'article [XIN 09], les auteurs présentent une nouvelle séparation de variables pour obtenir les solutions exactes aux vibrations libres des plaques orthotropiques. Les solutions exactes sont validées par des comparaisons numériques avec des solutions obtenues par la méthode des éléments finis.

Dans l'article [GAR 06], l'auteur modélise le pont par une simple poutre traversée par des charges concentrées mobiles qui varient dans le temps. L'auteur analyse le concept des vitesses critiques.

Dans l'article [SIE 09], les auteurs proposent une approche basée sur la méthode du domaine temporel afin d'identifier la rigidité de flexion pour une structure linéaire. L'idée de cette approche est de transformer le problème dynamique en un problème statique en intégrant les signaux d'entrée et de sortie. Le signal de sortie est le déplacement de la structure dû aux différents types de charges. La méthode permet de prendre en compte quelques paramètres tels que les irrégularités de la chaussée.

Dans l'article [ZHU 01], les auteurs présentent l'utilisation des fonctions d'orthogonalité pour l'identification des charges mobiles sur un pont multi travées. Ils présentent une généralisation des modes propres pour une poutre continue multi travées et l'utilisation de la fonction d'orthogonalité élimine les erreurs causées par le bruit de mesure. Ils concluent que la différentiation directe des réponses dynamiques mesurées est habituellement employée pour obtenir les vitesses et les accélérations, mène à de grandes erreurs quand le bruit de mesure est inclus. Ils présentent aussi la formulation des modes propres généralisées pour une poutre continue multi-travées en appuis simples.

Dans l'article [BAN 01], l'auteur présente l'utilisation de la théorie de «symbolic computing package reduce» pour arriver aux expressions analytiques des équations de fréquence et mode propres d'une poutre composite de Timoshenko. Il démontre l'application de la théorie par des exemples numériques, qui donnent de bons résultats en comparaison avec ceux de la littérature.

Dans l'article [LAS 05], les auteurs présentent une méthode qui permet de calculer d'une manière auto-consistante les fréquences propres de poutres et de plaques orthotropes. Ils utilisent la théorie de plaque orthotrope simplement appuyée sur les deux cotés et libre sur les deux autres, pour étudier son comportement dynamique. La formulation est basée sur la détermination de la solution de l'équation différentielle. Ils développent ainsi un code pour la détermination des solutions non triviales, basé sur la méthode de bisection.

Dans l'article [MIK 08], l'auteur traite la condition d'orthogonalité pour une poutre multi-travées, et son application aux vibrations forcées d'une poutre à deux travées. La poutre est modélisée par la poutre de Bernoulli-Euler. Il aboutit à une solution exacte du problème. L'auteur

présente dans cet article la formulation des modes propres pour une poutre continue à deux travées simplement appuyée.

Dans l'article de [MAR 10], l'auteur présente l'étude de la performance dynamique de certains types des ponts existants sous l'action du trafic de haute vitesse. Les structures de courte ou moyenne travées sont l'objet de cette étude. Afin d'analyser la performance dynamique du pont, le modèle DYNARET "Dynamic Analysis of Retrofitted Bridges" d'éléments finis est adoptée. Les avantages de ce modèle sont: le pont est modélisé par une plaque orthotropique vue que le pont a une travée coure simplement appuyée, différents éléments sont utilisés afin de concentré la masse du pont, le véhicule est modélisé par le modèle de charge ponctuelle.

Dans l'article [STA 09], l'auteur étudie la dynamique d'un système à deux essieux traversant une poutre continue élastique posée sur des supports élastiques et le système est modélisé par des ressorts linéaires. En se déplaçant le long de la poutre, le système se sépare de cette dernière, donc pas d'interaction entre la poutre et le système à deux essieux. Il conclut que, les résultats sont différents dans le cas où on néglige la séparation.

Dans l'article [GOR08], l'auteur présente une méthode de calcul exacte des fréquences propres d'une poutre continue et d'une plaque. Il utilise la méthode Delta de la fonction de Dirac. Il présente aussi la formulation pour les modes propres d'une poutre continue à deux travées simplement appuyée.

1.3 Organisation du mémoire:

Notre travail est organisé en quatre chapitres dont :

Dans le premier chapitre, une introduction avec une synthèse bibliographique enrichie par les derniers articles publiés dans le domaine de l'interaction pont-véhicule soit concernant la réponse dynamique du pont, les fréquences et modes propres du pont ou des véhicules, effet des irrégularités de la chaussée et des défauts de roues, effet de la vitesse de roulement, influence de la modélisation et méthodes de solution sur la réponse dynamique du pont.

Au deuxième chapitre, nous travaillons sur l'exploitation du logiciel CLEF, qui a été développé sur la base de la thèse de [HEN 95], par un groupe de chercheur canadien basé sur la méthode des éléments finis et développé sous environnement Unix (CLEF) en langage C.

Comme la validation expérimentale des résultats obtenus par la modélisation mathématique du comportement dynamique du système pont-véhicule est difficile, nous avons choisi de valider les résultats obtenus par les chercheurs de notre laboratoire dans ce domaine avec ceux obtenus par le logiciel CLEF. Nous avons ajouté plusieurs sous-programmes à ce logiciel pour le rendre exploitable.

Le troisième chapitre, est consacré à l'élaboration d'un logiciel interactif en langage C⁺⁺, permettant l'étude du comportement dynamique des ponts routiers multi travées sollicités par le passage des véhicules. La modélisation utilisée pour le développement de ce logiciel est d'une part celle présentée dans la référence [REZ 08] et d'autre part la modélisation présentée dans ce chapitre qui consiste à résoudre l'équation du mouvement du système pont-véhicule au sens de la distribution.

Dans le souci de généraliser l'utilisation de notre logiciel, nous présentons dans le chapitre quatre, la généralisation du comportement dynamique pour les ponts à n travées, en se basant sur les déformées propres présentées dans la référence [ZHU 01] et en utilisant la résolution au sens de la distribution présentée au chapitre trois.

CHAPITRE II

LOGICIEL D'ANALYSE DES STRUCTURES PAR ELEMENTS FINIS « CLEF»

But de ce chapitre:

Rares sont les logiciels d'éléments finis, permettant l'étude du comportement dynamique des ponts traversés par des véhicules roulants. Parmi les logiciels permettant ce type d'étude, on trouve le logiciel CLEF, conçu par un groupe interdisciplinaire de recherche en éléments finis (GIREF) de l'université Lavale de Québec. Ce logiciel est très complexe à exploiter, vu qu'il est développé sous environnement UNIX et nous ne disposons d'aucune documentation sur ce logiciel. Afin de disposer d'un outil de validation des résultats qui ont été développés durant une dizaine d'années au sein du laboratoire de mécanique et structure (LMS), nous avons décidé de travailler sur ce logiciel pour le rendre fonctionnel et de l'exploiter par la suite dans la validation de nos résultats et pour d'autres éventuelles exploitations.

La méthode de résolution du système dynamique pont-véhicule implantée dans le logiciel CLEF, permet la prise en compte d'une manière très efficace de nombreux paramètres qui ont une influence sur l'interaction dynamique du système pont-véhicule. Parmi ces paramètres le profil de la chaussée,... [BRO 99].

Le logiciel CLEF est développé en langage C sans interface interactif, sous l'environnement UNIX, ce qui nécessite une bonne compréhension de cet environnement de développement (UNIX, C).

2.1-Introduction à UNIX:

UNIX n'est pas facilement défini, puisqu'il est un système d'exploitation « idéal » qu'ait été instancié par différents fournisseurs au cours des années. Il y a un certain nombre de dispositifs d'UNIX et les systèmes (UNIX-like tels que le Linux). Les systèmes d'UNIX ont un système de fichiers hiérarchique. Les systèmes de fichiers d'UNIX peuvent être montés localement, ou éloignés d'un serveur d'archivage central. Toutes les opérations sur un système d'UNIX sont effectuées par les processus, qui peuvent engendrer des processus fils ou d'autres processus de poids léger pour effectuer des tâches discrètes. Des processus peuvent être uniquement identifiés par leur identificateur de processus (PID).

À l'origine conçu comme un système de traitement de texte, les systèmes d'UNIX partagent beaucoup d'outils. En outre, de petites et discrètes utilités peuvent être facilement combinées pour former des applications complètes de manières plutôt sophistiquées. UNIX est un système multi-tâches, à utilisateurs multiples.

En 1969, Ken Thompson des laboratoires de téléphonie de Bell d'AT&T a écrit la première version du système UNIX, sur un ordinateur DEC PDP-7. Après le succès de la version du système UNIX pour un seul utilisateur, Thompson lance en 1970 une autre version du système pour multi-utilisateurs. Les systèmes UNIX sont installés surtout sur des serveurs et sur de grosses stations de travail. Grâce au langage de développement C (créé pour UNIX), les systèmes et les applications Unix possèdent une très grande portabilité. [WAT 05]

Le système Linux a été créé en 1991 par Linus Torvalds. Linus s'est donc fixé pour objectif de créer un système Unix libre de droits qui puisse tourner sur une architecture matérielle de type Intel (les PC), les micro-ordinateurs les plus courants. En fait, à ce moment-là, la tâche n'était pas aussi vaste qu'il y paraît.

Le projet GNU (Projet de fournir des logiciels libres) de la FSF (Free Software Foundation) s'était déjà occupé de redévelopper la plupart des commandes Unix ainsi qu'un certain nombre de logiciels déterminants comme le compilateur gcc (pour C++).

2.2-Les différentes distributions Linux

Idéalement, le système Gnu/Linux pourrait être installé à partir des codes source (il faudrait néanmoins un compilateur C, une librairie C standard et un noyau de base...). En pratique, tout le monde a recours à une distribution qui fournit à la base un programme d'installation et un « gestionnaire de paquets » utilisé pour la mise à jour des programmes. Ce gestionnaire de paquets permet également de vérifier les dépendances, ce qui est nécessaire pour un système reposant sur l'utilisation de bibliothèques dynamiques.

Et voici quelques distributions de Linux:

Slackware : C'est la distribution la plus ancienne qui peut être décrite comme « UNIX-like » car c'est sa politique que de n'inclure que des applications stables et aucune interface graphique de configuration spécifique à cette distribution seulement.

Debian - Suse - Gentoo - Mandriva - Fedora,

RedHat : Cette distribution américaine était la plus diffusée dans le monde, à la fois sur les serveurs et les machines clientes.

Dans notre étude, nous avons essayé plusieurs versions de linux : Ubuntu, Kubunto..., Debian, Redhat. La version la plus adoptée pour le logiciel CLEF et les PCs en cours est RedHat.

2.3. Structure de CLEF:

	Executable	
	Bibliothèques générées	
	Fichiers de compilation	...1
-CLEF		...2
--bin		...3
--lib		...4
-makefiles		...5
--obj		...6
--src		...7
--Application	Programme principal	...8
--include	et les fichiers d'entête	...9
--Elem		...10
--1D		...11
--2D		...12
--3D		...13
--Axisymetric	Types des éléments	...14
--BeamPlateShell	finis (maillage)	...15
--Pressure		...16
--Tools		...17
--Concrete		...18
--Elastoplasticity		...19
--Hyperelasticity		...20
--Include	Propriétés du matériau	...21
--Interface		...22
--Mechanics		...23
--Standard		...24
--FESh		...25
--Assemble		...26
--Asymptotic		...27
--Dynamic		...28
--EigenValue		...29
--Element		...30
--Math		...31
--NonLinear	Résolution du	...32
--Numbering	problème (Assemblage	...33
--Physic	des matrices...)	

--Print		...34
--Solver	←	...35
--Tools		...36
--Vehicle		...37
--Tools		...38
--Petsc-2.1.0	←	...39
	Résolveur des équations (PortableScientific) version 2.1.0	

Le logiciel CLEF est composé de quatre principaux modules:

- Module Application : On trouve le programme principal, les procédures (Lecture des données, vérification des données, traitement, impression, traitement des erreurs,...).
- Module Elem : Ce module est la partie des éléments finis intégrés dans CLEF. On trouve les définitions des différents types d'éléments reconnus par CLEF et les modes de calcul nécessaire.
- Module FESh : Ce module est le plus important dans CLEF, il sert à la création des objets nœuds, éléments, charges, conditions aux limites et faire les assemblages pour créer les matrices de masse, amortissement et de rigidité. Il réalise toutes les opérations mathématiques et résout le problème donné. Ce dernier module fait appelle au dernier module Pestic-1.1.0 pour résoudre les équations.
- Module Petsc : Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation (PETSc), ce module est développé par *Mathematics and Computer Science Division de ARGONNE NATIONAL LABORATORY*, permet de résoudre numériquement les équations différentielles partiales, voir l'organigramme ci-dessous.

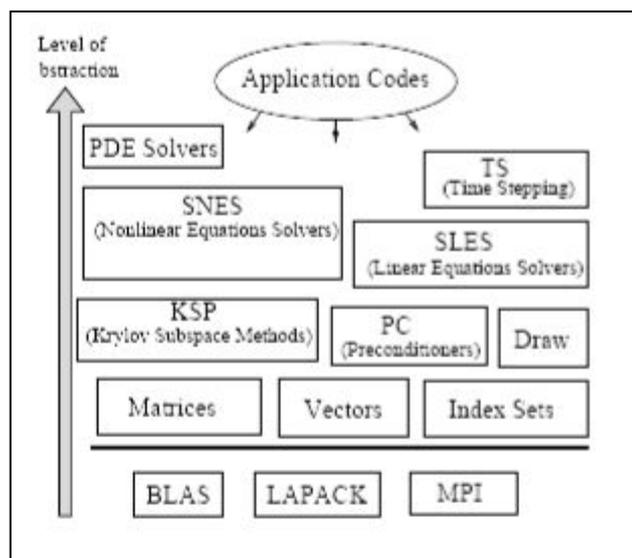


Figure 2.1. Organisation de la bibliothèque Petsc. [BAL 01]

On peut conclure, que CLEF est un logiciel parfait pour faire des simulations de passage de véhicule mobile sur un pont de chaussée sans la nécessité d'autres outils extérieurs, mais son

utilisation est très complexe, vue qu'il n'est pas interactif et demande la connaissance du système d'exploitation UNIX.

Les fichiers de données sont organisés comme suit :

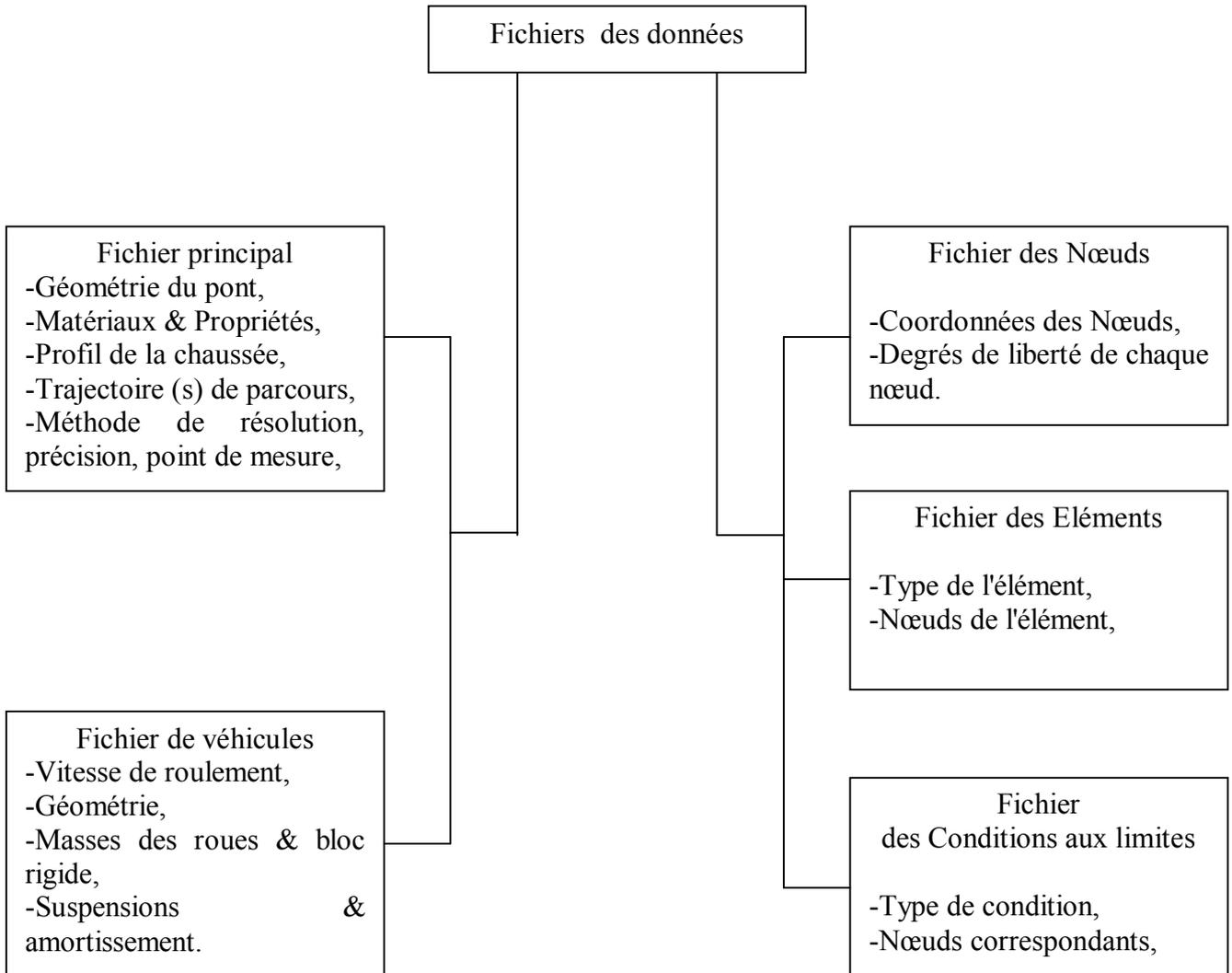


Figure 2.2. Organigramme des fichiers de données.

CLEF est un logiciel de type console (non interactif), nécessite la création manuelle des fichiers des données. On doit préparer un répertoire pour créer les fichiers, en utilisant l'éditeur de texte intégré EMACS. On peut parcourir les dossiers en affichant le système des fichiers sous un explorateur dite Navigateur des fichiers ou on peut effacer; ouvrir,...

Le maillage (Nœuds, Eléments et conditions aux limites) et fait par d'autres moyens, afin de l'exploiter, on est obligé de réaliser une procédure en C pour le maillage en tenant comptes des contraintes exigées de CLEF.

On doit préparer les fichiers de maillage du problème manuellement (Figure 2.3) et les implanter dans CLEF afin de l'exploiter.

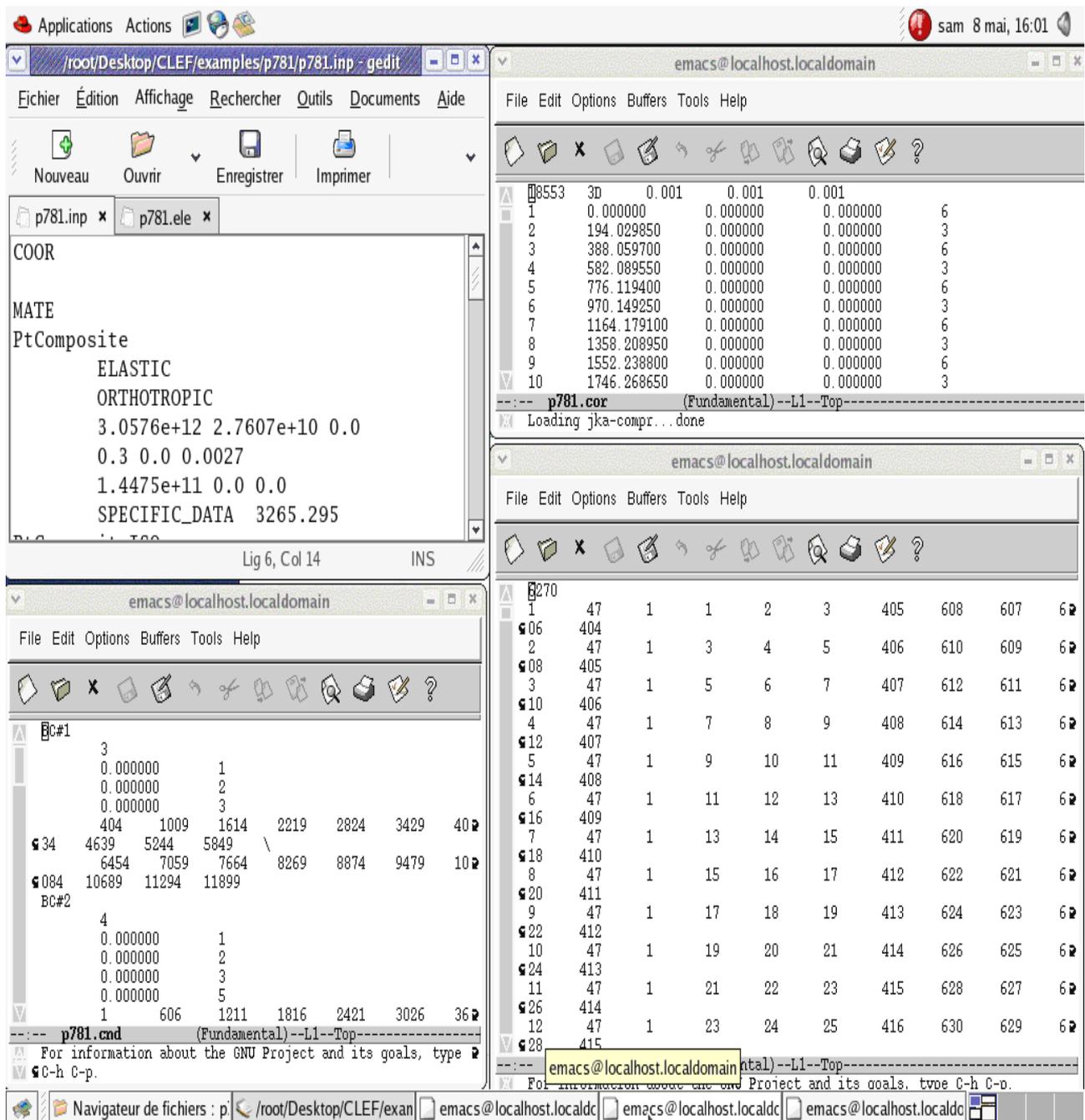


Figure 2.3. Fenêtre principale (Bureau d'UNIX).

2.3.1 Maillage sous CLEF:

CLEF, possède ses propres définitions des éléments, dont on est obligé de les tenir en compte lors du maillage. Voici quelques unes:

- Eléments à une dimension (1D): Qui sont numérotés de 100 à 199 pour le calcul des déplacements u , v et w .

- Eléments à deux dimensions (2D): Qui portent les numéros 200,201 et 202 ce sont les éléments coque à 8 nœuds permettent le calcul de u, v et w.

- L'élément 203 est un élément coque à 8 nœuds pour le calcul de u et w.

- L'élément 204 est un élément triangle à 3 nœuds pour le calcul de u et w.

- Eléments à trois dimensions (3D) numérotés de 300 à 399.

- Eléments axisymétriques:

400 : Elément coque à 8 nœuds (calcul de u et w),

- Eléments poutre :

8 : Elément de trois nœuds, dont 6ddl pour les nœuds aux extrémités et 3ddl pour le nœud au milieu permet le calcul des déplacements u,v et w.

13 : Elément de deux nœuds, chacun de 6ddl permet le calcul des déplacements u, v et w.

- Eléments coque :

47 : Elément coque utilisé pour réaliser l'analyse dynamique et la statique linéaire. Chaque nœud d'extrémité possède 6 d.d.ls (u, v, w, tetax, tetay et tetaz), et chaque nœud de milieu possède 3d.d.ls (u, v et w). Donc chaque élément possède 8 nœuds de 36d.d.ls.

u, v : Déplacements dans le plan,

w : Déplacement perpendiculaire,

tetax : Angle de rotation dans le plan perpendiculaire à l'axe x,

tetay : Angle de rotation dans le plan perpendiculaire à l'axe y,

tetaz : Angle de rotation dans le plan perpendiculaire à l'axe z,

Dans notre étude, on a utilisé l'élément coque (47) est un élément quadrilatéral à 8 nœuds DLQP ("Discrete Linear Quadrilateral Plus") avec 36 degrés de liberté dont la formulation est basée sur la théorie discrète de Kirchhoff qui suppose que l'énergie de cisaillement transversal est négligée. Cet élément, défini avec une épaisseur constante, possède six degrés de liberté aux nœuds d'angles et trois aux nœuds placés sur les bords (Figure 2.5). L'élément de poutre tridimensionnelle employé est un élément à 3 nœuds avec 15 degrés de liberté compatible avec l'élément de coque DLQP.

L'élément DLLP ("Discrete Linear Line Plus") pour lequel l'énergie de cisaillement transversal est négligée possède six degrés de liberté aux nœuds d'extrémités et trois au nœud central (Figure 2.6).

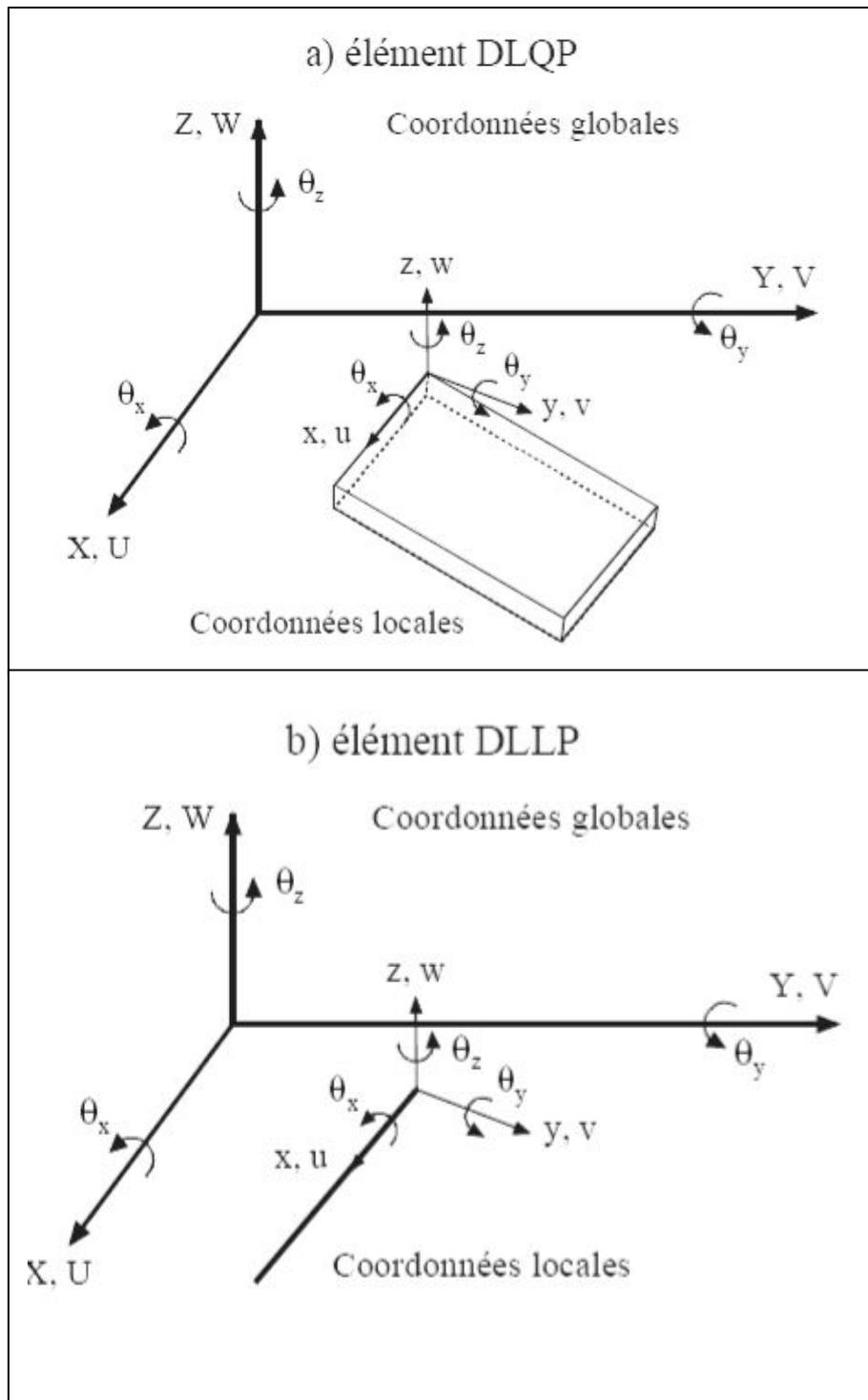


Figure 2.4. Coordonnées globales et locales des éléments DLQP et DLLP. [BRO 99]

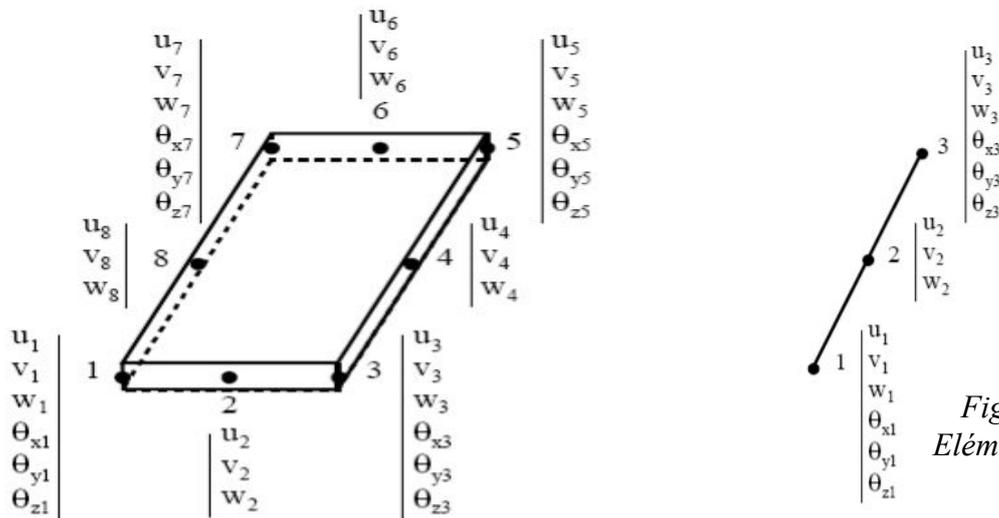


Figure 2.5. Elément coque DLQP.

Figure 2.6. Elément DLLP.

Essentiellement les éléments de coque sont utilisés, seuls entretoises et raidisseurs sont représentés par des éléments de poutre excentrés collés sur le bord des éléments de coque de la dalle de roulement. (Figure 2.7).

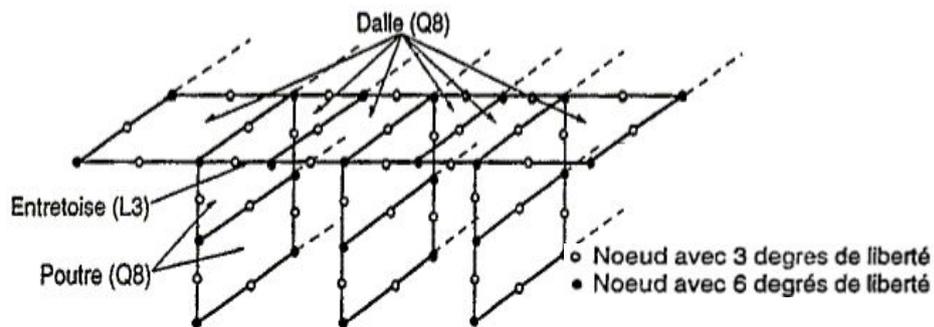


Figure 2.7. Maillage utilisé.

2.3.1.1. Procédure réalisée pour le maillage:

Ainsi, pour le maillage, on a développé une procédure en langage C, permettant de réaliser un maillage fin ou grossier du pont en choisissant comme paramètre le nombre d'éléments sur la longueur ou largeur ou bien la taille de l'élément selon la longueur ou la largeur. Le programme automatiquement maille la dalle de roulement en élément DLQP et selon le nombre des raidisseurs, il les maille aussi par l'élément DLQP. Les entretoises eux seront maillées par l'élément DLLP collé nœud par nœud aux éléments DLQP de la dalle correspondants dont les nœuds de 3DDLs doivent être collés aux nœuds de même DDLs et les nœuds de 6DDLs se collent aux nœuds de 6DDLs de la dalle.

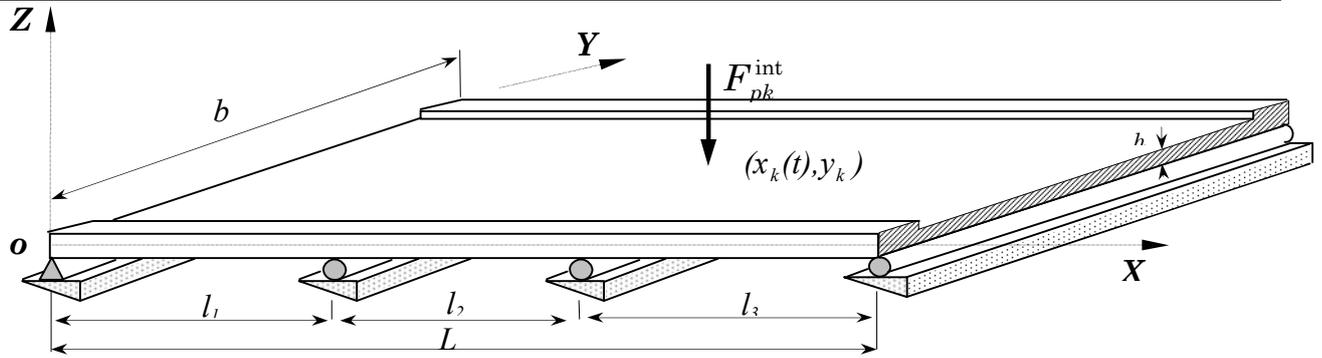


Figure 2.8. Géométrie du pont.

Et voici l'algorithme du maillage crée:

- Introduction des données du pont: L,B,L1,L2,L3,H (Figure 2.8),
- Introduire Nombre d'éléments sur la longueur et sur la largeur,
- Introduire : Nombre d'entretoise, distance entre entretoises,
- Introduire : Nombre des raidisseurs, distance entre raidisseurs, Epaisseur,
- 1-Pour y=0..B
- pour x=0..L
- Définir Nœud : x,y, z=0
- fin
- fin
- Répéter 1 pour les raidisseurs,
- Définir les éléments de la dalle,
- Définir les éléments des raidisseurs,
- Définir les éléments des entretoises,
- Définir les conditions aux limites.

				TRAVEES					
Longueur du Pont L(m)	<input type="text" value="78.0000"/>	Largeur du Pont b(m)	<input type="text" value="13.7150"/>	Epaisseur h(m)	<input type="text" value="0.2116"/>	Travée 1 L1(m)	<input type="text" value="24.0000"/>	Travée 4 L4(m)	<input type="text" value="0.0000"/>
MAILLAGE		Nombre d'Element(Long)	<input type="text" value="201"/>			Travée 2 L2(m)	<input type="text" value="30.0000"/>	Travée 5 L5(m)	<input type="text" value="0.0000"/>
		Nombre d'Element(Larg)	<input type="text" value="20"/>			Travée 3 L3(m)	<input type="text" value="24.0000"/>	Travée 6 L6(m)	<input type="text" value="0.0000"/>
Nbr.Dimens	<input type="text" value="3D"/>	Factr.Echel(X)	<input type="text" value="0.0001"/>	Factr.Echel(Y)	<input type="text" value="0.0001"/>	Factr.Echel(Z)	<input type="text" value="0.0001"/>	Nbre d'Entretoises	<input type="text" value="14"/>
Nbre de Raidisseurs		<input type="text" value="5.0000"/>	Distance entre	<input type="text" value="2.7430"/>	Epaisseur h(m)	<input type="text" value="0.0111"/>	Distance Entretoise <input type="text" value="6.0000"/>		
		Nombre d'element	<input type="text" value="4020"/>						
<input type="button" value="Fermer"/>		Nombre de noeud (Long)	<input type="text" value="0"/>		<input type="button" value="Mailler"/>				
		Nombre de noeud (Larg)	<input type="text" value="0"/>						

Figure 2.9 : Fenêtre de maillage

La procédure créera les fichiers de données suivants:

-Fichier des nœuds, -Fichier des éléments, -Fichier des conditions aux limites.

2.3.1.2 Exemples de maillage

a) Fichier des coordonnées des nœuds :

Numéro du nœud	Nombre de Nœuds	Dimension			Facteur x	Facteur y	Facteur z	Degré de liberté
		x	y	z				
18553	3D	0.001	0.001	0.001				
1		0.000000	0.000000	0.000000			6	
2		194.029850	0.000000	0.000000			3	
3		388.059700	0.000000	0.000000			6	
4		582.089550	0.000000	0.000000			3	
5		776.119400	0.000000	0.000000			6	
6		970.149250	0.000000	0.000000			3	
7		1164.179100	0.000000	0.000000			6	
8		1358.208950	0.000000	0.000000			3	
...								

b) Fichier de définition des éléments :

Nombre total des éléments générés

Numéro de l'élément	Type	Matériau	Nœud 1	Nœud 2	Nœud 3	Nœud 4	Nœud 5	Nœud 6	Nœud 7	Nœud 8
6270										
1	47	1	1	2	3	405	608	607	606	404
2	47	1	3	4	5	406	610	609	608	405
3	47	1	5	6	7	407	612	611	610	406
4	47	1	7	8	9	408	614	613	612	407
5	47	1	9	10	11	409	616	615	614	408

c) Fichier des conditions aux limites :

Identificateur de la condition

Nombre de conditions pour chaque nœud

Valeur initial Numéro de degré de liberté (1→ u, 2→v, 3→w,...)

Numéros des nœuds concernés par cette condition

BC#1

3

0.000000 1

```

0.000000      2
0.000000      3
404    1009    1614    2219    2824    3429    4034    4639    5244    5849    \
6454    7059    7664    8269    8874    9479    10084    10689    11294    11899
BC#2
4
0.000000      1
0.000000      2
0.000000      3
0.000000      4
1      606    1211    1816    2421    3026    3631    4236    4841    5446    \
6051    6656    7261    7866    8471    9076    9681    10286    10891    11496    \
12101

```

2.3.2 Modèles de véhicule sous CLEF:

CLEF est alimenté de plusieurs modèles mathématiques des véhicules, on peut citer :

- Modèle à 7 degrés de liberté : SINGLE_UNIT,
- Modèle à 11 degrés de liberté : TRACTOR_SEMI,
- Modèle à 1 degré de liberté : SINGLE_DOF

2.3.2.1 Exemple de fichier véhicule:

Selon la norme AASHTO [MAR99], les données du véhicule sont:

Avec :

m_1, m_2 : les masses des roues avec les essieux de l'avant et de l'arrière respectivement,

m_v, I_{θ_v} et I_{θ_w} : la masse et les moments d'inertie du bloc rigide du véhicule,

$I_{\theta_1}, I_{\theta_2}$: les moments d'inertie des essieux de l'avant et de l'arrière respectivement,

$k_{pi}, i = 1, 2, \dots, 4$: les rigidités dans les pneus,

$c_{pi}, i = 1, 2, \dots, 4$: les amortissements dans les pneus,

$k_{si}, i = 1, 2, \dots, 4$: les rigidités dans les suspensions,

$c_{si}, i = 1, 2, \dots, 4$: les amortissements dans les suspensions,

s_{p1}, s_{p2} : les espacements entre les points de contact des pneus de l'avant et de l'arrière respectivement,

s_1, s_2 : les espacements entre les essieux de l'avant et de l'arrière respectivement.

Et voici les données:

$$m_v = 17000 \text{ kg}, \quad m_1 = 600 \text{ kg}, \quad m_2 = 1000 \text{ kg},$$

$$I_{\text{tetaV}} = 9 \times 10^4 \text{ kg m}^2, \quad I_{\text{alphaV}} = 1.3 \times 10^4 \text{ kg m}^2,$$

$$I_{\text{teta1}} = 550 \text{ kg m}^2, \quad I_{\text{teta2}} = 600 \text{ kg m}^2$$

$$S_x = 4.73 \text{ m}, \quad S_{p1} = S_{p2} = 2.05 \text{ m}, \quad S_1 = S_2 = 1.41 \text{ m}, \quad a_1 = 0.67 \text{ m}, \quad a_2 = 0.33 \text{ m},$$

$$K_{s1} = K_{s2} = 1.16 \times 10^5 \text{ N/m}, \quad K_{s3} = K_{s4} = 3.73 \times 10^5 \text{ N/m},$$

$$K_{p1} = K_{p2} = 7.85 \times 10^5 \text{ N/m}, \quad K_{p3} = K_{p4} = 5.7 \times 10^5 \text{ N/m},$$

$$C_{p1} = C_{p2} = 2.5 \times 10^4 \text{ Ns/m}, \quad C_{p3} = C_{p4} = 3.5 \times 10^4 \text{ Ns/m},$$

$$C_{s1} = C_{s2} = 1.0 \times 10^2 \text{ Ns/m}, \quad C_{s3} = C_{s4} = 2.0 \times 10^2 \text{ Ns/m},$$

VAASHTO

MOVING_MASS 3D 2.05

LeTrajet#1 30.0

100000 100000

#Nombre d'itéraions et la tolérance

10 1.0E-3

#Modele et le nom du modele et position devant p.r.p x0,y0

main SINGLE_UNIT 0.0

#Espaceement des jambes prp à essieu1

1.41

0.33 0.67

2.0 13.8e+3 .9E+4 1.3E+4

0.0 6.0e+2

LINEAR

1.16e+5 2.5e+4

LINEAR

7.85e+5 1.0e+2

0.0 1.0e+3

LINEAR

3.73e+5 3.5e+4

LINEAR

15.7e+5 2.0e+2

0.0 6.0e+2

LINEAR

1.16e+5 2.5e+4

LINEAR

7.85e+5 1.0e+2

0.0 1.0e+3

LINEAR

3.73e+5 3.5e+4

LINEAR

15.7e+5 2.0e+2

end

end

2.3 Méthode de résolution du système dynamique

On distingue deux méthodes pour résoudre un système dynamique: méthode couplée et méthode découplée. La méthode couplée considère le système Pont-Véhicule comme un seul système vibratoire, ainsi que pour chaque position du véhicule sur le pont (pour chaque pas du temps), les matrices de masse M , d'amortissement C et de rigidité K sont actualisées.

