

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE 8 MAI 1945 – GUELMA  
FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT ELECTRONIQUE ET TELECOMMUNICATIONS



LABORATOIRE DES TELECOMMUNICATIONS (LT)

## THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme en génie électrique :

### Doctorat en sciences

Intitulée :

**Robustification d'un contrôleur conventionnel par un  
transfert d'ordre non entier**

Présenté par : **GUESSOUM Hanni**

Filière : Génie électrique

THÈSE dirigée par :

**Moussa SEDRAOUI**

Professeur

Univ. Guelma

Devant le jury composé de :

<b>REDADAA Salah</b>	Professeur des Universités	Université 8 Mai 1945 Guelma	Président du jury
<b>SEDRAOUI Moussa</b>	Professeur des Universités	Université 8 Mai 1945 Guelma	Rapporteur
<b>ZENNIR Youcef</b>	Maître de conférences (A) des Universités	Université 20 Aout 1955 Skikda	Examineur
<b>GUECHI EI-Hadi</b>	Maître de conférences (A) des Universités	Université 20 Aout 1955 Skikda	Examineur

Soutenue le : **02 / 05 / 2019**

## Remerciements

---

*En premier lieu, je remercie Dieu, notre Créateur, qui m'a donné la force, la volonté et la patience tout au long de mes études et d'accomplir finalement ma thèse.*

*Je tiens à remercier tout particulièrement le Professeur **SEDRAOUI Moussa** pour m'avoir fait confiance en acceptant d'être le promoteur de cette thèse, et pour avoir validé mon inscription de doctorat au sein de son université, pour sa direction scientifique et ses qualités humaines qui m'ont été d'un apport précieux afin de mener à bien ce projet de doctorat.*

*Je remercie également Messieurs **REDADAA Salah**, **ZENNIR Youcef** et **GHUECHI Elhadi** pour l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail en acceptant de l'examiner.*

*Je tiens aussi à remercier grandement le Professeur **Pr. VICENTE Feliu Batlle** le Directeur du Laboratoire d'Automatique et Robotique de l'Université de CASTILLA LA MANCHA CIUDAD REAL SPAIN pour leur sympathie et leur collaboration tout au long de mes stages.*

*Je ne peux en fin manquer de remercier tous les membres du Laboratoire des télécommunications (LT),*

*Finalement, je tiens à ne pas oublier dans mes remerciements mes amis et collègues des universités: de Guelma, Skikda et de M'sila, ainsi que l'ensemble des membres ma famille pour leur soutien tout au long de ces années de doctorat.*

*GUESSOUM Hanni*

# Table des Matières

Liste des figures	I
Symboles et abréviations	II
Introduction générale	1

## Chapitre 1

### Commande Robuste Utilisant les Pondérations Irrationnelles Fixes

1. Introduction	10
1.1. Représentation d'un système linéaire invariant dans le temps	11
1.1.1. Valeurs singulières d'un transfert	11
1.1.2. Normes d'un transfert	12
1.2. Interconnexions d'un système bouclé	12
1.2.1. Transformation linéaire fractionnaire basse $LFT_l$	12
1.2.2. Transformation linéaire fractionnaire haute $LFT_u$	13
1.3. Les incertitudes de modélisation	15
1.3.1. Incertitudes non-structurées	15
1.3.1.1. Incertitude additive	15
1.3.1.2. Incertitude Multiplicative	16
1.3.2. Incertitudes structurées	19
1.4. Analyse de robustesse des systèmes dynamique	19
1.4.1. Stabilité nominale	19
1.4.2. Stabilité robuste	19
1.4.2.1. Théorème du faible gain	19
1.4.2.2. Conditions sur la stabilité robuste du système bouclé	20
1.4.3. Performance Nominal	21
1.4.3.1. Sensibilité directe en sortie	22
1.4.3.2. Sensibilité directe en entrée	22
1.4.3.3. Sensibilité complémentaire en sortie	22
1.4.3.4. Sensibilité complémentaire en entrée	23
1.4.4. Performance Robuste	23

<b>1.5. Problème de sensibilité pondérée</b>	<b>24</b>
1.5.1. Solution du problème $\mathcal{H}_\infty$	26
1.5.1.1. Méthode $\mathcal{H}_\infty$ basée sur la résolution des deux équations algébriques de <i>Riccati</i>	29
1.5.1.2. Méthode $\mathcal{H}_\infty$ utilisant la formulation <i>LMIs</i>	31
<b>1.6. Simulations et interprétations des résultats</b>	<b>31</b>
<b>1.7. Conclusion</b>	<b>41</b>

## Chapitre 2

### Commande Robuste Utilisant les Pondérations Irrationnelles Ajustables

<b>2. Introduction</b>	<b>42</b>
<b>2.1. Règles de réglage des pondérations irrationnelles ajustables</b>	<b>43</b>
2.1.1. Sélection du gabarit limitant le lieu de $\sigma_{max}[T_y(j\omega)]$	44
2.1.2. Sélection du gabarit limitant le lieu de $\sigma_{max}[S_y(j\omega)]$	47
2.1.1. Sélection du gabarit limitant le lieu de $\sigma_{max}[K(j\omega).S_y(j\omega)]$	49
2.1.1. Sélection du gabarit limitant le lieu de $\sigma_{max}[S_y(j\omega).G(j\omega)]$	51
<b>2.2. Sélection automatique des pondérations irrationnelles ajustables</b>	<b>53</b>
2.2.1. Règles de réglage assurant la sélection automatique des pondérations souhaitées	54
2.2.2. Formulation du problème d'optimisation sous contraintes	55
2.2.3. Solution du problème par les algorithmes génétique	59
2.2.3.1. Algorithmes génétique	59
<b>2.3. Inconvénient de la robustification basée les pondérations irrationnelles ajustables</b>	<b>64</b>
<b>2.4. Simulations et interprétations des résultats</b>	<b>65</b>
<b>2.5. Conclusion</b>	<b>72</b>

## Chapitre 3

### Commande Robuste Utilisant les Pondérations Rationnelles Ajustables

<b>3. Introduction</b>	<b>73</b>
<b>3.1. Motivation</b>	<b>74</b>
<b>3.2. Éléments de la théorie du calcul fractionnaire</b>	<b>74</b>

3.2.1. Fonctions usuelles utilisées dans la dérivation d'ordre non-entier	74
3.2.1.1. Fonction <i>Gamma d'Euler</i>	74
3.2.1.2. Fonction <i>Beta</i>	75
3.2.1.3. Fonction <i>Mittag-Leffler</i>	75
3.2.1.4. Fonction <i>Miller-Ross</i>	75
3.2.2. Fonctions usuelles utilisées dans l'intégration d'ordre non entier	76
3.2.2.1. Définition au sens de <i>Riemann-Liouville RL</i>	76
3.2.2.2. Définition au sens de <i>Caputo</i>	77
3.2.2.3. Définition au sens de <i>Grunwald-Letnikov GL</i>	77
<b>3.3. Transformée de Laplace des opérateurs d'ordres rationnels</b>	<b>78</b>
3.3.1. Transformée de Laplace de l'intégrale rationnelle	78
3.3.2. Transformée de Laplace de la dérivée rationnelle	79
3.3.2.1. Transformée de laplace de la dérivée selon la définition de RL	80
3.3.2.2. Transformée de laplace de la dérivée selon la définition de <i>Caputo</i>	80
<b>3.4. Approximations des opérateurs d'ordres rationnels</b>	<b>81</b>
3.4.1. Méthodes d'approximation utilisant l'identification temporelle	81
3.4.1.1. Méthode de <i>Carlson</i>	82
3.4.1.2. Méthode de <i>Charef</i>	83
3.4.1.3. Méthode générale du <i>CFE</i>	84
3.4.1.4. Méthode <i>d'oustaloup</i>	85
3.4.2. Méthodes d'approximation utilisant l'identification fréquentielle	85
3.4.2.1. Identification fréquentielle utilisant la fonction de <i>Hartley</i>	86
3.4.2.2. Identification fréquentielle par la méthode de <i>Levy</i>	86
3.4.2.3. Identification fréquentielle par la méthode de <i>Venagre</i>	86
3.4.2.4. Identification fréquentielle par la commande <i>fitfrd</i> du <i>Matlab</i>	87
<b>3.5. Formulation du problème d'optimisation sous contraintes</b>	<b>87</b>
3.5.1. Solution du problème par l'algorithme d'essaim particulier	88
3.5.2. Algorithme de la robustification basé sur les pondérations fractionnaires ajustable	90
3.5.3. Algorithme d'identification fréquentielle	92
<b>3.6. Simulations et interprétations des résultats</b>	<b>93</b>
<b>3.7. Conclusion</b>	<b>103</b>

## Chapitre 4

### Application du Contrôleur Robustifié sur un Moteur à Aiment

#### Permanent

4. Introduction	104
4.1. Description du système <i>PMSM</i>	105
4.2. Modélisation de la machine synchrone à aimant permanent	106
4.2.1. Transformation de <i>PARK</i>	108
4.2.2. Modélisation de système <i>PMSM</i> dans le repère de <i>PARK</i>	109
4.2.3. Linéarisation du modèle de <i>PMSM</i>	111
4.3. Synthèse du contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ primaire	113
4.4. Synthèse du contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ robustifié	114
4.5. Conclusion	122
<b>Conclusion générale et perspectives</b>	
Conclusion générale	123
Perspectives	125
<b>Références Bibliographiques</b>	<b>126</b>

# Liste des figures

<i>Fig.1.1. Configuration standard de <math>LFT_\ell</math></i>	13
<i>Fig.1.2. Configuration standard de <math>LFT_u</math></i>	14
<i>Fig.1.3. Configuration standard <math>(P - K - \Delta_x)</math></i>	14
<i>Fig.1.4. Incertitude additive directe</i>	16
<i>Fig.1.5. Incertitude additive inverse</i>	16
<i>Fig.1.6. Incertitudes multiplicative en sortie</i>	17
<i>Fig.1.7. Incertitudes multiplicative inverse en sortie</i>	17
<i>Fig. 1.8. Incertitudes multiplicative en entrée</i>	18
<i>Fig. 1.9. Incertitudes multiplicative inverse en entrée</i>	18
<i>Fig. 1.10. Schéma bloc permettant l'analyse de la stabilité robuste d'un système bouclé</i>	20
<i>Fig. 1.11. Structure d'un système bouclé pour l'analyse de robustesse</i>	21
<i>Fig. 1.12. Formulation du problème de sensibilité pondérée</i>	24
<i>Fig. 1.13. Transfert du système augmenté (modèle généralisé)</i>	26
<i>Fig. 1.14. Représentation d'état du contrôleur à synthétiser</i>	27
<i>Fig. 1.15. Système d'interconnexion décrivant le système en boucle fermée</i>	27
<i>Fig. 1.16. Ensemble des régulateurs qui résous le problème de synthèse <math>H_\infty</math></i>	30
<i>Fig. 1.17. Lieux des valeurs singulières maximales de <math>\sigma_{\max}[\Delta_{s_k}(j\omega)]</math> et <math>\sigma_{\max}[W_T(j\omega)]</math></i>	33
<i>Fig. 1.18. Lieux des valeurs singulières maximales de <math>\sigma_{\max}[W_S(j\omega)]</math></i>	34
<i>Fig.1.19. Lieux des valeurs singulières maximales de <math>\sigma_{\max}[W_u(j\omega)]</math></i>	35
<i>Fig.1.20. Condition sur RS du système bouclé par le contrôleur <math>H_\infty</math> primaire</i>	36
<i>Fig.1.21. Condition sur NP du système bouclé par le contrôleur <math>H_\infty</math> primaire</i>	36
<i>Fig.1.22. Condition sur la limitation de commande du système bouclé par le contrôleur <math>H_\infty</math> primaire</i>	37
<i>Fig.1.23. Vérification du compromis de robustesse <math>NP \setminus RS</math> du système bouclé par le contrôleur <math>H_\infty</math> primaire</i>	38
<i>Fig.1.24. Vérification de la condition RP du système bouclé par le contrôleur <math>H_\infty</math> primaire</i>	39
<i>Fig.1.25. Sorties fournies par le contrôleur <math>H_\infty</math> primaire pour 192 régimes perturbés</i>	40
<i>Fig.1.26. Agrandissement de la partie transitoire de la dynamique de poursuite fournie par le contrôleur <math>H_\infty</math> primaire pour 192 régimes perturbés</i>	40
<i>Fig.1.27. Commandes fournies par le contrôleur <math>H_\infty</math> primaire pour 192 régimes perturbés</i>	41
<i>Fig.2.1. Les différentes fonctions de sensibilités fournies par le système bouclé</i>	43
<i>Fig.2.2. Forme désirée de <math>\sigma_{\max}[T_y]</math> comparée avec celle de <math>(\sigma_{\max}[W_T])^{-1}</math></i>	45
<i>Fig.2.3. Forme désirée de <math>\sigma_{\max}[S_y]</math> comparée avec celle de <math>(\sigma_{\max}[W_S])^{-1}</math></i>	47
<i>Fig.2.4. Forme désirée de <math>\sigma_{\max}[K \cdot S_y]</math> comparée avec celle de <math>(\sigma_{\max}[W_U])^{-1}</math></i>	50
<i>Fig.2.5. Forme désirée de <math>\sigma_{\max}[S_y \cdot G]</math> comparée avec celle de <math>(\sigma_{\max}[W_{SG}])^{-1}</math></i>	52
<i>Fig.2.6. Allures souhaités assurant la formulation du problème de la sélection automatique des pondérations</i>	53

<i>Fig.2.7. Représentation des conditions de robustesse avant la phase de la robustification proposée</i>	55
<i>Fig.2.8. Représentation des conditions de robustesse après la phase de la robustification proposée</i>	55
<i>Fig.2.9. Exemples de croisement des deux chromosomes parents</i>	61
<i>Fig.2.10. Exemples de mutation du chromosome <math>y_{c_A}^{l,k}</math></i>	62
<i>Fig.2.11. Evolution de la fonction objective pendant les itérations de l'algorithme de robustification proposée</i>	67
<i>Fig.2.12. Condition sur SR avant et après la robustification du contrôleur <math>H_\infty</math> primaire</i>	68
<i>Fig.2.13. Condition sur NP avant et après la robustification du contrôleur <math>H_\infty</math> primaire</i>	69
<i>Fig.2.14. Compromis de robustesse fourni avant et après la robustification du contrôleur <math>H_\infty</math> primaire</i>	69
<i>Fig.2.15. Condition de RP fournie avant et après la robustification du contrôleur <math>H_\infty</math> primaire</i>	70
<i>Fig.2.16. Sorties fournies par le contrôleur <math>H_\infty</math> robustifié pour 192 régimes perturbés</i>	71
<i>Fig.2.17. Agrandissement de la partie transitoire de la dynamique de poursuite fournie par le contrôleur <math>H_\infty</math> primaire pour 192 régimes perturbés</i>	71
<i>Fig. 2.18. Commandes fournies par le contrôleur <math>H_\infty</math> robustifié pour 192 régimes perturbés</i>	72
<i>Fig. 3.1. Concept de dérivations et intégrations dans le calcul fractionnaire</i>	74
<i>Fig. 3.2. Evolution de la fonction objective pendant les itérations de l'algorithme PSO</i>	96
<i>Fig. 3.3. Approximation de la pondération fractionnaire <math>W_{S_f}</math> par le filtre d'ordre entier <math>W_{S_1}</math></i>	97
<i>Fig.3.4. Approximation de la pondération fractionnaire <math>W_{T_f}</math> par le filtre d'ordre entier <math>W_{T_1}</math></i>	97
<i>Fig. 3.5. Comparaison des deux conditions RS fournies par la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> robustification proposée</i>	98
<i>Fig. 3.6. Comparaison des deux robustesses NP fournies par la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> robustification proposée</i>	99
<i>Fig. 3.7. Comparaison des deux limitations de commande fournies par la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> robustification proposée</i>	99
<i>Fig. 3.8. Comparaison des deux compromis de robustesses fournis par la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> robustification proposée</i>	100
<i>Fig. 3.9. Comparaison des deux conditions RP fournies par la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> robustification proposée</i>	100
<i>Fig.3.10. Sorties fournies par le contrôleur <math>H_\infty</math> robustifié pour 192 régimes perturbés</i>	101
<i>Fig.3.11. Agrandissement de la partie transitoire de la dynamique de poursuite fournie par le contrôleur <math>H_\infty</math> robustifié pour 192 régimes perturbés</i>	102
<i>Fig. 3.12. Commandes fournies par le contrôleur <math>H_\infty</math> robustifié pour 192 régimes perturbés.</i>	102
<i>Fig.4.1. Vue en coupe du PMSM</i>	105
<i>Fig. 4.2. Schéma équivalent du PMSM dans le repère (a – b – c)</i>	107
<i>Fig. 4.3. Schéma équivalent du PMSM dans le repère (d – q)</i>	108
<i>Fig. 4.4. Schéma bloc décrivant le modèle du PMSM</i>	110
<i>Fig.4.5. Commande de vitesse du PMSM basée sur la stratégie de commande à flux orienté</i>	112
<i>Fig. 4.6. Schéma block utilisé pour obtenir la fonction de transfert du régime nominal <math>G_N(s)</math></i>	112
<i>Fig. 4.7 Comparaison entre <math>(W_{S_f}(\omega, x^*); W_{S_1}(\omega))</math> présenter dans le côté gauche, et entre <math>(W_{T_f}(\omega, x^*); W_{T_1}(\omega))</math> présenter dans le côté droite</i>	116
	117

---

<i>Fig.4.8. Comparaison entre <math>(W_{S_f}(\omega, x^*); W_{S_1}(\omega))</math> présenter dans le côté gauche, et entre</i>	<b>118</b>
<i><math>(W_{T_f}(\omega, x^*); W_{T_1}(\omega))</math> présenter dans le côté droite</i>	<b>118</b>
<i>Fig. 4.9. Satisfaction de la condition de RP par le contrôleur <math>H_\infty</math> robustifié proposé</i>	
<i>Fig. 4.10. Schéma block du PMSM et leur modèle linéaire avec les contrôleurs <math>H_\infty</math> primaire et robustifié</i>	<b>119</b>
<i>Fig. 4.11. vérification de l'exactitude de l'étape de modélisation du comportement réel du PMSM par le modèle linéaire simplifié</i>	<b>120</b>
<i>Fig. 4.12. les vitesses mécaniques données par les deux contrôleurs <math>H_\infty</math> primaire et robustifié</i>	<b>120</b>
<i>Fig. 4.13. Les courants en quadrature fournis par les deux contrôleurs <math>H_\infty</math> primaire et robustifié</i>	<b>121</b>
<i>Fig. 4.14. Les courants statoriques triphasés du PMSM</i>	<b>121</b>
<i>Fig. 4.15. Les tensions statoriques triphasées qui alimentent l'onduleur triphasé</i>	

## Symboles et Abréviations

$x(t)$	Vecteur d'état du système à commander
$u(t)$	Vecteur de commandes fournies par le contrôleur
$y(t)$	Vecteur de sorties (grandeurs à régler)
$G(s)$	Matrice de transfert du système à commander
$K(s)$	Matrice de transfert décrivant le contrôleur robuste à synthétiser
$P(s)$	Matrice de transfert décrivant le modèle généralisé
$\Delta_x(s)$	Matrice de transfert stable décrivant les incertitudes de modélisation
$w(s)$	Vecteur qui représente les différentes entrées exogènes
$z(s)$	Vecteur qui représente les différentes sorties exogènes
$S_y(s)$	Sensibilité directe en sortie
$T_y(s)$	Sensibilité complémentaire en sortie
$S_u(s)$	Sensibilité directe en entrée
$T_u(s)$	Sensibilité complémentaire en entrée
$K(s)$	Contrôleur robuste
$\sigma_{max}$	Valeurs singulières maximales
$\sigma_{min}$	Valeurs singulières minimales
$W_S(s)$	Spécifications sur les performances Nominales
$W_T(s)$	Spécifications sur la Stabilité Robuste
$W_U(s)$	Spécifications sur l'énergie de commande
$d_u$	Vecteur des perturbations à l'entrée du système
$d_y$	Vecteur des perturbations à la sortie du système
$\eta_y$	Vecteur des bruits de mesures
$U_d$	Tension statorique dans l'axe « d »
$U_q$	Tension statorique dans l'axe « q »
$I_d$	Courant statorique dans l'axe « d »
$I_q$	Courant statorique dans l'axe « q »
$L_d$	Inductance statorique de l'axe « d »
$L_q$	Inductance statorique de l'axe « q »
$\phi_d$	Flux statorique dans l'axe « d »
$\phi_q$	Flux statorique dans l'axe « q »
$\phi_f$	Flux des aimants
$R_s$	Résistances statorique
$\omega_r$	Vitesse électrique du rotor
$n_p$	Nombre de paires de pôles
$\Omega_m$	Vitesse mécanique du rotor
$f_c$	Coefficient de viscosité
$J$	Moment d'inertie

$C_{em}$	Couple électromagnétique
$C_t$	Couple de charge
$PID$	Correcteur proportionnel intégral dérivé
$CRONE$	Commande Robuste d'Ordre Non Entier
$AREs$	Algebraic Riccati Equations
$PN$	Performances Nominales
$SR$	Stabilité Robuste
$RP$	Performances Robuste
$SISO$	Single Input Single Output
$MIMO$	Multi Input Multi Output
$SVD$	Décomposition en Valeurs Singulières
$LFT$	Transformation Linéaire Fractionnaire
$LMIs$	Linear Matrix Inequalities
$PSO$	Particle Swarm Optimization
$H_\infty$	Commande Robuste hinfini
$GA$	Genetic Algorithm
$FOC$	Field Oriented Control
$PMSM$	Permanent Magnet Synchronous Motor

# **INTRODUCTION GÉNÉRALE**

---

# Introduction Générale

---

## Introduction :

Dans la plupart des applications industrielles, le développement d'un modèle mathématique exacte décrivant le mieux le comportement réel d'un système réel a toujours été un défi à cause de la diversité et la complexité des systèmes physiques à commander. En revanche, le modèle de synthèse est souvent entaché par des incertitudes de modélisation [1] ce qui peut restreindre le domaine d'application des contrôleurs standards développés par des méthodes conventionnelles de synthèse.

Au fil des années, grâce à ses propriétés et à sa simplicité de mise en œuvre, la commande  $H_\infty$  a renforcé sa présence en termes d'applications dans le milieu industriel. C'est une méthode très efficace pour résoudre le problème de la commande des systèmes physiques basés sur la modélisation incertaine. Ceci par la satisfaction de plus des spécifications de performance et de robustesse, non seulement pour le modèle nominal de synthèse, mais également en présence de diversités des effets indésirables qui sont causés par l'existence des incertitudes de modélisation qui sont inévitables lors de la modélisation du comportement réel du système physique, l'existence des modes inconnus qui doivent les négliger lors de la linéarisation de la dynamique non linéaire du système autour d'un ou plusieurs points de fonctionnement, l'existence des bruits de mesure causés par la fatigue des instruments de mesures installés dans la boucle de commande,...etc. Un autre avantage de cette méthode de commande c'est qu'on peut aussi l'appliquer sur plusieurs types des systèmes. Parmi les types les plus saillants, on peut citer les processus simples, complexes, mono-entrée et mono-sortie *SISO* (Single Input Single output) et les systèmes multi-entrées, multi-sorties *MIMO* (Multi Input Multi Output).

En général, le concept de cette stratégie de commande s'appuie préalablement sur la représentation du modèle incertain sous une forme telle que les incertitudes soient extraites du modèle nominal. Ces incertitudes peuvent être classées en deux catégories on l'occurrence les incertitudes structurées et les incertitudes non structurées [1,2,3,4]. Pour les incertitudes structurées, elles sont dues souvent par la variation des certains paramètres intervenant dans la structure du modèle de synthèse. Sachant que leur effet est important notamment en basse fréquence. C'est pour cette raison qu'on doit imposer des bornes minimales et maximales limitant chaque paramètre incertain du modèle. En revanche, les incertitudes non structurées quand elles agissent sur le modèle de synthèse d'une manière globale sans pouvoir quantifier

précisément le phénomène. Elles sont dues souvent par des approximations effectuées sur le retard pur du modèle ainsi que la simplification d'un certain nombre de modes inconnus lors de la linéarisation de la dynamique réel du système physique. Sachant que leur effet est important en haute fréquence. C'est pourquoi qu'on doit imposer un majorant limitant toutes les incertitudes susceptibles qui affectent le modèle de synthèse [5].

En présence des incertitudes de modélisation, la première question concerne la stabilité du système bouclé. A cet effet, l'analyse de la robustesse en stabilité consiste donc à établir si le système corrigé demeure stable ou non. Dans ce cas on cherche à satisfaire une condition de robustesse appelée « condition sur la stabilité robuste  $RS$  » [4,6, 7, 8]. De plus, on peut aussi désirer que le modèle nominal maintienne certaines performances (comme la bande passante, précision,... etc.). En absence des incertitudes, l'analyse de la robustesse en performance consiste donc à satisfaire une condition de robustesse appelée « condition sur les performances nominales  $NP$  » [9]. Par contre, si les incertitudes de modélisation sont prises en considération [10], l'analyse de robustesse cherche donc à établir si le système bouclé maintient les performances prévues pour tous les éventuels régimes perturbés ou non. Dans ce cas, on cherche à satisfaire une condition de robustesse appelée « condition sur les performances robuste  $RP$  » [11].

Habituellement, les incertitudes de modélisation ont la capacité de déstabiliser le système bouclé et diminuer ses performances. C'est pour cette raison que l'analyse de robustesse cherche donc à assurer un bon compromis entre le suivi de la trajectoire de référence et la robustesse vis-à-vis le type d'incertitudes affectant le modèle de synthèse. Dans ce cas, on cherche à satisfaire une condition de robustesse appelée « compromis  $RS/NP$  on en anglais Trade-off » [12,13].

Dans ce travail, il est possible d'aller encore plus loin lors de la synthèse du contrôleur robuste. Nous allons chercher à satisfaire la condition sur  $RP$  qui englobe les trois conditions de robustesse sur  $RS$ ,  $NP$  et sur  $RS/NP$ . Le problème de la commande  $H_\infty$  est de comment assurer la condition sur  $RP$  du système bouclé avec une marge de robustesse très élevée? Nous verrons que la solution fournie par la commande  $H_\infty$  basée sur des améliorations proposées présentera l'objet de ce travail. Le paragraphe suivant représente un bref aperçu historique sur l'évolution de la commande  $H_\infty$  depuis ses principes de base « bien connus » jusqu'aux développements les plus récents en terme de la recherche des pondérations adéquates utilisées dans leur problème de synthèse.

La commande  $H_\infty$  représente un moyen relativement simple d'aborder une analyse et synthèse du contrôleur dans le domaine fréquentiel. Elle a été introduite, en premier lieu, par le mathématicien *Doyle* en 1982 [2] pour commander des systèmes mono-variables *SISO* dont les principales règles de réglage qui permettent l'analyse du système bouclé dans le plan fréquentiel ont été suggérées par d'autres chercheurs. Ensuite, en 1983 [14], les deux automaticiens *Zames* et *Francis* ont résolu le problème de la commande des systèmes *SISO* basés sur des modèles nominaux simplifiés qui ne prennent pas en compte toutes les complexités des systèmes physiques. Enfin, en 1984, *Francis*, *Helton* et *Zames* [15] ont abordé à l'extension de l'application de la commande  $H_\infty$  sur des systèmes *MIMO*. En 1986, les trois chercheurs *Vidyasagar* et *Kimura* et *Glover* [16] ont synthétisé un contrôleur robuste *MIMO* avec lequel des spécifications fréquentielles ont été satisfaites par l'application des algorithmes très performants, qui sont aujourd'hui disponibles dans la bibliothèque du *Matlab*.

En général, la synthèse du contrôleur robuste  $H_\infty$  nécessite, a priori, la minimisation de la norme  $H_\infty$  d'un critère présenté par transfert complexe. Ce dernier reliant plusieurs entrées exogènes, à savoir : les perturbations, bruits, références,..., etc., avec des sorties exogènes on l'occurrence: les erreurs pondérées, commandes pondérées,..., etc. Ce critère peut être formulé via l'application de la transformation linéaire fractionnaire *LFT* [17,18] (ou en anglais *Linear Fractional Transformation*) inférieure sur un système d'interconnexion composé par deux transferts complexes à savoir : celui du modèle généralisé (modèle augmenté) et celui du contrôleur robuste à synthétiser. Habituellement, le modèle généralisé est composé du modèle nominal et certain nombre de spécifications fréquentielles qui sont souvent imposées par un tel cahier de charges. Parmi les spécifications les plus considérées lors de la synthèse par la commande  $H_\infty$ , on peut citer : spécification sur *RS*, spécification sur *NP*, spécification sur la limite des signaux de commandes,...etc. Le pas décisif, pour minimiser ce critère, réside dans le choix d'un algorithme adéquat avec lequel la commande  $H_\infty$  à la capacité de satisfaire toutes les performances du cahier de charges.

Habituellement, La commande  $H_\infty$  fait un appel à l'un des deux algorithmes d'optimisation, qui sont disponibles dans la bibliothèque du *Matlab*. On aura donc la commande  $H_\infty$  utilisant les deux équations algébriques de *Riccati* (*AREs*) [19, 20, 21,22,23] et la commande  $H_\infty$  utilisant les Inégalités matricielles linéaires (*LMIs*) [24, 25, 26, 27, 28]. Une fois le contrôleur robuste est développé, une analyse de robustesse peut être effectuée via le tracé d'un certain nombre des lieux des valeurs singulières maximales et minimales [29, 30,

**31]** de quelques sensibilités fournies par le système bouclé. Parmi ces sensibilités les plus souvent testées, on peut citer: sensibilité directe, sensibilité complémentaire, ...etc [**32, 33**].

Par conséquent, Ces sensibilités permettant d'analyser l'impact de différentes entrées exogènes sur le système bouclé. Par exemple, le tracé des lieux des valeurs singulières maximales de la sensibilité complémentaire permet de découvrir à quelle marge de robustesse de la stabilité robuste est assurée en présence des erreurs de modélisation de type multiplicative. En effet, une marge de robustesse faible de cette condition peut se traduire par la dégradation de la stabilité robuste ce qui est traduit [**33**], dans le plan temporel, par l'impact important de l'effet des bruits de mesure ainsi que l'effet des modes négligée en hautes fréquences sur la boucle de commande. De plus, le tracé des valeurs singulières de la sensibilité directe permet de découvrir les informations qui concernent les performances nominales [**33**]. D'où, une faible marge de robustesse peut être se traduit, dans le plan temporel, par la dégradation de la dynamique de suivi de référence ainsi que l'abaissement lent de l'entrée des perturbations.

Toutefois, pour certaines applications industrielles, la commande  $H_\infty$  basée sur les algorithmes précédents présente l'avantage de fournir un bon suivi de la trajectoire de référence dont la réponse temporelle est souvent caractérisée par un dépassement faible, un temps de montée rapide et une erreur statique presque nulle en régime permanent. Elle présente aussi l'avantage de fournir également des bonnes dynamiques de rejection des perturbations et atténuation de l'effet des bruits de mesure. La question posée réside dans l'assuré d'une bonne marge de sécurité du compromis " Poursuite/Régulation" en présence des incertitudes de modélisation?)

Selon des travaux antérieurs, la réalisation d'un bon compromis entre  $NP$  et  $RS$  dépend largement du choix appropriée des pondérations fixes d'ordre entier [**34**] avec lesquelles la formulation du problème de sensibilité pondérée peut prendre en compte la satisfaction de toutes les spécifications imposées par le cahier de charges. Les paramètres de chaque pondération doivent être choisis préalablement par l'utilisateur où des règles de réglages existant dans la littérature doivent être respectées. Le rôle de ces pondérations réside dans la limitation de l'évolution de chaque sensibilité en termes des valeurs singulières maximales. Cette limitation permet de ressortir un autre problème de commande appelé « problème sensibilité pondérée », ou en anglais « *weighted sensitivity problem* ». La solution optimale de ce problème par la méthode  $H_\infty$  peut offrir la représentation d'état du contrôleur robuste, appelé par la suite « contrôleur  $H_\infty$  primaire ».

Toutefois, pour certaines exigences industrielles, la satisfaction de la condition sur la  $RP$  est indispensable [11, 35] lors de la synthèse du contrôleur robuste. Dans ce cas, le critère fourni par cette condition de robustesse est souvent très difficile à minimiser. C'est pour cette raison, qu'on doit chercher à d'autres types des pondérations, car la commande  $H_\infty$  peut fournir une solution vide ce qui produit plusieurs anomalies, telles que: L'obtention d'une commande fluctuante sur un intervalle du temps très courtes, ce qui pouvant déstabiliser le système bouclé, l'obtention d'une marge réduite du compromis de robustesse réduisant la sécurité contre les incertitudes de modélisation, l'effet indésirable des bruits de mesure et les dynamiques négligées en hautes fréquences.

Par conséquent, le choix manuel des paramètres de ces pondérations est souvent difficile. C'est pour cette raison qu'on doit introduire un algorithme d'optimisation sous contrainte assurant le choix automatique de chaque pondération intervenant dans la construction du modèle généralisé. A cet effet, la plupart de recherches avancées ont été orientées vers l'utilisation des pondérations irrationnelle ajustable dans le problème de sensibilité pondérée où les paramètres de chaque pondération sont d'abord optimisés par l'algorithme d'optimisation évolutionnaire, appelé « algorithme génétique »  $GA$  (où en anglais *Genetic Algorithm* ). Ensuite, la représentation d'état du contrôleur robuste est assurée par l'application de la commande  $H_\infty$  sur le système d'interconnexion composé par le modèle nominal et les pondérations irrationnelles ajustables fournies par  $GA$ . Ces deux étapes précédentes sont réitérées jusqu'à ce que la condition  $RP$  soit satisfaite.

Habituellement, la sélection automatique des pondérations irrationnelles ajustables est assurée via la satisfaction de quelques règles existant dans la littérature en utilisant l'algorithme génétique. A cet effet, plusieurs chercheurs ont suggéré des formes idéales pour chaque pondération irrationnelle [36, 37] ajustable intervenant dans la formulation du modèle généralisé. Toutefois, la commande  $H_\infty$  basée sur ce type des pondérations à la capacité de satisfaire la condition sur  $RP$ . Néanmoins, pour un nombre élevé des spécifications fréquentielles, ce type des pondérations peut restreindre l'application de la commande  $H_\infty$  sur certains processus industriels. C'est pour cette raison, qu'on doit chercher à d'autres types des pondérations plus générales que celles citées précédemment.

Notre objectif étant plus précis pour pallier à ces anomalies. Nous allons introduire, dans le problème de sensibilité pondérée précédent, des pondérations fractionnaires ajustables dont ses paramètres sont optimisés systématiquement par un algorithme d'optimisation appelé « algorithme d'essaim particulaire  $PSO$  (ou en anglais *Particle Swarm Optimization* » [38,

39]. le processus d'optimisation doit satisfaire les mêmes réglages proposées pour les pondérations irrationnelles ajustables citées ci-dessus. Notons ici que l'avantage d'imposer des pondérations rationnelles ajustable dans la synthèse du contrôleur robuste réside dans le fait qu'elles peuvent assurées des atténuations fractales dans les lieux des valeurs singulières maximales des sensibilité du système bouclé. Ces dernières jouent un rôle important dans la plage de fréquence où le compromis de robustesse est difficile à atteindre.

En général, un transfert fractionnaire est souvent rapproché par une série des transferts usuels d'ordre entier ou chacun est présenté par un nombre infini de pôles et de zéros. A cet effet, l'algorithme *PSO* peut bénéficier de cette propriété importante, car la dimension du problème d'optimisation assurant la sélection automatique de ces pondérations est réduite de façon très remarquable. Ceci représente, plus tard, une importance capitale pour l'accélération de la convergence du *PSO* vers des solutions optimales. Il est à noter que la méthode  $H_\infty$  nécessite l'utilisation des pondérations d'ordre entier. Cela peut poser des problèmes sérieux, car l'utilisation des pondérations irrationnelles est inévitable pour améliorer la marge de robustesse *RP*. A cet effet, nous allons rapprocher [40] ces pondérations par des transferts irrationnels ce qui permet l'application de la méthode  $H_\infty$ .

Récemment, plusieurs méthodes d'approximation ont été proposées pour approximer les transferts d'ordre non entier. Parmi ces méthodes d'approximation les plus utilisées dans l'automatique avancée, on peut citer : les approximations d'*Oustaloup* [41], *Matsuda* [42] et *Charef* [43] ainsi que les méthodes utilisant l'identification fréquentielle ou temporelle [44].

Notons ici que l'amélioration requise de la marge de robustesse de *RP* permettant de robustifier toutes les classes des contrôleurs  $H_\infty$  primaires dont leurs paramètres sont obtenus par la solution du problème de sensibilité pondérée basée sur les pondérations rationnelles ajustables. La méthode de robustification proposée, dans ce travail, sera basée sur les quatre étapes suivantes : dans la première étape, un contrôleur  $H_\infty$  primaire est synthétisé via la résolution du problème de sensibilité pondérée formulée via des pondérations irrationnelles fixes.

Dans la deuxième étape, le problème précédent est reformulé par d'autres pondérations rationnelles ajustables inconnues. Ensuite, à partir d'un ensemble des règles de réglage, les paramètres de ces pondérations seront optimisés par l'algorithme du *PSO*. Dans la troisième étape, la réponse fréquentielle de chaque pondération rationnelle *PSO* sera calculée dans une bande de fréquence où l'approximation est nécessaire. Cette réponse permettant de fournir le

filtre d'ordre entier rapprochant le module et la phase du transfert rationnel. Les paramètres de ce filtre seront déterminés en utilisant l'approche basée sur l'identification fréquentielle.

Dans la dernière étape, le modèle généralisé sera développé à partir du modèle nominal ainsi que les filtres d'ordre entier fournis par l'étape précédente. Le problème de sensibilité pondérée correspondant est ensuite reformulé et la méthode  $H_\infty$  sera réutilisée pour fournir la représentation d'état du nouveau contrôleur. La mise à jour de la marge de robustesse de  $RP$  est assurée par ce dernier contrôleur et les quatre étapes ci-dessus seront répétées en fonction de la décroissance de cette marge de robustesse. Ce processus de robustification proposé sera terminé par la synthèse d'un contrôleur  $H_\infty$  robustifié assurant la condition  $RP$  avec une marge de sécurité très élevée.

Le contrôleur  $H_\infty$  primaire et celui de  $H_\infty$  robustifié seront appliqués sur deux procédés réels dont ses dynamiques ont été modélisées par des modèles linéaires incertains et ses incertitudes ont été évaluées par la forme multiplicative en sortie. Les résultats de simulation obtenus seront comparés dans les plans fréquentiel et temporel. Ces résultats obtenus sont très innovants chose qui nous a permis de les publier dans des revues scientifiques de renommée internationale.

Ce travail est organisé selon le modèle suivant :

Le premier chapitre sera subdivisé en trois parties. Dans la première partie nous allons présenter les outils mathématiques fondamentaux de la commande robuste d'ordre entier tels que: la représentation des systèmes physiques modélisés par des modèles incertains, les deux transformations linéaires fractionnaires basse et haute, définition de différentes normes ainsi que les valeurs singulières d'un transfert complexe et finalement la classification des incertitudes de modélisation. Dans la deuxième partie, nous allons présenter le théorème du faible gain avec lequel on pourra tirer la condition sur la stabilité robuste pour chaque type d'incertitudes de modélisation, la condition sur les performances nominales et les performances robuste, l'analyse de robustesse du système bouclé à travers le tracé du lieu des valeurs singulières maximales de chaque sensibilité fournie via le bouclage du modèle de synthèse avec le contrôleur robuste à synthétiser et finalement la formulation du problème de sensibilité pondérée ainsi que les deux algorithmes utilisés dans la commande  $H_\infty$  pour résoudre le problème de la commande. La troisième partie sera consacrée à l'analyse et synthèse du contrôleur  $H_\infty$  primaire pour la commande d'un procédé hydraulique mal conditionné (*ill – conditioned system*) simulant le fonctionnement d'un canal à surface libre. Le comportement réel de ce système est modélisé par un modèle fractionnaire possédant

un retard pur. De plus, des incertitudes de modélisation de type multiplicatives agissant sur le modèle de synthèse seront d'abord analysées puis les majorées par un transfert complexe qui permettra le développement de la condition sur la stabilité robuste du système bouclé et ce par l'application du théorème du faible gain. Ensuite, le modèle généralisé sera développé à partir du modèle nominal et quelques pondérations irrationnelles fixes fournies par les spécifications du cahier de charges. Finalement le contrôleur robuste sera synthétisé par la commande  $H_\infty$  et l'analyse du système corrigé sera abordée dans le plan fréquentiel et temporel. Ce chapitre sera terminé par une conclusion dans laquelle le problème de la commande  $H_\infty$  basée sur les pondérations irrationnelles fixes sera présenté ainsi que les éventuelles solutions proposées faisant l'objet du deuxième chapitre.

Le deuxième chapitre sera consacré à la synthèse du contrôleur  $H_\infty$  via la résolution du problème de sensibilité pondérée basé sur les pondérations irrationnelles ajustables. Il se compose par les quatre parties. Dans la première partie, nous allons présenter les nouvelles structures fractales proposées pour la conception des pondérations irrationnelles ajustables. Ces dernières à pour but de palier le problème du choix manuel des pondérations adéquates satisfaisant la condition sur  $RP$ . Sachant que les paramètres de ces pondérations peuvent être optimisés par l'algorithme génétique tout en satisfaisant un ensemble des règles de réglage existant dans la littérature. Pour cela, la deuxième partie sera consacrée à la présentation de ces règles ainsi que la formulation du problème de la sélection automatique des pondérations irrationnelles sous forme d'un problème d'optimisation sous contraintes. Sachant que la solution optimale de ce problème fait l'objet de la troisième partie de ce chapitre. Pour cela nous allons donner un bref aperçu sur l'algorithme génétique qui est destiné à la recherche des pondérations dont la puissance de ses transferts est d'ordre entier. Finalement, dans la dernière partie de ce chapitre, nous allons contrôler le même système hydraulique cité en chapitre précédent par la commande  $H_\infty$  utilisant les pondérations irrationnelles ajustables. La sélection automatique de ces pondérations sera effectuée par l'algorithme génétique et les résultats de simulation seront comparés à ceux fournis par le contrôleur  $H_\infty$  primaire synthétisé en premier chapitre. Ce chapitre sera terminé par une conclusion dans laquelle l'anomalie apparue par l'utilisation de ce type de pondération sera résolue dans le chapitre suivant.

Le troisième chapitre à pour but d'améliorer la robustesse du système bouclé en utilisant les pondérations rationnelles ajustable lors de la synthèse du contrôleur robustifié. Pour cela, ce chapitre sera dédié à exposer les définitions de base utilisées dans le calcul fractionnaire,

en particulier les définitions de l'opérateur intégro-différentiel d'ordre non entier, les différentes méthodes d'approximation de l'opérateur intégro-différentiel d'ordre non entier à savoir les méthodes de *Oustaloup*, *Charef*, .... etc., et la méthode utilisant l'identification fréquentielle. Sachant que la structure fractale proposée pour chaque pondération comportant moins de paramètres inconnus. Ceci peut réduire la dimension du problème d'optimisation garantissant la sélection automatique des pondérations rationnelles désirées. Cette réduction peut améliorer la convergence de l'algorithme du *PSO* à des solutions optimales avec lesquelles on assurera le choix des pondérations rationnelles souhaités. La troisième partie de ce chapitre sera consacrée à la validation de cette robustification proposée sur le même système hydraulique précédent et les résultats obtenus par le contrôleur  $H_\infty$  robustifié seront comparés avec ceux fournis le contrôleur  $H_\infty$  synthétisé à partir des pondérations irrationnelles ajustables présentées en deuxième chapitre.

Le quatrième chapitre est dédié à la commande robuste d'un moteur synchrone à aimant permanent *PMSM* (*Permanant Magnet Synchronous Moto*) où sa dynamique réelle a été linéarisée autour d'un point de fonctionnement au moyen du logiciel *Simulink* de *Matlab*. Ce dernier produit un modèle *MIMO* de synthèse caractérisé par le découplage des signaux d'entrées avec ceux de sorties. Pour la synthèse du contrôleur  $H_\infty$  robuste (primaire et robustifié), nous allons appliquer la stratégie basée sur la commande du flux orienté *FOC* (*Oriented Flux Control*) pour découpler le système à commander en deux sous systèmes *SISO*. La vitesse mécanique du *PMSM* est donc contrôlée par les deux contrôleurs robustes cités ci-dessus est les résultats obtenus seront comparés, dans le plan fréquentiel et temporel, non seulement pour le fonctionnement nominal du moteur, mais également pour un ensemble des régimes perturbés. Finalement, ce travail sera achevé avec une conclusion générale et quelques perspectives proposées pour les futurs candidats intéressés par la robustification d'une classe des contrôleurs  $H_\infty$  primaires.

**CHAPITRE 1 :**  
**COMMANDE ROBUSTE UTILISANT**  
**LES PONDÉRATIONS IRRATIONNELLES**  
**FIXES**

# Chapitre 1

## Commande robuste utilisant les pondérations irrationnelles fixes

---

### 1. Introduction :

Ce chapitre porte les notions de base de la synthèse des contrôleurs robustes pour commander des processus industriels présentés par des modèles incertains. A cet effet, la méthode de synthèse qui permet la synthèse du contrôleur stabilisant la boucle de commande est celle de  $H_\infty$  avec laquelle des conditions de robustesses doivent être assurées et cela non seulement pour le régime de fonctionnement nominal du système physique à commander, mais également pour tous les régimes perturbés générés par les incertitudes de modélisation, les dynamiques non linéaires négligées en haute fréquence ainsi que la présence des effets des bruits de mesures provoqués par la fatigue des capteurs installés dans la boucle de commande.

En général, la synthèse du contrôleur robuste par la méthode  $H_\infty$  s'articulera sur les étapes de base suivantes : Tout d'abord, les incertitudes de modélisation affectant le modèle de synthèse doivent les classer sous forme des incertitudes structurées et/ou non structurées. Ensuite, elles sont évaluées à partir de tracer de ses lieux des valeurs singulières maximales (i.e., ses modules) dans le plan fréquentiel où un transfert stable majorant toutes ses incertitudes doit être choisi et à partir duquel le théorème des fiables gains est appliqué pour fournir la condition de robustesse sur la stabilité robuste. Cette dernière doit être accompagnée par d'autres conditions de robustesse à savoir celle sur les performances nominales et celle sur la limitation des signaux de commande qui assurent le compromis entre la poursuite et la régulation du système bouclé.

La satisfaction de ces conditions peut être assurée par un choix a priori des fonctions de pondérations décrivant toutes les spécifications imposées par le cahier de charge. Ces pondérations sont utilisées pour augmenter le modèle nominal, ce qui fournit le modèle généralisé. L'application de la transformation linéaire fractionnaire inférieure sur ce modèle permettant d'élaborer le critère de sensibilité mixte généralisée où sa solution optimale peut être assurée par la méthode  $H_\infty$  utilisant les équations algébriques de Riccati ou la méthode  $H_\infty$  utilisant les inégalités matricielles linéaires (*LMIs*).

Ce chapitre sera achevé par une partie de simulation dans laquelle la dynamique réelle du processus à commander est décrite par un modèle incertain. Le but principal de cette partie de simulation est de découvrir les anomalies ainsi que les difficultés d'application de cette stratégie

de commande où la solution de ces anomalies présentera l'objet de la partie suivante de ce travail.

### 1.1. Représentation d'un système linéaire invariant dans le temps:

La dynamique d'un processus industriel comportant  $p$  grandeurs d'entrée et  $q$  grandeurs de sortie est souvent décrite par la représentation d'état ci-dessous [45,46]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

Où :

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$  : représente le vecteur d'état;
- $u(t) \in \mathbb{R}^p$  : représente le vecteur d'entrées du système à commander (grandeurs réglant);
- $y(t) \in \mathbb{R}^q$  : représente le vecteur de sorties du système (grandeurs à régler) ;
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  : la matrice d'évolution du système ;
- $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  : la matrice de commande du système ;
- $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  : la matrice de sortie (observation) du système ;
- $D \in \mathbb{R}^{p \times q}$  : la matrice de transmission directe du système.

La matrice de transfert du système  $G(s) \in \mathbb{C}^{p \times q}$  est obtenue par l'application de l'expression (1.2) comme suit:

$$G(s) = C(s \cdot I_{n \times n} - A)^{-1}B + D \quad (1.2)$$

Notant ici que l'existence de  $G(s)$  nécessite la non singularité de la matrice de transfert  $(s \cdot I_{n \times n} - A) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . De ce fait, la réalisation minimale de la matrice d'évolution  $A$  est souvent nécessaire ou le couple  $(A, B)$  doit être contrôlable ainsi que le couple  $(A, C)$  doit être observable.

#### 1.1.1. Valeurs singulières et normes d'un transfert:

Les valeurs singulières d'une matrice de transfert, notée ici par  $\sigma_i(G(j\omega))$ , sont données par [47]:

$$\sigma_i(G(j\omega)) = \sqrt{\lambda_i(G(j\omega) \cdot G(-j\omega)^T)} \quad (1.3)$$

Où  $\lambda_i$  sont les valeurs propres du transfert  $[G(j\omega) \cdot G(-j\omega)^T]$ . Sachant que  $\sigma_i(G(j\omega))$  sont toujours positives, il est possible de les classer par ordre croissant telle que :  $\sigma_{min}(G)$  est la plus

petite valeur singulière et  $\sigma_{max}(G)$  est la plus grande valeur singulière. On obtient donc les inégalités ci-dessous :

$$\sigma_{max}(G) = \sigma_1(G) \geq \sigma_2(G) \geq \sigma_3(G) \geq \dots \geq \sigma_{min}(G) \quad (1.4)$$

### 1.1.2. Normes d'un transfert :

La norme est un opérateur qui permet de quantifier une fonction où une matrice de transfert. Une norme du transfert  $G(s)$  est généralement notée par  $\|G(j\omega)\|_\ell$  où  $\ell$  désigne la nature de la norme considérée. De ce fait, plusieurs normes différentes peuvent donc être utilisées dans la théorie de la commande robuste. Parmi lesquelles, on peut citer : La norme  $H_2$  et La norme  $H_\infty$ . La norme  $H_2$  du transfert  $G(s)$  est, en générale, définie par [47]:

$$\|G(j\omega)\|_2 = \text{Sup}_{u(s) \in H_2} \left( \frac{\|Y(s)\|_\infty}{\|U(s)\|_\infty} \right) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}[G^*(j\omega)G(j\omega)]d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.5)$$

Elle peut également s'exprimer, en fonction des valeurs singulières, par la relation suivante :

$$\|G(j\omega)\|_2 = \text{Sup}_{u(s) \in H_2} \left( \frac{\|Y(s)\|_\infty}{\|U(s)\|_\infty} \right) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_i^2(G(j\omega))d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.6)$$

La norme  $H_\infty$  du transfert  $G(s)$  représente le gain, noté  $\gamma$ , qui correspond le pic de résonance de la réponse fréquentielle  $G(j\omega)$ . Ce gain est souvent donné par l'expression ci-dessous:

$$\gamma = \|G(j\omega)\|_\infty = \text{Sup}_{u(s) \in H_2} \left( \frac{\|Y(s)\|_2}{\|U(s)\|_2} \right) = \max_\omega \sigma_{max}[G(j\omega)] \quad (1.7)$$

## 1.2. Interconnexion d'un système bouclé :

Dans la synthèse du contrôleur robuste, on désigne sous le nom de représentation *LFT* (*Linear Fractional Transformation*) un système pouvant s'écrire sous la forme d'une matrice d'interconnexion, notée  $P(s)$ . Cette dernière peut être connectée en haut par un transfert, noté  $\Delta_x(s)$  modélisant toutes les incertitudes qui affectent le modèle de synthèse. Elle peut être également connectée en bas par un transfert, noté  $K(s)$ , décrivant le contrôleur à synthétiser. En général, suivant le bouclage de  $P(s)$ , on peut distinguer deux représentation de *LFT* [18, 46], [48] à savoir: *LFT* basse et *LFT* haute.

### 1.2.1. Transformation linéaire fractionnaire basse $LFT_\rho$ :

Soit  $P(s)$  le modèle généralisé comportant toutes les spécifications du cahier charge et le modèle nominal de synthèse [47, 49]. Le système d'interconnexion, illustré par la Fig.1.1, est souvent adopté pour formuler le problème de la commande robuste. Cette dernière est aboutie via l'application de  $LFT_\ell$  sur le système d'interconnexion reliant  $P(s)$  par le transfert à déterminer  $K(s)$ . Par conséquent, on obtient le transfert  $T_{w \rightarrow z}(s)$  qui représente la relation entre le vecteur d'entrée exogène  $w(s)$ , qui peut contenir plusieurs signaux à savoir : la trajectoire de référence, la perturbation amenant en entrée et/ou en sortie du modèle de synthèse, les bruits de mesures, ... etc., et le vecteur de sortie exogène  $z(s)$ , qui peut contenir plusieurs signaux à savoir : l'erreur modérée de poursuite, la commande modérée, ... etc. En général, le bouclage en bas de  $P(s)$  par  $K(s)$  est souvent présenté par la Fig.1.1 ci-dessous :

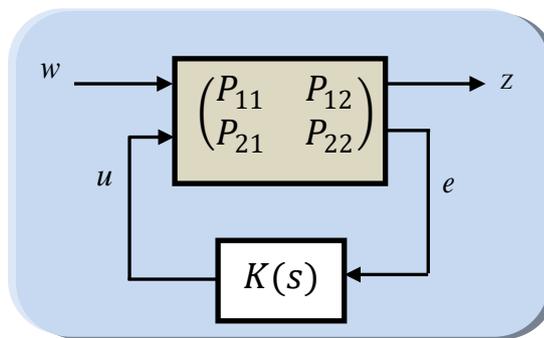


Fig.1.1. Configuration standard de  $LFT_\ell$ .

Sachant que la matrice complexe  $P(s)$  est partitionnée comme suit  $P(s) = \begin{pmatrix} P_{11} & \vdots & P_{12} \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ P_{21} & \vdots & P_{22} \end{pmatrix}$ ,

telle que  $\begin{pmatrix} z \\ \cdots \\ e \end{pmatrix} = P(s) \cdot \begin{pmatrix} w \\ \cdots \\ u \end{pmatrix}$ , d'où, la relation reliant la sortie  $z$  à l'entrée  $w$  peut s'écrire comme

la transformation linéaire fractionnaire basse suivante :

$$z(s) = \underbrace{\{LFT_\ell(P(s), K(s))\}}_{T_{w \rightarrow z}(s)} \cdot w(s) \quad (1.8)$$

Avec :

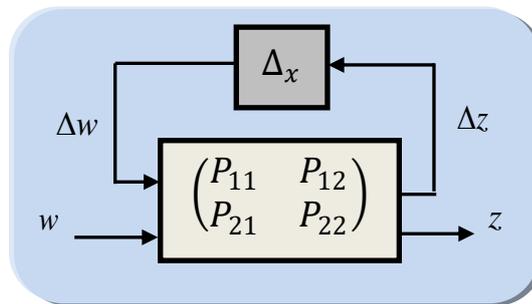
$$LFT_\ell(P, K) = P_{12} \cdot (I - K \cdot P_{22})^{-1} \cdot K \cdot P_{21} + P_{11} \quad (1.9)$$

**Remarque :** L'existence du transfert  $T_{w \rightarrow z}(s)$  est conditionné par la non singularité de la matrice  $(I - K \cdot P_{22})^{-1}$ .