Le logiciel CLEF utilise la méthode de résolution découplée dans laquelle les équations dynamiques sont résolues séparément pour le pont et pour les véhicules. L'algorithme de résolution tient compte du couplage qui existe entre ces systèmes par l'ajustement aux points de contact entre les roues et le pont.

2.3.1 Algorithme de résolution

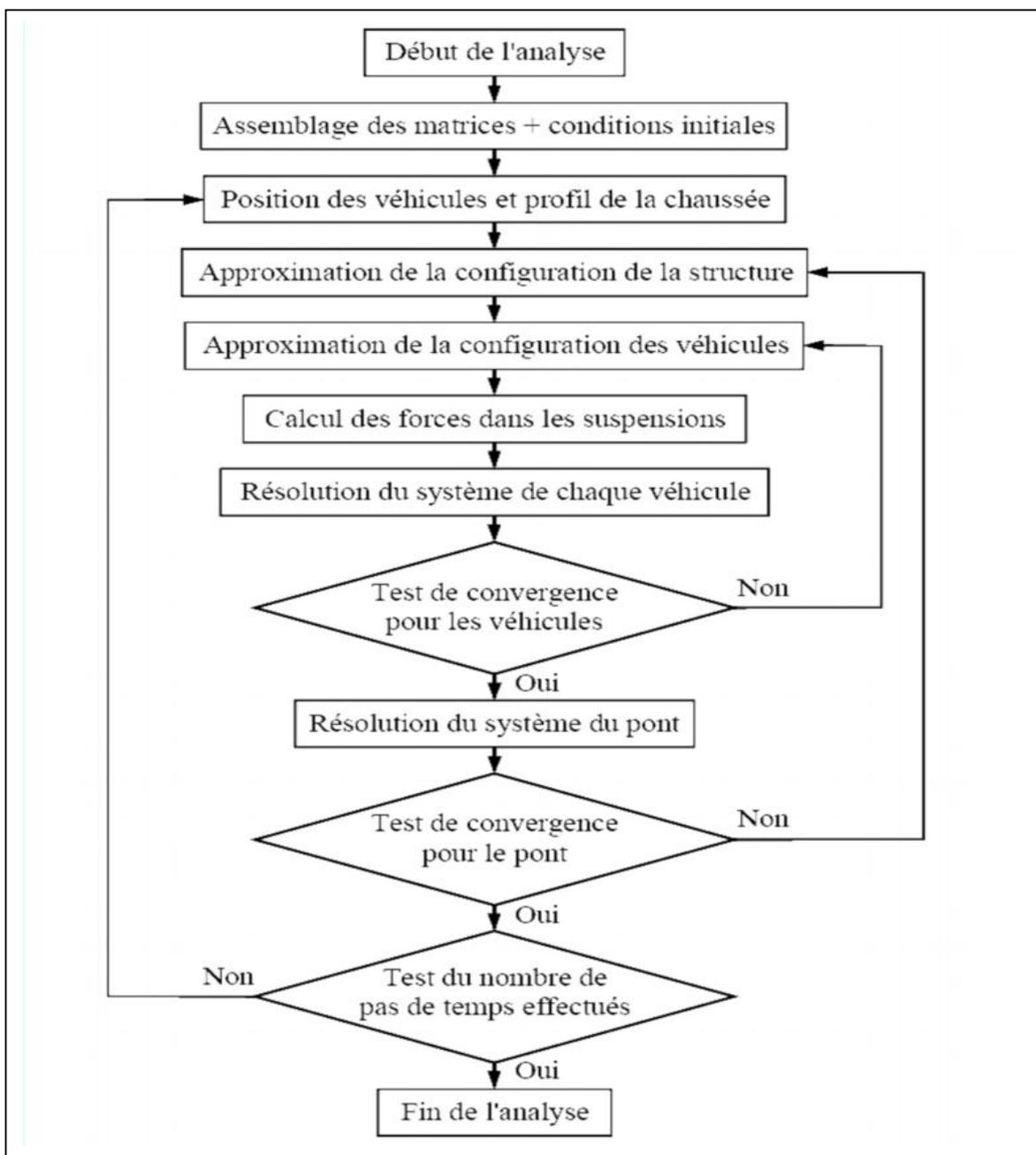


Figure 2.10. Algorithme de résolution d'un système Pont-Véhicule.

2.4 Exemple de validation

Comme l'objectif de ce chapitre est la mise en marche du logiciel CLEF afin de valider les résultats obtenus au sein du laboratoire de Mécanique et Structures de Guelma. Nous avons pris deux exemples de la littérature, le premier exemple pour un pont supposé isotrope et le deuxième exemple le cas d'un pont orthotrope.

La figure 2.11 présente un exemple d'une séquence de commandes pour exécuter CLEF.

```

root@localhost:~/Desktop/CLEF/examples/p781
Fichier  Édition  Affichage  Terminal  Onglets  Aide
[root@localhost ~]# cd Desktop
[root@localhost Desktop]# cd CLEF
[root@localhost CLEF]# cd examples
[root@localhost examples]# cd p781
[root@localhost p781]#

[root@localhost p781]#
[root@localhost p781]# clef.dev p781

Nombre de DDLs.....: 73743
Nombre de termes dans la matrice: 5286661
Memoire requise pour la matrice: 42293288 bytes
    
```

Figure 2.11. Exemple de lancement du logiciel CLEF.

2.4.1 Exemple 1:

Dans les références [ZHU02, MAR99], les auteurs traitent le cas d'un pont modélisé par une plaque isotrope composée par trois travées. Les données géométriques et les caractéristiques mécaniques du pont sont les suivants:

$$\begin{aligned}
 L &= 79.2\text{m}, & B &= 10.7\text{m}, & H &= 0.95\text{m} \\
 L_1 &= L_2 = L_3 = 26.2\text{m} \\
 E &= 14.54 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2, & \rho &= 2375 \text{ Kg/m}^3, & \nu &= 0.3
 \end{aligned}$$

Le véhicule est modélisé par un modèle dynamique à sept degrés de liberté selon la norme AASHTO, les données sont présentées au paragraphe (2.2.1).

Nous présentons ci-dessous la structure des trois fichiers de données tel qu'ils sont présentés dans le logiciel CLEF.

Fichier principal (pont792.INP) :

```
DEFAULT
  INTEGRATION
    QUADRILATERAL LG 3 LG 3
  end
end
COOR
MATE
PtComposite
  ELASTIC
  ISOTROPIC
  14.54e+10 0.3
  SPECIFIC_DATA 2375
end
PREL
  1SHELL PtComposite
    0.95
    0.0
end
COND
ELEM
BRIDGE
BY_PREL_ID
1
end
NO_JOINTS
NO_ROAD_PROFILE
LeTrajet#1 0.0 0.0
    0.0 3.05
    83.93 3.05
end
end
VEHICLE
LOAD
Pc NODAL
  grp_load#1
    Pc1
      1
      1.0- E1 3
    6118
  end
end
IMPR
  d6118 CURVE DOF 6118 3
end
COMB
load_comb#1
  1.0VAASHTO
end
DYNA
load_comb#1
0.5 0.25
DIAGONAL 0.0
.1E-3 .1e-3
1000 0.00243
100 1.0E-3
2
STOP
```

Fichiers de maillage :

- pont792.COR → Définition des coordonnées des nœuds
- pont 792.CND → Conditions aux limites
- pont792.ELE → Eléments

Ces trois fichiers sont obtenus par la procédure ajoutée de maillage, (générés). (voir paragraphe 2.1.2)

Fichier de véhicule:

- Pont792.VEH → Voir paragraphe (2.2.1)

Après la création de ces trois fichiers de données, on lance l'exécution de CLEF.

Nous aurons le fichier de sortie (pont792.OUT).

Selon le choix du type de résultat qui est mentionné dans le fichier principal d'extension (*.INP) dans le bloc IMPR qui signifie les paramètres de l'impression.

Exemple :

IMPR

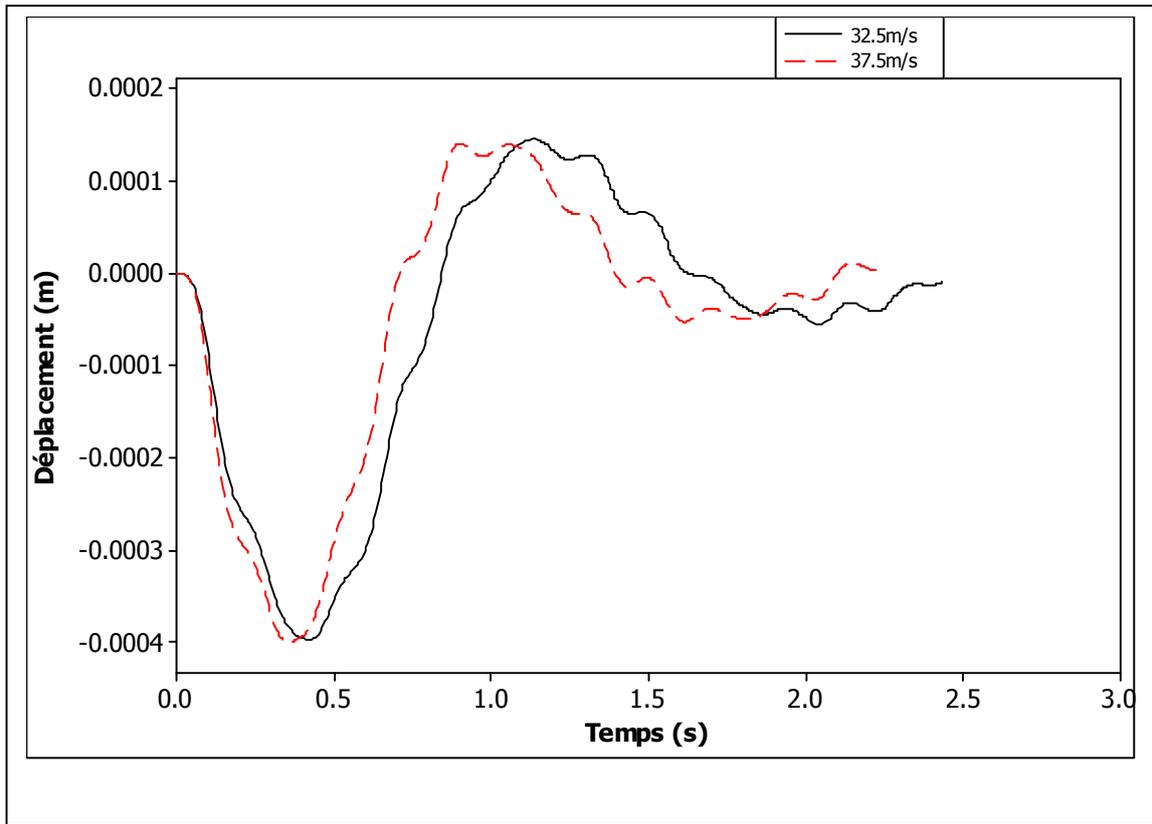
v_1 CURVE DOF 6252 3 BASIC

Avec **v_1** est un identificateur de l'objet impression qui sera utilisé par CLEF, **CURVE** signifie qu'on veut que la sortie soit de type courbe (réponse dynamique, réponse statique, accélération, profil de la chaussée, ...) et **DOF 6252** signifie que les coordonnées du point de mesure seront ceux du nœud numéroté par 6252 et de degré de liberté 3ddls et **BASIC** signifie que la sortie sera la réponse dynamique du pont.

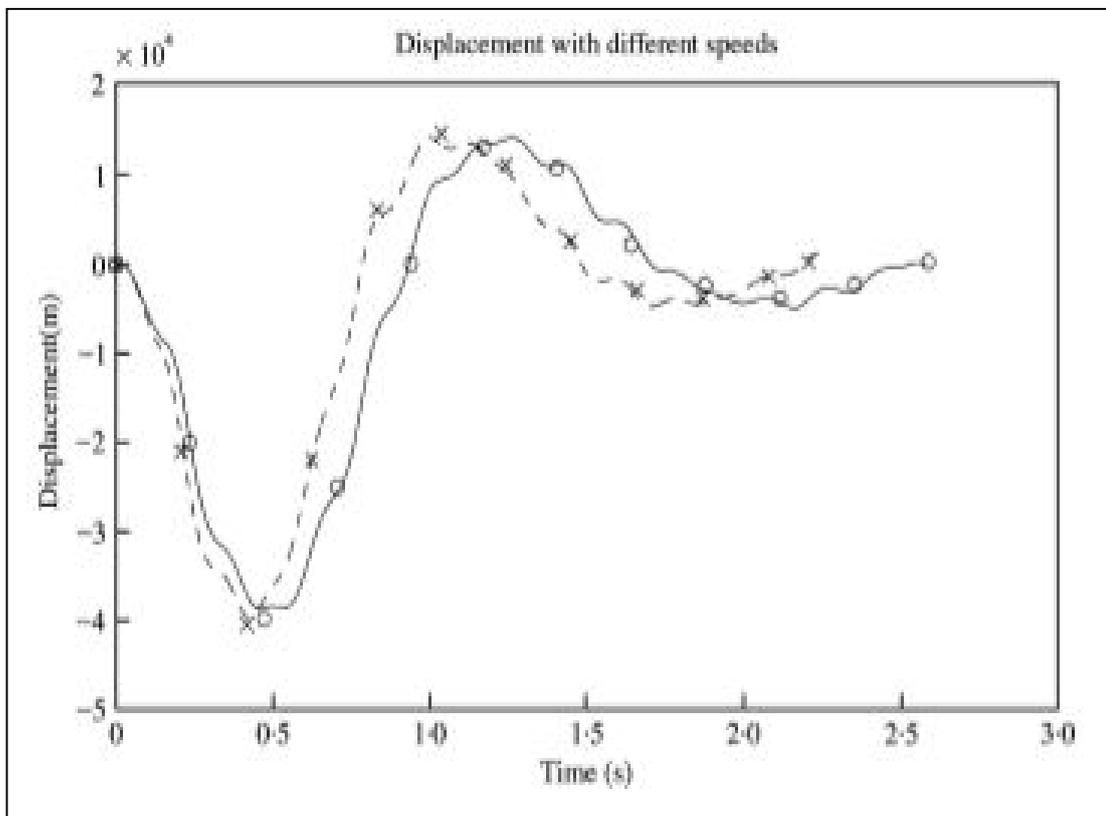
Donc, l'explication du codification du fichier d'entrée, permet à CLEF de préparer les données concernant la courbe de la réponse dynamique du pont au point de mesure référencié par le nœud 6252 qui a 3 degré de liberté et enfin stocker ces données dans l'objet v_1.

Comme résultat nous trouvons le fichier p781.CRV que nous pouvons le tracer.

Sachant que pour un seul traitement, CLEF peut créer un seul fichier .CRV contenant plusieurs graphes.



Résultat obtenu par CLEF



Résultat [MAR99]

— 32.5m/s , ---37.5m/s

Figure 2.12. Réponse dynamique pour des vitesses différentes.

La comparaison du déplacement obtenu par CLEF et celui obtenu par la référence [MAR 99], montre une grande similitude (figure 2.12). La petite différence qu'on peut noter est due à l'introduction du coefficient d'amortissement et le profil de la chaussée dans le résultat obtenu par CLEF qui n'est pas donné dans la référence [MAR 99].

2.4.2 Exemple 2:

Nous utilisons les données de la référence [ZHU 02], qui traite le cas d'un pont orthotrope. Les données du pont sont :

$$\begin{aligned} L &= 78\text{m}, & B &= 13.715\text{m}, & H &= 0.2\text{m} \\ L1 &= 24\text{m} & L2 &= 30\text{m}, & L3 &= 24\text{m} \\ \rho &= 3265.295\text{Kg/m}^3, & v_{xy} &= 0.3\text{m} \\ D_x &= 2.415 \cdot 10^9\text{Nm}, & D_y &= 2.1807 \cdot 10^7\text{Nm}, & D_{xy} &= 1.1424 \cdot 10^8\text{Nmm} \\ E_x &= 3.0576 \cdot 10^{12}\text{N/m}^2, & E_y &= 2.7607 \cdot 10^{10}\text{N/m}^2, & G_{xy} &= 1.4475 \cdot 10^{11}\text{N/m}^2 \end{aligned}$$

Le véhicule est modélisé par un modèle dynamique à sept degrés de liberté selon la norme AASHTO. [AAS 05] les données sont présentées au paragraphe (2.2.1).

Nous présentons ci-dessous la structure du fichier qui contient les données du pont.

Fichier principal (pont78.INP) :

```
COOR
MATE
Dalle
    ELASTIC
    ORTHOTROPIC
    3.0576e+12 2.7606e+10 0.0
    0.3 0.0 0.0027
    1.4475e+11 0.0 0.0
    SPECIFIC_DATA 3265.295
Acier
    ELASTIC
    ISOTROPIC
    2.0E11 0.27
    SPECIFIC_DATA 7850.0
end
PREL
```

```
1 SHELL Dalle
0.21157
0.0
2 SHELL Acier
0.002
0.0
3 BEAM Acier
0.001548
1.2e-07
0.707e-06
2.0e-06
0.0987145
0.0
0.0
1.92929
2.54671
```

end

COND

ELEM

BRIDGE

BY_PREL_ID

1

end

NO_JOINTS

NO_ROAD_PROFILE

LeTrajet#1 0.0 0.0

0.0 2.74

78.0 2.74

end

end

VEHICLE

IMPR

v_1 CURVE DOF 6252 3 BASIC

end

COMB

load_comb#1

1.0VAASHTO

end

DYNA

load_comb#1

0.5 0.25

DIAGONAL 0.0

1E-3 1e-3

780 0.003334

100 1.0E-3

1

STOP

Fichier de véhicule est le même que l'exemple précédent et Les fichiers de maillage sont générés.

La trajectoire selon la référence [ZHU 02] (figure 2.13).

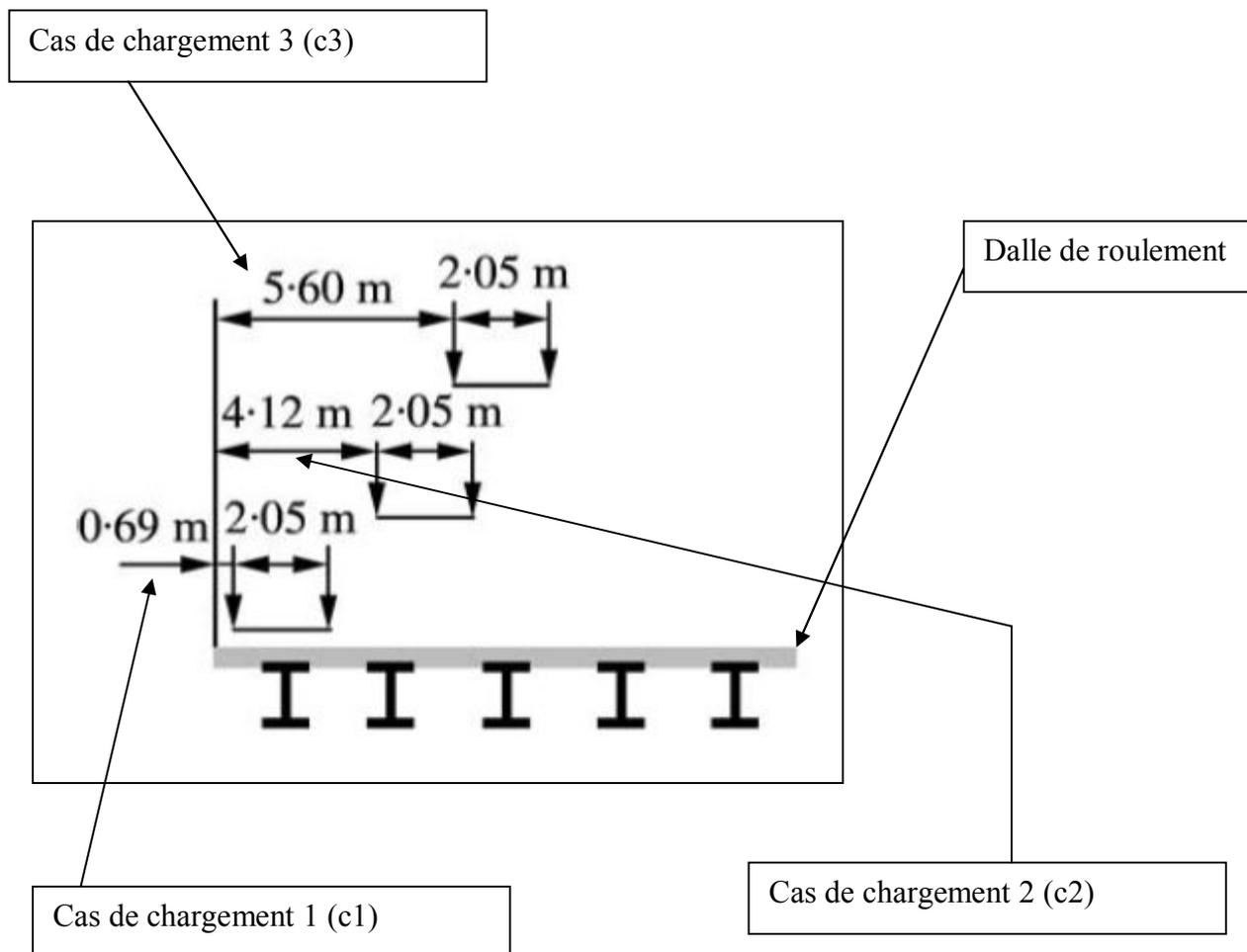
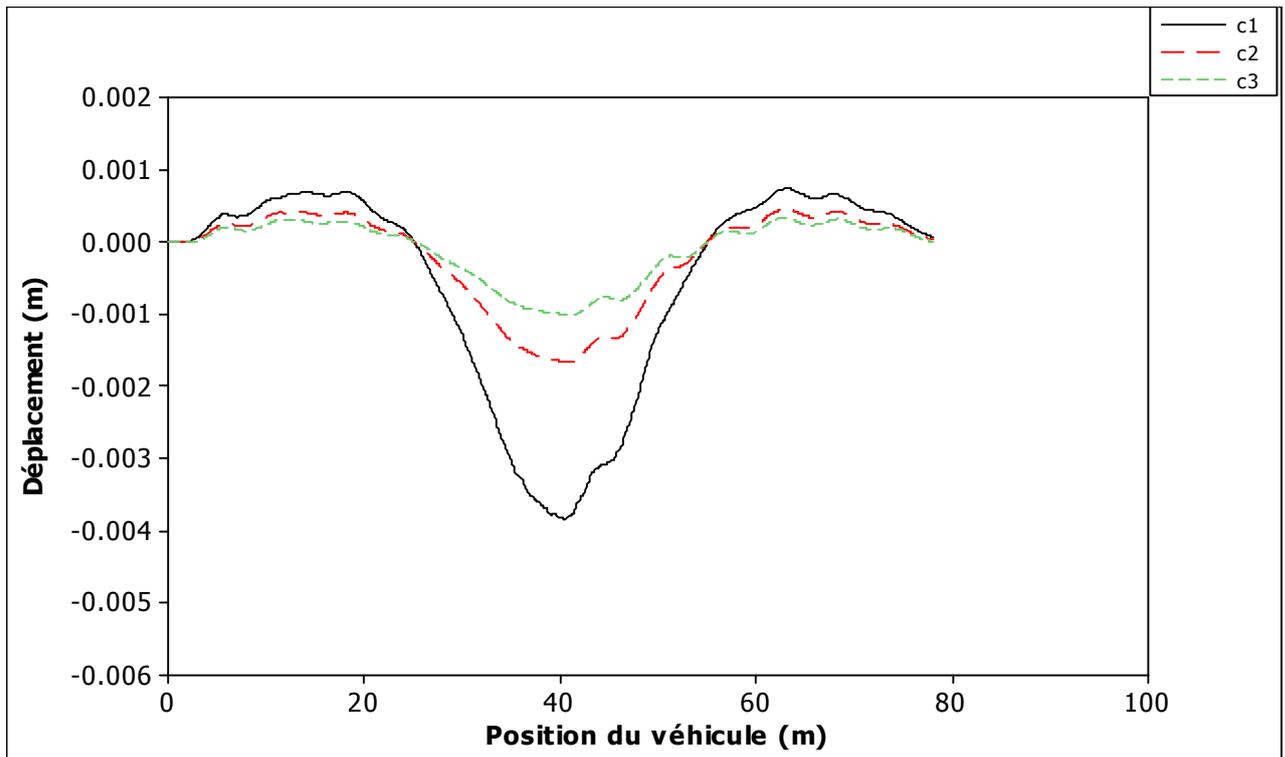
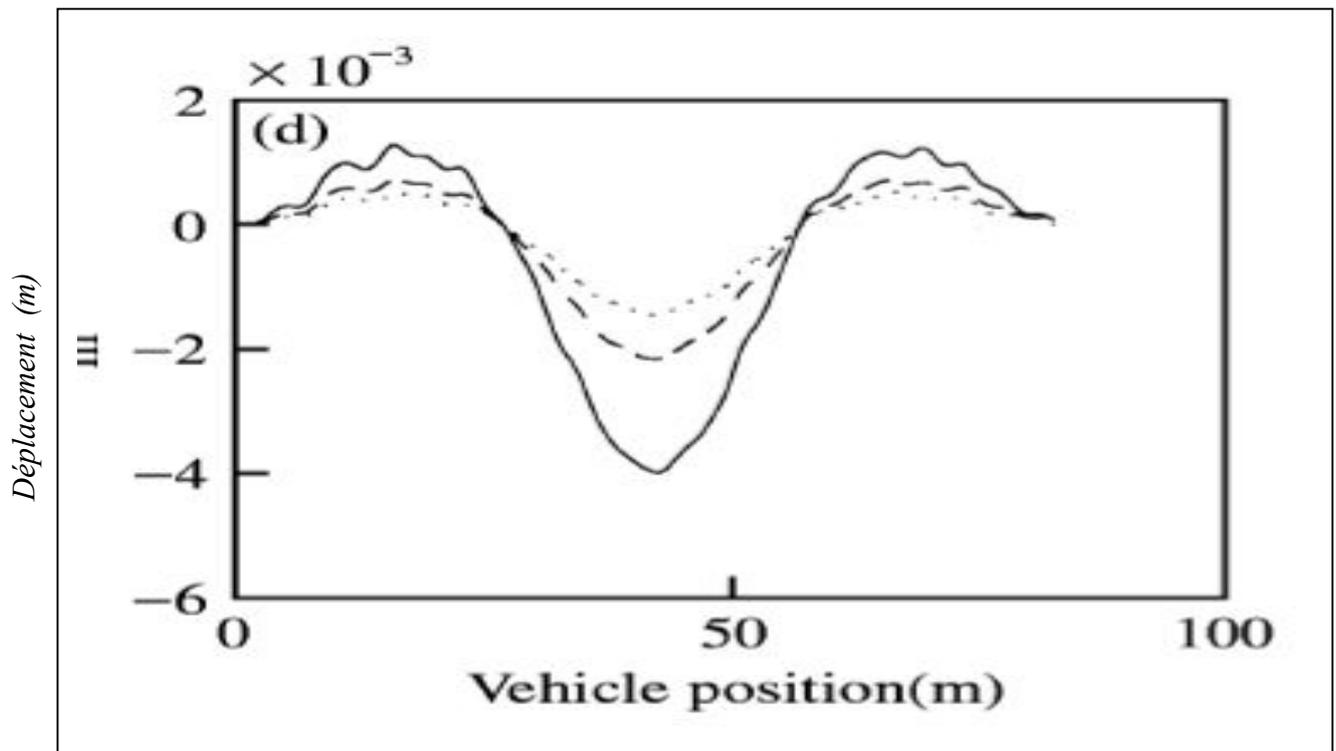


Figure 2.13. Les trois cas de chargement pour une vitesse de 30 m/s.



Résultat obtenu par CLEF



Résultats obtenus par la référence [ZHU 02] (c1 = c2 = c3)

Figure 2.14. Réponse dynamique à différents cas de chargement.

La figure 2.14 représente une comparaison de la réponse dynamique obtenue par le logiciel CLEF et celle de la référence [ZHU 02].

Nous présentons dans la figure 2.15 le profil de chaussée que nous avons utilisé sous CLEF.

La figure 2.14 montre une bonne concordance entre la réponse dynamique du pont pour les trois cas de chargement obtenue par le logiciel CLEF et celle obtenue par la référence [ZHU02].

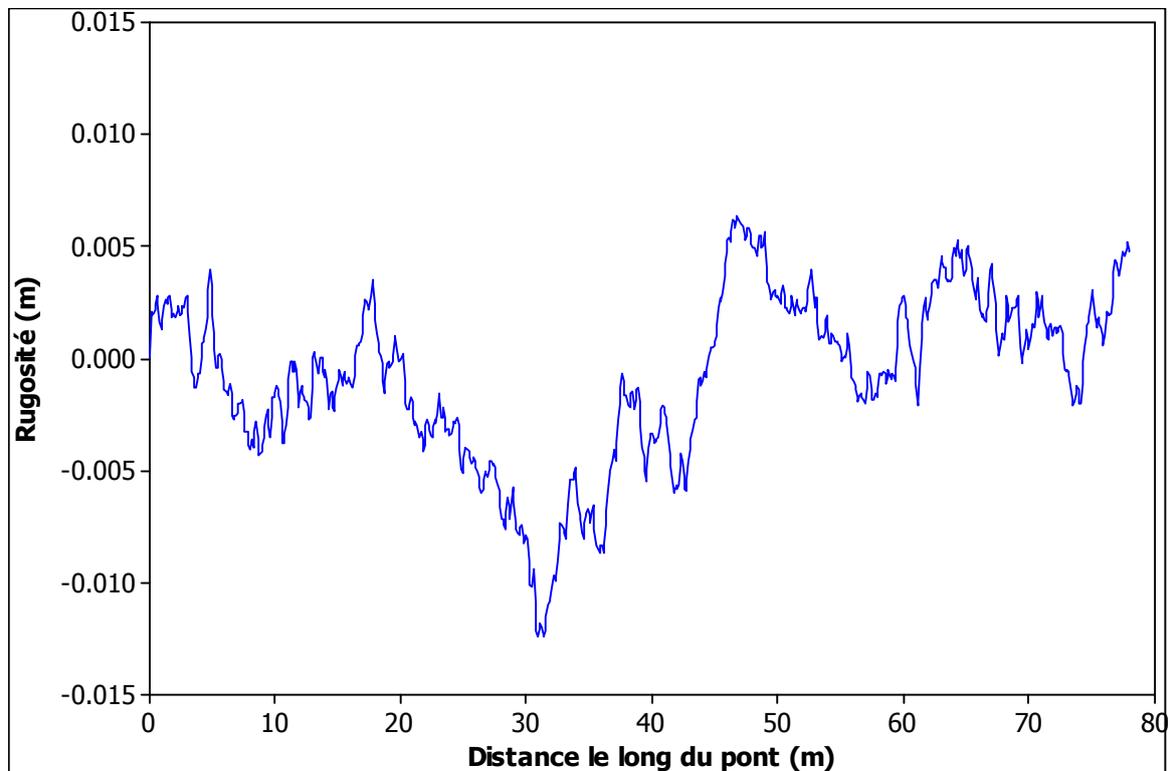


Figure 2.15. Profil de la chaussée utilisé sous CLEF.

2.5 Conclusion

Après l'exploitation de CLEF et UNIX, nous pouvons conclure que le logiciel CLEF peut être utilisé pour n'importe quelle structure. Les résultats obtenus par éléments finis sont proches de ceux trouvés analytiquement. La bonne correspondance entre les résultats confirme la validité du logiciel CLEF.

Le logiciel CLEF permet de simuler le passage de poids lourds sur des ponts en béton. Le comportement dynamique des dalles de roulement des ponts peut donc être analysé par une approche numérique. De plus CLEF est équipé de plusieurs modèles de véhicules, ce qui nous permet de l'utiliser pour faire autant de simulations.

CHAPITRE III

DEVELOPPEMENT D'UN LOGICIEL INTERACTIF POUR L'ETUDE DE L'INTERACTION PONT-VEHICULE

3.1 Introduction

Ce chapitre représente la contribution principale dans notre travail. Deux objectifs sont tracés, le premier consiste à développer un logiciel interactif permettant l'étude de l'interaction pont-véhicule lors du passage d'un ou de plusieurs véhicules sur un pont de chaussée. Ce logiciel est similaire au logiciel CLEF, mais son mode interactif et les bases théoriques sur lequel se base le rend beaucoup plus accessible et facile à exploiter. Le deuxième objectif consiste à présenter une nouvelle méthode de résolution de l'équation du mouvement du pont couplée. Sachant que dans la littérature les auteurs utilisent la méthode de Rayleigh-Ritz pour résoudre cette équation, cette dernière méthode nécessite d'effectuer un grand nombre d'intégration en plus. Dans les travaux réalisés au sein de laboratoire de Mécanique et Structures les auteurs [REZ08], montrent que la méthode de Rayleigh-Ritz tel qu'elle a été utilisée dans [ZHU02] et [MAR99], ne permet pas la prise en compte des modes couplés d'ordre 3 ((1.3), (2.3), ...). Pour cette raison, dans la thèse de [REZ08], il présente une résolution approchée de l'équation de mouvement couplé du pont par sa résolution au sens de la moyenne, ce qui a donné des résultats meilleurs. Nous présentons dans ce chapitre une approche beaucoup plus précise que celle présentée dans [REZ08] et qui consiste à résoudre l'équation du mouvement du pont au sens de la distribution. Cette méthode peut être considérée comme une résolution exacte de l'équation du mouvement.

L'interaction dynamique pont-véhicule, au moment où un véhicule traverse le pont est un phénomène très complexe car, pour que l'étude soit significative, plusieurs facteurs doivent être tenus en compte. Les facteurs importants intervenant dans l'interaction dynamique pont-véhicule et que lors de la modélisation soient présents sont : la structure du pont, le véhicule comme étant la source d'excitation et enfin les défauts (irrégularités) de la chaussée comme interface entre le véhicule et le pont.

Dans ce chapitre, le pont est modélisé par une plaque mince orthotrope, multi-travées. Le véhicule est modélisé par un système dynamique H20-44 à sept (07) degrés de liberté conformément à la norme AASHTO (American Association of State Highway and Transportation Officials) [AAS 05]. Les irrégularités de la chaussée sont modélisées par une fonction aléatoire. Pour la résolution des équations de mouvements, nous avons fait appel à la méthode modale et la méthode d'intégration de NewMark. Nous utilisons un algorithme de résolution des équations de mouvement pont-véhicule d'une manière couplée et selon un calcul itératif.

3.2 Hypothèses de modélisation

Les hypothèses suivantes constituent la base du développement mathématique présentée par [ZHU 02] et [MAR 99].

- (1) La dalle du pont est modélisée par une plaque rectangulaire orthotrope, multi-travées, continue sur les appuis et simplement appuyée en $x = 0$ et $x = L$ et libre en $y = 0$ et $y = b$ (figure 3.1);
- (2) Le pont a un comportement élastique linéaire et les effets secondaires (cisaillement et inertie de rotation) sont négligés;
- (3) Les appuis intermédiaires sont linéaires, rigides et orthogonaux aux bords libres du pont;
- (4) Le véhicule est modélisé par un modèle dynamique H20-44 à sept (07) degrés de liberté conformément à la norme AASHTO [AAS 05];
- (5) Les pneus du véhicule restent en contact permanent avec la chaussée;
- (6) Le glissement relatif du corps rigide du véhicule par rapport aux essieux est considéré négligeable;
- (7) Les rotations du véhicule sont considérées petites;
- (8) Le comportement des amortisseurs du véhicule est linéaire;
- (9) Comme les dimensions (longueur et largeur) du pont sont beaucoup plus grandes par rapport à son épaisseur, la théorie des plaques minces est utilisée.

3.3 Modélisation du pont

Le pont est modélisé par une plaque mince orthotrope à trois travées (figure 3.1). Sur la base des hypothèses (1), (2) et (9), l'équation du mouvement du pont peut être écrite sous la forme suivante :

$$\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \sum_{k=1}^{nf} F_{pk}^{int} \delta(x - x_k(t), y - y_k) \quad (3.1)$$

Avec $\bar{m} = \rho h$ est la masse par unité de surface de la plaque, $D_x = E_x h^3 / 12 (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$ est la rigidité de flexion selon la direction x, $D_y = E_y h^3 / 12 (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$ est la rigidité de flexion selon la direction y, $H = \nu_{xy} D_y + 2D_{xy}$ est la rigidité de flexion équivalente, c est la constante d'amortissement du pont, F_{pk}^{int} est la force d'interaction entre la k^{ème} roue du véhicule et le pont, $(x_k(t), y_k)$ est la position de la k^{ème} force d'interaction sur le pont, ν_{xy} et ν_{yx} sont les coefficients de Poisson selon les directions x et y respectivement, $D_{xy} = G_{xy} h^3 / 12$ est la rigidité de torsion, G_{xy} est le module de cisaillement, E_x et E_y sont les modules d'élasticité de Young selon les directions x et y respectivement.

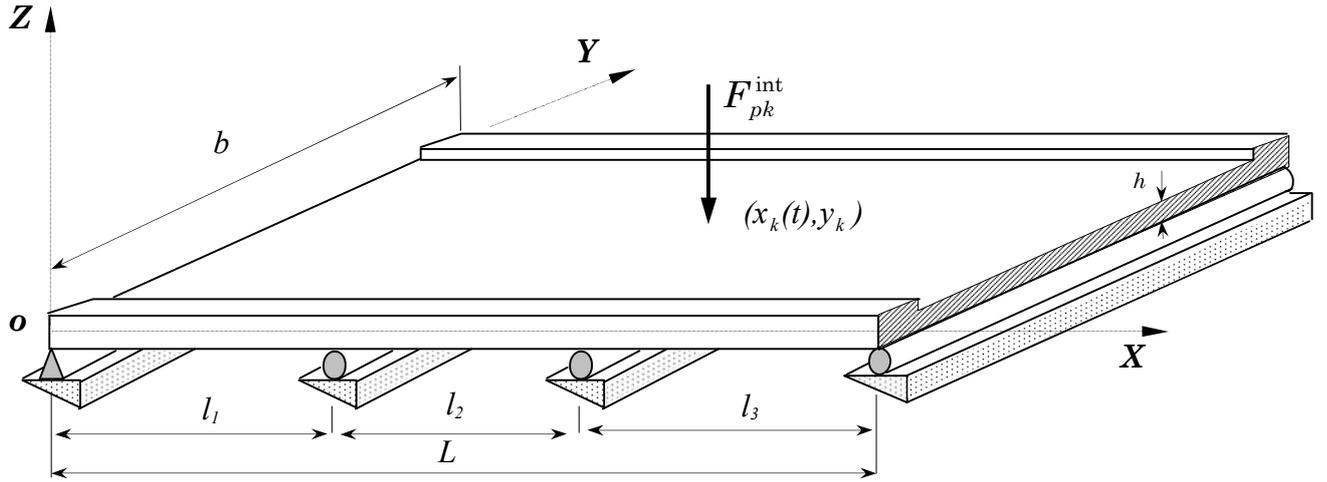


Figure 3.1. Pont modélisé par une plaque mince orthotrope, à trois travées.

On suppose que le véhicule se déplace le long du pont ce que signifie que les y_k sont constantes. Comme la vitesse de roulement est considérée constante, donc $x_k(t) = v_x \cdot t_k$ (avec v_x la vitesse linéaire du véhicule, t_k est le temps au point k).

L'équation du mouvement (3.1) sera résolue par la méthode de *superposition modale*. En décomposant le déplacement vertical du pont dans la base modale comme suit :

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \phi_{ij}(x, y) \cdot q_{ij}(t) \quad (3.2)$$

Où $\phi_{ij}(x, y)$ sont les modes propres d'une plaque mince orthotrope et multi-travées auxquelles sont associées les pulsations propres ω_{ij} , $q_{ij}(t)$ sont les coordonnées généralisées.