### 1.2.2. Transformation linéaire fractionnaire haute $LFT_u$ :

En général, le modèle de synthèse est souvent entaché par des erreurs de modélisation. La représentation  $LFT_u$  peut servir à représenter un modèle incertain sous la forme du modèle nominal bouclé sur une matrice d'incertitudes représentant ces erreurs [47, 49]. Cette

transformation est appliquée sur le système d'interconnexion reliant la matrice de transfert complexe  $P(s)$  par le transfert d'incertitudes  $\Delta_x(s)$ . En général, le bouclage en haut de  $P(s)$  par  $\Delta_x(s)$  est souvent présenté par la Fig.1.2 ci-dessous :



**Fig.1.2.** Configuration standard de  $LFT_u$

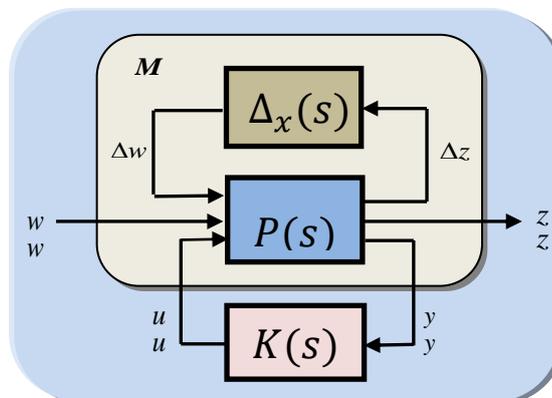
De même il est possible de définir le transfert  $T_{w \rightarrow z}(s)$  comme suite :

$$z(s) = \{LFT_u(P, \Delta_x)\} \cdot w(s) \tag{1.10}$$

Avec :

$$LFT_u(P, \Delta_x) = P_{21} \cdot (I - \Delta_x \cdot P_{11})^{-1} \cdot \Delta_x \cdot P_{12} + P_{22} \tag{1.11}$$

A noter ici que la synthèse du contrôleur robuste basée sur un modèle incertain consiste à déterminer le transfert du contrôleur  $K(s)$  minimisant la norme  $H_\infty$  de  $T_{w \rightarrow z}(s)$ . Ce dernier est obtenu via l'application de  $LFT_\ell$  sur le système d'interconnexion reliant la matrice de transfert complexe  $M(s)$  par le transfert  $K(s)$ , sachant que la matrice  $M(s)$  est obtenue via l'application a priori de  $LFT_u$  sur le système d'interconnexion reliant la matrice de transfert complexe  $P(s)$  par le transfert  $\Delta_x(s)$ . En général, la configuration standard complète de  $(P - K - \Delta_x)$  est souvent présentée par la Fig.1.3 ci-dessous :



**Fig.1.3.** Configuration standard  $(P - K - \Delta_x)$

Afin de pouvoir aisément séparer la conception de l'analyse de robustesse, il est habituel de représenter le modèle incertain sous une forme telle que les incertitudes soient extraites du

modèle nominal. Le paragraphe suivant donne les différentes structures possibles pour ces incertitudes et leurs natures.

### 1.3. Les incertitudes de modélisation:

Il existe deux types d'incertitudes à savoir : incertitudes non structurées et incertitudes structurées.

#### 1.3.1. Incertitudes non-structurées :

Ce type d'incertitude se produit souvent à haute fréquence. Ceci est dû aux deux facteurs principaux [46]. Le premier est celui causé par les signaux de perturbations agissant sur la commande et la sortie du système bouclé. Le deuxième facteur est celui causé par les modes négligés lors de la modélisation du système réel, en particulier l'étape de la linéarisation autour d'un point de fonctionnement, la négligence des retards purs dans la boucle de commande. Il convient de noter que l'extraction des incertitudes à partir des modèles unidimensionnels incertains devient assez facile par rapport à celle à partir des modèles multidimensionnels incertains, puisque toutes les opérations mathématiques appliquées sur les matrices de transfert deviennent sous forme des produits, sommes et divisions appliquées sur des fonctions de transfert. Pour cela, le paragraphe suivant s'articulera sur les différents types d'incertitudes agissant sur les systèmes multivariables. A cet effet, les nomenclatures ci-dessous seront utilisées dans la suite de ce chapitre. On aura donc :

- $G_N(s)$  : est la matrice de transfert du modèle nominal ;
- $G_p(s)$  : est la matrice de transfert du modèle perturbé ;
- $\Delta_x(s)$  : est une matrice d'incertitudes agissant sur le modèle de synthèse. Elle représente l'écart absolu ou relatif entre le fonctionnement nominal et perturbé du système réel.

##### 1.3.1.1. Incertitude additive :

Ce type d'incertitudes est bien adapter pour la modélisation des dynamiques non linéaires [49, 50]. En général, il existe deux représentations de ce type d'incertitudes à savoir :

###### ➤ Incertitude additive directe :

Pour cette forme d'incertitudes la famille de modèles  $G_p$  se définit comme la  $LFT_u$  de la matrice complexe  $M$  bouclée par la matrice d'incertitude additive  $\Delta_a$  (voir la Fig.1.4). Sachant que  $\Delta w = \Delta_a(s) \cdot \Delta z$  et  $\begin{pmatrix} \Delta z \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & G_N \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta w \\ u \end{pmatrix}$ , avec  $M = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & G_N \end{bmatrix}$ , d'où, le transfert du modèle perturbé est donné par l'expression ci-dessous :

$$G_p(s) = LFT_u(M, \Delta_a) \tag{1.12}$$

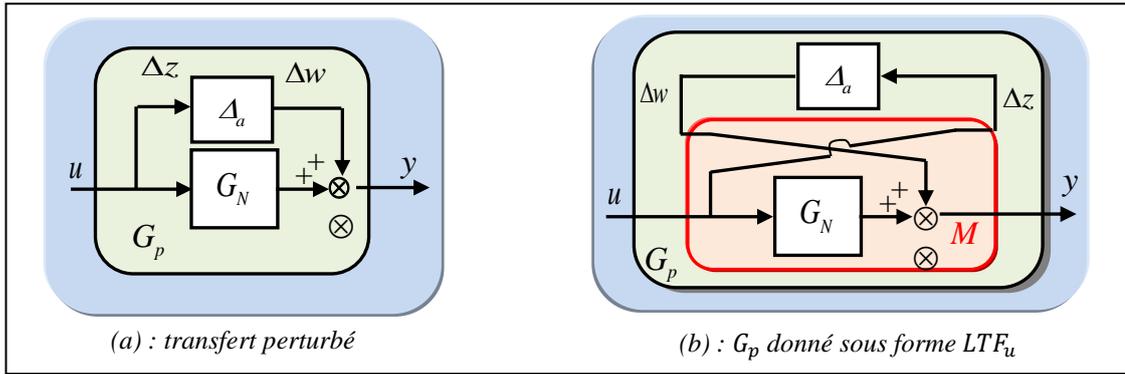


Fig. 1.4. Incertitude additive directe

De l'équation (1.12), on obtient la relation suivante :

$$G_p(s) = G_N(s) + \Delta_a(s) \quad (1.13)$$

➤ **Incertitudes additive inverse :**

Pour la forme additive inverse, la famille de modèles est présentée par la Fig.1.5 ci-dessous :

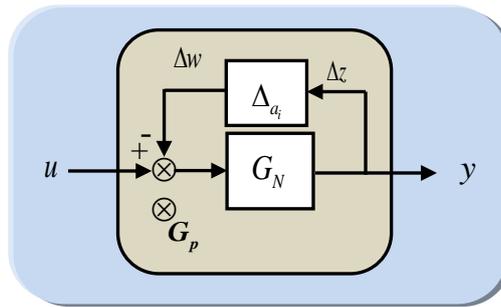


Fig. 1.5. Incertitude additive inverse

A partir de la Fig.1.5, l'application de  $LFT_u$  permet de fournir l'expression ci-dessous :

$$G_p(s) = LFT_u(M, \Delta_{a_i}), \text{ avec } M = \begin{bmatrix} -G_N & G_N \\ -G_N & G_N \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

D'où, la matrice de transfert du modèle perturbé, en présence des incertitudes additive inverse, est obtenue par la relation ci-dessous :

$$G_p(s) = [G_N^{-1}(s) + \Delta_{a_i}(s)]^{-1} \quad (1.15)$$

**1.3.1.2. Incertitude multiplicative :**

Ces formes sont utilisées pour prendre en compte les erreurs de modélisation des actionneurs et des capteurs ainsi que les dynamiques négligées [50]. Il existe quatre classes de formes multiplicatives:

➤ **Incertitudes multiplicative en sortie :**

Pour la forme multiplicative en sortie, la famille de modèles est présentée par la Fig.1.6 ci-dessous :

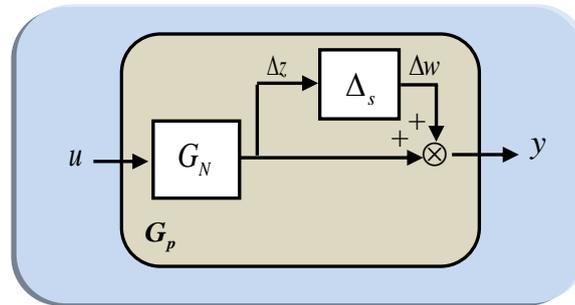


Fig. 1.6. Incertitudes multiplicative en sortie

A partir de la Fig.1.6, l'application de  $LFT_u$  permet de fournir l'expression ci-dessous :

$$G_p(s) = LFT_u(M, \Delta_s), \text{ avec } M = \begin{bmatrix} 0 & G_N \\ I & G_N \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

D'où, la matrice de transfert du modèle perturbé, en présence des incertitudes multiplicative en sortie, est donnée par l'expression ci-dessous:

$$G_p(s) = [I + \Delta_s(s)]. G_N(s) \quad (1.17)$$

➤ **Incertitudes multiplicative inverse en sortie :**

Ce type d'incertitudes est présenté par la Fig.1.7 ci-dessous :

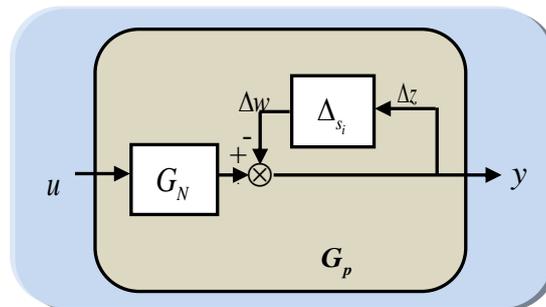


Fig. 1.7. Incertitudes multiplicative inverse en sortie

A partir de la Fig.1.7, l'application de  $LFT_u$  permet de fournir l'expression ci-dessous :

$$G_p(s) = LFT_u(M, \Delta_{s_i}), \text{ avec } M = \begin{bmatrix} -I & G_N \\ -I & G_N \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

D'où, la matrice de transfert du modèle perturbé, en présence des incertitudes multiplicative inverse en sortie, est donnée par l'expression ci-dessous:

$$G_p(s) = [I + \Delta_{s_i}(s)]^{-1}. G_N(s) \quad (1.19)$$

➤ **Incertitudes multiplicative en entrée :**

De la même façon il est aussi possible de définir la forme multiplicative en entrée. Ceci peut être illustré par la Fig.1.8 ci-dessous:

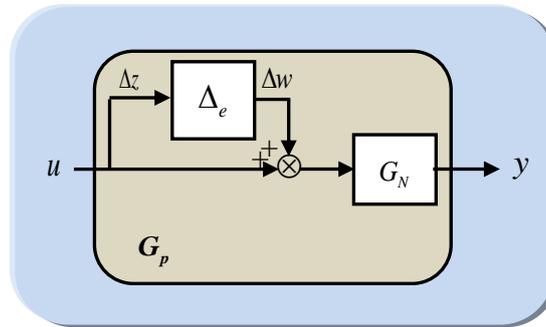


Fig. 1.8. Incertitudes multiplicative en entrée

A partir de la Fig.1.8, l'application de  $LFT_u$  permet de fournir l'expression ci-dessous :

$$G_p(s) = LFT_u(M, \Delta_e), \text{ avec } M = \begin{bmatrix} 0 & I \\ G_N & G_N \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

D'où, la matrice de transfert du modèle perturbé, en présence des incertitudes multiplicative en entrée, est donnée comme suit:

$$G_p(s) = G_N(s) \cdot [I + \Delta_e(s)] \quad (1.21)$$

➤ **Incertitudes multiplicative inverse en entrée :**

De la même façon il est aussi possible de définir la forme multiplicative inverse en entrée. Ceci peut être illustré par la Fig.1.9 ci-dessous:

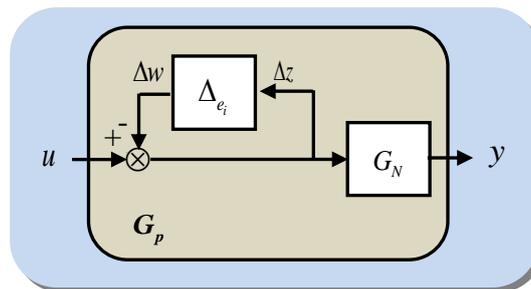


Fig. 1.9. Incertitudes multiplicative inverse en entrée

A partir de la Fig.1.9, l'application de  $LFT_u$  permet de fournir l'expression ci-dessous :

$$G_p(s) = LFT_u(M, \Delta_{e_i}), \text{ avec } M = \begin{bmatrix} -I & I \\ -G_N & G_N \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

D'où, la matrice de transfert du modèle perturbé, en présence des incertitudes multiplicative inverse en entrée, est obtenue comme suit :

$$G_p(s) = G_N(s) \cdot [I + \Delta_{e_i}(s)]^{-1} \quad (1.23)$$

### 1.3.2. Incertitudes structurées:

Dans l'industrie, l'incertitude d'un élément physique peut être apparue à tous moment pendant le fonctionnement du système réel à commander [2]. Cette dernière est due au changement du point de fonctionnement et/ou la présence des phénomènes physiques affectant la boucle de régulation. Tous ces cas peuvent être regroupés de façon à ce que la matrice d'incertitudes soit structurée de telle sorte qu'elle soit diagonale par blocs, chaque bloc correspondant à une formulation différente des incertitudes. Dans notre travail, nous ne nous intéresserons que par le type d'incertitudes non structurées, la détermination de la matrice de transfert décrivant les incertitudes structurées pourra faire l'objet à d'autres recherches ultérieures.

## 1.4. Analyse de robustesse des systèmes dynamique :

### 1.4.1. Stabilité Nominale (NS) :

La stabilité nominale est indispensable pour chaque système de commande. Elle permet de façonner la réponse du système à une référence donnée et garder le fonctionnement nominal du système physique stable en boucle fermée. En général, on distingue deux définitions pour la stabilité nominale :

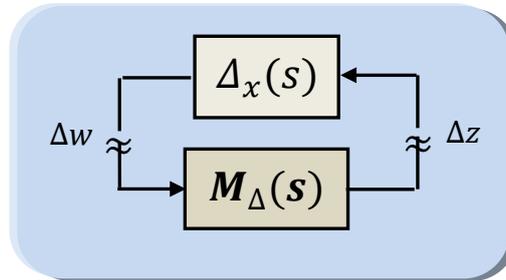
- La stabilité externe exige que pour toute entrée bornée injectée au système bouclé, on obtient une sortie bornée. Cette stabilité est encore appelée stabilité au sens *EBSB* (en anglais *Bounded Input Bounded Output BIBO*).
- La stabilité interne est plus large que celle mentionnée précédemment. Elle exige que tout signal injecté en n'importe quel point de la boucle génère une réponse bornée en tout autre point.

### 1.4.2. Stabilité Robuste (SR) :

La stabilité est dite robuste si, en plus du modèle nominal, la stabilité doit être garantie pour toutes les perturbations sur le modèle nominal du système, jusqu'au pire cas des incertitudes du modèle. La condition sur la stabilité robuste pour un type spécifique de perturbations affectant le modèle nominal de synthèse est obtenue par l'application d'un théorème appelé « théorème du faible gain ou de petit gain » aux diverses représentations des incertitudes citées précédemment.

#### 1.4.2.1. Théorème du faible gain :

Considérons  $\Delta_x$  un transfert décrivant les incertitudes de modélisation, et  $M_\Delta(s)$  la matrice de transfert du système entre l'entrée et la sortie de  $\Delta_x$ , qui est supposé stable. Le schéma général, qui permet l'étude de la stabilité robuste, peut être illustré par la Fig.1.10 ci-dessous [51] :



*Fig.1.10. Schéma bloc permettant l'analyse de la stabilité robuste d'un système bouclé*

$M_\Delta(s)$  est le transfert qui apparaît lorsqu'on isole dans un bloc  $\Delta_x$  toutes les incertitudes de modèle. Alors, le système présenté par la Fig. 1.10 demeure stable en présence de la perturbation  $\Delta_x$  si et seulement si  $\|\Delta_x\|_\infty \leq 1$ , d'où la condition sur la stabilité robuste est assurée si et seulement si :

$$\|M_\Delta(s) \cdot \Delta_x(s)\|_\infty \leq 1 \Leftrightarrow \sigma_{max}[M_\Delta(j\omega) \cdot \Delta_x(j\omega)] < 1, \forall \omega \in \mathbb{R}^{*+} \quad (1.24)$$

Une autre condition de la stabilité robuste également suffisante mais plus conservatrice est la suivante :

$$\|M_\Delta(s)\|_\infty \cdot \|\Delta_x(s)\|_\infty \leq 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^{*+} \quad (1.25)$$

#### 1.4.2.2. Conditions sur la stabilité robuste du système bouclé :

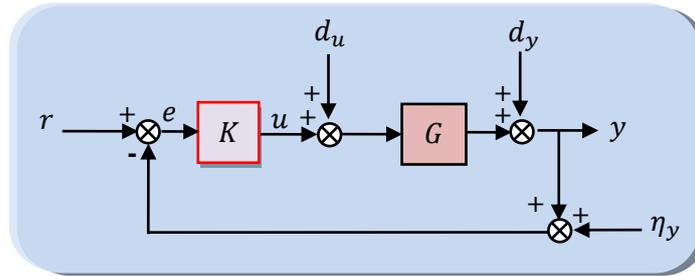
Pour déterminer la condition sur la stabilité robuste en présence d'incertitudes de modélisation, nous devons appliquer le théorème du faible gain sur les différentes configurations des incertitudes citées précédemment. Dans ces conditions, il faut calculer la sortie  $\Delta w$  de  $\Delta_x$  en fonction de sa sortie  $\Delta z$  pour obtenir le transfert  $M_\Delta$  de chaque configuration. Finalement, la condition (1.25) permet de fournir les conditions suivantes:

- Incertitude additive directe  $\left\| K \cdot [I_{p \times p} + G_N \cdot K]^{-1} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\|\Delta_{a_i}(s)\|_\infty}$  ;
- Incertitude additive inverse  $\left\| G_N \cdot [I_{q \times q} + K \cdot G_N]^{-1} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\|\Delta_{a_i}(s)\|_\infty}$  ;
- Incertitude multiplicative directe en sortie  $\left\| G_N \cdot K \cdot [I_{p \times p} + G_N \cdot K]^{-1} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\|\Delta_{a_i}(s)\|_\infty}$  ;

- Incertitude multiplicative inverse en sortie  $\| [I_{p \times p} + G_N \cdot K]^{-1} \|_{\infty} \leq \frac{1}{\| \Delta_{s_l}(s) \|_{\infty}}$  ;
- Incertitude multiplicative directe en entrée  $\| K \cdot G_N \cdot [I_{q \times q} + K \cdot G_N]^{-1} \|_{\infty} \leq \frac{1}{\| \Delta_{e_l}(s) \|_{\infty}}$  ;
- Incertitude multiplicative inverse en entrée  $\| [I_{q \times q} + K \cdot G_N]^{-1} \|_{\infty} \leq \frac{1}{\| \Delta_{e_l}(s) \|_{\infty}}$  .

**1.4.3. Performance Nominale (NP) :**

Soit le système bouclé présenté par la Fig.1.11 comme suit :



*Fig.1.11. Structure d'un système bouclé pour l'analyse de robustesse*

Les différents signaux utilisés dans le système bouclé sont les suivants :

- $u$  : représente le signal de commande fournie par le contrôleur;
- $y$  : représente le signal de sortie ;
- $d_y$  : représente le signal de bruit sur la sortie  $y$ ;
- $d_u$  : représente le signal de bruit sur la sortie  $u$  ;
- $\eta_y$  : représente le bruit de mesure ;
- $r$  : représente le signal de référence ;
- $e$  : représente le vecteur des erreurs de poursuite entre les sorties mesurées  $y$  et les références  $r$ .

Notons ici que ces signaux sont associés entre eux par le système d'équation ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 e &= (I_{p \times p} + G_N \cdot K)^{-1} \cdot (r - d_y - n_y) - G_N \cdot (I_{q \times q} + K \cdot G_N)^{-1} \cdot d_u \\
 u &= K \cdot (I_{p \times p} + G_N \cdot K)^{-1} \cdot (r - d_y - n_y) - K \cdot G_N \cdot (I_{q \times q} + K \cdot G_N)^{-1} \cdot d_u \\
 y &= G_N \cdot K \cdot (I_{p \times p} + G_N \cdot K)^{-1} \cdot (r - n_y) + (I_{p \times p} + G_N \cdot K)^{-1} \cdot d_y + G_N \cdot (I_{q \times q} + K \cdot G_N)^{-1} \cdot d_u
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

A partir du système d'équations (1.26), il est claire de remarquer qu'il existe quatre transferts qui se répètent dans les expressions de l'erreur, la commande et la sortie du système. Ces transferts appelées par la suite « sensibilités ». Elles sont définies par [12] :

$$S_y = (I_{p \times p} + G_N \cdot K)^{-1} \tag{1.27}$$

$$S_u = (I_{q \times q} + K \cdot G_N)^{-1} \quad (1.28)$$

$$T_y = G_N \cdot K (I_{p \times p} + G_N \cdot K)^{-1} \quad (1.29)$$

$$T_u = K \cdot G_N \cdot (I_{q \times q} + K \cdot G_N)^{-1} \quad (1.30)$$

Pour comprendre le rôle de ces sensibilités dans l'analyse de robustesse du système bouclé, en essayant de les introduire dans le système d'équations précédent. On aura:

$$\begin{aligned} e &= S_y \cdot (r - d_y - n_y) - G_N \cdot S_u \cdot d_u \\ u &= K \cdot S_y \cdot (r - d_y - n_y) - T_u \cdot d_u \\ y &= T_y \cdot (r - n_y) + S_y \cdot d_y + G_N \cdot S_u \cdot d_u \end{aligned} \quad (1.31)$$

Lors de l'analyse de robustesse du système bouclé, il est important d'assurer un niveau de performances nominales. Ces dernières sont caractérisées souvent par la bonne dynamique de poursuite de la trajectoire de référence, la rejection rapide de la perturbation, l'atténuation de l'effet des bruits de mesure, la désensibilisation du système bouclé aux effets des modes négligés lors de la linéarisation de la dynamique réelle du système physique autour de son point de fonctionnement.

Pour assurer les bonnes performances nominales du système bouclé, il est clair que les valeurs singulières maximales de  $S_y$ ,  $S_u$ ,  $T_y$  et  $T_u$  doivent être minimisées dans toute la plage de fréquences. Ces sensibilités sont définies comme suit:

#### 1.4.3.1. Sensibilité directe en sortie $S_y(s)$ :

Cette sensibilité fournit des informations sur deux dynamiques différentes, à savoir: le rejet de la perturbation  $d_y$  sur la sortie du processus (i.e.,  $S_y(s) = T_{d_y \rightarrow y}$ ) ainsi que la poursuite de la trajectoire de référence  $r$  (i.e.,  $S_y(s) = T_{r \rightarrow e}$ ). Alors, la première performance qu'on doit demander à la régulation est d'assurer un bon rejet de cette perturbation. Autrement dit, on souhaite que  $d_y$  ait une faible influence sur la sortie  $y$ . De plus, la deuxième performance qu'on doit demander à l'asservissement est d'assurer une bonne minimisation de l'erreur de poursuite. Ces deux performances peuvent être vérifiées à condition que les valeurs singulières de la sensibilité directe soient suffisamment faibles, aux fréquences où la perturbation et l'erreur de poursuite sont importantes.

#### 1.4.3.2. Sensibilité directe en entrée $S_u(s)$ :

Cette sensibilité présente l'effet de la perturbation en entrée  $d_u$  sur la sortie du processus (i.e.,  $G_N \cdot S_u(s) = T_{d_u \rightarrow y}$ ). A cet effet, la performance qu'on doit exiger à la régulation est

d'atténuer l'effet de cette perturbation. Cela est vérifié à condition que le transfert  $G_N \cdot S_u(s)$  soit suffisamment faible où la perturbation  $d_u$  est notable.

### 1.4.3.3. Sensibilité complémentaire en sortie $T_y(s)$ :

Cette sensibilité sert à nous renseigner sur la stabilité robuste de la boucle fermée vis-à-vis les incertitudes multiplicatives en sortie qui affectent le modèle nominal. Elle sert également à nous donner des informations sur l'effet de bruits et les modes négligés lors de la linéarisation du comportement non linéaire du système. La performance qu'on doit demander à la régulation est d'assurer une bonne minimisation de  $\eta_y$ . Cela est vérifié à condition que les valeurs singulières de la sensibilité complémentaire soient suffisamment faibles, aux fréquences où les effets susmentionnés sont importants. D'après (1.31), on constate qu'un système bouclé ayant d'une bonne poursuite de  $r$  assurée avec une atténuation acceptable de  $d_y$  est tel que  $S_y = 0$ . De plus, la bonne minimisation de l'effet des bruits de mesure impose que  $T_y = 0$ . Ceci n'est pas réalisable dans la même plage de fréquence à cause de l'identité ci-dessous :

$$T_y(s) + S_y(s) = I \quad (1.30)$$

Par conséquent, un compromis de robustesse entre les objectifs ci-dessus peut être réalisé suivant la plage de fréquence ou la présence des signaux exogènes précédents est importante. En général, l'effet d'incertitudes de modélisation est souvent important en basse fréquence. De plus, l'erreur de poursuite doit être assez faible que possible dans la même cette plage de fréquence. En revanche, les effets des bruits de mesure ainsi que la dynamique non linéaire négligée sont souvent important en haute fréquence. C'est pour cette raison que les valeurs singulières maximales de la sensibilité directe  $S_y$  doivent être faibles en basse fréquence et tendent vers à l'unité ( $0_{dB}$ ) en haute fréquence. Par contre, les valeurs singulières de la sensibilité complémentaire  $T_y$  doivent être faibles en haute fréquence et tendent vers à l'unité en basse fréquence.

### 1.4.3.4. Sensibilité complémentaire en entrée $T_u(s)$ :

Cette sensibilité représente le transfert entre la perturbation  $d_u$  et la commande  $u$  fournie par le contrôleur à synthétiser. Elle est liée avec  $S_u(s)$  par la relation suivante :

$$T_u(s) = I - S_u(s) \quad (1.31)$$

Ceci peut imposer un compromis entre les deux sensibilités sur l'entrée  $T_u(s)$  et  $S_u(s)$ .

### 1.4.4. Performance robuste (RP):

Le système en boucle fermée satisfait le critère de robustesse en performance si et seulement si le système répond aux spécifications de performance pour une classe d'incertitudes structurées ou non structurées du système appliquée sur le modèle nominal, jusqu'au pire cas d'incertitude du modèle [11, 35]. Nous verrons, dans la suite de ce travail, que la vérification de la condition sur  $RP$  assure de façon systématique la satisfaction du compromis de robustesse entre la stabilité robuste et les performances nominales. La réciproque de cette implication n'est pas toujours vérifiée.

### 1.5. Problème de sensibilité pondérée :

Considérons le système bouclé présenté par la Fig.1.11. L'objectif de la suite de ce travail, est de synthétiser un contrôleur robuste satisfaisant [52] :

- la condition sur la stabilité robuste face aux incertitudes de modélisation de type multiplicatives amenant en sortie du modèle de synthèse ;
- La condition sur les performances nominales ;
- La condition sur la limitation de l'énergie de commande ;
- Compromis de robustesse entre la stabilité robuste et les performances nominales.

Il convient de noter ici que le système augmenté assurant la vérification des trois conditions précédentes peut être présenté par le schéma de la Fig.1.12.

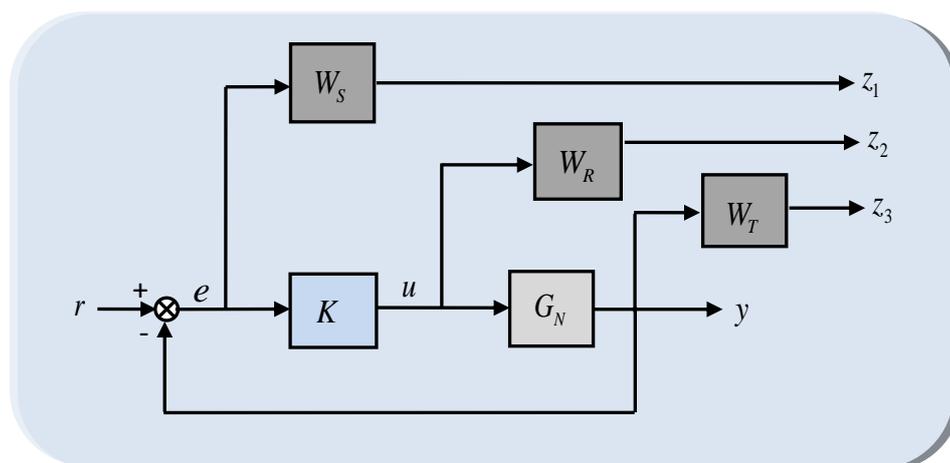


Fig.1.12. Formulation du problème de sensibilité pondérée

Avec  $W_S(s)$ ,  $W_u(s)$  et  $W_T(s)$  sont les pondérations irrationnelles supposées fixes. Ces pondérations sont a priori choisies par l'utilisateur afin de limiter  $\sigma_{max}[S_y(j\omega)]$ ,  $\sigma_{max}[T_y(j\omega)]$  et  $\sigma_{max}[K(j\omega).S_y(j\omega)]$ . Soit le transfert stable  $\ell_S(\omega)$  qui représente le gabarit désiré assurant

la limitation du signal de l'erreur de poursuite (i.e., la limitation de l'effet de la perturbation). La condition assurant les bonnes performances nominales est définie par [13] :

$$\sigma_{max}[S_y(j\omega)] \leq |\ell_S(\omega)| \quad (1.32)$$

A partir de l'expression (1.32), on peut tirer la condition ci-dessous :

$$|\ell_S^{-1}(\omega)| \cdot \sigma_{max}[S_y(j\omega)] \leq 1 \quad (1.33)$$

Remplaçons, maintenant, le transfert  $\ell_S^{-1}(\omega)$  par celui de  $W_S(\omega)$ . L'expression (1.33) peut être réécrite comme suit :

$$\sigma_{max}[W_S(\omega)] \cdot \sigma_{max}[S_y(j\omega)] \leq 1 \Leftrightarrow \|W_S \cdot S_y\|_{\infty} < 1 \quad (1.34)$$

Soit le transfert stable  $\ell_T(\omega)$  qui représente le gabarit désiré majorant toutes les incertitudes multiplicatives. La condition sur la stabilité robuste du système bouclé est donc définie par :

$$\sigma_{max}[T_y(j\omega)] \leq |\ell_T(\omega)| \quad (1.35)$$

A partir de l'expression (1.35), on peut tirer la condition ci-dessous :

$$|\ell_T^{-1}(\omega)| \cdot \sigma_{max}[T_y(j\omega)] \leq 1 \quad (1.36)$$

Remplaçons, maintenant, le transfert  $\ell_T^{-1}(\omega)$  par celui de  $W_T(\omega)$ , d'où l'expression (1.36) peut être réécrite comme suit :

$$\sigma_{max}[W_T(\omega)] \cdot \sigma_{max}[T_y(j\omega)] \leq 1 \Leftrightarrow \|W_T \cdot T_y\|_{\infty} < 1 \quad (1.37)$$

Dans le but d'éviter la saturation des actionneurs installés dans la boucle de commande, la sensibilité décrivant l'énergie de commande doit être limitée par un gabarit, noté ici par  $\ell_u(\omega)$ . Dans ce cas, la condition sur la limitant l'énergie de commande est donnée par :

$$\sigma_{max}[K(j\omega) \cdot S_y(j\omega)] \leq |\ell_u(\omega)| \quad (1.38)$$

A partir de l'expression (1.38), on obtient :

$$|\ell_u^{-1}(\omega)| \cdot \sigma_{max}[K(j\omega) \cdot S_y(j\omega)] \leq 1 \quad (1.39)$$

Remplaçons le transfert stable  $\ell_u^{-1}(\omega)$  par celui de  $W_u(\omega)$ , d'où l'expression (1.39) est réécrite comme suit :

$$\sigma_{max}[W_u(\omega)] \cdot \sigma_{max}[K(j\omega) \cdot S_y(j\omega)] \leq 1 \Leftrightarrow \|W_u \cdot K \cdot S_y\|_{\infty} < 1 \quad (1.40)$$

Les trois conditions (1.34), (1.37) et (1.40) peuvent être réarrangées en seul critère appelé « critère de sensibilité pondérée ». D'où le contrôleur robuste à synthétiser à la capacité d'assurer

le bon compromis de robustesse  $RS/NP$  [32] avec énergie de commande réduite si et seulement si la condition ci-dessous est vérifiée dans toute la plage fréquentielle. On obtient donc :

$$\left\| \begin{array}{c} W_S \cdot S_y \\ W_u \cdot K \cdot S_y \\ W_T \cdot T_y \end{array} \right\|_{\infty} = \max \left( \|W_S \cdot S_y\|_{\infty}, \|W_u \cdot K \cdot S_y\|_{\infty}, \|W_T \cdot T_y\|_{\infty} \right) < \gamma \quad (1.41)$$

Avec  $\gamma$  est une valeur réelle qui doit préalablement choisir entre 0 et 1 par l'utilisateur. De plus, l'inégalité présentée par (1.41) est souvent appelée « *problème  $H_{\infty}$  sous optimal* ». Il peut également présenter sous forme d'un problème d'optimisation dont la solution optimale fournit la représentation d'état du contrôleur robuste souhaité. On obtient donc :

$$\min_{K(s)} \{ \|LFT_{\ell}(P, K)\|_{\infty} \} = \min_{K(s)} \left\{ \max_{\omega \in \mathbb{R}^{++}} \left( \sigma_{\max} \begin{bmatrix} W_S(j\omega) \cdot S_y(j\omega) \\ W_u(j\omega) \cdot K(j\omega) \cdot S_y(j\omega) \\ W_T(j\omega) \cdot T_y(j\omega) \end{bmatrix} \right) \right\} \quad (1.42)$$

Dans certaines applications industrielles, une condition plus rigoureuse que celle de  $RS/NP$  est imposée lors de la synthèse du contrôleur robuste à synthétiser. C'est la condition sur  $RP$  [35] qui est définie par la condition suffisante ci-dessous :

$$\|W_T \cdot T_y\|_{\infty} + \|W_S \cdot S_y\|_{\infty} < 1 \quad (1.43)$$

En tenant compte la relation suivante :

$$\max \left( \|W_S \cdot S_y\|_{\infty}, \|W_u \cdot K \cdot S_y\|_{\infty}, \|W_T \cdot T_y\|_{\infty} \right) \leq \|W_S \cdot S_y\|_{\infty} + \|W_u \cdot K \cdot S_y\|_{\infty} + \|W_T \cdot T_y\|_{\infty} \quad (1.44)$$

D'où, la satisfaction de la condition sur  $RP$  conduit automatiquement à satisfaire le bon compromis de robustesse  $RS/NP$ , quelles que soient les incertitudes du modèle affectant le modèle nominal.

### 1.5.1. Solution du problème $H_{\infty}$ :

Considérons le schéma de la Fig.1.13 qu'à partir duquel le transfert du système augmenté est représenté par le bloc ci-dessous :

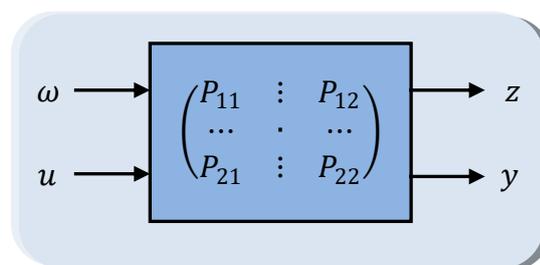


Fig.1.13. Transfert du système augmenté (modèle généralisé)

D'après la Fig.1.13, les entrées exogènes sont liées par les sorties exogènes comme suit :

$$\begin{pmatrix} z \\ \dots \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & \vdots & P_{12} \\ \dots & \cdot & \dots \\ P_{21} & \vdots & P_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega \\ \dots \\ u \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

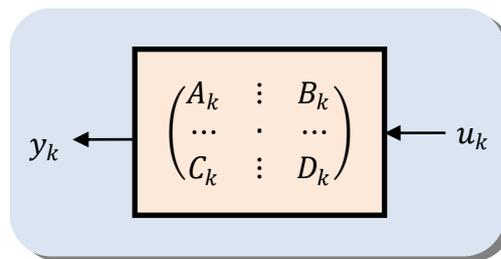
La représentation d'état du modèle augmenté est définie par :

$$P = \begin{pmatrix} s \cdot I - A & \vdots & (B_{11} & B_{12}) \\ \dots & \cdot & \dots \\ (C_1) & \vdots & (D_{11} & D_{12}) \\ (C_2) & \vdots & (D_{21} & D_{22}) \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

D'où, la représentation d'état décrivant de ce modèle est donnée par:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1\omega(t) + B_2u(t) \\ z(t) = C_1x(t) + D_{11}\omega(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}\omega(t) + D_{22}u(t) \end{cases} \quad (1.47)$$

Considérons, maintenant, le schéma de la Fig.1.14 qu'à partir duquel le transfert du contrôleur à synthétiser est représenté par le bloc ci-dessous:

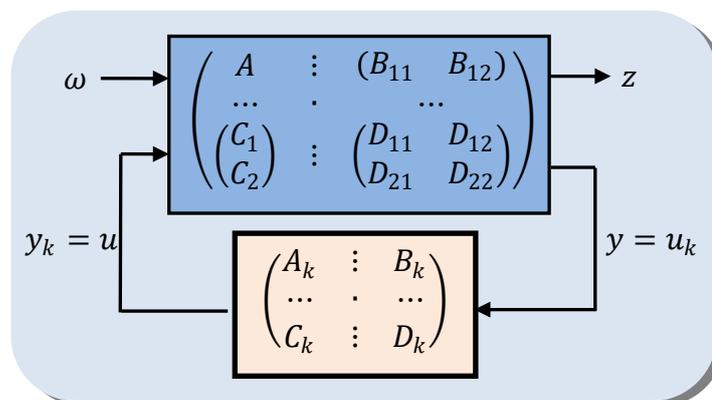


*Fig.1.14. Représentation d'état du contrôleur à synthétiser*

En tenant compte la relation  $y_k = K \cdot u_k$ . D'où la représentation d'état du contrôleur est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = A_k x_k(t) + B_k u_k(t) \\ y_k(t) = C_k x_k(t) + D_k u_k(t) \end{cases} \quad (1.48)$$

Le système d'interconnexion reliant le transfert du système augmenté avec celui du contrôleur est présenté par la Fig.1.15 comme suit [33] :



*Fig.1.15. Système d'interconnexion décrivant le système en boucle fermée*

D'où, la représentation d'état du système en boucle fermée est obtenue à partir des équations (1.47) et (1.48) comme suit [33, 53, 54]:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_k(t) \\ \vdots \\ z(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_k \end{pmatrix} & \vdots & \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} & \vdots & \begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & B_k \end{pmatrix} \\ (C_1 & 0) & \vdots & D_{11} & \vdots & (D_{12} & 0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 & C_k \\ C_2 & 0 \end{pmatrix} & \vdots & \begin{pmatrix} 0 \\ D_{21} \end{pmatrix} & \vdots & \begin{pmatrix} 0 & D_k \\ D_{22} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ x_k(t) \\ \vdots \\ \omega(t) \\ \vdots \\ u(t) \\ u_k(t) \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

En tenant compte les notations ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \vdots & \mathcal{B}_1 & \vdots & \mathcal{B}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1 & \vdots & D_{11} & \vdots & D_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_2 & \vdots & D_{21} & \vdots & D_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_k \end{pmatrix} & \vdots & \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} & \vdots & \begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & B_k \end{pmatrix} \\ (C_1 & 0) & \vdots & D_{11} & \vdots & (D_{12} & 0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 & C_k \\ C_2 & 0 \end{pmatrix} & \vdots & \begin{pmatrix} 0 \\ D_{21} \end{pmatrix} & \vdots & \begin{pmatrix} 0 & D_k \\ D_{22} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

On aura donc:

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_k \end{pmatrix} \\ \mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & B_k \end{pmatrix} \end{cases}, \begin{cases} C_1 = (C_1 & 0) \\ C_2 = \begin{pmatrix} 0 & C_k \\ C_2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} D_{11} = D_{11} \\ D_{12} = (D_{12} & 0) \\ D_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ D_{21} \end{pmatrix} \\ D_{22} = \begin{pmatrix} 0 & D_k \\ D_{22} & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1.51)$$

A partir de l'équation (1.49), on peut tirer les relations ci-dessous:

$$\begin{pmatrix} y_k \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 & D_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_k \\ \omega \end{pmatrix} + D_{22} \begin{pmatrix} y_k \\ y \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

$$(I - D_{22}) \begin{pmatrix} y_k \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 & D_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_k \\ \omega \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

De (1.52) et (1.53), la matrice  $(I - D_{22})$  doit être inversible. Cela permet de définir les deux expressions suivantes :

$$\begin{pmatrix} y_k \\ y \end{pmatrix} = (I - D_{22})^{-1} \begin{pmatrix} C_2 & D_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_k \\ \omega \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_k \\ z \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}_1 \\ C_1 & D_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{B}_2 \\ D_{12} \end{pmatrix} (I - D_{22})^{-1} \begin{pmatrix} C_2 & D_{21} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ x_k \\ \omega \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

D'où, l'existence du contrôleur robuste est liée directement par la vérification des deux conditions nécessaires ci-dessous :

- La matrice  $(I - \mathcal{D}_{22}) = \begin{pmatrix} I & -D_k \\ -D_{22} & I \end{pmatrix}$  doit être inversible.
- La matrice  $\mathcal{A} + \mathcal{B}_2(I - \mathcal{D}_{22})^{-1}\mathcal{C}_2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & B_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -D_k \\ -D_{22} & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & C_k \\ C_2 & 0 \end{pmatrix}$  doit être stable.

Dans ce qui est suit, nous allons présenter deux algorithmes d'optimisation avec lesquels la représentation d'état du contrôleur robuste est assurée par la commande  $H_\infty$ . Ces algorithmes sont les suivants :

**1.5.1.1.Méthode  $H_\infty$  basée sur la résolution des deux équations algébriques de Riccati :**

Supposons ici qu'il existe un contrôleur robuste  $K(s)$  stabilisant le système augmenté  $P(s)$ . Cela implique que :

- Les couples  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_1)$  et  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_2)$  soient stabilisables
- Les couples  $(\mathcal{A}, \mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{A}, \mathcal{C}_2)$  soient détectables

Supposons également que :

- $\text{rang}(\mathcal{D}_{12})$  égal le nombre d'entrée  $u$
- $\text{rang}(\mathcal{D}_{21})$  égal le nombre de sortie  $y$
- $\mathcal{D}_{11} = \mathcal{D}_{22} = 0$
- $P_{12}(s)$  et  $P_{21}(s)$  n'ont pas des zéros sur l'axe imaginaire.

**Théorème :**

La détermination de la représentation d'état du contrôleur robuste  $K(s)$  dépend de l'existence des deux matrices définies positives  $X_\infty > 0$  et  $Y_\infty > 0$  qui représentent la solution des deux équations de Riccati ci-dessous :

$$\mathcal{A}^T X + X \mathcal{A} + X(\gamma^{-2} \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_1^T - \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_2^T) X + \mathcal{C}_1^T \mathcal{C}_1 = 0 \quad (1.55)$$

$$\mathcal{A} Y + Y \mathcal{A}^T + Y(\gamma^{-2} \mathcal{C}_1^T \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2^T \mathcal{C}_2) Y + \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_1^T = 0 \quad (1.56)$$

Tenant compte le rayon spectral  $\rho(X_\infty, Y_\infty)$  qui doit vérifier la condition  $\rho(X_\infty, Y_\infty) < \gamma^2$ , d'où, les solutions  $X_\infty$  et  $Y_\infty$  peuvent être données par :

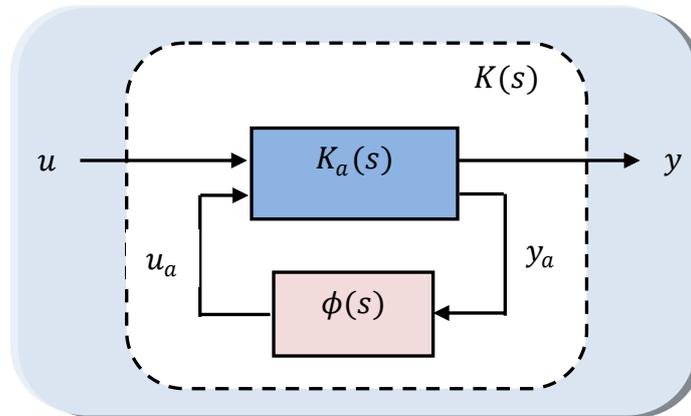
$$X_\infty = Ric \begin{bmatrix} \mathcal{A} - \mathcal{B}_2 \mathcal{D}_{12}^T \mathcal{C}_1 & \gamma^{-2} \mathcal{B}_1^T \mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_2^T \\ -((I - \mathcal{D}_{12} \mathcal{D}_{12}^T) \mathcal{C}_1)^T ((I - \mathcal{D}_{12} \mathcal{D}_{12}^T) \mathcal{C}_1) & -(\mathcal{A} - \mathcal{B}_2 \mathcal{D}_{12}^T \mathcal{C}_1)^T \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

$$Y_\infty = Ric \begin{bmatrix} \mathcal{A} - \mathcal{B}_1 \mathcal{D}_{21}^T \mathcal{C}_2 & \gamma^{-2} \mathcal{C}_1^T \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 \mathcal{C}_2^T \\ -(\mathcal{B}_1 (I - \mathcal{D}_{21} \mathcal{D}_{21}^T) \mathcal{B}_1 (I - \mathcal{D}_{21} \mathcal{D}_{21}^T))^T ((I - \mathcal{D}_{12} \mathcal{D}_{12}^T) \mathcal{C}_1) & -(\mathcal{A} - \mathcal{B}_1 \mathcal{D}_{21}^T \mathcal{C}_2)^T \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

La valeur optimale de  $\gamma \in [\gamma_{min} \ \gamma_{max}]$ , (notée ici par  $\gamma_{opt}$ ) est obtenue de façon itérative par l'algorithme de dichotomie dans lequel la distance  $d_k = |\gamma_{max_k} - \gamma_{min_k}|$  est décroît dans chaque itération  $k$ . La valeur finale  $\gamma_{opt}$ , qui est fournie par cet algorithme à l'itération  $\ell$ , représente la médiane de l'intervalle finale, on aura donc :

$$\gamma_{opt} = \frac{1}{2} (\gamma_{min_\ell} + \gamma_{max_\ell}) \quad (1.59)$$

De plus, la représentation d'état de  $K(s)$  est obtenue par l'application de *LFT* inférieure sur le système d'interconnexion  $\{K_a, \phi\}$  présentée par la Fig.1.16, sachant la condition ci-dessous :



**Fig.1.16.** Ensemble des régulateurs qui résous le problème de synthèse  $H_\infty$

En tenant compte la condition ci-dessous :

$$0 \leq \|\phi(s)\|_\infty < \gamma_{opt} \quad (1.60)$$

On obtient donc une infinité de contrôleurs stabilisant dans l'intervalle  $[0 \ \gamma_{opt}]$ . Sachant que le contrôleur qui correspond le cas particulier  $\phi(s) = 0$  est appelé « le contrôleur central », noté par  $K_a(s)$ . D'où sa représentation minimale est donc déterminée en fonction des trois matrices ci dessous :

- La matrice de retour d'état  $F$ , qui est donnée par :

$$F = -(\mathcal{D}_{12}^T \cdot \mathcal{C}_1 + \mathcal{B}_2^T \cdot X_\infty) \quad (1.61)$$

- La matrice d'observation  $H$ , qui est donnée par :

$$H = -(\mathcal{B}_1 \cdot \mathcal{D}_{21}^T + Y_\infty \cdot \mathcal{C}_2^T) \quad (1.62)$$

- La matrice de mise à l'échelle  $Z_\infty$ , qui est donnée par :

$$Z_\infty = (I - \gamma^{-2} \cdot Y_\infty \cdot X_\infty)^{-1} \quad (1.63)$$

Sachant que la représentation d'état souhaitée du contrôleur robuste est définie par :

$$K_a(s) = \begin{bmatrix} (s \cdot I - A_{ka}) & \vdots & B_{ka} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ C_{ka} & \vdots & D_{ka} \end{bmatrix} \quad (1.64)$$

D'où,  $A_{ka}$ ,  $B_{ka}$ ,  $C_{ka}$  et  $D_{ka}$  sont données comme suit :

$$A_{ka} = \mathcal{A} + \mathcal{B}_2 \cdot F + \gamma^{-2} \cdot \mathcal{B}_1 \cdot \mathcal{B}_1^T \cdot X_\infty + Z_\infty \cdot H \cdot (\mathcal{C}_2 + \gamma^{-2} \cdot \mathcal{D}_{21} \cdot \mathcal{B}_1^T \cdot X_\infty) \quad (1.65)$$

$$B_{ka} = [-Z_\infty \cdot H \quad Z_\infty (\mathcal{B}_2 + \gamma^{-2} \cdot Y_\infty \cdot \mathcal{C}_1^T \cdot \mathcal{D}_{12})] \quad (1.66)$$

$$C_{ka} = \begin{bmatrix} F \\ -(\mathcal{C}_2 + \gamma^{-2} \cdot \mathcal{D}_{21} \cdot \mathcal{B}_1^T \cdot X_\infty) \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

$$D_{ka} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

### 1.5.1.2. Méthode $H_\infty$ utilisant la formulation *LMIs*:

La technique *LMIs* permet de résoudre le problème de sensibilité pondérée par des algorithmes d'optimisation sous contraintes. La détermination de la représentation d'état du contrôleur robuste est donc basée sur le théorème ci-dessous [24, 26] :

#### **Théorème:**

La détermination de la représentation d'état du contrôleur robuste  $K(s)$  dépend de l'existence des deux matrices définies positives  $X_\infty > 0$  et  $Y_\infty > 0$  qui représentent la solution du problème *LMIs* ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} N_x & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} X_\infty \cdot \mathcal{A} + \mathcal{A}^T \cdot X_\infty & X_\infty \cdot \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_1^T \cdot X_\infty & -\gamma \cdot I \\ \mathcal{C}_1 & \mathcal{D}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1^T \\ \mathcal{D}_{11}^T \\ -\gamma \cdot I \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} N_x & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \quad (1.69)$$

$$\begin{pmatrix} N_y & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} Y_\infty \cdot \mathcal{A}^T + \mathcal{A} \cdot Y_\infty & Y_\infty \cdot \mathcal{C}_1^T \\ \mathcal{C}_1 \cdot Y_\infty & -\gamma \cdot I \\ \mathcal{C}_1 & \mathcal{D}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{D}_{11} \\ -\gamma \cdot I \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} N_y & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \quad (1.70)$$

$$\begin{pmatrix} X_\infty & I \\ I & Y_\infty \end{pmatrix} > 0 \quad (1.71)$$

Où  $N_x$  et  $N_y$  sont les bases des noyaux de  $(\mathcal{B}_2^T \quad \mathcal{D}_{12}^T)$  et  $(\mathcal{C}_2 \quad \mathcal{D}_{21})$  respectivement.

### 1.6. Simulations et interprétations des résultats :

Dans le but d'évaluer les performances fournies par un système bouclé par un contrôleur robuste synthétisé par la commande  $H_\infty$  utilisant l'approche *LMIs*, nous allons commander un

processus hydraulique avec lequel le niveau d'eau d'un canal d'irrigation à surface libre est commandé par une tension alimentant une électrovanne, qui est installée au début de ce canal. A cet effet, le but de la commande robuste est de transmettre de l'eau de sa source amont (le barrage, la rivière) à ses utilisateurs finaux aval (des agriculteurs). Il est à noter ici que le comportement réel de ce système physique est fortement non linéaire. La linéarisation est donc effectuée en plusieurs points de fonctionnement et cela par l'utilisation d'un modèle incertain présenté par le transfert rationnel suivant:

$$G(s) = \frac{K \cdot e^{-\theta \cdot s}}{1 + T \cdot s^\alpha} \quad (1.72)$$

Lors de la modélisation du comportement réel de ce système, le gain statique  $K$  du modèle incertain est changé dans l'intervalle  $[K_{min}, K_{max}] = [0.2648, 0.4145]$ . La constante du temps  $T$  est variée également dans l'intervalle  $[T_{min}, T_{max}] = [2.5002, 3.3620]$ . De plus, le retard pur  $\theta$  peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle  $[\theta_{min}, \theta_{max}] = [4.3262, 4.9746]$  ainsi que l'ordre fractal  $\alpha$ , qui est porté sur l'opérateur de Laplace, peut être changé dans l'intervalle  $[\alpha_{min}, \alpha_{max}] = [0.6408, 0.8740]$ . Sachant que la synthèse basée sur la commande  $H_\infty$  nécessite a priori le développement d'un modèle linéaire d'ordre entier. Pour cela, le terme  $T \cdot s^\alpha$  est préalablement approximé par un transfert irrationnel d'ordre  $n$  où ses pôles et ses zéros sont obtenus par l'approximation de *Oustaloup*. On aura donc la structure générale ci-dessous:

$$T \cdot s^\alpha = \frac{\prod_{i=1}^n (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (1.73)$$

Le détail de cette approximation sera détaillé en **chapitre 3**. De plus, le terme  $e^{-\theta \cdot s}$  est préalablement approximé par un transfert irrationnel stable d'ordre  $m$  où ses paramètres sont obtenus par la méthode de *Padé*, qui est disponible dans la bibliothèque du *Matlab*. On aura donc la structure générale suivante :

$$e^{-\theta \cdot s} = \frac{1 + \sum_{k=1}^m \left\{ \left( \frac{-\theta \cdot s}{2} \right)^k \frac{1}{k!} \right\}}{1 + \sum_{k=1}^m \left\{ \left( \frac{\theta \cdot s}{2} \right)^k \frac{1}{k!} \right\}} \quad (1.74)$$

Supposons ici que le modèle nominal possède la même structure que celui du modèle incertain. D'où le transfert décrivant ce modèle est donné comme suit :

$$G_n(s) = \frac{K_n \cdot e^{-\theta_n \cdot s}}{1 + T_n \cdot s^{\alpha_n}} \quad (1.75)$$

Où les paramètres  $K_n$ ,  $\theta_n$ ,  $T_n$  et  $\alpha_n$  intervenant dans la construction de ce modèle sont obtenus comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_n = \frac{K_{max}+K_{min}}{2} \\ \theta_n = \frac{\theta_{max}+\theta_{min}}{2} \end{array} \right. , \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} T_n = \frac{T_{max}+T_{min}}{2} \\ \alpha_n = \frac{\alpha_{max}+\alpha_{min}}{2} \end{array} \right. \quad (1.76)$$

De (1.75) et (1.76), la fonction de transfert du modèle nominal est donnée par :

$$G_N(s) = \frac{0.33969 \cdot e^{-4.6504 \cdot s}}{1+2.9312 \cdot s^{0.75747}} \quad (1.77)$$

En tenant compte les deux approximations :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2.9312 \cdot s^{0.75747} = \frac{30.491 \cdot (s+1.136)(s+0.04121)(s+0.001495)}{(s+14.01)(s+0.5082)(s+0.01844)} \\ e^{-4.6504 \cdot s} = \frac{-(s+0.9987)(s^2-1.582 \cdot s+1.195)}{(s+0.9987)(s^2+1.582 \cdot s+1.195)} \end{array} \right. \quad (1.78)$$

On obtient donc un modèle d'ordre 6 présenté par le transfert équivalent ci dessous:

$$G_N(s) = \frac{-0.0107 \cdot (s+14.01)(s-0.998)(s+0.508)(s+0.018)(s^2-1.582 \cdot s+1.195)}{(s+1.404)(s+0.998)(s+0.181)(s+0.016)(s^2+1.582 \cdot s+1.195)} \quad (1.79)$$

Sachant que la synthèse du contrôleur robuste nécessite a priori l'évaluation de toutes les incertitudes de modélisation agissant sur le modèle (1.79). A cet effet, La forme multiplicative est choisie pour prendre en considération la variation susceptible de chaque paramètre du modèle et les approximations nécessaires du retard pur et l'ordre fractal survenant dans le transfert du modèle de synthèse.

Il est à noter que ces incertitudes peuvent fournir une classe des régimes perturbés où chaque régime perturbé peut produire une erreur relative par rapport au modèle nominal de synthèse. L'analyse fréquentielle est donc effectuée par le tracé des lieux des valeurs singulières maximales de ces erreurs dans le plan fréquentiel. Ces dernières sont ensuite majorées par le transfert stable  $W_T(s)$ , qui est choisie par l'utilisateur. Ce transfert permettant de fournir la condition sur  $RS$  du système en boucle fermée.

La Fig.1.17 présente les valeurs singulières maximales de 20 formes d'incertitudes multiplicatives directes en sortie ainsi que les lieux de  $\sigma_{max}[W_T(j\omega)]$  majorant celles-ci.

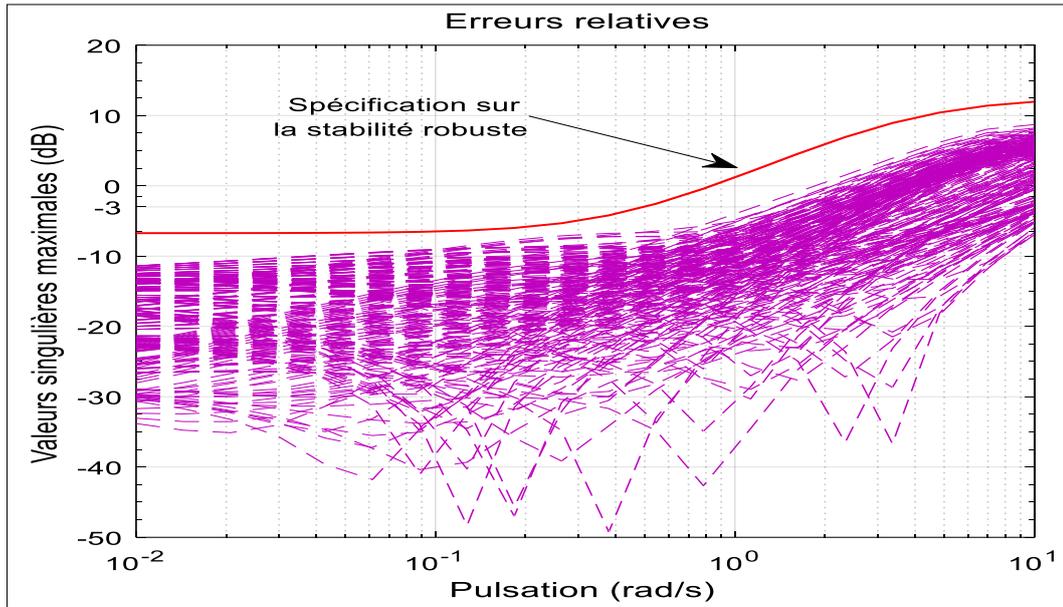


Fig. 1.17. Lieux des valeurs singulières maximales de  $\sigma_{\max}[\Delta_{s_k}(j\omega)]$  et  $\sigma_{\max}[W_T(j\omega)]$

D’après la Fig.1.17, les lieux des valeurs singulières maximales de toutes les incertitudes multiplicatives sont assez faibles dans les basses fréquences, en particulier dans la plage de fréquence  $\omega \in [10^{-2}, 0.91586]$  radians/secondes, là où les performances nominales soient exigées. En revanche, Ces incertitudes deviennent importantes dans les hautes fréquences, là où les dynamiques non linéaires sont négligées. Sachant que la majoration des incertitudes de modélisation est aboutie comme suit :

$$\sigma_{\max}[\Delta_{s_k}(j\omega)] = \sigma_{\max} \left[ \left( G_{p_k}(j\omega) - G_N(j\omega) \right)^{-1} \cdot G_N(j\omega) \right] < \sigma_{\max}[W_T(j\omega)] \quad (1.80)$$

Avec  $k = 1, \dots, 20$  et  $\omega \in [10^{-2}, 10]$  radians/secondes. La spécification qui assure la condition (1.80) est donc donnée par le transfert stable du 1<sup>er</sup> ordre suivant :

$$W_T(s) = \frac{4.2482 \cdot (s+0.4218)}{s+3.891} \quad (1.82)$$

Afin de prendre en compte les spécifications nominales dans la synthèse du contrôleur  $H_\infty$  primaire, on augmente le modèle nominal (1.79) par les gabarits de pondération fréquentielle suivants :

- La contrainte de rejet de perturbation est prise en compte en pondérant le transfert de sensibilité  $S_y(s)$  par le gabarit de pondération fréquentielle  $W_s(s)$  choisie par le transfert stable du 1<sup>er</sup> ordre suivant :

$$W_s(s) = \frac{0.4 \cdot (s+0.15)}{s+6 \cdot 10^{-5}} \quad (1.83)$$

- Cette contrainte s'exprime en imposant au gain de  $W_S(s)$  d'avoir un comportement de type intégrateur en basse fréquence. Le lieu des valeurs singulières maximales de cette pondération est représenté sur la Fig.1.18 comme suit :

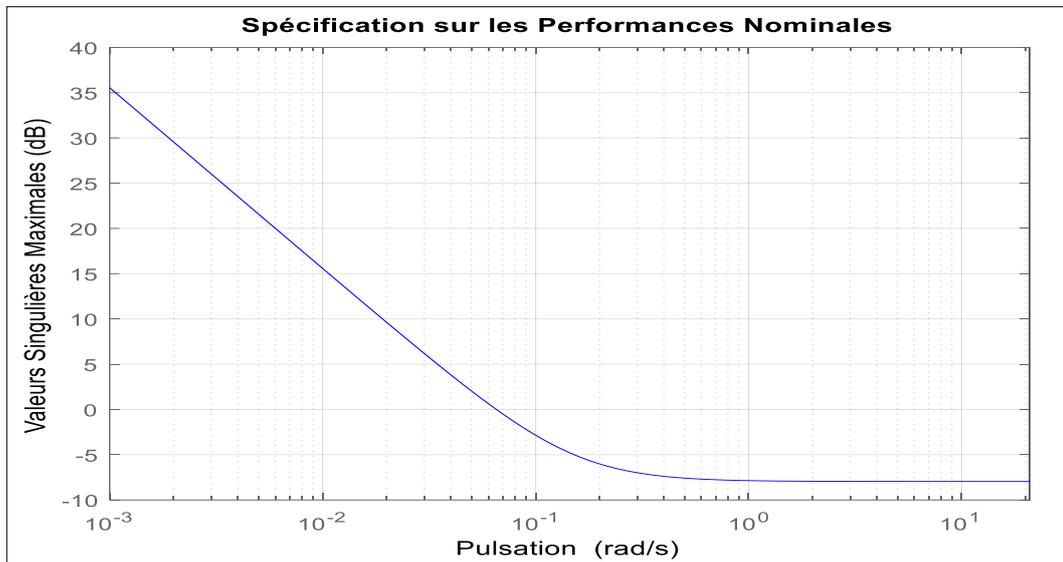


Fig. 1.18. Lieux des valeurs singulières maximales de  $\sigma_{max}[W_S(j\omega)]$

- Les contraintes de robustesse la limitation de l'énergie de commande se traduisent par le gabarit de pondération  $W_U(s)$ , portant sur le transfert de sensibilité  $KS_y$  et dont le lieu des valeurs singulières maximales représenté sur la Fig.1.19 comme suit :

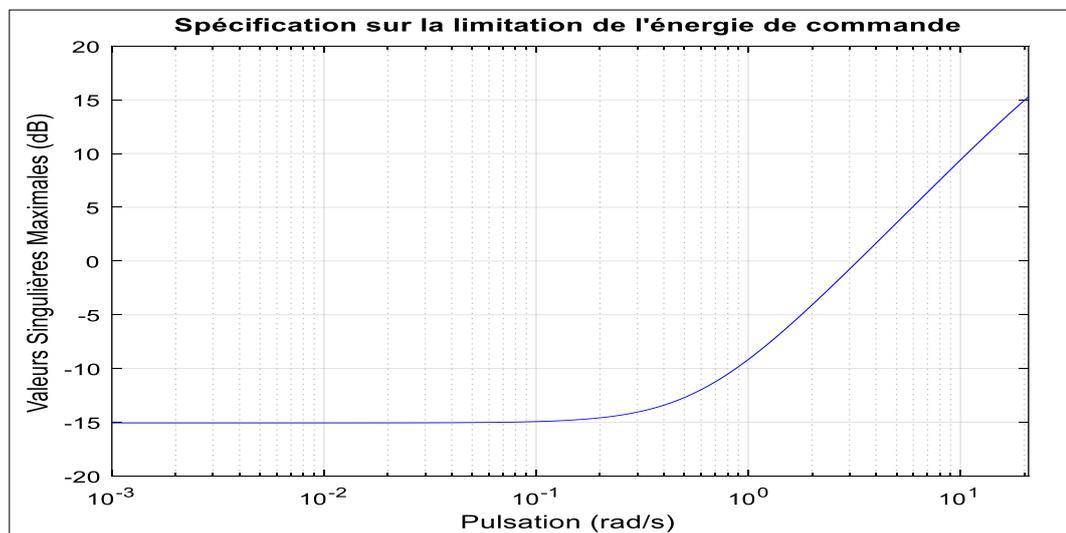


Fig. 1.19. Lieux des valeurs singulières maximales de  $\sigma_{max}[W_U(j\omega)]$

Sachant que la pondération  $W_U(s)$  est choisie comme suit :

$$W_U(s) = \frac{15.152 \cdot (s+0.5883)}{s+50.4} \tag{1.84}$$

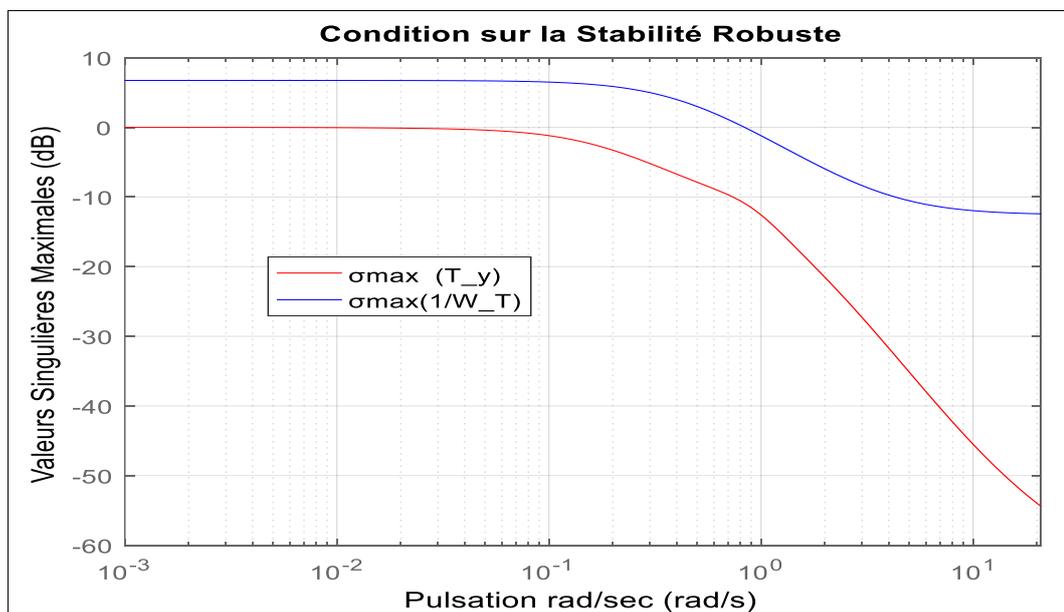
Le système augmenté est obtenu à partir des transferts irrationnels de ces pondérations ainsi que celui du modèle nominal. Le problème de sensibilité pondérée est ensuite formulé dans le

but de satisfaire un bon compromis de robustesse  $NP/RS$  avec une limitation de l'énergie de commande. Ce problème est résolu par la méthode  $H_\infty$  basée sur l'approche  $LMI$ s où sa solution fournit un contrôleur  $H_\infty$  primaire d'ordre 9 et un niveau de performance égal à  $\gamma = 0.945$ .

La représentation d'état de ce contrôleur est finalement convertie sous forme d'un transfert d'ordre entier présenté comme suit :

$$K(s) = \frac{70.35 \cdot (s+50.48)(s+3.89)(s+1.4)(s+0.99)(s+0.18)(s+0.016)(s^2+1.582s+1.195)}{(s+1252)(s+3.85)(s+0.51)(s+0.02)(s+5.9 \cdot 10^{-5})(s^2+0.51s+0.91)(s^2+3.98s+5.58)} \quad (1.85)$$

Par conséquent, La condition sur  $SR$  du système bouclé par le contrôleur  $H_\infty$  primaire est vérifiée dans toute la plage de fréquence  $\omega \in [10^{-2}, 10]$  radians/secondes. La Fig.1.20 représente le lieu des valeurs singulières maximales du transfert de la sensibilité complémentaire  $T_y$  et celui de l'inverse de la spécification sur  $SR$ . A partir de la Fig.1.20, il est très claire de confirmer que la condition  $\sigma_{max}[T_y(j\omega)] < (\sigma_{max}[W_T(j\omega)])^{-1}$ . Ceci est traduit, dans le plan temporel, que la stabilité du système en boucle fermée est garantie pour toutes les perturbations multiplicative sur le fonctionnement nominal du système réel, jusqu'au pire cas des incertitudes du modèle. On obtient donc la Fig.1.20 comme suit :



**Fig. 1.20.** Condition sur  $RS$  du système bouclé par le contrôleur  $H_\infty$  primaire

De plus, La condition sur  $NP$  du système en boucle fermée est vérifiée par le contrôleur  $H_\infty$  primaire et cela en toutes les fréquences qui se situent dans la plage  $\omega \in [10^{-2}, 10]$  radians/secondes. La Fig.1.21 représente le lieu des valeurs singulières maximales de la sensibilité directe  $S_y$ . Ce dernier est comparé par l'inverse de la spécification sur  $NP$ . On obtient :

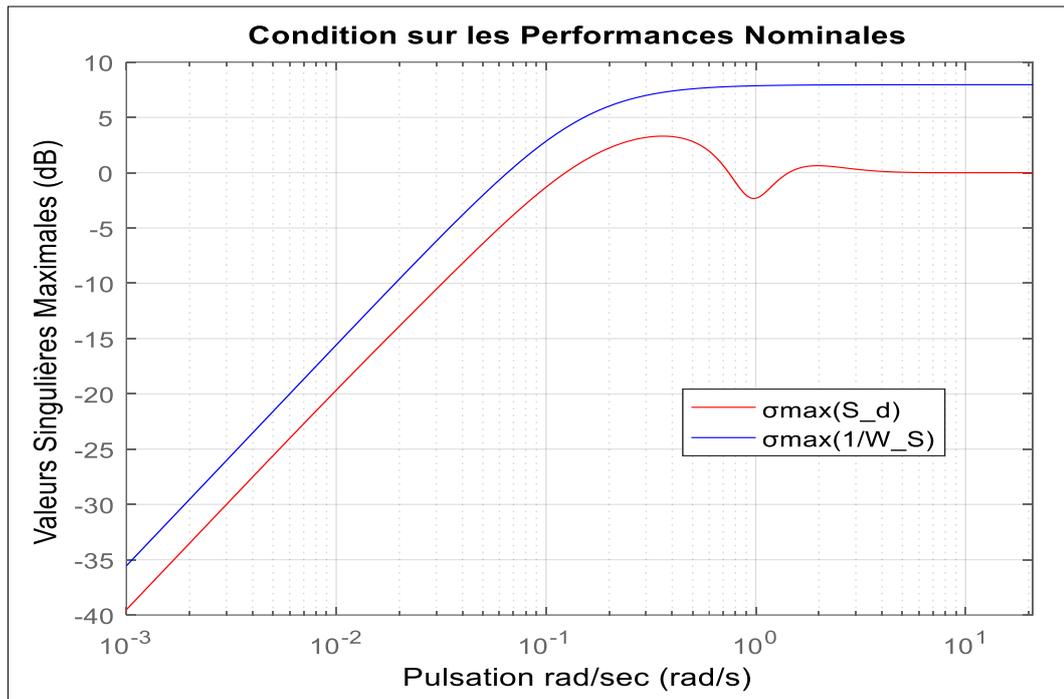


Fig. 1.21. Condition sur NP du système bouclé par le contrôleur  $H_\infty$  primaire

D'après la Fig.1.21, il est très claire de confirmer que la condition  $\sigma_{max}[S_y(j\omega)] < (\sigma_{max}[W_S(j\omega)])^{-1}$ . Ceci est traduit, dans le plan temporel, par l'assuré d'une bonne dynamique de poursuite caractérisée par un bon suivi de la trajectoire de référence dans lequel l'erreur de poursuite est très réduite en régime permanent. De plus, le système bouclé devient insensible aux effets des bruits de mesure et les modes inconnus qui sont négligés lors de la phase de linéarisation du système physique.

Il convient de noter ici que ces performances sont assurées seulement en absence des incertitudes de modélisation. Concernant, maintenant, la limitation de l'énergie de commande, le contrôleur  $H_\infty$  primaire présente l'avantage d'assurer tous les objectifs précédents avec énergie de commande très raisonnable en termes du coût de commande et saturation des actionneurs.

La Fig.1.22 représente le lieu des valeurs singulières maximales de la sensibilité  $K \cdot S_y$  qui est comparé celui de l'inverse de la spécification sur la limitation de l'énergie de commande. On obtient :

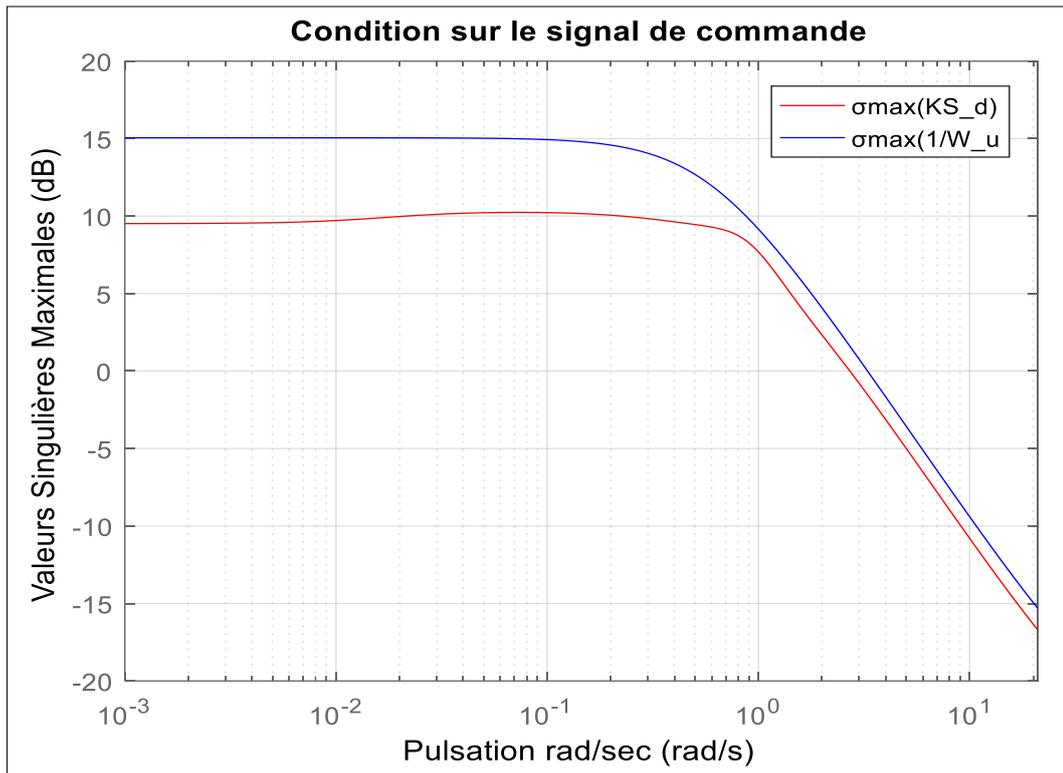


Fig. 1.22. Condition sur la limitation de commande du système bouclé par le contrôleur  $H_\infty$  primaire

D'après la Fig.1.22, il est très claire de confirmer que l'objectif de commande est atteint avec une commande moins coûteuse. Ceci à partir de la vérification de la condition suivante  $\sigma_{\max}[KS_y(j\omega)] < (\sigma_{\max}[W_u(j\omega)])^{-1}$ . La partie suivante à pour but d'examiner est ce que le contrôleur  $H_\infty$  primaire est capable d'assurer un bon compromis de robustesse  $NP\backslash RS$  ou non? A cet effet, nous devons tracer le lieu des valeurs singulières maximales du critère suivant  $\max(\|W_S.S_y\|_\infty, \|W_T.T_y\|_\infty)$  et cela dans toute la plage de fréquence  $\omega \in [10^{-2}, 10]$  radians/secondes. On aura donc la Fig.1.23 :

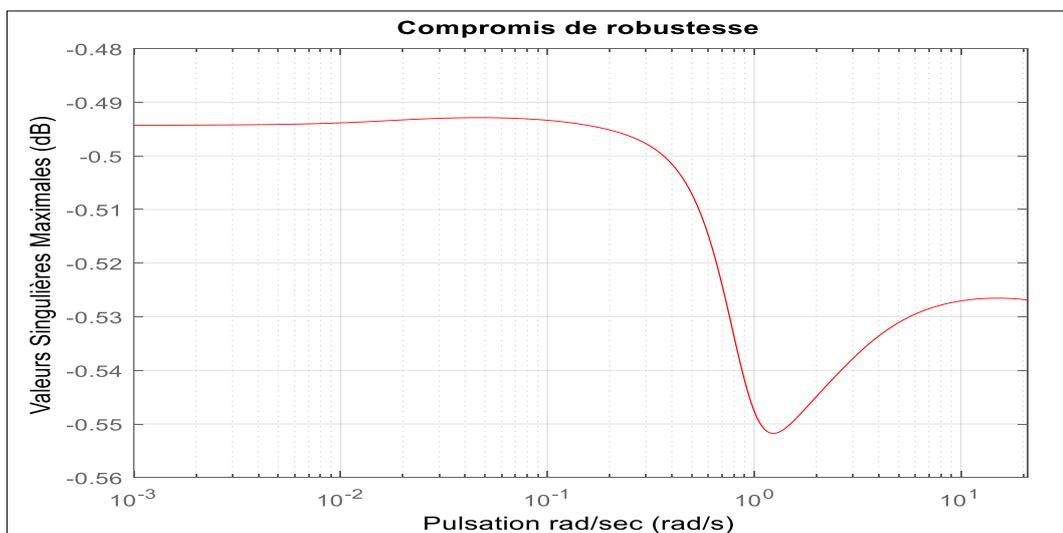
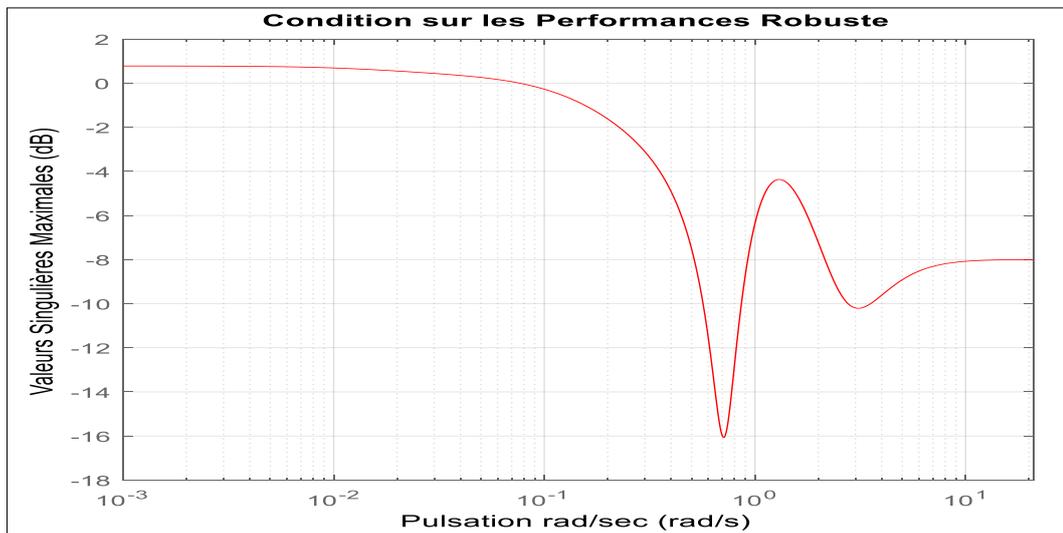


Fig. 1.23. Vérification du compromis de robustesse  $NP\backslash RS$  du système bouclé par le contrôleur  $H_\infty$  primaire

D'après la Fig.1.23, on peut constater que le lieu de  $\sigma_{max} \left[ \max \left( \|W_S \cdot S_y\|_{\infty}, \|W_T \cdot T_y\|_{\infty} \right) \right]$  se situe au dessous de l'unité (i.e.,  $0_{dB}$ ) dans toute la plage de fréquence  $[10^{-2}, 10]$  radians/secondes. Ceci peut nous confirmer que la synthèse par la méthode  $H_{\infty}$  basée sur l'approche  $LMI$ s s'avère très efficace pour résoudre ce genre des problèmes. L'objectif de la suite de ce travail est de vérifier est-ce que ce contrôleur est capable de conserver les performances observées précédemment en présence des incertitudes de modélisation? Pour cela, on doit tracer le lieu de la condition la plus rigoureuse que celle du compromis de robustesse  $NP \setminus RS$ . C'est la condition  $RP$  qu'on doit la vérifier à travers le tracé du lieu des valeurs singulières maximales du critère suivant  $\left( \|W_S \cdot S_y\|_{\infty} + \|W_T \cdot T_y\|_{\infty} \right)$ . On aura donc la Fig.1.24 :



**Fig. 1.24.** Vérification de la condition  $RP$  du système bouclé par le contrôleur  $H_{\infty}$  primaire

D'après la Fig.1.24, on peut voir nettement la violence de la condition  $RP$  dans les basses fréquences, en particulier dans la plage  $[10^{-2}, 0.0761]$  radians/secondes. Ceci se traduit, dans le plan temporel, par la détérioration des performances du système corrigé à cause des effets des incertitudes de modélisation.

Dans la suite de ce travail, nous allons présenter les réponses temporelles du système corrigé en présence 192 régimes perturbés avec lesquels on a pu tracer toutes les erreurs relatives présentées dans la Fig.1.17. A cet effet, la boucle de commande présentée par le schéma bloc de la Fig.1.11 est excitée par les trois entrées exogènes suivantes : la première entrée représente la référence (à suivre) imposée sous forme d'un échelon unitaire. Cette entrée est appliquée au long de l'intervalle du temps  $t \in [0, 450 * T_e]$  secondes avec le pas de discrétisation  $T_e = 0.15$  secondes. La deuxième entrée représente la perturbation amenant en sortie de modèle de synthèse. Elle est imposée sous forme d'un échelon d'amplitude 0.25 (i.e., 25% de l'entrée de

référence) appliqué à partir de l'instant du temps  $t = \frac{250}{T_e}$  secondes. La dernière entrée représente le signal des bruits de mesures caractérisé par la valeur moyenne nulle et la variance  $Var = 0.01$ . Ce signal est appliqué à l'instant du temps  $t = \frac{300}{T_e}$  secondes. La Fig.1.25 représente les sorties globales fournies par 192 régimes perturbés. En revanche, la Fig.1.26 représente la partie transitoire des réponses indicielles fournies par le contrôleur  $H_\infty$  primaire.



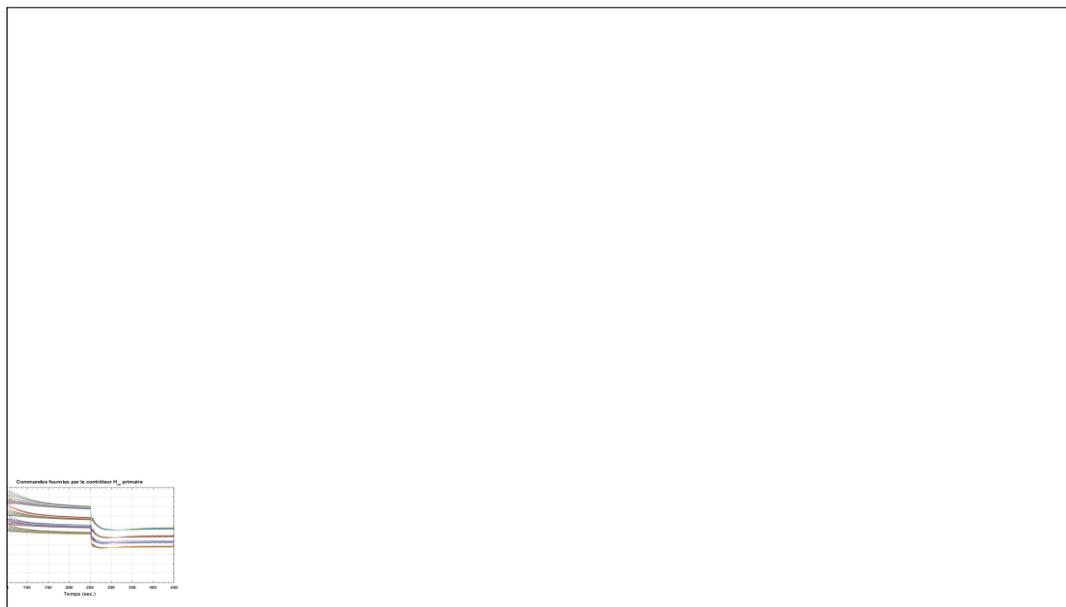
**Fig. 1.25.** Sorties fournies par le contrôleur  $H_\infty$  primaire pour 192 régimes perturbés.

D'après la Fig.1.25, on peut remarquer clairement que la dynamique de poursuite de la trajectoire de référence est assurée par la présence des erreurs statiques avant l'excitation par la perturbation  $d_y$  et après l'injection du signal des bruits de mesure. De plus, la réponse fournie par le pire des régimes perturbés est caractérisée par un temps de montée égal à  $t_m = \frac{26.33}{T_e}$  secondes, un temps de réponse égal à  $t_{r_{5\%}} = \frac{150}{T_e}$  secondes, et un dépassement maximal égal à  $D_{max} = 12\%$  (voir la Fig.1.26).



**Fig. 1.26.** Agrandissement de la partie transitoire de la dynamique de poursuite fournie par le contrôleur  $H_\infty$  primaire pour 192 régimes perturbés.

La Fig.1.27 représente les commandes assurant les sorties globales citées précédemment. On obtient :



**Fig. 1.27.** Commandes fournies par le contrôleur  $H_\infty$  primaire pour 192 régimes perturbés.

D'après la Fig.1.27, on peut remarquer que toutes les commandes fournies par le contrôleur  $H_\infty$  primaire sont insensibles aux effets des bruits de mesure en régime stationnaire. En revanche, le pire cas de ces commandes peut atteindre un pic  $u_{max} = 4.92$  en régime transitoire.

### 1.7. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les notions théoriques de base utilisées lors de la synthèse du contrôleur  $H_\infty$  primaire. Ce dernier est appliqué sur les systèmes physiques

modélisés par des modèles incertains. Nous avons également classé les différents types d'incertitudes agissant sur le modèle de synthèse. L'analyse fréquentielle de ces incertitudes à donner la possibilité de fournir la spécification sur la stabilité robuste du système en boucle fermée. Cela est assuré au moyen du théorème du faible gain. Sachant que l'inverse de cette spécification permet de limiter l'évolution des valeurs singulières maximales de la sensibilité complémentaire dans le plan fréquentiel. A cet effet, la condition sur la stabilité robuste est assurée à partir d'une satisfaction d'une inégalité fournie par cette pondération. Parallèlement, une autre condition sur les performances nominales est nécessaire lors de la synthèse du contrôleur robuste. Cette condition dépend du choix d'une pondération où son inverse permet de limiter les valeurs singulières maximales de la sensibilité directe du système corrigé. De plus, une autre condition de robustesse doit être prise en considération lors de la synthèse du contrôleur robuste. C'est la condition assurant un coût réduit de la commande ainsi que la non-saturation des actionneurs de la boucle. La vérification de ces trois conditions de robustesse est impossible dans la même plage de fréquence. C'est pour cette raison qu'on doit chercher à réaliser un compromis de robustesse dans des fréquences bien déterminées. Ce compromis est ensuite formulé sous forme d'un problème appelé « problème de sensibilité pondérée » et sa solution optimale est assurée par deux algorithmes avec lesquels la commande  $H_\infty$  peut fournir la représentation d'état du contrôleur  $H_\infty$  primaire. Ce dernier a été utilisé pour la commande d'un système hydraulique simulant le fonctionnement d'un canal à surface libre. Le comportement réel de ce système a été modélisé par un modèle incertain comportant un terme d'ordre non entier et un retard pur. L'analyse des incertitudes est effectuée via le choix de la forme multiplicative et l'objectif de la commande réside dans la satisfaction de plusieurs conditions de robustesse, en particulier celle de  $RP$ . Les résultats de simulation montrent que le choix de la méthode  $H_\infty$  utilisant l'approche  $LMI$ s est très utile quand il s'agit de satisfaire un bon compromis de robustesse entre  $RS/NP$ . Par contre, la robustesse sur les performances robustes est très difficile à aboutir par le choix des pondérations irrationnelles fixes. C'est pour cette raison qu'on doit les remplacer par d'autres pondérations plus flexibles et ajustables. La sélection de ces dernières doit être assurée via un algorithme d'optimisation et la combinaison de ce dernier avec la commande  $H_\infty$  peut améliorer la qualité de commande fournie par le contrôleur à synthétiser. Cette amélioration faisant donc l'objet du chapitre suivant.

**CHAPITRE 2 :**  
**COMMANDE ROBUSTE UTILISANT**  
**LES PONDÉRATIONS IRRATIONNELLES**  
**AJUSTABLES**

## Chapitre 2

# Commande robuste utilisant les pondérations irrationnelles ajustables

---

### 1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons présenter une solution alternative qui peut être améliorée les performances fournies par la commande  $H_\infty$  basée sur les pondérations irrationnelles fixes. Cette solution sera basée sur l'algorithme génétique lors de la synthèse du contrôleur  $H_\infty$  robustifié. Cet algorithme permettra de fournir la sélection automatique des pondérations irrationnelles possédant des paramètres ajustables optimisés préalablement par l'algorithme génétique. Cette optimisation sera fondée sur la satisfaction de quelques règles de réglage qui existent déjà dans la littérature. Ces dernières seront après utilisées pour augmenté le modèle nominal de synthèse afin de produire le système augmenté qui avec lequel on pourra ressortir le problème de sensibilité pondérée en utilisant la transformation linéaire fractionnaire. Ce problème sera résolu par la méthode  $H_\infty$  basée sur l'un des deux algorithmes cités en premier chapitre dont la solution optimale permettra de fournir la représentation d'état du contrôleur robuste assurant la mise à jour du contrôleur  $H_\infty$  primaire. Ces étapes seront se réitérent en tant que la condition sur  $RP$  n'est pas satisfaite.

Il est à noter que la satisfaction de la condition sur  $RP$  dépend fortement du respect des règles directrices existantes. Ceci permet de transformer le problème de la sélection automatique des pondérations irrationnelles ajustables en un problème d'optimisation sous contraintes dans lequel les paramètres optimaux de ces pondérations peuvent être situés dans un espace de recherche, ce qui est imposé par des limites inférieure et supérieure contraignant la solution optimale souhaitée. Sachant que la fonction de fitness du problème d'optimisation sous contrainte représente la condition  $RP$ . Le processus de minimisation garantissant par l'algorithme génétique maximisera donc les marges de robustesse sur  $RS$ ,  $NP$  et  $RS \setminus NP$ , ce qui améliorera ultérieurement la marge de robustesse sur  $RP$ . Ceci faisant l'objet de ce chapitre.

Il est nécessaire de mentionner que les ordres de poids ajustables irrationnels sont des inconnues entières. Sachant que l'algorithme génétique a l'avantage d'optimiser ce type de variables. Pour cette raison, la robustification demandée utilisera cet algorithme pour sélectionner automatiquement les pondérations requises pour satisfaire la condition sur  $RP$ . Finalement, ce chapitre sera achevé par une partie de simulation dans laquelle les performances

fournies par le contrôleur  $H_\infty$  robustifié seront comparées, dans les plans fréquentiel et temporel, avec celles fournies par le contrôleur  $H_\infty$  primaire cité en premier chapitre.

### 2.1. Règles de réglage des pondérations irrationnelles ajustables

En général, la synthèse du contrôleur  $H_\infty$  robustifié à partir des pondérations irrationnelles ajustables nécessite *a priori* la connaissance de l'impact des signaux d'entrées exogènes sur la boucle de commande. Pour cela, nous devons définir les différentes sensibilités fournies par le système bouclé. A cet effet, le schéma de la Fig.2.1 permet de définir les expressions de ces sensibilités à partir des entrées exogènes agissant sur l'entrée et la sortie du modèle de synthèse [34, 55]. On obtient donc :

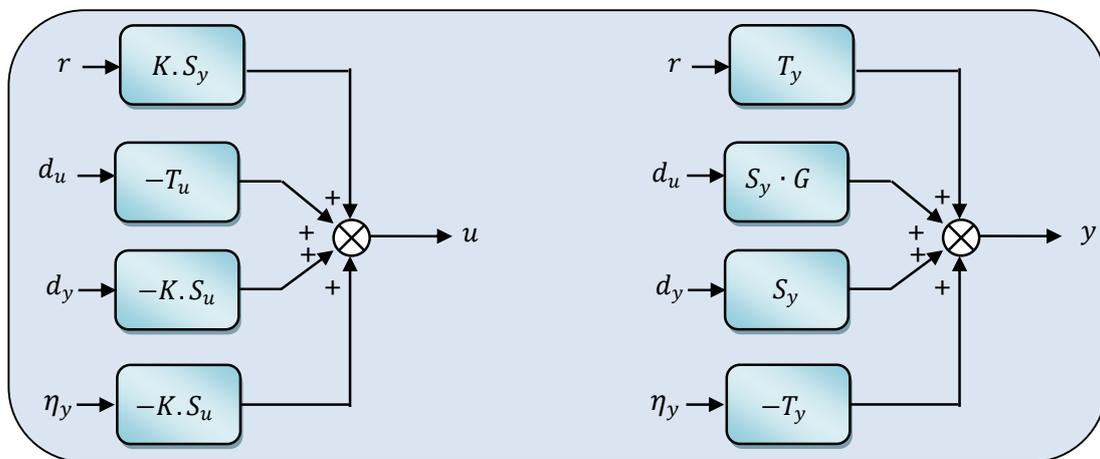


Fig.2.1. Les différentes fonctions de sensibilités fournies par le système bouclé

D'après la Fig.2.1, il est clair de remarquer que l'entrée et la sortie du modèle de synthèse sont liées par les entrées exogènes via six sensibilités qu'à partir desquelles on distingue deux classes des performances, à savoir : les performances d'entrée et les performances de sortie.

#### a. Performances d'entrée :

Elles représentent l'impact des signaux d'entrées exogènes sur le signal de commande et c'est pour cette raison que la satisfaction de ces performances est conditionnée par la vérification des conditions de robustesse ci-dessous :

- Le lieu de  $\sigma_{max}[K(j\omega) \cdot S_y(j\omega)]$  doit être minimisé dans toute la plage de fréquence. Ceci permet d'éviter la saturation des actionneurs et éviter la détérioration des instruments de mesure installés dans la commande.
- Le lieu de  $\sigma_{max}[K(j\omega) \cdot S_u(j\omega)]$  doit être minimisé afin de réduire l'effet des bruits de mesure  $\eta_y$  sur le signal de commande, notamment en haute fréquence. Ceci permet d'assurer

une bonne atténuation de l'effet des incertitudes sur la commande, en particulier celles de type multiplicatives non structurées.

- Le lieu de  $\sigma_{max}[S_u(j\omega)]$  doit être minimisé afin de rejeter l'effet de la perturbation  $d_u$  sur le signal de commande.

**b. Performances de sortie:**

Elles représentent l'impact des signaux d'entrées exogènes sur le signal de sortie du système en boucle fermée. A cet effet, Ces performances sont assurées si le contrôleur robuste à synthétiser à la capacité de fournir les propriétés ci-dessous :

- Un bon suivi de la trajectoire de référence  $r$  qui peut être assuré quand le lieu de  $\sigma_{max}[T_y(j\omega)]$  est faible dans tout la plage de fréquence ;
- Un bon rejet de la perturbation  $d_y$  qui peut être assuré si le lieu de  $\sigma_{max}[S_y(j\omega)]$  est assez faible dans tout la plage de fréquence ;
- Une bonne suppression de l'effet de la perturbation  $d_u$  sur la sortie  $y$ , qui peut être aboutie si le lieu de  $\sigma_{max}[S_y(j\omega).G(j\omega)]$  est faible dans toute la plage de fréquence ;
- Une bonne atténuation de l'effet des bruits de mesures  $\eta_y$  et l'effet des modes négligés en haute fréquence, qui sont garanties si lieu de  $\sigma_{max}[T_y(j\omega)]$  est faible dans toute la plage de fréquence ;

A partir de ces conditions, le choix des gabarits limitant ces sensibilités peuvent être effectué comme suit :

**2.1.1. Sélection du gabarit limitant le lieu de  $\sigma_{max}[T_y(j\omega)]$ :**

En général, la limitation du lieu de  $\sigma_{max}[T_y(j\omega)]$  est indispensable pour sécuriser le système bouclé contre les effets des bruits de mesure et les dynamiques négligées en haute fréquence [34, 55] . L'amélioration de la marge de robustesse sur  $RS$  est donc liée directement par le choix adéquat de la pondération irrationnelle ajustable  $W_T(s)$ . En effet, ses paramètres optimaux doivent être optimisés de tel sort que le lieu des valeurs singulières maximales de son inverse est toujours se situe au dessous de la sensibilité complémentaire souhaité  $T_y(s)$ . Par conséquent, la forme idéale de cette sensibilité peut être aboutie si le lieu de  $\sigma_{max}[T_y(j\omega)]$  est s'abaissé autant que possible en haute fréquence [56-58], puis il s'acroit progressivement jusqu'à l'unité (i.e., 0 dB) en basse fréquence. Cette dernière doit être assurée en fonction de la décroissance de la pulsation  $\omega$ . La Fig.2.2 représente l'allure désirée de  $\sigma_{max}[T_y(j\omega)]$  anisi que le gabarit fréquentiel correspondant  $(\sigma_{max}[W_T(j\omega)])^{-1}$ . On obtient :

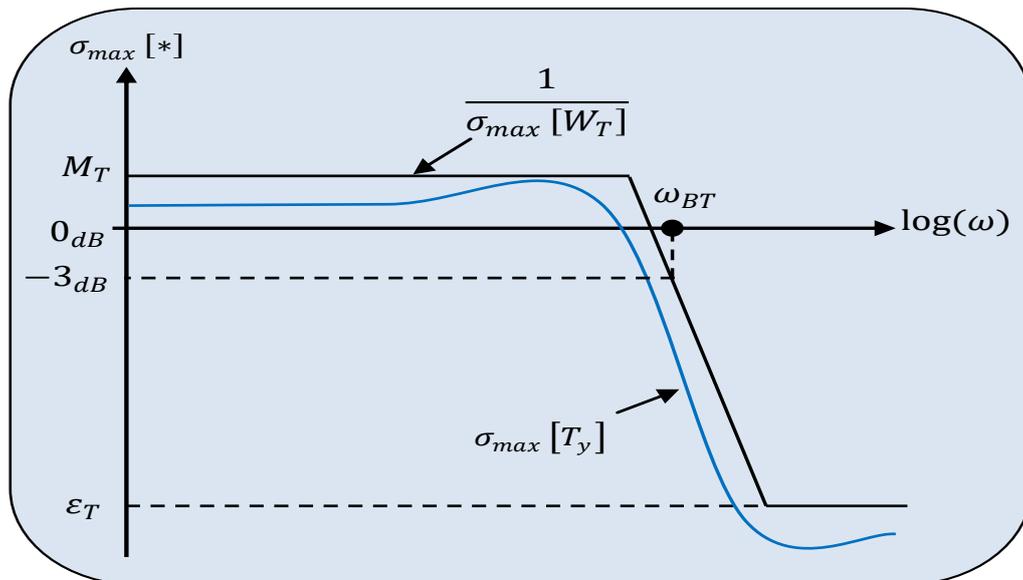


Fig.2.2. Forme désirée de  $\sigma_{max}[T_y]$  comparée avec celle de  $(\sigma_{max}[W_T])^{-1}$

En général, le transfert complexe définissant la pondération  $W_T(s)$  est donné par [34] :

$$W_T(s) = \left( \frac{\frac{s}{\omega_{BT}} + \frac{1}{n\sqrt{M_T}}}{\frac{n\sqrt{\epsilon_T}}{\omega_{BT}}s + 1} \right)^n \quad (2.1)$$

Sachant que :

- $M_T \in \mathbb{R}^{**}$  : représente le gain maximal de  $\sigma_{max}[W_T(j\omega)]$  obtenu en basse fréquence ;
- $\epsilon_T \in \mathbb{R}^{**}$  : représente le gain minimal de  $\sigma_{max}[W_T(j\omega)]$  obtenu en haute fréquence ;
- $\omega_{BT} \in \mathbb{R}^{**}$  : représente la pulsation où le gain de  $\sigma_{max}[W_T(j\omega)] = -3dB$  ;
- $n \in \mathbb{N}^{**}$  : représente l'ordre entier de la pondération  $W_T(s)$ .

En général, la pondération fixe  $W_{T_0}(s)$  est systématiquement obtenue via la majoration de toutes les incertitudes multiplicatives non structurées. En conséquence, les paramètres de cette pondération sont ainsi obtenus pour définir les limites supérieure et inférieure contraignant les paramètres de la pondération irrationnelle ajustable souhaité. Nous verrons plus tard comment choisir chaque paramètre de cette pondération souhaitée de telle sorte que la marge RS puisse être bien améliorée.

- **Choix du gain maximal  $M_T$  :**

En général, le gain maximal  $M_T$  représente souvent le pire cas à atteindre par le lieu de  $\sigma_{max}[T_y(j\omega)]$  en basse fréquence. Il est exprimé par l'équation (2.2) ci-dessous:

$$M_T = \|T_y\|_{\infty} = \max_{\omega \in \mathbb{R}^{**}} (\sigma_{max}[T_y(j \cdot \omega_{min})]) \quad (2.2)$$

De l'équation (2.2), Il est nécessaire de décroître le paramètre  $M_T$  autant que possible. Ceci permet d'apparaître des pics néanmoins faible dans le lieu de  $\sigma_{max}[T(j\omega)]$ . En général, le choix de ce paramètre est souvent effectué de telle sorte que la marge du gain  $MG$  et celle de la phase  $MP$  du système en boucle ouverte doivent satisfaire les deux conditions ci-dessous [34]:

$$\begin{cases} MG \geq 1 + \frac{1}{M_T} \\ MP \geq 2 \arcsin\left(\frac{1}{2M_T}\right) \end{cases} \quad (2.3)$$

Dans la théorie de la commande robuste, le paramètre mentionné précédemment est souvent choisi dans l'intervalle  $M_T \in [1.25, 2.75]$ .

- **Choix du gain minimal  $\varepsilon_T$  :**

En général, il est préférable de mettre le gain minimal  $\varepsilon_T$  égal à zéro. Ceci permet de réduire l'influence des bruits de mesure sur la sortie du système bouclé notamment en haute fréquence. En revanche, le choix de  $\varepsilon_T = 0$  est pratiquement impossible à cause des conditionnements numériques imposées dans la méthode  $H_\infty$  et c'est pour cette raison qu'on doit le choisir comme suit [59]:

$$0 \approx \varepsilon_T \ll M_T \quad (2.4)$$

- **Sélection de la pulsation  $\omega_{BT}$  :**

En général, il est préférable de translater cette pulsation  $\omega_{BT}$  graduellement vers les basses fréquences et cela pour élargir, au maximum possible, la plage de fréquence dans laquelle le lieu de  $\sigma_{max}[T_y(j\omega)]$  soit faible. Cette translation permet d'améliorer le filtrage des bruits de mesure et désensibiliser également le système corrigé dans le cas de présence des dynamiques non linéaires négligées lors de la phase de linéarisation du comportement réel du système physique à commander.

- **Choix de l'ordre entier  $n$  :**

L'augmentation de l'ordre entier  $n$  survenant dans la puissance du transfert complexe  $W_s(s)$  permet d'assurer l'amélioration de la marge de robustesse sur  $RS$  [34]. Ce choix conduit à accentuer la pente du lieu de  $\sigma_{max}[T_y(j\omega)]$  de l'ordre de  $20 \times n \text{ dB/décades}$  en basse fréquence. En revanche, si ce paramètre s'accroît fortement et plus que nécessaire, la marge de sécurité du  $NP$  peut être considérablement dégradée, ce qui se détériore la condition de robustesse sur les performances nominales et s'affaiblit, par conséquent, les deux marges de robustesse  $RS/NP$  et  $RP$  du système bouclé.

2.1.2. Sélection du gabarit limitant le lieu de  $\sigma_{max}[S_y(j\omega)]$  :

Comme nous l'avons signalé auparavant que, pour synthétiser un correcteur robuste, il faut tout d'abord choisir un gabarit fréquentiel dans lequel l'évolution du lieu de  $\sigma_{max}[S_y(j\omega)]$  doit être limitée dans toute la plage de fréquence [34,55]. Ce choix est en général effectué sur les paramètres de la pondération irrationnelle ajustable  $W_S(s)$ . Sachant que l'inverse de cette pondération fourni l'allure souhaitée du lieu de  $\sigma_{max}[S_y(j\omega)]$ . La forme idéale de ce gabarit est donc choisie telle que la pente du lieu de  $\sigma_{max}[S_y(j\omega)]$  soit inclinée autant que possible, et surtout en basse fréquence, puis elle s'acroit progressivement jusqu'à l'unité (i.e., 0dB) en haute fréquence et cela en fonction de la croissance de la pulsation  $\omega$ . A cet effet, la Fig.2.3 représente l'allure désirée de  $\sigma_{max}[S_y(j\omega)]$  ainsi que le gabarit imposée par le lieu de  $(\sigma_{max}[W_S(j\omega)])^{-1}$ . On obtient :

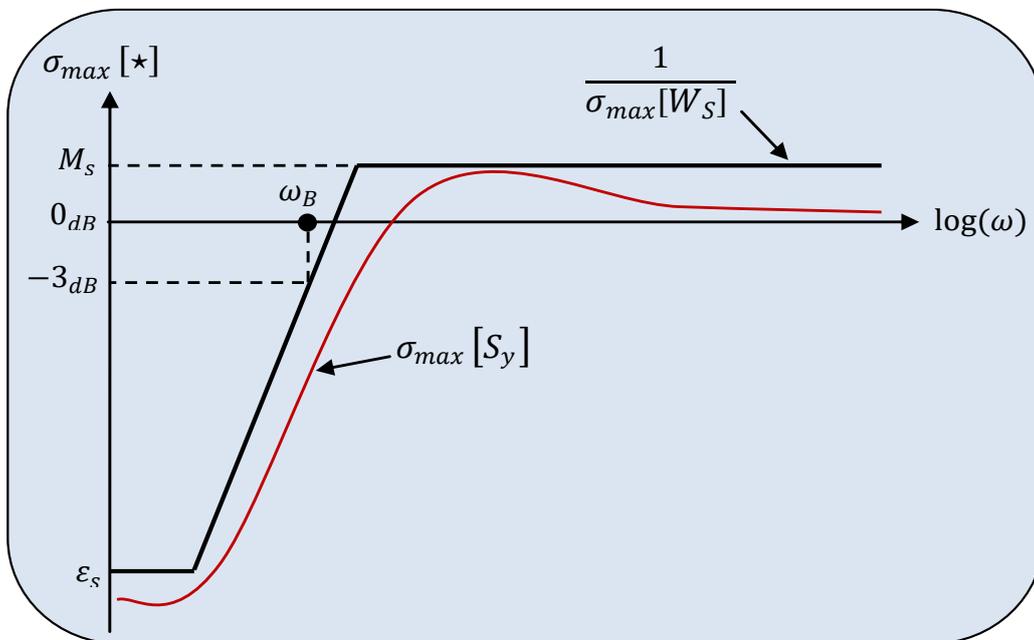


Fig.2.3. Forme désirée de  $\sigma_{max}[S_y]$  comparée avec celle de  $(\sigma_{max}[W_S])^{-1}$

En général, le transfert complexe définissant la pondération irrationnelle ajustable  $W_S(s)$  peut être s'exprimé par [34]:

$$W_S(s) = \left( \frac{\frac{s}{m\sqrt{M_S}} + \omega_B}{s + \omega_B \cdot \frac{m\sqrt{\epsilon_S}}{m\sqrt{M_S}}} \right)^m \tag{2.5}$$

Sachant que :

- $M_S \in \mathbb{R}^{*+}$  : représente le gain maximal de  $\sigma_{max}[W_S(j\omega)]$  obtenu en haute fréquence ;
- $\epsilon_S \in \mathbb{R}^{*+}$  : représente l'erreur de poursuite (i.e., gain minimal) fournie en basse fréquence ;
- $\omega_B \in \mathbb{R}^{*+}$  : représente la pulsation dans laquelle le gain de  $\sigma_{max}[W_S(j\omega)] = -3dB$  ;

- $m \in \mathbb{N}^{*+}$  : représente l'ordre entier de la pondération  $W_s(s)$ .

Les paramètres méconnus de cette pondération peuvent être choisis comme suit :

- **Choix du gain maximal  $M_S$ :**

En général, le gain maximal  $M_S$  représente le pire cas à atteindre par le lieu de  $\sigma_{max}[S_y(j\omega)]$ .

Il est s'exprimé par l'expression suivante:

$$M_S = \|S_y\|_{\infty} = \max_{\omega \in \mathbb{R}^{*+}} (\sigma_{max}[S_y(j \cdot \omega_{max})]) \quad (2.6)$$

De l'équation (2.6), Il est nécessaire de diminuer le paramètre  $M_T$  autant que possible, ce qui permet de tolérer l'apparition d'un pic de résonance admissible dans le lieu de  $\sigma_{max}[S_y(j\omega)]$ . En général, le choix de ce paramètre est souvent effectué de telle sorte que la marge du gain  $MG$  et celle de la phase  $MP$  du système en boucle ouverte doivent satisfaire les deux inégalités ci-dessous [34]:

$$\begin{cases} MG \geq \frac{M_S}{M_S-1} \\ MP \geq 2 \arcsin\left(\frac{1}{2M_S}\right) \end{cases} \quad (2.7)$$

Dans la théorie de la commande robuste, le paramètre susmentionné est souvent choisi dans l'intervalle  $M_S \in [1.5, 2.75]$ . Ce choix permet d'apparaître des pics plus ou moins admissibles dans le lieu de  $\sigma_{max}[S_y(j\omega)]$ .

- **Choix du gain minimal  $\varepsilon_S$ :**

Dans le cas idéal, du gain minimal  $\varepsilon_S$  est souvent choisi nul. Ceci permet d'avoir une erreur de poursuite assez faible notamment en régime permanent. En revanche, dans le but d'éviter le problème de division sur zéro lors du calcul du système augmenté, il est indispensable de choisi  $\varepsilon_S$  très faible devant le paramètre  $M_S$ . Ceci se traduit par l'inégalité suivante [59]:

$$0 \approx \varepsilon_S \ll M_S \quad (2.8)$$

- **Choix de la pulsation  $\omega_B$  :**

En général, le choix de la pulsation  $\omega_B$  peut influencer directement sur la bande passante du système corrigé. A cet effet, il est plus pratique de translater cette pulsation toujours vers les hautes fréquences de telle sorte qu'elle devrait être inférieure à la pulsation  $\omega_{BT}$ . Il convient de noter que l'augmentation progressive de la pulsation  $\omega_B$  peut assurer les avantages ci-dessous:

- ✓ Un rejet rapide de l'effet des incertitudes multiplicatives non structurées;
- ✓ Une bonne dynamique de poursuite de la trajectoire de référence.

- **Choix de l'ordre entier  $m$ :**

L'augmentation de l'ordre entier  $m$  survenant dans la puissance du transfert complexe de la pondération  $W_s(s)$  permet d'assurer une bonne amélioration de la dynamique de rejection des perturbations [34]. Elle assure également d'une atténuation de l'ordre de  $20 \times m$  dB/décades dans la pente du lieu de  $\sigma_{max}[S_y(j\omega)]$  en basse fréquence.

En revanche, plus  $m$  est s'accroît plus que nécessaire, la robustesse de  $SR$  se dégrade en haute fréquence ce qui peut affaiblir d'un côté, la marge du compromis de robustesse  $RS/NP$  et d'un autre côté, il peut fournir une violence de la condition sur  $RP$  du système bouclé.

### 2.1.3. Sélection du gabarit limitant le lieu de $\sigma_{max}[K(j\omega) \cdot S_y(j\omega)]$ :

D'après la Fig.2.1, il est clair que la commande fournie par le contrôleur  $H_\infty$  robustifié est obtenue comme suit [55]:

$$u = K \cdot S_y \cdot (r - n - d_u) - T_y \cdot d_y \quad (2.9)$$

Dans la plupart des méthodes de synthèse, l'objectif est d'assurer une commande très raisonnable de point de vue coût de réalisation et effort de commande. L'objectif de la modération de la commande permet, d'un côté, d'éviter la saturation des actionneurs et provoquer leur destruction. D'un autre côté, il permet de limiter la bande passante du contrôleur et atténuer le gain d'énergie du signal de commande notamment en haute fréquence.

Sachant que la réalisation de cet objectif est directement liée par l'amélioration de la marge de robustesse de la condition imposée sur la limitation de l'énergie de commande. C'est pour cette raison qu'on doit effectuer un bon choix sur la pondération irrationnelle ajustable  $W_U(s)$ .