En remplaçant l'expression (3.2) dans l'équation de mouvement (3.1), puis multipliant les deux membres par $\phi_{kl}(x, y)$ et on intègre sur toute la surface du pont, on obtient :

$$\begin{aligned} & \iint_S \bar{m} \sum_{i,j=1}^{n,m} \phi_{ij}(x, y) \ddot{q}_{ij}(t) \phi_{kl}(x, y) dx dy + \iint_S c \sum_{i,j=1}^{n,m} \phi_{ij}(x, y) \dot{q}_{ij}(t) \phi_{kl}(x, y) dx dy + \iint_S D_x \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} q_{ij}(t) \phi_{kl}(x, y) dx dy \\ & + 2 \iint_S H \frac{\partial^2 \phi_{ij}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_{ij}}{\partial y^2} q_{ij}(t) \phi_{kl}(x, y) dx dy + \iint_S D_y \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} q_{ij}(t) \phi_{kl}(x, y) dx dy \\ & = - \iint_S \sum_{k=1}^{nf} F_{pk}^{int} \phi_{kl} \delta(x - x_k(t), y - y_k) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Les modes propres sont orthogonaux, alors :

$$\iint_S \bar{m} \phi_{ij}(x, y) \phi_{kl}(x, y) dx dy = \begin{cases} 0 & \text{pour } ij \neq kl \\ M_{ij} & \text{pour } ij = kl \end{cases}$$

$$\iint_S c \phi_{ij}(x, y) \phi_{kl}(x, y) dx dy = \begin{cases} 0 & \text{pour } ij \neq kl \\ C_{ij} = 2\xi_{ij} \omega_{ij} M_{ij} & \text{pour } ij = kl \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\iint_S \left(D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} \right) \phi_{kl}(x, y) dx dy = \begin{cases} 0 & \text{pour } ij \neq kl \\ \omega_{ij}^2 M_{ij} = K_{ij} & \text{pour } ij = kl \end{cases}$$

Où ξ_{ij} sont les facteurs d'amortissement modaux visqueux du pont.

En tenant compte de l'orthogonalité dont les relations (3.4), les termes dans l'équation (3.3), qui vérifient $ij \neq kl$ disparaissent et il reste (i, j) équations modales découplées :

$$M_{ij} \ddot{q}_{ij}(t) + C_{ij} \dot{q}_{ij}(t) + K_{ij} q_{ij}(t) = F_{ij}(t) \quad (3.5)$$

Avec :

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \iint_S \bar{m} \phi_{ij}^2(x, y) dx dy \\ C_{ij} &= \iint_S c \phi_{ij}^2(x, y) dx dy = 2\xi_{ij} \omega_{ij} M_{ij} \\ K_{ij} &= \iint_S \left(D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} \right) \phi_{ij} dx dy = M_{ij} \omega_{ij}^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} F_{ij} &= - \iint_S \sum_{k=1}^{nf} F_{pk}^{int} \delta(x - x_k(t), y - y_k) \phi_{ij}(x, y) ds \\ &= - \sum_{k=1}^{nf} F_{pk}^{int}(x_k, y_k) \phi_{ij}(x_k, y_k) \end{aligned}$$

3.4 Détermination des fréquences et des modes propres du pont par la résolution de l'équation du mouvement au sens de la distribution.

Afin d'étudier les vibrations forcées, on doit en premier lieu étudier les vibrations libres pour déterminer les fréquences et les modes propres du pont, pour cela, on considère l'équation de mouvement en vibration libre sans amortissement suivante :

$$\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (3.7)$$

En vibration libre, le déplacement vertical du pont peut s'exprimer par [MAR99]:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \phi_{ij}(x, y) e^{j \omega_{ij} t} \quad (3.8)$$

Avec: ω_{ij} et $\phi_{ij}(x, y)$ sont respectivement les pulsations et les modes propres du pont multi-travées et les a_{ij} sont les amplitudes modales.

En remplaçant l'expression (3.8) dans l'équation (3.7), on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \left[-\bar{m} \omega_{ij}^2 \phi_{ij}(x, y) + D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} \right] e^{j\omega_{ij}t} = 0$$

En résolvant l'équation spatiale suivante, on détermine les modes propres du pont:

$$D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} - \bar{m} \omega_{ij}^2 \phi_{ij}(x, y) = 0 \quad (3.9)$$

Plusieurs auteurs [ZHU 02], [MAR 99] utilisent la méthode variationnelle de Rayleigh-Ritz pour déterminer les fréquences et les modes propres du pont en employant les modes propres des poutres comme fonctions d'approximation.

Ces auteurs décomposent $\phi_{ij}(x, y)$ en un produit de deux fonctions admissibles $\varphi_i(x)$ et $\psi_j(y)$ qui sont respectivement : les modes propres d'une poutre continue en appuis simples et les modes propres d'une poutre libre. Par conséquent, des centaines d'intégrales doivent être évalué pour calculer les matrices de masse et de rigidité du pont, pour résoudre le problème aux fréquences et modes propres.

Dans l'étude de [REZ 08], il considère que selon la direction x, les modes propres du pont sont celles d'une poutre continue en appuis simples présentées par une fonction $\varphi_i(x)$ et selon la direction y, les modes propres sont présentées par une fonction $h_{ij}(y)$ vérifiant les conditions aux limites d'une plaque aux bords libres $y = 0$ et $y = b$. Il résout l'équation du mouvement couplée au sens de la moyenne pour éviter d'effectuer un grand nombre d'intégration. Cette méthode consiste à vérifier l'équation (3.9) au sens de la moyenne, par la multiplication de cette dernière par la déformée $\varphi_j(x)$ et de l'intégrer sur la longueur du pont de 0 à L, en remplaçant tout d'abords dans l'équation (3.9) $\phi_{ij}(x, y)$ par l'expression suivante:

$$\phi_{ij}(x, y) = \varphi_i(x) h_{ij}(y) \quad (3.10)$$

Dans le cas d'un pont à trois travées, les déformées propres selon x sont ceux d'une poutre à trois travées qui sont données par [REZ08] :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} A_{1i} \left(\sin k_i x - \frac{\sin k_i l_1}{sh k_i l_1} sh k_i x \right) & \text{pour } 0 \leq x \leq l_1 \\ A_{2i} \left(\sin k_i (x-l_1) - \frac{\sin k_i l_2}{sh k_i l_2} sh k_i (x-l_1) \right) + B_{2i} (\cos k_i (x-l_1) \\ \quad - ch k_i (x-l_1) + \frac{ch k_i l_2 - \cos k_i l_2}{sh k_i l_2} sh k_i (x-l_1)) & \text{pour } l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \\ A_{3i} \left(\sin k_i (l-x) - \frac{\sin k_i l_3}{sh k_i l_3} sh k_i (l-x) \right) & \text{pour } l_1 + l_2 \leq x \leq l \end{cases} \quad (3.11)$$

Avec k_i le nombre d'onde obtenu en résolvant l'équation aux fréquences (voir Annexe 1).

Les dérivées de (3.11) sont :

$$\varphi''_i(x) = \begin{cases} -k_i^2 A_{1i} \left(\sin k_i x + \frac{\sin k_i l_1}{sh k_i l_1} sh k_i x \right) & \text{pour } 0 \leq x \leq l_1 \\ -k_i^2 A_{2i} \left(\sin k_i (x - l_1) + \frac{\sin k_i l_2}{sh k_i l_2} sh k_i (x - l_1) \right) - k_i^2 B_{2i} (\cos k_i (x - l_1)) \\ \quad + ch k_i (x - l_1) - \frac{ch k_i l_2 - \cos k_i l_2}{sh k_i l_2} sh k_i (x - l_1) & \text{pour } l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \\ -k_i^2 A_{3i} \left(\sin k_i (l - x) + \frac{\sin k_i l_3}{sh k_i l_3} sh k_i (l - x) \right) & \text{pour } l_1 + l_2 \leq x \leq l \end{cases}$$

avec $\phi''_i(x) = -k_i^2 \psi_i(x)$

$$\varphi'''_i(x) = \begin{cases} k_i^4 A_{1i} \left(\sin k_i x - \frac{\sin k_i l_1}{sh k_i l_1} sh k_i x \right) & \text{pour } 0 \leq x \leq l_1 \\ k_i^4 A_{2i} \left(\sin k_i (x - l_1) - \frac{\sin k_i l_2}{sh k_i l_2} sh k_i (x - l_1) \right) + k_i^4 B_{2i} (\cos k_i (x - l_1)) \\ \quad - ch k_i (x - l_1) + \frac{ch k_i l_2 - \cos k_i l_2}{sh k_i l_2} sh k_i (x - l_1) & \text{pour } l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \\ k_i^4 A_{3i} \left(\sin k_i (l - x) - \frac{\sin k_i l_3}{sh k_i l_3} sh k_i (l - x) \right) & \text{pour } l_1 + l_2 \leq x \leq l \end{cases}$$

(3.12)

Dans le présent travail, on propose de vérifier l'équation (3.9) pour chaque valeur de x pris le long du pont. Cette vérification paraît très difficile voir impossible, mais vue l'évolution de l'outil informatique, la puissance des ordinateurs et avec un traitement adéquat des résultats, cela devient possible.

En remplaçant (3.10) dans (3.9), on obtient :

$$D_x \phi'''_i h_{ij} + 2H \phi''_i \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2} + D_y \phi_i \frac{d^4 h_{ij}}{dy^4} - \bar{m} \omega_{ij}^2 \phi_i h_{ij} = 0 \quad (3.13)$$

Divisons (3.13) par $D_y \phi_i$, on obtient :

$$\frac{d^4 h_{ij}}{dy^4} + \frac{D_x \phi'''_i}{D_y \phi_i} h_{ij} + \frac{2H \phi''_i}{D_y \phi_i} \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2} - \frac{\bar{m} \omega_{ij}^2 \phi_i}{D_y \phi_i} h_{ij} = 0 \quad (3.14)$$

Cette équation peut se réécrire sous la forme simplifiée suivante :

$$\frac{d^4 h_{ij}}{dy^4} + \frac{2H \phi''_i}{D_y \phi_i} \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2} + \left(\frac{D_x \phi'''_i - \bar{m} \omega_{ij}^2 \phi_i}{D_y \phi_i} \right) h_{ij} = 0 \quad (3.15)$$

avec $\phi'''_i = k_i^4 \phi_i$ et posons $k_{1i}^2 = \frac{\phi''_i}{\phi_i}$, on obtient :

Et avec $\phi''_i(x) = -k_i^2 \psi_i(x)$ [REZ 08], pour le cas de la résolution au sens de la moyenne.

$$\frac{d^4 h_{ij}}{dy^4} - \frac{2Hk_{li}^2}{D_y} \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2} + \left(\frac{D_x k_i^4 - \bar{m} \omega_{ij}^2}{D_y} \right) h_{ij} = 0 \quad (3.16)$$

Dans l'équation (3.16), la seule dépendance en x est dans l'expression de k_{li} , nous allons donc résoudre cette dernière équation pour chaque mode i et pour chaque valeur de x le long du pont.

La forme générale de la solution de l'équation (3.16) est :

$$h_{ij}(y) = A_{ij} e^{s_{ij} y} \quad (3.17)$$

En remplaçant (3.17) dans (3.16) on obtient :

$$S_{ij}^4 - \frac{2Hk_{li}^2}{D_y} S_{ij}^2 + \left(\frac{D_x k_i^4 - \bar{m} \omega_{ij}^2}{D_y} \right) = 0 \quad (3.18)$$

Les solutions de (3.18) sont :

$$s_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{D_y}} \sqrt{H k_{li}^2 + \sqrt{H^2 k_{li}^4 - D_y (D_x k_i^4 - \bar{m} \omega_{ij}^2)}} \pm r_{1ij} \quad (3.19)$$

$$s_2 = \pm j \frac{1}{\sqrt{D_y}} \sqrt{H k_{li}^2 - \sqrt{H^2 k_{li}^4 - D_y (D_x k_i^4 - \bar{m} \omega_{ij}^2)}} \pm jr_{2ij}$$

Les nombres d'ondes r_{1ij} et r_{2ij} sont liés par les pulsations ω_{ij} . En remplaçant (3.19) dans (3.17), on obtient :

$$h_{ij} = A_{1ij} e^{r_{1ij} y} + A_{2ij} e^{-r_{1ij} y} + A_{3ij} e^{jr_{2ij} y} + A_{4ij} e^{-jr_{2ij} y} \quad (3.20)$$

Où A_{1ij} , A_{2ij} , A_{3ij} et A_{4ij} sont des constantes d'intégration.

Les fonctions exponentielles peuvent être remplacées par des fonctions trigonométriques et hyperboliques :

$$e^{\pm r_1 y} = \cosh r_1 y \pm \sinh r_1 y \quad (3.21)$$

$$e^{\pm jr_2 y} = \cos r_2 y \pm j \sin r_2 y$$

L'expression (3.20) prend la forme suivante :

$$h_{ij}(y) = C_{ij} \sin r_2 y + D_{ij} \cos r_2 y + E_{ij} \sinh r_1 y + F_{ij} \cosh r_1 y \quad (3.22)$$

C_{ij} , D_{ij} , E_{ij} et F_{ij} sont des constantes d'intégration. Elles sont déterminées par l'application des conditions aux limites aux bords libres $y = 0$ et $y = b$. Sur ces bords, le moment fléchissant et l'effort tranchant sont nuls, alors :

$$\begin{aligned}
 & D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,0,t) + v_{yx} D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,0,t) = 0 \\
 & - \left(D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}(x,0,t) + (v_{yx} D_x + 4D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}(x,0,t) \right) = 0 \\
 & D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,b,t) + v_{yx} D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,b,t) = 0 \\
 & - \left(D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}(x,b,t) + (v_{yx} D_x + 4D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}(x,b,t) \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

En tenant compte des expressions (3.8) et (3.10), les conditions aux limites (3.23) seront sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & D_y \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2}(0) - v_{yx} D_x k_{1i}^2 h_{ij}(0) = 0 \\
 & D_y \frac{d^3 h_{ij}}{dy^3}(0) - (v_{yx} D_x + 4D_{xy}) k_{1i}^2 \frac{dh_{ij}}{dy}(0) = 0 \\
 & D_y \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2}(b) - v_{yx} D_x k_{1i}^2 h_{ij}(b) = 0 \\
 & D_y \frac{d^3 h_{ij}}{dy^3}(b) - (v_{yx} D_x + 4D_{xy}) k_{1i}^2 \frac{dh_{ij}}{dy}(b) = 0
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

En appliquant les conditions aux limites (3.24) à l'expression (3.22), on obtient le système suivant (par omission des indices dans r_{1ij} , r_{2ij} , α_{ij} , θ_{ij} , γ_{ij} et χ_{ij}):

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & \theta \\ \gamma & 0 & \chi & 0 \\ \alpha \sin r_2 b & \alpha \cos r_2 b & \theta \operatorname{sh} r_1 b & \theta \operatorname{ch} r_1 b \\ \gamma \cos r_2 b & -\gamma \sin r_2 b & \chi \operatorname{ch} r_1 b & \chi \operatorname{sh} r_1 b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{ij} \\ D_{ij} \\ E_{ij} \\ F_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.25}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \alpha &= -D_y r_2^2 - v_{yx} D_x k_{1i}^2 \\
 \theta &= D_y r_1^2 - v_{yx} D_x k_{1i}^2 \\
 \gamma &= -D_y r_2^3 - (v_{yx} D_x + 4D_{xy}) r_2 k_{1i}^2 \\
 \chi &= D_y r_1^3 - (v_{yx} D_x + 4D_{xy}) r_1 k_{1i}^2
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

L'annulation du déterminant de la matrice du système (3.25) permet d'aboutir à l'équation aux fréquences propres suivante.

$$2\alpha\theta\gamma\chi(\cos r_2 b \operatorname{ch} r_1 b - 1) + (\theta^2 \gamma^2 - \alpha^2 \chi^2) \sin r_2 b \operatorname{sh} r_1 b = 0 \tag{3.27}$$

On résout donc l'équation de fréquences (3.27) pour chaque valeur de x prise le long du pont, par la suite on calcul les racines r_1 et r_2 . En réinjectant r_1 et r_2 dans les expressions (3.19), on obtient les pulsations propres du pont ω_{ij} . Sur la base de toutes les pulsations propres calculées pour les différentes valeurs de x , on procédera à une étude statistique (de vérification) pour extraire les pulsations propres les plus précises ainsi que les positions de x le long du pont correspondantes.. Pour déterminer les modes propres du pont, on peut simplifier le système (3.25) par la normalisation de la première constante d'intégration C_{ij} ($C_{ij} = 1$). On aura donc quatre équations à trois inconnus. On simplifie pour avoir trois équations parmi les quatre :

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \theta \\ 0 & x & 0 \\ \alpha \cos r_2 b & \theta \operatorname{sh} r_1 b & \theta \operatorname{ch} r_1 b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{ij} \\ E_{ij} \\ F_{ij} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma \\ \alpha \sin r_2 b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

D'où on obtient les expressions des constantes D_{ij}, E_{ij}, F_{ij} :

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \left(\alpha \sin r_2 b - \frac{\gamma \theta}{x} \operatorname{sh} r_1 b \right) / (\alpha \operatorname{ch} r_1 b - \alpha \cos r_2 b) \\ E_{ij} &= -\frac{\gamma}{x} \\ F_{ij} &= \left(-\alpha \sin r_2 b + \frac{\gamma \theta}{x} \operatorname{sh} r_1 b \right) / (\theta \operatorname{ch} r_1 b - \theta \cos r_2 b) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Donc les modes propres sont :

$$\varphi_{ij}(x, y) = \phi_i(x) \cdot \{ \sin r_2 y + D_{ij} \cdot \cos r_2 y + E_{ij} \cdot \operatorname{sh} r_1 y + F_{ij} \cdot \operatorname{ch} r_1 y \} \quad (3.30)$$

3.5. La structure du logiciel développé

Sur la base des travaux réalisés ces dernières années au sein du Laboratoire de Mécanique et Structures, concernant la formulation mathématique du phénomène d'interaction pont-véhicule lors du passage des véhicules roulants à différentes vitesses par la résolution de l'équation du mouvement du pont en premier lieu au sens de la moyenne et par la suite au sens de la distribution. Nous avons développé un logiciel interactif en C++ permettant le calcul du comportement dynamique des ponts de chaussées lors du passage de plusieurs charges mobiles et en tenant compte du profil de la chaussée.

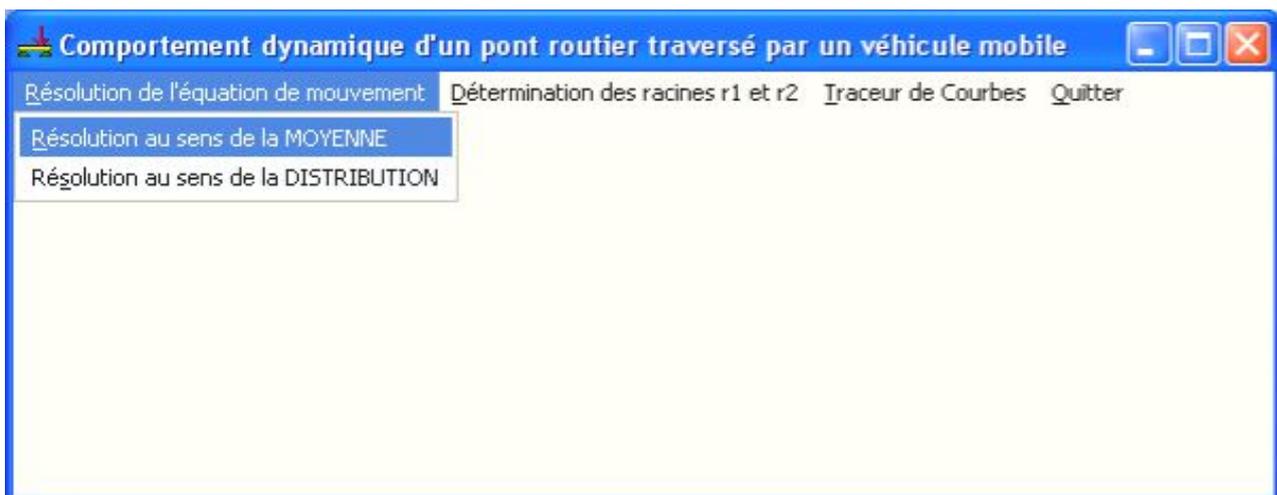
3.5.1 Interfaces

Fenêtre de démarrage:



Fenêtre 3.1. Fenêtre de démarrage du logiciel.

Fenêtre principale:

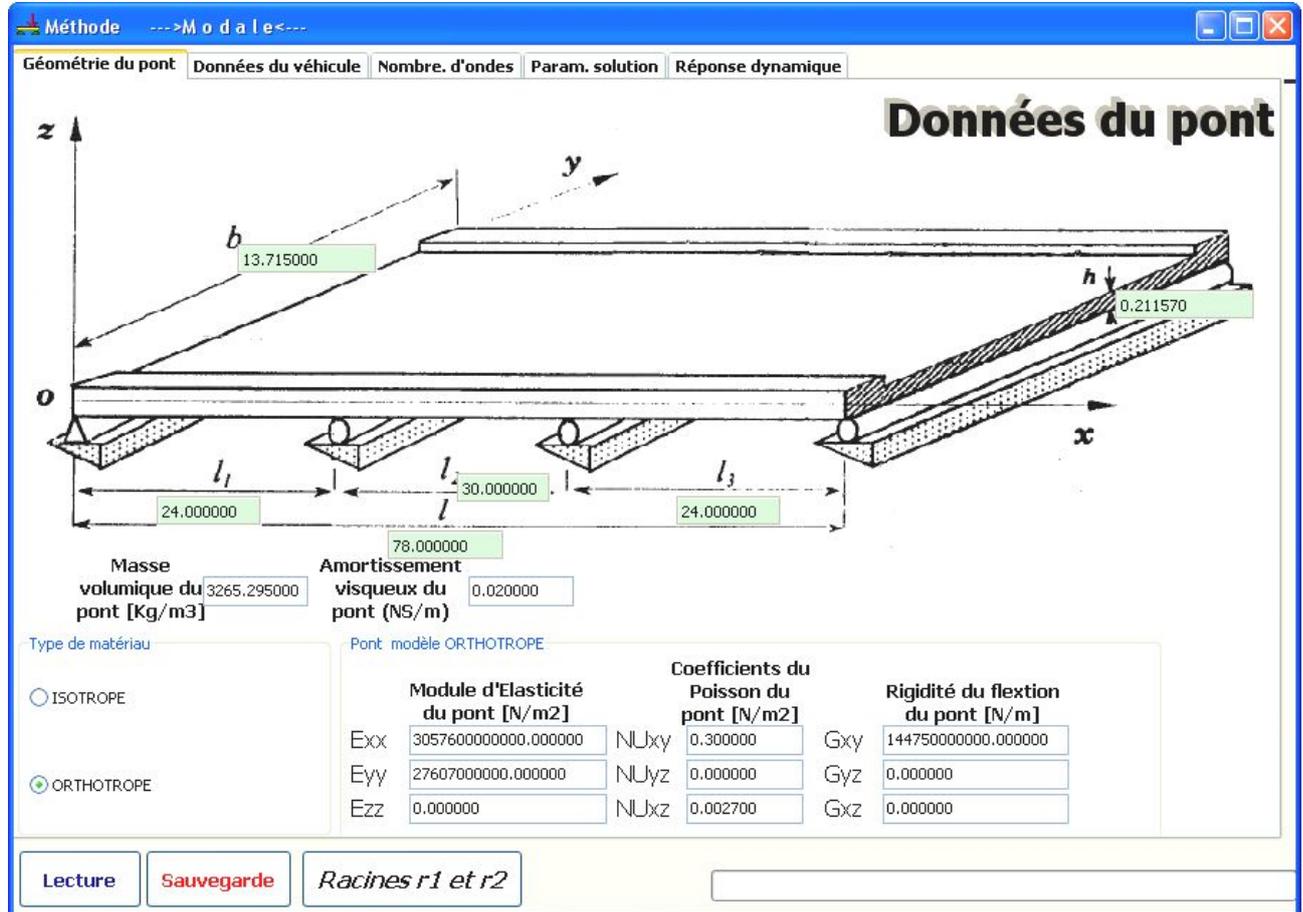


Fenêtre 3.2. Fenêtre principale du logiciel.

Le logiciel est interactif, on peut à partir de la fenêtre principale choisir la méthode de résolution de l'équation du mouvement, ou bien la détermination des racines r_1 et r_2 soit par la résolution au sens de la moyenne où résolution au sens de la distribution.

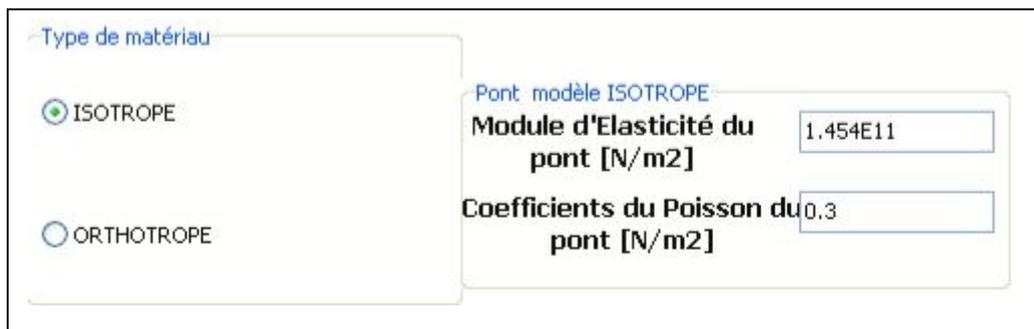
Saisie de la base de données du problème: La saisie est organisée en plusieurs étapes :

- Etape 1 : Données du Pont, la saisie des dimensions et des caractéristiques mécaniques du pont s'effectuent directement sur une fenêtre contenant le dessin du pont dans l'onglet géométrie du pont (voir Fenêtre 3.3) avec le choix de l'étude d'un pont isotrope ou orthotrope.



Fenêtre 3.3. Saisie des dimensions et les caractéristiques mécaniques du pont.

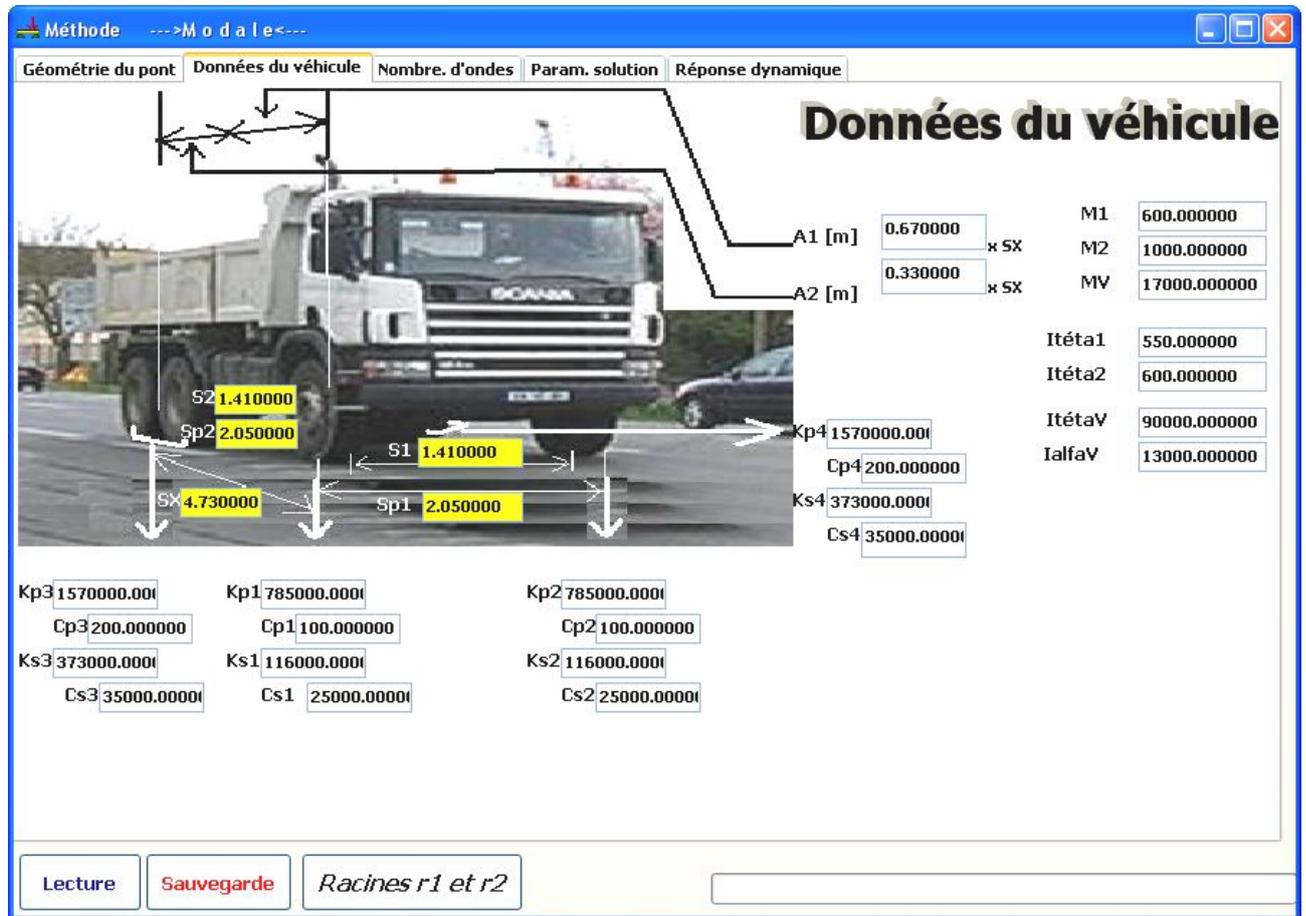
Si on choisit dans le type de matériau ISOTROPE, on aura l'affichage suivant.



Sur cette fenêtre on peut modifier le type de matériau (modèle du pont à étudier orthotrope ou isotrope) et selon le choix du modèle les caractéristiques mécaniques possibles seront affichées donnant la possibilité de saisir les valeurs de ces caractéristiques. Le modèle utilisé pour la résolution au sens de la moyenne est un pont à trois travées.

- Etape 2 : Données du véhicule :

Les données du véhicule sont saisies directement dans la fenêtre contenant le schéma d'un véhicule avec ces différentes dimensions et caractéristiques (voir Fenêtre 3.4).



Fenêtre 3.4. Saisie des dimensions et caractéristiques du véhicule.

3.5.2 Résolution au sens de la moyenne :

- Etape 1 : Détermination des racines r_{1ij} et r_{2ij} :

La résolution de l'équation de fréquence (3.27) permet la détermination des racines r_{1ij} et r_{2ij} au sens de la moyenne. Pour résoudre numériquement cette dernière équation, nous avons intégré dans le logiciel la méthode RugulaFalsi, (voir Figure 3.2). On procède à la résolution comme suit: On choisit la base de donnée du problème (fichier créer à l'étape 1 portant l'extension (*.DAT), contenant les dimensions et caractéristiques du pont et véhicule) en choisissant le bouton Choisir la base de données

En choisissant un intervalle de balayage (généralement entre 0 et 0.6 pour avoir les 10 premières racines) qui correspondent aux nombres d'ondes k_i en choisissant le bouton Chercher les K_i les valeurs des racines trouvées seront affichées sur la droite de la fenêtre (Fenêtre 3.5) en cliquant sur les racines le tableau des nombres d'ondes sera rempli.

Les étapes de résolution de l'équation (3.27) sont les suivant:

-Calcul des k_i à partir de la résolution de l'équation de fréquences d'une poutre multi travées (voir Annexe 1),

-Calcul des k_{1i} de l'expression $k_{1i} = k_i \sqrt{\int_0^l \psi_i \phi_i dx / \int_0^l \phi_i^2 dx}$ (3.31)

-En injectant les valeurs de k_{1i} dans l'équation de fréquences (3.19), cette dernière sera résolue numériquement, on obtient les racines r_{1ij} et r_{2ij} ,

-En remplaçant les racines r_{1ij} et r_{2ij} dans les expressions (3.19), on obtient les pulsations propres du pont ω_{ij} ,

-Les fréquences propres du pont sont affichées en bas de la fenêtre (3.5) en divisant $\omega_{ij} / 2.\pi$.

Cette fenêtre permet à partir d'un nombre d'onde k_i de résoudre l'équation de fréquence et trouvant des racines qui seront eux aussi affichées sur la droite de la fenêtre (fenêtre3.7), en cliquant sur une racine le programme calcule la pulsation propre correspondante de l'expression (3.19) et la valeur trouvée sera ajoutée au tableau des fréquences en bas de la fenêtre (3.5). En cliquant sur une valeur du tableau des fréquences les déformées propres du pont seront affichées sur la même fenêtre (déformés monodimensionnelles et bidimensionnelles).

Nous utilisons pour résoudre l'équation de fréquence la méthode numérique de *Regula Falsi* (False position) qui converge rapidement, mieux que d'autres méthodes numériques, ce qui ne nécessite pas un grand nombre d'itérations (gain du temps).

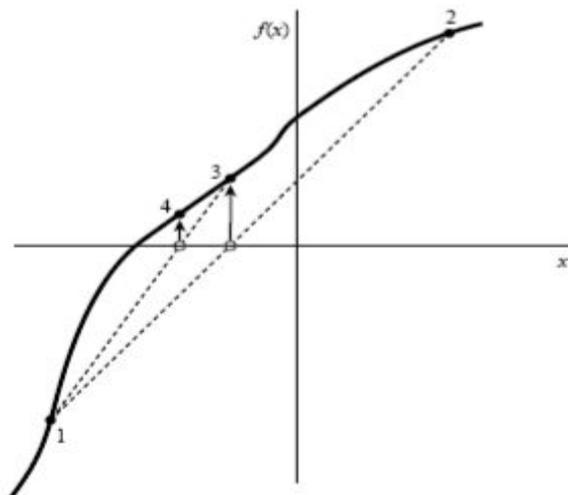


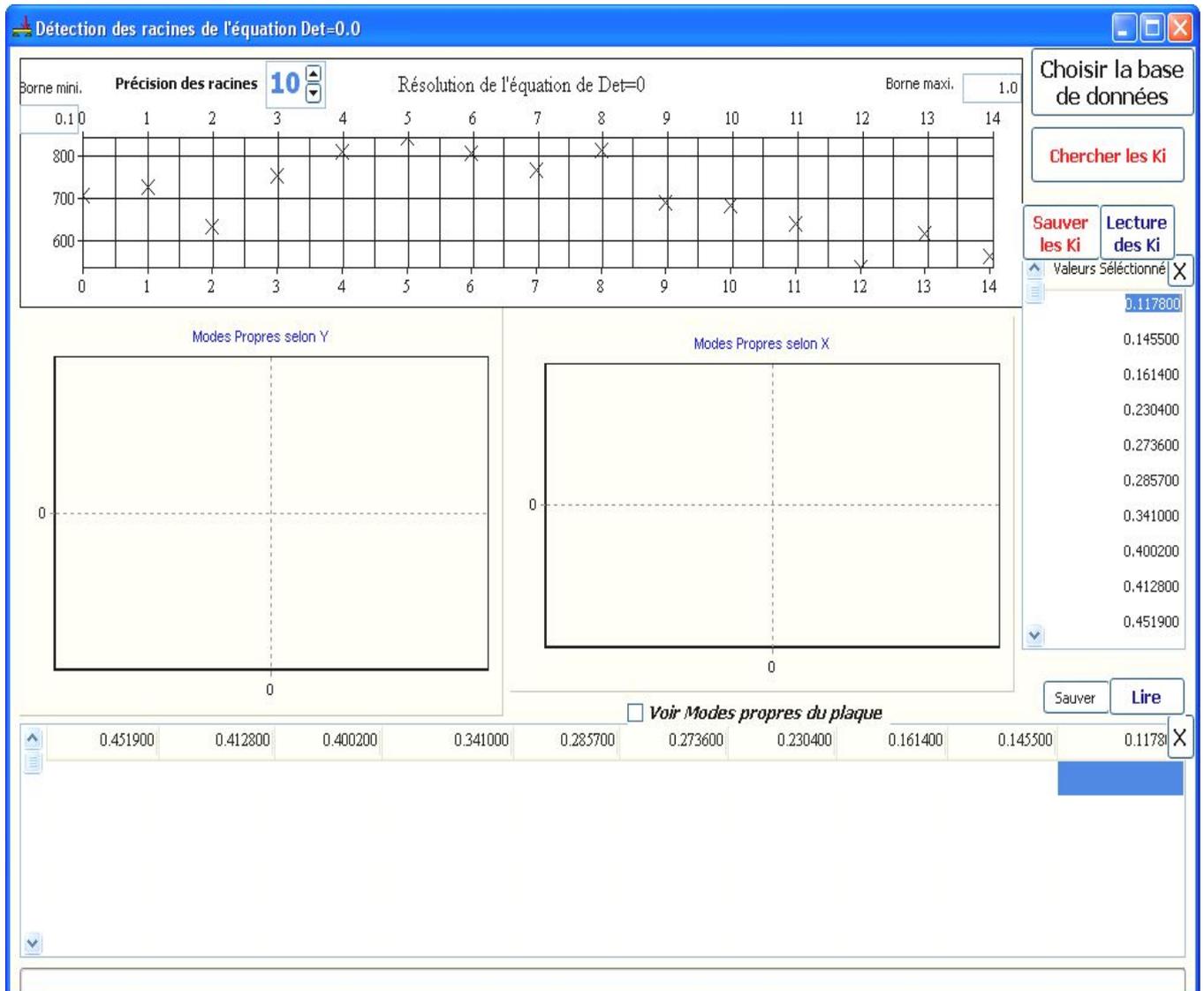
Figure 3.2. Choix de la valeur la plus inférieure sur l'intervalle de deux points (1 et 2).

Le choix sera pour la valeur du point (4) qui vérifie que $f_1 \times f_4$ est négatif.

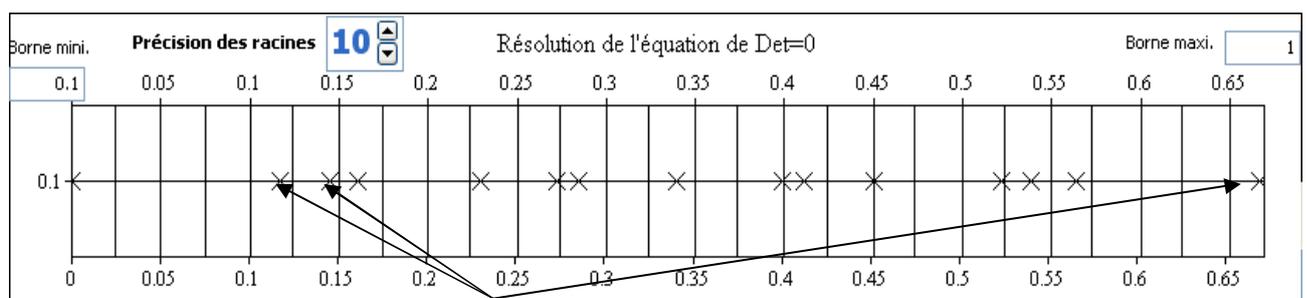
Pour trouver les nombres d'ondes k_i , en appliquant les conditions aux limites et de continuité (le cas d'une poutre multi travées) (voir annexe 1). On résout l'équation aux fréquences par la méthode ci-dessus pour les premières valeurs k_i qui annulent cette équation et on aura enfin sur la droite de la fenêtre (Fenêtre 3.6) les racines de cette équation qui ne sont que les premières valeurs de k_i désirées. La méthode de résolution est implémentée dans le logiciel élaboré.

Pour les pulsations propres de la même manière, on injecte les k_i trouvées un par un dans l'équation aux fréquences (3.27) et pour chaque k_i il existe une infinité de racines, en prenant les premiers en les remplaçant dans (3.19) on trouve les pulsations propres du pont.

L'utilisation de plusieurs algorithmes imbriqués nous a aidé de dépasser la nécessité d'autres outils (logiciels) tiers pour résoudre ces équations.



Fenêtre 3.5. Détermination des racines r_1 et r_2 .



Fenêtre 3.6. Droite des racines trouvées.

(1) ↓

	0.451900	0.412800	0.400200	0.341000	0.285700	0.273600	0.230400	0.161400	0.145500	0.117800
(2) →		50.000000	44.580002	34.360001	24.160000	22.270000	15.780000	7.740000	6.290000	4.128392
		50.380001	46.900002	35.970001	25.580000	23.709999	17.170000	8.790000	7.590000	5.457853
		52.099998	47.279999	40.049999	29.469999	27.940001	21.200001	12.000000	11.260000	6.290463
		56.279999	49.150002	46.820000	35.950001	34.810001	27.770000	17.690001	17.330000	9.080000
		63.209999	53.590000	56.250000	45.049999	44.270000	36.900002	26.188000	26.070000	15.070000

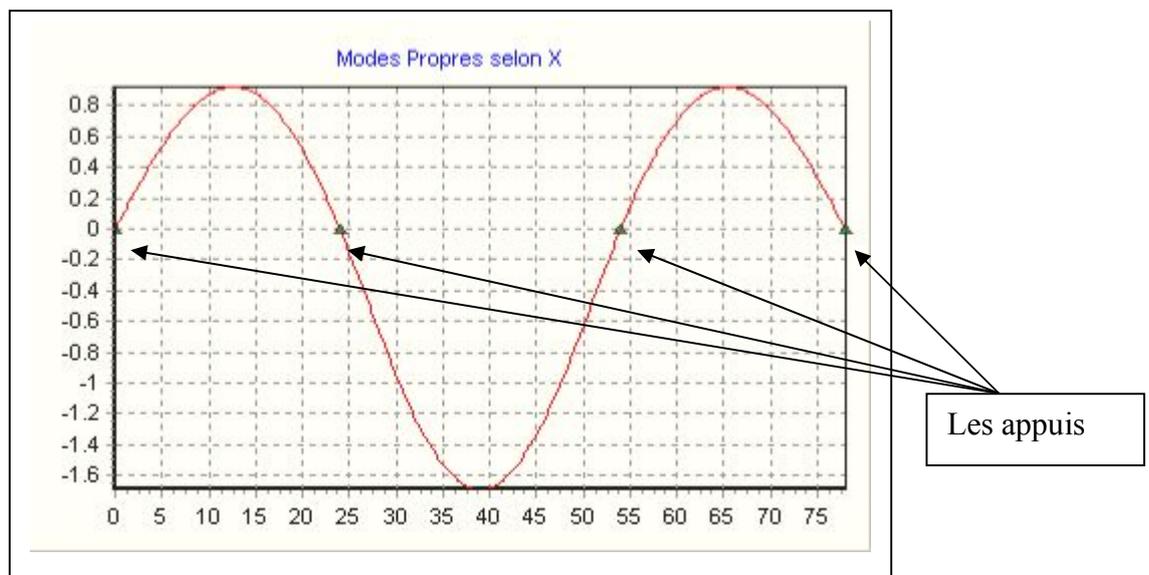
Fenêtre 3.7. Fréquences propres trouvées.

(1) La première ligne du tableau correspond aux nombres d'ondes k_i .

(2) Les fréquences propres trouvées (ordonnées en mode $(i \times j)$).

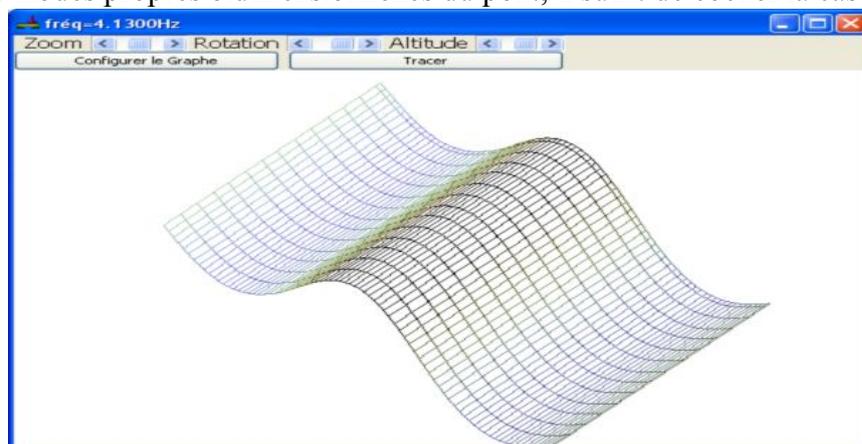
Exemples : La fréquence 5.457853 est la fréquence du mode (1.2)

La fréquence 17.330000 est la fréquence du mode (2.4)



Fenêtre 3.8. Déformée propre selon la longueur du pont.

Pour afficher les modes propres bidimensionnelles du pont, il suffit de cocher la case mode propres.



Fenêtre 3.9. Déformée propre du pont. De l'ordre (1.1)

- Etape 2 : Dans cette étape réside la différence entre la recherche des racines par la résolution de l'équation du mouvement couplé du pont au sens de la moyenne et au sens de la distribution.

Dans la résolution de l'équation au sens de la moyenne on doit calculer les k_{1i} après avoir effectué les intégrales de l'expression (3.31).

Dans la résolution de l'équation au sens de la distribution on ne fait aucune intégration, les k_{1i} sont calculés pour chaque valeur de x par l'expression suivante : $k_{1i}^2 = -\frac{\phi''}{\phi_i}$ (3.32)

Nombres d'ondes

Racines de l'équation aux fréquences les ((Ki))

La valeurs ((K1 i)) K1 i= K i . Racine(Int1/Int2)

0.118900	Kr1	0.118900
0.134700	Kr2	0.123700
0.162700	Kr3	0.132800
0.238000	Kr4	0.238000
0.254000	Kr5	0.241900
0.281400	Kr6	0.254100
0.357000	Kr7	0.357000
0.373000	Kr8	0.361000
0.400100	Kr9	0.373500
0.476000	Kr10	0.476000

Calcul des K1i =====>

Lire Les Ki trouvés de Det=0

Fenêtre 3.10. Nombres d'ondes et le calcul des K_{1i} expression (3.31).

- Etape 3 : Paramètres de la résolution

On définit les paramètres de stabilité de la méthode de Newmark Gamma et Betta, ainsi le facteur du profil de la chaussée et la précision des itérations.

Paramètres de stabilité de la méthode de Newmark

Gamma 0.5

Betta 0.25

Facteur du profil du chaussée

Coefficient Ar 15 10.E6

Précision du calcul

Epsilon 0.001

Paramètres de Newmark

Fenêtre 3.11. Paramètres de la résolution.

- Etape 4 : Trajectoire de où des véhicules sur le pont:

Nous définissons la trajectoire,

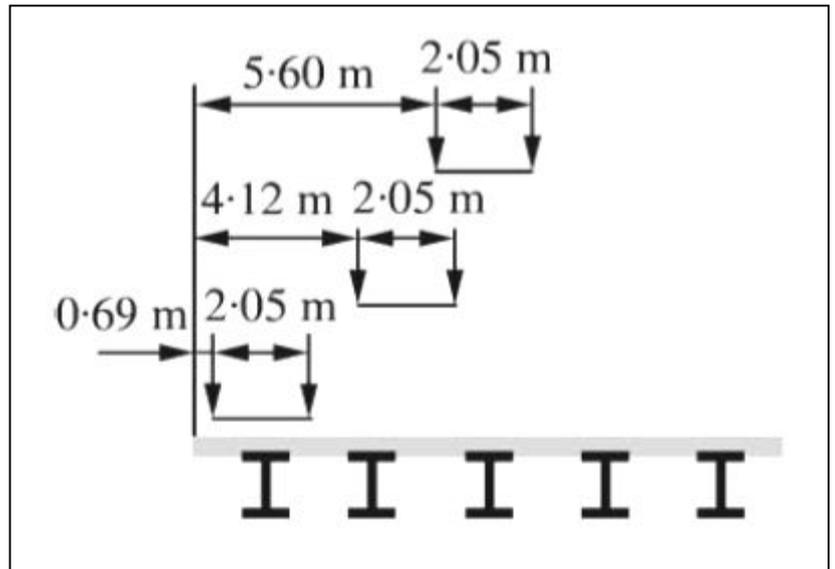
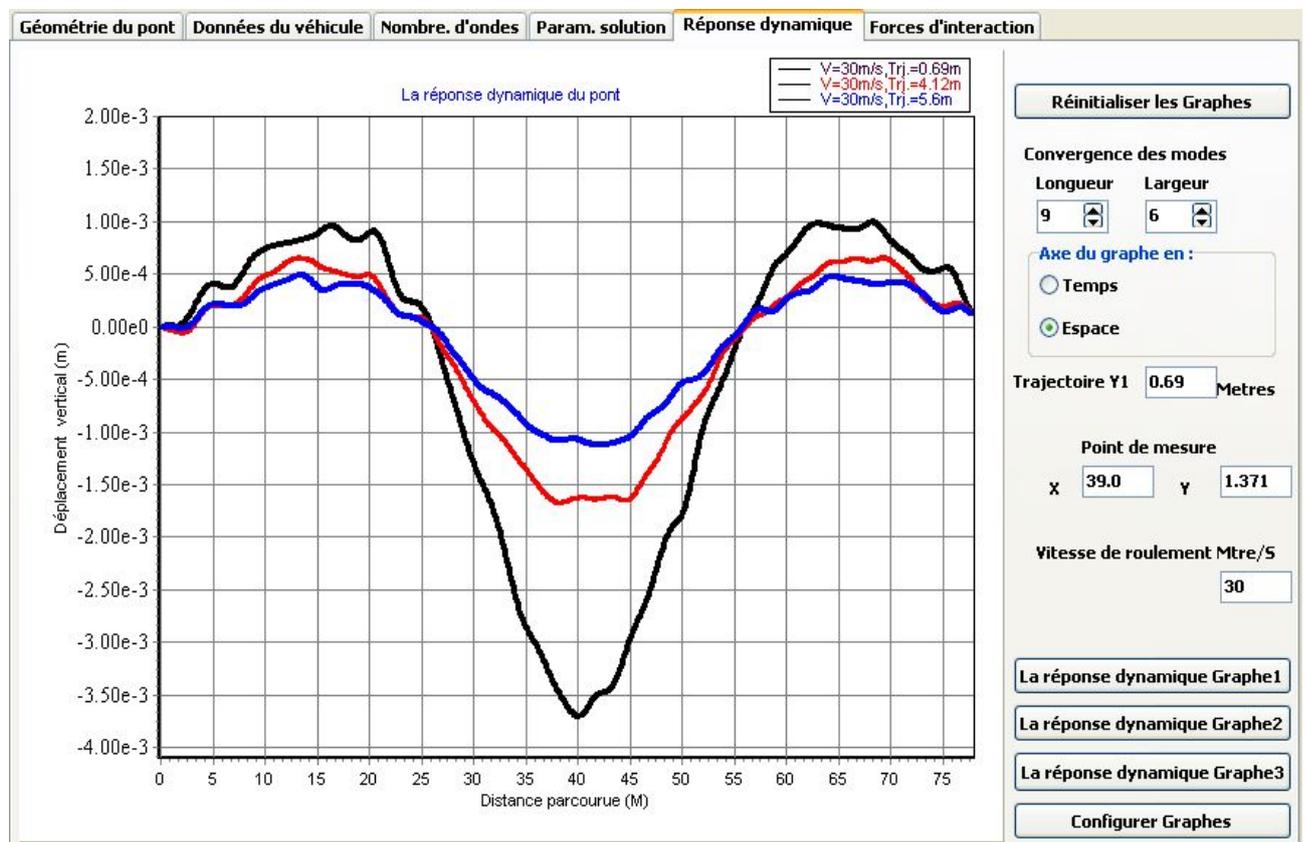


Figure 3.3. Trajectoires des véhicules.

- Etape 5 : Réponse dynamique du pont :

Après le choix de la trajectoire de passage du véhicule, on introduit les coordonnées du point où on veut avoir la réponse du pont et le type de la réponse temporelle ou spatiale. Nous cliquons après sur le bouton de la réponse dynamique (Fenêtre 3.12).



Fenêtre 3.12. Réponse dynamique du pont.

Nous pouvons calculer la réponse dynamique du pont pour différentes trajectoires, pour différentes vitesses et pour différents points de mesures. Il suffit de cliquer chaque fois sur le graphe pour le sauvegarder. Le programme de traçage des courbes permet la superposition de plusieurs courbes, pour différentes trajectoires, différentes vitesses de roulement et différents points de mesure.

3.5.3 Résolution au sens de la distribution :

- Etape 1 et 2 : Détermination des racines r_{1ij} et r_{2ij} :

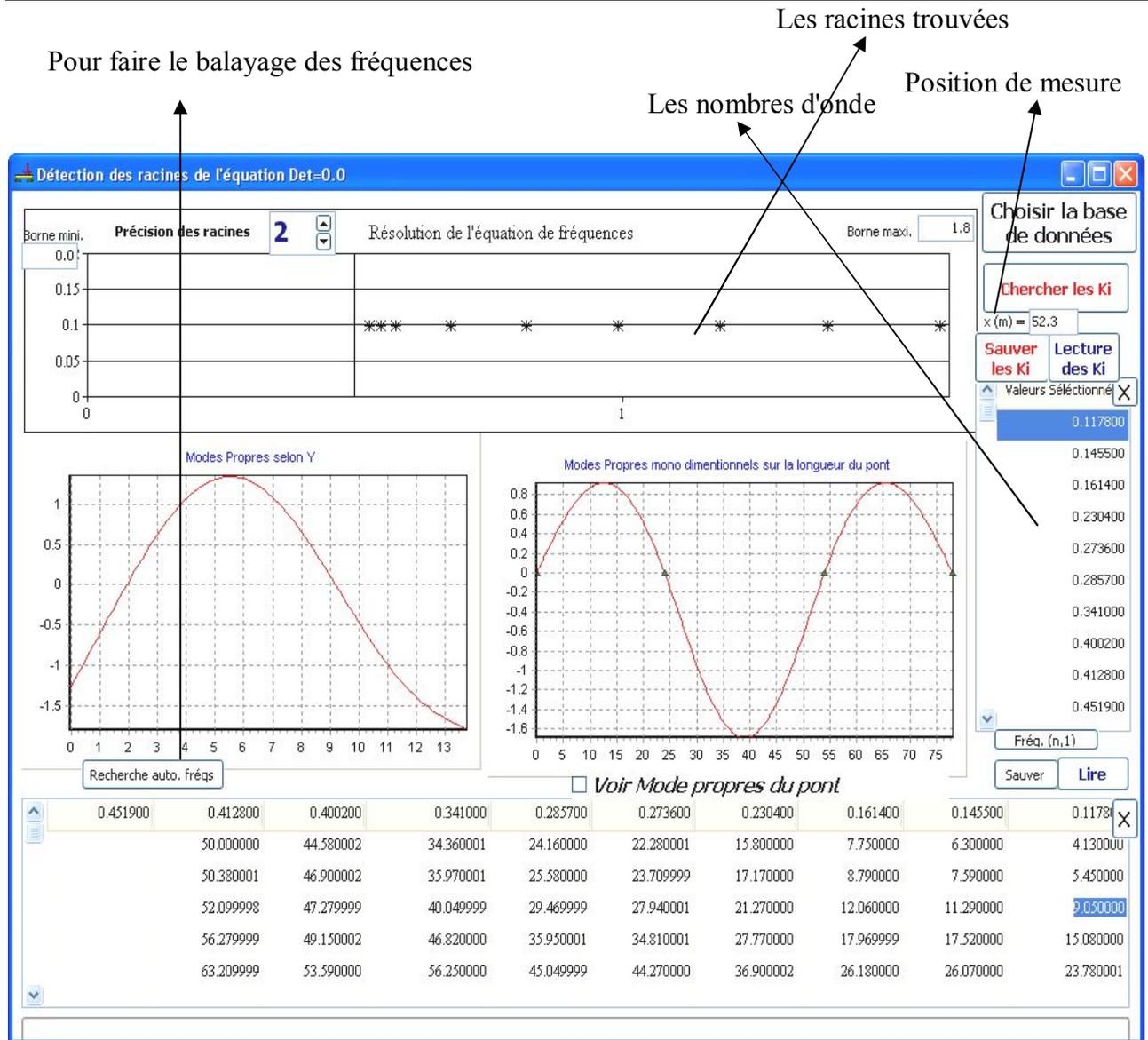
La même procédure que l'étape 1 du paragraphe (4.2), dans le cas de résolution de l'équation de mouvement au sens de la moyenne.

Les étapes de résolution de l'équation (3.27) sont les suivantes:

- Calcul des k_i à partir de la résolution de l'équation de fréquences d'une poutre multi travées (voir Annexe 1);
- Résolution de l'équation (3.27) pour chaque position de x sur le pont;
- Calcul de la valeur k_{1i} à partir de l'équation (3.32) pour la valeur de x choisi. k_{1i} dépend seulement de x et ne nécessite pas d'intégration comme la résolution au sens de la moyenne,
- En injectant les valeurs de k_{1i} dans l'équation de fréquences (3.19), cette dernière sera résolue numériquement, on obtient les racines r_{1ij} et r_{2ij} ;
- En remplaçant les racines r_{1ij} et r_{2ij} dans les expressions (3.19), on obtient les pulsations propres du pont ω_{ij} ;
- Les fréquences propres du pont sont affichées en bas de la fenêtre (3.13) en divisant ω_{ij} par 2π .

La sélection des fréquences propres pour chaque point le long du pont s'effectue par une comparaison des fréquences propres obtenues pour chaque position de x le long du pont avec ceux obtenues par un logiciel d'éléments finis, qui sont saisies dans la page (Nombre.d'ondes et Fréqs.Référence du logiciel fenêtre (3.14).

Nous avons intégré dans le logiciel un algorithme pour réaliser le balayage le long du pont (Fenêtre 3.15).

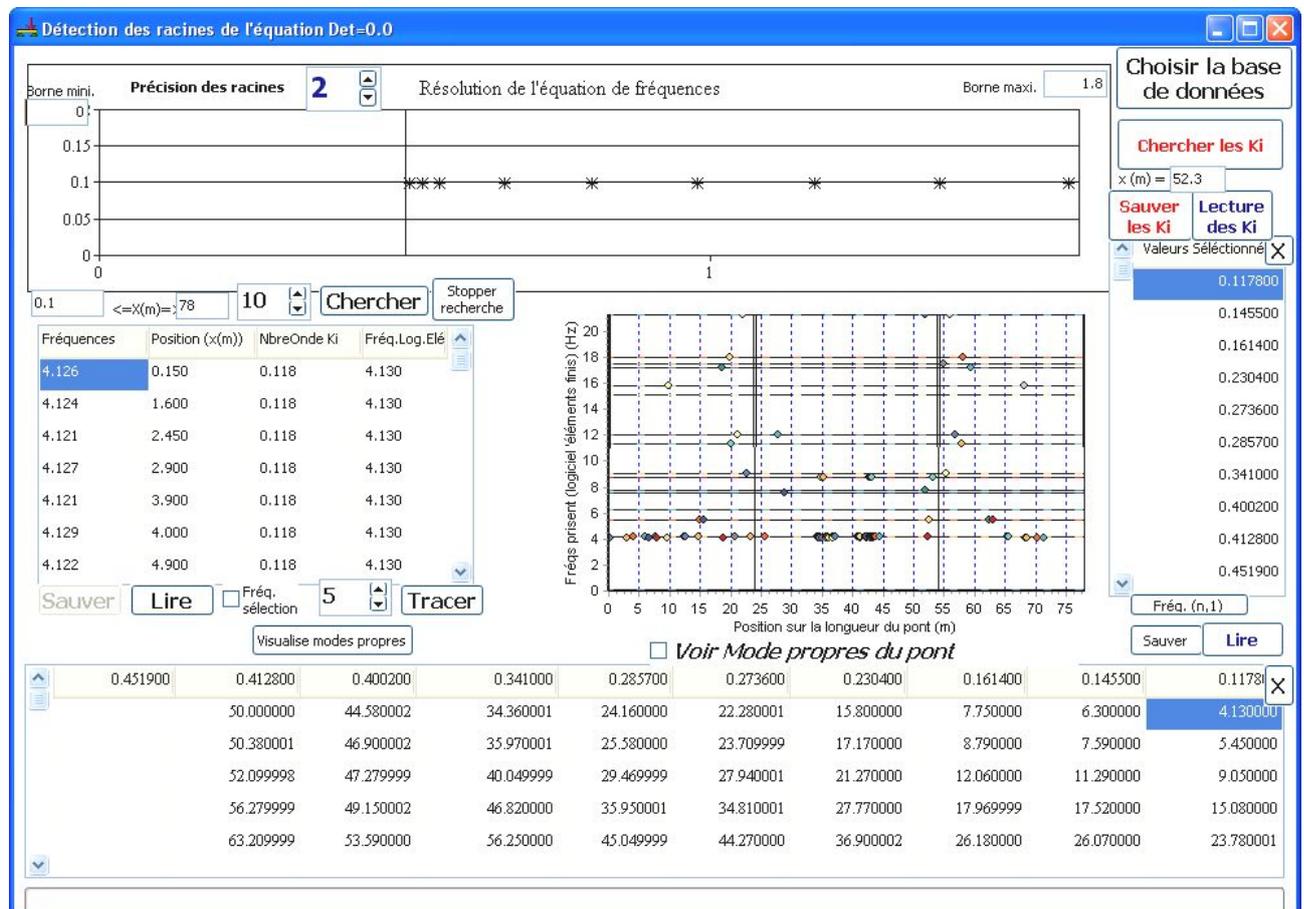


Fenêtre 3.13. Recherche des racines r_{1ij} et r_{2ij} au sens de la distribution.



Fenêtre 3.14. Saisie des fréquences de référence.

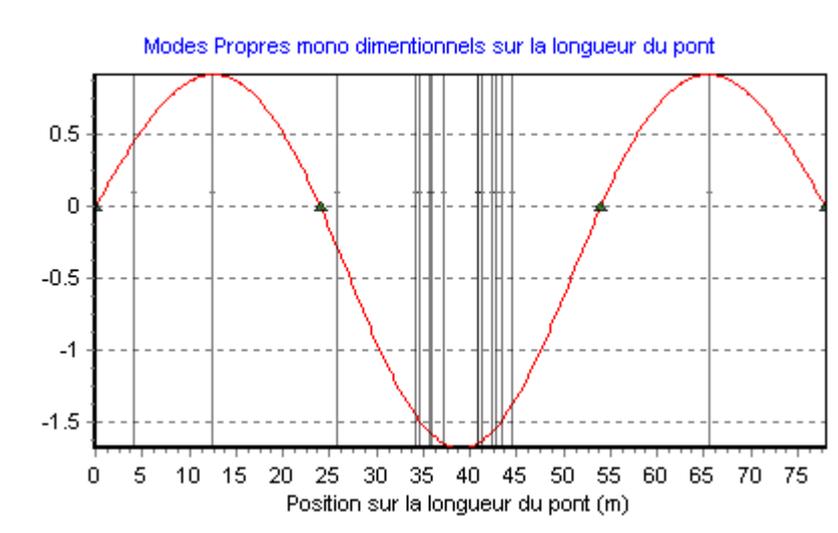
Sur la fenêtre (3.15), nous présentons la méthode de sélection des modes selon un balayage le long de la longueur du pont.



Fenêtre 3.15. Balayage sur la longueur du pont.

La fenêtre (3.15) est divisée en deux parties. A gauche, on présente le tableau des fréquences trouvées pour chaque position x le long du pont et les fréquences de référence. A droite, on trace le graphe des fréquences propres en fonction de la longueur du pont, afin de mieux visualiser les positions qui permettent d'obtenir les meilleures fréquences propres en comparaison avec les fréquences de référence. Le logiciel permet de visualiser en bas de la fenêtre, toutes les fréquences propres sélectionnées.

Toujours sur la fenêtre (3.15), on peut présenter les déformées propres de chaque mode avec les positions sur le pont qui permettent d'avoir les fréquences propres précises (voir Fenêtre 3.16).



Fenêtre 3.16. Superposition des positions trouvées sur la déformée propre.

- Etape 3 : Paramètres de la résolution
- Etape 4 : Trajectoire de où des véhicules sur le pont:
- Etape 5 : Réponse dynamique du pont :

Après le choix des paramètres de résolution, le type de la réponse temporelle où spatiale, la trajectoire et la vitesse de roulement, voir fenêtre (3.17).

On peut afficher les résultats suivants:

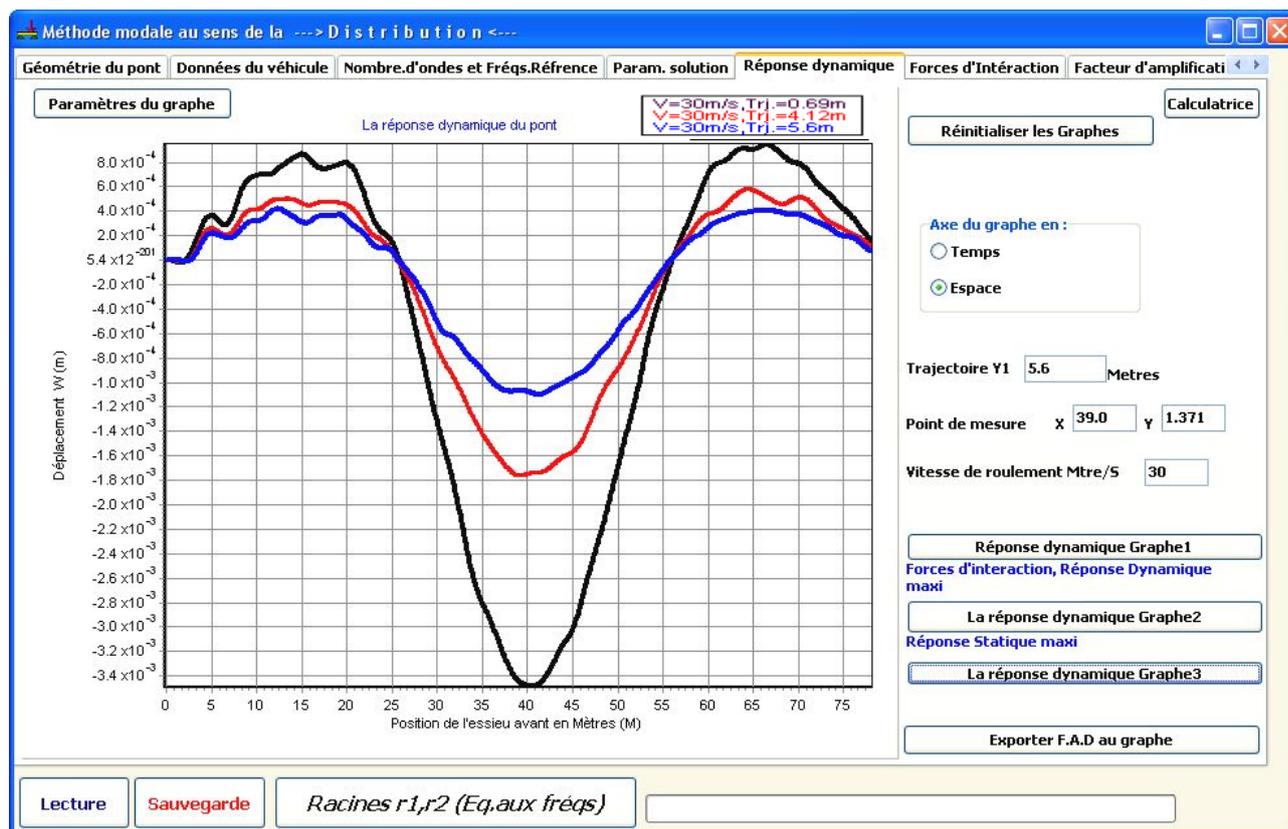
- La réponse dynamique du pont;
- La force d'interaction pont – véhicule (roue avant où arrière) voir fenêtre (3.20);
- Le facteur d'amplification dynamique (F. A. D.), qui sera tracé sur la fenêtre "Facteur d'amplification dynamique" du logiciel.

L'affichage des résultats est assuré par les trois boutons dans la fenêtre réponse dynamique "Réponse dynamique graphe 1,2 et 3".

+ Le bouton «Réponse dynamique graphe 1», permet d'afficher en plus de la réponse dynamique temporelle où spatiale, la force d'interaction pont-véhicule (Fenêtre 3.20) et la réponse dynamique maximale;

+ Le bouton «Réponse dynamique graphe 2», permet aussi d'afficher en plus de la réponse dynamique, la réponse statique maximale;

Le rapport entre la réponse dynamique maximale et la réponse statique maximale, permet le calcul du facteur d'amplification dynamique F. A. D.



Fenêtre 3.17. La réponse dynamique du pont au sens de la distribution.

La zone de traçage des réponses permet de superposer trois courbes pour différentes trajectoires, différentes vitesses de roulement et différents points de mesure.

Il suffit de cliquer chaque fois sur la cette zone pour la sauvegarde.

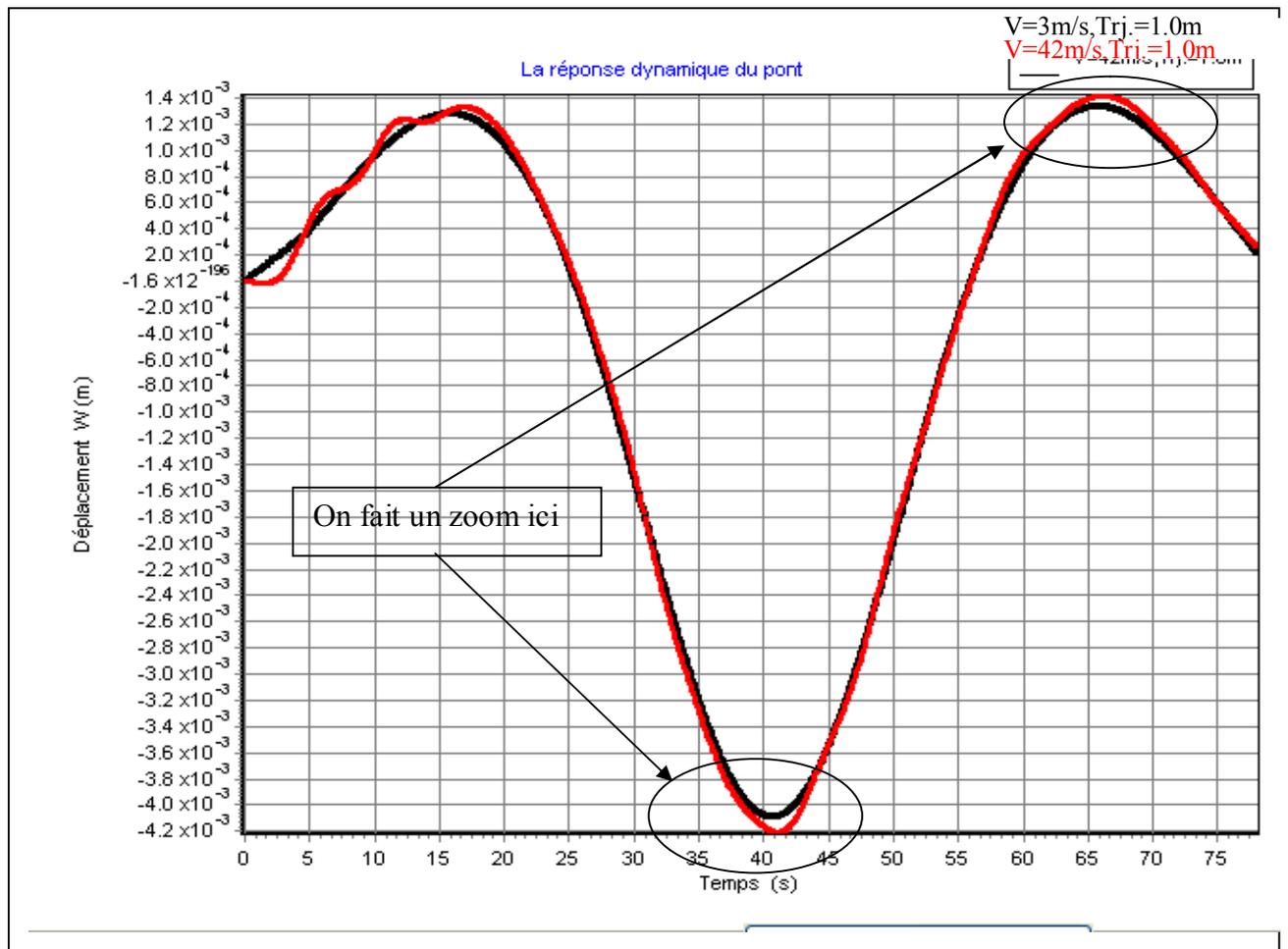
- Etape 6 : Calcul du facteur d'amplification dynamique

$$FAD = \frac{\text{Réponse}_{\text{DynamiqueMaximale}}}{\text{Réponse}_{\text{StatiqueMaximale}}} \quad (3.33)$$

La réponse statique maximale est obtenue, pour une vitesse de roulement du véhicule très faible (3 m/s) pour une chaussée parfaite. Il suffit de cliquer sur la valeur maximale de la réponse en valeur absolue pour la sauvegarder (voir fenêtre 3.18).

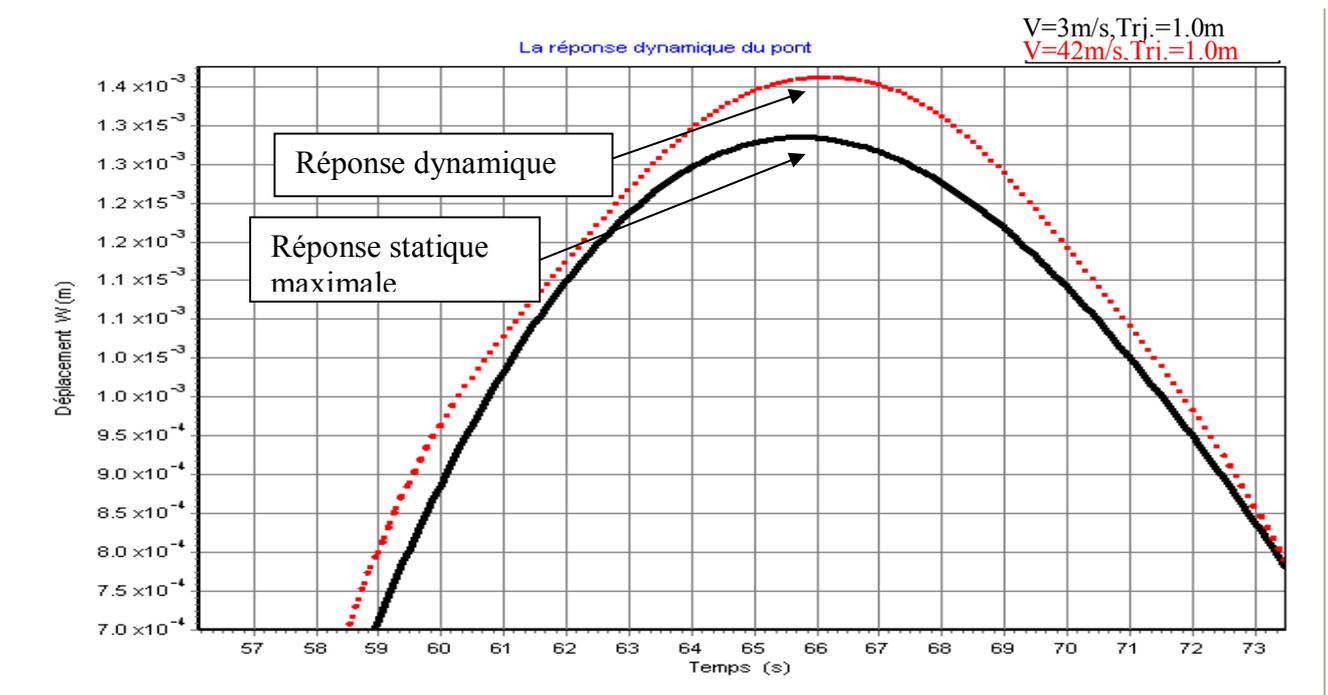
La réponse dynamique maximale est obtenue en cliquant directement sur la valeur maximale de la réponse fenêtre (3.19). Le logiciel permet de réaliser un zoom sur les courbes et sauvegarde les deux valeurs et calcule le F.A.D.

Et voici un graphe pour étudier le facteur d'amplification dynamique :



Fenêtre 3.18 : Zones de la réponse dynamique et statique maximale

Après le zoom, nous avons :

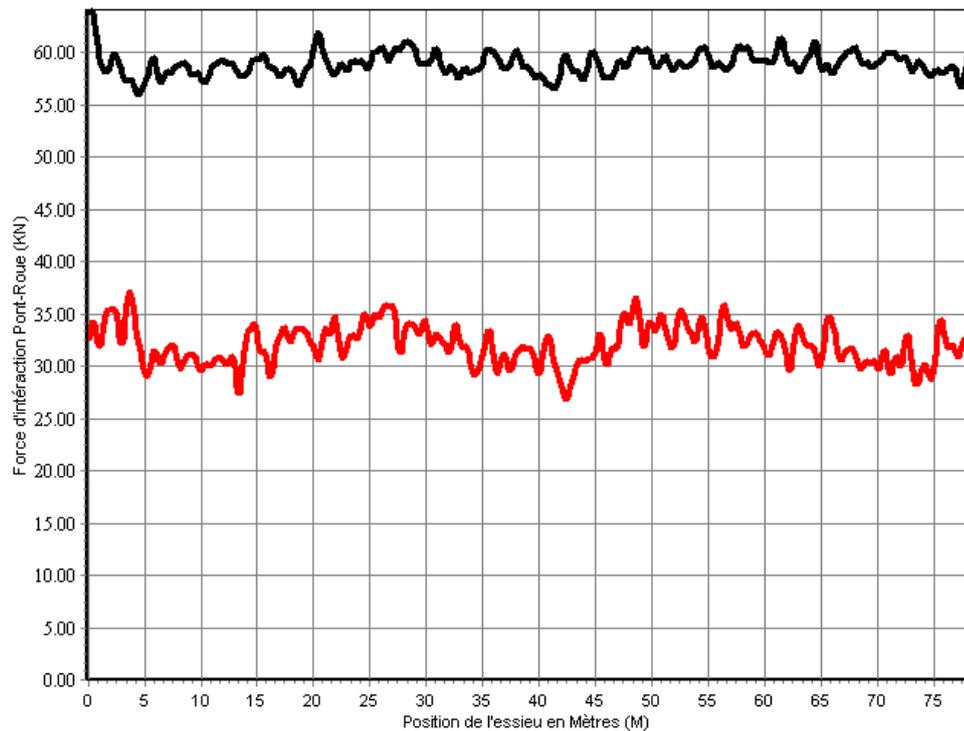


Fenêtre 3.19 : Zones de la réponse dynamique et statique maximale après zoom

Chaque fois qu'on clique sur la valeur de la réponse dynamique maximale puis sur la valeur de la réponse statique maximale, le logiciel calcule le F.A.D en utilisant l'expression (3.33). La valeur de l'F.A.D calculée est ajoutée automatiquement à la courbe du facteur d'amplification dynamique.

- Etape 7 : Forces d'interaction :

Le logiciel permet le calcul et l'affichage des forces d'interactions entre les roues du véhicule (avant et arrière) et le pont, voir fenêtre 3.20.



Fenêtre 3.20 : Forces d'interaction pont - roue

- Etape 8 : Profile de rugosité (irrégularités de la chaussée) :

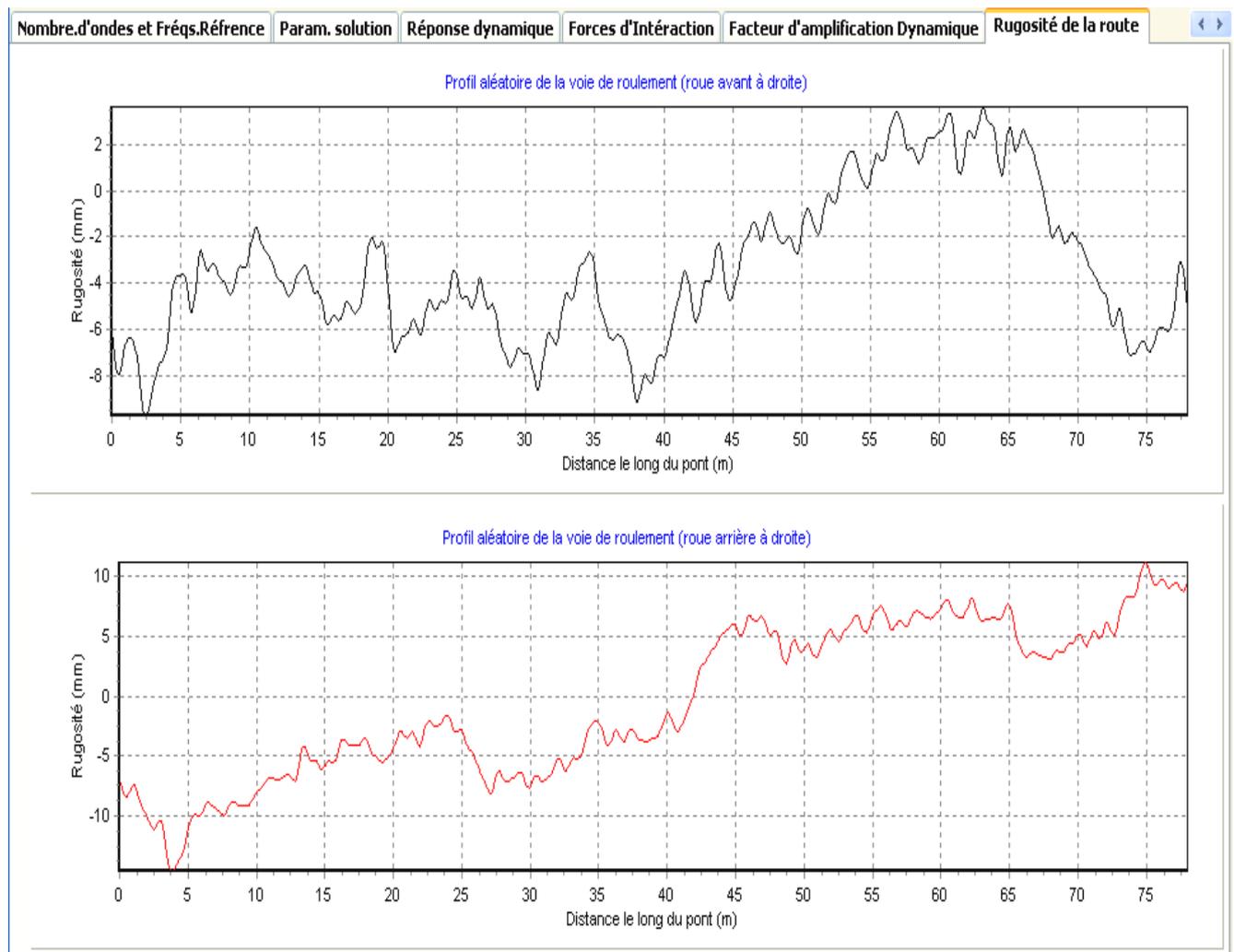
Le logiciel permet de générer un profile aléatoire, ce profile est tracé pour les deux roues à droite avant et arrière voir fenêtre 3.21.