Il convient à noter que l'amélioration requise de cette marge de robustesse nécessitant que le gabarit fréquentiel imposé par lieu de  $\sigma_{max}[W_U(j\omega)]^{-1}$  devient pratiquement similaire de celui imposé par le lieu de  $\sigma_{max}[W_T(j\omega)]^{-1}$ . A cet effet, la forme idéale de cette pondération exige que le lieu de  $\sigma_{max}[K(j\omega) \cdot S_y(j\omega)]$  soit très faible en haute fréquence et stationnaire (plate) autant que possible en basse fréquence.

Par conséquent, la Fig.2.4 représente l'allure souhaitée de cette sensibilité qui est comparée avec celle imposée par le lieu de  $(\sigma_{max}[W_U(j\omega)])^{-1}$ . On obtient :

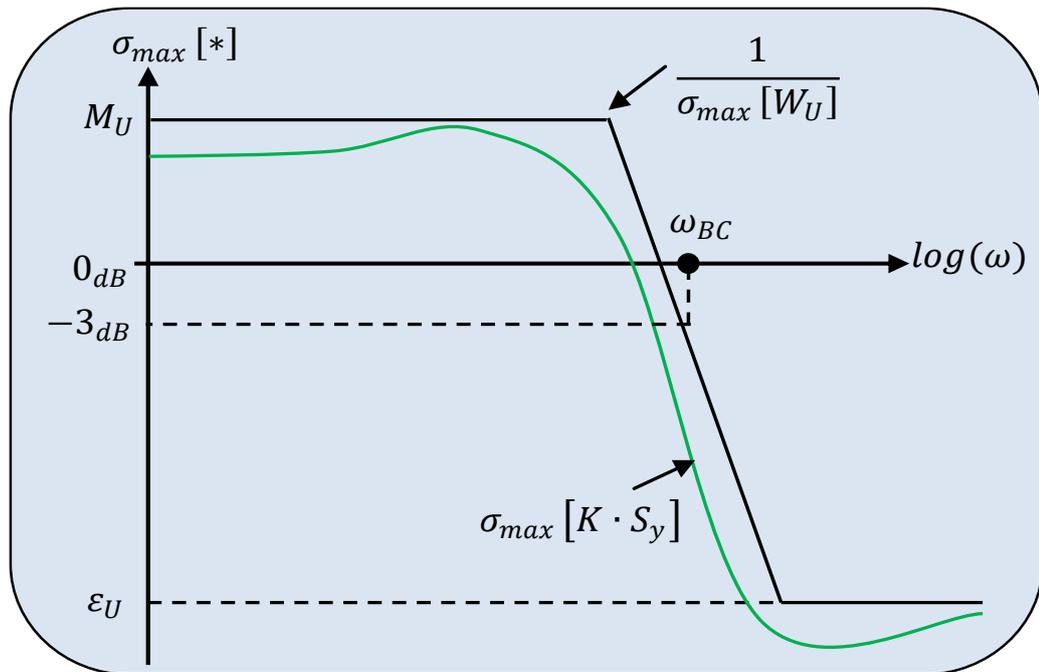


Fig.2.4. Forme désirée de  $\sigma_{max}[K \cdot S_y]$  comparée avec celle de  $(\sigma_{max}[W_U])^{-1}$

En général, le transfert complexe définissant la pondération  $W_U(s)$  est donné par :

$$W_U(s) = \left( \frac{\frac{s}{\omega_{BC}} + \frac{1}{\sqrt{M_U}}}{\frac{\sqrt{\epsilon_U}}{\omega_{BC}} \cdot s + 1} \right)^v \quad (2.10)$$

Sachant que :

- $M_U \in \mathbb{R}^{**}$  : représente le gain maximal de  $\sigma_{max}[W_U(j\omega)]$  fourni à la pulsation  $\omega = \omega_{min}$  ;
- $\epsilon_U \in \mathbb{R}^{**}$  : représente le gain minimal de  $\sigma_{max}[W_U(j\omega)]$  fourni à la pulsation  $\omega = \omega_{max}$  ;
- $\omega_{BC} \in \mathbb{R}^{**}$  : représente la pulsation dans laquelle le gain de  $\sigma_{max}[W_U(j\omega)] = -3dB$  ;
- $v \in \mathbb{N}^{**}$  : représente l'ordre entier de la pondération  $W_U(s)$ .

Les paramètres méconnus de cette pondération peuvent être choisis comme suit :

- **Choix du gain maximal  $M_U$ :**

En tenant compte la relation suivante:

$$M_u = \|K \cdot S_y\|_{\infty} = \max_{\omega \in \mathbb{R}^{**}} (\sigma_{max}[K(\omega) \cdot S_y(\omega)]) \quad (2.11)$$

Sachant que  $M_u$  donne une information pertinente sur le coût admissible du signal de commande, il est donc aisé de le réduire autant que possible afin que le contrôleur robustifié puisse produire des commandes économiques d'un point de vue pratique.

- **Choix du gain minimal  $\varepsilon_U$ :**

Le choix de  $\varepsilon_U = 0$  permet de palier l'influence des bruits de mesure sur le système bouclé en haute fréquence. En revanche, pour des raisons pratiques, ce paramètre est choisi comme étant négligeable devant le gain maximal de  $W_U(s)$ . Ce choix est traduit par la vérification de la contrainte ci-dessous :

$$0 \approx \varepsilon_U \ll M_U \quad (2.12)$$

- **Choix de la pulsation  $\omega_{BC}$  :**

En général, il est préférable de translater la pulsation  $\omega_{BC}$  vers les basses fréquences tout en satisfaisant la contrainte  $\omega_{BC} < \omega_{BC}$ . Ceci qui permet d'assurer une stationnarité prolongée du lieu de  $\sigma_{max}[K(\omega).S_y(\omega)]$  dans un large bande comportant les basses fréquences. Cela permet, d'un côté, de fournir une meilleure limitation de l'effet des bruits de mesure avant la pulsation  $\omega_{BC}$ . Il permet, d'un autre côté de réduire l'effet des incertitudes de modélisation après cette pulsation. Par conséquent, on obtient un compromis de robustesse appelé « *Roll – Off* »

- **Choix de l'ordre entier  $\nu$  :**

L'augmentation de l'ordre entier  $\nu$  survenant dans le transfert de la pondération  $W_U(s)$  à pour but de synthétiser un contrôleur  $H_\infty$  robustifié assurant des commandes plus réduites en comparaison avec celles fournies par le contrôleur  $H_\infty$  primaire. En revanche, l'augmentation de ce paramètre plus que nécessaire peut facilement détériorer le compromis de robustesse *NP/RS* ce qui implique une violence de la condition de robustesse sur *RP*.

#### 2.1.4. Sélection du gabarit limitant le lieu de $\sigma_{max}[S_y(s)G(s)]$ :

A partir de la Fig.2.1, il est clair de remarquer que la sensibilité  $S_y(s)G(s)$  représente le transfert entre la perturbation d'entrée et la sortie du système bouclé [55]. Il convient à noter que l'influence de cette perturbation devienne considérable notamment en basse fréquence. Dans le cas où l'énergie de cette entrée est importante, il est indispensable de l'atténuer dans cette plage de fréquence afin de réduire autant que possible l'effet des bruits agissant sur la sortie du contrôleur robustifié. En général, la forme la plus simple utilisée pour cette pondération est souvent définie par un gain d'atténuation présélectionné par l'utilisateur. Par contre, dans certaines d'autres méthodes de synthèse, l'allure du gabarit fréquentiel décrivant l'inverse de cette pondération peut être schématisé suivant la Fig.2.5 dans laquelle l'allure de la sensibilité souhaitée est imposée de telles sortes que ses valeurs singulières maximales doivent être toujours se situés au-dessous de celles fournies par le gabarit suscité. On obtient donc :

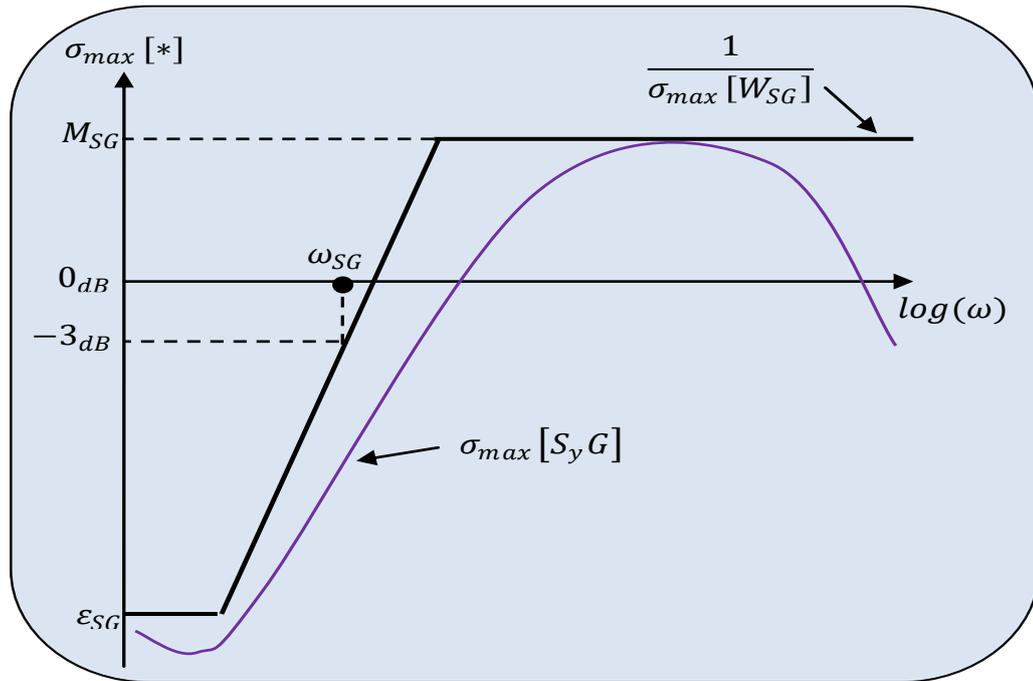


Fig.2.5. Forme désirée de  $\sigma_{max}[S_y \cdot G]$  comparée avec celle de  $(\sigma_{max}[W_{SG}])^{-1}$

En général, le transfert irrationnel décrivant la pondération  $W_{SG}(s)$  est donné comme suit :

$$W_{SG}(s) = \left( \frac{\frac{s}{\sqrt{l} M_{SG}} + \omega_{SG}}{s + \omega_{SG} \sqrt{l} \epsilon_{SG}} \right)^l \quad (2.13)$$

Sachant que :

- $M_{SG} \in \mathbb{R}^{**}$  : est le gain maximal de  $\sigma_{max}[W_{SG}(j\omega)]$  fourni en haute fréquence ;
- $\epsilon_{SG} \in \mathbb{R}^{**}$  : est le gain minimal de  $\sigma_{max}[W_{SG}(j\omega)]$  fourni en basse fréquence ;
- $\omega_{SG} \in \mathbb{R}^{**}$  : est la pulsation fournie lorsque  $\sigma_{max}[W_U(j\omega)] = -3dB$  ;
- $l \in \mathbb{N}^{**}$  : est l'ordre entier de la pondération  $W_{SG}(s)$ .

Les paramètres de cette pondération doivent être choisis de manière convenable sinon, la commande du système bouclé peut devenir très fluctuante. Le choix de cette pondération est généralement similaire que celui proposé pour la pondération  $S_y(s)$ .

## 2.2. Sélection automatique des pondérations irrationnelles ajustables:

En général, le choix manuel des paramètres intervenant dans les transferts des quatre pondérations précédentes peut poser un problème sérieux [36, 60], en particulier lors du développement d'un modèle généralisé approprié qui assurant la synthèse du contrôleur robustifié avec lequel toutes les conditions à savoir  $NP$ ,  $RS$ ,  $NP/RS$  et  $RP$  sont satisfaites. Dans ce qui est suit, nous allons proposer une méthode assurant la sélection automatique des ces

pondération en utilisant l'algorithme génétique GA [61, 62, 63, 64,65]. Cet algorithme à pour but d'optimiser les paramètres de chaque pondération cité précédemment tout en assurant les formes souhaitées qui sont présentées par la Fig.2.6. On obtient :

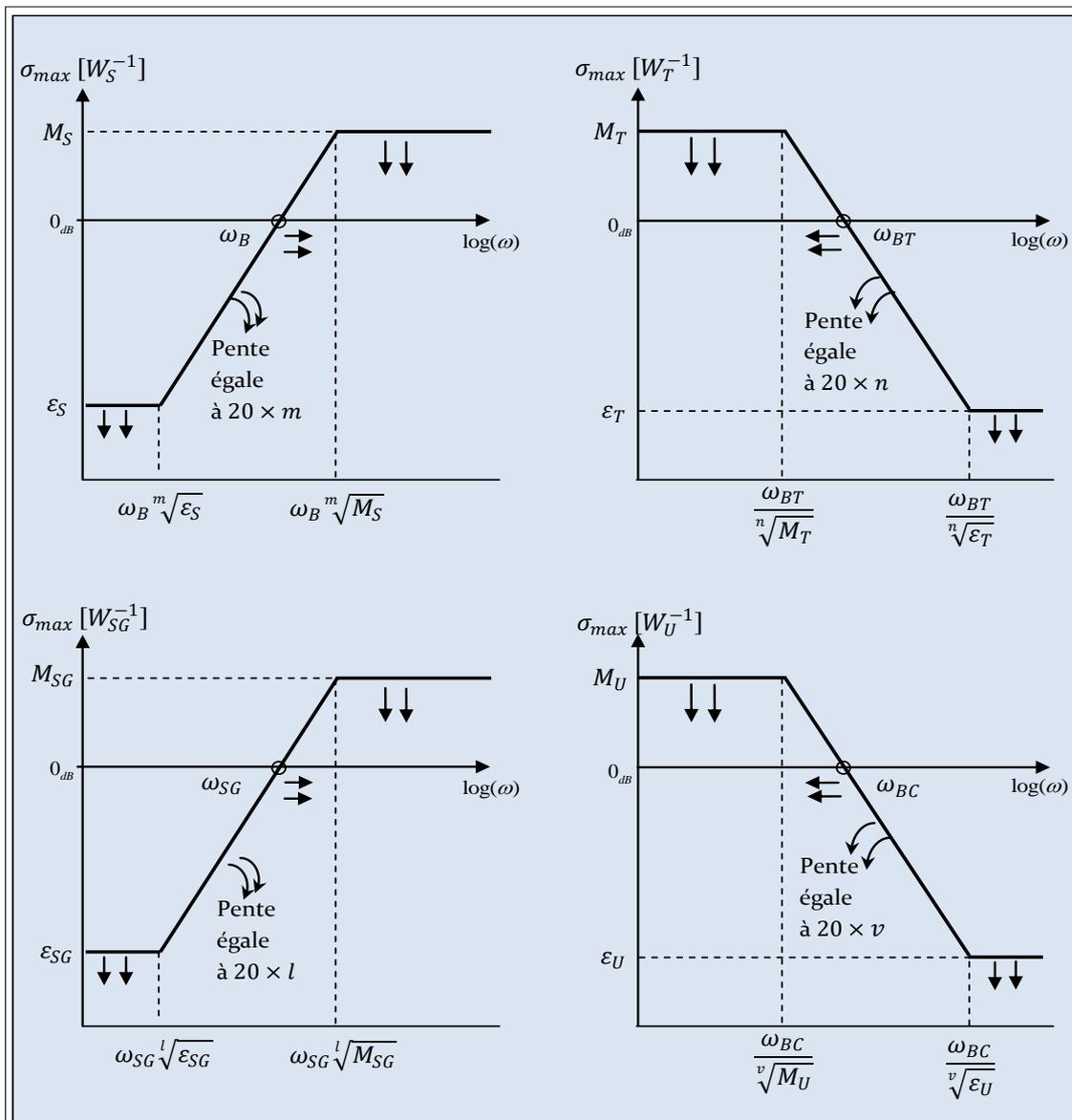


Fig.2.6. Allures souhaitées assurant la formulation du problème de la sélection automatique des pondérations

### 2.2.1. Règles de réglage assurant la sélection automatique des pondérations souhaitées :

Dans cette partie, nous allons citer quelques règles de réglages existant dans la littérature. Ces dernières sont inspirées à partir des quatre formes idéales présentées dans la Fig.2.6. D'où, on peut envisager cinq règles qu'à partir desquelles on peut définir l'espace de recherche du problème d'optimisation qui assure cette sélection automatique. On aura donc les règles suivantes :

- La désensibilisation du système bouclé aux effets des entrées exogènes nécessitant l'atténuation des maximas  $M_S$ ,  $M_T$ ,  $M_U$  et  $M_{SG}$ . Ce qui produit une minimisation de pire cas (*worst case* en anglais) de chaque lieu de sensibilité.

- L'amélioration de la marge de robustesse nécessitant l'atténuation des minimas  $\varepsilon_S$ ,  $\varepsilon_T$ ,  $\varepsilon_U$  et  $\varepsilon_{SG}$ . En effet, la réduction de  $\varepsilon_S$  et  $\varepsilon_{SG}$  doit être assurée en basse fréquence, tandis que la réduction de  $\varepsilon_T$  et  $\varepsilon_U$  doit être assurée en haute fréquence.

- L'amélioration souhaitée impose la translation des deux pulsations  $\omega_B$  et  $\omega_{SG}$  vers les hautes fréquences dans lesquelles l'effet des incertitudes de modélisation et celui des bruits sur la commande sont importants. La translation des deux pulsations précédentes à donner la possibilité d'accentuer autant que possible les deux pentes de  $\sigma_{max}[S_y]$  et  $\sigma_{max}[S_y G]$  respectivement et cela dans une large zone située en basse fréquence.

- L'amélioration souhaitée impose également la translation des deux pulsations  $\omega_{BT}$ ,  $\omega_{BC}$  vers les basses fréquences dans lesquelles l'influence des bruits de mesure sur le système bouclé ainsi que la réduction de l'énergie de commande sont importantes en régime permanent.

- L'augmentation des ordres entiers à savoir :  $m$ ,  $n$ ,  $v$  et  $l$  est indispensable dans les transferts irrationnels  $W_S(s)$ ,  $W_T(s)$ ,  $W_U(s)$  et  $W_{SG}(s)$  respectivement. Cette étape doit être effectuée avec précaution, car l'augmentation de l'un des ordres dans une bande de fréquence peut influencer sur l'autre ordre dans l'autre bande de fréquence.

La Fig.2.7 et la Fig.2.8 représentent graphiquement les conditions de robustesse du système bouclé avant et après la robustification du contrôleur  $H_\infty$  primaire respectivement. On aura donc :

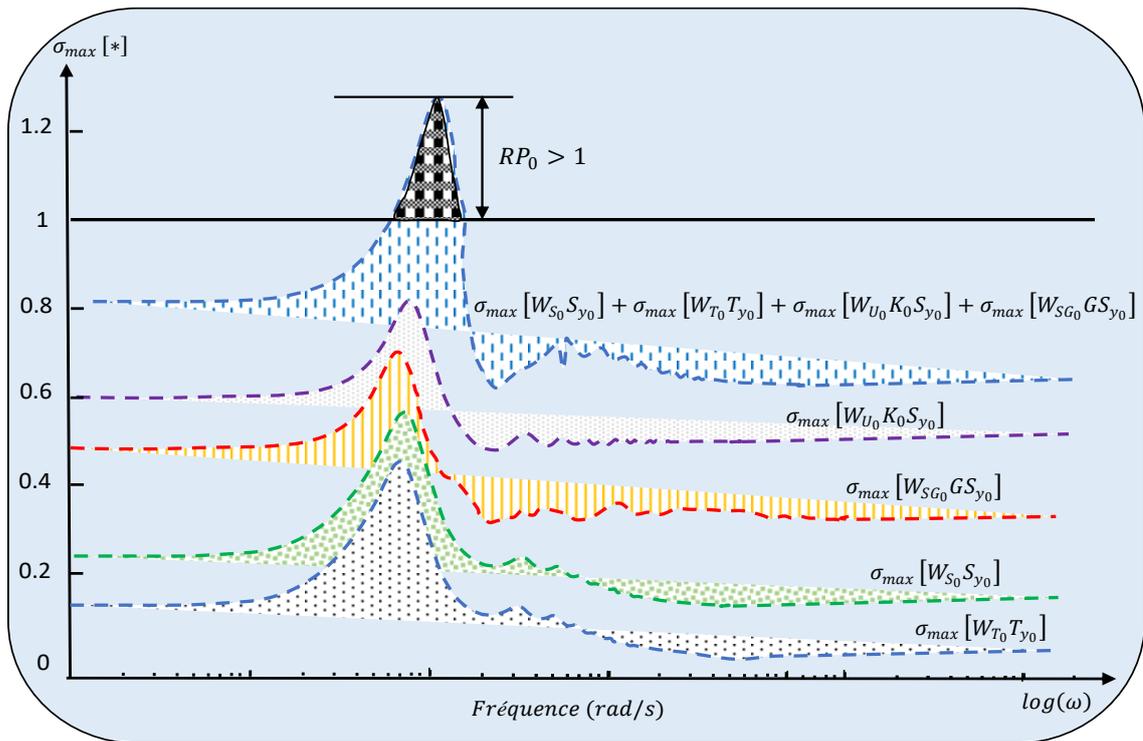


Fig.2.7 représentation des conditions de robustesse avant la phase de la robustification proposée

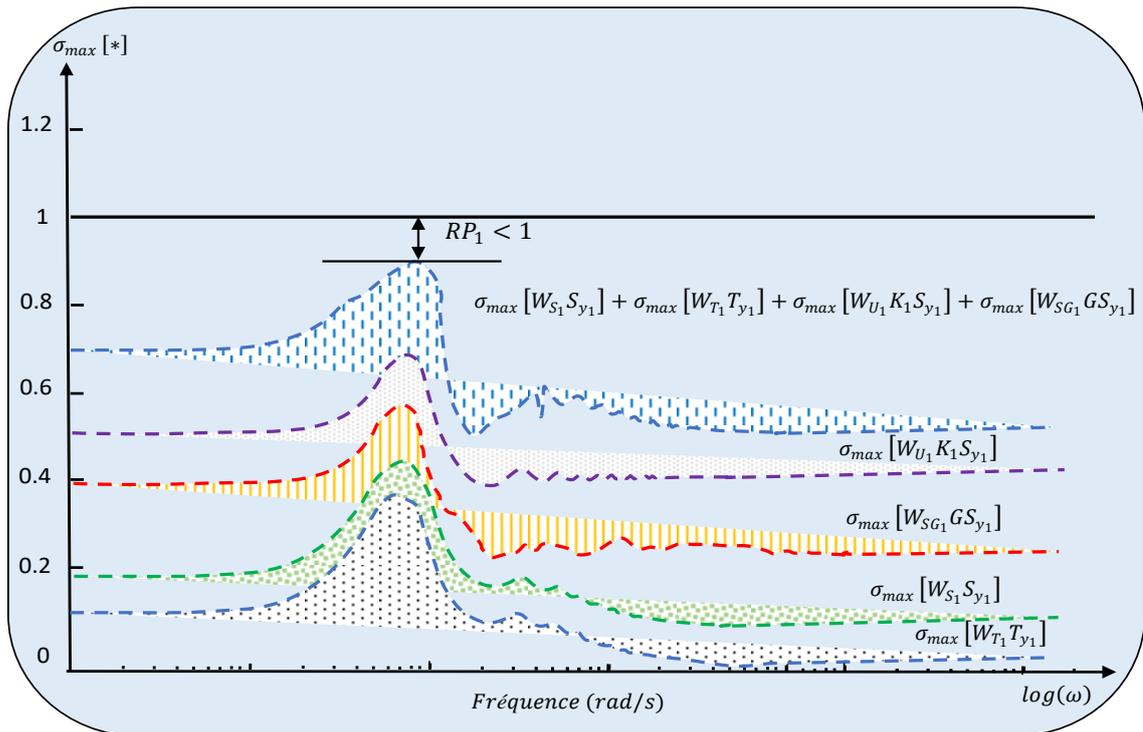


Fig.2.8 représentation des conditions de robustesse après la phase de la robustification proposée

**2.2.2. Formulation du problème d’optimisation sous contraintes :**

Dans la suite de ce chapitre, nous allons exploiter les cinq règles de réglage, citées précédemment, afin de déterminer l’espace de recherche dans lequel on cherchera à l’ensemble des paramètres optimaux construisant les pondérations irrationnelles souhaitées. Ce dernier est

présenté par des limites inférieures et supérieures limitant les solutions possibles du problème. Parmi ces solutions, on doit satisfaire la condition *RP* via la recherche à des pondérations adéquates fournissant, avec le modèle nominal, le développement du système augmenté approprié. Sachant que la formulation du problème de robustification s'articulera *a priori* sur la définition de la fonction objective ainsi que l'espace de faisabilité des solutions possibles assurant la sélection automatique des pondérations. Le paragraphe ci-dessous présentera les différentes contraintes imposées dans ce problème d'optimisation.

Supposons que les pondérations irrationnelles fixes (i.e., pondérations initiales) citée du premier chapitre sont notées comme suit :

- $W_{S_0}(s)$ , en tenant compte ses paramètres :  $M_{S_0}$ ,  $\varepsilon_{S_0}$ ,  $\omega_{B_0}$  et  $m_0$  (2.14)

- $W_{T_0}(s)$ , en tenant compte ses paramètres :  $M_{T_0}$ ,  $\varepsilon_{T_0}$ ,  $\omega_{BT_0}$  et  $n_0$  (2.15)

- $W_{U_0}(s)$ , en tenant compte ses paramètres :  $M_{U_0}$ ,  $\varepsilon_{U_0}$ ,  $\omega_{BC_0}$  et  $\nu_0$  (2.16)

- $W_{SG_0}(s)$ , en tenant compte ses paramètres :  $M_{SG_0}$ ,  $\varepsilon_{SG_0}$ ,  $\omega_{SG_0}$  et  $l_0$  (2.17)

Supposons maintenant que les pondérations irrationnelles ajustables sont notées comme suit :

- $W_{S_1}(s)$ , en tenant compte ses paramètres :  $M_{S_1}$ ,  $\varepsilon_{S_1}$ ,  $\omega_{B_1}$  et  $m_1$  (2.18)

- $W_{T_1}(s)$ , en tenant compte ses paramètres :  $M_{T_1}$ ,  $\varepsilon_{T_1}$ ,  $\omega_{BT_1}$  et  $n_1$  (2.19)

- $W_{U_1}(s)$ , en tenant compte ses paramètres :  $M_{U_1}$ ,  $\varepsilon_{U_1}$ ,  $\omega_{BC_1}$  et  $\nu_1$  (2.20)

- $W_{SG_1}(s)$ , en tenant compte ses paramètres :  $M_{SG_1}$ ,  $\varepsilon_{SG_1}$ ,  $\omega_{SG_1}$  et  $l_1$  (2.21)

D'où, l'espace de recherche du problème d'optimisation peut être construit, pour chaque pondération présentée par la Fig.2.6, par :

➤ Pour la pondération  $W_{S_1}(s)$ , ses paramètres doivent être limités comme suit :

- $M_{S_1} \in [M_{S_{min}}; M_{S_{max}}]$ , sachant que  $\begin{cases} M_{S_{min}} = \varphi_{M_S} \cdot M_{S_0} \\ M_{S_{max}} = M_{S_0} \\ 0 < \varphi_{M_S} \ll 1 \end{cases}$  (2.22)

- $\varepsilon_{S_1} \in [\varepsilon_{S_{min}}; \varepsilon_{S_{max}}]$ , sachant que  $\begin{cases} \varepsilon_{S_{min}} = \varphi_{\varepsilon_S} \cdot \varepsilon_{S_0} \\ \varepsilon_{S_{max}} = \varepsilon_{S_0} \\ 0 < \varphi_{\varepsilon_S} \ll 1 \end{cases}$  (2.23)

- $\omega_{B_1} \in [\omega_{B_{min}}; \omega_{B_{max}}]$ , sachant que  $\begin{cases} \omega_{B_{min}} = \omega_{B_0} \\ \omega_{B_{max}} = \varphi_{\omega_B} \cdot \omega_{B_0} \\ 1 < \varphi_{\omega_B} < \frac{\omega_{BT_0}}{\omega_{B_0}} \end{cases}$  (2.24)

$$\bullet m_1 \in [m_{min}; m_{max}], \text{ sachant que } \begin{cases} m_{min} = m_0 \\ m_{max} = m_0 + \varphi_m \\ \varphi_m \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (2.25)$$

➤ Pour la pondération  $W_{T_1}(s)$ , ses paramètres doivent être limités comme suit :

$$\bullet M_{T_1} \in [M_{T_{min}}; M_{T_{max}}], \text{ sachant que } \begin{cases} M_{T_{min}} = \varphi_{M_T} \cdot M_{T_0} \\ M_{T_{max}} = M_{T_0} \\ 0 < \varphi_{M_T} \ll 1 \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\bullet \varepsilon_{T_1} \in [\varepsilon_{T_{min}}; \varepsilon_{T_{max}}], \text{ sachant que } \begin{cases} \varepsilon_{T_{min}} = \varphi_{\varepsilon_T} \cdot \varepsilon_{T_0} \\ \varepsilon_{T_{max}} = \varepsilon_{T_0} \\ 0 < \varphi_{\varepsilon_T} \ll 1 \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\bullet \omega_{BT_1} \in [\omega_{BT_{min}}; \omega_{BT_{max}}], \text{ sachant que } \begin{cases} \omega_{BT_{min}} = \varphi_{\omega_{BT}} \cdot \omega_{BT_0} \\ \omega_{BT_{max}} = \omega_{BT_0} \\ 0 < \varphi_{\omega_{BT}} \ll 1 \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\bullet n_1 \in [n_{min}; n_{max}], \text{ sachant que } \begin{cases} n_{min} = n_0 \\ n_{max} = n_0 + \varphi_n \\ \varphi_n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (2.29)$$

➤ Pour la pondération  $W_{U_1}(s)$ , ses paramètres doivent être limités comme suit :

$$\bullet M_{U_1} \in [M_{U_{min}}; M_{U_{max}}], \text{ sachant que } \begin{cases} M_{U_{min}} = \varphi_{M_U} \cdot M_{U_0} \\ M_{U_{max}} = M_{U_0} \\ 0 < \varphi_{M_U} \ll 1 \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\bullet \varepsilon_{U_1} \in [\varepsilon_{U_{min}}; \varepsilon_{U_{max}}], \text{ sachant que } \begin{cases} \varepsilon_{U_{min}} = \varphi_{\varepsilon_U} \cdot \varepsilon_{U_0} \\ \varepsilon_{U_{max}} = \varepsilon_{U_0} \\ 0 < \varphi_{\varepsilon_U} \ll 1 \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\bullet \omega_{BC_1} \in [\omega_{BC_{min}}; \omega_{BC_{max}}], \text{ sachant que } \begin{cases} \omega_{BC_{min}} = \varphi_{\omega_{BC}} \cdot \omega_{BC_0} \\ \omega_{BC_{max}} = \omega_{BC_0} \\ 0 < \varphi_{\omega_{BC}} \ll 1 \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\bullet v_1 \in [v_{min}; v_{max}], \text{ sachant que } \begin{cases} v_{min} = v_0 \\ v_{max} = v_0 + \varphi_v \\ \varphi_v \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (2.33)$$

➤ Pour la pondération  $W_{SG_1}(s)$ , ses paramètres doivent être limités comme suit :

$$\bullet M_{SG_1} \in [M_{SG_{min}}; M_{SG_{max}}], \text{ sachant que } \begin{cases} M_{SG_{min}} = \varphi_{M_{SG}} \cdot M_{SG_0} \\ M_{SG_{max}} = M_{SG_0} \\ 0 < \varphi_{M_{SG}} \ll 1 \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\bullet \varepsilon_{SG_1} \in [\varepsilon_{SG_{min}}; \varepsilon_{SG_{max}}], \text{ sachant que } \begin{cases} \varepsilon_{SG_{min}} = \varphi_{\varepsilon_{SG}} \cdot \varepsilon_{SG_0} \\ \varepsilon_{SG_{max}} = \varepsilon_{SG_0} \\ 0 < \varphi_{\varepsilon_{SG}} \ll 1 \end{cases} \quad (2.35)$$

$$\bullet \omega_{SG_1} \in [\omega_{SG_{min}}; \omega_{SG_{max}}], \text{ sachant que } \begin{cases} \omega_{SG_{min}} = \omega_{SG_0} \\ \omega_{SG_{max}} = \varphi_{\omega_{SG}} \cdot \omega_{SG_0} \\ 1 < \varphi_{\omega_{SG}} < \frac{\omega_{BT_0}}{\omega_{SG_0}} \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\bullet l_1 \in [l_{min}; l_{max}], \text{ sachant que } \begin{cases} l_{min} = l_0 \\ l_{max} = l_0 + \varphi_l \\ \varphi_l \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (2.37)$$

Nous rappelons ici que l'objectif de cette partie s'articulé sur l'amélioration de la robustesse  $RP$  tout en assurant la sélection automatique appropriée de toutes les pondérations irrationnelles ajustables citées précédemment. Pour cela, on doit commencer d'abord par la synthèse du contrôleur  $H_\infty$  primaire à partir des pondérations irrationnelles fixes (initiales). On fait ressortir la marge initiale  $RP_0$ . Ensuite, on fait un appel à l'algorithme génétique pour optimiser les paramètres des pondérations irrationnelles ajustables souhaitées. Ces dernières sont ensuite utilisées avec le modèle nominal pour calculer le système augmenté correspondant avec lequel le problème de sensibilité pondérée est formulé par  $LFT_\ell$ . Après, on fait un appel à la méthode  $H_\infty$  pour résoudre ce problème, on obtient par conséquent, la représentation d'état du nouveau contrôleur  $H_\infty$ . La nouvelle marge de robustesse, notée  $RP_1$ , est ensuite calculer à partir de ce contrôleur puis la comparée avec  $RP_0$ . Ces étapes sont réitérées à chaque itération  $k$  et l'algorithme s'arrête si la condition  $RP_{k+1} < RP_k$  n'est pas satisfaite. Il fournit, par conséquent, la représentation d'état du contrôleur  $H_\infty$  robustifié, noté ici par  $K_1(s)$ . Nous rappelons ici que notre objectif est de robustifier le contrôleur  $H_\infty$  primaire afin d'améliorer leur marge de robustesse  $RP_0$ . A cet effet, d'après le processus de robustification cité ci-dessus, le problème d'optimisation sous contraintes est défini comme suit:

$$\min_{x_c} \left[ \max_{\omega} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{max}[W_{S_1}(x_c, \omega) \cdot S_{y_1}(j\omega)] + \sigma_{max}[W_{T_1}(x_c, \omega) \cdot T_{y_1}(j\omega)] \\ + \\ \sigma_{max}[W_{U_1}(x_c, \omega) \cdot K_1 \cdot S_y(j\omega)] + \sigma_{max}[W_{SG_1}(x_c, \omega) \cdot S_{y_1}(j\omega) \cdot G_N(j\omega)] \end{array} \right\} \right] \quad (2.38)$$

En tenant compte la contrainte de saturation ci-dessous :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_{M_S} \cdot M_{S_0} \\ \varphi_{\varepsilon_S} \cdot \varepsilon_{S_0} \\ \omega_{B_0} \\ m_0 \\ \varphi_{M_T} \cdot M_{T_0} \\ \varphi_{\varepsilon_T} \cdot \varepsilon_{T_0} \\ \varphi_{\omega_{BT}} \cdot \omega_{BT_0} \\ n_0 \\ \varphi_{M_U} \cdot M_{U_0} \\ \varphi_{\varepsilon_U} \cdot \varepsilon_{U_0} \\ \varphi_{\omega_{BC}} \cdot \omega_{BC_0} \\ v_0 \\ \varphi_{M_{SG}} \cdot M_{SG_0} \\ \varphi_{\varepsilon_{SG}} \cdot \varepsilon_{SG_0} \\ \omega_{SG_0} \\ l_0 \end{pmatrix}}_{x_{cmin}} < \underbrace{\begin{pmatrix} M_{S_1} \\ \varepsilon_{S_1} \\ \omega_{B_1} \\ m_1 \\ M_{T_1} \\ \varepsilon_{T_1} \\ \omega_{BT_1} \\ n_1 \\ M_{U_1} \\ \varepsilon_{U_1} \\ \omega_{BC_1} \\ v_1 \\ M_{SG_1} \\ \varepsilon_{SG_1} \\ \omega_{SG_1} \\ l_1 \end{pmatrix}}_{x_c} < \underbrace{\begin{pmatrix} M_{S_0} \\ \varepsilon_{S_0} \\ \varphi_{\omega_B} \cdot \omega_{B_0} \\ m_0 + \varphi_m \\ M_{T_0} \\ \varepsilon_{T_0} \\ \omega_{BT_0} \\ n_1 + \varphi_n \\ M_{U_0} \\ \varepsilon_{U_0} \\ \omega_{BC_0} \\ v_0 + \varphi_v \\ M_{SG_0} \\ \varepsilon_{SG_0} \\ \varphi_{\omega_{SG}} \cdot \omega_{SG_0} \\ l_0 + \varphi_l \end{pmatrix}}_{x_{cmax}} \quad (2.39)$$

Il convient à noter que le nombre de variable à optimiser du problème cité ci-dessus est considéré élevé. A cet effet, sa solution peut être attrapée (ou localisée) dans d'éventuels minima locaux existant dans l'espace de recherche. C'est pour cette raison qu'on doit résoudre le problème précédent par des algorithmes évolutionnaires on l'occurrence les algorithmes génétiques, l'algorithme d'essai particulaire, ..., etc.

### 2.2.3. Solution du problème par les algorithmes génétiques:

Nous rappelons que le but de ce chapitre réside dans la recherche sur des pondérations ajustables adéquates dont ses structures sont décrites par des transferts d'ordre entier. A cet effet, seulement les algorithmes génétiques sont capables optimiser tous les paramètres de ces pondérations y compris ceux donnés avec ordre entier.

#### 2.2.3.1. Algorithmes génétiques :

En général, les algorithmes génétiques consistent à faire évoluer un ensemble de points se trouvant dans l'espace de recherche, vers l'optimum du problème tout en commençant par un tirage initial aléatoire. L'idée des algorithmes génétiques consistent à générer une population de chromosomes représentant les paramètres à optimiser de chaque pondération irrationnelle souhaitée. La fonction objective (2.38), appelée *Fitness*, est ensuite évaluée dans chaque individu constituant cette population afin d'examiner le critère d'arrêt de cet algorithme. Le paragraphe suivant décrit les étapes à suivre de la robustification du contrôleur  $H_\infty$  primaire dans laquelle on introduit les algorithmes génétiques pour assurer la sélection automatique des pondérations irrationnelles adéquates assurant l'amélioration de la marge de robustesse  $RP_0$ . Ces étapes sont résumées comme suit :

❖ **Initialisation de l'algorithme de robustification :**

Dans cette étape, les transferts du modèle nominal  $G_N(s)$  et les pondérations irrationnelles fixes  $W_{S_0}(s)$ ,  $W_{T_0}(s)$ ,  $W_{U_0}(s)$  et  $W_{S_{G_0}}(s)$  sont supposés connus. Sachant que, le transfert du contrôleur  $H_\infty$  primaire  $K_0(s)$  est assuré par la méthode  $H_\infty$  utilisant l'un des deux algorithmes cités en premier chapitre. Ce dernier permet de fournir la marge de robustesse initiale  $RP_0$ . Finalement, les limites inférieure et supérieure de l'espace de recherche sont données à partir des règles de réglages précédente ainsi que le nombre des paramètres à optimiser est supposé égal à  $N$ .

❖ **Initialisation de l'algorithme génétique**

A l'itération  $k = 0$ , la population initiale  $X_k$  est construite via la génération de  $N_p$  vecteurs aléatoires limités par l'intervalle  $[x_{c_{min}}, x_{c_{max}}]$ .

❖ **Etape 1 : Codage de la population  $Y_k$  :**

En général, il existe plusieurs types de codage assurant la codification de chaque paramètre constituant la population  $X_k$ . Parmi lesquels, on peut citer: le codage binaire, le codage réel (symbolique), codage sous forme d'arbre, ..., etc. Dans cette étape, le codage binaire est adopté pour coder chaque paramètre de  $X_k$  en  $N_b$  bits. D'où,  $N_p$  chromosomes codés peuvent être générés dont la longueur de chacun est égale à  $N_b \times N$ . La concaténation de ces chromosomes binaires peut ressortir la structure générale de la population codée  $Y_k$  ci-dessous:

$$Y_k = \begin{pmatrix} y_{c_1}^{0,k} & y_{c_2}^{0,k} & y_{c_3}^{0,k} & y_{c_4}^{0,k} \\ y_{c_1}^{1,k} & y_{c_2}^{1,k} & y_{c_3}^{1,k} & y_{c_4}^{1,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{c_1}^{(N_p-1),k} & y_{c_2}^{(N_p-1),k} & y_{c_3}^{(N_p-1),k} & y_{c_4}^{(N_p-1),k} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Sachant que le  $\ell^{\text{ème}}$  chromosome codé fourni à l'itération  $k$ , est donné par:

$$\{\text{chromosome}\}_{\ell,k} = \{y_{c_1}^{\ell,k} \quad y_{c_2}^{\ell,k} \quad x_{c_3}^{\ell,k} \quad y_{c_4}^{\ell,k}\} \quad (2.41)$$

Où  $\ell = \overrightarrow{0, 1, \dots, \ell_{max}}$  avec  $\ell_{max} = N_p - 1$ . Sachant que chaque sous vecteur  $y_{c_j}^{\ell,k}$  du  $\ell^{\text{ème}}$  chromosome fournissant les quatre paramètres codés d'une telle pondération irrationnelle codée  $\tilde{W}_{x_0}^{\ell,k}$ , peut être donné, pour  $j = 1, \dots, 4$ , par :

$$\begin{cases}
 y_{c_1}^{\ell,k} = \left( \begin{array}{cccc}
 \overbrace{[100\dots00]}^{N_b \text{ bits}} & \overbrace{[100\dots01]}^{N_b \text{ bits}} & \overbrace{[111\dots10]}^{N_b \text{ bits}} & \overbrace{[100\dots11]}^{N_b \text{ bits}} \\
 M_{S_0}^{\ell,k} & \varepsilon_{S_0}^{\ell,k} & \omega_{B_0}^{\ell,k} & m_0^{\ell,k}
 \end{array} \right) : \text{Pour } \tilde{W}_{S_0}^{\ell,k} \\
 y_{c_2}^{\ell,k} = \left( \begin{array}{cccc}
 \overbrace{[110\dots00]}^{N_b \text{ bits}} & \overbrace{[110\dots01]}^{N_b \text{ bits}} & \overbrace{[110\dots10]}^{N_b \text{ bits}} & \overbrace{[110\dots11]}^{N_b \text{ bits}} \\
 M_{T_0}^{\ell,k} & \varepsilon_{T_0}^{\ell,k} & \omega_{BT_0}^{\ell,k} & n_0^{\ell,k}
 \end{array} \right) : \text{Pour } \tilde{W}_{T_0}^{\ell,k} \\
 y_{c_3}^{\ell,k} = \left( \begin{array}{cccc}
 \overbrace{[101\dots00]}^{N_b \text{ bits}} & \overbrace{[101\dots01]}^{N_b \text{ bits}} & \overbrace{[101\dots11]}^{N_b \text{ bits}} & \overbrace{[101\dots11]}^{N_b \text{ bits}} \\
 M_{U_0}^{\ell,k} & \varepsilon_{U_0}^{\ell,k} & \omega_{BC_0}^{\ell,k} & v_0^{\ell,k}
 \end{array} \right) : \text{Pour } \tilde{W}_{U_0}^{\ell,k} \\
 y_{c_4}^{\ell,k} = \left( \begin{array}{cccc}
 \overbrace{[011\dots00]}^{N_b \text{ bits}} & \overbrace{[011\dots01]}^{N_b \text{ bits}} & \overbrace{[011\dots11]}^{N_b \text{ bits}} & \overbrace{[011\dots11]}^{N_b \text{ bits}} \\
 M_{SG_0}^{\ell,k} & \varepsilon_{SG_0}^{\ell,k} & \omega_{SG_0}^{\ell,k} & l_0^{\ell,k}
 \end{array} \right) : \text{Pour } \tilde{W}_{SG_0}^{\ell,k}
 \end{cases} \quad (2.42)$$

❖ **Etape 2 : Reproduction de la nouvelle population codée :**

Dans cette étape, une nouvelle population est assurée par deux opérations de base à savoir : le croisement génétique et la mutation génétique.

**a. Croisement :**

Le croisement permet de produire les chromosomes enfants  $z_{c_j}^{\ell,k}$  héritant partiellement des caractéristiques des chromosomes parents existant dans la population  $Y_k$ . Cela dépend d'un choix de la probabilité  $P_c$  choisie *a priori* par l'utilisateur dans l'intervalle  $[0,1]$ . En général, il existe plusieurs méthodes de croisement. Parmi les méthodes les plus utilisées dans le croisement des chromosomes, on peut citer : la méthode de « *croisement uniforme* ». Nous verrons, dans la suite de ce travail, que le croisement d'un certain nombre des  $c$  individus est assuré à partir d'un test probabilistique supérieur à la valeur de choisie de  $P_c$ , ce qui permet de produire des nouveaux individus améliorant la convergence de l'algorithme génétique. La Fig.2.9 représente un exemple de croisement des deux chromosomes parents  $y_{c_1}^{(\ell-p),(k-1)}$  et  $y_{c_1}^{(\ell-q),(k-1)}$  à l'itération  $k - 1$  pour générer les deux chromosomes enfants  $z_{c_1}^{(\ell-p),k}$  et  $z_{c_1}^{(\ell-q),k}$  respectivement à l'itération  $k$ . On obtient donc :

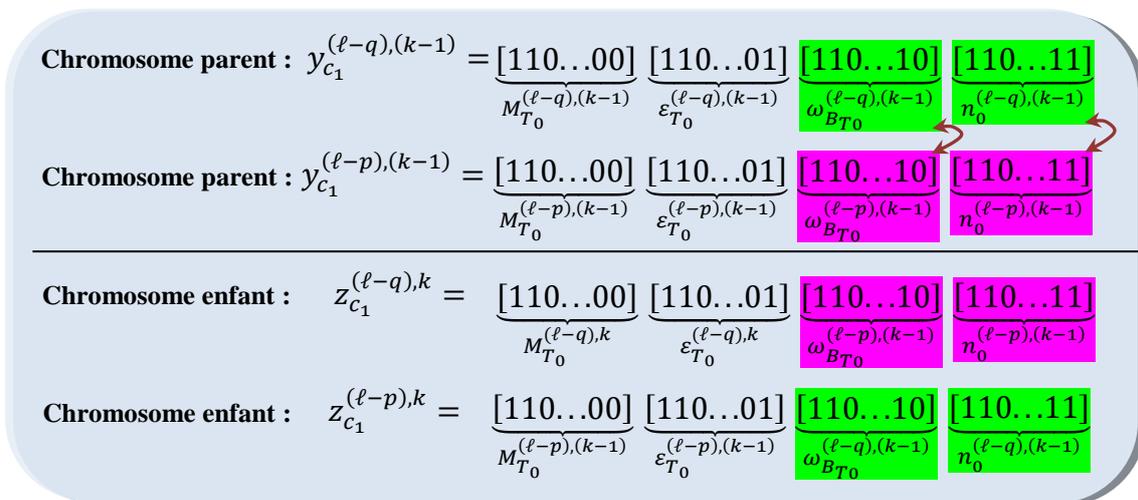


Fig.2.9. Exemples de croisement des deux chromosomes parents

**b. Mutation :**

Cette étape est indispensable lors de la génération de la nouvelle population  $Y_k$ , ce qui permet de générer les nouveaux chromosomes  $h_{c_j}^{\ell,k}$  dont certains ses éléments sont totalement différents à ceux existant pendant tous le processus d’optimisation. En général, la mutation des chromosomes dépende de la probabilité  $P_m$  qui est souvent choisie préalablement par l’utilisateur dans l’intervalle  $[0,1]$ . Cette étape permettant:

- d’atteindre une propriété appelée *ergodicité* avec laquelle la solution du problème peut être convergée vers un minimum global.
- de garder une diversité dans l’évolution des individus, ce qui est primordial pour les algorithmes génétiques.
- de limiter le risque de la convergence prématurée des solutions.

Dans notre travail, la mutation de certains chromosomes est assurée par l’introduction de certains nouveaux paramètres qui ne figurent plus dans toutes les populations existantes. Ces paramètres doivent être choisis aléatoirement dans l’espace de recherche  $[x_{c_{min}}, x_{c_{max}}]$ . La Fig.2.10 représente un exemple de mutation du chromosome  $y_{c_4}^{\ell,k}$  pour générer le nouveau chromosome  $h_{c_4}^{\ell,k}$ . On obtient :

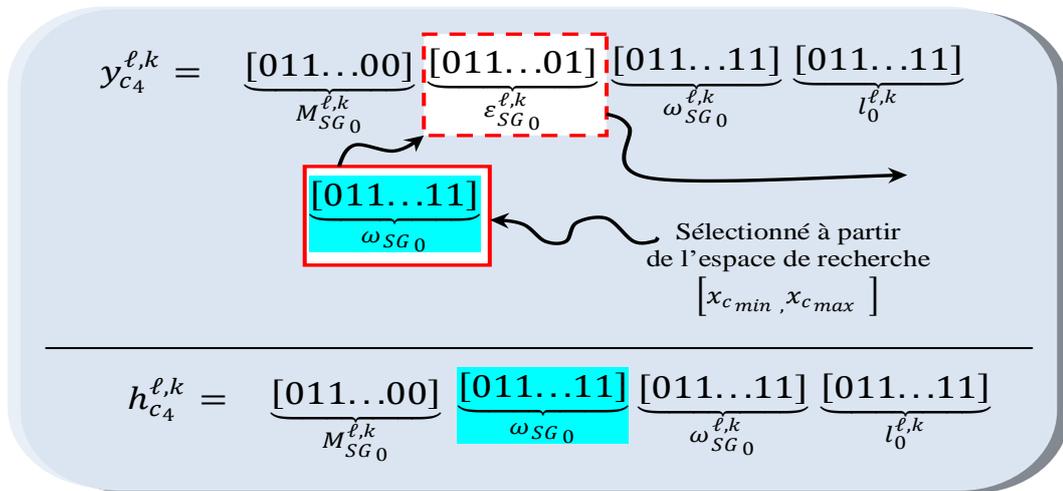


Fig.2.10. Exemples de mutation du chromosome  $y_{c_4}^{\ell,k}$

❖ **Etape 3 : Evaluation de la fonction objective**

A partir des deux opérateurs cités ci-dessus, les nouveaux chromosomes codés peuvent contenir les sous ensembles codés, on l’occurrence  $y_{c_j}^{\ell,k}$ ,  $h_{c_j}^{\ell,k}$  et  $z_{c_j}^{\ell,k}$ . Pour évaluer la fonction objective, on doit décodés tous les sous-ensembles précédents en  $N_p$  individus décimales. D’où, la structure générale de cette nouvelle population peut être présentée comme suit:

$$X_k = \begin{pmatrix} x_{c_1}^0 & x_{c_2}^0 & x_{c_3}^0 & x_{c_4}^0 \\ z_{c_1}^1 & z_{c_2}^1 & z_{c_3}^1 & z_{c_4}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{c_1}^{N_p-1} & h_{c_2}^{N_p-1} & x_{c_3}^{N_p-1} & z_{c_4}^{N_p-1} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Sachant que le  $\ell^{\text{ème}}$  individu, fourni à l'itération  $k$ , est défini par:

$$\{\text{individu}\}_{\ell,k} = \{x_{c_1}^{\ell,k} \quad x_{c_2}^{\ell,k} \quad x_{c_3}^{\ell,k} \quad x_{c_4}^{\ell,k}\} \quad (2.44)$$

Où chaque sous ensemble réels  $x_{c_j}^{\ell,k}$  contenant les paramètres de la pondération irrationnelle

$W_{x_0}^{\ell,k}$  est défini par :

$$\begin{cases} x_{c_1}^{\ell,k} = (M_{S_0}^{\ell,k} \quad \varepsilon_{S_0}^{\ell,k} \quad \omega_{B_0}^{\ell,k} \quad m_0^{\ell,k}) : \text{Pour } W_{S_0}^{\ell,k} \\ x_{c_2}^{\ell,k} = (M_{T_0}^{\ell,k} \quad \varepsilon_{T_0}^{\ell,k} \quad \omega_{B_{T_0}}^{\ell,k} \quad n_0^{\ell,k}) : \text{Pour } W_{T_0}^{\ell,k} \\ x_{c_3}^{\ell,k} = (M_{U_0}^{\ell,k} \quad \varepsilon_{U_0}^{\ell,k} \quad \omega_{BC_0}^{\ell,k} \quad v_0^{\ell,k}) : \text{Pour } W_{U_0}^{\ell,k} \\ x_{c_4}^{\ell,k} = (M_{SG_0}^{\ell,k} \quad \varepsilon_{SG_0}^{\ell,k} \quad \omega_{SG_0}^{\ell,k} \quad l_0^{\ell,k}) : \text{Pour } W_{SG_0}^{\ell,k} \end{cases} \quad (2.45)$$

Les pondérations  $W_{S_0}^{\ell,k}$ ,  $W_{T_0}^{\ell,k}$ ,  $W_{U_0}^{\ell,k}$  et  $W_{SG_0}^{\ell,k}$  (pour  $\ell = 0,1,2, \dots, \ell_{max} = N_p - 1$ ) sont ensuite utilisés pour augmenter le modèle nominal  $G_N$ , on fait donc développé  $N_p$  systèmes augmentés et  $N_p$  problèmes de sensibilité pondérées. La résolution de chaque problème par la méthode  $H_\infty$  fournit la représentation d'état du contrôleur  $H_\infty$  primaire correspondant, noté  $K_0^{\ell,k}(s)$  ainsi que chaque système bouclé correspondant permet de calculer les quatre sensibilités  $S_{y_0}^{\ell,k}$ ,  $T_{y_0}^{\ell,k}$ ,  $K_0^{\ell,k} S_{y_0}^{\ell,k}$  et  $G_N S_{y_0}^{\ell,k}$ .

A partir de ces dernières, on obtient  $N_p$  marges de robustesse sur les performances robustes. Celles-ci sont obtenues, pour  $\ell = 0,1,2, \dots, N_p - 1$ , par l'expression suivante :

$$RP_0^{\ell,k} = \|W_{S_0}^{\ell,k} \cdot S_{y_0}^{\ell,k}\|_\infty + \|W_{T_0}^{\ell,k} \cdot T_{y_0}^{\ell,k}\|_\infty + \|W_{U_0}^{\ell,k} \cdot K_0^{\ell,k} S_{y_0}^{\ell,k}\|_\infty + \|W_{SG_0}^{\ell,k} \cdot G_N S_{y_0}^{\ell,k}\|_\infty \quad (2.46)$$

#### ❖ Etape 4 : Sélection des meilleurs individus:

Cette étape est s'inspirée du principe de *Darwinien* lors de la sélection naturelle des individus. D'où, les individus fournissant les meilleures améliorations de  $RP$  (i.e., décroissance par rapport à  $RP_0$ ) sont maintenus, tandis que les individus restants sont totalement exclus dans les étapes de l'algorithme génétique.

### ❖ Etape 5 : Test d'arrêt

Le critère d'arrêt est associé par la plus faible marge de robustesse, notée  $RP_1$ , sachant qu'elle est donnée par l'expression ci-dessous :

$$RP_{min} = \min\{RP_0^{\ell,k}\}, \text{ pour } \ell = 0,1,2, \dots, N_p - 1 \quad (2.47)$$

Si la condition  $RP_{min} < RP_0$  n'est vérifiée, le transfert du contrôle  $H_\infty$  robustifié est celui donné par  $K_0(s)$ . Sinon, on doit faire les changements ci-dessous avant de retourner à l'étape 1 par la population qui contient seulement les meilleurs individus sélectionnés dans l'étape 4. Ces changements sont les suivants :

- Incrémenter le nombre d'itération  $k$  par 1, *i.e.*  $k \leftarrow k + 1$  ;
- Mettre à jour la valeur de  $RP_0$  par celle de  $RP_{min}$ , *i.e.*  $RP_0 \leftarrow RP_{min}$  ;
- Mettre à jour le transfert du contrôleur  $K_0(s)$  par celui fournissant la marge de robustesse  $RP_{min}$

### 2.3. Inconvénient de la robustification basée les pondérations irrationnelles ajustables:

Le but de robustifier le contrôleur  $H_\infty$  primaire cité en premier chapitre réside dans l'amélioration de sa marge de robustesse sur  $RP$ . A cet effet, on doit parcourir l'algorithme génétique pour exploiter l'espace de recherche, basé sur les règles de réglage précédentes, dans lequel les paramètres optimaux des pondérations irrationnelles peuvent être optimisés. Cependant, il existe souvent certaines difficultés lors de la sélection de ces pondérations. Celles-ci peuvent être causées par la saturation de certains paramètres dans ses limites inférieure ou supérieure, ce qui peut ralentir la convergence de l'algorithme et même enfreindre la condition  $RP$ . Pour remédier à cet inconvénient, nous devons donc élargir légèrement et avec précaution les limites là où elles sont saturées. Toutefois, cette alternative est valable pour certains paramètres à optimiser.