Les irrégularités de la chaussée sont l'interface entre le pont et le véhicule mobile. Ces irrégularités perturbent le mouvement vertical du pont et du véhicule d'une manière importante. On peut modéliser le profile statique de la chaussée par un processus aléatoire caractérisé par une densité spectrale de puissance (DSP) qui permet de décrire la qualité de surface de roulement:

$$r(x_i) = \sum_{k=1}^N \sqrt{4A_r \left(\frac{2\pi k}{L_c \omega_{s0}} \right) \frac{2\pi}{L_c}} \cos(\omega_{sk} x_i + \theta_k) , i = 1, \dots, 4 \quad (3.34)$$

Où A_r est le coefficient de rugosité spectral qui caractérise l'état de la chaussée ($m^3 / cycle$), ω_{s_0} est la pulsation de discontinuité ($\omega_{s_0} = 1/2\pi$ cycle / m), ω_{sk} est le nombre d'onde ($\omega_{sk} = 2\pi k / L_c$ cycle / m), L_c est la longueur d'échantillonnage en général égale à $2L$, L est la longueur du pont, N est le nombre de points de discrétisation fréquentielle, θ_k est un variable aléatoire qui varie entre 0 et 2π .

Le logiciel accomplit toutes les opérations nécessaires pour générer le profil de la chaussée.



Fenêtre 3.21 : Rugosité de la voie de roulement ($Ar=15.10^{-6} m^3 / cycle$)

3.5.4 Exemple de validation [ZHU 02]:

Le tablier du pont est considéré comme un matériau composite, composé d'une portion de béton (la dalle) et d'une portion d'acier (les raidisseurs et les entretoises). Il est modélisé par une plaque orthotrope équivalente possédant les caractéristiques suivantes:

$l = 78 \text{ m}$, $b = 13.715 \text{ m}$, $h = 0.21157 \text{ m}$, $\rho = 3265.295 \text{ m}$, $D_x = 2.415 \times 10^9 \text{ Nm}$, $D_y = 2.1807 \times 10^7 \text{ Nm}$, $D_{xy} = 1.1424 \times 10^8 \text{ Nm}$, $\nu_{xy} = 0.3$, $E_x = 3.0576 \times 10^{12} \text{ N/m}^2$, $E_y = 2.7607 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $G_{xy} = 1.4475 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$.

Les données du véhicule sont présentées au paragraphe (2.2.1).

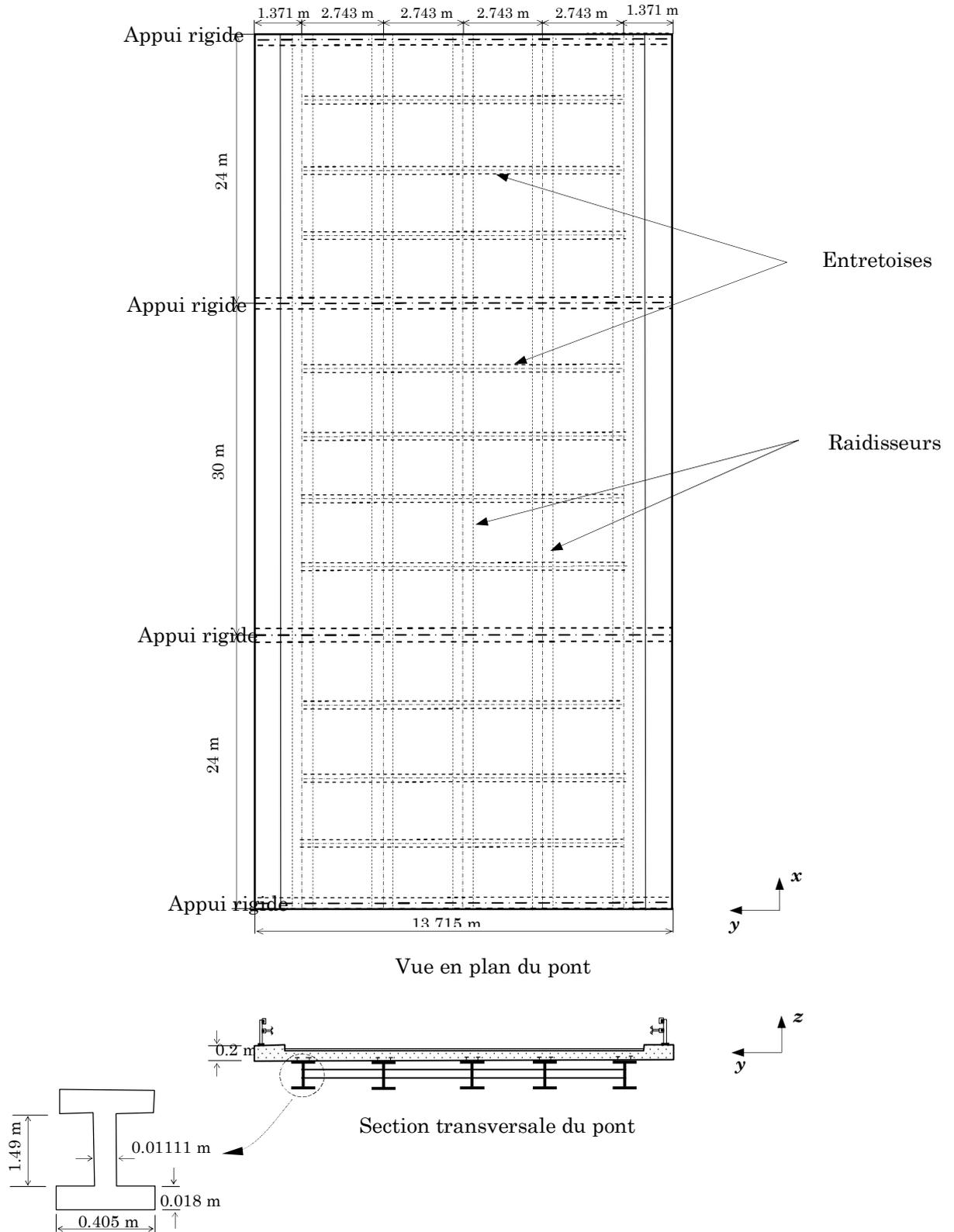


Figure 3.4. Géométrie du pont [REZ 08].

3.5.4.1 Fréquences propres du pont:

3.5.4.1.1 Résultats de la résolution de l'équation du mouvement au sens de la moyenne :

Nous présentons dans le tableau 3.1, une comparaison entre les résultats des fréquences propres du pont de la référence [ZHU 02], dont laquelle les auteurs utilisent la méthode de Rayleigh-Ritz pour résoudre l'équation du mouvement, les résultats de la référence [REZ 08], où l'équation de mouvement est résolue au sens de la moyenne, les résultats obtenus par le logiciel que nous avons développé (sur la base de la modélisation de [REZ 08]) et enfin les fréquences propres obtenues par le logiciel d'éléments finis ANSYS.

Tableau 3.1. Fréquences propres du pont multi travées obtenues par différentes méthodes.

Ordre des modes propres	Modes	Fréquences propres [Hz]			
		Notre étude Résolution au sens de la moyenne	Réf. [REZ 08]	Log. ANSYS (156x20)	Réf. [ZHU 02]
(1,1)	1	4.13	4.13	4.13	4.13
(1,2)	2	5.45	5.45	5.45	4.70
(2,1)	3	6.30	6.30	6.30	6.31
(2,2)	4	7.59	7.59	7.59	6.86
(3,1)	5	7.75	7.75	7.75	7.76
(3,2)	6	8.78	8.77	8.79	8.20
(1,3)	7	9.08	9.08	9.03	-----
(2,3)	8	11.27	11.26	11.27	-----
(3,3)	9	11.98	11.97	12.03	-----
(1,4)	10	15.07	15.07	15.09	-----
(4,1)	11	15.80	15.79	15.80	15.81
(4,2)	12	17.17	17.16	17.18	16.39
(2,4)	13	17.34	17.33	17.52	-----
(3,4)	14	17.66	17.65	17.98	-----
(4,3)	15	21.20	21.19	21.28	-----
(5,1)	16	22.28	22.27	22.28	22.29

A partir du tableau 3.1, on peut constater que les petites différences entre les résultats obtenus par le logiciel développé et ceux de la référence [REZ 08] sont dues à la méthode numérique utilisée pour résoudre l'équation de fréquence. Dans la référence [REZ 08], l'auteur

utilise le logiciel Mathematica par contre nous dans ce travail, on utilise un résolveur intégré dans le logiciel basé sur la méthode de RuglaFalsi.

La comparaison de nos résultats avec ceux de la référence [ZHU 02], montre une bonne concordance entre les modes de flexion, alors que des erreurs importantes apparaissent pour les modes d'ordre 2 dans la direction de la largeur du pont, cela s'explique par la prise des conditions aux limites de poutre sur la largeur du pont alors que dans notre étude, nous avons pris les conditions aux limites de plaque. Les modes d'ordre élevé dans la direction de la largeur 3,4,..., n'apparaissent pas dans la référence [ZHU 02].

Dans cette dernière référence, l'auteur décompose les déformées propres du pont en une déformée propre d'une poutre continue simplement appuyée selon la longueur du pont et une déformée propre d'une poutre libre – libre avec les conditions aux limites de poutre selon la largeur, ce qui ne permet pas d'obtenir les modes de couplage d'ordre élevé.

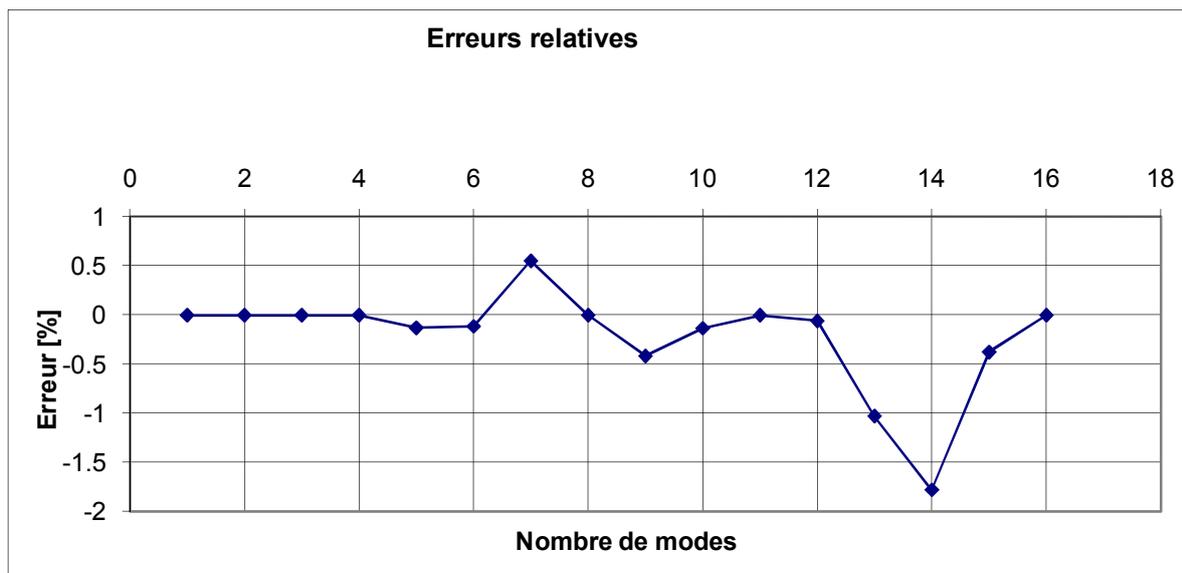


Figure 3.5. Erreur relative entre les résultats obtenus par notre logiciel (résolution au sens de la moyenne) et les résultats obtenus par ANSYS.

3.5.4.1.2 Résultats de la résolution de l'équation du mouvement au sens de la distribution :

Nous présentons sur le tableau 3.2, les résultats des fréquences propres d'un pont multi travées, obtenus par le logiciel ANSYS (maillage 156x20) et les résultats obtenus par notre logiciel pour les deux méthodes de résolution de l'équation du mouvement, au sens de la moyenne et au sens de la distribution.

Tableau 3.2 : Les 16 premières fréquences propres du pont multi travées
obtenues par différentes méthodes

Ordre des modes propres	Modes	Fréquences propres [Hz]		
		Notre étude Résolution au sens.de la Distribution	Notre étude Résolution au sens.de la Moyenne	Log.ANSYS (156x20)
(1,1)	1	4.13	4.13	4.13
(1,2)	2	5.45	5.45	5.45
(2,1)	3	6.30	6.30	6.30
(2,2)	4	7.59	7.59	7.59
(3,1)	5	7.75	7.75	7.76
(3,2)	6	8.79	8.78	8.79
(1,3)	7	9.05	9.08	9.03
(2,3)	8	11.27	11.27	11.27
(3,3)	9	12.03	11.98	12.03
(1,4)	10	15.09	15.07	15.09
(4,1)	11	15.80	15.80	15.80
(4,2)	12	17.18	17.17	17.18
(2,4)	13	17.52	17.34	17.52
(3,4)	14	17.96	17.66	17.98
(4,3)	15	21.28	21.20	21.28
(5,1)	16	22.28	22.28	22.28

Analyse des résultats du tableau 3.2

L'analyse des résultats des fréquences propres présentées dans le tableau 3.2, montre clairement que la résolution de l'équation du mouvement couplée du pont au sens de la distribution, donne des résultats très précis par rapport à sa résolution au sens de la moyenne en comparaison avec les résultats numériques obtenus par ANSYS.

Sur la figure 3.6, on présente l'erreur relatif entre les résultats des fréquences propres obtenus par la résolution de l'équation du mouvement au sens de la distribution et les résultats de [REZ 08] (résolution au sens de la moyenne). On constate que l'effet du couplage des modes d'ordre élevé ((2.4),(3.4),(5.3)) augmente l'erreur dans le cas de la résolution de l'équation du mouvement au sens de la moyenne.

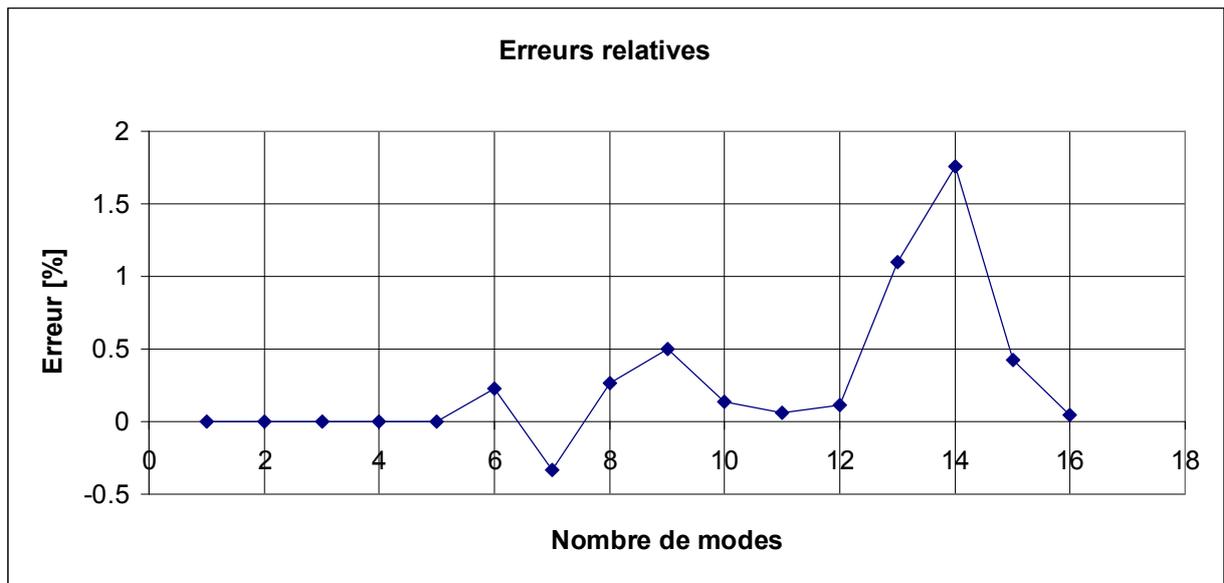


Figure 3.6. Erreur relatif (notre étude au sens de la distribution par rapport aux résultats [REZ 08]).

D'après la figure 3.6, on note qu'à partir du sixième mode la différence sera importante.

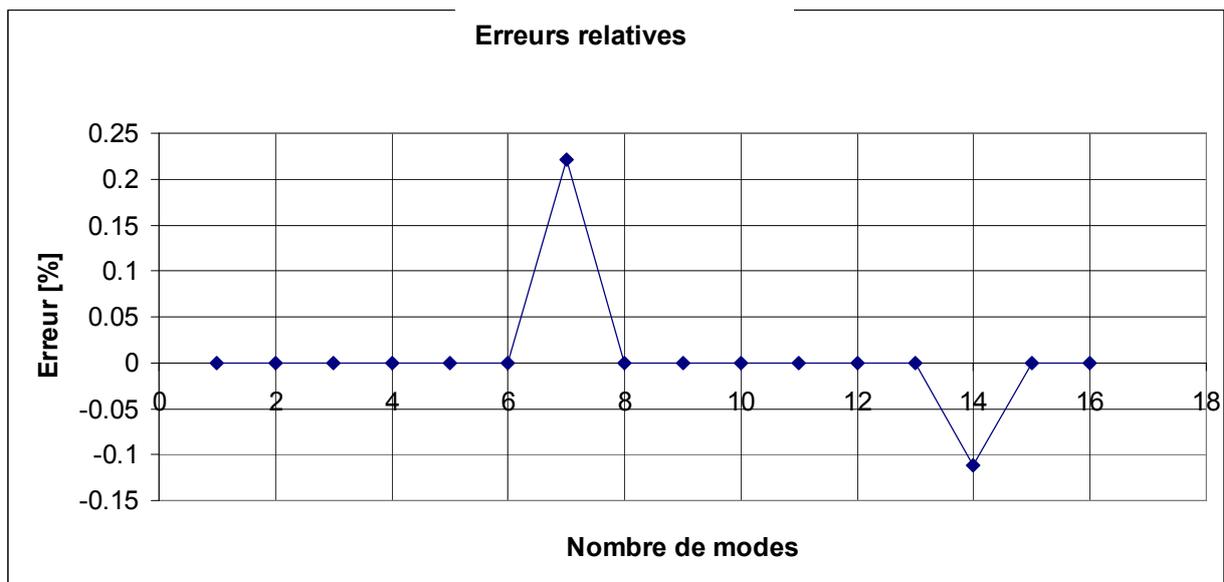


Figure 3.7. Erreur relative (notre étude au sens de la distribution par rapport à ANSYS).

Sur la figure 3.7, on présente l'erreur relative entre les résultats des fréquences propres obtenus par la résolution de l'équation du mouvement au sens de la distribution et les résultats obtenus par ANSYS. On constate que l'erreur ne dépasse pas 0.25% dans uniquement deux modes, les autres fréquences propres sont identiques, ce qui montre que notre méthode de résolution est très précise.

Nous présentons les cinq premiers modes propres:

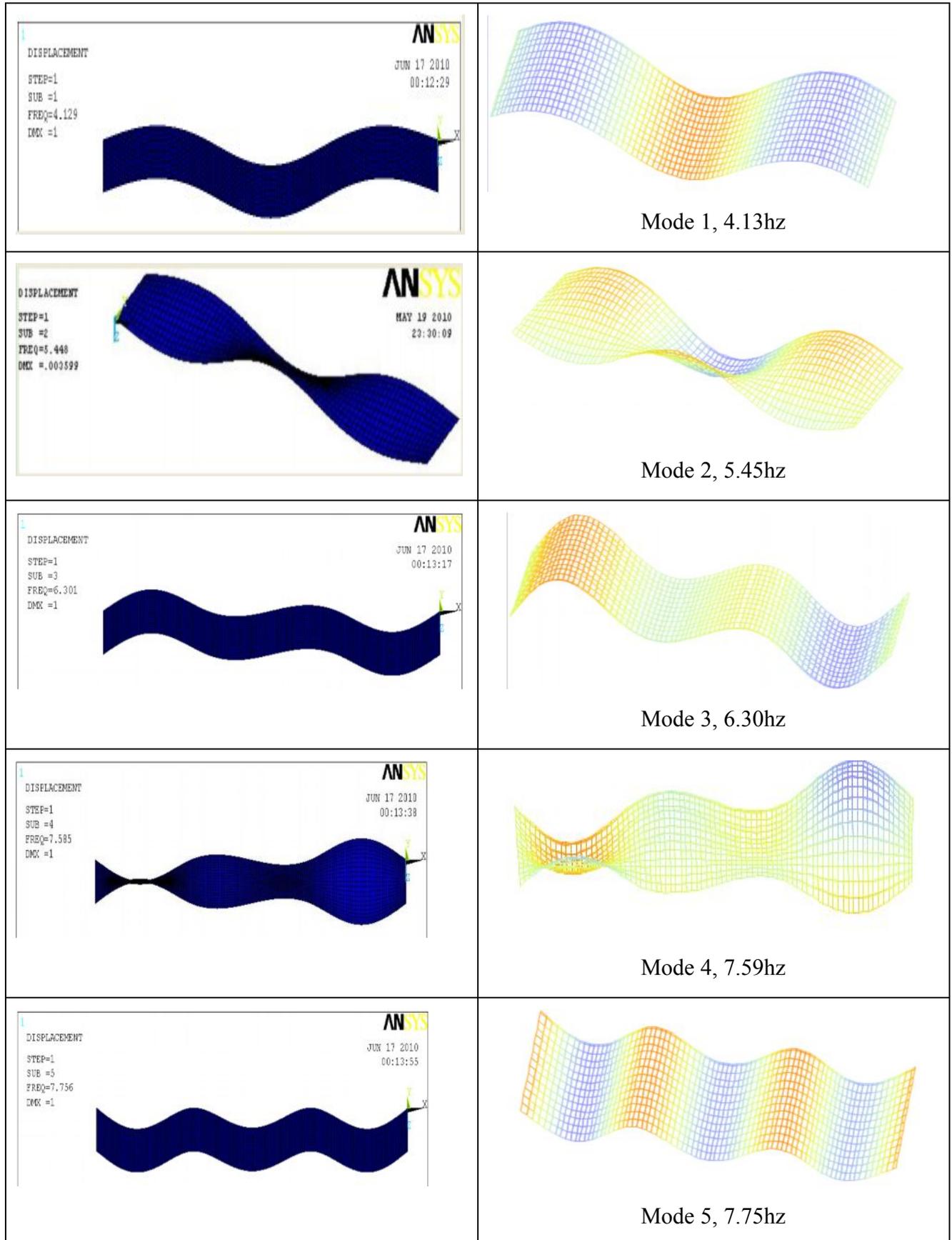


Figure 3. 8. Les cinq premiers modes propres
(à gauche obtenus par ANSYS, à droite obtenus par le logiciel développé).

3.5.4.1.3 Identification des positions de x le long du pont permettant la détermination exacte des fréquences propres

Sans le développement de l'outil informatique, la résolution de l'équation au sens de la distribution n'aurait pas pu être réalisée. Par un calcul simple, si on choisit à résoudre cette dernière équation pour uniquement 10 nombre d'ondes k_i de la poutre multi travées, 16 modes dans la direction longitudinale et pour chaque 10cm du pont, on doit la résoudre 160.000fois. Si, on prend uniquement les dix (10) premiers modes de chaque résolution, on obtient (1.600.000) valeurs possibles des fréquences propres du pont, dont il faut extraire uniquement quelques valeurs des fréquences propres les plus proches des fréquences propres du pont obtenues numériquement par ANSYS.

Afin de faciliter cette procédure complexe et rendre cette opération accessible pour tous les utilisateurs, nous avons élaboré dans le logiciel une interface simple basée sur la visualisation des différentes déformées propres du pont et des différentes positions de x le long du pont. Pour l'extraction des bonnes fréquences propres, on exécute une opération de comparaison des fréquences propres calculées avec ceux obtenues par ANSYS, avec une précision $\varepsilon=0.01$.

Nous présentons sur la figure 3.9, une comparaison entre les fréquences propres du pont obtenues par ANSYS (représentées par des traits horizontaux) et les fréquences propres du pont obtenues par notre méthode pour chaque valeur de x le long du pont et cela pour une précision $\varepsilon=0.09$.

Sur la figure 3.10, nous présentons le même résultat, mais pour une précision $\varepsilon=0.01$, ce qui limite le nombre de position de x permettant d'avoir des fréquences propres exactes.

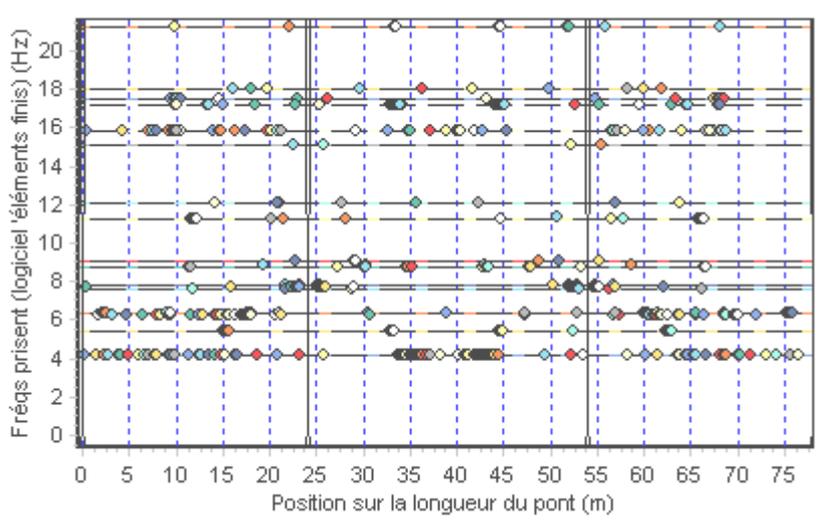


Figure 3.9. Comparaison des fréquences propres calculées pour différentes position de x le long du pont avec ceux calculées par la méthode des éléments finis avec une précision $\varepsilon=0.09$.

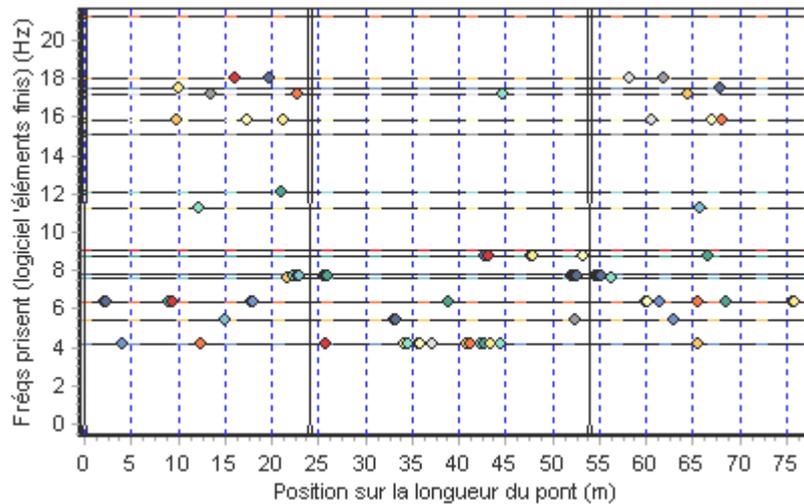


Figure 3.10. Comparaison des fréquences propres calculées pour différentes position de x le long du pont avec ceux calculées par la méthode des éléments finis avec une précision $\epsilon=0.01$.

Nous présentons sur les figures 3.11 à 3.26 les seize premières déformées propres avec les positions x qui permettent d'avoir des fréquences propres exactes en comparaison avec ceux obtenues par ANSYS.

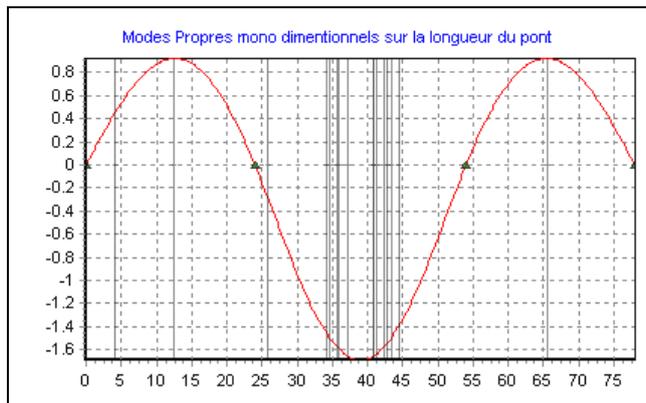


Figure 3.11. Les différentes positions de x permettant l'obtention du mode (1.1).

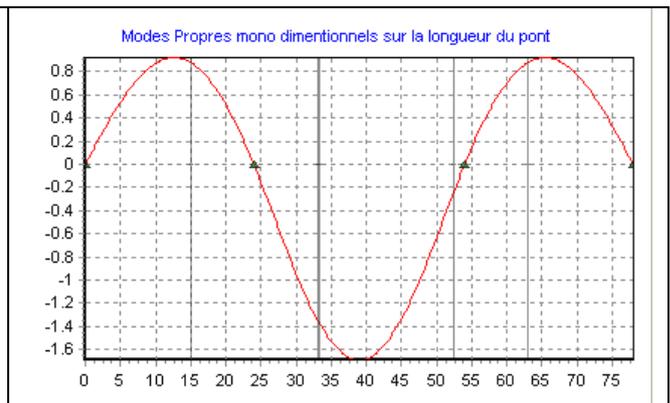


Figure 3.12. Les différentes positions de x permettant l'obtention du mode (1.2).

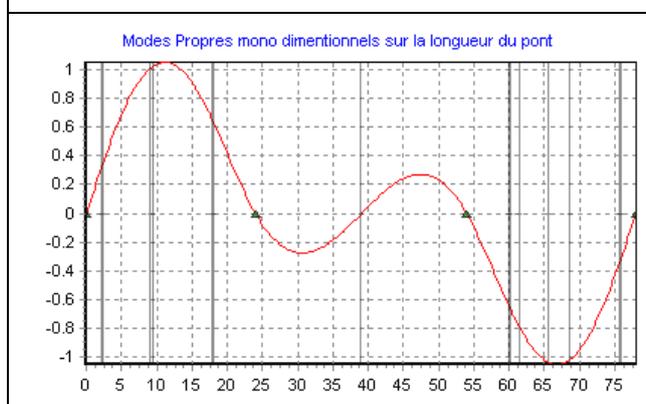


Figure 3.13. Les différentes positions de x permettant l'obtention du mode (2.1).

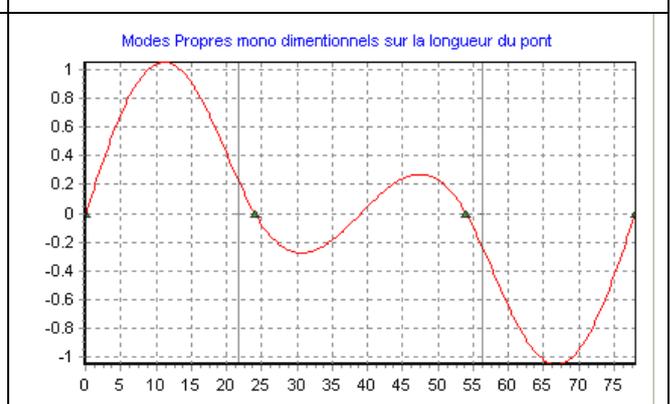


Figure 3.14. Les différentes positions de x permettant l'obtention du mode (2.2).

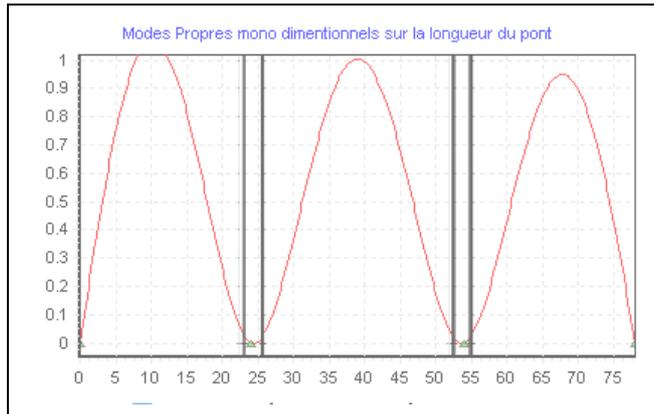


Figure 3.15. Les différentes positions de x permettant l'obtention du mode (3.1).

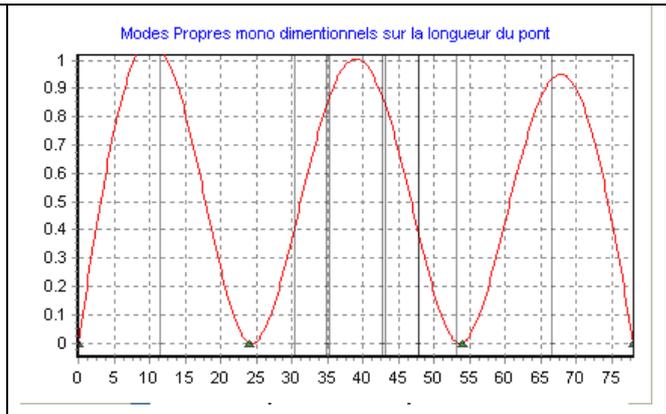


Figure 3.16. Les différentes positions de x permettant l'obtention du mode (3.2).

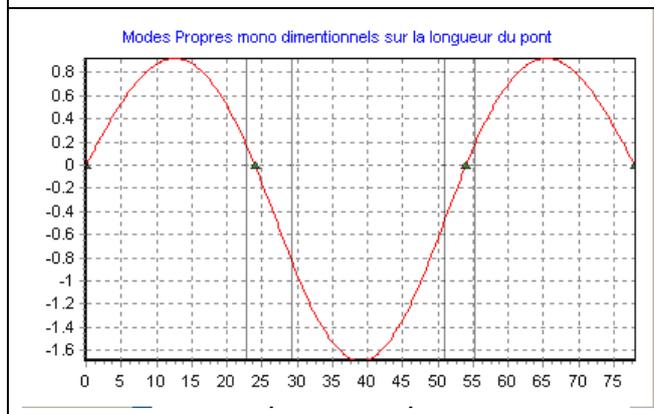


Figure 3.17. Les différentes positions de x permettant l'obtention du mode (1.3).

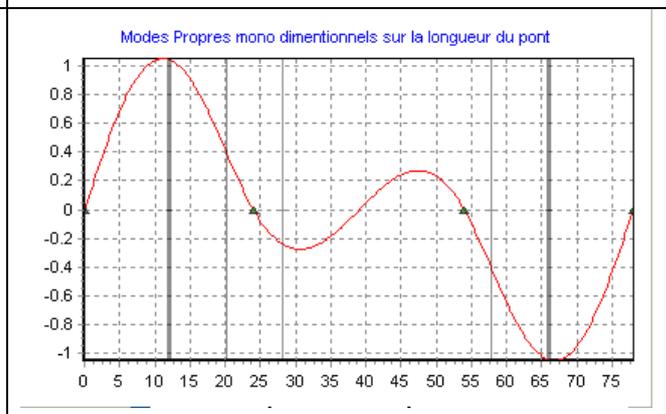


Figure 3.18. Les différentes positions de x permettant l'obtention du mode (2.3).

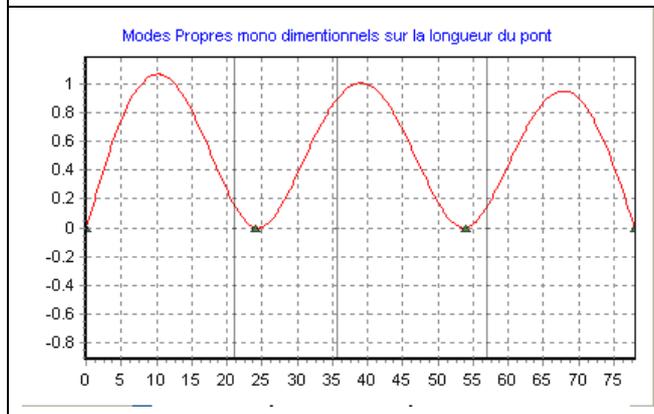


Figure 3.19. Les différentes positions de x permettant l'obtention du mode (3.3).

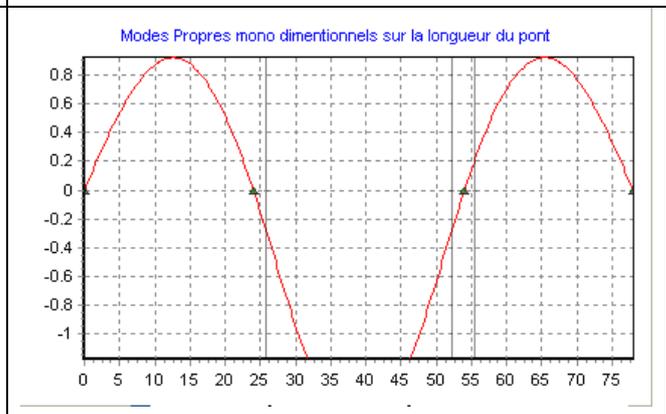


Figure 3.20. Les différentes positions de x permettant l'obtention du mode (1.4).

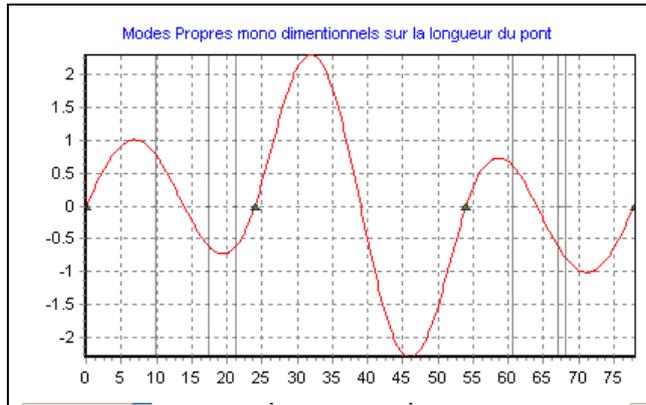


Figure 3.21. Les différentes positions de x permettant l'obtention du mode (4.1).

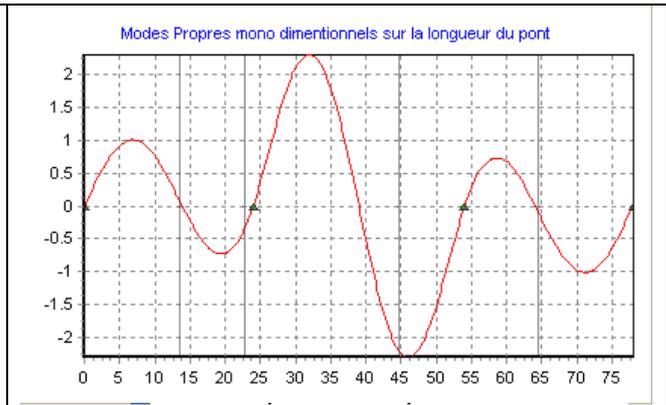


Figure 3.22. Les différentes positions de x permettant l'obtention du mode (4.2).

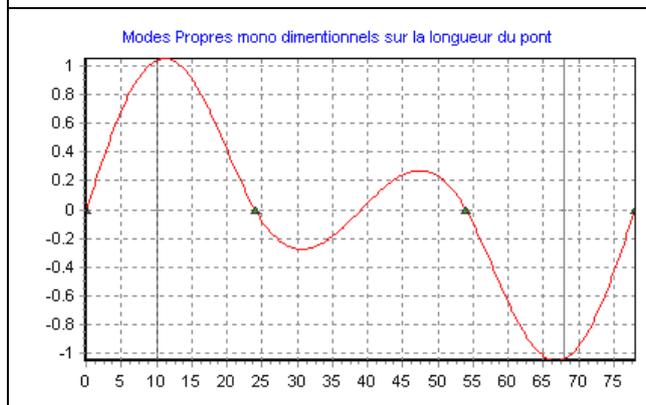


Figure 3.23. Les différentes positions de x permettant l'obtention du mode (2.4).

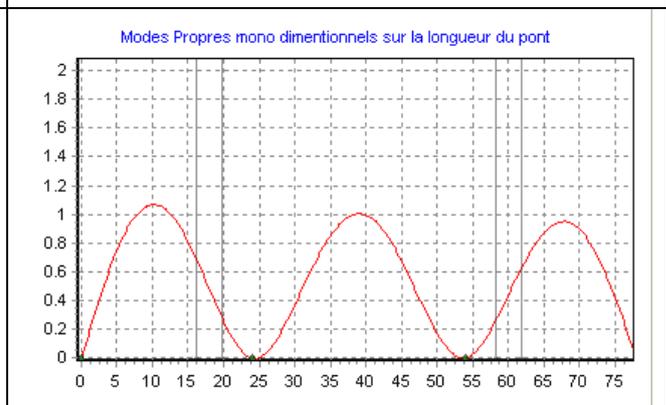


Figure 3.24. Les différentes positions de x permettant l'obtention du mode (3.4).

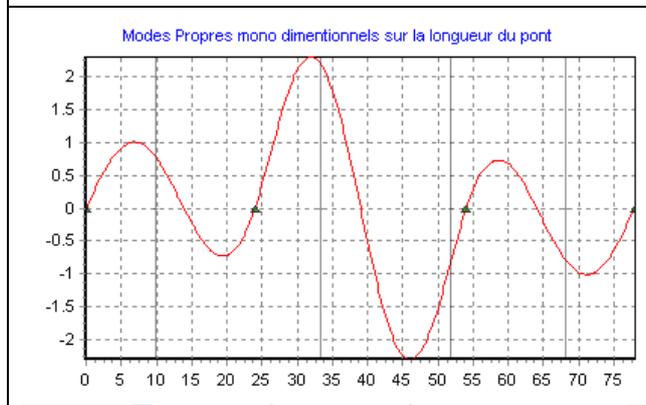


Figure 3.25. Les différentes positions de x permettant l'obtention du mode (4.3).

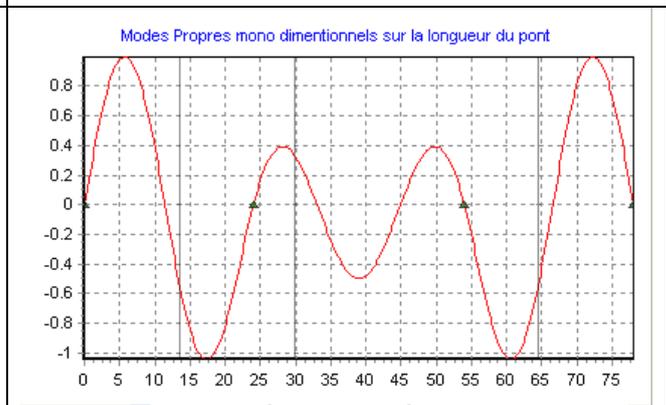


Figure 3.26. Les différentes positions de x permettant l'obtention du mode (5.1).

3.5.4.2 Réponse dynamique du pont:

3.5.4.2.1 Résolution au sens de la moyenne :

Nous présentons sur les figures 3.28 et 3.30 une comparaison des résultats de la réponse dynamique obtenus par le logiciel et ceux des références [REZ 08, ZHU 02].

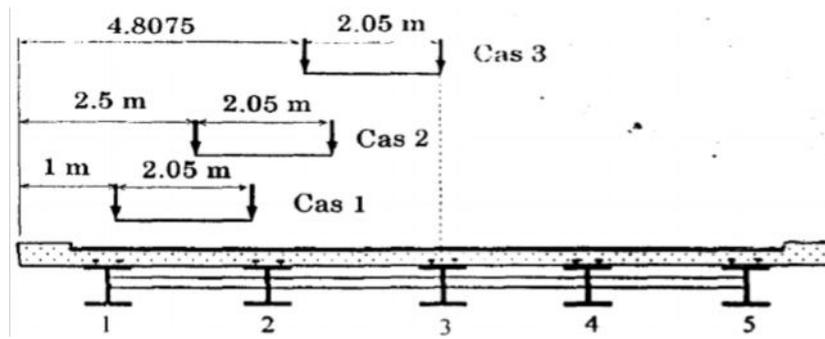


Figure 3.27. Les trajectoires référence [REZ 08].

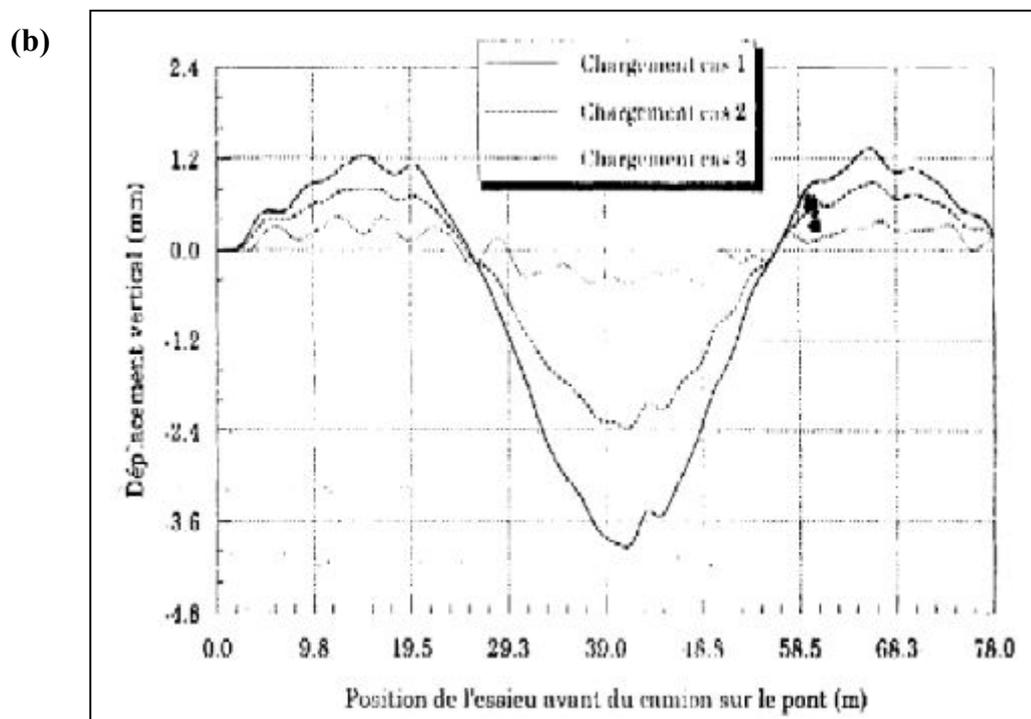
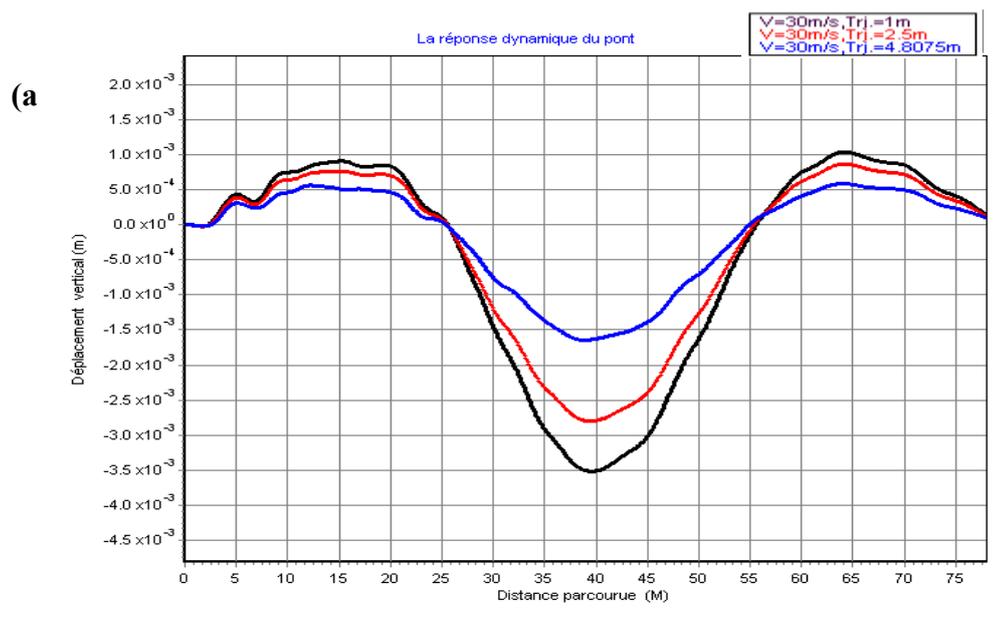


Figure 3.28. La réponse dynamique au milieu de la deuxième travée sur le premier raidisseur au sens de la moyenne pour les trois cas de chargement

((a) résultat obtenu par le logiciel développé et (b) résultat de la référence [REZ 08]).

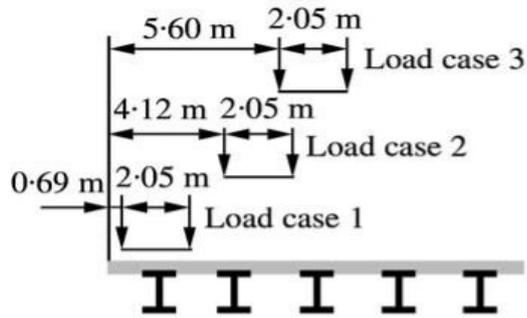


Figure 3.29. Les trajectoires référence [ZHU 02]

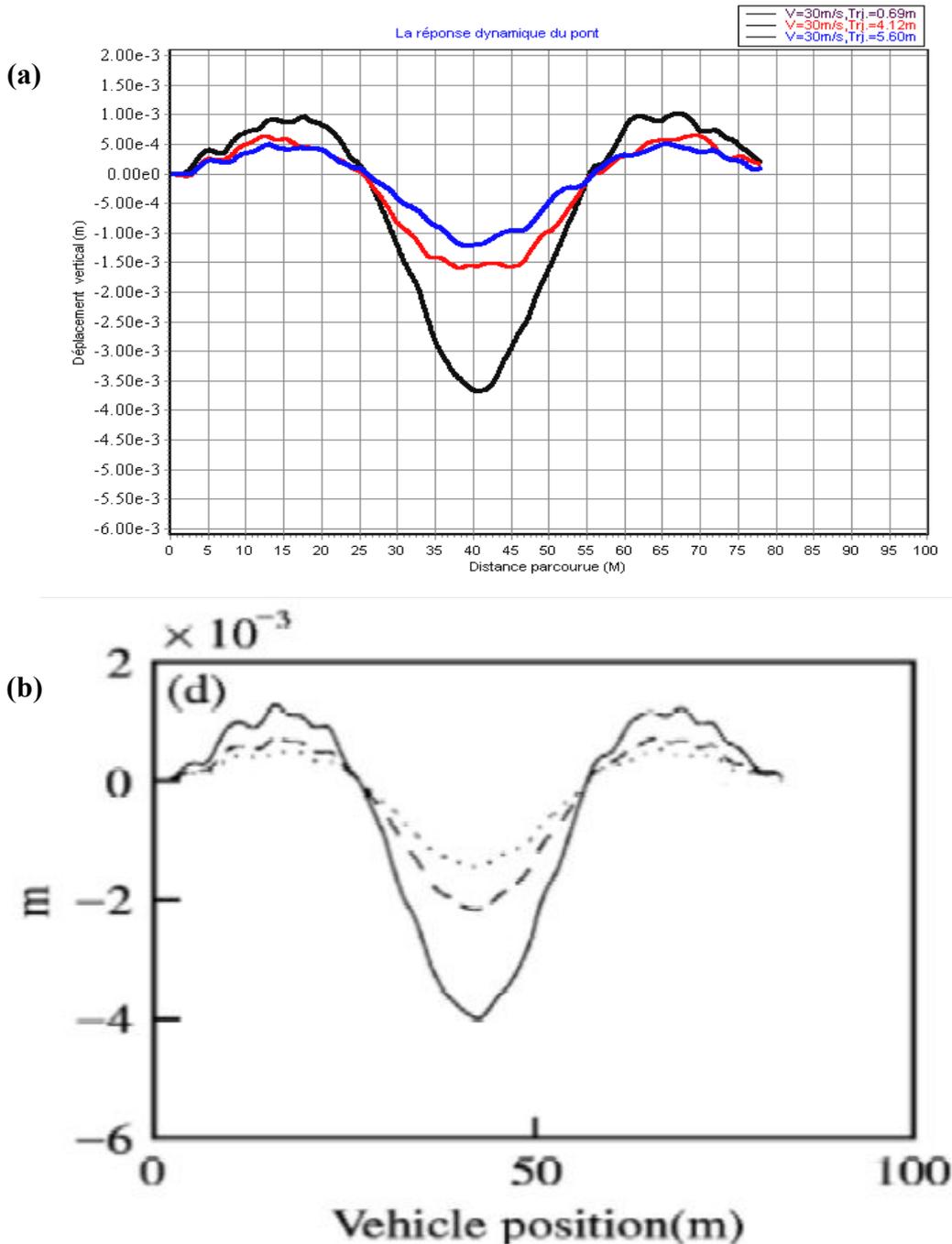


Figure 3.30. La réponse dynamique au milieu de la deuxième travée sur le premier raidisseur au sens de la moyenne pour les trois cas de chargement ((a) résultat obtenu par le logiciel développé et (b) résultat de la référence [ZHU 02]).

Les faibles différences constatées sur la figure 3.30 entre les deux résultats sont dues au manque des données dans la référence de [ZHU 02] tels que l'amortissement structural du pont que nous avons choisi dans notre cas 0.02 et le défaut de la chaussée. Ces deux paramètres ont une influence sur la réponse néanmoins les amplitudes et l'allure générale sont les mêmes.

3.5.4.2.2 Résolution au sens de la distribution :

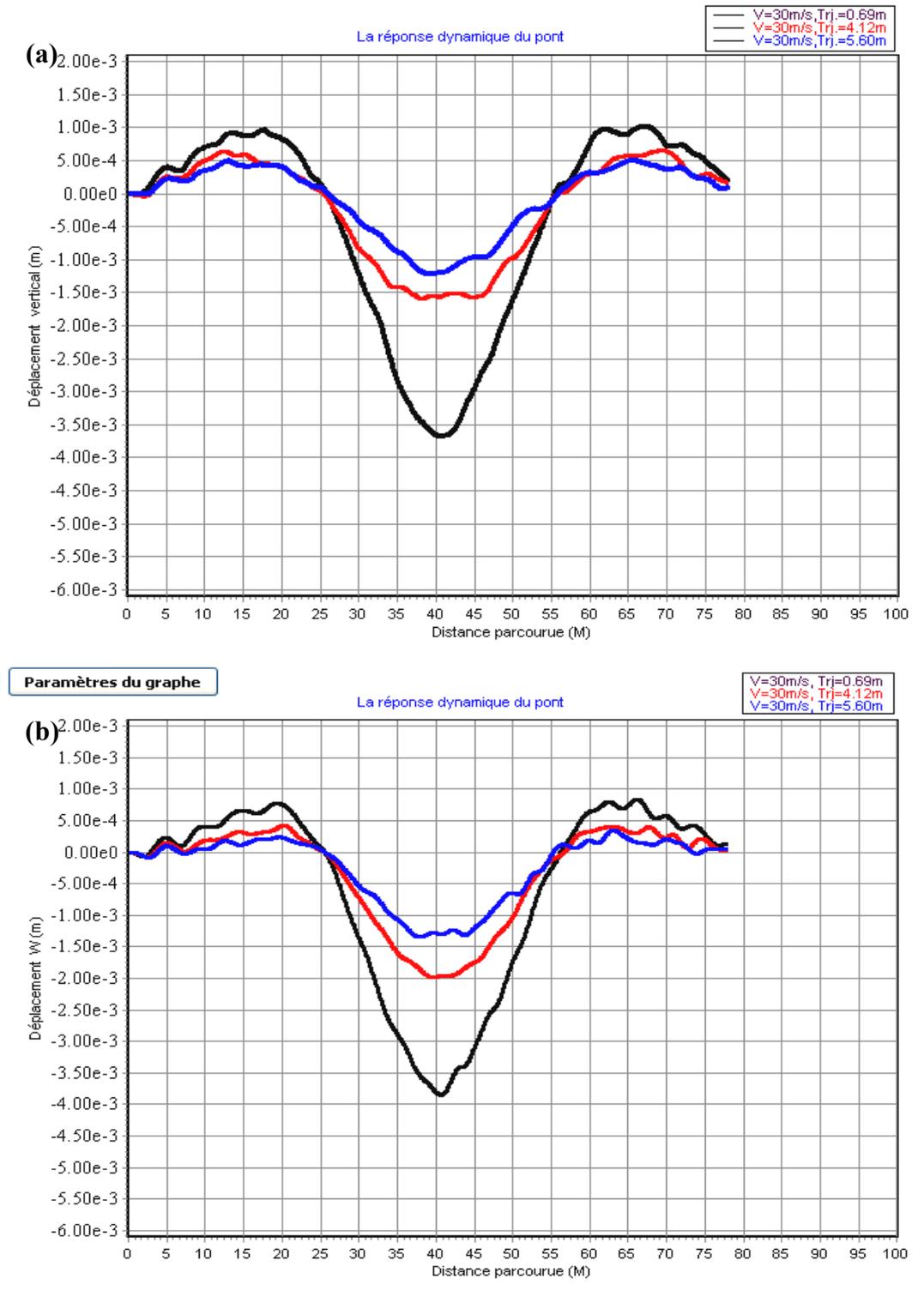


Figure 3.31. La réponse dynamique au milieu de la deuxième travée sur le premier raidisseur pour les trois cas de chargement de la référence [ZHU 02] ((a) résultat au sens de la moyenne et (b) résultat au sens de la distribution).

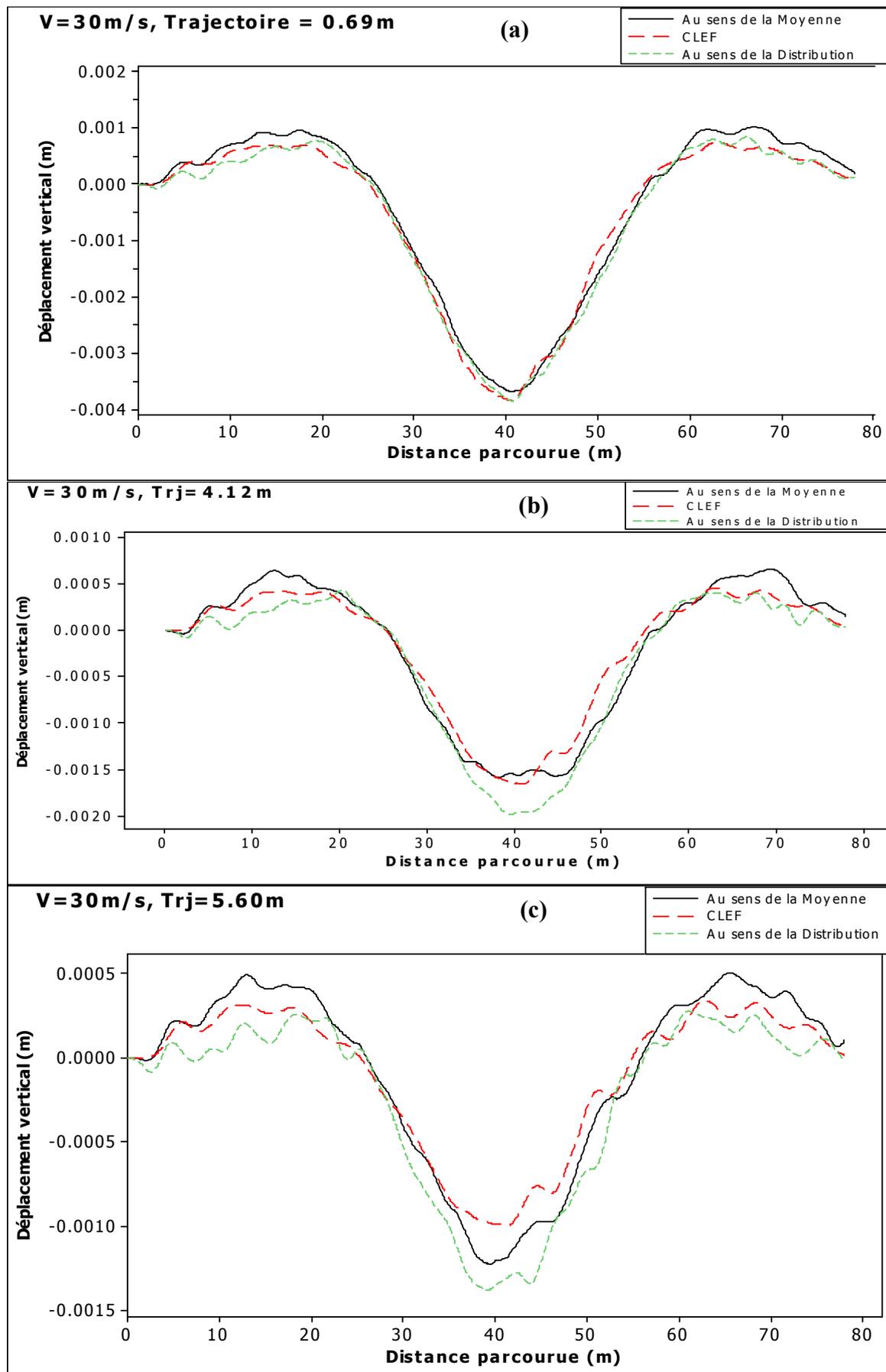


Figure 3.32. La superposition des courbes de la réponse dynamique obtenues par les méthodes au sens de la moyenne et au sens de la distribution et celle obtenue par le logiciel CLEF (Pour les trois cas de chargement).

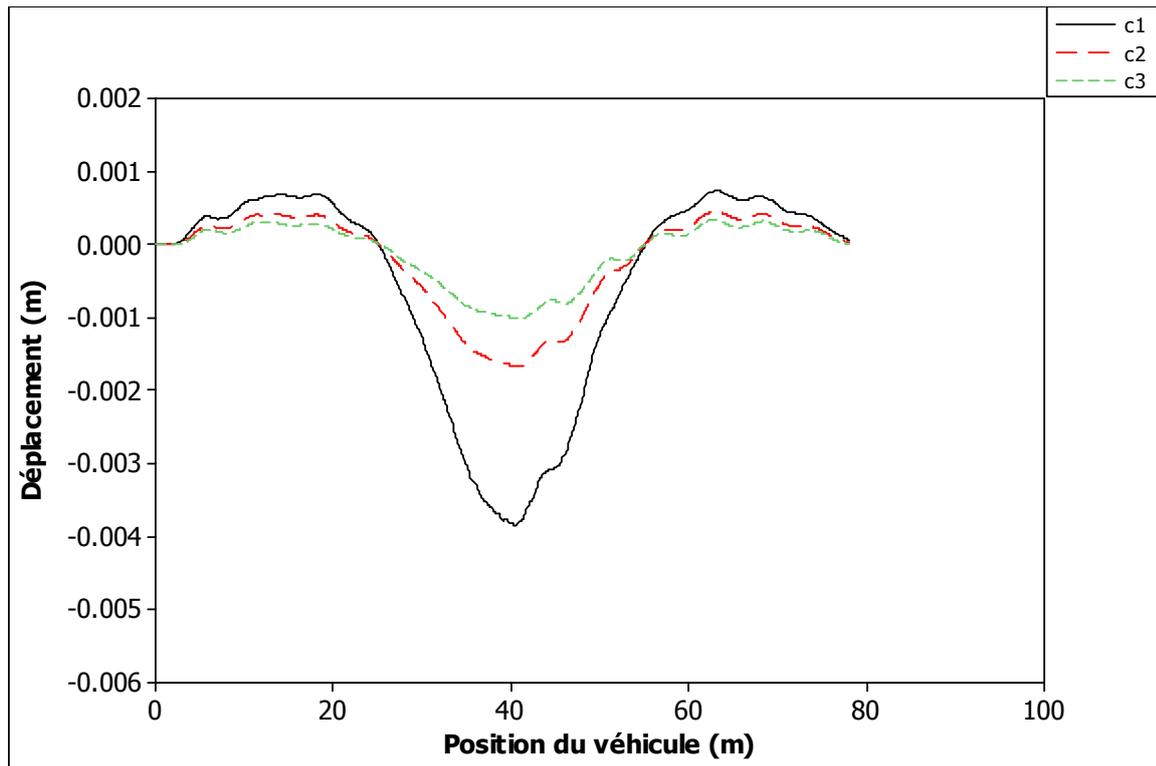


Figure 3.33. La réponse dynamique obtenue par le logiciel CLEF pour les 3 cas de chargements [ZHU 02].

A partir de la figure 3.32, on constate une bonne concordance entre les résultats obtenus par le logiciel CLEF qui utilise la méthode des éléments finis et ceux obtenus par le logiciel développé en résolvant l'équation du mouvement au sens de la distribution et au sens de la moyenne. La réponse du pont obtenue par la résolution de l'équation du mouvement au sens de la distribution est beaucoup plus proche au résultat obtenu par CLEF que celle obtenue par la résolution de l'équation du mouvement au sens de la moyenne.

3.5.5 Exemple d'un pont isotrope à trois travées [MAR 99]

Les données sont présentées au paragraphe 2.4.1 du chapitre 2.

Sur la figure 3.34, nous présentons une comparaison de la réponse dynamique obtenue par différentes méthodes de résolution.

Nous pouvons dire que la résolution de l'équation du mouvement au sens de la distribution se rapproche mieux de la résolution par la méthode des éléments finis (logiciel CLEF) que sa résolution au sens de la moyenne.

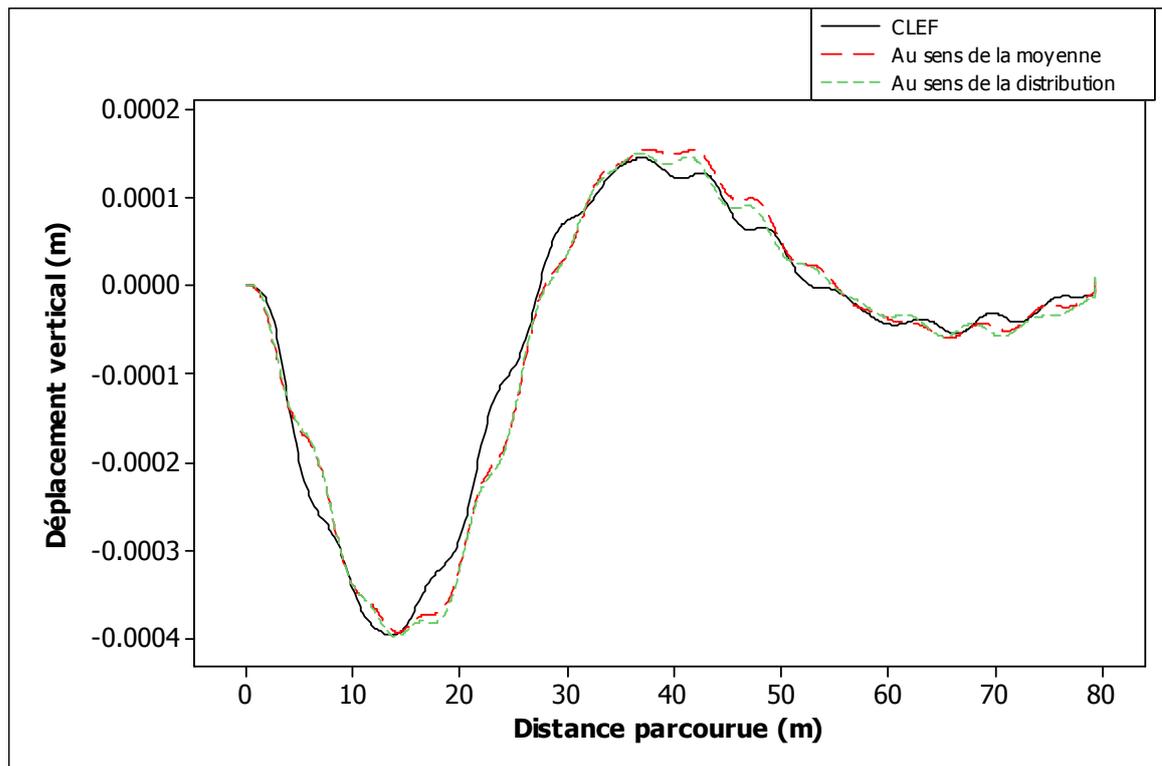


Figure 3.34. Superposition des résultats obtenus par différentes méthodes.

A partir de la figure 3.34, on constate que la flèche maximale du pont celle trouvée par CLEF et notre logiciel (résolution au sens de la distribution) est plus proche que celle trouvée par notre logiciel (résolution au sens de la moyenne).

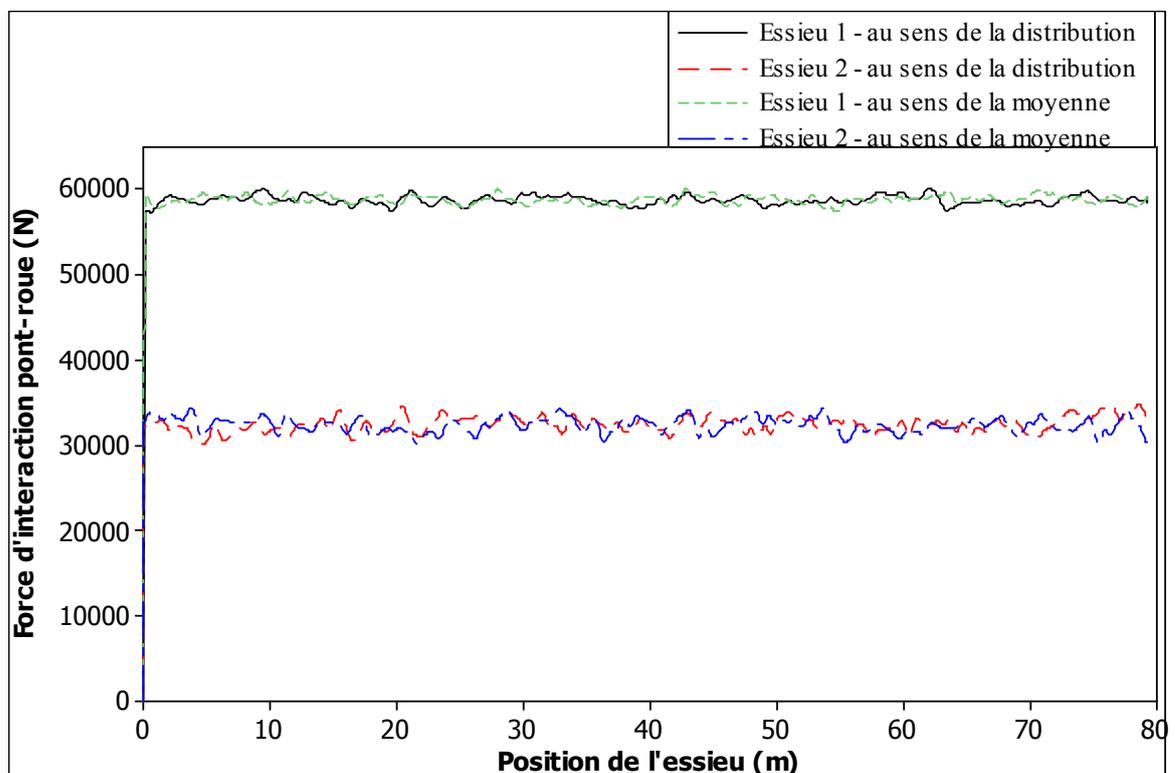


Figure 3.35. Superposition des forces d'interaction obtenues par différentes méthodes.

CHAPITRE IV

COMPORTEMENT VIBRATOIRE D'UN PONT DE CHAUSSEE A N TRAVEES

4.1 Introduction

Dans le souci de la généralisation de l'utilisation de notre logiciel, nous présentons l'étude du comportement dynamique d'un pont routier à n travées, sollicité par un véhicule mobile. Le pont est modélisé par une plaque mince orthotrope à n travées. Le véhicule est modélisé par un système dynamique H20-44 à sept (07) degrés de liberté conformément à la norme AASHTO [AAS 05]. Les irrégularités de la chaussée sont modélisées par une fonction aléatoire. Pour la résolution des équations de mouvements, nous avons fait appel à la méthode modale et la méthode d'intégration de NewMark. Nous utilisons un algorithme de résolution itératif des équations de mouvement couplées pont-véhicule.

4.2 Détermination des fréquences et des modes propres du pont par la résolution de l'équation du mouvement au sens de la distribution.

Pour déterminer les fréquences et les modes propres exactes d'une poutre continue (multi-travées) figure 4.1, il faut déterminer les fréquences et les modes propres pour chaque travée avec la prise en compte des conditions aux limites et de continuités aux appuis intermédiaires. L'expression du mode i pour la vibration transversale dans la travée r est donnée par:

$$\phi_i(x_r) = A_{ri} \sin(k_i x_r) + B_{ri} \cos(k_i x_r) + C_{ri} sh(k_i x_r) + D_{ri} ch(k_i x_r), \quad r = 1..R, \quad (4.1)$$

A_{ri}, B_{ri}, C_{ri} et D_{ri} , sont les constantes d'intégrations, elles sont fonction de la $i^{ème}$ pulsation propre ω_i de la travée r, R est le nombre de travées, $k_i^4 = \bar{m} \omega_i^2 / EI$ est un paramètre de fréquence, \bar{m}, I sont respectivement la masse par unité de longueur et le moment d'inertie polaire, E est le module d'Young.

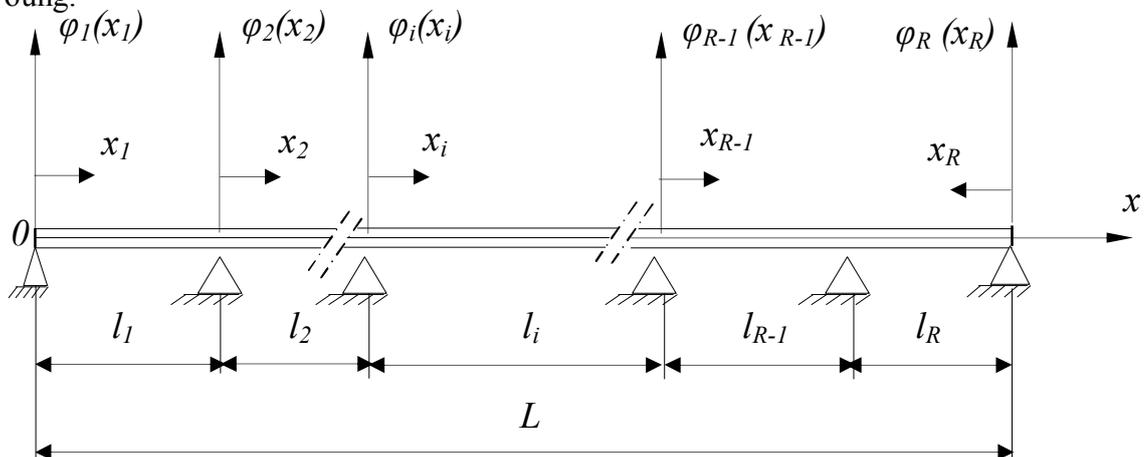


Figure 4.1. Poutre continue de R travées.

Pour les conditions aux limites, on a le déplacement vertical nul au niveau de tous les appuis, et le moment fléchissant nul aux extrémités de la poutre :

$$\begin{aligned} \varphi_i(x_i) \Big|_{x_i=0} = \varphi_i(x_i) \Big|_{x_i=l_i} = 0 & \quad i = 1, 2, \dots, R \\ \frac{\partial^2 \varphi_1(x_1)}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0} = \frac{\partial^2 \varphi_R(x_R)}{\partial x_R^2} \Big|_{x_R=0} = 0 & \quad (4.2) \end{aligned}$$

Pour les conditions de continuité, on a l'égalité de la pente et le moment fléchissant au niveau des appuis intermédiaires:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_i(x_i)}{\partial x_i} \Big|_{x_i=l_i} = \frac{\partial \varphi_{i+1}(x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \Big|_{x_{i+1}=0}, \\ \frac{\partial^2 \varphi_i(x_i)}{\partial x_i^2} \Big|_{x_i=l_i} = \frac{\partial^2 \varphi_{i+1}(x_{i+1})}{\partial x_{i+1}^2} \Big|_{x_{i+1}=0} \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, R-2)$$

Les conditions de continuité entre la travée R et R-1 sont:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{R-1}(x_{R-1})}{\partial x_{R-1}} \Big|_{x_{R-1}=l_{R-1}} &= - \frac{\partial \varphi_R(x_R)}{\partial x_R} \Big|_{x_R=l_R} \\ \frac{\partial^2 \varphi_{R-1}(x_{R-1})}{\partial x_{R-1}^2} \Big|_{x_{R-1}=l_{R-1}} &= \frac{\partial^2 \varphi_R(x_R)}{\partial x_R^2} \Big|_{x_R=l_R} \end{aligned} \quad (4.3)$$

La substitution des conditions aux limites et des conditions de continuités (4.2) et (4.3) dans l'expression (4.1) donne l'expression (4.4) des déformées propres d'après [ZHU 01] :

$$\varphi(x) = \begin{cases} A_1 \left(\sin(kx) - \frac{\sin(kl_1)}{\sinh(kl_1)} \sinh(kx) \right), & 0 \leq x \leq l_1, \\ A_r \left(\sin \left(k \left(x - \sum_{j=1}^{i-1} l_j \right) \right) - \frac{\sin(kl_r)}{\sinh(kl_r)} \sinh \left(k \left(x - \sum_{j=1}^{i-1} l_j \right) \right) \right) \\ + B_r \left(\cos \left(k \left(x - \sum_{j=1}^{i-1} l_j \right) \right) - \cosh \left(k \left(x - \sum_{j=1}^{i-1} l_j \right) \right) + \frac{\cosh(kl_r) - \cos(kl_r)}{\sinh(kl_r)} \sinh \left(k \left(x - \sum_{j=1}^{i-1} l_j \right) \right) \right), & \sum_{j=1}^{i-1} l_j \leq x \leq \sum_{j=1}^i l_j, \quad i = 2, 3, \dots, R-1, \\ A_R \left(\sin(k(L-x)) - \frac{\sin(kl_R)}{\sinh(kl_R)} \sinh(k(L-x)) \right), & L - l_R \leq x \leq L \end{cases} \quad (4.4)$$

Où les paramètres $k, A_1, A_i, B_i (i = 2, 3, \dots, R-1), A_R$ sont obtenus en résolvant l'équation (4.5).

$$[F] \cdot \{A\} = 0 \quad (4.5)$$

Avec le vecteur $\{A\}$ est le vecteur des constantes d'intégration. Le système d'équation (4.5) est un système homogène et pour avoir une solution non triviale on annule le déterminant de la matrice [F] et en normalisant la première constante A_1 à 1.

$$A = \{A_1, A_2, B_1, B_2, \dots, A_{R-1}, B_{R-1}, A_R\}$$

Les éléments de la matrice [F] sont donnés par la référence [ZHU 01]:

- Première travée:

$$f_{11} = \cos(kl_1) - \theta_1 \cosh(kl_1),$$

$$f_{12} = \theta_2 - 1,$$

$$f_{13} = -\Phi_2,$$

$$f_{21} = \sin(kl_1),$$

$$f_{23} = -1,$$

- Travées au milieu:

$$f_{2i-1,2(i-1)} = \cos(kl_i) - \theta_i \cosh(kl_i),$$

$$f_{2i-1,2i-1} = -\sin(kl_i) - \sinh(kl_i) + \Phi_i \cosh(kl_i),$$

$$f_{2i-1,2i} = \theta_{i+1} - 1,$$

$$f_{2i-1,2i+1} = -\Phi_{i+1},$$

$$f_{2i,2(i-1)} = -\sin(kl_i) - \theta_i \sinh(kl_i),$$

$$f_{2i,2i-1} = -\cos(kl_i) - \cosh(kl_i) + \Phi_i \sinh(kl_i),$$

$$f_{2i,2i+1} = 2 \quad i = 2, \dots, R-2,$$

- Dernière travée:

$$f_{2R-3,2(R-2)} = -\cos(kl_{R-1}) + \theta_{R-1} \cosh(kl_{R-1}),$$

$$f_{2R-3,2R-3} = \sin(kl_{R-1}) + \sinh(kl_{R-1}) - \Phi_{R-1} \cosh(kl_{R-1}),$$

$$f_{2R-3,2(R-1)} = \theta_R \cosh(kl_R) - \cos(kl_R),$$

$$f_{2(R-1),2(R-2)} = \sin(kl_{R-1}) + \theta_{R-1} \sinh(kl_{R-1}),$$

$$f_{2(R-1),2R-3} = \cos(kl_{R-1}) + \cosh(kl_{R-1}) - \Phi_{R-1} \sinh(kl_{R-1}),$$

$$f_{2(R-1),2(R-1)} = -2 \sin(kl_R),$$

Avec:

$$\theta_i = \frac{\sin(kl_i)}{\sinh(kl_i)},$$

$$\Phi_i = \frac{\cosh(kl_i) - \cos(kl_i)}{\sinh(kl_i)}, \quad i = 1, \dots, R \quad =$$

Les autres éléments de la matrice [F] sont nuls [ZHU01].

La comparaison de l'expression de la déformée propre pour un pont de trois travées présentée au chapitre 3 et celle pour n travées donnée par [ZHU 01], montre que cette dernière expression n'est que la généralisation de l'expression de la déformée propre pour trois travées présentée au chapitre précédent. Nous constatons quelques erreurs dans l'expression de la déformée pour n travées dans les éléments de la matrice concernant la dernière travée:

- Dans l'expression (4.4) de $\varphi(x)$, un terme k est ajouté à l'expression $\left[\cos k \left(k \left(x - \sum_{j=1}^{i-1} l_j \right) \right) \right]$;
- L'indice de la ligne avant dernière de la matrice [F] concernant la dernière travée ne mène pas réellement à la ligne avant dernière, le terme F_{2R-1} dans [ZHU 01] est remplacé par F_{2R-3} .