Néanmoins, pour un ordre entier d'une telle pondération supposé saturé dans sa limite supérieure, sachant que l'accroissement de cette limite peut influencer sur l'amélioration d'une autre marge de robustesse supposée également liée par une pondération contenant un ordre saturé auparavant dans sa limite supérieure correspondante. Dans ces conditions, la robustification proposée s'avère inefficace à cause de la recherche restreinte dans l'espace définissant les pondérations irrationnelles. Nous verrons dans le chapitre suivant que la recherche des solutions dans un espace comportant des pondérations fractionnaires ajustables peut améliorer la

convergence de l'algorithme d'optimisation, ce qui assure une bonne amélioration de la marge  $RP$ .

#### 2.4. Simulations et interprétations des résultats :

Dans cette partie, le contrôleur  $H_\infty$  primaire est robustifié de telle sorte que sa marge initiale de robustesse  $RP_0$  peut être améliorée via la robustification utilisant l'algorithme génétique. Sachant que cette amélioration est assurée par la sélection automatique des pondérations irrationnelles ajustables dont les limites inférieure et supérieure, contraignant ses paramètres, sont déterminées à partir des règles de réglage citées précédemment. A cet effet, nous devons reformuler les transferts des trois pondérations fixes citées en premier chapitre de telles sortes qu'elles deviennent comme celles présentées par les équations (2.1), (2.5) et (2.10). On obtient donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{S_0}(s) = \frac{0.4 \cdot (s+0.15)}{s+6 \cdot 10^{-5}} \\ W_{T_0}(s) = \frac{4.2482 \cdot (s+0.4218)}{s+3.891} \\ W_{U_0}(s) = \frac{15.152 \cdot (s+0.5883)}{s+50.4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} W_{S_0}(s) = \frac{\frac{s}{2.5} + 0.06}{s+0.06 \cdot 10^{-6}} \\ W_{T_0}(s) = \frac{\frac{s}{0.9158} + \frac{1}{2.1713}}{\frac{0.2354}{0.9158} \cdot s + 1} \\ W_{U_0}(s) = \frac{\frac{s}{2.05} + \frac{1}{4.82}}{\frac{0.066}{2.05} \cdot s + 1} \end{array} \right. \quad (1.48)$$

De l'équation (1.48), les paramètres constituant les transferts des trois pondérations irrationnelles fixes, à savoir  $W_{S_0}(s)$ ,  $W_{T_0}(s)$  et  $W_{U_0}(s)$ , sont obtenus comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{S_0} = 2.5 \\ \omega_{B_0} = 0.06 \\ \varepsilon_{S_0} = 0.01 \\ n_{S_0} = 1 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} M_{T_0} = 2.1713 \\ \omega_{BT_0} = 0.9158 \\ \varepsilon_{T_0} = 0.2354 \\ n_{T_0} = 1 \end{array} \right\}, \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} M_{U_0} = 4.82 \\ \omega_{BC_0} = 2.05 \\ \varepsilon_{U_0} = 0.066 \\ n_{U_0} = 1 \end{array} \right. \quad (1.49)$$

Selon les règles de réglage citées précédemment, pour l'amélioration de la marge  $RP_0$  nécessite donc l'amélioration simultanée des marges de robustesse  $NP_0$ ,  $RS_0$  et le compromis  $NP_0/RS_0$ . A cet effet, on désire d'abord affaiblir le gain maximal du lieu de  $\sigma_{max}[W_{S_1}(j\omega)]$  en haute fréquence et accroître leur ordre entier pour assurer une atténuation plus descendante du lieu en basse fréquence. De plus, le paramètre  $\varepsilon_{S_1}$  est maintenu égal à  $\varepsilon_{S_0}$ , tandis que la pulsation  $\omega_{B_1}$  est choisie libre dans l'intervalle  $]0, \omega_{BT_0}[$ . Ce dernier choix permet de réduire la complexité du problème d'optimisation. L'allure souhaitée de  $S_{y_1}(s)$  peut être assurée par le choix des contraintes ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{M_S} \cdot M_{S_0} \leq M_{S_1} \leq M_{S_0} \\ 0 < \omega_{B_1} < \omega_{BT_0} \\ m_0 \leq m_1 \leq m_0 + \varphi_m \end{array} \right. , \text{ avec: } \left\{ \begin{array}{l} 2 \leq M_{S_1} \leq 2.5 \\ 0 < \omega_{B_1} < 0.9158 \\ 1 \leq m_1 \leq 3 \end{array} \right. \quad (1.50)$$

Il est à noter que le cas prévu par cette sélection automatique présenté est de fournir les paramètres  $M_{S_1} = 2.5$  et  $m_1 = 1$ . Dans ce cas, on dit que la robustification a conservé la même norme  $H_\infty$  et la même atténuation des valeurs singulières maximales fournies par la sensibilité initiale du contrôleur  $H_\infty$  primaire. Par contre, l'amélioration de  $RP_0$  peut être aboutie par l'amélioration de la marge de robustesse  $RS_0$ . Ensuite, on désire également concentrer beaucoup plus sur l'amélioration de la marge de robustesse  $RS_0$ , car la stabilité du système bouclé est indispensable dans la plupart des applications industrielles, en particulier le cas de présence des incertitudes de modélisation. Pour atteindre cet objectif, les différentes valeurs à savoir des deux gains maximal et minimal et la pulsation du lieu de  $\sigma_{max}[W_{T_1}(j\omega)]$  doivent être affaiblies autant que possible. Par ailleurs, l'ordre entier de la pondération doit être augmenté afin d'assurer une bonne minimisation de  $\sigma_{max}[T_{y_1}(j\omega)]$  en haute fréquence. Dans ce cas, l'allure souhaitée de  $T_{y_1}(s)$  peut être assurée par le choix ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{M_T} \cdot M_{T_0} \leq M_{T_1} \leq M_{T_0} \\ \varphi_{\varepsilon_T} \cdot \varepsilon_{T_0} \leq \varepsilon_{T_1} \leq \varepsilon_{T_0} \\ \varphi_{\omega_{BT}} \cdot \omega_{BT_0} \leq \omega_{BT_1} \leq \omega_{BT_0} \\ n_0 \leq n_1 \leq n_0 + \varphi_n \end{array} \right. , \text{ avec: } \left\{ \begin{array}{l} 1.75 \leq M_{T_1} \leq 2.1713 \\ 10^{-4} \leq \varepsilon_{T_1} \leq 0.2354 \\ 0.5 \leq \omega_{BT_1} \leq 0.9158 \\ 1 \leq n_1 \leq 3 \end{array} \right. \quad (1.51)$$

La pondération irrationnelle ajustable  $W_{U_1}(j\omega)$  est supposée fixe dont le transfert irrationnel est supposé égal à celui de la pondération  $W_{U_0}(j\omega)$ . Finalement, les paramètres de réglage de l'algorithme génétique sont choisis comme suit :

- *Type de codage du chromosome : Binaire;*
- *Nombre de bits utilisé dans le codage binaire : 16;*
- *Nombre de paramètres à optimiser :  $N = 7$ ;*
- *Méthode de croisement : Croisement uniforme;*
- *Taux de croisement :  $P_c = 70\%$ ;*
- *Taux de mutation :  $P_m = 45\%$ ;*
- *Nombre de génération: 30.*

L'algorithme génétique est compilé 20 fois avec différentes populations initiales générées dans l'espace de recherche limité par les contraintes citées précédemment. D'où, la Fig.2.9 représente l'évolution de la fonction objective pendant les itérations de l'algorithme de robustification proposée. On obtient :

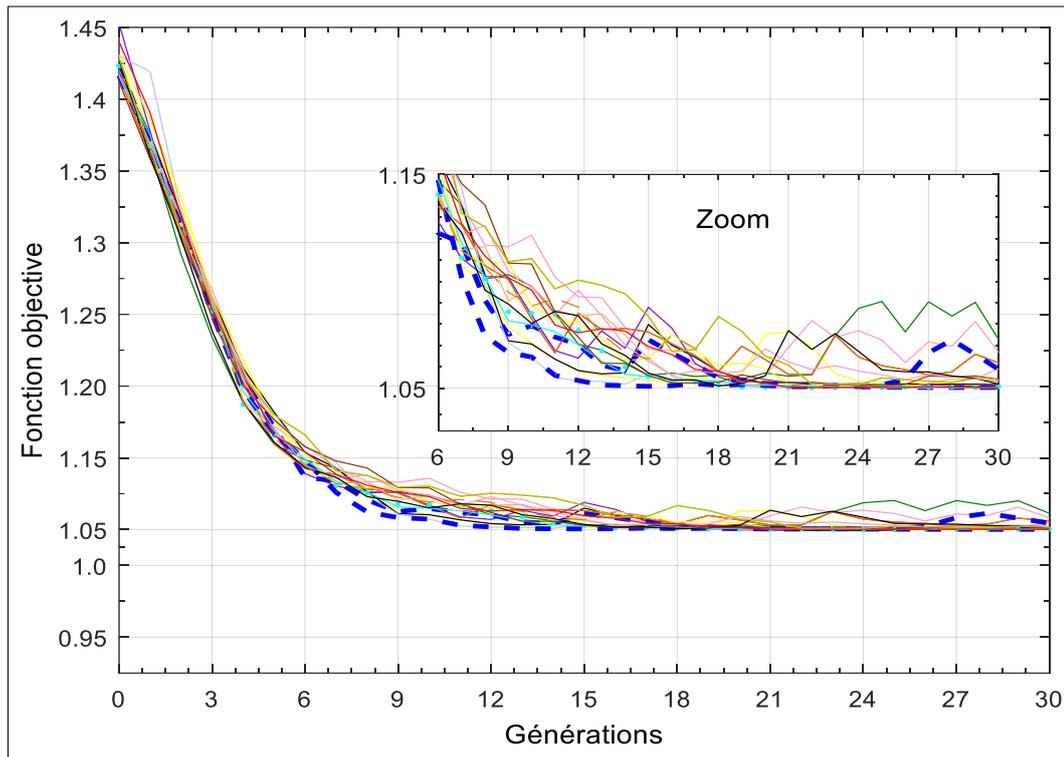


Fig.2.11. Evolution de la fonction objective pendant les itérations de l'algorithme de robustification proposée

La Fig.2.11 montre clairement que la marge de robustesse  $RP$  n'atteint pas une valeur inférieure à l'unité. Cela se traduit, plus tard, par le fait que la robustification proposée basée sur l'algorithme génétique devienne incapable de réaliser l'amélioration souhaitée de cette marge de robustesse. La principale question qui peut être posée maintenant est celle de savoir à quelle limite fréquentielle la robustification proposée peut améliorer cette marge de robustesse?

Pour répondre à cette question, nous devons donner le transfert de chaque pondération irrationnelle fournie lorsque l'algorithme génétique atteint cette limite d'amélioration de cette marge de robustesse. De plus, nous devons donner le transfert du contrôleur  $H_\infty$  robustifié fourni lorsque la méthode  $H_\infty$  résout le problème de sensibilité pondérée correspondante. On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{S_1}(s) = \left( \frac{\frac{s}{\sqrt{1.72}} + 0.02}{s + 0.02 \cdot \sqrt{10^{-3}}} \right)^2 \\ W_{T_1}(s) = \left( \frac{\frac{s}{0.868} + \frac{1}{\sqrt{2.07}}}{\frac{\sqrt{10^{-3}}}{0.868} \cdot s + 1} \right)^2 \end{array} \right. , \text{ avec : } \left\{ \begin{array}{l} 2 < M_{S_1} = 1.72 < 2.5 \\ 0 < \omega_{B_1} = 0.02 < 0.9158 \\ 1 < m_1 = 2 < 3 \\ 1.75 < M_{T_1} = 2.07 < 2.1713 \\ 10^{-4} < \varepsilon_{T_1} = 10^{-3} < 0.2354 \\ 0.5 < \omega_{BT_1} = 0.868 < 0.9158 \\ 1 < n_1 = 2 < 3 \end{array} \right. \quad (1.52)$$

D'où, le Tab.2.1 récapitule le taux de réussite de l'algorithme génétique pour décroître ou d'accroître les paramètres cités précédemment. On obtient :

Tab.2.1. Taux de réussite de l'algorithme génétique

	Paramètre avant la robustification	Paramètre après la robustification	Taux de réussite de décroissement
$M_S$	2.5	1.72	31.20%
$M_T$	2.1713	2.07	4.66%
$\varepsilon_T$	0.2354	$10^{-3}$	99.57%
$\omega_{BT}$	0.9158	0.868	5.22%
			<b>Taux de réussite d'accroissement</b>
$m$	1	2	100%
$n$	1	2	100%

De plus, la méthode  $H_\infty$  basée sur l'approche *LMIs* fournit un contrôleur  $H_\infty$  robustifié d'ordre 11 et un niveau de performance égal à  $\gamma=0.9107$ . Le transfert de ce contrôleur est donné par :

$$K_1 = \frac{37.3 \cdot (s+50.46)(s+28.66)(s+26.37)(s+1.4)(s+0.99)(s+0.18)(s+0.016)(s+0.0102)(s^2+1.582s+1.195)}{(s+1017)(s+39.92)(s+18.44)(s+0.51)(s+0.019)(s+66 \times 10^{-5})(s+59 \times 10^{-5})(s^2+0.47s+0.88)(s^2+3.76s+5.13)} \quad (1.53)$$

La condition de robustesse sur *RS* fournie après la robustification proposée est illustrée par la Fig.2.12. On obtient:

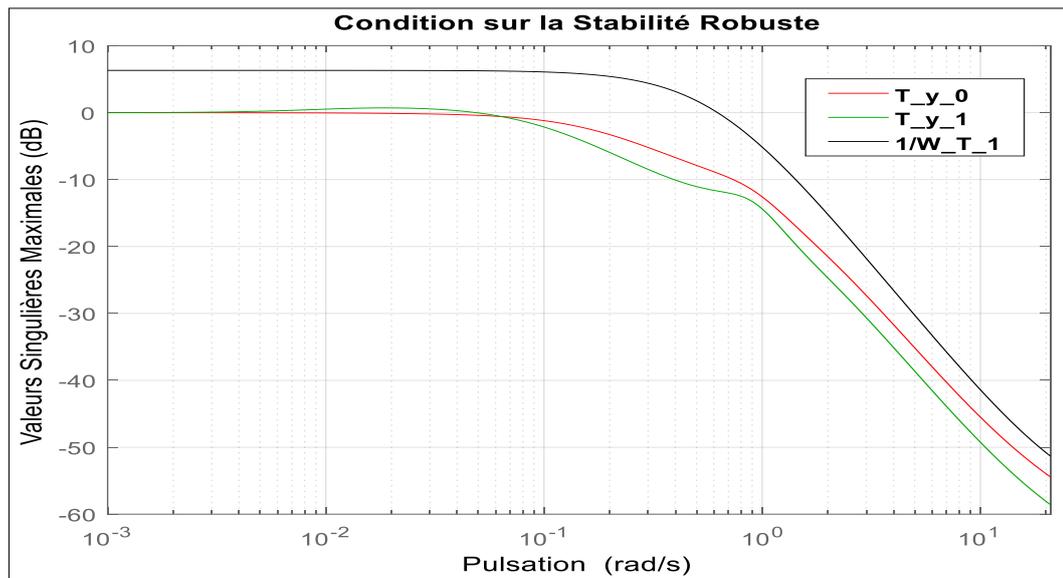


Fig.2.12. Condition sur SR avant et après la robustification du contrôleur  $H_\infty$  primaire

D'après la Fig.2.12, on peut remarquer que les valeurs singulières maximales de la nouvelle sensibilité complémentaire sont bien atténuées haute fréquence notamment dans la plage fréquentielle  $\omega \in [0.0532, \omega_{max}]$  radians/secondes. De plus, le lieu de cette sensibilité possède une pente plus descente que celle fournie par la sensibilité complémentaire initiale. Cette atténuation peut conduisant à une amélioration de la marge de robustesse sur les performances robustes du système bouclé.

Ensuite, la condition de robustesse sur  $NP$  fournie après la robustification proposée est illustrée par la Fig.2.13. On obtient:

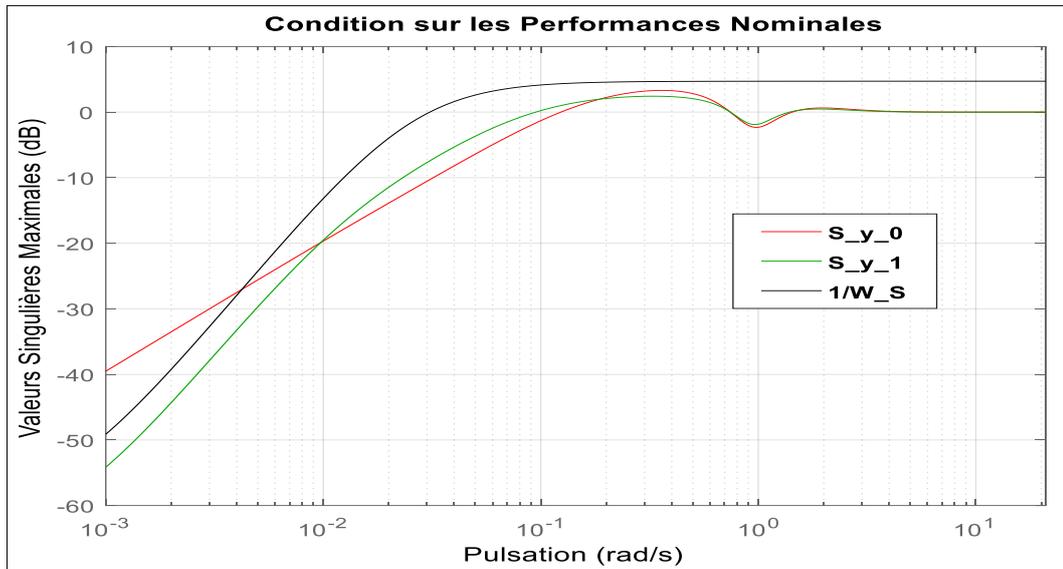


Fig.2.13. Condition sur  $NP$  avant et après la robustification du contrôleur  $H_\infty$  primaire

D’après la Fig.2.13, il est claire de remarquer l’amélioration de la marge de robustesse  $NP$  par le contrôleur  $H_\infty$  robustifié, en particulier dans la plage fréquentielle  $\omega \in [0.01, \omega_{max}]$  radians/secondes. Celle-ci peut conduire aussi à une amélioration de la marge de robustesse sur les performances robustes du système bouclé. Maintenant, le compromis de robustesse fourni par le contrôleur  $H_\infty$  robustifié est comparé par celui issu du contrôleur  $H_\infty$  primaire. Cette comparaison est illustrée par la Fig.2.14. En revanche, la condition de robustesse sur les performances robustes avant et après la robustification du contrôleur  $H_\infty$  primaire est illustrée par la Fig.2.15. On obtient :

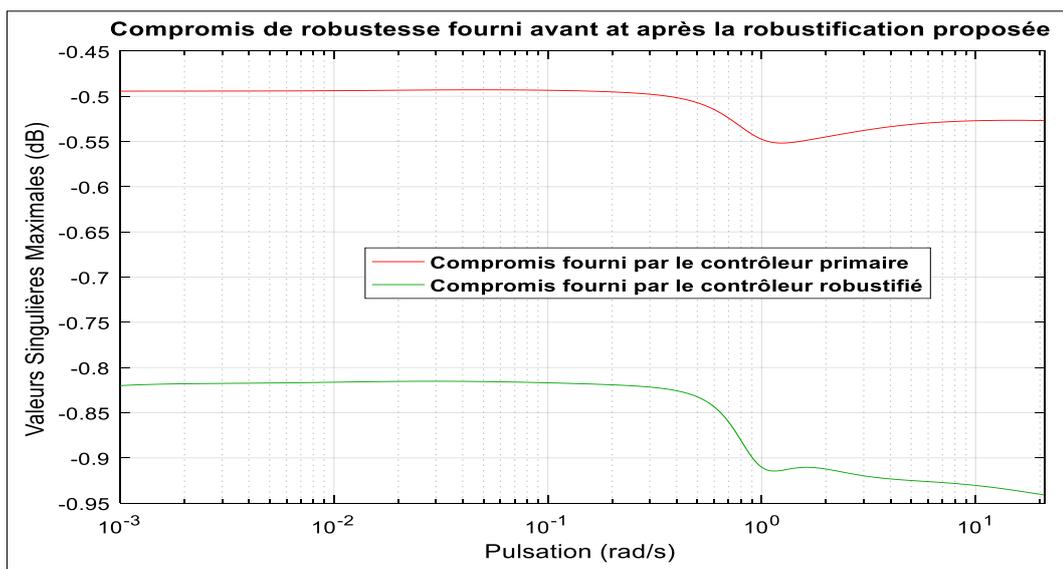


Fig.2.14. Compromis de robustesse fourni avant et après la robustification du contrôleur  $H_\infty$  primaire

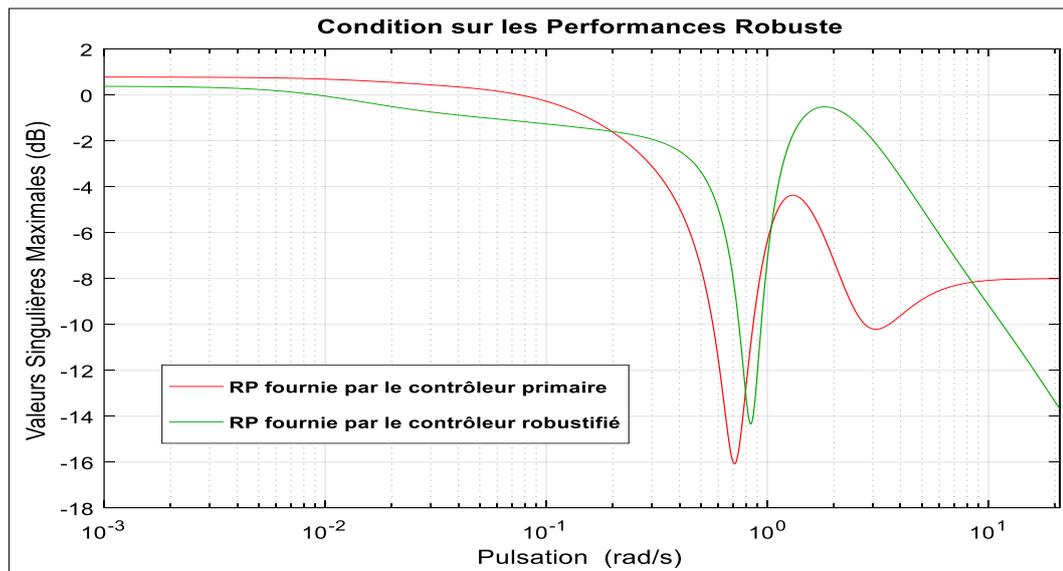


Fig.2.15. condition de RP fournie avant et après la robustification du contrôleur  $H_\infty$  primaire

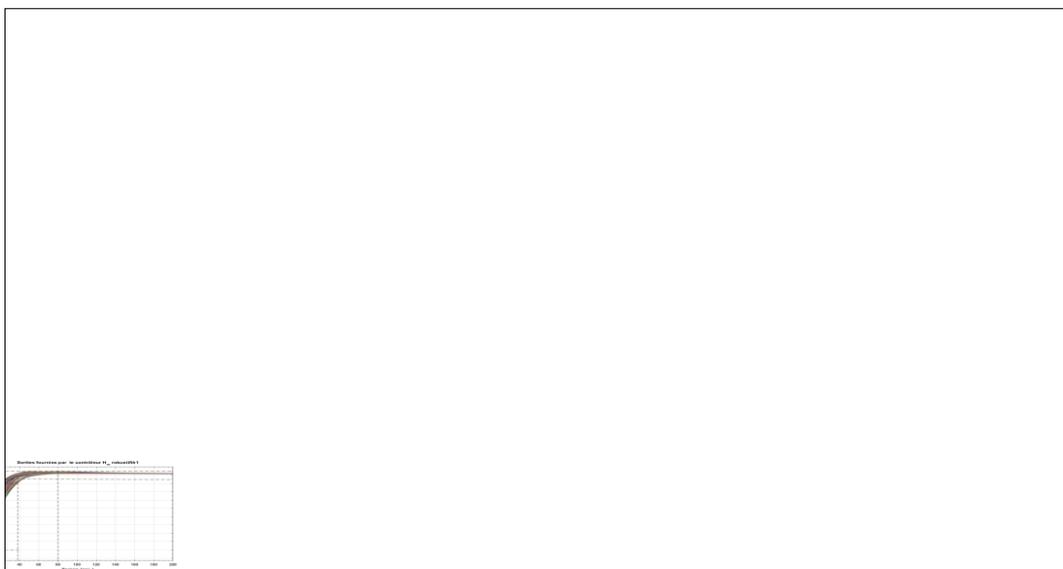
D'après la Fig.2.14, on peut remarquer que la nouvelle marge du compromis de robustesse est assurée avec une marge de sécurité très élevée en comparaison avec celle fournie par le contrôleur  $H_\infty$  primaire. Il est à noter que la robustification proposée a la capacité d'augmenter les marges de sécurité des trois conditions de robustesse citées précédemment. Elle est capable aussi d'améliorer la marge initiale de RP dans toutes les fréquences limitées par  $\omega \in [\omega_{min}, \omega_{max}]$  (voir la Fig.2.15), ce qui implique que les performances du système sont assurées par le contrôleur  $H_\infty$  robustifié pour un nombre des régimes perturbés plus large que celui du contrôleur  $H_\infty$  primaire. Néanmoins, le problème de garantir une marge RP inférieure à l'unité dans toute la plage de fréquence reste toujours persistant. Ce problème est dû à la violence de cette condition en basse fréquence (régime permanent), en particulier la plage de fréquence  $\omega \in [10^{-3}, 0.009]$  radians/secondes. Il convient à noter que la principale cause de la violence de cette condition réside dans le type des pondérations irrationnelles utilisées lors de la robustification proposée. Nous verrons, dans la suite de ce travail, que l'introduction d'un nouveau type pondérations dans le processus de la sélection automatique assurée par l'algorithme évolutionnaire peut conduire à satisfaire la condition de RP dans toute la plage de fréquence. Ce nouveau type sera basé sur l'introduction de la puissance fractale dans les transferts des pondérations, on fait ressortir les pondérations fractionnaires ajustables. La sélection automatique de ces dernières faisant l'objet du troisième chapitre.

Maintenant, le contrôleur robustifié par cet algorithme proposé est utilisé pour commander les 192 régimes perturbés précédents en utilisant les mêmes entrées exogènes citées en premier chapitre. La Fig.2.16 représente les sorties globales du système bouclé, tandis que la Fig.2.17 représente la partie transitoire correspondante. On obtient donc :



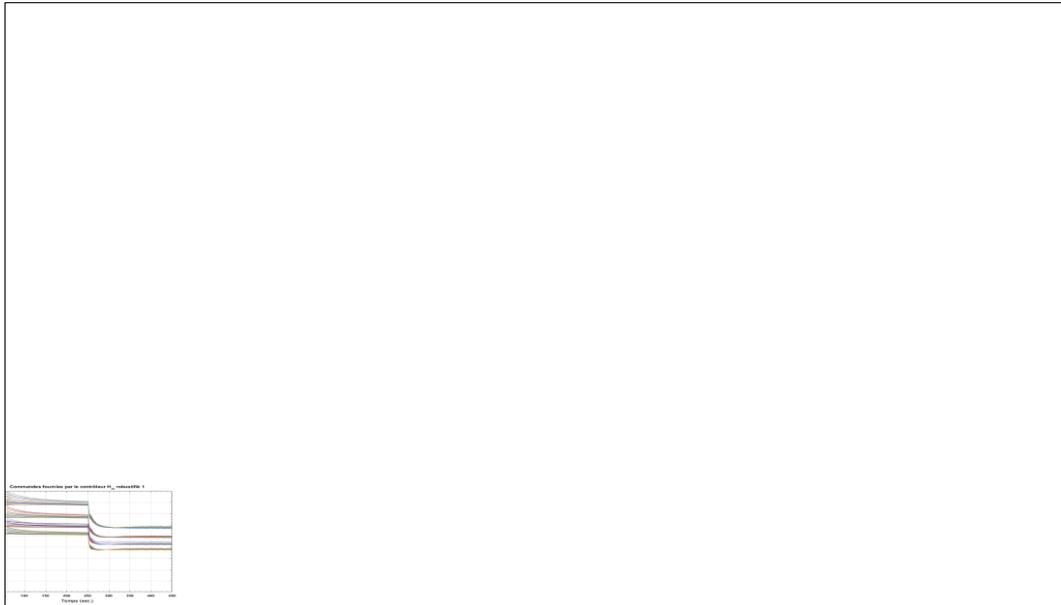
**Fig.2.16.** Sorties fournies par le contrôleur  $H_\infty$  robustifié pour 192 régimes perturbés

D’après la Fig.2.16, on peut remarquer que le contrôleur  $H_\infty$  robustifié a la capacité de fournir des meilleures sorties que celles fournies par le contrôleur  $H_\infty$  primaire. Ceci se traduit par l’atténuation des erreurs de poursuite  $\varepsilon_{5\%}$  de tous les régimes perturbés à partir de l’instant  $t = \frac{80}{T_e}$  secondes. De plus, La réponse fournie par le pire des régimes perturbés est caractérisée par le temps de montée égal à  $t_m = \frac{29.33}{T_e}$  secondes. C’est une réponse néanmoins moins lente en comparaison avec celle fournie par le contrôleur  $H_\infty$  primaire. De plus, elle est caractérisée par le temps de réponse égal à  $t_{r_{5\%}} = \frac{80}{T_e}$  secondes, ce qui assure un taux d’amélioration égal à 66.66%. Le dépassement maximal de cette réponse est égal à  $D_{max} = 05\%$ , ce qui assure un taux d’amélioration égal à 58.33% (voir la Fig.2.17).



**Fig. 2.17.** Agrandissement de la partie transitoire de la dynamique de poursuite fournie par le contrôleur  $H_\infty$  primaire pour 192 régimes perturbés

La Fig.2.18 représente les commandes assurant les sorties globales citées précédemment. On obtient :



*Fig. 2.18. Commandes fournies par le contrôleur  $H_\infty$  robustifié pour 192 régimes perturbés.*

D'après la Fig.2.18, on peut remarquer que toutes les commandes fournies par le contrôleur  $H_\infty$  robustifié sont moins couteuses que celles fournies le contrôleur  $H_\infty$  primaire, i.e.,  $u_{max} = 4.50$  en régime transitoire.

## **2.5. Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons proposé la robustification du contrôleur  $H_\infty$  primaire dans laquelle l'algorithme génétique a assuré la sélection automatique des pondérations irrationnelles ajustables, ce qui peut résoudre le problème généré par le choix des paramètres de chaque pondération de façon manuelle. Le problème de la sélection des paramètres optimaux est reformulé, à partir de quelques règles de réglage, sous forme d'un problème d'optimisation sous contraintes dans lequel la fonction objectif à minimiser représente la condition  $RP$  ainsi que et les contraintes à satisfaire représentent les limites inférieures et supérieures imposées par les allures souhaitées de différentes sensibilités fournies par le système bouclé par le contrôleur robuste à synthétiser. Les étapes requises de cette robustification proposée ont été détaillées ainsi que la validée de cette proposition a été montrée sur le même système hydraulique cité en premier chapitre. Les résultats de simulation ont confirmé que l'inefficacité d'utiliser les pondérations irrationnelles ajustables dans l'étape de la sélection automatique des pondérations adéquates satisfaisant la condition  $RP$  avec une marge de sécurité acceptable. L'utilisation des pondérations fractionnaires ajustables ainsi que la détermination de ses paramètres optimaux faisant l'objet du troisième chapitre.

**CHAPITRE 3 :**  
**COMMANDE ROBUSTE UTILISANT**  
**LES PONDÉRATIONS RATIONNELLES**  
**AJUSTABLES**

## Chapitre 3

# Commande robuste utilisant les pondérations rationnelles ajustables

---

### 3. Introduction :

Ce chapitre a pour but d'introduire les pondérations fractionnaires ajustables dans le critère de sensibilité pondérée. Les paramètres de ces dernières peuvent être assurés par la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes ce qui permet d'aboutir systématiquement les pondérations souhaitées à travers de satisfaire les mêmes règles de réglage citées en deuxième en chapitre. L'objectif est donc d'assurer la condition sur  $RP$  avec une marge de sécurité contre les incertitudes non structurées de modélisation.

Rappelons ici qu'on a confirmé par simulation que l'utilisation des pondérations irrationnelles ajustables dans le problème de robustification du contrôleur  $H_\infty$  primaire s'avère inefficace notamment pour atténuer simultanément de façon optimale les deux pentes des deux sensibilités directe et complémentaire du système corrigé. A cet effet, nous allons proposer une deuxième alternative permettant de résoudre le problème de la sélection convenable des pondérations fractionnaires adéquates assurant l'amélioration de la marge de robustesse  $RP$  non seulement pour le régime de fonctionnement nominal du système physique, mais aussi pour tous les régimes perturbés. Cet objectif sera atteint par l'utilisation de l'algorithme de  $PSO$  ce qui représente la contribution principale de ce travail.

Sachant que l'algorithme génétique offre la possibilité d'optimiser les variables réelles ainsi que les ordres entiers survenant sur les puissances des pondérations irrationnelles ajustables citées en deuxième chapitre. De ce fait, l'amélioration de la marge de  $RP$  par l'algorithme de  $PSO$  n'enlève rien de l'efficacité de l'algorithme génétique. Car le type des pondérations qu'on a choisit dans l'algorithme de robustification cité dans le deuxième chapitre qui restreint l'efficacité de cet algorithme. Sachant que la méthode de synthèse  $H_\infty$  fonctionnant seulement par les pondérations d'ordre entier. C'est pour cette raison qu'on doit a priori appliquer une approche d'approximation assurant le rapprochement des transferts rationnelles, en module et en phase, par des filtres équivalents d'ordre entier. Dans notre travail, la méthode adoptée pour cette étape est celle basée sur l'approche d'identification fréquentielle.

Finalement, ce chapitre sera achevé par la partie de simulation dans laquelle les performances fournies par le contrôleur  $H_\infty$  robustifié synthétisé par cette deuxième stratégie de

robustification seront comparées, dans les plans fréquentiel et temporel, avec celles fournies par le contrôleur  $H_\infty$  robustifié synthétisé par la première stratégie de robustification citée en deuxième chapitre.

### 3.1. Motivation :

En général, les équations différentielles ordinaires est un outil mathématique très utilisé, dans les sciences de l'ingénieur, pour bien décrire l'évolution du comportement réel d'un système physique. Récemment, les scientifiques ont généralisé l'intégration et la dérivée d'ordre entier de ces équations par des valeurs réelles dont des comportements fractionnaires peuvent être prises en considérations lors de la modélisation des systèmes physiques. De ce fait, le concept fractionnaire peut être illustré par la Fig.3.1 comme suit :

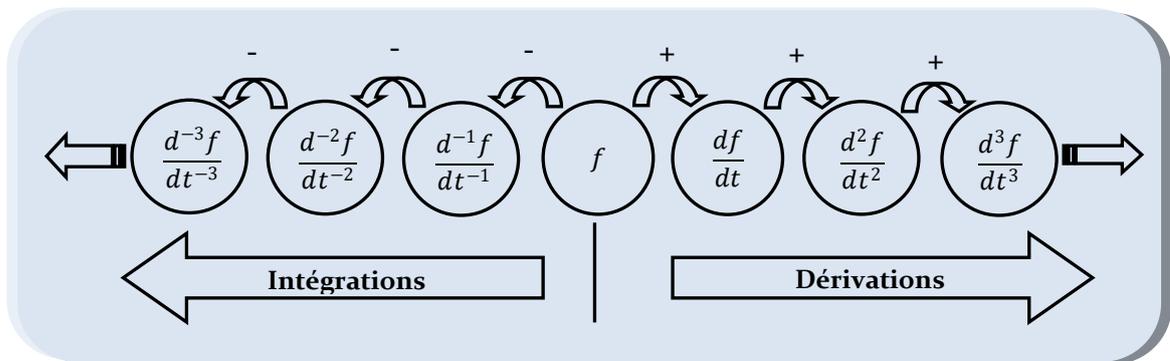


Fig.3.1 : Concept de dérivations et intégrations dans le calcul fractionnaire

La Fig. 3.1 présente les dérivations et les intégrations successives de la fonction  $f(t)$  dont des intervalles d'ordre entier. La suite de ce travail sera basée sur les ordres fractionnaires possibles qui existent entre deux dérivées ou intégrations successives d'ordre entier.

### 3.2. Eléments de la théorie du calcul fractionnaire :

#### 3.2.1. Fonctions usuelles utilisées dans la dérivation d'ordre non entier :

En général, il existe quatre fonctions usuelles fournissant la définition de la dérivée fractionnaire. Ces dernières peuvent être illustrées comme suit :

##### 3.2.1.1. Fonction Gamma d'Euler :

En mathématiques, cette fonction gamma est souvent notée par le symbole  $\Gamma(z)$ . C'est une fonction monotone et strictement décroissante dans le plan complexe  $\Gamma(z) \in \mathbb{C}$ . Elle est définie comme suit [67] :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{(z-1)} e^{-t} dt \quad \text{Avec : } \begin{cases} \Gamma(0) = 1 \\ \Gamma(0_+) = \infty \end{cases} \quad (3.1)$$

Sachant que cette fonction est définie, dans l'espace des variables d'ordre entier, par :

$$\Gamma(n + 1) = n! , \text{ avec } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (3.2)$$

En tenant compte l'expression ci-dessous:

$$\Gamma(z + 1) = [-e^{-t}t^z]_0^\infty + z \int_0^\infty t^{(z-1)} e^{-t} dt = z. \Gamma(z) \quad (3.3)$$

D'où, l'expression (3.2) est encore valable pour la variable  $z \in \mathbb{C}$  , avec :

$$\Gamma(z + 1) = z. \Gamma(z) \quad (3.4)$$

### 3.2.1.2. Fonction *Beta* :

Cette fonction est définie par l'intégrale eulérienne de premier ordre, donné par [67]:

$$\beta(p, q) = \int_{x=0}^{x=1} (1 - x)^{p-1} x^{q-1} dx , \quad p, q \in \mathbb{R}_+ \quad (3.5)$$

En général, la fonction *Beta*  $\beta(*,*)$  peut être exprimée en fonction de  $\Gamma(*)$  comme suit :

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \beta(q, p), \quad p, q \in \mathbb{R}_+ \quad (3.6)$$

### 3.2.1.3. Fonction *Mittag – Leffler (ML)* :

La fonction Mittag-leffler de deux variables  $\alpha$  et  $\beta$  est, en général, définie dans le plan complexe par [67]:

- Pour  $(\alpha, \beta) > 0$

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha.k + \beta)} \quad (3.7)$$

De l'équation (3.7), on peut envisager les deux cas particuliers suivants :

- Pour  $\beta = 1$  , on obtient :

$$E_{\alpha, 1}(z) = E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha.k + 1)} \quad (3.8)$$

- Pour  $\alpha = 1$ , on obtient :

$$E_{1, 1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (3.9)$$

### 3.2.1.4. Fonction *Miller – Ross (MR)*:

En mathématiques, la fonction de Miller-Ross est définie comme suit [67] :

$$\xi_z(v, a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k z^{k+v}}{\Gamma(v+k+1)} \quad (3.10)$$

Elle est encore exprimée, en fonction de la fonction *Mittag – Leffler*, par l’expression (3.11) suivante :

$$\xi_z(v, a) = z^v E_{1,v+1}(az) \quad (3.11)$$

**3.2.2. Fonctions usuelles utilisées dans l’intégration d’ordre non entier :**

En général, il existe trois définitions de l’intégration fractionnaire. Ces définitions sont données comme suit:

**3.2.2.1. Définition au sens de *Riemann – Liouville (RL)* :**

Cette définition est inspirée de la définition de la  $n^{ème}$  intégrale de la fonction  $f(t)$ , qui est donnée par le théorème de Cauchy comme suit [67, 68] :

$${}_0I_t^n f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau \quad (3.12)$$

De l’équation (3.12), l’intégral du premier ordre  ${}_0I_t^1 f(t)$  de la fonction  $f(x)$  sur l’intervalle  $[0 \quad t]$  est exprimé par la relation (3.13) comme suit :

$${}_0I_t^1 f(t) = \int_0^t f(x) dx \quad (3.13)$$

Sachant que l’intégral du second ordre  ${}_0I_t^2 f(t)$  de la même fonction précédente sur l’intervalle  $[0 \quad \tau]$  est défini par :

$${}_0I_t^2 f(t) = \int_0^t \int_0^\tau f(\tau) d\tau dx \quad (3.14)$$

D’où, l’équation (3.14) peut être réécrite, suivant l’égalité de *Dirichlet*, comme suit :

$${}_0I_t^2 f(t) = \int_0^t \int_\tau^t f(\tau) dx d\tau \quad (3.15)$$

Il est claire que la fonction  $f(\tau)$  est constante par rapport à  $x$ . D’où, il est possible de réécrire l’équation (3.15) comme suit:

$${}_0I_t^2 f(t) = \int_0^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (3.16)$$

De l’équation (3.13) et l’équation (3.15), on peut généraliser la définition de la  $n^{ème}$  intégration de la fonction  $f(x)$  par l’expression donnée par (3.17) comme suit :

$${}_0I_t^n f(t) = \int \dots \int_0^t f(\tau) d\tau \dots d\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau \quad (3.17)$$

En 1847 *Riemann* a généralisé le théorème de *Cauchy* sur l’intégration d’ordre non entier comme suit : Pour un ordre fractionnaire  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  compris entre  $n - 1$  et  $n$  (i.e.  $n - 1 < \alpha < n$

avec  $n \in \mathbb{N}^*$  ), l'intégration d'ordre non entier de la fonction  $f(t)$  sur l'intervalle  $t_0$  et  $t$  peut être s'exprimée par :

$${}^{RL}I_{t_0}^\alpha[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \left( \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} \cdot f(\tau) d\tau \right) \quad (3.18)$$

D'où, la dérivée fractionnaire correspondante peut être donnée, au sens de *Riemann-Liouville*, par :

$${}^{RL}D_t^\alpha[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dt^n} \left( \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} \cdot f(\tau) d\tau \right) \quad (3.19)$$

**3.2.2.2. Définition au sens de Caputo :**

La dérivée d'ordre non entier  $\alpha$  compris entre  $n - 1$  et  $n$  de la fonction  $f(t)$  est exprimée, au sens de *Caputo*, comme suit [66, 67] :

$${}^C D_t^\alpha[f(t)] = {}^C I_t^{n-\alpha} \left[ \frac{d^n}{dt^n} (f(t)) \right] = D^{-(n-\alpha)} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (3.20)$$

Supposons que  $D^n$  est l'opérateur dérivé d'ordre  $n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'où, les propriétés ci-dessous sont toujours vérifiées :

- $D^n \cdot D^{-n} = \mathbb{1}$  mais  $D^{-n} \cdot D^n \neq \mathbb{1}$
- $D^{-n} \cdot D^n f(t) = f(t) - \sum_{\alpha=0}^{n-1} f^{(\alpha)}(0^+) \frac{t^\alpha}{\alpha!}$

Sachant que  $f^{(\alpha)}(t)$  représente la  $\alpha^{ème}$  dérivée de la fonction  $f(t)$ .

**3.2.2.3. Définition au sens de Grunwald – Letnikov (GL) :**

En général, la dérivée première  $f^{(1)}(t)$  de la fonction  $f(t)$  est exprimée par [66, 67] :

$$f^{(1)}(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (3.21)$$

Sachant que la dérivée seconde  $f^{(2)}(t)$  est définie par l'expression (3.22) comme suit:

$$f^{(2)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (3.22)$$

Cette dernière expression peut être réécrite comme suit :

$$f^{(2)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right] \quad (3.23)$$

D'où, la formule simplifiée de l'expression (3.23) et obtenue comme suit :

$$f^{(2)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \quad (3.24)$$

De façon similaire, la dérivée troisième  $f^{(3)}(t)$  de la fonction  $f(t)$  est définie par :

$$f^{(3)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(2)}(t) - f^{(2)}(t-h)}{h} \quad (3.25)$$

En faisant quelques manipulations mathématiques sur l'expression (3.25), on obtient :

$$f^{(3)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \quad (3.26)$$

D'où, la  $n^{\text{ème}}$  dérivée  $f^{(n)}(t)$  est donc exprimée par l'expression (3.27) comme suit :

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rh) \quad (3.27)$$

Sachant que la combinaison  $\binom{n}{r}$  est définie par l'expression (2.28) comme suit:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \quad (3.28)$$

A partir de ces dérivées d'ordre entier, la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f(t)$  continue et intégrable sur l'intervalle  $[t_0, +\infty[$  est définie, au sens de *Grunwald – Letnikov*, par l'expression suivante :

$${}^{GL}D_t^\alpha [f(t)] = \lim_{T_e \rightarrow 0^+} \left\{ T_e^{-\alpha} \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{T_e} \rfloor} \left( (-1)^j \cdot \binom{\alpha}{j} \cdot f(t - j \cdot T_e) \right) \right\} \quad (3.29)$$

Sachant que le terme  $\lfloor \frac{t-t_0}{T_e} \rfloor$  dénote la partie entière du nombre réel  $\left(\frac{t-t_0}{T_e}\right)$ ,  $T_e$  est le pas d'échantillonnage et  $\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)}$  représente le binôme de *Newton* généralisé. Maintenant, pour le cas particulier de  $\alpha = 1$ , l'expression (3.29) peut être simplifiée comme suit :

$${}^{GL}D_t^{-1} [f(t)] = \lim_{T_e \rightarrow 0^+} \left\{ T_e \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{T_e} \rfloor} \left( \frac{(-1)^j \cdot \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(1)} \cdot f(t - j \cdot T_e) \right) \right\} \quad (3.30)$$

Où cette dernière expression représente l'intégral de *Grunwald – Leitnikov*. Cette intégration est définie, pour  $\alpha = -2, -3, \dots$ , par l'expression ci-dessous :

$${}_{t_0}^L I_t^\alpha [f(t)] = {}_{t_0}^L D_t^{-\alpha} [f(t)] = \lim_{T_e \rightarrow 0} \left\{ T_e^\alpha \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{T_e} \rfloor} \left( (-1)^j \cdot \binom{-\alpha}{j} \cdot f(t - j \cdot T_e) \right) \right\} \quad (3.31)$$

### 3.3. Transformée de Laplace des opérateurs d'ordres fractionnaires:

#### 3.3.1. Transformée de Laplace de l'intégration fractionnaire:

- **Théorème :**

La transformée de Laplace de l'intégration fractionnaire, donnée par les trois définitions citées précédemment pour  $n - 1 < \alpha < n$ , est exprimée comme suit [69,70]:

$$\mathcal{L}({}_{t_0}^{GL;RL;C} I_t^\alpha [f(t)]) = s^{-\alpha} \cdot F(s) \quad (3.32)$$

**Preuve :**

$$\mathcal{L}({}_{t_0}^{GL;RL;C} I_t^\alpha [f(t)]) = \mathcal{L} \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \right) \quad (3.33)$$

Prenant en considération le théorème de convolution suivant :

$$\mathcal{L} \left[ \int_{t_0}^t f(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau \right] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)] \quad (3.34)$$

$$\mathcal{L}({}_{t_0}^{GL;RL;C} I_t^\alpha [f(t)]) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \mathcal{L}[t^{\alpha-1}] \cdot \mathcal{L}[f(t)] \quad (3.35)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} \cdot \mathcal{L}[f(t)] \quad (3.36)$$

$$= s^{-\alpha} \cdot \mathcal{L}[f(t)] \quad (3.37)$$

$$= s^{-\alpha} \cdot F(s) \quad (3.38)$$

#### 3.3.2. Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire:

Par l'utilisation de l'intégrale de *Riemann – Liouville*, il est possible de définir la dérivée fractionnaire de  $f(t)$ , pour  $\alpha < 0$ , par l'expression (3.39) suivante [69,70] :

$$\mathcal{L}({}_{t_0}^{RL} D_t^\alpha [f(t)]) = \mathcal{L} \left( \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \cdot \left( \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1+\alpha}} d\tau \right) \right) \quad (3.39)$$

En se basant sur le théorème de convolution, on obtient:

$$\mathcal{L}({}_{t_0}^{RL} D_t^\alpha [f(t)]) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \cdot \mathcal{L}[t^{-\alpha-1}] \cdot \mathcal{L}[f(t)] \quad (3.40)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(-\alpha)}{s^{-\alpha}} \cdot \mathcal{L}[f(t)] \quad (3.41)$$

$$= s^\alpha \cdot F(s) \quad (3.42)$$

Similairement, pour  $n$  ordre entier, la transformée de Laplace d'une dérivée fractionnaire quelconque peut être donnée comme :

$$\mathcal{L}({}_{t_0}D_t^\alpha[f(t)]) = s^\alpha \cdot F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \frac{d^{n-k-1}f(0)}{dt^{n-k-1}} \quad (3.43)$$

En général, il existe deux définitions de la transformée de Laplace d'une dérivée fractionnaire. Ces dernières sont exprimées comme suit :

### 3.3.2.1. Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire selon *RL* :

Selon la définition de *Riemann – Liouville*, la Transformée de Laplace de la  $\alpha^{\text{ème}}$  dérivée de la fonction  $f(t)$  est donnée par [69,70] :

$$\mathcal{L}({}^{RL}D_t^\alpha[f(t)]) = \mathcal{L}({}^{RL}D^n {}^{RL}D_t^{\alpha-n} f(t)) \quad (3.44)$$

A partir de cette expression, on peut écrire :

$$\mathcal{L}({}^{RL}D_t^\alpha[f(t)]) = s^n \cdot s^{\alpha-n} \cdot F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \cdot {}^{RL}D^{n-k-1} \cdot {}^{RL}D_t^{\alpha-n} \cdot f(0) \quad (3.45)$$

Or, la transformée de Laplace de  $f(t)$  peut être définie, en fonction de la valeur de  $\alpha$ , par:

$$\mathcal{L}({}^{RL}D_t^\alpha[f(t)]) = \begin{cases} s^\alpha \cdot F(s) & : \alpha < 0 \\ F(s) & : \alpha = 0 \\ s^\alpha \cdot F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} (s^k \cdot {}^{RL}D_t^{\alpha-1-k}[f(0)]) & : \alpha > 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

En général, la transformée de Laplace de la dérivée de *Riemann – Liouville* est souvent très limitée en pratique, parce que elle nécessite la connaissance *a priori* de l'information sur la condition initiale  $f(t_0)$  (*i.e.*, à l'instant  $t_0 = 0$ ), ce qui est en fait dans la science de l'ingénieur une quantité physique qui est difficile à mesurer.

### 3.3.2.2. Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire selon *Caputo* :

Selon la définition de *Caputo*, la transformée de Laplace de la  $\alpha^{\text{ème}}$  dérivée de la fonction  $f(t)$  est définie par l'expression (3.47) comme suit [69,70] :

$$\mathcal{L}({}_0^C D_t^\alpha[f(t)]) = s^\alpha \cdot F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} D^k f(0) \quad (3.47)$$

Sachant que la valeur de  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  est définie par  $n < \alpha < n + 1$  et  $n \in \mathbb{N}$

**Preuve :**

$$\mathcal{L}({}_0^C D_t^\alpha [f(t)]) = \mathcal{L}({}_0 D_t^{\alpha-n} D^n f(t)) \quad (3.48)$$

$$= s^{\alpha-n} [s^n \cdot F(s) - \sum_{l=0}^{n-1} s^l \cdot D^{m-l-1} \cdot f(0)] \quad (3.49)$$

Supposons que  $k = m - 1 - l$

$$\mathcal{L}({}_0^C D_t^\alpha [f(t)]) = s^\alpha \cdot F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} D^k f(0) \quad (3.50)$$

Cette dernière transformée peut être donnée en fonction de  $\alpha$  comme suite :

$$\mathcal{L}({}_0^C D_t^\alpha [f(t)]) = \begin{cases} s^\alpha \cdot F(s) & : \alpha < 0 \\ F(s) & : \alpha = 0 \\ s^\alpha \cdot F(s) - \sum_{k=0}^n (s^{\alpha-k-1} \cdot {}_0^C D_t^k [f(0)]) & : \alpha > 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

Dans les sciences de l'ingénieur, l'état de repos des systèmes physique correspond à  $\alpha < 0$  ou :

$$\mathcal{L}({}_0^C D_t^\alpha [f(t)]) = s^\alpha \cdot F(s) \quad (3.52)$$

Ce qui représente l'avantage majeur de la définition de *Caputo* sur les deux autres définitions précédentes. Par conséquent, la définition de *Caputo* est la plus adoptée par les chercheurs pour l'étude et l'analyse des systèmes fractionnaires.

### 3.4. Approximations des transferts fractionnaires:

Cette partie à pour but de présenter les différentes méthodes d'approximation qui assurent le rapprochement des pondérations rationnelles ajustables par des filtres équivalents d'ordre entier. Cette étape est donc indispensable lors de la robustification du contrôleur  $H_\infty$  primaire. Pour atteindre cet objectif, il existe, dans la littérature, plusieurs méthodes d'approximation. Certaines méthodes de celles-ci ont été basées sur l'approximation de la dérivée ou l'intégration fractionnaire. Cependant les autres méthodes ont été basées sur l'identification paramétrique des filtres d'ordre entier dont ses structures doivent être pré-choisies par l'utilisateur. On aura donc :

#### 3.4.1. Méthodes d'approximation de la dérivée ou l'intégration fractionnaire:

Ces méthodes d'approximation nécessitent d'abord à un changement de variable qui doit être effectué sur la pondération fractionnaire à rapprocher. Le principe adopté est s'énoncé comme suit : Etant donnée la structure générale de la pondération fractionnaire ajustable comme suit :

$$W(s) = \left( \frac{m_0 \cdot s + m_1}{n_0 \cdot s + n_1} \right)^r, r \in \mathbb{R}^* \quad (3.53)$$

Supposons la variable complexe, notée  $p \in \mathbb{C}$  avec  $(p = \frac{m_0 \cdot s + m_1}{n_0 \cdot s + n_1})$ . D'où, la pondération donnée par l'équation (3.53) peut être réécrite comme suit:

$$W(p) = p^\alpha \tag{3.54}$$

Il convient à noter qu'il existe plusieurs méthodes assurant l'approximation du nouveau transfert fractionnaire donné par l'équation (3.54) en un filtre d'ordre entier dont la structure générale est souvent définie par un gain  $\tilde{k}_w$  et  $N$  nombre des pôles et des zéros. On obtient donc :

$$\tilde{W}(p) = \tilde{k}_w \cdot \frac{\prod_{i=1}^N (p - z_i)}{\prod_{i=1}^N (p - p_i)} \tag{3.55}$$

A partir de l'équation (3.55), il est facile de déduire la pondération irrationnelle ajustable souhaitée en substituant la variable complexe  $p$ , dans l'équation (3.55), par celle donnée par  $s = \frac{m_1 - n_1 \cdot p}{m_0 - n_0 \cdot p}$ .