La formulation donnée par [ZHU 01] est valable pour un nombre de travées supérieur ou égal à trois travées. Pour cela et afin d'intégrer la généralisation dans le logiciel élaboré et afin de laisser à l'utilisateur le choix réel du nombre de travées, nous avons ajouté la modélisation pour une travée qui est tout simplement les modes propres d'une poutre à une travée simplement appuyée, dont la déformée propre est la suivante :

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \sin k_i x \\ \text{Avec } k_i &= \frac{i \cdot \pi}{L} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Pour une poutre continue à deux travées simplement appuyée, nous présentons l'expression de la déformée obtenue:

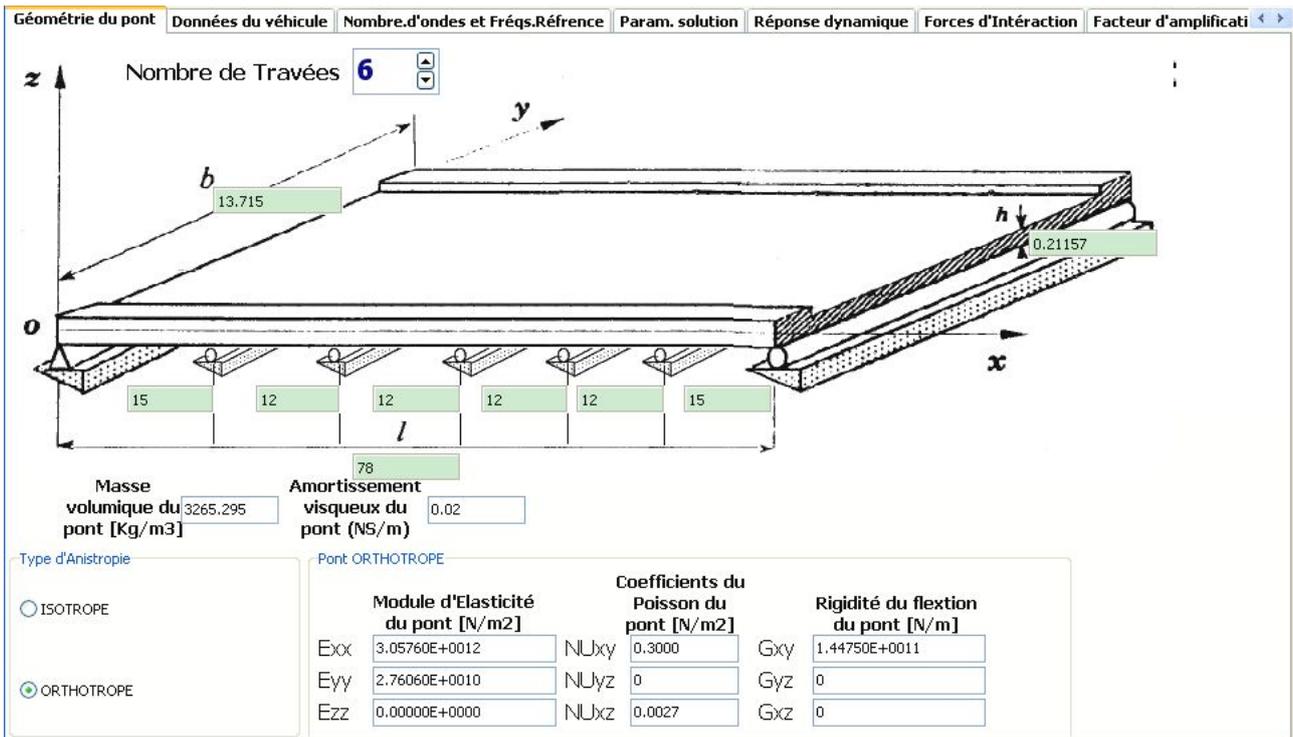
$$\varphi_i(x) = \begin{cases} A_1(\sin(kx) - \theta_1 \sinh(kx)) & 0 \leq x \leq l_1 \\ A_2(\sin(k(L-x)) - \theta_2 \sinh(k(L-x))) & l_1 \leq x \leq L \end{cases}$$

Avec :

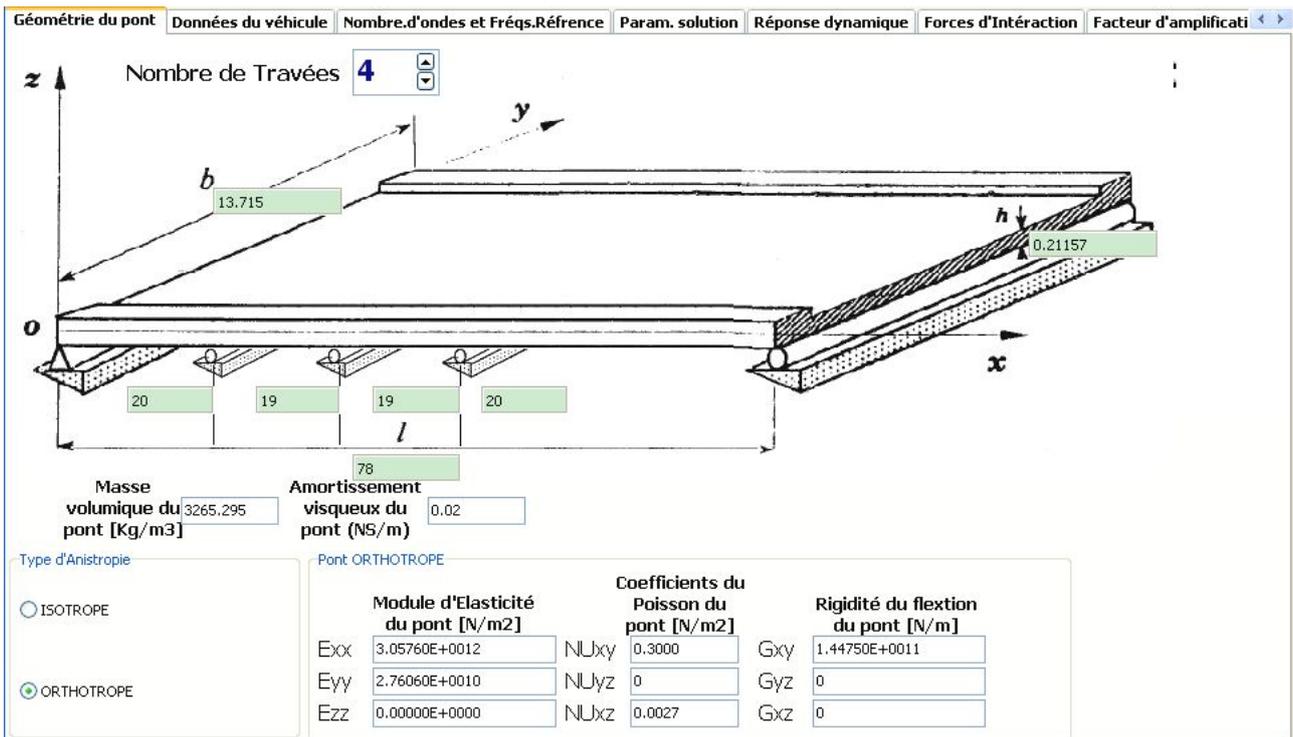
$$\begin{aligned} A_1 &= 1 \\ A_2 &= -A_1 \frac{(\sin(kl_1) - \cos(kl_1))}{(\sin(kl_2) - \cos(kl_2))} \\ \theta_i &= \frac{\sin(kl_i)}{\sinh(kl_i)} \quad \text{avec } i=1,2 \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.3 Généralisation du logiciel développé pour n travées

Nous avons intégré dans le logiciel la généralisation pour n travées, la fenêtre 4.1 présente la géométrie d'un pont à 6 travées et la fenêtre 4.2 la géométrie d'un pont à 4 travées.



Fenêtre 4.1. Géométrie d'un pont à 6 travées.



Fenêtre 4.2. Géométrie d'un pont à 4 travées.

4.3.1 Exemple de validation pour un pont à 4 travées

Nous présentons dans ce paragraphe un exemple de validation pour un pont à 4 travées de mêmes caractéristiques que le pont présenté au paragraphe (3.5.4) du chapitre 3 avec $L=78m$, $L_1=L_4=20m$, $L_2=L_3=19m$.

Les fréquences propres sont obtenues par la résolution de l'équation de mouvement au sens de la distribution, avec comme fréquences de références celles obtenus du logiciel ANSYS (figure 4.3).

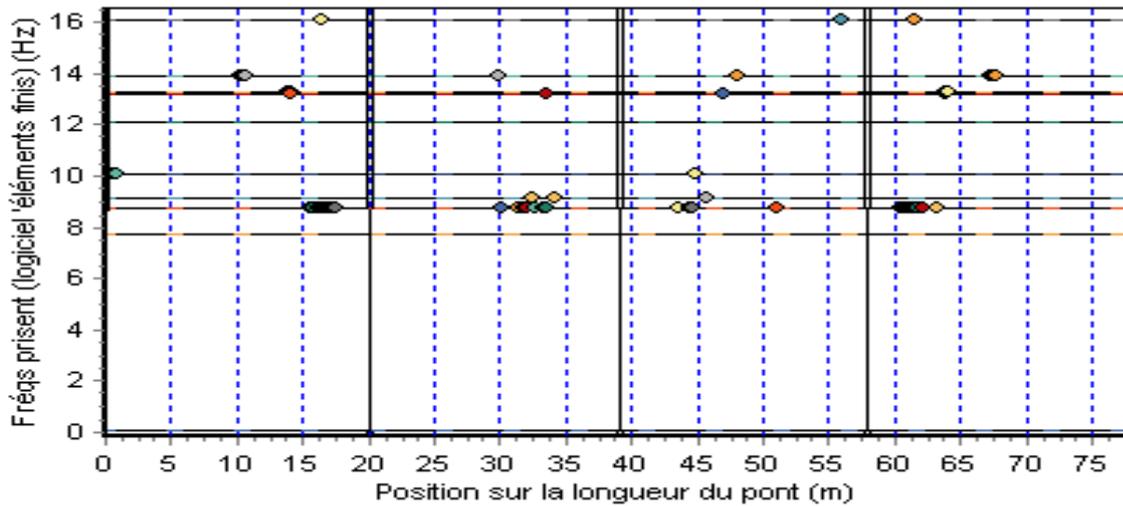


Figure 4.3. Comparaison des fréquences propres calculées pour différentes position de x avec celles calculées par la méthode des éléments finis.

De la même façon que dans le chapitre 3, nous présentons sur la figure 4.3, le mode (2,1) avec différentes positions de x permettant l'obtention de la fréquence propre de ce dernier mode.

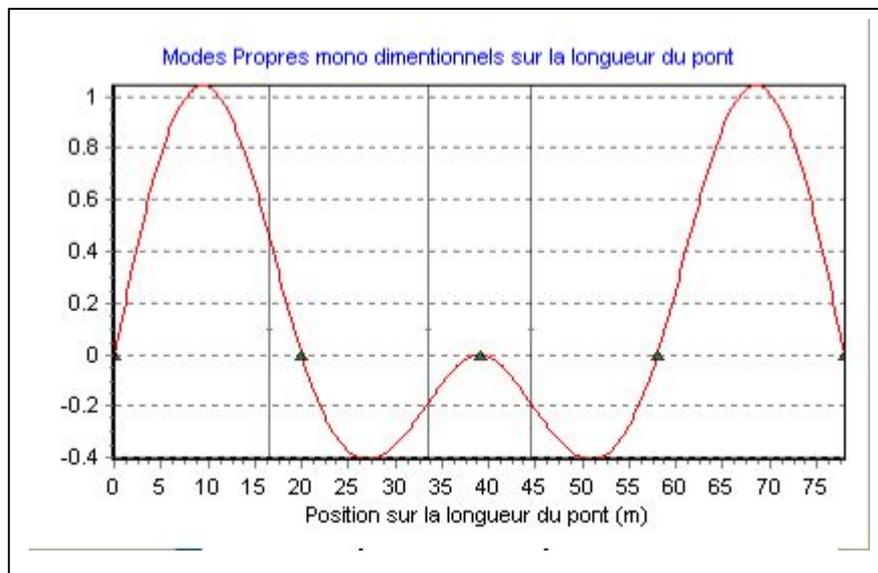


Figure 4.3. Les différentes positions de x permettant l'obtention du mode (2,1).

Sur la figure 4.4, nous présentons les quatre premières déformées propres obtenues par ANSYS et notre logiciel.

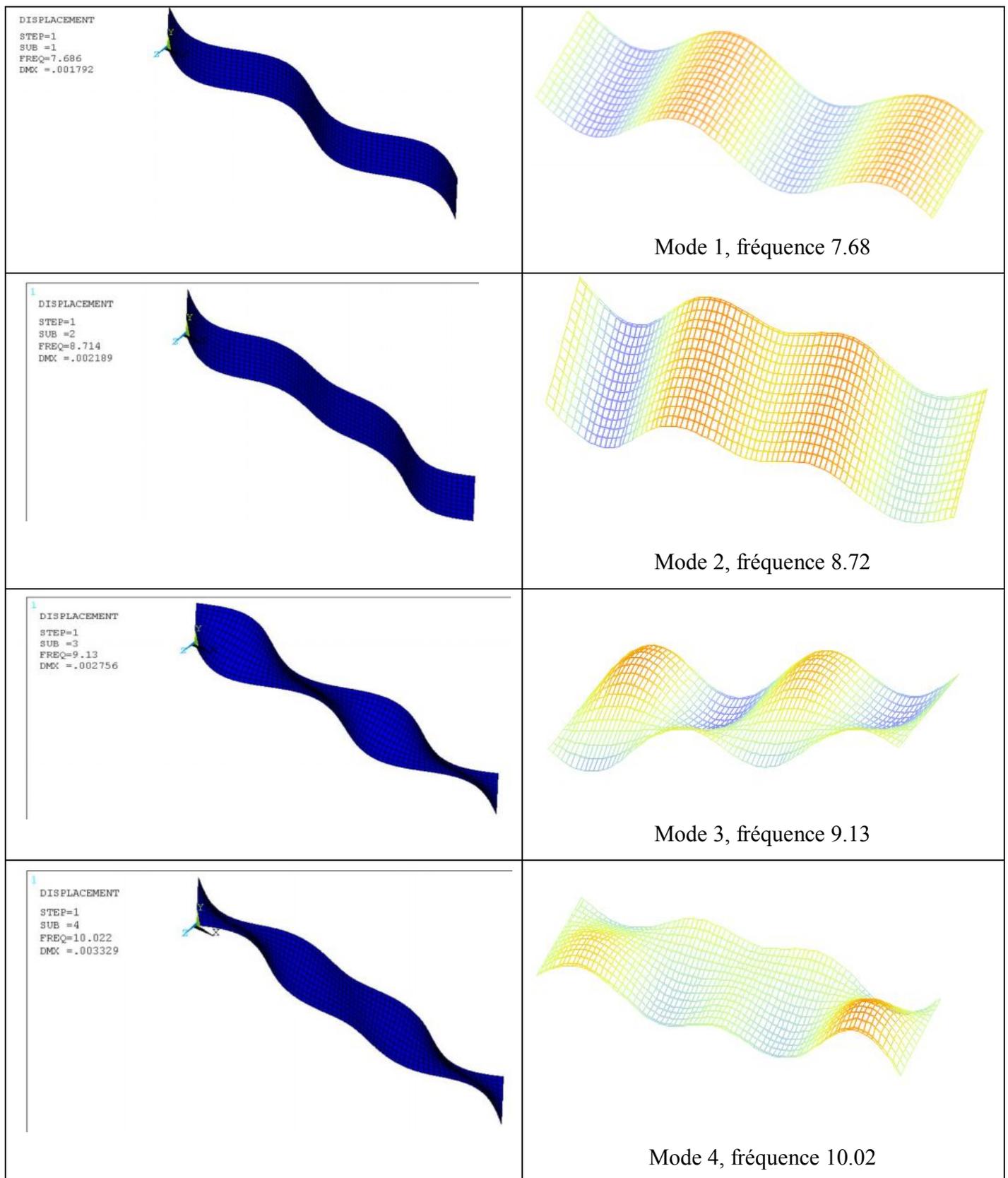


Figure 4. 4. Les déformées des quatre premiers modes.

Nous présentons dans le tableau 4.1, une comparaison entre les résultats des fréquences propres du pont obtenus par le logiciel que nous avons développé et les fréquences propres obtenues par le logiciel d'éléments finis ANSYS. L'erreur entre les deux résultats ne dépasse pas 0.3%.

Tableau 4.1. Les 10 premières fréquences propres du pont 4 travées.

Ordre des modes propres	Modes	Fréquences propres [Hz]		Erreur %
		Notre étude Résolution au sens de la distribution	Log. ANSYS (156x20)	
(1,1)	1	7.68	7.69	0.13
(2,1)	2	8.72	8.71	0.12
(1,2)	3	9.13	9.13	0.00
(2,2)	4	10.02	10.02	0.00
(3,1)	5	12.13	12.12	0.08
(3,2)	6	13.21	13.21	0.00
(1,3)	7	13.35	13.34	0.07
(2,3)	8	14.02	13.99	0.20
(1,4)	9	16.04	16.04	0.00
(3,3)	10	16.82	16.77	0.30

Nous présentons dans le tableau 4.2, les fréquences propres des 10 premiers modes d'un pont à 3 et 4 travées. L'augmentation du nombre d'appuis intermédiaires augmente la rigidité du pont et par conséquent les fréquences propres du pont à 4 travées sont plus élevées que celles du pont à 3 travées. Nous constatons aussi l'inversion des modes (1,2) et (2,1).

Tableau 4.2 : Les 10 premiers modes pour un pont de même longueur à 3 et 4 travées

Modes	Pont à 3 travées		Pont à 4 travées	
	Résolution au sens de la distribution		Résolution au sens de la distribution	
	Ordre des modes propres	Fréquences propres [Hz]	Ordre des modes propres	Fréquences propres [Hz]
1	(1,1)	4.13	(1,1)	7.68
2	(1,2)	5.45	(2,1)	8.72
3	(2,1)	6.30	(1,2)	9.13
4	(2,2)	7.59	(2,2)	10.02
5	(3,1)	7.75	(3,1)	12.12
6	(3,2)	8.79	(3,2)	13.21
7	(1,3)	9.05	(1,3)	13.35
8	(2,3)	11.29	(2,3)	14.02
9	(3,3)	12.06	(1,4)	16.04
10	(1,4)	15.08	(3,3)	16.82

La réponse dynamique du pont à 4 travées est présentée dans la figure 4.5.

Nous avons choisi la trajectoire ($y=0.69\text{m}$). Le point de mesure est au milieu de la première travée avec la vitesse de 30.0m/s .

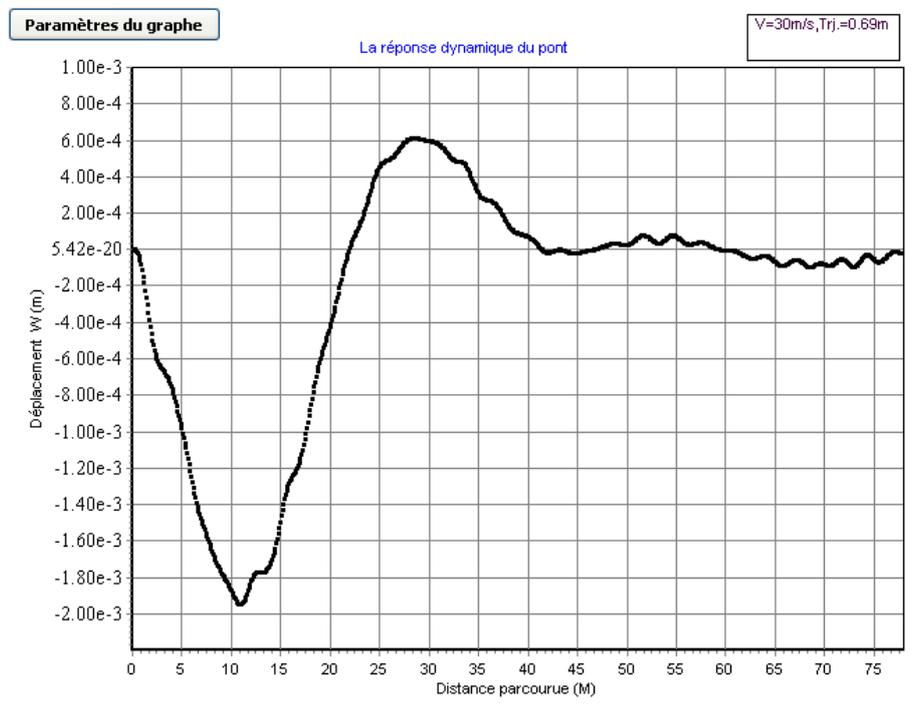


Figure 4.5. La réponse dynamique du pont calculée au milieu de la première travée sur le premier raidisseur.

Nous remarquons dans la figure 4.5 que la flèche maximale du pont est au milieu de la 1^{ère} travée (point de mesure) et elle devient positive sur la 2^{ème} travée puis la réponse du point se minimise en s'éloignant du point de mesure jusqu'à presque son annulation.

4.3.2 Validation de la réponse dynamique du pont à 4 travées par le logiciel CLEF

Nous présentons sur la figure 4.6, la superposition de la réponse dynamique d'un pont à 4 travées obtenue par notre logiciel et par le logiciel CLEF. Nous constatons que la flèche maximale au point de mesure est presque identique pour les deux logiciels. Les petites différences entre les deux méthodes de résolutions sont dues au profil de la chaussée. Le logiciel CLEF possède ses propres définitions des profils.

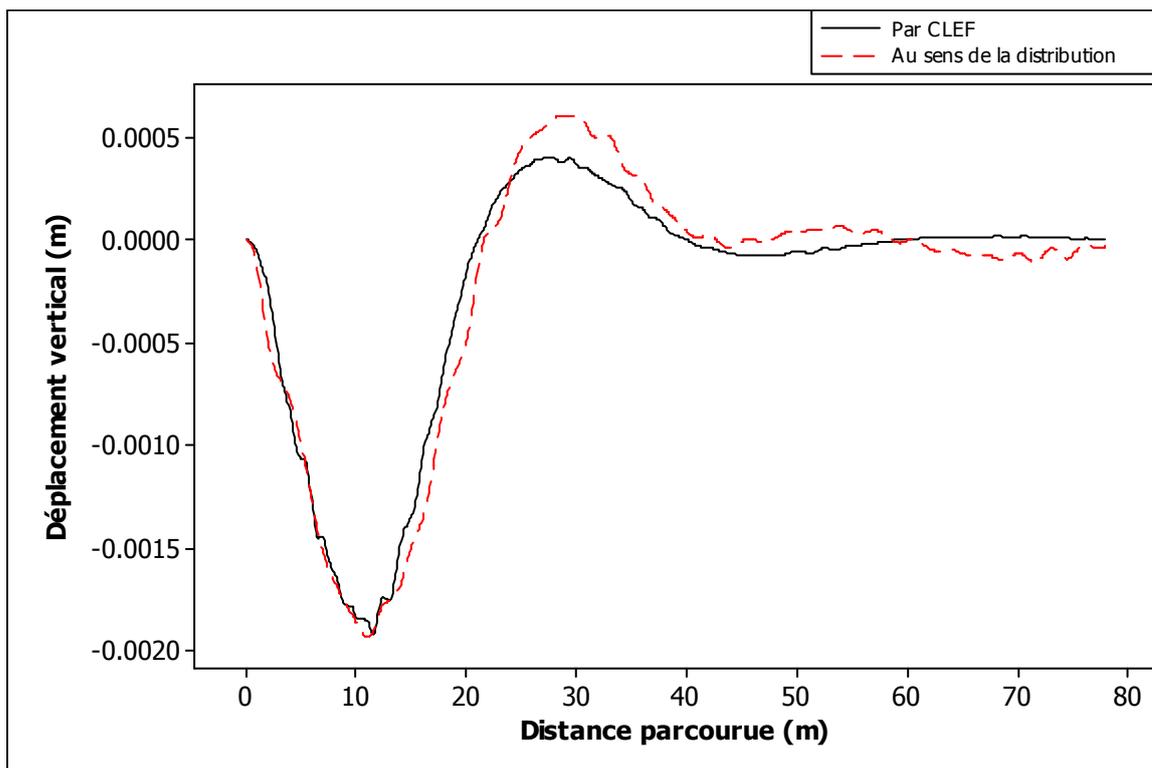


Figure 4.6. La réponse dynamique au milieu de la 1^{ère} travée d'un pont à 4 travées, cas de chargement 1 ($y=0.69m$) et pour une vitesse de roulement 30m/s.

4.3.3 Comparaison entre la réponse dynamique d'un pont à 3 et 4 travées

Dans la figure 4.7, nous présentons une superposition des réponses dynamique d'un pont à 3 et 4 travées. On constate que la rigidité du pont est proportionnelle au nombre de travées.

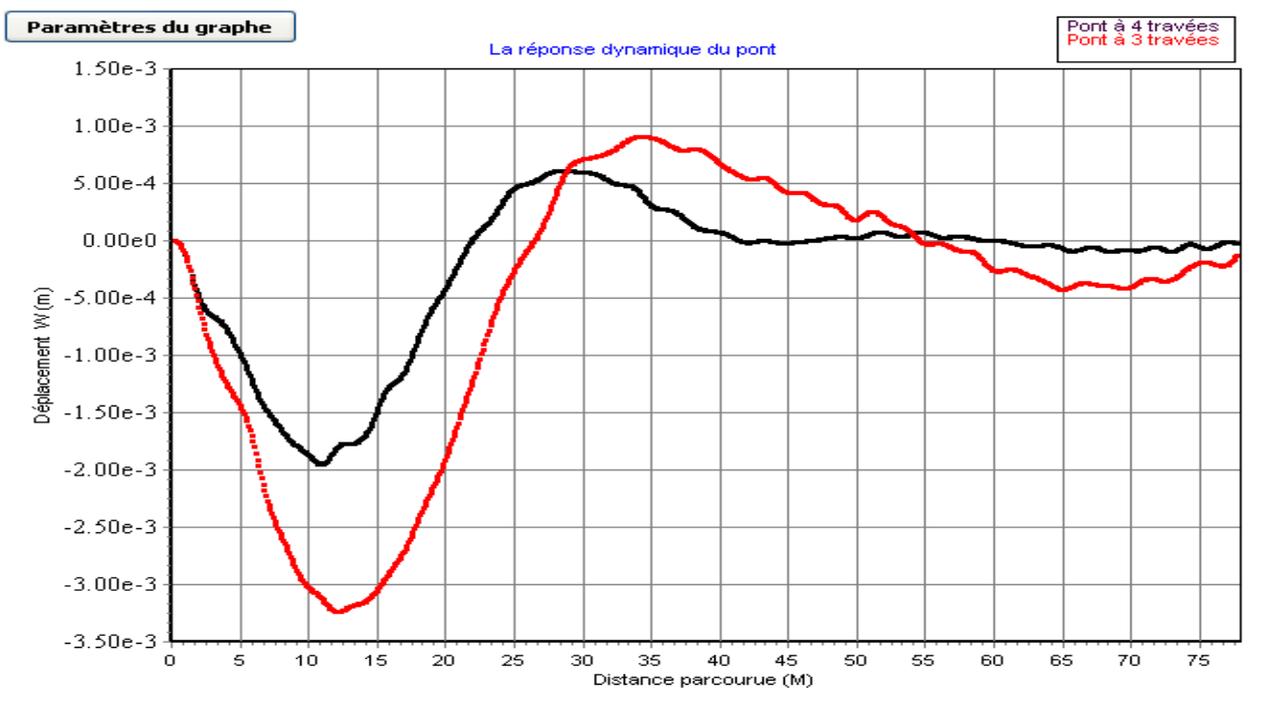


Figure 4.7. Superposition de la réponse dynamique d'un pont à 3 et 4 travées de mêmes caractéristiques.

Sur la figure 4.8, nous présentons les forces d'interaction des deux essieux pour un pont à 3 et 4 travées. Nous pouvons remarquer que les forces d'interaction varient autour d'une valeur moyenne (force statique).

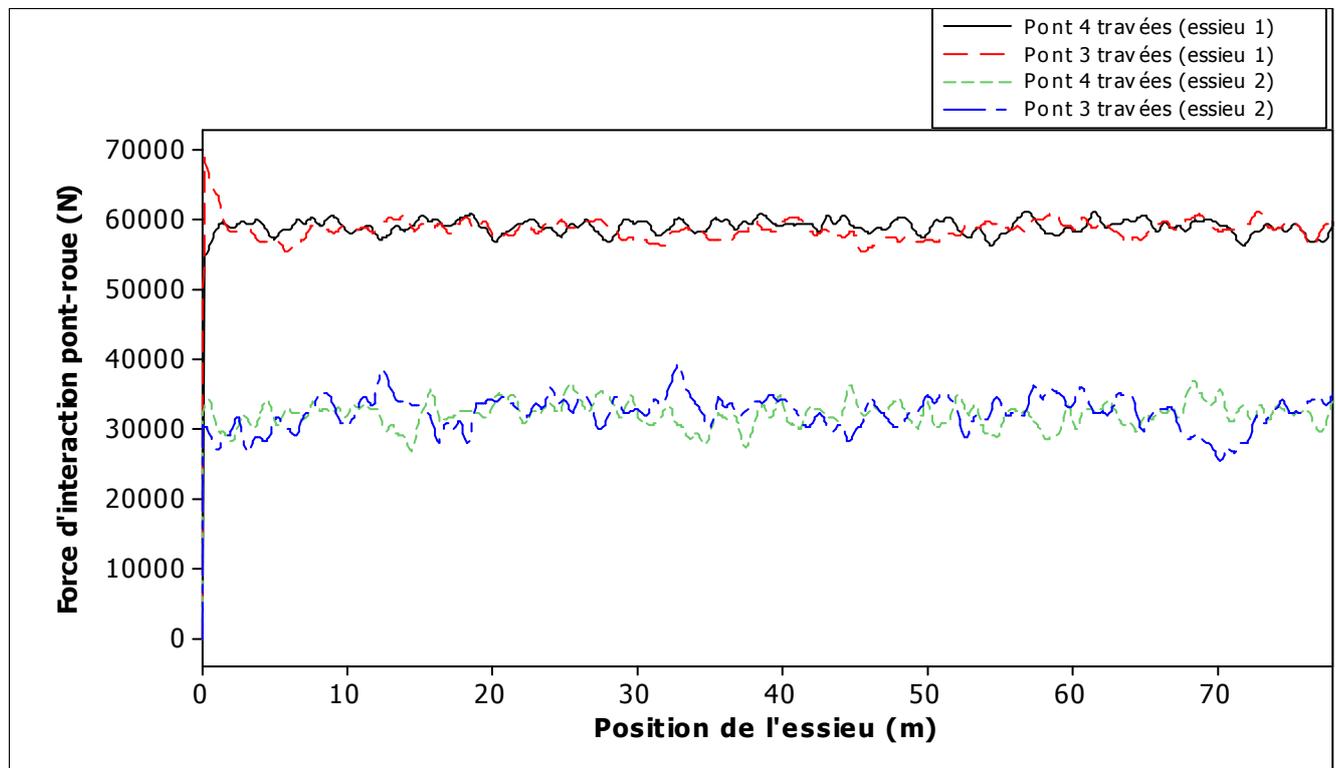


Figure 4.8. Les forces d'interaction d'un pont à 3 et 4 travées, cas de chargement 1 ($y=0.69\text{m}$) pour une vitesse de roulement 30m/s.

4.3.4 Réponse dynamique d'un pont à 6 travées

Comme le point de mesure est au milieu de la première travée, la déflexion du pont due au passage du véhicule est maximale et elle est positive sur la deuxième travée. L'éloignement du véhicule du point de mesure diminue de plus en plus le déplacement du pont jusqu'à presque son annulation.

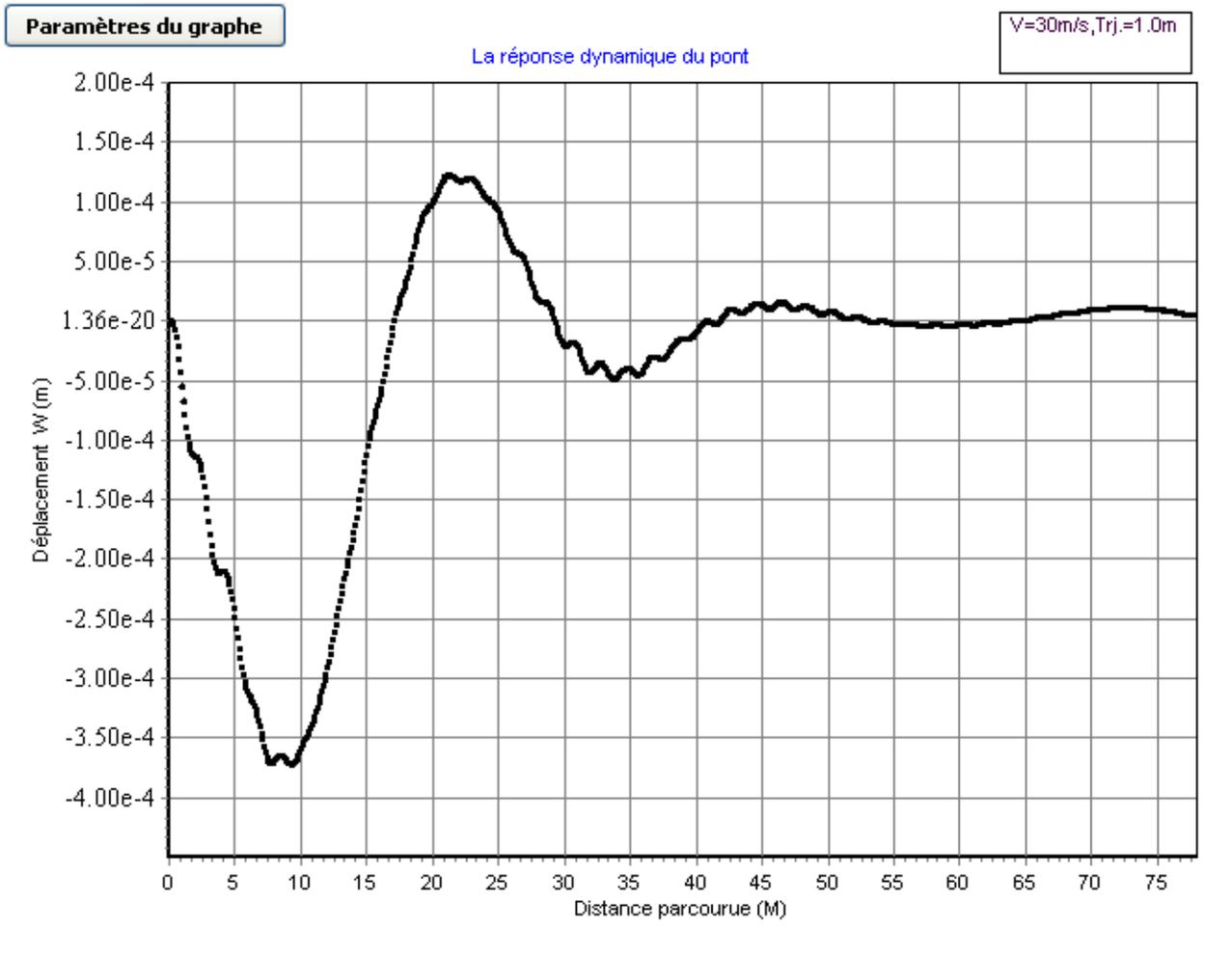


Figure 4.9. La réponse dynamique d'un pont et 6 travées (fenêtre 4.1), cas de chargement 1, point de mesure au milieu de la première travée sur le premier raidisseur et avec une vitesse de roulement de 30 m/s.

A partir de la figure 4.9, on constate que la flèche maximale est diminuée 10 fois par rapport à celle d'un pont à 3 travées ce qui rend le pont plus rigide.

Conclusion générale

D'une manière générale, le travail que nous avons développé de ce mémoire de magister a permis d'une part l'exploitation du logiciel «CLEF» basé sur la méthode des éléments finis et la méthode intégro-modale, modélisant le passage des véhicules sur les ponts routiers et d'autre part la validation des résultats développés dans ce domaine au sein de notre laboratoire durant une dizaine d'années.

Nous avons développé notre propre logiciel interactif en langage C++, qui peut être utilisé par un large public scientifique, vu les facilités d'utilisation que nous avons délibérément introduit dans le logiciel. Notre logiciel est basé sur deux méthodes de résolution de l'équation du mouvement du pont en vibration libre, la première consiste à résoudre l'équation de mouvement au sens de la moyenne et la deuxième, sa résolution au sens de la distribution. Cette dernière méthode représente une de nos principales contributions dans ce travail, elle permet d'obtenir les fréquences propres du pont avec une erreur qui ne dépasse pas 0.3% par rapport aux logiciels d'éléments finis.

Le logiciel donne aux utilisateurs le libre choix du nombre de travées qui composent le pont, il permet d'obtenir la réponse dynamique du pont en fonction du temps de passage du véhicule ou bien en fonction de la position du véhicule sur le pont, il permet de tenir en compte les irrégularités du chemin de roulement pour chaque roue, aussi le calcul des forces d'interaction pont-véhicule et le facteur d'amplification dynamique.

A l'issue de ce travail, nous avons tiré les conclusions suivantes:

- La vérification du bon fonctionnement du logiciel CLEF en comparant les résultats obtenus par ce dernier logiciel avec ceux de la littérature et cela pour un pont isotrope et orthotrope.
- La méthode de résolution de l'équation du mouvement au sens de la distribution que nous avons proposé dans le chapitre 3, permet d'obtenir des résultats beaucoup plus proches que sa résolution au sens de la moyenne.

- Les irrégularités de la voie de roulement, la trajectoire du véhicule et la vitesse de roulement ont une influence considérable sur la réponse dynamique du pont, les forces d'interaction pont-véhicule et sur le F.A.D.
- L'augmentation du nombre d'appuis intermédiaires du pont élève ces fréquences propres (augmentation de sa rigidité) et diminue sa flèche dynamique.

Perspectives

Nos perspectives sont :

- L'intégration des conditions d'appuis élastiques dans l'étude proposée au chapitre 3,
- Validation de plusieurs véhicules passent en même temps sur le pont et même en sens inverse,
- L'intégration d'autres modèles de véhicules tels que les véhicules à 9 et 11 d.d.l.

Bibliographie

Ouvrages

- [AAS 05] "AASHTO LRFD BRIDGE Design Specifications", SI Units 3rd edition , 2005 By American Association of State Highway and Transportation officials.
- [BAL 01] Satish Balay – William Gropp – Lois Curfman McInnes – Barry Smith, "PETSc Users Manual", ANL-95/11 – Revision 2.1.0m Argonm IL 60439.
- [BAR 94] John J.Barton & Lee R.Nackman, "Scientific and Engineering C++ an Introduction with Advanced techniques", ISBN 0-201-53393-6, 1994 by Addison Wesley Longman, Inc.
- [BRA 02] S.Braun, "Encyclopedia of vibration", ISBN: 0.12.227085, 2002, Academic press.
- [CLA 07] Clarence W.de Silva "Computer Techniques in Vibration", ISBN-13: 978-1-4200-5317-3(alk.paper), 2007 by Taylor & Francis Group, LLC
- [CLO 95] Ray W.Clough – Joseph Penzlen, "Dynamics of Structures", 3rd edition of Computers & Structures, Inc. 1995 University Ave. Berkeley, CA 94704 USA.
- [FRY 99] Ladislav Fryba "Vibration of Solids and Structures under Moving Loads", ISBN 0-7277-2741-9, 3rd edition 1999.
- [MIN 06] R D Mindlin "An Introduction to the Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates", ISBN 981-270-381-0, 2006 by World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd.
- [OCO 02] Colin O'Connor & Peter A.Shaw "Bridge Loads An International perspective", ISBN 0-419-24600-2 (alk.paper), 2002 by Taylor & Francis.
- [TIM 59] S.Timoshenko – S.Woinowsky Krieger "Theory of Plates and Shells", ISBN 0-07-064779-8, McGraw-Hill Book ,1959.
- [THO 08] Douglas Thorby, "Structural Dynamics and Vibration in Practice", ISBN: 978-0-7560-8002-8, 2008, Elsevier Ltd.
- [WAT 05] Paul A.Watters "Solaris 10: The Complete Reference", ISBN 0-07-146657-6, 2005 by The McGraw-Hill Companies.
- [YAN 04] Y.B.Yang – J.D.Yau – Y.S.Wu "Vehicle-Bridge Interaction Dynamics with Applications to High-Speed Railways", ISBN 981-238-847-8, 2004 by World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd
- [ZIE 00] O.C.Zienkiewicz-R.L.Taylor, "Finite element method, Volume 2 : Solid mechanics", ISBN-0 7506 5055 9 Butterworth-Heinemann, 2000.

Thèses

- [BRO 99] Claude Broquet, "Comportement dynamique des dalles de roulement des ponts en béton sollicités par le trafic routier". Thèse de Doctorat 1999, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.
- [GER 01] Isabel Gervais-Tremblay, "Analyse par éléments finis de l'interaction dynamique entre les trains et les ponts ferroviaires". Thèse de Maître ès en art (M.A.) 2001, Université Laval.
- [HEN 95] Kamel Henchi, "Analyses dynamiques des ponts par éléments finis sous les sollicitations des véhicules mobile". Thèse de Doctorat 1995, Université de technologie de Compiègne.
- [NGU 02] Vu Hieu Nguyen "Comportement dynamique de structures non-linéaires soumises à des charges mobiles". Thèse de Doctorat 2002, Ecole nationale des Ponts et chaussées.
- [REZ 08] A.Rezaiguia, "Modélisation du Comportement vibratoire et acoustique d'un pont de la chaussée lors du passage de véhicules ". Thèse de Doctorat 2008, Université de Badji Mokhtar Annaba.

Articles

- [BAN 01] J.R.Banerjee, "Frequency equation and mode shape formulae for composite Timoshenko beams". Composite Structures 51-(2001)381-388.
- [CHE 99] Y.K.Cheung-F.T.K.Au-D.Y.Zheng-Y.S.Cheng, " Vibration of multi-span non-uniform bridges under moving vehicles and trains by using modified beam vibration functions". Journal of Sound and Vibration (1999) 228(3), 611-628.
- [CHO 95] K.Chompooming-M.Yener, «The influence of roadway surface irregularities and vehicle deceleration on bridge dynamics using the methode of lines». Journal of Sound and Vibration (1995) 183(4), 567-589.
- [FRY 09] L.Fryba-J.D.Yau, «Suspended bridges subjected to moving loads and support motions due to earthquake». Journal of Sound Vibration 319 (2009) 218-227.
- [GAR 06] A.Garinei, "Vibration of simple beam-like modeled bridge under harmonic moving loads". International Journal of Engineering Science (2006) 778-787.
- [GON 08] L.Gong-M.S.Cheung, «Computer simulation of dynamic interactions between vehicle and long span box girder bridges». Tsinghua Science and Technology, Issn: 1007-0214 Vo13, 2008, p.71-77.