Les méthodes d'approximation de  $p^\alpha$  peuvent être résumées comme suit:

**a. Méthode de Carlson :**

La méthode de *Carlson* [71] est basée sur le processus itératif de *Newton – Raphson* lors de l'approximation de  $p^\alpha$ . Récemment, plusieurs chercheurs [72-75] ont adoptés cette méthode pour rationaliser le terme de  $p^\alpha$ . Ceci nécessitant les étapes suivantes :

Supposons, tout d'abord, le transfert d'ordre entier  $\tilde{W}(p)$  qui approxime, en module et en phase, le transfert fractionnaire  $W(p)$  tel que :

$$W(p) = [\tilde{W}(p)]^q \tag{3.56}$$

$$[W(p)]^{1/q} - \tilde{W}(p) = 0 \tag{3.57}$$

$q$  : représente l'ordre fractionnaire de la fonction de transfert. Supposons que :

$$q = \frac{m}{v} \tag{3.58}$$

En tenant compte la condition initiale suivante:

$$W_0(p) = 1 \tag{3.59}$$

D'où, il est possible d'approximer  $W(p)$  d'une façon itérative en utilisant formule récursive donnée par (3.60) comme suit :

$$W_k(p) = W_{k-1}(p) \cdot \frac{(v-r) \cdot (W_{k-1}(p))^2 + (v+r) \cdot \tilde{W}(p)}{(v+r) \cdot (W_{k-1}(p))^2 + (v-r) \cdot \tilde{W}(p)} \tag{3.60}$$

Sachant que le nombre d'itération, noté  $k_{max}$ , doit être *a priori* fixée par l'utilisateur. Si l'on suppose maintenant que :

$$\alpha = \frac{v-r}{v+r} = \left( \frac{1-\left(\frac{r}{v}\right)}{1+\left(\frac{r}{v}\right)} \right) = \frac{1-q}{1+q} \text{ , avec :} \quad (3.61)$$

$$q = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (3.62)$$

$$W(p) = p^q \quad (3.63)$$

Alors, si  $q > 0$ , ce qui implique que  $\alpha < 1$ . Dans ce cas, le transfert se comporte comme dérivée  $\tilde{W}_D(p)$  à l'itération finale  $k_{max}$ :

$$\tilde{W}_D(p) = W_{k_{max}}(p) \Leftrightarrow \tilde{W}(p) = p \quad (3.64)$$

Par ailleurs, si  $q < 0$ , ce qui implique que  $\alpha > 1$ . Dans ce cas, le transfert se comporte comme intégrale  $\tilde{W}_I(p)$  à l'itération finale  $k_{max}$  :

$$\tilde{W}_I(p) = W_{k_{max}}(p) \Leftrightarrow \tilde{W}(p) = \frac{1}{p} \quad (3.65)$$

### **b. Méthode de Charef :**

Cette méthode à pour but de rapprocher l'intégrateur fractionnaire  $W_I(p) = p^{-\alpha}$  par un transfert d'ordre entier  $\tilde{W}_I(p)$  possédant  $N$  zéros et  $N + 1$  pôles. Ces deux derniers doivent être répartis uniformément sur la plage fréquentielle  $[\omega_b, \omega_h]$ . Dans ce cas, le terme  $p^{-\alpha}$  peut être considéré comme étant un *Pôle à Puissance Fractionnaire* ( $Q_{PPF}$ ), donné par :

$$Q_{PPF}(s) = \frac{K_\omega}{\left(1 + \frac{p}{\omega_c}\right)^\alpha} \text{ , avec } \omega_b < \omega_c < \omega_h \quad (3.66)$$

Sachant que les deux paramètres  $K_\omega$  et  $\omega_c$  sont définis comme suit :

$$K_\omega = \left(1/\omega_c\right)^\alpha \quad (3.67)$$

$$\omega_c = \sqrt{-1 + 10\left(\frac{\varepsilon}{10\alpha}\right)} \quad (3.68)$$

Avec :

- $K_\omega$  : Le gain du *PPF*.
- $\omega_c$  : La pulsation de coupure du *PPF*.

- $\varepsilon$  : L'erreur maximale commise entre la pente de la réponse fréquentielle de l'opérateur  $p^{-\alpha}$  et celle du *PPF*.

Le transfert d'ordre non entier  $Q_{PPF}(p)$  peut être donc rapproché par l'utilisation de la formule réursive ci-dessous :

$$\tilde{W}_I(p) = C_I \cdot \frac{\prod_{k=0}^{N-1} \left(1 + \frac{p}{\omega_{z,k}}\right)}{\prod_{k=0}^N \left(1 + \frac{p}{\omega_{p,k}}\right)} \quad (3.69)$$

Les pôles  $\omega_{p,k}$  et les zéros  $\omega_{z,k}$  peuvent être déterminés d'une façon réursive comme suit :

$$\begin{cases} \omega_{p,k} = \omega_c \cdot (\psi \cdot \varphi)^k \cdot \sqrt{\varphi} & , \quad k = 0, 1, \dots, N \\ \omega_{z,k} = \psi \cdot \omega_c \cdot (\psi \cdot \varphi)^k \cdot \sqrt{\varphi} & , \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (3.70)$$

Sachant que  $\psi$ ,  $\varphi$  et  $N$  sont donnés par :

$$\begin{cases} \psi = 10^{\left(\frac{\varepsilon}{10(1-\alpha)}\right)} \\ \varphi = 10^{\left(\frac{\varepsilon}{10\alpha}\right)} \end{cases} \quad (3.71)$$

$$N = \text{partie entier} \left[ \frac{\log\left(\frac{100 \cdot \omega_h}{p_0}\right)}{\log(\psi \cdot \varphi)} \right] + 1 \quad (3.72)$$

### c. Méthode générale du *CFE* [44]:

Le principe de cette méthode est basé sur la représentation de la dérivée fractionnaire  $W_D(p) = p^\alpha$  par un transfert d'ordre entier en hautes fréquences, noté  $H_{High}(p)$  et un autre transfert d'ordre entier en basses fréquences, noté  $H_{Low}(p)$ . Ces deux transferts sont définis comme suit:

$$H_{High}(p) = \left(1 + \frac{p}{\omega_c}\right)^\alpha \quad (3.73)$$

$$H_{Low}(p) = \left(1 + \frac{\omega_c}{p}\right)^{-\alpha} \quad (3.74)$$

L'application du *CFE* sur les deux transferts précédents peut fournir les deux expressions présentées par l'équation (3.75) comme suit :

$$\begin{cases} W_{D_{high}}(p) = \omega_c^\alpha \cdot CFE\{H_{High}(p)\} & \text{si } \omega \gg \omega_c \\ W_{D_{low}}(p) = \omega_c^\alpha \cdot CFE\{H_{Low}(p)\} & \text{si } \omega \ll \omega_c \end{cases} \quad (3.75)$$

Dans ce cas, le transfert d'ordre entier équivalent  $\tilde{W}_D(p)$  est obtenu comme suit :

$$\tilde{W}_{D_{high}}(p) = \omega_c^\alpha \cdot \left[ 0; \frac{1}{1}, \frac{-\alpha \cdot \left(\frac{p}{\omega_c}\right)}{1}, \left\{ \frac{\frac{k(k+\alpha)}{(2k-1)2k} \left(\frac{p}{\omega_c}\right)}{1}, \frac{\frac{k(k-\alpha)}{(2k+1)2k} \left(\frac{p}{\omega_c}\right)}{1} \right\} \right]_{k=1}^N \quad (3.76)$$

$$\tilde{W}_{D_{low}}(p) = \omega_c^\alpha \cdot \left[ 0; \frac{1}{1}, \frac{\alpha \cdot \left(\frac{\omega_c}{p}\right)}{1}, \left\{ \frac{\frac{k(k-\alpha)}{(2k-1)2k} \left(\frac{\omega_c}{p}\right)}{1}, \frac{\frac{k(k+\alpha)}{(2k+1)2k} \left(\frac{\omega_c}{p}\right)}{1} \right\} \right]_{k=1}^N \quad (3.77)$$

#### d. Méthode d'Oustaloup :

Cette méthode est largement utilisée dans le calcul fractionnaire, notamment dans le domaine d'automatique. Elle est connue aussi sous l'acronyme *CRONE* (*Commande Robuste d'Ordre Non Entier*)[41,76]. L'idée de méthode est basée sur l'approximation du terme fractionnaire  $W_D(p) = p^\alpha$  par un transfert d'ordre entier équivalent possédant  $N$  pôles et  $N$  zéros attribués uniformément sur la plage fréquentielle  $[\omega_b, \omega_h]$ . Le transfert d'ordre entier résultant  $\tilde{W}_D(p)$  est s'exprimé comme suit:

$$\tilde{W}_D(s) = C_d \cdot \prod_{k=1}^{k=N} \left( \frac{p + \omega_{z,k}}{p + \omega_{p,k}} \right) \quad (3.78)$$

Où le gain  $C_d$ , les  $N$  pôles  $\omega_{p,k}$  et les  $N$  zéros  $\omega_{z,k}$  peuvent être déterminés comme suit :

$$\begin{cases} C_d = \omega_h^\alpha \\ \omega_{p,k} = \omega_b \cdot (\omega_u)^{\frac{2k-1+\alpha}{2N}} \\ \omega_{z,k} = \omega_b \cdot (\omega_u)^{\frac{2k-1-\alpha}{2N}} \end{cases} \quad (3.79)$$

Avec :

$$\omega_u = \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right) \quad (3.80)$$

En général, le gain  $C_d$  doit être ajusté de telle sorte que la condition  $|(j\omega)^\alpha|_{\omega=1} = 0 \text{ dB}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  est toujours remplie. Pour assurer un placement alterné équidistant entre les  $N$  paires  $\omega_{z,k}$  et  $\omega_{p,k}$  dans une échelle logarithmique de fréquences, on doit vérifier le rapport suivant :

$$\frac{\omega_{z,k+1}}{\omega_{z,k}} = \frac{\omega_{p,k+1}}{\omega_{p,k}} = \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{1}{N}} \quad (3.81)$$

### 3.4.2. Méthodes utilisant la réponse fréquentielle du transfert fractionnaire:

Cette classe des méthodes d'approximation est basée sur l'évaluation de la réponse fréquentielle du transfert fractionnaire dans une plage de fréquence bien précise. Cette réponse est ensuite comparée avec celle prédite par le modèle irrationnel on fait ressortir la norme  $H_2$  de l'erreur d'approximation. La minimisation de ce dernier par un algorithme adéquat fournit les paramètres optimaux du modèle d'ordre entier souhaité. Parmi les méthodes existant dans la littérature, on peut citer :

#### a. Méthode de *Hartley* :

L'algorithme de cette méthode a été développé par *Hartley et Lorenzo* en 2003 [77] dont ses détails sont disponibles dans la bibliothèque *ninteger*. Il est basé sur l'évaluation de la réponse fréquentielle du transfert fractionnaire dans une plage de fréquence présélectionnée par l'utilisateur. Cet algorithme fournit soit un modèle rationnel ou un modèle irrationnel présenté par la structure générale ci-dessous :

$$\tilde{W}(s) = \frac{1}{c_n s^{nQ} + c_{n-1} s^{(n-1)Q} + \dots + c_2 s^{2Q} + c_1 s^Q + c_0} \quad (3.82)$$

De l'équation (3.82), si la valeur de  $Q$  est choisie entière, on obtient, par conséquent, une approximation par un modèle d'ordre entier. Sinon, l'algorithme fournit un modèle fractionnaire de type commensurable.

#### b. Méthode de *Levy*

La fonction de *Levy* a pour but d'identifier les paramètres d'un transfert rationnel ou irrationnel présenté, qui peut être donné par la structure générale (3.83). Cette identification paramétrique est assurée à partir de l'extraction de la réponse fréquentielle du transfert fractionnaire  $W(s)$ . La réponse fréquentielle du modèle prédite d'ordre entier  $\tilde{W}(s)$  est ensuite évaluée dans une plage de fréquence. La comparaison de ces deux réponses fournit une erreur d'approximation et la minimisation de la norme  $H_2$  de ce dernier par un algorithme d'optimisation fournit les paramètres optimaux de ce modèle. La structure générale de ce dernier est donnée comme suit [78]:

$$\tilde{W}(s) = \frac{b_m s^{mQ} + b_{m-1} s^{(m-1)Q} + b_{m-2} s^{(m-2)Q} + \dots + b_1 s^Q + b_0}{a_n s^{nQ} + a_{n-1} s^{(n-1)Q} + a_{n-2} s^{(n-2)Q} + \dots + a_1 s^Q + 1} \quad (3.83)$$

La norme  $H_2$  de l'erreur de modélisation est donc s'exprimée par :

$$E = W(j\omega)[a_n(j\omega)^{nQ} + \dots + a_1(j\omega)^Q + 1] - [b_m(j\omega)^{mQ} + \dots + b_1(j\omega)^Q + b_0] \quad (3.84)$$

L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle n'est pas appliquée que dans une plage de fréquences très restreinte.

### c. Méthode de Venagre

Le principe de cette méthode est basé la minimisation de la norme  $H_2$  de l'erreur d'approximation qui est préalablement pondérée par le vecteur  $v$ . On aura donc [78] :

$$E' = v^T \cdot \{W(j\omega)[a_n(j\omega)^{nQ} + \dots + a_1(j\omega)^Q + 1] - [b_m(j\omega)^{mQ} + \dots + b_1(j\omega)^Q + b_0]\} \quad (3.85)$$

Les composants constituant le vecteur  $v$  dépendent par les pulsations  $\omega_i$ , sachant que  $i = \overline{1; 2; \dots; f}$ . Ces composants sont exprimés par:

$$v_i = \begin{cases} \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_1^2} & \text{si } i = 1 \\ \frac{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}}{2\omega_i^2} & \text{si } 1 < i < f \\ \frac{\omega_f - \omega_{f-1}}{2\omega_f^2} & \text{si } i = f \end{cases} \quad (3.86)$$

Pratiquement, cette méthode a été proposée afin d'améliorer la qualité d'approximation du transfert fractionnaire notamment dans les basses fréquences.

### d. Identification fréquentielle par la commande *fitfrd* du *Matlab* :

En général, la fonction *fitfrd* est disponible dans la bibliothèque *Robust/Control/Toolbox* du logiciel *Matlab*. Elle est utilisée pour approximer un bloc de transfert d'ordre non entier dont sa réponse fréquentielle doit être rapproché, en module et en phase, à celle prédite par le modèle d'ordre entier. La syntaxe sous *Matlab* de cette fonction est très simple, premièrement il faut évaluer le transfert fractionnaire  $W(j\omega)$  dans une plage fréquentielle  $[\omega_b, \omega_h]$  réparties de façon logarithmique par la commande *frd*. Ensuite, on exploite les données d'entrée/sortie fournies par la première commande, en utilisant la commande *fitfrd* et en ressortissant une représentation d'état d'ordre entier qui modélise le transfert d'ordre entier  $W(j\omega)$ . L'ordre de ce dernier est ajusté par l'utilisateur afin d'aboutir une erreur de modélisation  $\xi_m$  qui doit être assez réduite et satisfaisant la condition suivante :

$$\|\tilde{W}(j\omega) - W(j\omega)\|_2 \leq \xi_m \quad (3.87)$$

### 3.5. Formulation du problème d'optimisation sous contraintes :

Nous rappelons ici que, le problème de la robustification du contrôleur  $H_\infty$  primaire basée sur les pondérations fractionnaires ajustables, peut être reformulé comme suit:

$$\min_{x_c} \left[ \max_{\omega} \left\{ \begin{aligned} &\sigma_{max} [W_{S_f}(x_c, \omega) \cdot S_{y_1}(j\omega)] + \sigma_{max} [W_{T_f}(x_c, \omega) \cdot T_{y_1}(j\omega)] \\ &+ \\ &\sigma_{max} [W_{U_f}(x_c, \omega) \cdot K_1 \cdot S_y(j\omega)] + \sigma_{max} [W_{SG_f}(x_c, \omega) \cdot S_{y_1}(j\omega) \cdot G_N(j\omega)] \end{aligned} \right\} \right] \quad (3.88)$$

En tenant compte-les contraintes de saturation ci-dessous :

$$x_{cmin} < x_c < x_{cmax} \quad (3.89)$$

Avec  $W_{S_f}$ ,  $W_{T_f}$ ,  $W_{U_f}$  et  $W_{SG_f}$  sont les pondérations fractionnaires ajustables limitant les sensibilités  $S_{y_1}$ ,  $T_{y_1}$ ,  $(K_1 \cdot S_y)$  et  $(S_{y_1} \cdot G_N)$  respectivement. La résolution de ce problème doit permettre non seulement d'assurer la sélection automatique de ces pondérations, mais également elle doit assurer l'amélioration de la marge initiale de robustesse  $RP$  fournie par le contrôleur  $H_\infty$  primaire.

#### 3.5.1. Solution du problème de robustification par l'algorithme d'essaim particulier:

L'optimisation par essaim particulière est une méthode développée en 1995 aux Etats-Unis sous le nom anglais "*Particle Swarm Optimization PSO*". Elle a été proposée par les deux psychologues *Russel Eberhart* et *James Kennedy* [80, 81]. Historiquement, l'idée de base cette méthode est inspirée de la nature. Elle consiste à chercher de modéliser des interactions sociales entre des « agents » devant atteindre un objectif donné dans un espace de recherche commun. Chaque agent ayant une certaine capacité de mémorisation et de traitement de l'information. La règle de base est qu'elle ne devrait y avoir aucun chef d'orchestre, ni même aucune connaissance par les agents de l'ensemble des informations, seulement des connaissances locales. Un modèle simple fait alors élaborer. Dès les premières simulations, le comportement collectif de ces agents évoqué celui d'un essaim d'être vivant convergeant parfois en plusieurs sous essaims vers des sites intéressants. Ce comportement se retrouve dans bien d'autres modèles, explicitement inspirés des systèmes naturels. Ici, la métaphore la plus pertinente est probablement celle de l'essaim d'abeilles, particulièrement du fait qu'une abeille ayant trouvée un site prometteur sait en informer certaines de ses consœurs et que celles-ci vont tenir compte de cette information pour leur prochain déplacement. Finalement, le modèle s'est révélé être trop

simple pour vraiment simuler un comportement social, mais par contre très efficace en tant qu'outil d'optimisation.

La version historique peut facilement être décrite en se plaçant du point de vue d'une particule. Au départ de l'algorithme, un essaim est réparti au hasard dans l'espace de recherche de dimension  $N$ , chaque particule  $j$  ayant également une vitesse aléatoire de déplacement. On note  $X_{c_j} = (x_{c_{j,1}}, x_{c_{j,2}}, \dots, x_{c_{j,N}})^T$  le vecteur qui caractérise la position d'une particule et  $V_j = (v_{j,1}, v_{j,2}, \dots, v_{j,N})^T$  le vecteur de changement de position (appelé vitesse) d'une particule. Ensuite, à chaque itération on a :

- Chaque particule  $j$  est capable d'évaluer la qualité de sa position et de garder en mémoire sa meilleure performance que l'on note  $x_{c_j}^{best} = (x_{c_{j,1}}^{best}, x_{c_{j,2}}^{best}, \dots, x_{c_{j,N}}^{best})^T$ , c'est-à-dire la meilleure position qu'elle a atteinte jusqu'ici (qui peut en fait être parfois la position courante) et sa qualité (la valeur en cette position de la fonction à optimiser).
- Chaque particule est capable d'interroger un certain nombre de ses congénères (ses informatrices, dont elle même) et d'obtenir de chacune d'entre-elles sa propre meilleure performance (et la qualité afférente). La meilleure position atteinte par toutes les particules de l'essaim est indiquée par un vecteur  $x_{swarm}^{best} = (x_{swarm,1}^{best}, x_{swarm,2}^{best}, \dots, x_{swarm,N}^{best})^T$ .
- A chaque itération, chaque particule choisie la meilleure des meilleures performances dont elle à connaissance, modifie sa vitesse en fonction de cette information et de ses propres données et se déplace en conséquence.

Une fois la meilleure informatrice détectée, la modification de la vitesse est une simple combinaison linéaire de trois tendances, à l'aide de coefficients de confiance qui sont les suivants: *coefficient d'inertie* de la particule (noté ici par  $c_0$ ), *coefficient d'attraction* de la particule vers sa meilleure position (noté ici par  $c_1$ ) et finalement, *coefficient d'attraction* de la particule vers la meilleure de ses voisines (noté ici par  $c_2$ ). Encore une fois on détermine cette vitesse, la nouvelle position de la particule est obtenue en ajoutant cette valeur de vitesse à la valeur de sa position obtenue à l'itération précédente. Ce processus se répète jusqu'à l'obtention d'une précision fixée à l'avance par l'utilisateur.

Les équations de mouvement d'une particule, pour chaque itération " $\ell$ ", sont définies par [39]:

$$V_j^{\ell+1} = c_0 \cdot V_j^\ell + c_1 \cdot r_1^\ell \cdot (x_{c_j}^{best,\ell} - X_{c_j}^\ell) + c_2 \cdot r_2^\ell \cdot (x_{swarm}^{best,\ell} - X_{c_j}^\ell) \quad (3.90)$$

$$X_{c_j}^{\ell+1} = X_{c_j}^{\ell} + V_j^{\ell+1} \quad (3.91)$$

Le mauvais choix des paramètres d'initialisation peut dégrader les performances de l'algorithme *PSO* mais n'empêche pas d'obtenir des solutions néanmoins acceptables de point de vue pratique. C'est pour cette raison que cet algorithme est considéré comme un algorithme d'optimisation robuste.

Le paragraphe suivant récapitule les étapes à suivre de l'algorithme de la robustification du contrôleur  $H_{\infty}$  primaire dans laquelle on introduit l'algorithme *PSO* pour assurer la sélection automatique des pondérations fractionnaires adéquates, puis on applique l'approche d'identification fréquentielle pour approximer ces pondérations en des filtres d'ordre entiers. Ces derniers sont utilisés pour formuler le problème de sensibilité pondérée ce qui est résolu par la méthode  $H_{\infty}$  utilisant l'approche *LMIs*. Ce processus se réitère jusqu'à l'obtention d'une marge de  $RP_1$  meilleure que celle fournie par le contrôleur  $H_{\infty}$  primaire. Ces étapes sont résumées comme suit :

### 3.5.2. Algorithme de la robustification basé sur les pondérations fractionnaires ajustable :

#### ❖ Initialisation de l'algorithme de robustification :

Dans cette étape, les transferts du modèle nominal  $G_N(s)$  et les pondérations irrationnelles fixes  $W_{S_0}(s)$ ,  $W_{T_0}(s)$ ,  $W_{U_0}(s)$  et  $W_{S_{G_0}}(s)$  sont supposés connus. Sachant que, le transfert du contrôleur  $H_{\infty}$  primaire  $K_0(s)$  est assuré par la méthode  $H_{\infty}$  utilisant l'un des deux algorithmes cités en premier chapitre. Ce dernier permet de fournir la marge de robustesse initiale  $RP_0$ . Finalement, les limites inférieure et supérieure de l'espace de recherche sont données à partir des règles de réglages précédente ainsi que le nombre des paramètres à optimiser est supposé égal à  $N$ .

#### ❖ Initialisation de l'algorithme *PSO*

A l'itération  $\ell = 0$ , la position de  $n_p \in \mathbb{N}$  particules  $(x_{c_j}^{\ell})_{j=1, \dots, n_p}$  est initialisée de façon aléatoire dans l'intervalle  $[x_{c_{min}}, x_{c_{max}}]$ , on obtient :

$$x_{c_j}^{\ell} = \left( \underbrace{M_{S_j}^{\ell}, \varepsilon_{S_j}^{\ell}, \omega_{B_j}^{\ell}, m_j^{\ell}}_{W_{S_{f_j}}^{\ell}}, \underbrace{M_{T_j}^{\ell}, \varepsilon_{T_j}^{\ell}, \omega_{BT_j}^{\ell}, n_j^{\ell}}_{W_{T_{f_j}}^{\ell}}, \underbrace{M_{U_j}^{\ell}, \varepsilon_{U_j}^{\ell}, \omega_{BC_j}^{\ell}, v_j^{\ell}}_{W_{U_{f_j}}^{\ell}}, \underbrace{M_{S_{G_j}}^{\ell}, \varepsilon_{S_{G_j}}^{\ell}, \omega_{S_{G_j}}^{\ell}, l_j^{\ell}}_{W_{S_{G_{f_j}}^{\ell}}} \right)^T \quad (3.92)$$

- **Etape C.1 :** pour chaque particule  $x_{c_j}^\ell$ , faire les sept étapes suivantes :

➤ **Etape C.1.1 :** Calculer les pondérations fractionnaires ajustables suivantes :

$$\left\{ W_{S_{f_j}}(s, x_{c_j}^\ell), W_{T_{f_j}}(s, x_{c_j}^\ell), W_{U_{f_j}}^\ell(s, x_{c_j}^\ell), W_{SG_{f_j}}^\ell(s, x_{c_j}^\ell) \right\};$$

➤ **Etape C.1.2 :** Calculer les réponses fréquentielles suivantes :

$$\left\{ W_{S_{f_j}}(\omega, x_{c_j}^\ell), W_{T_{f_j}}(\omega, x_{c_j}^\ell), W_{U_{f_j}}^\ell(\omega, x_{c_j}^\ell), W_{SG_{f_j}}^\ell(\omega, x_{c_j}^\ell) \right\};$$

➤ **Etape C.1.3 :** Appliquer l'algorithme d'approximation utilisant l'approche d'identification fréquentielle. On obtient donc les filtres d'ordre entier ci-dessous :

$$\left\{ W_{S_{1_j}}^\ell(s), W_{T_{1_j}}^\ell(s), W_{U_{1_j}}^\ell(s), W_{SG_{1_j}}^\ell(s) \right\};$$

➤ **Etape C.1.4 :** Déterminer le système augmenté à partir de ces filtres d'ordre entier et le modèle nominal  $G_N(s)$  ;

➤ **Etape C.1.5 :** Formuler le problème de sensibilité pondérée, ensuite le résoudre par la méthode  $H_\infty$ . On obtient le contrôleur  $H_\infty$  suivant:  $\{K_{0_j}^\ell(s)\}$ ;

➤ **Etape C.1.6 :** Déterminer les nouvelles sensibilités  $\{S_{y_{0_j}}^\ell(s), T_{y_{0_j}}^\ell(s), K_{0_j}^\ell(s) \cdot S_{y_{0_j}}^\ell(s), G_N(s) \cdot S_{y_{0_j}}^\ell(s)\}$ ;

➤ **Etape C.1.7 :** Evaluer la fonction objective  $RP(x_{c_j}^\ell)$  avec :

$$RP_{0_j}^\ell = \left\| W_{S_{1_j}}^\ell \cdot S_{y_{0_j}}^\ell \right\|_\infty + \left\| W_{T_{1_j}}^\ell \cdot T_{y_{0_j}}^\ell \right\|_\infty + \left\| W_{U_{1_j}}^\ell \cdot K_{0_j}^\ell \cdot S_{y_{0_j}}^\ell \right\|_\infty + \left\| W_{SG_{1_j}}^\ell \cdot G_N \cdot S_{y_{0_j}}^\ell \right\|_\infty \quad (3.93)$$

- **Etape C.2 :** sachant que l'étape précédente est achevée par l'obtention  $n_p$  marges de robustesses telles que :  $(RP_{0_1}^\ell \quad RP_{0_2}^\ell \quad \dots \quad RP_{0_{n_p}}^\ell)$ . D'où, les solutions  $x_{c_j}^{best,\ell}$  and  $x_{swarm}^{best,\ell}$  sont obtenues comme suit:

$$\begin{cases} x_{c_j}^{best,\ell} = \min_{x_{c_j}^\ell} \{RP_{0_j}^\ell, 0 \leq i \leq \ell\} \\ x_{swarm}^{best,\ell} = \min_{x_{c_j}^\ell} \{RP_{0_j}^\ell, \forall j\} \end{cases} \quad (3.94)$$

Ensuite, La position et la vitesse de chaque particule sont mises à jour en fonction des deux expressions (3.90) et (3.91) respectivement. Aller à l'étape C.3.

- **Etape C.3 :** test d'arrêt :

Le critère d'arrêt est associé par la plus faible marge de robustesse, notée  $RP_1$ , sachant qu'elle est donnée par:  $RP_{min} = J(x_{swarm}^{best,\ell})$ . Si la condition  $RP_{min} < RP_0$  n'est vérifiée, le transfert du contrôle  $H_\infty$  robustifié est celui donné par  $K_0(s)$ . Sinon, on doit faire les changements ci-dessous :

- ✓ Incrémenter le nombre d'itération  $\ell$  par 1, i.e.  $\ell \leftarrow \ell + 1$  ;
- ✓ Mettre à jour la valeur de  $RP_0$  par celle de  $RP_{min}$ , i.e.  $RP_0 \leftarrow RP_{min}$  ;
- ✓ Mettre à jour le transfert du contrôleur  $K_0(s)$  par celui fournissant la marge de robustesse  $RP_{min}$

Retourner à l'**Etape C.1**.

**Remarque :**

Dans l'**étape C.1.4**, si la solution de la méthode  $H_\infty$  est vide (i.e.,  $\{K_{0h}^\ell(s)\}_{h \in \{1, n_p\}} = [ ]$ ). Dans ce cas, la particule  $x_{c_h}^\ell$  fournissant cette anomalie doit être réinitialisée aléatoirement dans ses limites correspondantes  $x_{c_{min}} \leq x_{c_h}^\ell \leq x_{c_{max}}$  avant de retourner à l'**étape C.1.1**.

Il convient à noter ici que, le problème de sensibilité pondérée ne peut pas être résolu par la fonction *Hinflmi* du logiciel *Matlab* avec des pondérations fractionnaires ajustables. Il faut tout d'abord les approximer par des filtres irrationnels dont ses transferts doivent être fournis avec des ordres très réduits. Cet objectif est assuré par l'identification fréquentielle basée sur la commande *fitfrd* du logiciel *Matlab*. Les étapes de cet algorithme sont [40] :

**3.5.3. Algorithme d'identification fréquentielle:**

Dans cette partie, on suppose qu'on a les transferts des pondérations fractionnaires ajustables suivantes  $W_{S_{f_j}}^\ell(s, x_{c_j}^\ell)$ ,  $W_{T_{f_j}}^\ell(s, x_{c_j}^\ell)$ ,  $W_{U_{f_j}}^\ell(s, x_{c_j}^\ell)$  et  $W_{SG_{f_j}}^\ell(s, x_{c_j}^\ell)$ . Sachant que l'approximation souhaitée de ces pondérations est effectuée dans une plage de fréquence définies *a priori* par  $\omega \in [\omega_{min}, \omega_{max}]$ . Les filtres irrationnels correspondants d'ordre réduit peuvent être obtenus comme suit :

- ❖ **Etape 1 :** Déterminer les réponses fréquentielles des pondérations suivantes  $W_{S_{f_j}}^\ell(s, x_{c_j}^\ell)$ ,  $W_{T_{f_j}}^\ell(s, x_{c_j}^\ell)$ ,  $W_{U_{f_j}}^\ell(s, x_{c_j}^\ell)$  et  $W_{SG_{f_j}}^\ell(s, x_{c_j}^\ell)$ .
- ❖ **Etape 2 :** Mettre un choix plus faible des ordres entiers :  $n_{S_{f_j}}$ ,  $n_{T_{f_j}}$ ,  $n_{U_{f_j}}$  et  $n_{SG_{f_j}}$  pour les filtres souhaités  $W_{S_{1_j}}^\ell(s)$ ,  $W_{T_{1_j}}^\ell(s)$ ,  $W_{U_{1_j}}^\ell(s)$ ,  $W_{SG_{1_j}}^\ell(s)$  approximant les pondérations fractionnaires  $W_{S_{f_j}}^\ell(s, x_{c_j}^\ell)$ ,  $W_{T_{f_j}}^\ell(s, x_{c_j}^\ell)$ ,  $W_{U_{f_j}}^\ell(s, x_{c_j}^\ell)$  et  $W_{SG_{f_j}}^\ell(s, x_{c_j}^\ell)$  respectivement. De plus, choisir les précisions d'approximation souhaitée :  $\Delta W_S$ ,  $\Delta W_T$ ,  $\Delta W_U$  et  $\Delta W_{SG}$ , puis aller à l'étape suivante.

❖ **Etape 3 :** Appliquer séparément la commande *fitfrd* sur chaque réponse fréquentielle  $W_{S_{fj}}^\ell(\omega, x_{c_j}^\ell)$ ,  $W_{T_{fj}}^\ell(\omega, x_{c_j}^\ell)$ ,  $W_{U_{fj}}^\ell(\omega, x_{c_j}^\ell)$  et  $W_{SG_{fj}}^\ell(\omega, x_{c_j}^\ell)$ . On obtient, par conséquent, les filtres d'ordre entier:  $W_{S_{1j}}^\ell(s)$ ,  $W_{T_{1j}}^\ell(s)$ ,  $W_{U_{1j}}^\ell(s)$ ,  $W_{SG_{1j}}^\ell(s)$ . Aller à l'étape suivante.

❖ **Etape 4 :** Vérifier, pour chaque approximation, les critères d'arrêts suivants:

$$\|W_{S_{fj}}^\ell(\omega, x_{c_j}^\ell) - W_{S_{1j}}^\ell(\omega)\|_2 \leq \Delta W_S, \|W_{T_{fj}}^\ell(\omega, x_{c_j}^\ell) - W_{T_{1j}}^\ell(\omega, x)\|_2 \leq \Delta W_T$$

$$\|W_{U_{fj}}^\ell(\omega, x_{c_j}^\ell) - W_{U_{1j}}^\ell(\omega, x)\|_2 \leq \Delta W_U, \|W_{SG_{fj}}^\ell(\omega, x_{c_j}^\ell) - W_{SG_{1j}}^\ell(\omega, x)\|_2 \leq \Delta W_{SG}$$

- **Si :** les conditions sur  $\Delta W_S$ ,  $\Delta W_T$ ,  $\Delta W_U$  et  $\Delta W_{SG}$  sont satisfaites, arrêter l'algorithme.
- **Sinon :** mettre, la ou la précision souhaitée n'est pas atteinte, les incréments ci-dessous:

$$\begin{cases} n_{S_{fj}} \leftarrow n_{S_{fj}} + 1 \\ n_{T_{fj}} \leftarrow n_{T_{fj}} + 1 \\ n_{U_{fj}} \leftarrow n_{U_{fj}} + 1 \\ n_{SG_{fj}} \leftarrow n_{SG_{fj}} + 1 \end{cases}$$

Puis retourner à l'étape 3

### 3.6. Simulations et interprétations des résultats :

Dans cette partie, la robustification proposée dans ce chapitre est validée sur le même système hydraulique cité précédemment. Nous rappelons que l'objectif de cette robustification réside dans la satisfaction de la condition *RP* et de l'assurer avec une marge de sécurité acceptable du point de vue pratique. Sachant que cet objectif est assuré par l'optimisation adéquate des paramètres des pondérations dont l'allure souhaitée de chacune est imposée par un gabarit correspondant prédéfini par les mêmes règles de réglage. La sélection automatique lors de cette robustification est effectuée dans un espace de recherche plus large que celui mentionné en deuxième chapitre. Autrement dit, l'algorithme de *PSO* à la capacité de fournir non seulement des pondérations irrationnelles ajustables. Il peut également fournir des transferts fractionnaires définissant les pondérations souhaitées. Ces transferts doivent être préalablement rapprochés par des filtres d'ordre entier en utilisant l'approche basée sur l'identification fréquentielle.

En comparaison avec l'ancien espace de recherche cité précédemment, le nouvel espace est donc imposé comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{S_1}: \begin{cases} 1.5 < M_{S_1} < 2 \\ 1.3 < m_1 < 1.5 \end{cases} \\ W_{U_1}: \begin{cases} 4 < M_{U_1} < 5.66 \\ 2 < \omega_{BC_1} < 3.33 \end{cases} \\ W_{T_1}: \begin{cases} 1.75 < M_{T_1} < 2.07 \\ 0.5 < \omega_{BT_1} < 0.868 \\ 1.5 < n_1 < 2 \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.95)$$

Sachant que tous les paramètres des pondérations fractionnaires désirées  $W_{S_{fj}}^\ell(s, x_{c_j}^\ell)$  et  $W_{U_{fj}}^\ell(s, x_{c_j}^\ell)$  et  $W_{T_{fj}}^\ell(s, x_{c_j}^\ell)$  doivent être optimisés pour  $j = 1, 2, \dots, n_p$  particules pendant toutes les itérations  $\ell = 0, 1, \dots, \ell_{max}$ . A cet effet, les paramètres de réglage de l'algorithme *PSO* ont été choisis comme suit :

- Nombre des paramètres à optimiser :  $N = 7$
- Nombre maximum des itérations :  $\ell_{max} = 160$
- Taille de l'essaim :  $n_p = 16$
- Facteur d'inertie  $c_0 = c_{0max} - \left(\frac{c_{0max} - c_{0min}}{\ell_{max}}\right) \cdot \ell$ , où  $c_{0max} = 0.9$ ,  $c_{0min} = 0.4$ .
- Taux d'apprentissage cognitif:  $c_1 = 1.65$
- Taux d'apprentissage social :  $c_2 = 1.75$

Dans la suite de ce travail, nous allons détailler l'algorithme de robustification proposé en utilisant les données citées ci-dessus. On obtient donc :

A l'itération initiale (i.e.,  $\ell = 0$ ), on obtient les 16 positions initiales des particules ci-dessous:

$$x_1^0 = \begin{pmatrix} M_{S_1}^0 \\ n_{S_1}^0 \\ M_{U_1}^0 \\ \omega_{BC_1}^0 \\ M_{T_1}^0 \\ \omega_{BT_1}^0 \\ m_{T_1}^0 \end{pmatrix}, x_2^0 = \begin{pmatrix} M_{S_2}^0 \\ n_{S_2}^0 \\ M_{U_2}^0 \\ \omega_{BC_2}^0 \\ M_{T_2}^0 \\ \omega_{BT_2}^0 \\ m_{T_2}^0 \end{pmatrix}, \dots, x_{16}^0 = \begin{pmatrix} M_{S_{16}}^0 \\ n_{S_{16}}^0 \\ M_{U_{16}}^0 \\ \omega_{BC_{16}}^0 \\ M_{T_{16}}^0 \\ \omega_{BT_{16}}^0 \\ m_{T_{16}}^0 \end{pmatrix} \quad (3.96)$$

Où chaque particule est aléatoirement choisie entre ses bornes inférieure et supérieure comme suit :

$$1.5 \leq \begin{pmatrix} M_{S_1}^0 \\ \vdots \\ M_{S_{16}}^0 \end{pmatrix} \leq 2, 4 \leq \begin{pmatrix} M_{U_1}^0 \\ \vdots \\ M_{U_{16}}^0 \end{pmatrix} \leq 5.66, 1.3 \leq \begin{pmatrix} n_{S_1}^0 \\ \vdots \\ n_{S_{16}}^0 \end{pmatrix} \leq 1.5, 2 \leq \begin{pmatrix} \omega_{BC_1}^0 \\ \vdots \\ \omega_{BC_{16}}^0 \end{pmatrix} \leq 3.33,$$

$$1.75 \leq \begin{pmatrix} M_{T_1}^0 \\ \vdots \\ M_{T_{16}}^0 \end{pmatrix} \leq 2.07, 0.5 \leq \begin{pmatrix} \omega_{BT_1}^0 \\ \vdots \\ \omega_{BT_{16}}^0 \end{pmatrix} \leq 0.868 \text{ et } 1.5 \leq \begin{pmatrix} n_{T_1}^0 \\ \vdots \\ n_{T_{16}}^0 \end{pmatrix} \leq 2.$$

✓ L'étape C.1.1 fournit les 32 pondérations fractionnelles ajustables suivantes:

$$W_{S_{f_1}}^0(s, x_{c_1}^0) = \left( \frac{\frac{s}{n_{S_1}^0} + \omega_{B_1}^0}{s + \omega_{B_1}^0 \cdot n_{S_1}^0 \sqrt{\varepsilon_{S_1}^0}} \right)^{n_{S_1}^0}, \dots, W_{S_{f_{16}}}^0(s, x_{c_{16}}^0) = \left( \frac{\frac{s}{n_{S_{16}}^0} + \omega_{B_{16}}^0}{s + \omega_{B_{16}}^0 \cdot n_{S_{16}}^0 \sqrt{\varepsilon_{S_{16}}^0}} \right)^{n_{S_{16}}^0}$$

$$W_{T_{f_1}}^0(s, x_{c_1}^0) = \left( \frac{\frac{s}{\omega_{BT_1}^0} + \frac{1}{n_{T_1}^0 \sqrt{M_{T_1}^0}}}{\frac{n_{T_1}^0 \sqrt{\varepsilon_{T_1}^0}}{\omega_{BT_1}^0} \cdot s + 1} \right)^{n_{T_1}^0}, \dots, W_{T_{f_{16}}}^0(s, x_{c_{16}}^0) = \left( \frac{\frac{s}{\omega_{BT_{16}}^0} + \frac{1}{n_{T_{16}}^0 \sqrt{M_{T_{16}}^0}}}{\frac{n_{T_{16}}^0 \sqrt{\varepsilon_{T_{16}}^0}}{\omega_{BT_{16}}^0} \cdot s + 1} \right)^{n_{T_{16}}^0}$$

et 16 pondérations irrationnelles ajustables suivante :

$$W_{U_1}^0(s, x_{c_1}^0) = \frac{\frac{s}{\omega_{BC_1}^0} + \frac{1}{M_{U_1}^0}}{\frac{\varepsilon_{U_1}^0}{\omega_{BC_1}^0} \cdot s + 1}, \dots, W_{U_{16}}^0(s, x_{c_{16}}^0) = \frac{\frac{s}{\omega_{BC_{16}}^0} + \frac{1}{M_{U_{16}}^0}}{\frac{\varepsilon_{U_{16}}^0}{\omega_{BC_{16}}^0} \cdot s + 1}$$

Dans l'étape C.1.2, la réponse fréquentielle de chaque pondération fractionnaire est évaluée pour 1000 fréquences réparties uniformément dans la plage de fréquence  $\omega \in [10^{-3}, 20]$  radians/secondes. Cette étape fournit les réponses fréquentielles ci-dessous :

$$W_{S_{f_1}}^0(\omega_r, x_{c_1}^0) = \left( \frac{\frac{j \cdot \omega_r}{n_{S_1}^0} + \omega_{B_1}^0}{j \cdot \omega_r + \omega_{B_1}^0 \cdot n_{S_1}^0 \sqrt{\varepsilon_{S_1}^0}} \right)^{n_{S_1}^0}, \dots, W_{S_{f_{16}}}^0(\omega_r, x_{c_{16}}^0) = \left( \frac{\frac{j \cdot \omega_r}{n_{S_{16}}^0} + \omega_{B_{16}}^0}{j \cdot \omega_r + \omega_{B_{16}}^0 \cdot n_{S_{16}}^0 \sqrt{\varepsilon_{S_{16}}^0}} \right)^{n_{S_{16}}^0}$$

$$W_{T_{f_1}}^0(\omega_r, x_{c_1}^0) = \left( \frac{\frac{j \cdot \omega_r}{\omega_{BT_1}^0} + \frac{1}{n_{T_1}^0 \sqrt{M_{T_1}^0}}}{\frac{n_{T_1}^0 \sqrt{\varepsilon_{T_1}^0}}{\omega_{BT_1}^0} j \cdot \omega_r + 1} \right)^{n_{T_1}^0}, \dots, W_{T_{f_{16}}}^0(\omega_r, x_{c_{16}}^0) = \left( \frac{\frac{j \cdot \omega_r}{\omega_{BT_{16}}^0} + \frac{1}{n_{T_{16}}^0 \sqrt{M_{T_{16}}^0}}}{\frac{n_{T_{16}}^0 \sqrt{\varepsilon_{T_{16}}^0}}{\omega_{BT_{16}}^0} j \cdot \omega_r + 1} \right)^{n_{T_{16}}^0},$$

Avec  $r = 1, 2, \dots, 1000$ ,  $\omega_1 = 10^{-3}$  et  $\omega_{1000} = 20$ . De plus, l'algorithme d'identification fréquentielle, cité dans le paragraphe 3.4.3, est ensuite appliqué avec le choix des deux ordres entiers suivants:  $n_{S_{f_j}} = 2$  et  $n_{T_{f_j}} = 2$  et les deux précisions souhaitées suivantes:  $\Delta W_S = 10^{-3}$  et

$\Delta W_T = 10^{-3}$ . Finalement, cet algorithme est achevé par l'obtention de 32 filtres d'ordre entier équivalents approximant les 32 pondérations fractionnaires citées ci-dessus. Ces filtres sont ensuite utilisés avec les 16 pondérations irrationnelles  $W_{U_j}^0(s, x_{c_j}^0)$  pour augmenter le modèle nominal  $G_N(s)$ . On obtient donc les 16 problèmes de sensibilités pondérées suivants :

$$\left\| \begin{array}{l} W_{S_{11}}^0(s) \cdot S_{y_{01}}^0(s) \\ W_{U_1}^0(s) \cdot K_{01}^0(s) \cdot S_{y_{01}}^0(s) \\ W_{T_{11}}^0(s) \cdot T_{y_{01}}^0(s) \end{array} \right\|_{\infty}, \left\| \begin{array}{l} W_{S_{12}}^0(s) \cdot S_{y_{02}}^0(s) \\ W_{U_2}^0(s) \cdot K_{02}^0(s) \cdot S_{y_{02}}^0(s) \\ W_{T_{12}}^0(s) \cdot T_{y_{02}}^0(s) \end{array} \right\|_{\infty}, \dots, \left\| \begin{array}{l} W_{S_{16}}^0(s) \cdot S_{y_{016}}^0(s) \\ W_{U_{16}}^0(s) \cdot K_{016}^0(s) \cdot S_{y_{016}}^0(s) \\ W_{T_{16}}^0(s) \cdot T_{y_{016}}^0(s) \end{array} \right\|_{\infty}$$

Dans l'étape C.1.5, on obtient 16 contrôleurs  $H_{\infty}$ , qui sont:  $K_{01}^0(s)$ ,  $K_{02}^0(s)$ , ...,  $K_{016}^0(s)$  qui avec lesquels on peut déterminer les sensibilités  $(S_{y_{01}}^0 ; K_{01}^0 \cdot S_{y_{01}}^0 ; T_{y_{01}}^0)$ ,  $(S_{y_{02}}^0 ; K_{02}^0 \cdot S_{y_{02}}^0 ; T_{y_{02}}^0)$ , ...,  $(S_{y_{016}}^0 ; K_{016}^0 \cdot S_{y_{016}}^0 ; T_{y_{016}}^0)$ . Ces dernières permettant de fournir les 16 marges de robustesses  $RP$ , qui sont obtenues comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} RP_{01}^0 = \left\| W_{S_{11}}^0 \cdot S_{y_{01}}^0 \right\|_{\infty} + \left\| W_{T_{11}}^0 \cdot T_{y_{01}}^0 \right\|_{\infty} + \left\| W_{U_1}^0 \cdot K_{01}^0 \cdot S_{y_{01}}^0 \right\|_{\infty} \\ \vdots \\ RP_{016}^0 = \left\| W_{S_{16}}^0 \cdot S_{y_{016}}^0 \right\|_{\infty} + \left\| W_{T_{16}}^0 \cdot T_{y_{016}}^0 \right\|_{\infty} + \left\| W_{U_{16}}^0 \cdot K_{016}^0 \cdot S_{y_{016}}^0 \right\|_{\infty} \end{array} \right.$$

Ces marges sont comparées entre elles afin de déterminer les deux vecteurs  $x_j^{best,0}$  et  $x_{swarm}^{best,0}$  sachant que ce dernier fourni la meilleure marge, *i.e.*,  $RP_{min} = J(x_{swarm}^{best,\ell})$ . Finalement, la mise à jour de la position et celle de la vitesse de chaque particule sont assurées par les deux équations (3.90) et (3.91) et toutes les étapes précédentes sont réitérées jusqu'à  $\ell_{max} = 160$  itérations. La Fig.3.2 représente l'évolution de la fonction objective pendant les 160 itérations pour 15 exécutions de l'algorithme de robustification proposé. On obtient donc :

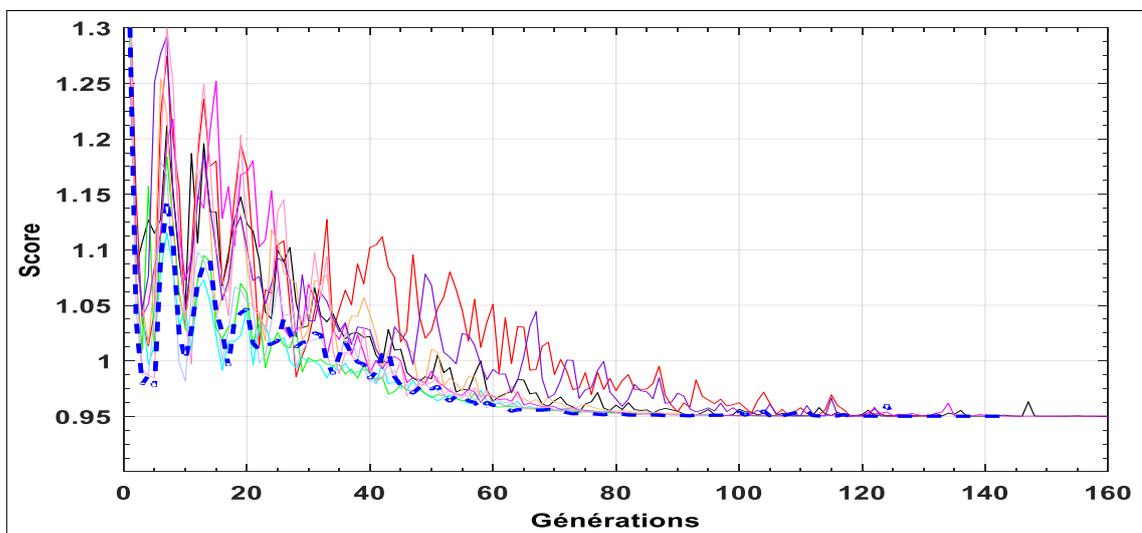


Fig.3.2. Evolution de la fonction objective pendant les itérations de l'algorithme PSO

La Fig.3.2 montre clairement que parmi les 15 exécutions de l’algorithme de robustification proposé, il existe certains cas où la condition  $RP$  est satisfaite à partir de l’itération  $\ell = 30$ . Ceci confirme aisément que l’utilisation des pondérations fractionnaires est indispensable pour améliorer cette marge de robustesse. La meilleure amélioration de  $RP$  est assurée par le vecteur  $x_{swarm}^{best, \ell_{max}}$ , ce qui fourni les paramètres optimaux des trois pondérations ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} M_{S_1} = 1.82 < 2 \\ 1.3 < m_1 = 1.37 < 1.5 \end{array} \Rightarrow W_{S_f}^{\ell_{max}}(s, x_{c_{optimal}}^{\ell_{max}}) = \left( \frac{\frac{s}{1.5\sqrt{1.82}} + 0.02}{s + 0.02\sqrt{10^{-3}}} \right)^{1.5} \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} M_{U_1} = 4.82 < 5.66 \\ \omega_{BC_1} = 2.05 < 3.33 \end{array} \Rightarrow W_U^{\ell_{max}}(s, x_{c_{optimal}}^{\ell_{max}}) = \frac{\frac{s}{2.05} + \frac{1}{10^{-3}}}{2.05 \cdot s + 1} \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} M_{T_1} = 1.92 < 2.07 \\ \omega_{BT_1} = 0.56 < 0.868 \end{array} \Rightarrow W_{T_f}^{\ell_{max}}(s, x_{c_{optimal}}^{\ell_{max}}) = \left( \frac{\frac{s}{0.56} + \frac{1}{1.75\sqrt{1.92}}}{\frac{\sqrt{10^{-3}}}{0.56} \cdot s + 1} \right)^{1.75} \\ 1.5 < n_1 = 1.75 < 2 \end{array} \right. \quad (3.97)$$

Sachant que les deux filtres irrationnels  $W_{S_1}(s)$  et  $W_{T_1}(s)$  approximant les deux pondérations fractionnaires  $W_{S_f}^{\ell_{max}}(s, x_{c_{optimal}}^{\ell_{max}})$  et  $W_{T_f}^{\ell_{max}}(s, x_{c_{optimal}}^{\ell_{max}})$  sont obtenus par les deux précisions  $2.6952 \times 10^{-4}$  et  $2.6418 \times 10^{-3}$  respectivement. Les transferts correspondant sont donc donnés par :

$$W_{S_1}(s) = \frac{0.454(s+0.033)(s+0.019)(s+0.006)(s+0.0015)}{(s+0.013)(s+0.0036)(s+0.00081)(s+0.0000037)} \quad (3.98)$$

$$W_{T_1}(s) = \frac{1012.3(s+6.817)(s+1.742)(s+0.5057)(s+0.3484)}{(s+35.55)(s+18.92)(s+4.86)(s+1.2444)} \quad (3.99)$$

La Fig.3.3 représente le rapprochement, en module et en phase, des deux réponses fréquentielles fournies par la pondération fractionnelle ajustable  $W_{S_f}^{\ell_{max}}(s, x_{c_{optimal}}^{\ell_{max}})$  et le filtre d’ordre entier équivalent  $W_{S_1}(s)$ . De plus, La Fig.3.4 représente le rapprochement, en module et en phase, des deux réponses fréquentielles fournies par la pondération fractionnelle ajustable  $W_{T_f}^{\ell_{max}}(s, x_{c_{optimal}}^{\ell_{max}})$  et le filtre d’ordre entier équivalent  $W_{T_1}(s)$ . On obtient :

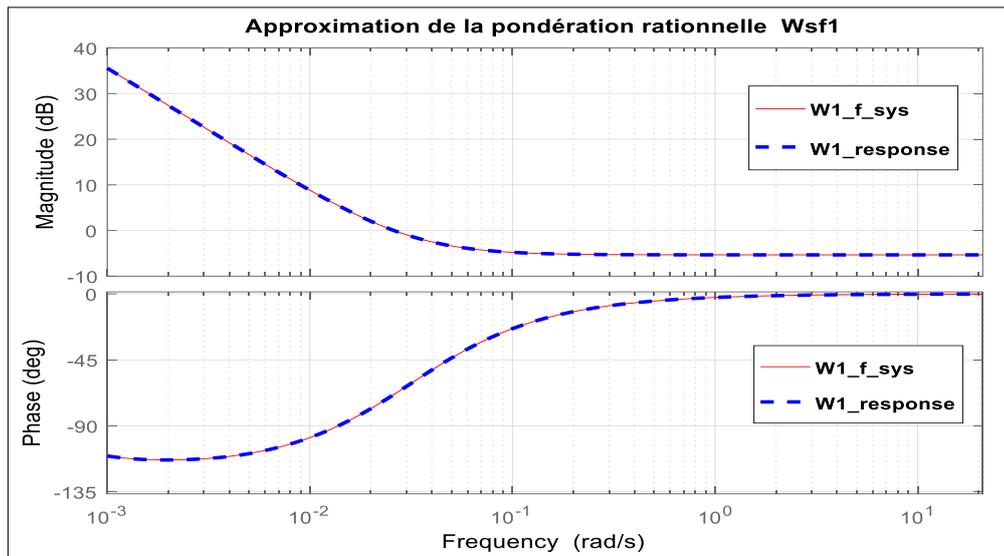


Fig.3.3. approximation de la pondération fractionnaire  $W_{S_f}$  par le filtre d'ordre entier  $W_{S_1}$

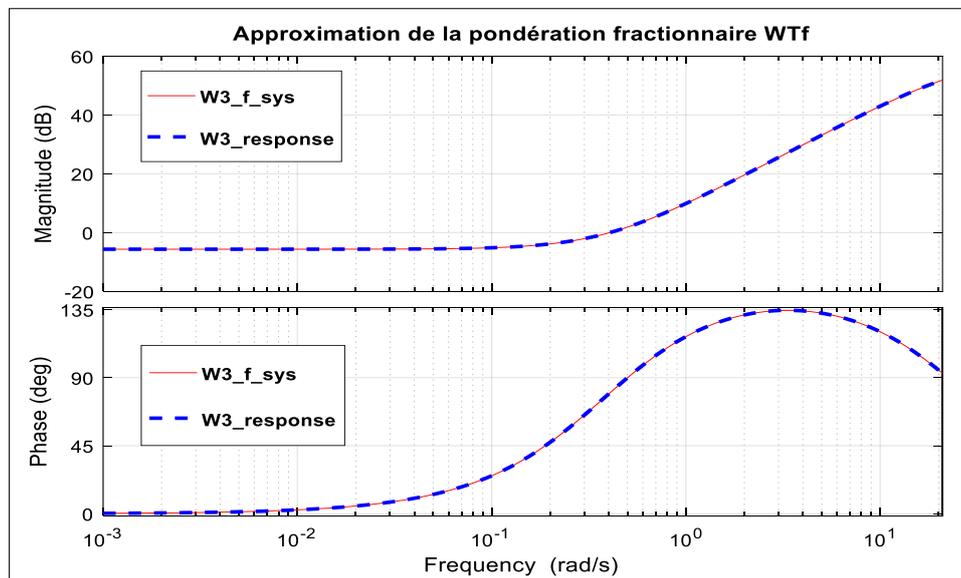


Fig.3.4. approximation de la pondération fractionnaire  $W_{T_f}$  par le filtre d'ordre entier  $W_{T_1}$

Finalement, la méthode  $H_\infty$  basée sur l'approche LMIs fournit un contrôleur  $H_\infty$  robustifié d'ordre 14 et un niveau de performance égal à  $\gamma=0.924$ . D'où, le [tableau.3.1](#) ci-dessous récapitule le gain, les pôles et les zéros de ce contrôleur. On obtient :

[Tableau.3.1](#) récapitule le gain, les pôles et les zéros de ce contrôleur  $H_\infty$  robustifié

<b>Gain</b>	<b>0.038</b>				
<b>Pôles</b>	<b>-0.0008123</b>	<b>-2.83e-05</b>	<b>-1.3305+0.088146j</b>	<b>-1.3305-0.088146j</b>	<b>-0.791+0.75321j</b>
<b>zéros</b>	<b>-0.00529</b>	<b>-0.001467</b>	<b>-0.30745+0.83491j</b>	<b>-0.30745-0.83491j</b>	<b>-1.7565- 1.0202j</b>

<b>Pôles</b>	<b>-0.791- 0.75321j</b>	<b>-34.94</b>	<b>-17.62</b>	<b>-5.233</b>	<b>-1.252</b>	<b>-0.503</b>	<b>-0.02058</b>	<b>-0.01322</b>	<b>-0.003681</b>
--------------	-------------------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	-----------------	-----------------	------------------

zéros	-1.7565+ 1.0202.j	-38.44	-31.16	-18.58	-4.86	-9819	-0.181	-0.0165	-0.0145
-------	-------------------	--------	--------	--------	-------	-------	--------	---------	---------

Les conditions de robustesses sur  $RS$  fournies par la robustification utilisant les pondérations fractionnaires ajustable et celle utilisant les pondérations irrationnelles ajustable sont illustrées par la Fig.3.5, sachant que  $T_{y_{01}}(s)$  et  $T_{y_1}(s)$  représentent respectivement les sensibilités complémentaire fournies par la première et la deuxième robustification proposées. On obtient :

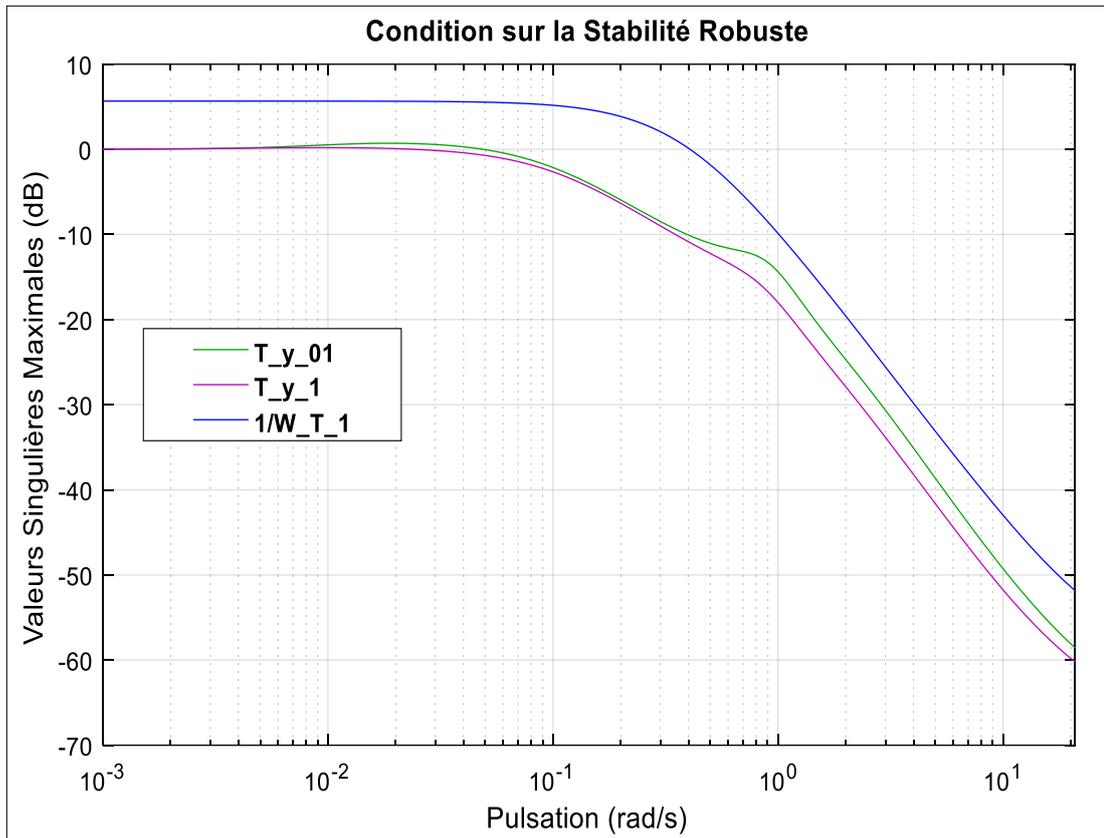


Fig.3.5. Comparaison des deux conditions RS fournies par la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> robustification proposée.

De plus, les conditions de robustesses sur  $NP$  fournies par la robustification utilisant les pondérations fractionnaires ajustable et celle utilisant les pondérations irrationnelles ajustable sont illustrées par la Fig.3.6, sachant que  $S_{y_{01}}(s)$  et  $S_{y_1}(s)$  représentent respectivement les sensibilités directes fournies par la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> robustification proposée. On obtient :

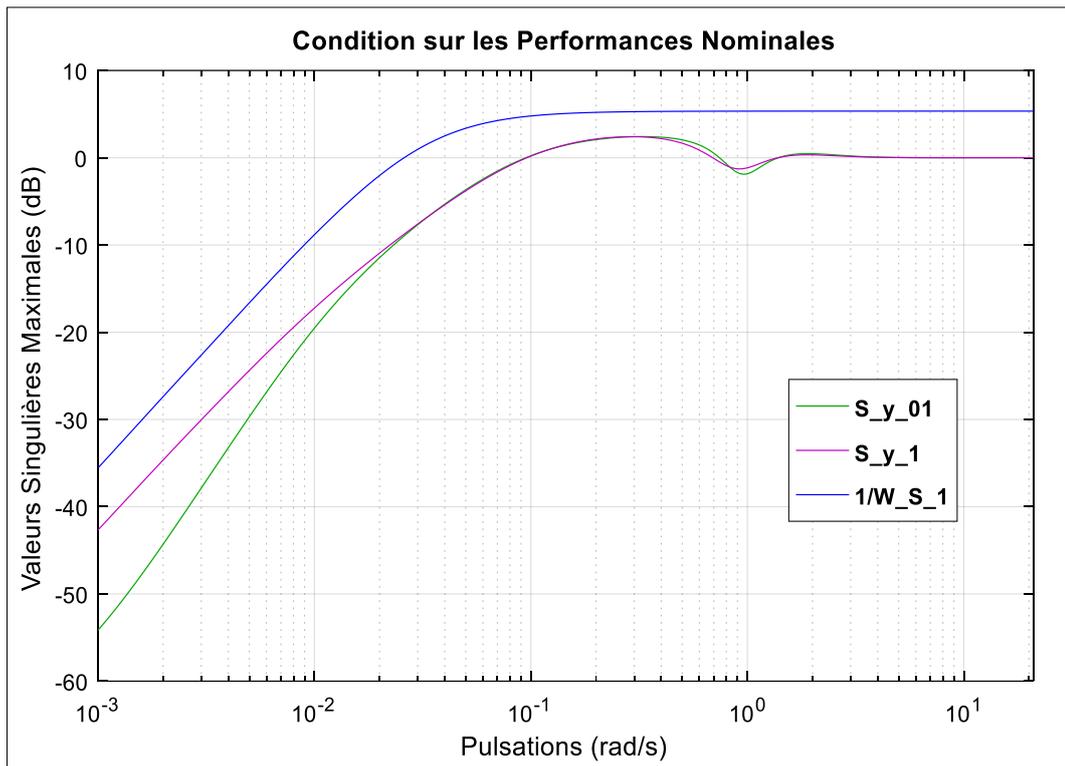


Fig.3.6. Comparaison des deux robustesses NP fournies par la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> robustification proposée.

Maintenant, les conditions sur la limitation de l'énergie de commande sont comparées par Fig.3.7, sachant que  $K_{01} \cdot S_{y_{01}}(s)$  et  $K_1 \cdot S_{y_1}(s)$  représentent respectivement les sensibilités fournies par la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> robustification proposée. On obtient :

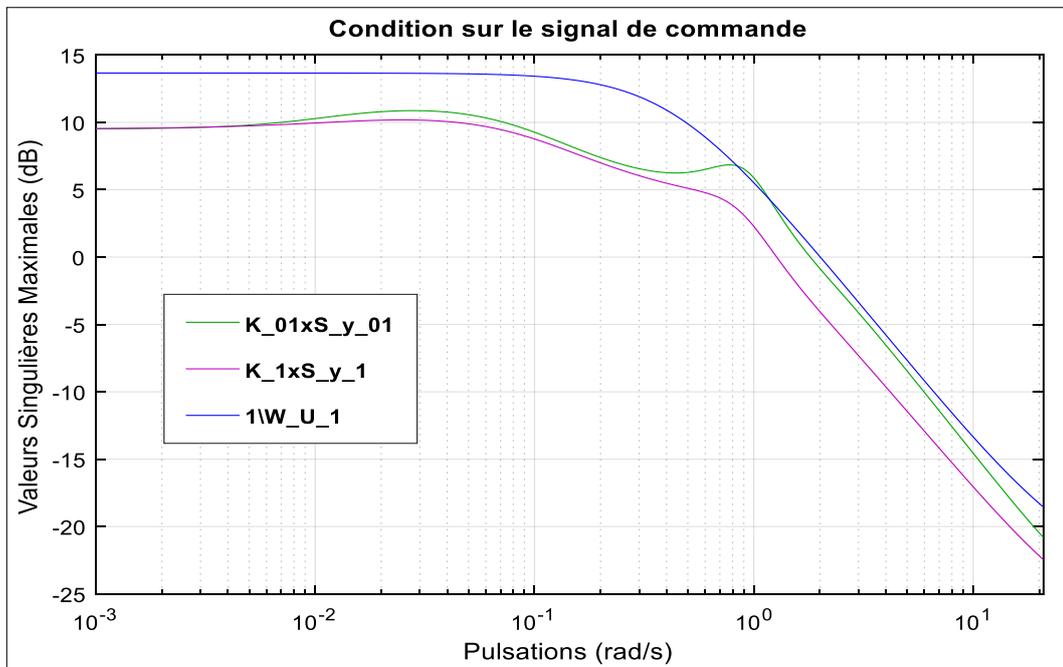


Fig.3.7. Comparaison des deux limitations de commande fournies par la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> robustification proposée.

Le compromis de robustesse trouvé dans le chapitre précédent est comparé à celui fournie par cette robustification. Cette comparaison est illustrée dans la Fig.3.8. On obtient :

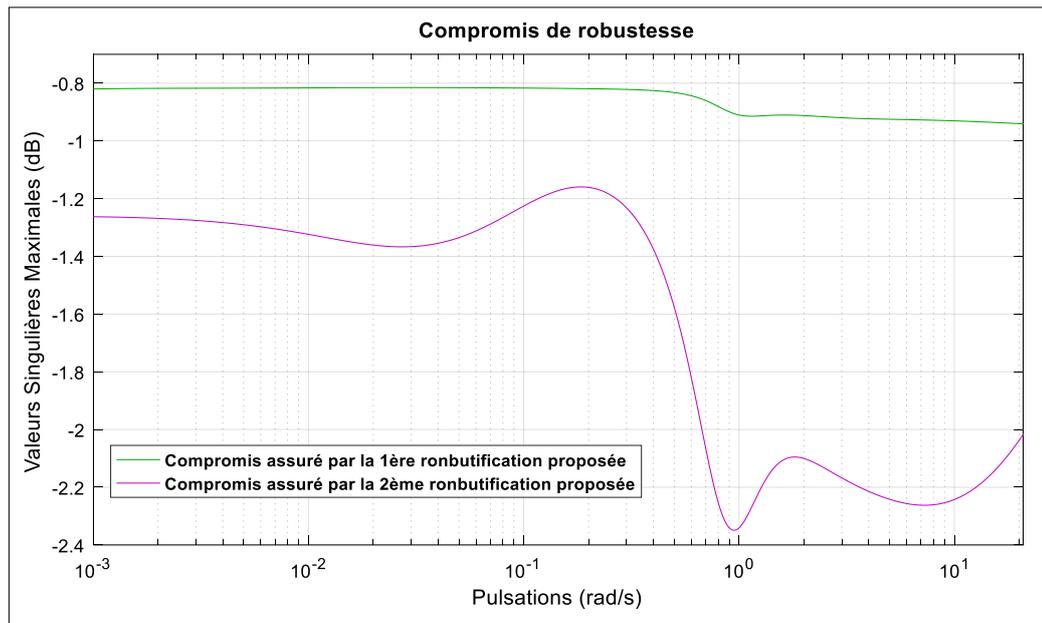


Fig.3.8. Comparaison des deux compromis de robustesses fournis par la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> robustification proposée.

Les deux robustesses de *RP* fournies par la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> robustification proposée sont finalement dans toutes les fréquences. Cette comparaison illustrée dans la Fig.3.9. On obtient :

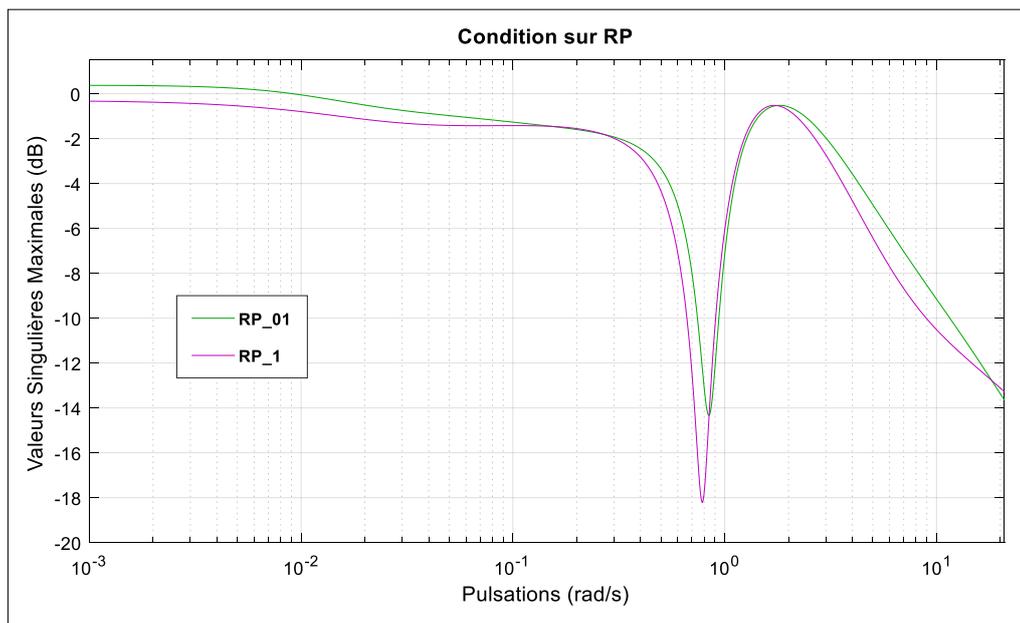


Fig.3.9. Comparaison des deux conditions *RP* fournies par la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> robustification proposée

A partir de toutes ces figures précédentes, on peut confirmer l’efficacité de cette nouvelle robustification proposée. La clé de succès de cette efficacité est s’articulé notamment sur l’exploitation d’un espace de recherche très vaste que celui utilisé dans les méthodes de synthèse existantes. La réussite de cette robustification proposée se traduit par la satisfaction de la condition *RP* dans toute la plage de fréquence (i.e.,  $RP < 0_{ab}, \forall \omega \in [\omega_{min}, \omega_{max}]$ ), chose qui n’est par atteinte par l’autre stratégie de robustification.

Maintenant, le contrôleur robustifié par cet algorithme proposé est utilisé pour commander les 192 régimes perturbés cités dans les deux chapitres précédents. Pour cela, le système bouclé est excité par les mêmes trois entrées exogènes citées précédemment. La Fig.2.10 représente les sorties globales du système bouclé, tandis que la Fig.2.11 représente l’agrandissement de la partie transitoire de ces réponses. On obtient donc :



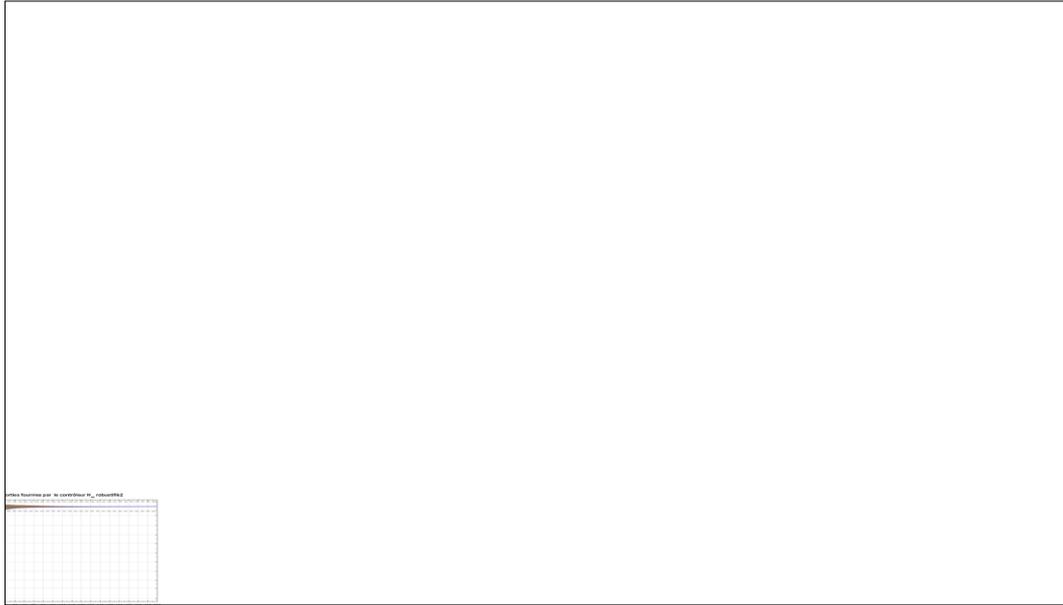
*Fig.3.10. Sorties fournies par le contrôleur  $H_\infty$  robustifié pour 192 régimes perturbés*

D’après la Fig.3.10, on peut remarquer que les sorties fournies par ce contrôleur sont complètement meilleures que celles produites par les deux autres contrôleurs  $H_\infty$  cités dans les deux chapitres précédents. Le tableau ci-dessous récapitule les taux d’améliorations du système bouclé par ce contrôleur par rapport à ceux bouclé par les contrôleurs  $H_\infty$  primaire et celui robustifié par la robustification utilisant les pondérations irrationnelles ajustables. On obtient :

**Tableau.3.2** récapitule les taux d’améliorations assurés par le contrôleur  $H_\infty$  robustifié basé sur les pondérations fractionnaires ajustables

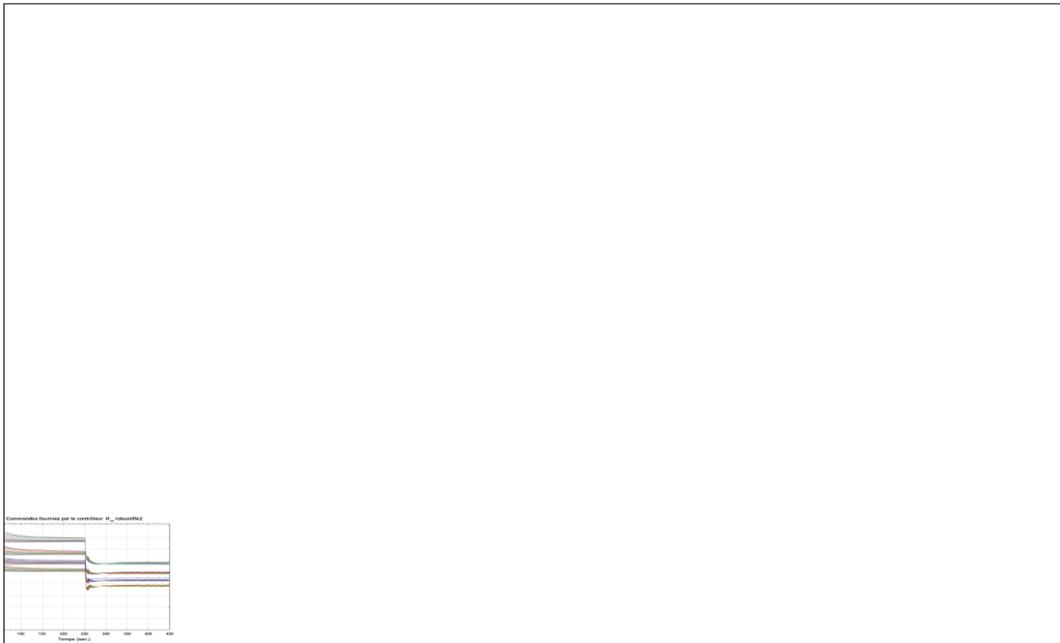
	contrôleur $H_\infty$ primaire $K_0(s)$	contrôleur $H_\infty$ robustifié 1 $K_{01}(s)$	contrôleur $H_\infty$ robustifié 2 $K_{02}(s)$	Taux d’amélioration %	
				$K_{02}(s)$ par rapport à $K_0(s)$	$K_{02}(s)$ par rapport à $K_{01}(s)$
<b>Temps nécessaire pour annuler l’erreur de poursuite à 5% (<math>\epsilon_{5\%}</math>)</b>	22.5	12.00	<b>05.25</b>	76.66 %	56.25%
<b>Temps de montée <math>t_m</math></b>	03.92	04.49	<b>03.45</b>	11.98%	23.16%
<b>Temps de réponse à 5% (<math>t_{r_{5\%}}</math>)</b>	22.50	12.00	<b>05.25</b>	76.66 %	56.25%
<b>Dépassement maximal <math>D_{max}</math></b>	12.00	05.00	<b>03.00</b>	75.00%	40.00%

La Fig.3.11 représente un agrandissement de la dynamique de poursuite dans l'intervalle du temps normalisé  $t \in \left[0, \frac{200}{T_e}\right]$  secondes. On obtient



*Fig. 3.11. Agrandissement de la partie transitoire de la dynamique de poursuite fournie par le contrôleur  $H_\infty$  robustifié pour 192 régimes perturbés*

La Fig.3.12 représente les commandes nécessaires pour fournir les sorties globales citées précédemment. On obtient



*Fig. 3.12. Commandes fournies par le contrôleur  $H_\infty$  robustifié pour 192 régimes perturbés.*

D'après la Fig.3.12, on peut voir que toutes les commandes fournies par le contrôleur  $H_\infty$  robustifié sont moins couteuses que celles fournies le contrôleur  $H_\infty$  primaire, i.e.,  $u_{max} = 4.50$  en régime transitoire.

### 3.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une deuxième stratégie de robustification du contrôleur  $H_\infty$  primaire et cela dans le but de satisfaire la condition  $RP$  en présence des incertitudes multiplicatives de modélisation. Cette proposition nécessite *a priori* la résolution du problème de la sélection automatique des pondérations fractionnaires ajustables existant dans un espace de recherche présélectionné *a priori* par l'utilisateur. Cette dernière a été assurée par des gabarits fréquentiels imposés par certaines règles de réglage. Ces règles peuvent fournir les allures souhaitées de différentes sensibilités du système bouclé. Une fois l'algorithme d'optimisation assure la sélection adéquate de ces pondérations, on fait un appel à une méthode d'approximation basée sur l'approche d'identification fréquentielle avec laquelle l'approximation a été assurée à partir de la minimisation de l'écart en module de ces deux transferts.

La validation de cette nouvelle stratégie a été montrée sur le même système physique cité dans les chapitres précédents et les résultats fournis par le contrôleur  $H_\infty$  robustifié par la robustification basée sur les pondérations fractionnaires ajustables sont comparés dans les plans fréquentiel avec ceux fournis par les deux contrôleurs  $H_\infty$ , à savoir,  $H_\infty$  robustifié synthétisé à partir des pondérations irrationnelles ajustables et  $H_\infty$  primaire synthétisé à partir des pondérations irrationnelles fixes. A partir de ces résultats, on a pu conclure que l'introduction des pondérations fractionnaires ajustables dans le problème de synthèse par la méthode  $H_\infty$  offre la possibilité de satisfaire plusieurs conditions, en particulier la condition  $RP$ . En conséquence, cette amélioration nous a conduit à atteindre l'objectif de ce travail.

**CHAPITRE 4 :**  
**APPLICATION DU CONTRÔLEUR**  
**ROBUSTIFIÉ SUR UN MOTEUR À**  
**AIMANTS PERMANENTS**

## Chapitre 4

# Application du contrôleur robustifié sur un moteur à aimants permanents

---

### 4. Introduction :

En général, le moteur synchrone à aimants permanents (*PMSM*) est un dispositif très utilisé dans la plupart des applications industrielles tels que : la traction, l'aéronautique, la robotique,...etc. Ceci est dû à plusieurs spécificités caractérisant les propriétés électrique et mécanique de cette machine on l'occurrence: l'absence des pertes rotoriques, l'obtention des réponses rapides en courant et en couple qui sont souvent liés à des inductances faibles, la production d'un couple massique élevé, une inertie très faible et une grande capacité de surcharge, ...etc. De ce fait, l'utilisation de cette machine est indispensable dans l'industrie, ce qui nécessite la synthèse d'un contrôleur robuste garantissant des performances dynamiques et statiques avec des marges de sécurité très élevées.

Désormais, la synthèse du contrôleur souhaité est basé sur le développement d'un modèle mathématique adéquat décrivant le comportement réel du *PMSM* de façon les plus précises que possible. En général, Ce comportement est souvent régit par un modèle *MIMO* dont ses grandeurs d'entrées-sorties sont fortement couplées, ce qui peut compliquer sa phase de synthèse notamment par les méthodes conventionnelles de commande. A cet effet, il existe de nombreuses techniques dédiées à la commande de cette machine. Dans ce contexte, la commande par flux orienté (ou en anglais *Field Oriented Control FOC*) permet d'éliminer le couplage entre les grandeurs électriques du stator et celles du rotor du *PMSM*. Ce découplage permet de rendre cette phase de synthèse similaire que celle utilisée dans la machine à courant continu.

En revanche, la commande de la vitesse rotorique ainsi que celle du courant statorique via des contrôleurs conventionnels tels que *PI* et *PID* dans la commande *FOC* deviennent insuffisantes pour répondre aux performances exigées du fait que les paramètres du modèle simplifié du *PMSM* sont souvent entachés par des incertitudes de modélisation.

Récemment, diverses stratégies avancées de synthèse telles que, la synthèse par les réseaux de neurones, la synthèse à base de la logique floue, la synthèse neuro-flou adaptatif et d'autres approches ont été proposées dans la littérature pour pallier les problèmes susnommés et assurer la robustesse de *RP* avec une marge de sécurité élevée lorsque les paramètres du modèle changent dans une large gamme. Malheureusement, l'analyse de robustesse du système bouclé par ces contrôleurs n'est pas possible dans le plan fréquentiel en raison de l'absence

d'expressions analytiques décrivant le transfert de ces contrôleurs. Par conséquent, les valeurs singulières maximales de différentes sensibilités fournies par le système bouclé correspondant ne peuvent pas être tracées dans le domaine fréquentiel. Ce constat pousse à l'utilisation des méthodes très efficaces existant dans la commande robuste dans laquelle le contrôleur à synthétiser permet de quantifier à quelle marge de robustesse  $RP$  le système bouclé peut conserver les performances souhaitées en présence des incertitudes de modélisation. Sachant que l'amélioration de cette marge faisant l'objet de la commande du  $PMSM$ , la robustification du contrôleur  $H_\infty$  primaire basée sur les pondérations fractionnaires ajustables sera adopter pour fournir un contrôleur  $H_\infty$  robustifié assurant le bon compromis « poursuite-régulation » de la partie mécanique du  $PMSM$  et cela malgré l'existence des anomalies produites via la commande de son compartiment électrique par des contrôleurs conventionnels. Par conséquent, le contrôleur  $H_\infty$  robustifié à la capacité de fournir des meilleures robustesses que ceux synthétisés par les méthodes de synthèse basées sur les pondérations irrationnelles fixes ou ajustables.

Dans cette optique, l'objectif principal est de comment assurer la sélection automatiques de ces pondérations fractionnaires et de comment les introduire dans le critère de sensibilité pondérée pour que la méthode  $H_\infty$  puisse d'élaborer un contrôleur capable de fournir une bonne amélioration de la marge  $RP$  du contrôleur  $H_\infty$  primaire.

#### 4.1. Description du système $PMSM$ :

Le moteur synchrone présenté par la Fig.4.1 est composé par d'une partie mobile, appelée rotor ou l'inducteur, et une partie fixe, appelée stator ou l'induit, portant des enroulements. La zone localisée entre ces deux parties est appelée entrefer [82-86]. La Fig.4.1. représente une coupe du  $PMSM$ . On obtient donc :

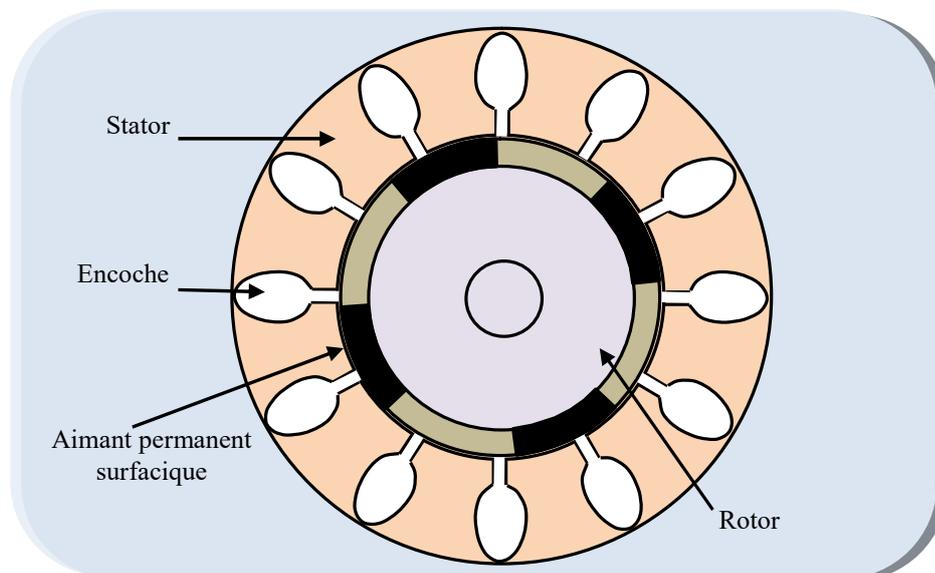


Fig.4.1. Vue en coupe du  $PMSM$ .

Dans une machine synchrone triphasée, le stator est constitué de trois enroulements identiques décalés entre eux par un angle de  $120^\circ$ . Ces trois enroulements sont installés dans les encoches du circuit magnétique fixe ou ce dernier est feuilleté afin, d'un côté, de réduire les courants de *Foucault* et d'un autre côté, de limiter les pertes dans le fer.

Dans la partie du rotor, les enroulements est généralement parcourus par un courant continu (dans le cas de la machine à rotor bobiné). Par contre, dans le cas du *PMSM*, le rotor n'a pas besoin d'un approvisionnement extérieur pour être excité. En revanche, ses aimants permanents génèrent le champ magnétique ce qui ne nécessite aucune alimentation en tension ou en courant. Ceci présente l'avantage d'éliminer, d'une part, les pertes rotoriques liées aux enroulements et d'une autre part, de réduire le coût de réalisation et d'implémentation dans les chaînes de production.

Dans l'industrie, on peut distinguer deux types de *PMSM*, à savoir : *PMSM* à rotor avec des aimants montés en surface, qui se caractérisent par un très faibles taux de saillance ( $\frac{L_q}{L_d} \approx 1$ ), et *PMSM* dont le rotor est constitué avec des aimants enterrés offrant un entrefer variable donc un coefficient de saillance supérieur à l'unité ( $\frac{L_q}{L_d} > 1$ ). Dans ce présent travail, nous verrons que la synthèse du contrôleur  $H_\infty$  sera effectuée pour le premier type dans lequel la vitesse mécanique  $\Omega_m$  dépende seulement de la tension statorique appliquée aux enroulements ainsi que du nombre de paires de pôles  $n_p$ .

$$\Omega_m = \frac{\omega_r}{n_p} \tag{4.1}$$

Avec :

- $\Omega_m$  : représente la vitesse de rotation de la machine
- $J$  : représente le nombre de paires de pôles
- $\omega_r$  : représente la vitesse électrique du rotor

#### **4.2. Modélisation de la machine synchrone à aimant permanent**

En général, le système *PMSM* est souvent composé d'un stator dont les enroulements sont connectés en étoile et un rotor avec  $n_p$  paires de pôles dont l'excitation est créée par des aimants permanents surfacique. Afin de développer un modèle mathématique assurant la bonne description de la dynamique réel du *PMSM* on doit admettre les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Le système de tension est symétrique est équilibré
- La distribution de la force magnétomotrice créée par le stator est sinusoïdale.

- La densité de courant est uniforme dans la section des conducteurs. L'effet de peau est négligé.
- Le circuit magnétique n'est pas saturé.
- L'effet de l'enroulement amortisseur au rotor doit être négligé.
- Les pertes causés par les courants de *Foucault* et ceux causés par l'hystérésis doivent être négligés.

D'où, la Fig.4.2 représente le schéma équivalent du système PMSM dans le repère triphasé ( $a - b - c$ ). On obtient :

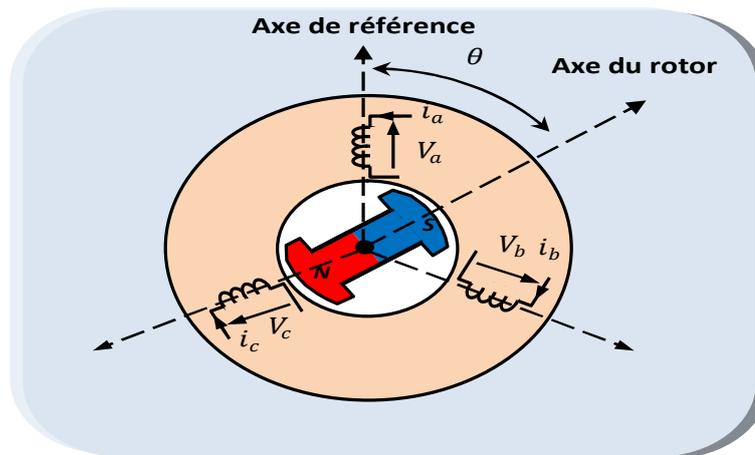


Fig.4.2. Schéma équivalent du PMSM dans le repère ( $a - b - c$ )

Les équations des tensions statoriques dans le repère ( $a - b - c$ ) liées au stator sont exprimées comme suit :

$$\begin{cases} V_a = R_s \cdot i_a + \frac{d\phi_a}{dt} \\ V_b = R_s \cdot i_b + \frac{d\phi_b}{dt} \\ V_c = R_s \cdot i_c + \frac{d\phi_c}{dt} \end{cases} \quad (4.2)$$

Avec :

- $R_s$  : représente la résistance de l'enroulement statorique ;
- $i_{abc}$  : représente les courants de trois phases statoriques  $a, b, c$  ;
- $\phi_{abc}$  représente les flux produits par les trois phases statoriques  $a, b, c$  ;
- $V_{abc}$  représente les tensions des phases statoriques.

Les équations du flux produit dans chaque enroulement statorique sont données par les équations suivantes :

➤ Le flux dans la phase «  $a$  », noté  $\phi_a$  est exprimé par:

$$\phi_a = \phi_{aa} + \phi_{ba} + \phi_{ca} + \phi_{fa} \quad (4.3)$$

Avec :

- $\phi_{aa}$  : représente le flux propre de la phase « a »
- $\phi_{ba}$  : représente le flux mutuel de la phase « b »
- $\phi_{ca}$  : représente le flux mutuel de la phase « c »
- $\phi_{fa}$  : représente le flux mutuel de l'aimant sur la phase « a »

En remplaçant chaque flux par sa valeur correspondant, il en découle immédiatement les expressions des flux statorique de trois phases « a », « b » et « c ». On obtient :

$$\begin{cases} \phi_a = L_s \cdot i_a + M_{ss} \cdot i_b + M_{ss} \cdot i_c + \phi_{fa} \\ \phi_b = M_{ss} \cdot i_a + L_s \cdot i_b + M_{ss} \cdot i_c + \phi_{fa} \\ \phi_c = M_{ss} \cdot i_a + M_{ss} \cdot i_b + L_s \cdot i_c + \phi_{fa} \end{cases} \quad (4.4)$$

Où :

- $L_s$  : représente l'inductance propre d'une phase statorique.
- $M_{ss}$  : représente l'inductance mutuelle entre les trois phases du stator.

#### 4.2.1. Transformation de PARK

Les deux systèmes d'équation (4.2) et (4.4) sont fortement non linéaires et couplés entre eux. En conséquence, la résolution d'un tel système d'équation est délicate. Pour contourner ce problème, il existe, dans la littérature, une transformation appelée *PARK*  $P(\theta)$  qui consiste de projeter toutes les combinaisons présentées dans le repère  $(a - b - c)$ , on l'occurrence, les tensions triphasées, les flux et les courants triphasés, en vue d'obtenir d'autres combinaisons fictives représentées dans le repère  $(d - q)$ . Entre autres, cette transformation est interprétée physiquement, comme étant une substitution des enroulements immobiles « a », « b » et « c » par des enroulements en directe « d » et en quadrature « q » tournant avec le rotor. En fait, cette transformation permettant de faciliter la modélisation et la commande du système *PMSM* par les méthodes existant dans la littérature. La Fig.4.3 représente le schéma équivalent du *PMSM* dans le repère orthogonale de *Park* :

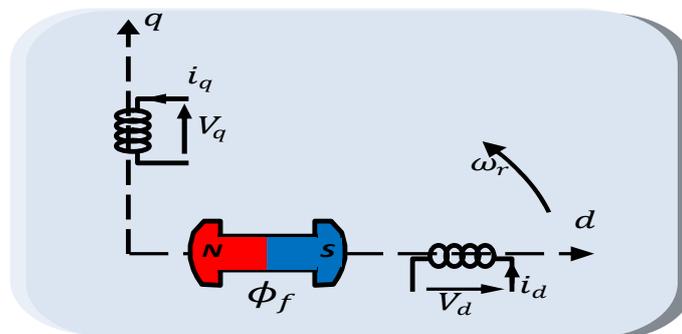


Fig. 4.3. Schéma équivalent du PMSM dans le repère  $(d - q)$

La transformation de *PARK*, notée  $P(\theta)$ , est définie comme suit :

$$[X_{dqo}] = \begin{bmatrix} X_d \\ X_q \\ X_o \end{bmatrix} ; [X_d X_q X_o]^t = P(\theta)[X_a X_b X_c]^t \quad (4.5)$$

$X$  est un vecteur définissant peut être, le courant, le flux, la tension, ...etc.

$$P(\theta) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin(\theta) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$\theta$  représente la position du rotor. La transformation inverse de *PARK*, notée  $P^{-1}(\theta)$ , est exprimée par la matrice ci-dessous :

$$P^{-1}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Il vient alors :

$$[X_{abc}] = \begin{bmatrix} X_d \\ X_q \\ X_o \end{bmatrix} ; [X_a X_b X_c]^t = P^{-1}(\theta)[X_d X_q X_o]^t \quad (4.8)$$

#### 4.2.2. Modélisation de système *PMSM* dans le repère de *PARK*

Dans le repère de *PARK* ( $d, q$ ) tournant à la vitesse angulaire  $\omega_r = \frac{d\theta}{dt}$ , le système d'équation donné par (4.2) peut être réécrit comme suit [82-86]:

➤ Tensions statoriques, directes et en quadrature :

$$\begin{cases} U_d = R_s \cdot i_d + \frac{d\phi_d}{dt} - \omega_r \cdot \phi_q \\ U_q = R_s \cdot i_q + \frac{d\phi_q}{dt} + \omega_r \cdot \phi_d \end{cases} \quad (4.9)$$

Les équations des flux statoriques s'écrivent, dans le repère de *PARK* ( $d, q$ ), comme suit :

➤ Les flux directs et en quadrature :

$$\begin{cases} \phi_d = L_d \cdot i_d + \phi_f \\ \phi_q = L_q \cdot i_q \end{cases} \quad (4.10)$$

- $\phi_d, \phi_q$  représentent les flux statoriques dans le repère ( $d, q$ ) ;

- $L_d, L_q$  représentent les inductances cycliques statoriques d'axe direct  $d$  et en quadrature  $q$  respectivement.

En remplaçant les flux par leurs valeurs dans les équations (4.9), on obtient donc :

$$\begin{cases} U_d = R_s \cdot i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - \omega_r L_q \cdot i_q \\ U_q = R_s \cdot i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega_r (L_d \cdot i_d + \phi_f) \end{cases} \quad (4.11)$$

Avec :

- $U_d, U_q$  représentent les tensions statoriques dans le repère  $(d, q)$  ;
- $i_d, i_q$  représentent les courants statoriques dans le repère  $(d, q)$  ;
- $\phi_d, \phi_q$  représentent les flux statoriques dans le repère  $(d, q)$  ;
- $\phi_f$  représente le flux induit par les aimants permanents ;
- $L_d, L_q$  représentent les inductances cycliques statoriques d'axe direct  $d$  et en quadrature  $q$  respectivement ;

➤ Couple électromagnétique du moteur

$$C_{em} = \frac{3}{2} n_p \cdot \{ \phi_f \cdot i_q + (L_d - L_q) i_d \cdot i_q \} \quad (4.12)$$

➤ La dynamique motrice peut être simplement décrite par l'équation :

$$J \cdot \frac{d\Omega_m}{dt} + f_c \cdot \Omega_m = C_{em} - C_t \quad (4.13)$$

Les trois systèmes d'équation (4.11), (4.12) et (4.13) montrent que le comportement réel du système *PMSM* est généralement modélisé par un modèle non linéaire. Comme ce dernier est caractérisé par des aimants montés en surface (i.e.,  $L_d = L_q$ ). D'où, le modèle décrivant ce système peut être illustré par la Fig.4.4. On obtient :

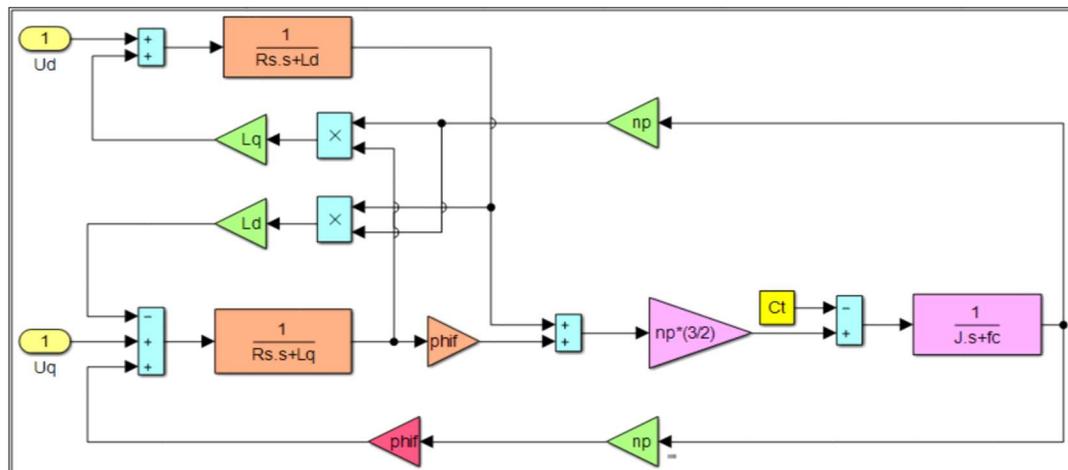


Fig. 4.4. Schéma bloc décrivant le modèle du PMSM.

Dans ce travail, l'étape de synthèse du contrôleur stabilisant la boucle de commande nécessite *a priori* de définir les paramètres du modèle nominal du *PMSM*. Le **Tab.4.1** récapitule la signification et la valeur correspondante de chaque composant intervenant dans la définition de ce modèle de synthèse.

**Tab.4.1** récapitule la signification et la valeur correspondante des différentes composantes du *PMSM*

Paramètres	significations	Unités-Valeurs
$U_d$	Tension statorique dans l'axe $d$	$V$
$U_q$	Tension statorique dans l'axe $q$	$V$
$i_d$	Courant statorique dans l'axe $d$	$A$
$i_q$	Courant statorique dans l'axe $q$	$A$
$L_d$	Inductance statorique de l'axe $d$	$8.5 \times 10^{-3} H$
$L_q$	Inductance statorique de l'axe $q$	$8.5 \times 10^{-3} H$
$\phi_d$	Flux statorique dans l'axe $d$	$V.s$
$\phi_q$	Flux statorique dans l'axe $q$	$V.s$
$\phi_f$	Flux des aimants	$0.175 V.s$
$R_s$	Résistance statorique	$0.2 \Omega$
$\omega_r$	Vitesse électrique du rotor	$tr/min$
$n_p$	Nombre de paires de pôles	$4$
$\Omega_m$	Vitesse mécanique du rotor	$tr/min$
$J$	Moment d'inertie	$0.089 kg.m^2$
$f_c$	Coefficient de viscosité	$0.005 N.m.s$
$C_{em}$	Couple électromagnétique	$N.m$
$C_t$	Couple de charge	$N.m$

---

### 4.2.3. Linéarisation du modèle de *PMSM* :

D'après les équations (4.9), (4.13), la dynamique d'interaction produite via le couplage des combinaisons électriques présentées dans les deux  $d$  et  $q$  doit être compensée afin de linéariser le modèle non linéaire du système *PMSM*. Cet objectif peut être abouti en utilisant le principe de la commande *FOC* dans laquelle le couplage de ces combinaisons peut être résolu par la synthèse de deux contrôleurs de courant, notés  $PID_d$  et  $PID_q$ . Dans ce cas, le rôle du contrôleur  $PID_d$  est de pouvoir atténuer, autant que possible, l'erreur générée par le courant statorique directe de référence  $i_{d_{ref}}$  et celui mesuré à partir du système *PMSM*. De ce fait, un forçage de  $i_{d_{ref}} = 0$  permet d'assurer le découplage désiré qu'à partir duquel la vitesse mécanique  $\Omega_m$  est asservie seulement dans l'axe  $q$  par un réglage optimal du couple électromagnétique  $C_{em}$  ou le courant d'axe en quadrature  $i_q$ . L'idée de cette stratégie de commande est illustrée dans le schéma de la **Fig.4.5** comme suit :

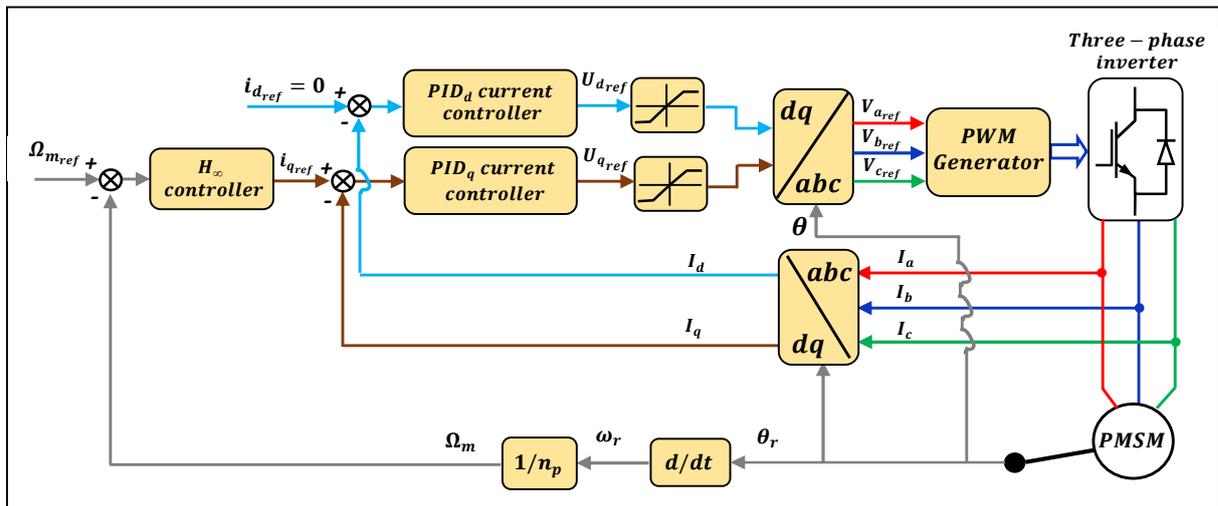


Fig.4.5. Commande de vitesse du PMSM basée sur la stratégie de commande à flux orienté

D'après la Fig.4.5, le modèle linéaire du PMSM est régi par le système d'équation simplifié suivant :

$$\begin{cases} U_q = R_s \cdot i_q + L_q \cdot \frac{di_q}{dt} + \phi_f \cdot n_p \cdot \Omega_m \\ C_{em} = \frac{3}{2} \cdot n_p \cdot \phi_f \cdot i_q \\ J \cdot \frac{d\Omega_m}{dt} + f_c \cdot \Omega_m = C_{em} - C_t \end{cases} \quad (4.14)$$

En outre, l'avantage principal de la stratégie du FOC réside dans la possibilité de synthétiser un pré-compensateur SISO, ce qui rend cette stratégie de commande très attrayante pour les applications industriels. L'objectif de notre synthèse est de développer un contrôleur  $H_\infty$  robuste assurant le bon compromis « poursuite-régulation » du système bouclé malgré les incertitudes de modélisation et/ou l'existence d'une dynamique d'interaction dans le compartiment électrique du PMSM qui est probablement causé par un mauvais réglage des deux contrôleurs de courant cités précédemment.

Tout d'abord, on suppose, dans l'étape de synthèse du contrôleur  $H_\infty$ , que le couple de charge  $C_t$  est nul dans l'équation (4.14), puis, la fonction *Linmod* du Matlab® on est appliquée sur le schéma bloc présenté dans la Fig.4.6 pour déterminer la représentation d'état du transfert nominal  $G_N(s)$ . On obtient:

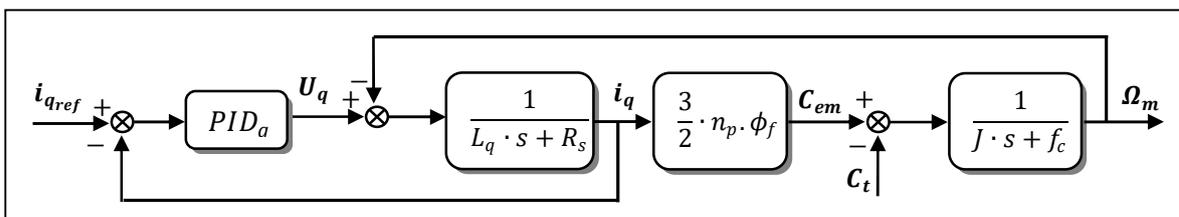


Fig.4.6. Schéma block utilisé pour obtenir la fonction de transfert du régime nominal  $G_N(s)$

D'après la Fig.4.6, le contrôleur  $PID_q$  doit minimiser l'écart entre le courant d'axe en quadrature mesuré  $i_q$  et sa référence  $i_{q_{ref}}$ , Ce dernier présente plus tard le signal de commande fourni par le contrôleur  $H_\infty$  à synthétiser.

Notons ici que la synthèse du contrôleur  $PID_q$  est assurée par la fonction *Rltool* du *Matlab*®. Cette dernière fournit le transfert ci-dessous:

$$PID_q(s) = \frac{4557(s+45.74)}{s(s+101)} \quad (4.15)$$

De plus, le modèle nominal est assuré par la fonction *Linmod* du *Matlab*®. on obtient donc :

$$G_N(s) = \frac{6.325 \times 10^6 (s+45.74)}{(s+49.87)(s+0.054)(s^2+992.2 \times s+5.116 \times 10^5)} \quad (4.16)$$

Il est évident que les paramètres de ce modèle dépendent des paramètres du contrôleur de courant  $PID_q$  et ceux présentés dans le Tab.4.1. En conséquence, deux inconvénients majeurs peuvent être attribués à la dégradation des performances de la stratégie du *FOC*. Le premier inconvénient réside dans la grande sensibilité de cette stratégie à l'effet indésirable provoqué par la fatigue du capteur de vitesse mécanique et/ou celui du courant d'axe en quadrature, tandis que le deuxième inconvénient réside dans la dégradation de la robustesse du système bouclé à cause de la variation des paramètres du modèle dans une large bande. De ce fait, pour contourner les deux problèmes précédents, la boucle externe de la stratégie *FOC* doit contenir un contrôleur plus robuste offrant une robustesse avec une marge de sécurité très élevée.

### 4.3. Synthèse du contrôleur $H_\infty$ primaire :

Le problème initial de sensibilité pondérée est formulé en utilisant les deux pondérations irrationnelles fixes  $W_{S_0}(s)$  and  $W_{T_0}(s)$  suivantes :

$$W_{S_0}(s) = \frac{\frac{s}{1.2} + 25}{s + 25 \times 10^{-4}}, \text{ where } \begin{cases} n_{S_0} = 1 \\ \omega_{B_0}^* = 25 \\ M_{S_0} = 1.2 \\ \varepsilon_{S_0} = 1.75 \times 10^{-3} \end{cases} \quad (4.17)$$

$$W_{T_0}(s) = \frac{\frac{s}{400} + \frac{1}{1.25}}{\frac{10^{-4}}{400} \cdot s + 1}, \text{ where } \begin{cases} n_{T_0} = 1 \\ \omega_{BT_0}^* = 400 \\ M_{T_0} = 1.25 \\ \varepsilon_{T_0} = 1.66 \times 10^{-4} \end{cases} \quad (4.18)$$

Ensuite, la fonction *Hinflmi* du *Matlab*® est utilisée pour résoudre ce dernier problème, où l'indice de performance du contrôleur  $H_\infty$  était fourni par  $\gamma_{opt} = 0.9216$ . En effet, la représentation d'état du contrôleur  $H_\infty$  primaire  $K_0(s)$  est obtenue comme suit :

$$A_0 = \begin{bmatrix} -119.14 & 15.27 & -4638.9 & -11886 & -1.2038 \cdot 10^5 & -4.6427 \cdot 10^5 \\ 9553.3 & -1775.4 & 3.795 \cdot 10^5 & 9.72 \cdot 10^5 & 9.8482 \cdot 10^6 & 3.7981 \cdot 10^7 \\ 116.22 & -15.569 & -211.96 & -464.26 & -4291.7 & -18991 \\ 4.0358 & -0.61284 & -5.948 & -417.1 & -8516.3 & -2450.6 \\ 21.309 & -0.95047 & -855.66 & -6203.4 & -1.5671 \cdot 10^5 & 68799 \\ 7.0595 & -7.5889 & 2316.3 & 3801.1 & 1.2289 \cdot 10^5 & -1.4153 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 5.2409 \times 10^{-4} \\ 1.5057 \times 10^{-4} \\ -4.703 \times 10^{-2} \\ 2.2262 \\ -39.289 \\ -57.504 \end{bmatrix}, \text{ and } C_0 = \begin{bmatrix} -39.652 \\ 2.9869 \\ -1365.4 \\ -3791.3 \\ -38472 \\ -1.4838 \times 10^5 \end{bmatrix}^T \quad (4.19)$$

Il est clair que le contrôleur  $H_\infty$  primaire  $K_0(s)$  est d'ordre 6 et sa matrice de transfert peut être déterminée par la relation  $K_0(s) = C_0 (s \times I - A_0)^{-1} \cdot B_0$

#### 4.4.Synthèse du contrôleur $H_\infty$ robustifié:

D'après la Fig.4.5, il est clairement perceptible que la condition de robustesse sur les performances initiale  $RP_0$  n'est pas satisfaite par le contrôleur  $H_\infty$  primaire. Pour améliorer cette marge de robustesse, nous allons introduire les pondérations fractionnaires ajustables dans la formulation du problème de la robustification proposée dont la sélection automatique de chacune est assurée par l'algorithme *PSO* et l'approximation en filtre d'ordre entier est assurée par l'identification fréquentiel. Pour atteindre ces objectifs, l'espace de recherche limitant le vecteur  $x_c$  est choisi comme suit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1.15 \\ 1.00 \\ 25.00 \\ 10^{-6} \\ 1.20 \\ 1.00 \\ 200 \\ 10^{-6} \end{bmatrix}}_{x_{cmin}} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} M_S \\ n_S \\ \omega_B^* \\ \varepsilon_S \\ M_T \\ n_T \\ \omega_{BT}^* \\ \varepsilon_T \end{bmatrix}}_{x_c} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} 2.50 \\ 3.00 \\ 35.00 \\ 10^{-4} \\ 2.00 \\ 3.00 \\ 400 \\ 10^{-4} \end{bmatrix}}_{x_{max}} \quad (4.20)$$

Les paramètres de réglage de l'algorithme *PSO* ont été choisis comme:

- Nombre maximum des itérations :  $\ell_{max} = 20$
- Taille de l'essaim :  $n_p = 20$
- Facteur d'inertie  $c_0 = c_{0max} - \left(\frac{c_{0max} - c_{0min}}{\ell_{max}}\right) \cdot \ell$ , où  $c_{0max} = 0.9$ ,  $c_{0min} = 0.4$  et  $\ell = 1, \dots, \ell_{max}$ .
- Taux d'apprentissage cognitif:  $c_1 = 1.8$
- Taux d'apprentissage social :  $c_2 = 1.8$

La fonction objective a été évaluée à 1000 fréquences réparties uniformément sur une plage de fréquence valant  $[10^{-4}, 10^{+6}]$  radian/seconde.