- [GOR 08] D.J. Gorman, "On use of the Dirac delta function in the vibration analysis of elastic structures". *International Journal of Solid and Structures* 45(2008) 4605-4614.
- [HEN 97] K.Henchi – M.Fafard, "Dynamic behaviour of multi – span beams under moving load". *Journal of Sound and Vibration* (1997) 199(1), 33-50.
- [HEN 98] K.Henchi – M.Fafard – M.Talbot – G.Dhatt, "An efficient algorithm for dynamic analysis of bridges under moving vehicles using a coupled modal and physical components approach". *Journal of Sound and Vibration* (1998) 212(4), 663-683.
- [HIS 09] Hsien-Yuan Lin, «On the natural frequencies and mode shapes of a multi-span Timoshenko beam carrying a number of various concentrated elements». *Journal of Sound Vibration* 319 (2009) 593-605.
- [KIM 05] C.W.Kim-M.Kawatani-K.B.Kim, «Three-dimensional dynamic analysis for bridge-vehicle interaction with roadway roughness». *Computers and Structures* 83(2005) 1627-1645.
- [LAS 05] R.Lassoued – M.Guenfoud, "Détermination auto-consistante des fréquences propres de poutres et de plaques orthotropes". *Sciences & Technologie B-N°24*, décembre (2005), pp.57-64.
- [MAR 99] S.Marchesiello–A.Fasana-L.Garibaldi-B.A.D.Piombo, "Dynamics of multi-span continuous straight Bridges subject to multi-degrees of freedom Moving vehicle excitation". *Journal of Sound and Vibration* (1999) 224(3), 541-561.
- [MAR 10] M.D. Martinez-Rodrigon J.Lavado, P.Museros, "Transverse vibrations in existing railway bridges under resonant conditions: Single-track versus double-track configurations". *Engineering Structures* 32(2010) 1861-1875.
- [MIK 08] Yozo Mikata, «Orthogonality condition for a multi-span beam, and its application to transient vibration of a two-span beam». *Journal of Sound and Vibration* 314(2008) 851-866.
- [OUE 06] N.Ouelaa-A.Resaiguia-B.Laulagnet, "Vibro-acoustic modeling of a railway bridge crossed by a train". *Applied Acoustics* 67 (2006) 461-475.
- [SIE 09] R.Sieniawaska-P.Sniady-S.Zukowski, "Identification of the structure parameters applying a moving load". *Journal of Sound and Vibration* 319 (2009) 355-365.

- [STA 09] Dan Stancioiu, Huajiang Ouyang, John E.Mottershead, "Vibration of a continuous beam with multiple elastic support excited by a moving two-axle system with separation". *Meccanica* (2009) 44: 293-303
- [WUJ 99] J.S.Wu et H.M.Chou, "A new approach for determining the natural frequencies and mode shapes of a uniform beam carrying any number of sprung masses". *Journal of Sound and Vibration* 220- (1999) 451-468.
- [WUS 04] Y.S.Wu-Y.B.Yang, «A semi-analytical approach for analyzing ground vibrations caused by trains moving over elevated bridges». *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 24(2004) 949-962.
- [XIN 09] X.F.Xing-B.Liu, «New exact solutions for free vibrations of thin orthotropic rectangular plates». *Composite Structures* 89 (2009) 567-574.
- [YAG 06] N.Yagiz-L.E.Sakman, "Vibrations of a rectangular bridge as an isotropic plate under a traveling full vehicle model". *Journal of Vibration and Control* 12(1): 83-98,2006.
- [YAN 04] Y.B.Yang-C.W.Lin-J.D.Yau, «Extracting bridge frequencies from the dynamic response of a passing vehicle». *Journal of Sound and Vibration* 272 (2004) 471-493.
- [ZHU 00] X.Q.Zhu-S.S.Law, «Identification of vehicle axle loads from bridge dynamic responses». *Journal of Sound and Vibration* (2000) 236(4), 705-724.
- [ZHU 01] X.Q.Zhu et S.S.Law, "Orthogonal function in moving load identification on a multi-span bridge". *Journal of Sound and Vibration* 245- (2001) 329-347.
- [ZHU 02] X.Q.Zhu – S.S.Law, "Dynamic load on continuous multi-lane bridge deck from moving vehicles". *Journal of Sound and Vibration* (2002) 251(4), 697-716.
- [ZHU 03] X.Q.Zhu-S.S.Law, «Identification of moving interaction forces with incomplete velocity information». *Mechanical Systems and Signal Processing* (2003) 17(6), 1349-1366.

Annexe 1

Fréquences et modes propres d'une poutre continue en appuis simples

Considérons le cas d'une poutre à trois travées (figure A1.2).

Les modes propres de chaque travée r sont :

$$\phi_r(x_r) = A_n \sin k_i x_r + B_n \cos k_i x_r + C_n \operatorname{sh} k_i x_r + D_n \operatorname{ch} k_i x_r, \quad r=1, 2, 3 \quad (\text{A1.1})$$

A_{ri} , B_{ri} , C_{ri} et D_{ri} , sont déterminées par l'application des conditions aux limites de la poutre et des conditions de continuité aux appuis intermédiaires 1 et 2.

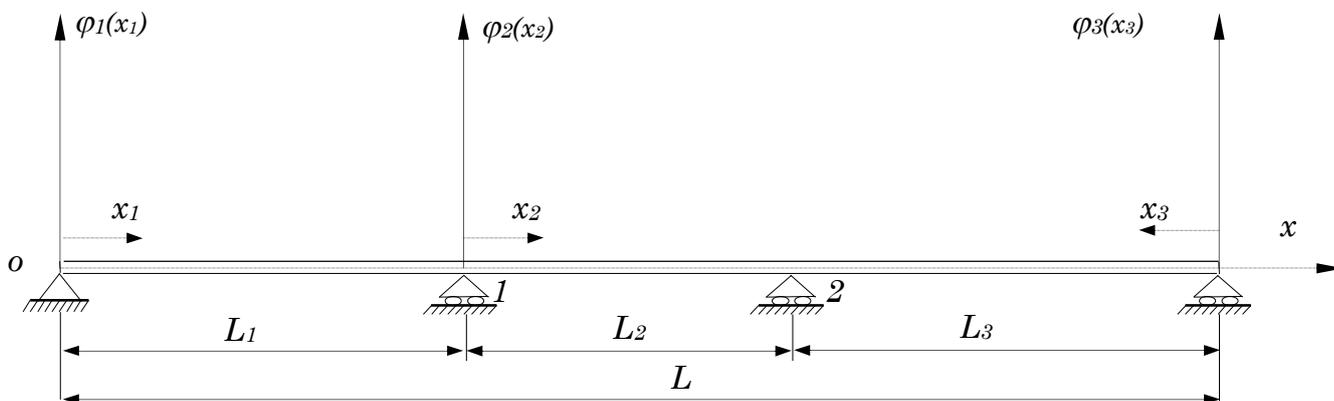


Figure A1.2. Poutre continue avec 2 appuis intermédiaires simples.

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} \phi_r(x_r)|_{x_r=0} = \phi_r(x_r)|_{x_r=l_r} = 0, \quad r=1, 2, 3 \\ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0} = \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x_3^2} \Big|_{x_3=0} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A1.3})$$

Les conditions de continuité au niveau des appuis intermédiaires sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=l_1} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0}, \quad \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=l_1} = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=0} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=l_2} = -\frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} \Big|_{x_3=l_3}, \quad \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=l_2} = \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x_3^2} \Big|_{x_3=l_3} \end{aligned} \quad (\text{A1.4})$$

Nous avons alors huit conditions aux limites et quatre conditions de continuité.

En appliquant ces conditions à l'expression (A1.1), on obtient :

▪ **Les modes propres**

$$\varphi(x) = \begin{cases} A_1(\sin kx - \theta_1 \operatorname{sh} kx) & \text{pour } 0 \leq x \leq l_1 \\ A_2(\sin k(x-l_1) - \theta_2 \operatorname{sh} k(x-l_1)) + B_2(\cos k(x-l_1) - \operatorname{ch} k(x-l_1) + \Phi_2 \operatorname{sh} k(x-l_1)) & \text{pour } l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \\ A_3(\sin k(l-x) - \theta_3 \operatorname{sh} k(l-x)) & \text{pour } l_1 + l_2 \leq x \leq l \end{cases} \quad (\text{A1.5})$$

Avec

A_1 : Valeur normalisée ($A_1=1$)

$$A_2 = A_1 \left(\frac{\cos k l_1 - \theta_1 \operatorname{ch} k l_1 - \Phi_2 \sin k l_1}{1 - \theta_2} \right)$$

$$B_2 = A_1 \sin k l_1 \quad (\text{A1.6})$$

$$A_3 = A_2 \left(\frac{\cos k l_2 - \theta_2 \operatorname{ch} k l_2}{\theta_3 \operatorname{ch} k l_3 - \cos k l_3} \right) - A_1 \left(\frac{\sin k l_1 \sin k l_2 + \sin k l_1 \operatorname{sh} k l_2 - \Phi_2 \sin k l_1 \operatorname{ch} k l_2}{\theta_3 \operatorname{ch} k l_3 - \cos k l_3} \right)$$

$$\theta_r = \frac{\sin k l_r}{\operatorname{sh} k l_r}, \quad r = 1, 2, 3 \quad \Phi_2 = \frac{\operatorname{ch} k l_2 - \cos k l_2}{\operatorname{sh} k l_2}$$

▪ **L'équation aux fréquences**

$$\begin{aligned} & -16 (\cosh(L_3 k) \sin(L_3 k) (-\sin((L_1 + L_2) k) \sinh(L_1 k) \sinh(L_2 k) + \sin(L_1 k) \sin(L_2 k) \sinh((L_1 + L_2) k)) \\ & + (\sinh(L_1 k) (2 \sin(L_1 k) \sin(L_3 k) - \cosh(L_2 k) (2 \cos(L_2 k) \sin(L_1 k) \sin(L_3 k) + \sin(L_2 k) \sin((L_1 + L_3) k)) \\ & + (\cos(L_1 k) \cos(L_3 k) \sin(L_2 k) + \cos(L_2 k) \sin((L_1 + L_3) k)) \sinh(L_2 k) + \cosh(L_1 k) \sin(L_1 k) (\cosh(L_2 k) \sin(L_2 k) \sin(L_3 k) - \sin((L_2 + L_3) k) \sinh(L_2 k))) \sinh(L_3 k)) \end{aligned} \quad (\text{A1.7})$$

Par l'option Détermination des racines de $\text{Det}=0$ (r_1 et r_2) du logiciel élaboré nous aurons les racines k_i .

Exemple

Considérons une poutre de longueur $L = 78\text{m}$ à trois travées de longueurs $L_1 = 24\text{m}$, $L_2 = 30\text{m}$, $L_3 = 24\text{m}$.

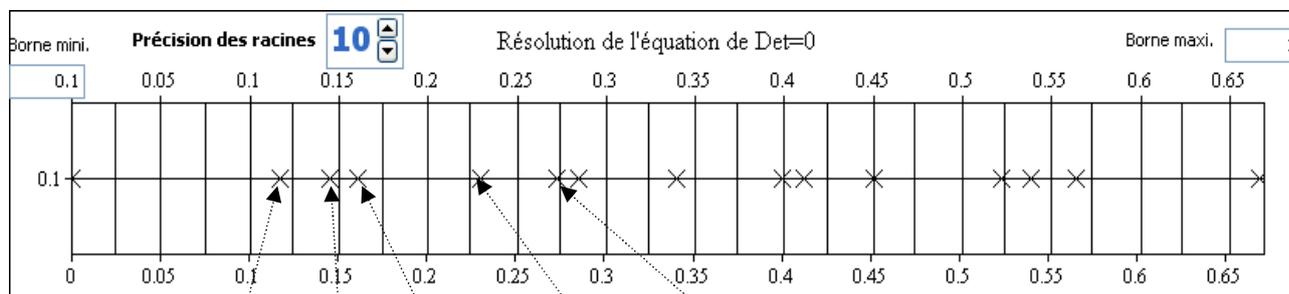


Figure A1.8: Détermination des racines de l'équation aux fréquences (A1.7)

Après résolution de l'équation aux fréquences (A1.7) par le logiciel en utilisant l'algorithme de Rugula-Falsi. Nous avons les valeurs de k_i .

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
0.1178	0.1455	0.1614	0.2304	0.2736

A2.1 Schémas du modèle de véhicule

Afin de décrire fidèlement le mouvement du véhicule, ce dernier est modélisé par un modèle dynamique à sept degrés de liberté (hypothèse 4. Chapitre 3). Ce modèle est similaire à celui utilisé par [ZHU 02], [MAR 99] et [REZ 08]. Le bloc rigide du camion possède trois degrés de liberté qui sont :

z_v : correspond au bondissement

θ_y : correspond au tangage

α_v : correspond au roulis

Le sautellement et le roulis des essieux de l'avant et de l'arrière sont présentés par quatre degrés de liberté qui sont:

z_1, z_2 : les déplacements verticaux des essieux de l'avant et de l'arrière respectivement

θ_1, θ_2 : les rotations des essieux de l'avant et de l'arrière respectivement

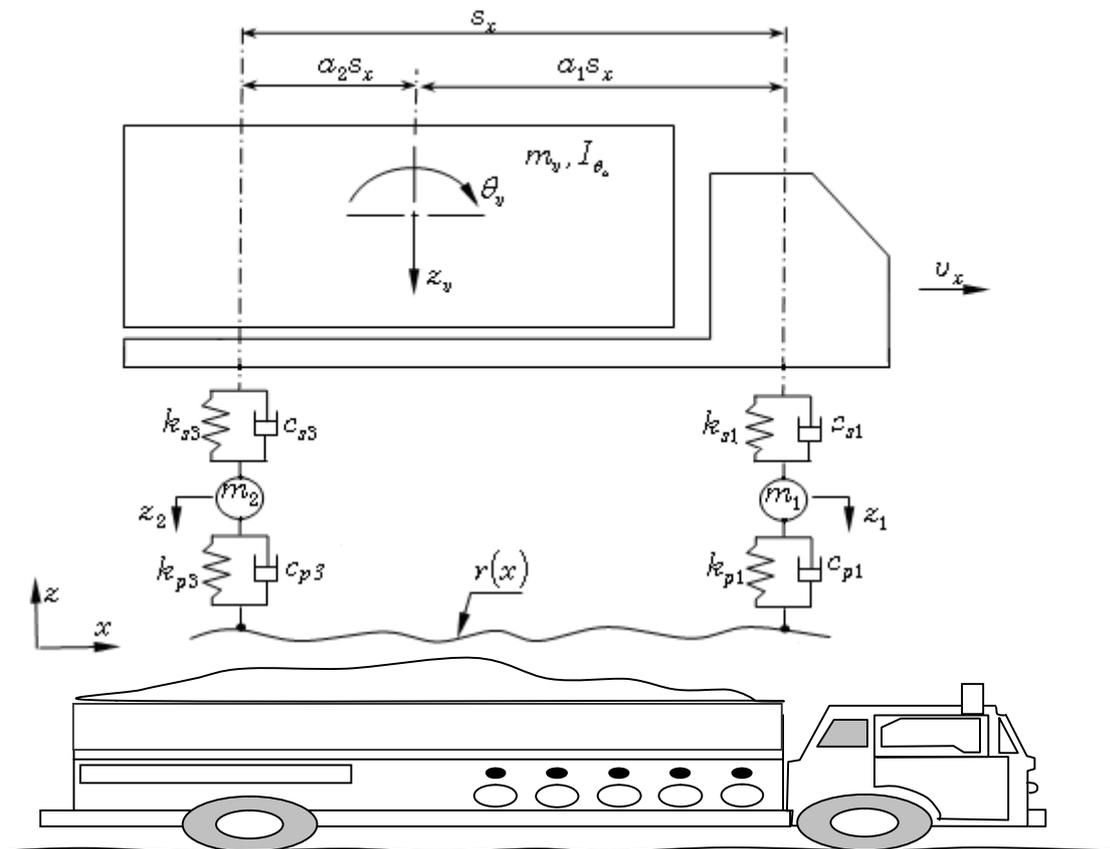


Figure A2.1. Vue de profil du modèle de véhicule.

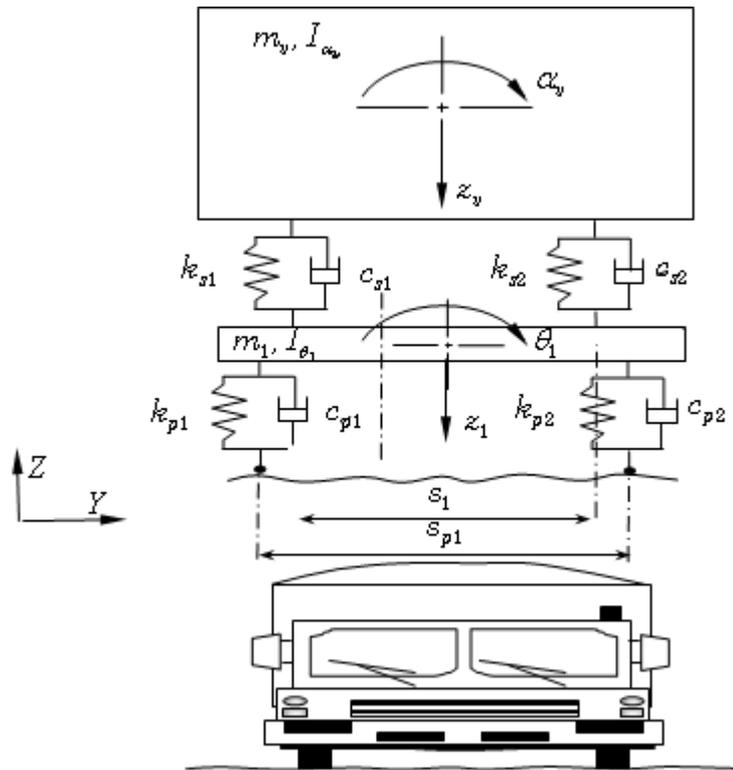


Figure A2.2. Vue de face avant du modèle de véhicule.

Le vecteur des degrés de liberté du véhicule est :

$$\{Z_v\} = \{z_v, \theta_v, \alpha_v, z_1, \theta_1, z_2, \theta_2\}^T \quad (\text{A2. 1})$$

Avec :

m_1, m_2 : les masses des roues avec les essieux de l'avant et de l'arrière respectivement

$m_v, I_{\theta_v}, I_{\alpha_v}$: la masse et les moments d'inertie du bloc rigide du camion

I_{θ_1} : les moments d'inertie des essieux de l'avant et de l'arrière respectivement

$k_{pi}, i = 1, 2, 3, 4$: les rigidités dans les pneus

$c_{pi}, i = 1, 2, 3, 4$: les amortissements dans les pneus

$k_{si}, i = 1, 2, 3, 4$: les rigidités dans les suspensions

$c_{si}, i = 1, 2, 3, 4$: les amortissements dans les suspensions

s_{p1}, s_{p2} : les espacements entre les points de contact des pneus de l'avant et de l'arrière respectivement

s_1, s_2 : les espacements entre les essieux de l'avant et de l'arrière respectivement

A2.2 Schémas d'équilibre dynamique des forces et des moments

Les équations du mouvement du modèle de véhicule sont obtenues en appliquant le principe d'équilibre dynamique des forces et des moments. Les déplacements verticaux du modèle de véhicule sont calculés à partir de sa position d'équilibre statique. Sur la figure A2.3, nous présentons les forces et les moments exercés sur le véhicule.

Pour déterminer les forces d'interaction pont-véhicule, on détermine pour chaque point de contact pont-véhicule, les déplacements des extrémités des ressorts qui modélisent les pneus.

La détermination des déplacements des extrémités des ressorts qui modélisent la suspension du véhicule et des pneus permet de déterminer les forces d'interactions et les forces dans les suspensions du véhicule.

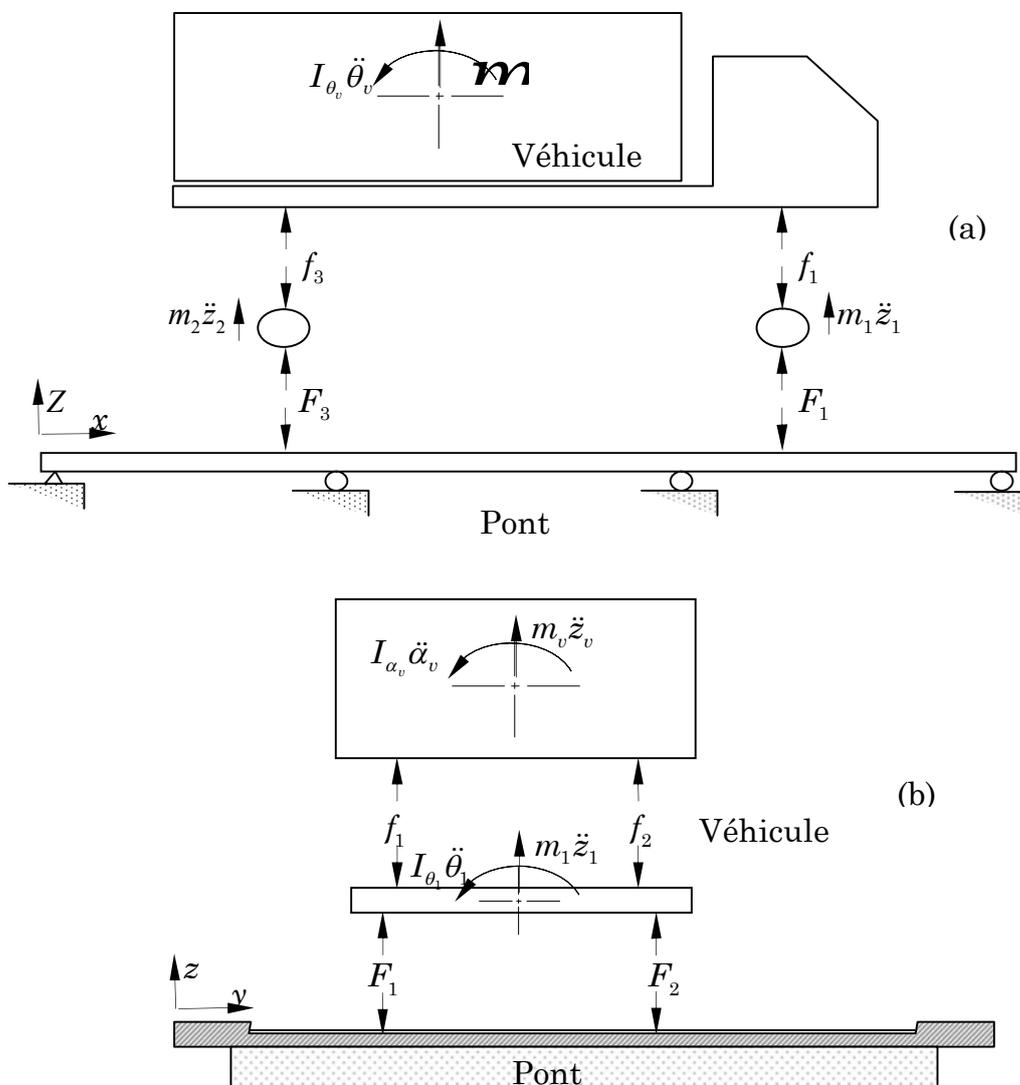


Figure A2.3. Schéma d'équilibre dynamique des forces et des moments,

(a): vue de profil, (b): vue de face avant.

Les forces d'interaction pont-véhicule dans les pneus sont :

$$\begin{aligned}
 F_1 &= k_{p1} \left(z_1 - \frac{1}{2} s_{p1} \theta_1 - (w_1 + r_1) \right) + c_{p1} \left(\dot{z}_1 - \frac{1}{2} s_{p1} \dot{\theta}_1 - (\dot{w}_1 + \dot{r}_1) \right) \\
 F_2 &= k_{p2} \left(z_1 + \frac{1}{2} s_{p1} \theta_1 - (w_2 + r_2) \right) + c_{p2} \left(\dot{z}_1 + \frac{1}{2} s_{p1} \dot{\theta}_1 - (\dot{w}_2 + \dot{r}_2) \right) \\
 F_3 &= k_{p3} \left(z_2 - \frac{1}{2} s_{p2} \theta_2 - (w_3 + r_3) \right) + c_{p3} \left(\dot{z}_2 - \frac{1}{2} s_{p2} \dot{\theta}_2 - (\dot{w}_3 + \dot{r}_3) \right) \\
 F_4 &= k_{p4} \left(z_2 + \frac{1}{2} s_{p2} \theta_2 - (w_4 + r_4) \right) + c_{p4} \left(\dot{z}_2 + \frac{1}{2} s_{p2} \dot{\theta}_2 - (\dot{w}_4 + \dot{r}_4) \right)
 \end{aligned} \tag{A2. 2}$$

Avec :

$$\dot{w}_i + \dot{r}_i = \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{x_i, y_i} = +v_x \left(\left. \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right) \right|_{x_i, y_i}, \quad i = 1, \dots, 4 \tag{A2. 3}$$

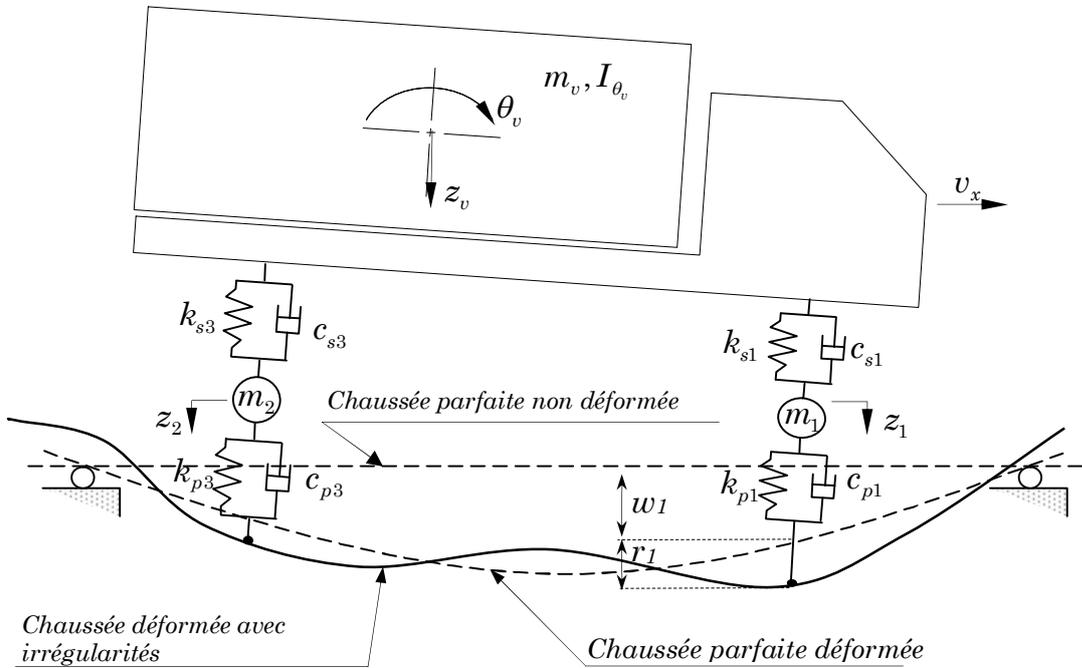


Figure A2.4. Déformation du point de contact pont-véhicule avec la prise en compte de la rugosité.

Les différents termes dans (A2. 2) sont définis comme suite:

$w_i, i = 1, \dots, 4$: le déplacement vertical du pont au point de contact i ($w_i = w(x_i(t), y_i)$)

$r_i, i = 1, \dots, 4$: la rugosité du profil statique du pont au point de contact i ($r_i = r(x_i(t))$)

Les forces dans les suspensions du véhicule sont :

$$f_1 = k_{s1} \left(z_v + a_1 s_x \theta_v - \frac{1}{2} s_1 \alpha_v - z_1 + \frac{1}{2} s_1 \theta_1 \right) + c_{s1} \left(\dot{z}_v + a_1 s_x \dot{\theta}_v - \frac{1}{2} s_1 \dot{\alpha}_v - \dot{z}_1 + \frac{1}{2} s_1 \dot{\theta}_1 \right)$$

$$\begin{aligned}
 f_2 &= k_{s2} \left(z_v + a_1 s_x \theta_v + \frac{1}{2} s_1 \alpha_v - z_1 - \frac{1}{2} s_1 \theta_1 \right) + c_{s2} \left(\dot{z}_v + a_1 s_x \dot{\theta}_v + \frac{1}{2} s_1 \dot{\alpha}_v - \dot{z}_1 - \frac{1}{2} s_1 \dot{\theta}_1 \right) \\
 f_3 &= k_{s3} \left(z_v - a_2 s_x \theta_v - \frac{1}{2} s_2 \alpha_v - z_2 + \frac{1}{2} s_2 \theta_2 \right) + c_{s3} \left(\dot{z}_v - a_2 s_x \dot{\theta}_v - \frac{1}{2} s_2 \dot{\alpha}_v - \dot{z}_2 + \frac{1}{2} s_2 \dot{\theta}_2 \right) \\
 f_4 &= k_{s4} \left(z_v - a_2 s_x \theta_v + \frac{1}{2} s_2 \alpha_v - z_2 - \frac{1}{2} s_2 \theta_2 \right) + c_{s4} \left(\dot{z}_v - a_2 s_x \dot{\theta}_v + \frac{1}{2} s_2 \dot{\alpha}_v - \dot{z}_2 - \frac{1}{2} s_2 \dot{\theta}_2 \right)
 \end{aligned} \tag{A2.4}$$

Le vecteur des forces dues aux effets de la gravité est :

$$\{F_g\} = \{(m_v a_1 + m_1)g/2, (m_v a_1 + m_1)g/2, (m_v a_2 + m_2)g/2, (m_v a_2 + m_2)g/2\}^T \tag{A2.5}$$

En rajoutant la contribution statique, le vecteur des forces d'interactions du pont agissant sur le véhicule devient:

$$\{F_p^{int}\} = \{F_g\} + \{F_p\} \tag{A2.6}$$

Avec :

$$\{F_p\} = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}^T \tag{A2.7}$$

A2.3 Equations du mouvement

Les équations du mouvement du modèle de véhicule à sept degrés de liberté sont obtenues en appliquant la loi d'équilibre dynamique des forces ou des moments pour chaque degré de liberté.

$$\begin{aligned}
 \text{Pour } z_v : \quad & m_v \ddot{z}_v + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0 \\
 \text{Pour } \theta_v : \quad & I_{\theta_v} \ddot{\theta}_v + a_1 s_x (f_1 + f_2) - a_2 s_x (f_3 + f_4) = 0 \\
 \text{Pour } \alpha_v : \quad & I_{\alpha_v} \ddot{\alpha}_v + \frac{1}{2} s_1 (f_2 - f_1) + \frac{1}{2} s_2 (f_4 - f_3) = 0 \\
 \text{Pour } z_1 : \quad & m_1 \ddot{z}_1 + F_1 + F_2 - f_1 - f_2 = 0 \\
 \text{Pour } \theta_1 : \quad & I_{\theta_1} \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} s_{p1} (F_2 - F_1) + \frac{1}{2} s_1 (f_1 - f_2) = 0 \\
 \text{Pour } z_2 : \quad & m_2 \ddot{z}_2 + F_3 + F_4 - f_3 - f_4 = 0 \\
 \text{Pour } \theta_2 : \quad & I_{\theta_2} \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2} s_{p1} (F_4 - F_3) + \frac{1}{2} s_2 (f_3 - f_4) = 0
 \end{aligned} \tag{A2.8}$$

Remplaçons les expressions des forces (A2.2) et (A2.4) dans les équations (A2.8), après réarrangement et regroupement, on obtient le système suivant :

$$[M_v] \{\ddot{Z}_v\} + [C_v] \{\dot{Z}_v\} + [K_v] \{Z_v\} = \{F_v^{int}\} \tag{A2.9}$$

Où $\{F_v^{int}\}$ est le vecteur des forces d'interactions appliquées sur le véhicule, $[M_v]$, $[C_v]$ et $[K_v]$ sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité du modèle de véhicule.

A2.4 Résolution numérique des équations du mouvement

Pour résoudre les équations du mouvement couplées pont-véhicule, nous utilisons la méthode d'intégration numérique de Newmark .

À l'instant $t + \Delta t$, l'équation (4. 9) s'écrit :

$$[M_v] \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} + [C_v] \{\dot{Z}_v\}_{t+\Delta t} + [K_v] \{Z_v\}_{t+\Delta t} = \{F_v^{int}\}_{t+\Delta t} \quad (A2.10)$$

En utilisant la méthode de Newmark, les déplacements et les vitesses respectivement sont :

$$\{Z_v\}_{t+\Delta t} = \{Z_v\}_t + \Delta t \{\dot{Z}_v\}_t + \Delta t^2 (0,5 - \beta) \{\ddot{Z}_v\}_t + \beta \Delta t^2 \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} \quad (A2.11)$$

$$\{\dot{Z}_v\}_{t+\Delta t} = \{\dot{Z}_v\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_t + \gamma \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} \quad (A2.12)$$

γ et β sont les paramètres de stabilité de la méthode de Newmark,

Δt est le pas du temps d'intégration.

Remplaçons les expressions (A2.11) et (A2.12) dans l'équation (A2.10), après factorisation on obtient :

$$[S_v] \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} + [C_v] \{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} + [K_v] \{Z_v^*\}_{t+\Delta t} = \{F_v^{int}\}_{t+\Delta t} \quad (A2.13)$$

$$\text{Avec : } [S_v] = [M_v] + \gamma \Delta t [C_v] + \beta \Delta t^2 [K_v] \quad (A2.14)$$

$$\{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} = \{\dot{Z}_v\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_t \quad (A2.15)$$

$$\{Z_v^*\}_{t+\Delta t} = \{Z_v\}_t + \Delta t \{\dot{Z}_v\}_t + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \{\ddot{Z}_v\}_t \quad (A2.16)$$

Multiplions l'équation (A2.13) par $[S_v]^{-1}$, on obtient :

$$\{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} = \{P_v\}_{t+\Delta t} - [U_v] \{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} - [V_v] \{Z_v^*\}_{t+\Delta t} \quad (A2.17)$$

$$\text{Avec : } \{P_v\}_{t+\Delta t} = [S_v]^{-1} \{F_v^{int}\}_{t+\Delta t} \quad (A2.18)$$

$$[U_v] = [S_v]^{-1} [C_v] ; [V_v] = [S_v]^{-1} [K_v]$$

De même, l'équation du mouvement du pont (Chapitre 3, 3.5), à l'instant $t + \Delta t$ s'écrit :

$$\ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} + 2\xi_{ij} \omega_{ij} \dot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} + \omega_{ij}^2 q_{ij}^{(t+\Delta t)} = \frac{1}{M_{ij}} F_{ij}^{(t+\Delta t)} \quad (A2.19)$$

En utilisant la méthode de Newmark, les déplacements et les vitesses généralisés du pont, à l'instant $t + \Delta t$ sont :

$$q_{ij}^{(t+\Delta t)} = q_{ij}^{(t)} + \Delta t \dot{q}_{ij}^{(t)} + \Delta t^2 (0,5 - \beta) \ddot{q}_{ij}^{(t)} + \beta \Delta t^2 \ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} \quad (A2.20)$$

$$\dot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} = \dot{q}_{ij}^{(t)} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t)} + \gamma \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} \quad (A2.21)$$

Remplaçons les expressions (A2.20) et (A2.21) dans l'équation (A2.19), on obtient :

$$\ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} = \left(\frac{1}{M_{ij}} F_{ij}^{(t+\Delta t)} - 2\xi_{ij} \omega_{ij} \dot{q}_{ij}^{*(t+\Delta t)} - \omega_{ij}^2 q_{ij}^{*(t+\Delta t)} \right) / \left(1 + 2\Delta t \xi_{ij} \omega_{ij} + \beta \Delta t^2 \omega_{ij}^2 \right) \quad (A2.22)$$

Avec :

$$q_{ij}^{*(t+\Delta t)} = q_{ij}^{(t)} + \Delta t \dot{q}_{ij}^{(t)} + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \ddot{q}_{ij}^{(t)} \quad (A2.23)$$

$$\dot{q}_{ij}^{*(t+\Delta t)} = \dot{q}_{ij}^{(t)} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t)}$$

A3.1 Modélisation du profil de la chaussée

Les irrégularités de la chaussée sont l'interface entre le pont et le véhicule mobile. Ces irrégularités perturbent le mouvement vertical du pont et du véhicule d'une manière importante. On peut modéliser le profil statique de la chaussée par un processus aléatoire caractérisé par une densité spectrale de puissance (DSP) qui permet de d'écrire la qualité de surface de roulement:

$$r(x_i) = \sum_{k=1}^N \sqrt{4A_r \left(\frac{2\pi k}{L_c \omega_{s0}} \right) \frac{2\pi}{L_c}} \cos(\omega_{sk} x_i + \theta_k) , \text{ avec } i = 1, \dots, 4 \quad (\text{A3.1})$$

Où A_r est un coefficient de rugosité spectral qui caractérise l'état de la chaussée ($m^3 / cycle$),

ω_{s0} est la pulsation de discontinuité ($\omega_{s0} = 1/2\pi \text{ cycle} / m$),

ω_{sk} est le nombre d'onde ($\omega_{sk} = 2\pi k / L_c \text{ cycle} / m$),

L_c est la longueur d'échantillonnage en général égale à $2L$,

L est la longueur du pont,

N est le nombre de points de discrétisation fréquentielle,

θ_k est un variable aléatoire qui varie entre 0 et 2π .

Sur la base de l'expression (A3.1) du profil de la route, nous présentons sur la figure A3.1 aléatoire de la voie de roulement pour différentes valeur du coefficient de rugosité spectral A_r . La génération du variable aléatoire θ_k se fait par le logiciel développé.

Tableau A3.1. Etat de la voie de roulement [REZ 08].

Etat de la surface	Très bon	Bon	Moyen	Mauvais
$A_r(m^3/cycle) \times 10^{-6}$	<5	>5 et <20	>20 et <80	>80 et <256

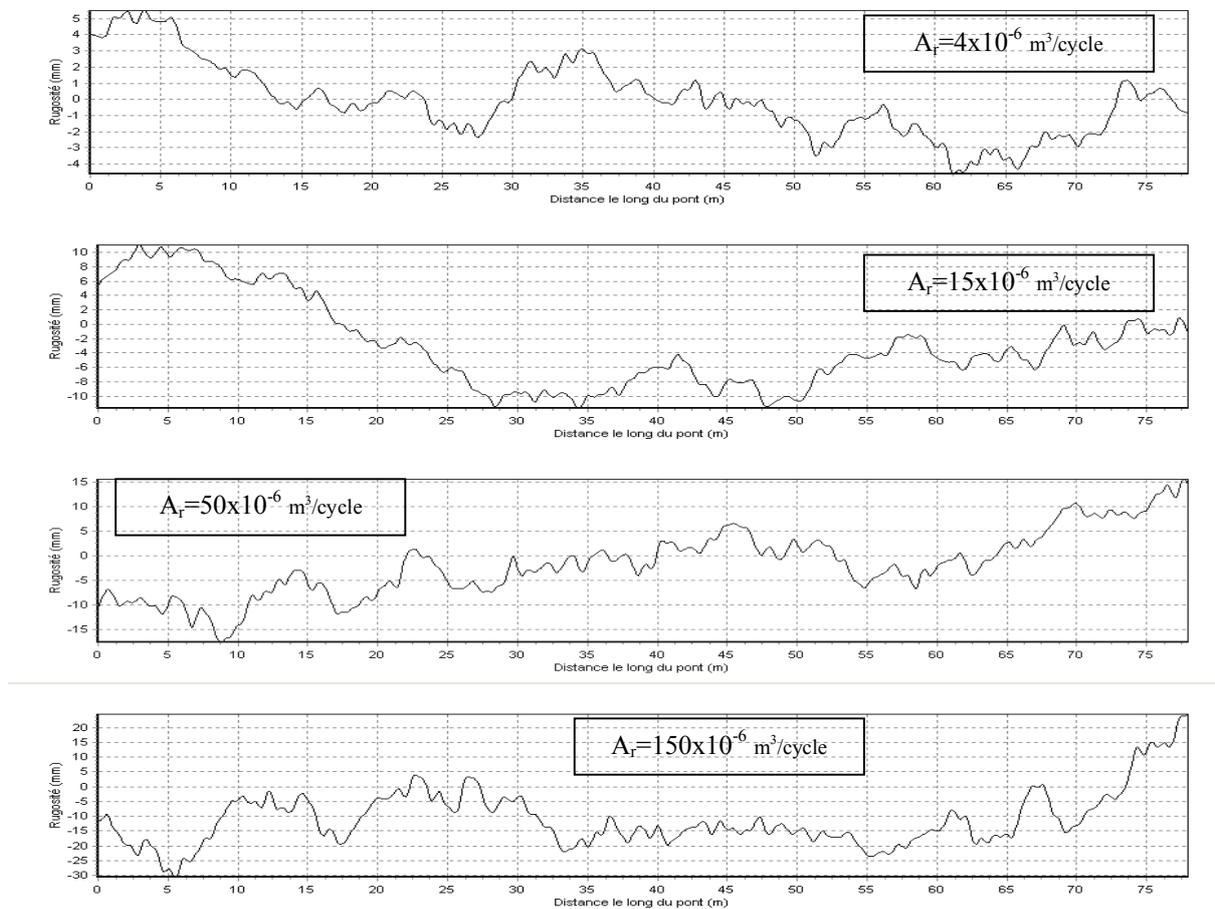


Figure A3.1. Profil aléatoire de la voie de roulement pour différentes valeurs du coefficient de rugosité A_r