Par conséquent, la solution optimale fournissant la bonne minimisation de cette fonction objective est ensuite utilisée pour déterminer les paramètres des deux pondérations fractionnaires désirées  $W_{S_f}(\omega, x)$  et  $W_{T_f}(\omega, x)$ . Entre autres, l'algorithme *PSO* est compilé 30 fois avec différentes populations initiales de  $x_c \in [x_{c_{min}} \ x_{c_{max}}]$ . Par conséquent, la solution optimale est obtenue à l'itération  $\ell_{max} = 20$ , aboutissant les deux pondérations fractionnaires ajustables suivantes :

$$W_{S_f}(s, x^*) = \left( \frac{\frac{s}{1.229\sqrt{2.251}} + 2.1386}{s + 28.1386 \cdot \frac{1.229}{\sqrt{1.9 \times 10^{-4}}}} \right)^{1.229}, \text{ ou } \begin{cases} n_S = 1.229 \\ \omega_B^* = 28.1386 \\ M_S = 2.251 \\ \varepsilon_S = 1.9 \times 10^{-4} \end{cases} \quad (4.21)$$

$$W_{T_f}(s, x^*) = \left( \frac{\frac{s}{296} + \frac{1}{2.3784\sqrt{1.88}}}{\frac{2.3784}{\sqrt{2.9 \times 10^{-5}}} \cdot s + 1} \right)^{2.3784}, \text{ ou } \begin{cases} n_T = 2.3784 \\ \omega_{BT}^* = 296 \\ M_T = 1.88 \\ \varepsilon_T = 2.9 \times 10^{-5} \end{cases} \quad (4.22)$$

Ces deux transferts fractionnaires sont ensuite approximés en deux filtres d'ordre entier en exigeant les deux précisions suivantes :

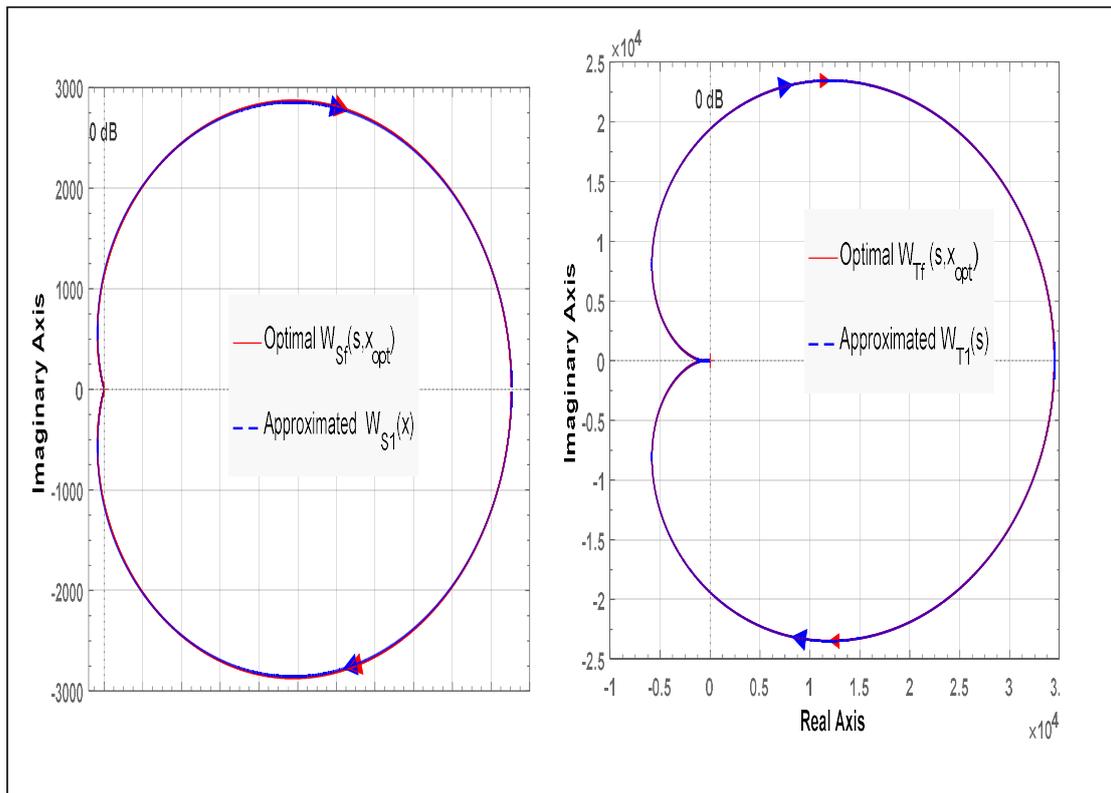
- *Précision souhaitée pour approximer  $W_{S_f}(\omega, x)$ :  $\Delta W_S = 10^{-2}$*
- *Précision souhaitée pour approximer  $W_{T_f}(\omega, x)$ :  $\Delta W_T = 10^{-2}$*

Finalement, l'approximation des deux pondérations fractionnaires précédentes fournit les deux filtres d'ordre entier ci-dessous:

$$W_{S_1}(s) = \frac{0.444(s+57.01)(s+29.46)(s+6.794)(s+0.9529)(s+0.122)}{(s+22.28)(s+4.476)(s+0.5879)(s+0.0795)(s+0.024)} \quad (4.23)$$

$$W_{T_1}(s) = \frac{34482(s+763)(s+217)(s+562.9)(s+3.024)(s^2+406.3s+42 \times 10^4)}{(s+1.167 \times 10^4)(s+3561)(s+936.3)(s+3.025)(s^2+5.1 \times 10^4s+663 \times 10^4)} \quad (4.24)$$

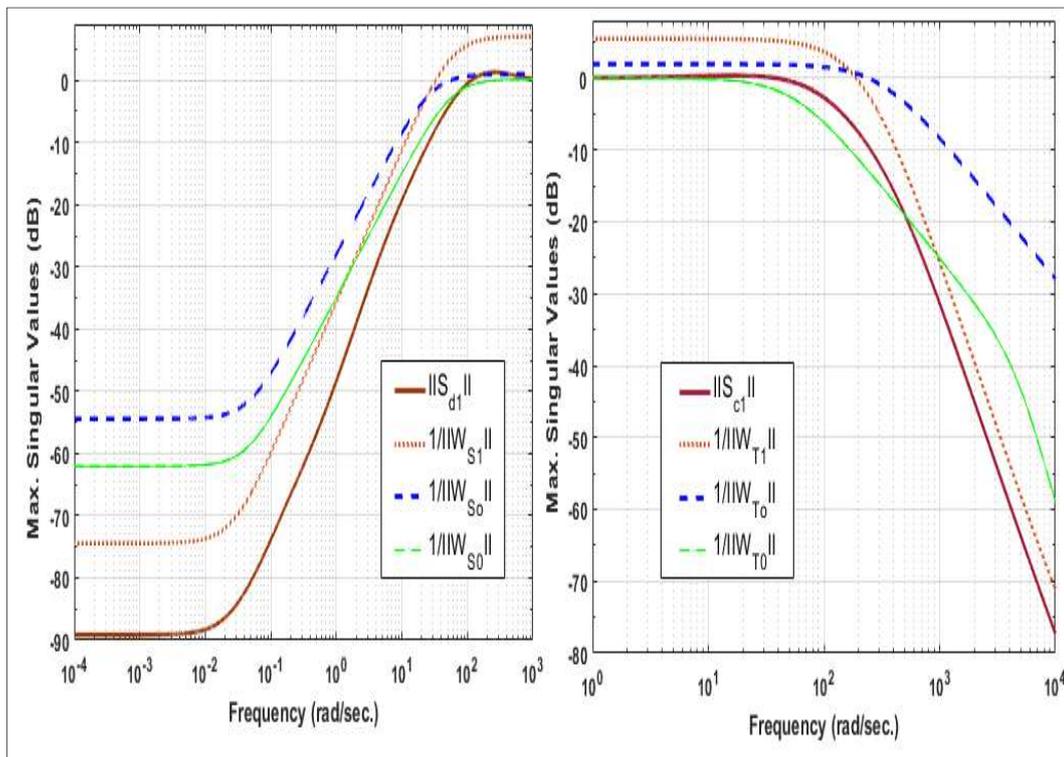
La **Fig.4.7** (côté gauche), compare les réponses fréquentielles des deux pondérations  $W_{S_f}(s, x^*)$  et  $W_{S_1}(s)$  dans le plan de *Nyquist*. Cependant La **Fig.4.7** (côté droit), compare les réponses fréquentielles des deux pondérations  $W_{T_f}(s, x^*)$  et  $W_{T_1}(s)$ . On obtient :



**Fig.4.7.** Comparaison entre  $(W_{S_f}(\omega, x^*); W_{S_1}(\omega))$  présenter dans le côté gauche, et entre  $(W_{T_f}(\omega, x^*); W_{T_1}(\omega))$  présenter dans le côté droite.

D'après la Fig.4.7, il est facile d'observer que les deux réponses fréquentielles des pondérations fractionnaires ajustables  $W_{S_f}(s, x^*)$  et  $W_{T_f}(s, x^*)$  sont étroitement rapprochées celles fournies par  $W_{S_1}(s)$  et  $W_{T_1}(s)$  respectivement. En outre, le problème de sensibilité pondérée est résolu par la fonction *Hinflmi* du *Matlab*® fournissant donc un niveau de performance  $\gamma_{opt} = 0.6946$  et un contrôleur  $H_\infty$  robustifié d'ordre 15. Par conséquent, les deux conditions de robustesse, à savoir *RS* et *NP* sont examinées avant et après la phase de robustification du contrôleur  $H_\infty$  primaire.

A cet effet, la Fig.4.8 présente le tracé des lieux des valeurs maximales singulières maximales des deux sensibilités directes  $S_{d_0}(s)$  et  $S_{d_1}(s)$ . Ces dernières sont également comparées, dans les basses fréquences avec les deux pondérations inversées  $W_{S_0}^{-1}(s)$  et  $W_{S_1}^{-1}(s)$  (voir la Fig.4.8 côté gauche). De même, la Fig.4.8 présente le tracé des lieux des valeurs singulières maximales des deux sensibilités complémentaires  $S_{c_0}(s)$  et  $S_{c_1}(s)$  qui sont également comparées dans les hautes fréquences avec les pondérations inversées  $W_{T_0}^{-1}(s)$  et  $W_{T_1}^{-1}(s)$  (voir la Fig.4.8 côté droit). On obtient :



**Fig.4.8.** Comparaison entre  $(S_{d_0}(\omega); S_{d_1}(\omega); W_{S_0}^{-1}(\omega); W_{S_1}^{-1}(\omega))$  présenter à gauche, et entre  $(S_{c_0}(\omega); S_{c_1}(\omega); W_{T_0}^{-1}(\omega); W_{T_1}^{-1}(\omega))$  présenter à droite

Il est évident remarquer que la meilleure marge  $NP$  est obtenue quand les valeurs singulières maximales de la sensibilité directe sont faibles autant que possible notamment en basses fréquences. Par ailleurs, la meilleure marge de robustesse  $RS$  est obtenue quand les valeurs singulières maximales de la sensibilité complémentaire sont faibles autant que possible notamment en hautes fréquences.

A partir de la **Fig.4.8** (côté gauche), il est clair que le contrôleur  $H_\infty$  robustifié à la capacité d'assurer une meilleure marge de robustesse  $NP$  en comparaison avec celle assurée par le contrôleur  $H_\infty$  primaire, en particulier la plage de fréquence  $\omega \in [10^{-4}, 20]$  radian/seconde. Ainsi, le lieu de  $\sigma_{max}[S_{d_1}(\omega)]$  se situe en dessous de  $-80$  dB, cela signifie que la perturbation est atténuée plus de 10000 fois à la sortie du système.

De plus, à partir de la **Fig.4.8** (côté droit), on peut remarquer que le contrôleur  $H_\infty$  robustifié assure la meilleure marge  $RS$  en comparaison avec celle fournie par le contrôleur  $H_\infty$  primaire. Encore, le lieu de  $\sigma_{max}[S_{c_1}(\omega)]$  est inférieure à  $-60$  dB dans les fréquences au-dessus de  $\omega = 4220$  radian/seconde, cela signifie que l'effet indésirable provoqué par la dynamique négligée des modes inconnus est atténué plus de 1000 fois à la sortie du système.

Finalement, on peut conclure que le contrôleur  $H_\infty$  robustifié a assuré non seulement un meilleur compromis de robustesse  $NP/RS$ , mais aussi une meilleure marge de  $RP$ , ce qui est illustré dans la **Fig.4.9**.

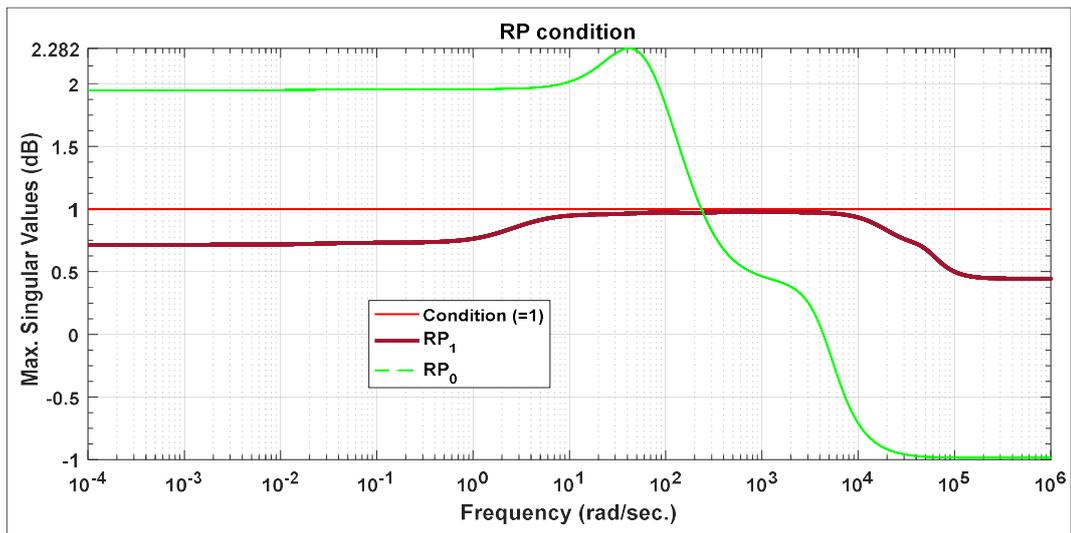


Fig4.9. Satisfaction de la condition de RP par le contrôleur  $H_\infty$  robustifié proposé

Pour confirmer les résultats obtenus précédemment dans le domaine temporel, l’environnement *Power Sim*® est ensuite utilisé pour comparer les réponses temporelles fournies par les deux contrôleurs  $H_\infty$  primaire et robustifié. Dans cette optique, ces deux contrôleurs sont connectés simultanément avec le modèle nominal du *PMSM* et celui existant dans la boîte à outils *Power Sim*®. Il convient à noter que la simulation est assurée par le choix du pas de discrétisation  $T_e = 20$  microsecondes. D’où, les deux systèmes bouclés, à savoir : le système *PMSM* commandé par les deux contrôleurs  $H_\infty$  primaire et  $H_\infty$  robustifié et le modèle linéaire nominal du *PMSM* contrôlé par les même contrôleurs précédents, sont montrés par la Fig.4.10. On obtient :

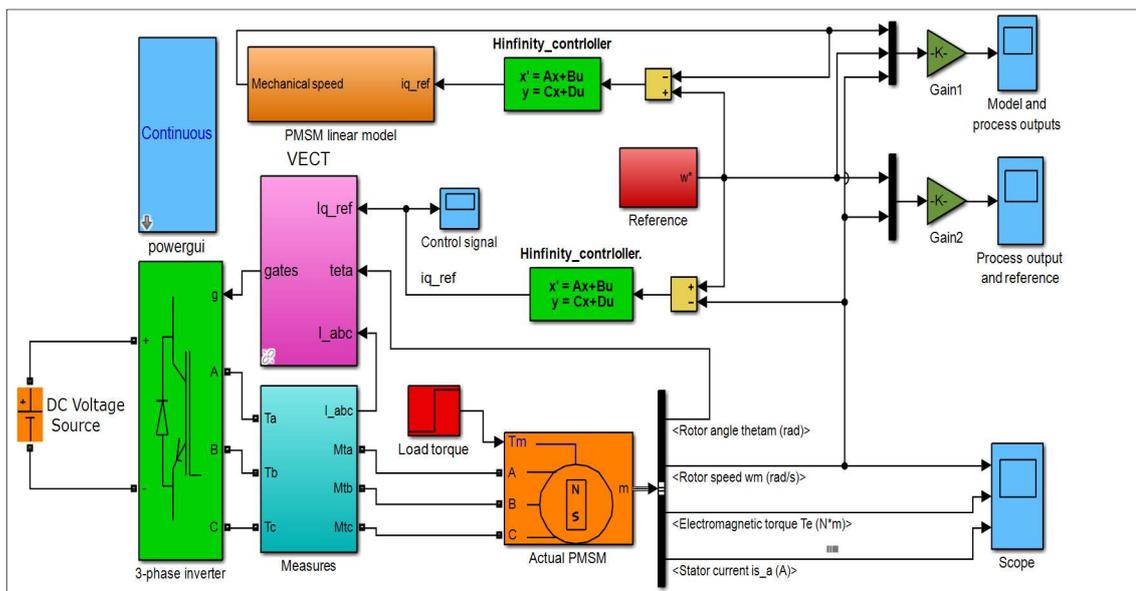


Fig.4.10. Schéma block du PMSM et leur modèle linéaire avec les contrôleurs  $H_\infty$  primaire et robustifié

A partir du schéma bloc de la Fig.4.10, nous allons examiner la conformité de l’étape de modélisation du comportement réel du système *PMSM* autour de son point de fonctionnement en utilisant le modèle nominal simplifié cité précédemment. A cet effet, l’entrée de référence est

excitée par un signal bruité pseudo-aléatoire variant au voisinage de la plage de fonctionnement du *PMSM*. Cependant, l'entrée du couple de charge est supposée nulle (démarrage à vide). La Fig.4.11 représente une comparaison entre la sortie fournie par le système bouclé par le contrôleur  $H_\infty$  robustifié, qui est connecté avec le modèle nominal simplifié du *PMSM*, ainsi que la sortie du système bouclé par le même contrôleur précédent, qui est connecté avec le bloc *Simulink* du *PMSM* existant de l'environnement *Power Sim*®. On obtient :

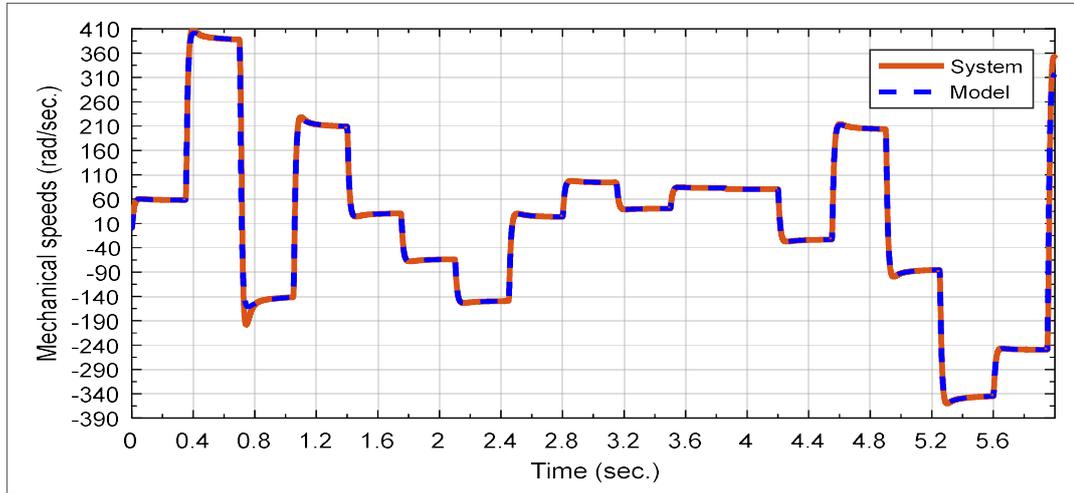


Fig.4.11. vérification de l'exactitude de l'étape de modélisation du comportement réel du *PMSM* par le modèle linéaire simplifié

Maintenant, pour examiner le compromis de robustesse « poursuite-régulation », le schéma de la Fig.4.10 est utilisé pour les deux contrôleurs :  $H_\infty$  primaire et  $H_\infty$  robustifié. Dans ce cas, les deux entrées exogènes précédentes sont modifiées de telle sorte que la première entrée, qui représente la vitesse mécanique de référence  $\Omega_{m_{ref}}^r$ , exprimée en tours/minutes (*r.p.m*), est imposée par le signal suivant:

$$\Omega_{m_{ref}}^r(t) = \begin{cases} 50 : 0 \leq t < 0.5 \\ 25 : 0.5 \leq t < 1 \\ 0 : 1 \leq t < 1.2 \\ -25 : 1.2 \leq t < 1.7 \\ -50 : 1.7 \leq t < 2.2 \\ -40 : 2.2 \leq t < 2.7 \\ -30 : 2.7 \leq t < 4 \end{cases} \quad (4.25)$$

En tenant compte la relation  $\Omega_{m_{ref}}^r = \frac{\pi}{30} \cdot \Omega_{m_{ref}}$ , d'où, la référence citée ci-dessus peut être transformée à celle donnée par (4.26), qui est exprimée en radians/secondes (*rad/sec.*) comme suit:

$$\Omega_{m_{ref}} = \begin{cases} 477.46 : 0 \leq t < 0.5 \\ 238.73 : 0.5 \leq t < 1 \\ 0 : 1 \leq t < 1.2 \\ -238.73 : 1.2 \leq t < 1.7 \\ -477.46 : 1.7 \leq t < 2.2 \\ -381.79 : 2.2 \leq t < 2.7 \\ -286.48 : 2.7 \leq t < 4 \end{cases} \quad (4.26)$$

En outre, le filtre du premier ordre  $F(s) = \frac{1}{0.01s+1}$  est inséré dans la boucle pour rendre la référence ci-dessus plus proche à celle utilisée dans la réalité. De plus, la deuxième entrée exogène représente le couple résistant qui est imposé par un échelon unitaire d'amplitude  $C_t = 15 N.m$  appliqué à partir de l'instant  $t = 3$  secondes. La Fig.4.12 représente les vitesses mécaniques données par les deux contrôleurs  $H_\infty$  primaire et robustifié. Cependant, la Fig.4.13 représente les deux courants en quadrature fournis pour les deux contrôleurs suscités. On obtient :

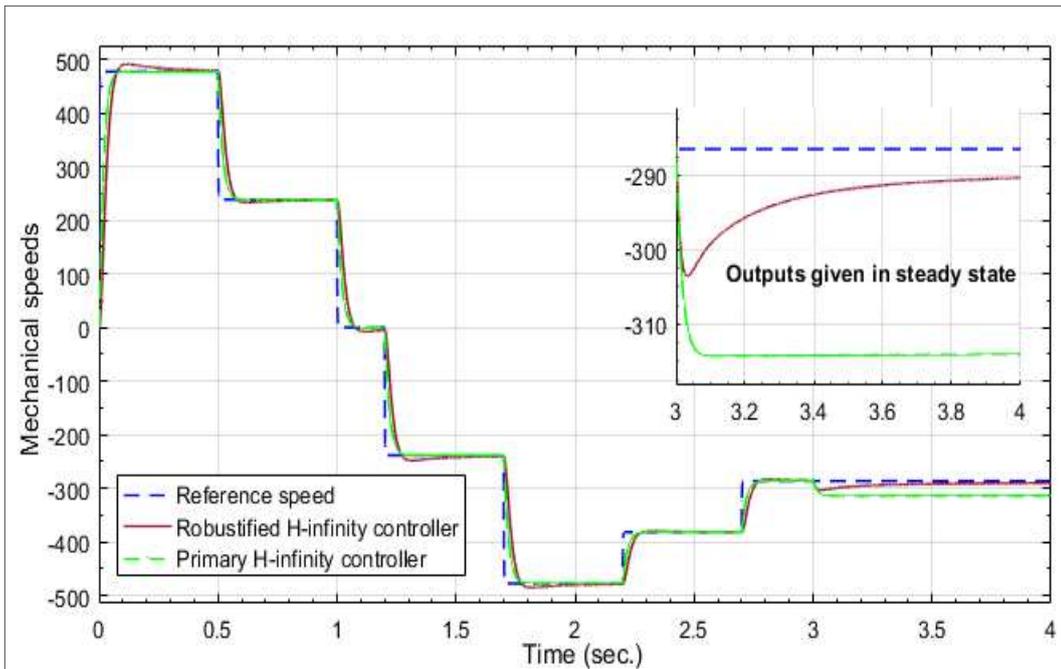


Fig.4.12. les vitesses mécaniques données par les deux contrôleurs  $H_\infty$  primaire et robustifié

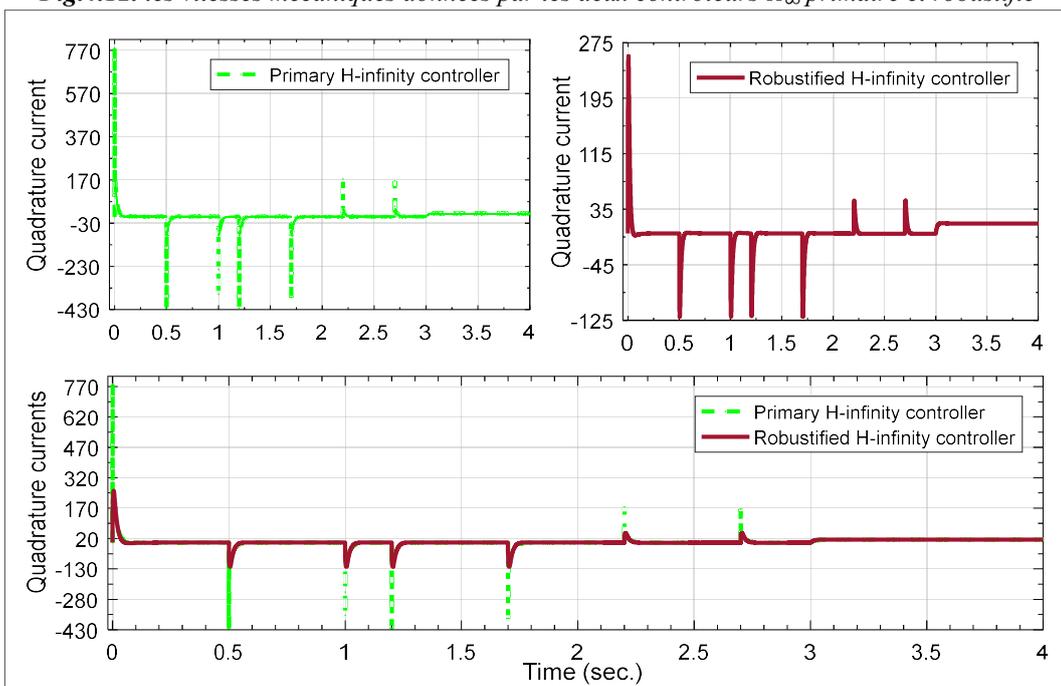


Fig.4.13. les courants en quadrature fournis par les deux contrôleurs  $H_\infty$  primaire et robustifié.

Selon les Fig.4.12 et Fig.4.13, il est facile de voir qu’une bonne dynamique de suivi de la vitesse de référence est bien assurée par les deux contrôleurs proposés. Cependant, la meilleure dynamique d’atténuation du couple résistant est celle fournie par le contrôleur  $H_\infty$  robustifié. Ce dernier fournit également un courant en quadrature  $i_q$  très raisonnable, délimité par les deux bornes  $-125A$  et  $270 A$ . En contre partie, le signal de commande fournit par le contrôleur  $H_\infty$  primaire est caractérisé par un dépassement très élevé, ce qui est souvent intolérable éventuellement dans le cas des applications industrielles. De ce fait, on constate également la présence des pics du courant en quadrature  $i_q$  très élevés, délimités par les deux bornes  $-430A$  et  $770 A$ . Ceci est causé par les changements rapides de l’entrée de référence.

La Fig.4.14 représente les courant statoriques triphasés du PMSM, tandis que la Fig.4.15 représente les tensions statoriques triphasées qui alimentent l’onduleur triphasé. On obtient donc :

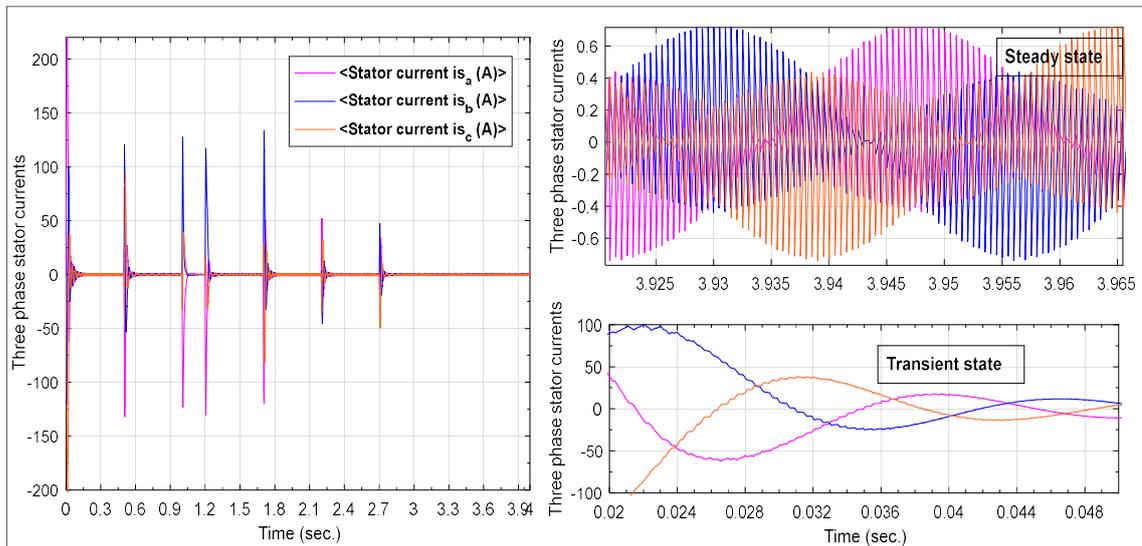


Fig.4.14. Les courants statoriques triphasés du PMSM

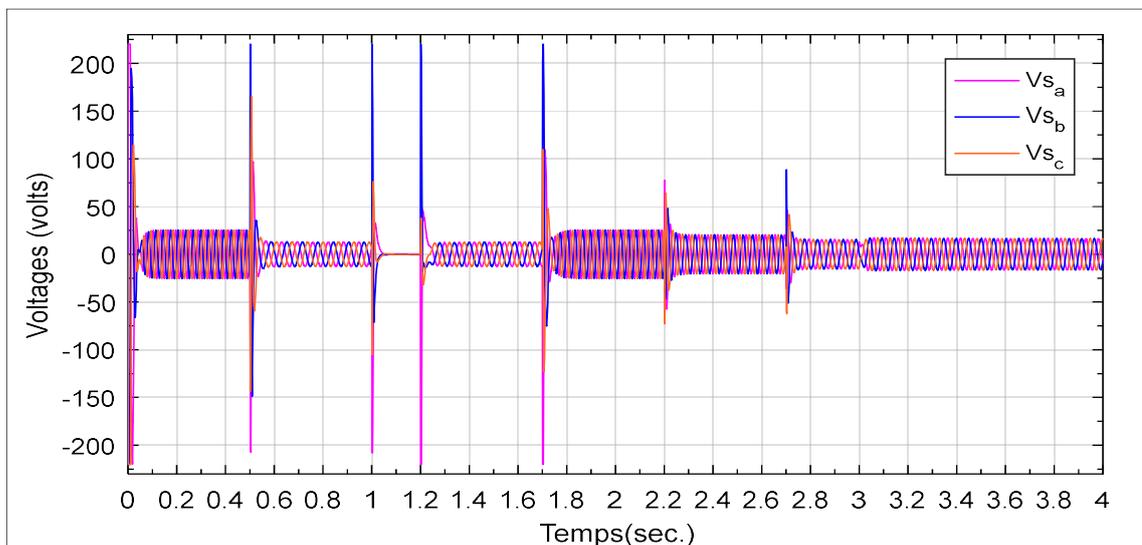


Fig.4.15. Les tensions statoriques triphasées qui alimentent l’onduleur triphasé

#### **4.5. Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons validé la robustification proposée pour le contrôleur  $H_\infty$  primaire dans laquelle la formulation du problème de sensibilité pondérée est assurée par des pondérations fractionnaires ajustables. Cette robustification permettant d'améliorer les marges de robustesse  $NP$ ,  $RS$  et  $RP$ . Ces objectifs ont été atteints via la sélection automatique de ces pondérations tout en satisfaisant certaines règles de réglage existant préalablement dans la littérature. Cette robustification proposée est basée sur les étapes suivantes : Tout d'abord, l'algorithme  $PSO$  est appliqué pour la recherche des bonnes pondérations fractionnaires ajustables dans un espace prédéfini par l'utilisateur. Ensuite, l'approche d'identification fréquentielle est appliquée pour fournir des filtres d'ordre entier rapprochant ces pondérations fractionnaires dans une plage de fréquence précise. Ces derniers permettant d'augmenter le modèle nominal de synthèse ce qui permet de mettre à jour l'ancien problème de sensibilité pondéré. Ce dernier est résolu par la méthode  $H_\infty$  et la solution obtenue est utilisée pour la mise à jour du transfert de contrôleur  $H_\infty$  primaire. Les sensibilités fournies par le système bouclé correspondant donnent la possibilité de mettre à jour la marge de robustesse précédente  $RP$  avec laquelle le critère d'arrêt de l'algorithme de robustification proposée dépend de cette nouvelle marge de robustesse. Ce processus se répète jusqu'à l'obtention du contrôleur  $H_\infty$  robustifié.

En fin de compte, les résultats de la simulation obtenus montrent l'amélioration évidente de la marge  $RP$  par le contrôleur  $H_\infty$  robustifié dans lequel deux gains significatifs ont été assurés. Le premier gain réside dans l'amélioration de la dynamique d'atténuation du couple de charge tandis que le second gain réside dans l'obtention d'une commande économique et moins coûteuse par rapport à celle fournie par le contrôleur  $H_\infty$  primaire. D'autre part, il est également clair que d'autres améliorations du schéma de contrôle proposé nécessiteront une structure de contrôleur fixe qui devrait être donnée avec un ordre très réduit et qui ne doit pas dépendre par l'ordre du système augmenté.

**CONCLUSION GÉNÉRALE**  
**ET**  
**PERSPECTIVES**

---

## Conclusion Générale

---

Dans ce travail, la robustification d'une classe des contrôleurs  $H_\infty$  primaires a été proposée afin de sécuriser les systèmes bouclés en présence des effets non souhaités causés par les incertitudes de modélisation, l'influence des dynamiques négligées de quelques modes inconnus décrivant le comportement non linéaire du système physique, l'effet des bruits de mesurés qui souvent produit par la fatigue ou la défaillance des instruments de mesure installés dans la boucle de commande,...etc.

La robustification proposée a visé l'amélioration de la marge de robustesse sur les performances robustes, qui est fournie préalablement par les contrôleurs  $H_\infty$  primaires. Cette amélioration offre la possibilité d'assurer parallèlement et avec succès l'amélioration des plusieurs d'autres marges de robustesse à savoir : la robustesse sur les performances nominales du système corrigé, la robustesse de la stabilité robuste en présence des incertitudes multiplicatives, le compromis entre ces deux dernières robustesses. En effet, la robustification proposée a la capacité de produire des contrôleurs  $H_\infty$  robustifiés assurant tous les objectifs susmentionnés et ce non seulement pour le régime de fonctionnement nominal du système physique, mais aussi pour tous les régimes perturbés potentiels qui peuvent apparaître à cause des erreurs commises lors de la phase de modélisation.

En général, la synthèse d'un contrôleur  $H_\infty$  primaire nécessite *a priori* le choix adéquat assurant la sélection des pondérations appropriées. Ces dernières ont été exploitées pour augmenter le modèle nominal de synthèse et le résultat de cette augmentation fournit un modèle augmenté. Sachant que le transfert de ce modèle est interconnecté avec celui du contrôleur à synthétiser. D'où la transformation linéaire basse appliquée sur ce système d'interconnexion permet de formuler le problème de sensibilité pondérée. La solution optimale de ce problème fait la représentation d'état du contrôleur  $H_\infty$  primaire. Le système bouclé par ce contrôleur a la possibilité de fournir des sensibilités avec lesquelles on a pu faire l'analyse de robustesse dans le plan fréquentiel. Celle-ci est basée sur le tracé des lieux des valeurs singulières maximales de différentes sensibilités. Ces lieux sont ensuite comparés par ceux fournis par les transferts inversés des pondérations. Cette comparaison permettant de calculer les différentes marges de robustesse, en particulier, la marge de robustesse sur les performances robustes. Les étapes requises, pour développer le contrôleur  $H_\infty$  primaire ont été détaillées et validées dans le premier chapitre de ce manuscrit. La validation a été effectuée à partir de la commande d'un système hydraulique dont le

comportement réel était donné par un modèle incertain entaché par des incertitudes multiplicatives amenant en sortie du modèle de synthèse.

A présent, la sélection des pondérations est assurée manuellement. Celle-ci n'est pas souvent facile, notamment si le problème de synthèse est de satisfaire la condition sur  $RP$ . La satisfaction de cette condition avec une bonne marge de sécurité faisant donc l'objet de cette thèse. En effet, le problème majeur mentionné dans plusieurs travaux antérieurs, est la sélection automatique des pondérations satisfaisant toutes les spécifications imposées par le cahier de charges. En conséquence, l'objectif de notre travail devient plus précis.

Nous avons proposé à cet effet une première solution basée sur la proposition d'une robustification du  $H_\infty$  primaire dans laquelle le choix des paramètres de chaque pondération irrationnelle ajustable était garanti par l'algorithme génétique. Les étapes requises, pour développer le contrôleur  $H_\infty$  robustifié ont été détaillées et validées dans le deuxième chapitre de ce manuscrit. La sélection automatique était donc assurée par la recherche à des paramètres optimaux constituant chaque pondération. Cette recherche était réalisée dans un espace assurant des allures souhaitées de différentes sensibilités. Ces allures ont été imposées par des gabarits fréquentiels fixées *a priori* par quelques règles de réglage existant dans la littérature. Néanmoins, cette première robustification proposée à la capacité d'assurer une légère amélioration de  $RP$  sur une bande fréquentielle très étroite. Celle-ci est due à la saturation de quelques contraintes de bornes, en particulier celles fournies par certains ordres entiers portés sur quelques transferts des pondérations irrationnelles.

Nous avons proposé à cet effet une deuxième solution fondée sur la robustification basée sur les pondérations rationnelles ajustables dont ses paramètres ont été optimisés par l'algorithme d'essaim particulaire. Les étapes requises, pour développer le contrôleur  $H_\infty$  robustifié ont été détaillées et validées dans le troisième chapitre de ce manuscrit. Dans cette proposition, les pondérations rationnelles adéquates doivent être approximées en des transferts d'ordre entier afin d'étendre l'application de la méthode  $H_\infty$  en cas de présence ce genre des pondérations. Pour approximer les transferts fractionnaires, on a fait un appel à l'identification fréquentielle basée sur la fonction du *Matlab fitfrd*.

Finalement, le manuscrit est achevé par la validation de l'approche proposée sur un prototype très connu dans des revues de renommées internationales. C'est un moteur synchrone à aimants présenté dans plusieurs travaux antérieurs. Les résultats de simulation fournis par la robustification proposée sont très encourageants. Les améliorations de la marge

*RP* requises pour perfectionner cette idée peuvent ouvrir une fenêtre à d'autres éventuels candidats dans le futur proche.

**Perspectives :**

Comme perspective, nous conseillons les futurs candidats intéressés par cet axe de recherche de penser à introduire des structures fixes pour les deux contrôleurs :  $H_\infty$  primaire et  $H_\infty$  robustifié, car le degré de chacun représente la somme des degrés de tous les transferts utilisés dans la synthèse par la méthode  $H_\infty$ . En outre, d'autres perspectives peuvent être résumées dans les points ci-dessous :

- Tenir compte des erreurs de modélisation structurées lors la robustification du contrôleur  $H_\infty$  et amélioration de la marge *RP* face à ce type d'erreurs de modélisation.
- Etendre la robustification sur les systèmes multivariables modélisés par des modèles linéaires à des paramètres variables (*LPV* model).
- Proposer une méthode efficace et simple permettant d'approximer les transferts fractionnaires des pondérations rationnelles ajustables en des filtres irrationnels d'ordre très réduit
- Proposer d'autres structures fractales dans les pondérations rationnelles ajustables, en particulier, imposer des ordres non entiers sur les opérateurs de Laplace et d'autres sur le transfert global.

## Liste des publications

---

### Publication internationale :

- **GUESSOUM, Hanni**, FERAGA, Chams-Eddine, MEHENNAOUI, Lamine, *et al.* *A robust performance enhancement of primary  $H_\infty$  controller based on auto-selection of adjustable fractional weights: Application on a permanent magnet synchronous motor. Transactions of the Institute of Measurement and Control*, **2019**, p. 0142331218823861. SAGE Journal. Impact Factor Thomson Reuter=**1.579**. PP.1-16.

### Communications internationales :

- AMIEUR, T., SEDRAOUI, M., TAIBI, D., DJEDDI, A., & **GUESSOUM, H.** *A Robust Fractional Controller Based on Weighted-Mixed Sensitivity Optimization Problem for Permanent Magnet Synchronous Motor.* « 3<sup>ème</sup> conférence Internationale des énergies renouvelables CIER-**2015**. **Proceedings of Engineering and Technology – PET**. ISSN 2356-5608 ». 21-23 Décembre 2015. Sousse, Tunisia. PP.91-97. 2016.
- AMIEUR, T., SEDRAOUI, M., DJEDDI, A., TAIBI, D., & **GUESSOUM, H.** *Design of Fractional Order PID Controller for DC Motor.* « 3<sup>ème</sup> conférence Internationale des énergies renouvelables CIER- **2015**. 21-23 Décembre 2015. Sousse, Tunisia. PP.91-97. 2016.

# **RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

## Références Bibliographiques

- [1] Duc G. (1993). “Robustesse des systèmes linéaires multivariables”, Cours E.S.E.
- [2] Doyle, J.C. (1982). “Analysis of feedback systems with structured uncertainties,” *IEE Proceedings*, Part D, Vol.133, pp. (45-56).
- [3] Doyle, J. C., J. Wall and G. Stein (1982). “Performance and robustness analysis for structured uncertainty,” in *Proc. IEEE Conf. Dec. Contr.*, pp. (629-636).
- [4] Fan, M. K. H., A. L. Tits, and J. C. Doyle (1991). “Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-36 (1), pp. (25-38).
- [5] Glover, K. and D. McFarlane (1989). “Robust stabilization of normalized coprime factor plant descriptions with  $H_\infty$  bounded uncertainty,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 34. (8), pp. (821-830).
- [6] Glover, K. (1986a). “Robust stabilization of linear multivariable systems: Relations to approximation,” *Int. J. Contr.*, Vol. 43 (3), pp. (741-766).
- [7] Khargonekar, P. P., I. R. Petersen, and K. Zhou (1990). “Robust stabilization and  $H_\infty$ -optimal control,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 35 (3), pp (356-361).
- [8] Safonov, M. G. (1982). “Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback systems,” *Proc. IEE*, Part D, Vol. 129 (6), pp. (251-256).
- [9] Toker, O. and H. Ozbay (1995). “On the NP-hardness of the purely complex computation, analysis/synthesis, and some related problems in multidimensional systems,” *Proc. American Control Conference, Seattle, Washington*, pp. (447-451).
- [10] Doyle, J. C., J. Wall and G. Stein (1982). “Performance and robustness analysis for structured uncertainty,” in *Proc. IEEE Conf. Dec. Contr.*, pp. (629-636).
- [11] Poolla, K. and A. Tikku (1995). “Robust performance against time-varying structured perturbations,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 40 (9), pp. (1589- 1602).
- [12] P. Apkarian (2012). “Éléments de la théorie de la commande robuste”. URL [pierre.apkarian.free.fr/COURS/polysae.pdf](http://pierre.apkarian.free.fr/COURS/polysae.pdf).
- [13] Stein, G. and J.C. Doyle (1991). “Beyond Singular Values and Loop Shapes,” *J. Guidance*, Vol 14, pp. (5-16).
- [14] ZAMES, George et FRANCIS, Bruce (1983). “Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness.” *IEEE transactions on Automatic Control*, Vol. 28(5), pp. (585-601).

- [15] FRANCIS, Bruce, HELTON, J. W., et ZAMES, George (1984). “ $H_\infty$ -optimal feedback controllers for linear multivariable systems.” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 29 (10), pp. (888-900).
- [16] VIDYASAGAR, M. et KIMURA, H (1986). “Robust controllers for uncertain linear multivariable systems.” *Automatica*, Vol. 22 (1), pp. (85-94).
- [17] Packard, A. (1994). “Gain scheduling via linear fractional transformations.” *Systems and Control Letters*, Vol. 22, pp. (79-92).
- [18] Redheffer, R. M. (1960). “On a certain linear fractional transformation,” *J. Math. and Physics*, Vol. 39, pp. (269-286).
- [19] Arnold, W. F. and A. J. Laub (1984). “Generalized Eigenproblem algorithms and software for algebraic Riccati equations,” *Proceedings of the IEEE*, Vol. 72 (12), pp. (1746-1754).
- [20] Bernstein, D. S. and W. M. Haddad (1989). “LQG control with an  $H_\infty$  performance bound: A Riccati equation approach,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-34, pp. (293-305).
- [21] Gohberg, I., P. Lancaster, and L. Rodman (1986). “On Hermitian solutions of the symmetric algebraic Riccati equation.” *SIAM J. Contr. Optimiz.*, Vol. 24(6), pp. (1323-1334).
- [22] Lancaster, P. and L. Rodman (1995). “Algebraic Riccati Equations”. Oxford University Press, Oxford.
- [23] Martensson, K. (1971). “On the matrix Riccati equation,” *Information Sciences*, Vol. 3, pp. (17-49).
- [24] Chilali, M. and P. Gahinet (1996). “ $H_\infty$  design with pole placement constraints: an LMI approach,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 41(3), pp. (358-367).
- [25] Doyle, J. C., A. Packard and K. Zhou (1991). “Review of LFTs, LMIs and  $\mu$ ,” *Proc. IEEE Conf. Dec. Contr.*, England, pp.(1227-1232).
- [26] Gahinet, P. (1996). “Explicit controller formulas for LMI-based  $H_\infty$  synthesis,” *Automatica*, Vol. 32 (7), pp. (1007-1014).
- [27] Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan (1994). “Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory”, *SIAM*, Philadelphia.
- [28] Gahinet, P. and P. Apkarian (1994). “A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control,” *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, Vol. 4, pp. (421-448).

- [29] Fan, M. K. H. and A. L. Tits (1986). "Characterization and efficient computation of the structured singular value," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-31 (8), pp. (734-743).
- [30] Nett, C. N. and J. A. Uthgenannt (1988). "An explicit formula and an optimal weight for the 2-block structured singular value interaction measure," *Automatica*, Vol. 24 (2), pp. (261-265).
- [31] Packard, A. and J. C. Doyle (1988). "Structured singular value with repeated scalar blocks," *Proc. American Control Conference*, Atlanta.
- [32] Chen, J. (1995). "Sensitivity integral relations and design trade-offs in linear multivariable feedback systems," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. 40 (10), pp. (1700-1716).
- [33] Glover, K. and J. Doyle (1988). "State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an  $H_\infty$  norm bound and relations to risk sensitivity," *Systems and Control Letters*, Vol. 11, pp. (167-172).
- [34] H. Oloomi and B. Shafai (2003). "Weight selection in mixed sensitivity robust control for improving the sinusoidal tracking performance", *Conference on Decision and Control, 42nd IEEE*, Vol 1, pp. (300-305).
- [35] Zhou, K., K. Glover, B. Bodenheimer, and J. Doyle (1994). "Mixed  $H_2$  and  $H_\infty$  performance objectives I: robust performance analysis," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 39(8), pp. (1564-1574).
- [36] MG. Ortega and FR. Rubio (2004). "Systematic design of weighting matrices for the  $H_\infty$  mixed sensitivity problem", *Journal of Process Control*, Vol 14, pp. (89-98).
- [37] SN. Sarath (2011). "Automatic weight selection algorithm for designing H-infinity controller for active magnetic bearing", *International Journal of Engineering Science and Technology*, Vol 3, pp. (122-138).
- [38] De Falco I., Della Cioppa A., Tarantino E., (2007). "Facing classification problems with Particle Swarm Optimization", *Applied Soft Computing*, Vol 7, pp. (652-658).
- [39] M. Sedraoui and D. Boudjehem (2012). "Robust fractional order controller based on improved PSO algorithm for the wind turbine equipped with a doubly fed asynchronous machine", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I*, 226, pp. (1274 – 1286).
- [40] H.Guessoum , C.E. Fraga , M. Sedraoui, L Mehennaoui, A Lachouri (2019). "A robust performance enhancement of primary  $H_\infty$  controller based on auto-selection of adjustable fractional weights: Application on a permanent magnet synchronous motor", *Transactions of the Institute of Measurement and Control*.

- [41] A. Oustaloup (1991). “ La commande CRONE : Commande robuste d'ordre non entier ”, *Hermès*, Paris.
- [42] K. Matsuda and H. Fujii (1993). “H(infinity) optimized wave-absorbing control - Analytical and experimental results”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, Vol 16(6) . pp.(1146-1153).
- [43] A. Charef, H. Sun, Y. Sao and B. Onaral (1992). “Fractal system as represented by singularity function”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol 37 (9),pp. (1465–1470).
- [44] BM. Vinagre, I. Podlubny, A. Hernández,; V. Feliu (2000). “Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications”, *Fractional calculus and applied analysis*, Vol 3,pp. (231-248).
- [45] P. Borne, F. Rotella, I. Zambettakis, and J.P. Richard (1992). “Modélisation et identification des processus”, Vol. 1. Editions Technip.
- [46] G. Salloum (2007). “ Contribution à la commande robuste de la machine asynchrone à double alimentation ”, Thèse de doctorat. Toulouse, INPT.
- [47] S. Skogestad and I. Postlethwaite (2007). “Multivariable feedback control: analysis and design”, Vol. 2. Wiley. New York.
- [48] H. Moradi, G. Vossoughi (2015). “Robust control of the variable speed wind turbines in the presence of uncertainties: A comparison between  $H_\infty$  and PID controllers”, *Energy*, Elsevier, Vol. 90, pp.(1508-1521).
- [49] JC. Doyle, BA. Francis, and A. Tannenbaum (2013). “Feedback control theory”, *Courier Corporation*.
- [50] M. Sedraoui (2008). “Apport des principales méthodes d’optimisation dans la commande prédictive généralisée multivariable sous contraintes”, Thèse doctorat, Université Mentouri Constantine.
- [51] Mareels, I. M. Y., & Hill, D. J. (1992). “Monotone stability of nonlinear feedback systems”. *Journal of Mathematical Systems Estimation Control*, Vol. 2,pp. (275–291).
- [52] McFarlane, D. C. and K. Glover (1992). “A loop shaping design procedure using  $H_\infty$  synthesis,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 37(6), pp. (759-769).
- [53] Doyle, J. C., K. Glover, P.P . Khargonekar, B. A. Francis (1989). “State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-34(8), pp. (831-847).
- [54] Glover, K. and J. C. Doyle (1989). “A state space approach to  $H_\infty$  optimal control,” *in Three Decades of Mathematical Systems Theory: A Collection of Surveys at the Occasion of*

*the 50th Birthday of Jan C. Willems, H. Nijmeijer and J. M. Schumacher (Eds.), Springer-Verlag, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 135,*

- [55] Olivier Sename (2013). “Robust control of MIMO systems”, URL: <https://www.gipsa-lab.grenoble-inp.fr/~o.sename/teaching.html>.
- [56] Maruta I, Hyoung T and Sugie T (2009) Fixed-structure HN controller: “A meta-heuristic approach-using simple constrained particle swarm optimization ”. *Automatica*. Vol. 45,pp. (553–559).
- [57] M. Sedraoui, T. Amieur, R. Bachir Bouiadjra and M. Sahnoune (2017). “Robustified fractional-order controller based on adjustable fractional weights for a doubly fed induction generator”, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, DOI: 10.1177/0142331215617236.
- [58] Bouiadjra RB, Sedraoui M and Younsi A (2017). “ Robust fractional PID controller synthesis approach for the permanent magnetic synchronous motor” . *International Journal of Machine Learning and Cybernetics* .Vol. 9(12),pp. (2027–2041).
- [59] G. J. Balas, J. C. Doyle, K. Glover, and R. Smith (1998). “  $\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox ”, *Natick Mathworks Inc.*
- [60] SN. Sarath (2011). “Automatic weight selection algorithm for designing H-infinity controller for active magnetic bearing”, *International Journal of Engineering Science and Technology*, Vol.3,pp. (122-138).
- [61] Holland (1975). “ Adaptation in Natural and Artificial Systems ”. *University of Michigan Press* : Ann Arbor.
- [62] Goldberg, D.E. (1989). “Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning”. *Addison-Wesley* : Reading, MA.
- [63] A. Wright (1991). “Genetic Algorithms for Real Parameter Optimization ”, Morgan Kaufmann : San Mateo, CA pp. (205–218)..
- [64] L. Davis (1991). “ Handbook of Genetic Algorithms ”. *Van Nostrand Reinhold* : New York.
- [65] Z. Michalewicz (1992). “Genetic Algorithms ”. *Springer-Verlag* : New York.
- [66] I. Podlubny (2002). “Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation”, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, Vol. 5,pp.(367–386).
- [67] AA. Kilbas, HM. Srivastava, and JJ. Trujillo (2006). “Theory and Applications of Fractional Differential Equations”, *Elsevier*.
- [68] Ross, B (1977). “Fractional calculus ”. *Math. Mag*, Vol.50(3),pp. (115–122).

- [69] A. Si Amour (2011). “Contribution à la commande par modes glissantes d’ordre fractionnaire”, Thèse de doctorat, Université de Tizi-Ouzou.
- [70] H. Nezzari (2013). “Contribution à l’analyse des systèmes d’ordre fractionnaire”, Thèse de doctorat, Université de Constantine 1.
- [71] Carlson, G., Halijak, C (1964). “Approximation of Fractional Capacitors  $(1/s)^{(1/n)}$  by a Regular Newton Process”. *IEEE Transactions on Circuit Theory* . Vol.11, pp. (210–213).
- [72] Monje, C. A., Calderón, A. J., Vinagre, B. M., Chen, Y. Q., & Feliu, V.(2004). “On fractional  $PI^\lambda$  controllers: Some tuning rules for robustness to plant uncertainties”. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 38(1–4),pp.(369–381).
- [73] Saha, S., Das, S., Ghosh, R., et al (2009). “Fractional Order Phase Shaper Design with Routh’s Criterion for Iso-Damped Control System”. In: *2009 Annual IEEE India Conference (INDICON)*, pp. (1–4).
- [74] Saha, S., Das, S., Ghosh, R., et al (2010).: “Fractional order phase shaper design with Bode’s integral for iso-damped control system”. *ISA Transactions* . Vol. 49,pp. (196–206).
- [75] Luo, Y., Chen, Y.Q (2009). “Fractional order [proportional derivative] controller for a class of fractional order systems”. *Automatica* . Vol. 45,pp. (2446–2450).
- [76] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu and F. Nanot (2000). “Frequency-band complex non-integer differentiator: characterization and synthesis”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems Fundamental Theory and Applications*, Vol 47,pp. (25–39).
- [77] Hartley, T.T. and Lorenzo, C.F., (2003). “Fractional-order system identification based on continuous order-distributions”, *Signal Processing* . Vol. 83,pp. (2288-2300).
- [78] O. Válerio (2005). “Fractional control toolbox for Matlab, Beta release”, Université Technique de Lisbonne.
- [79] A.V. Oppenheim and R.W. Schaffer (1975). “Digital Signal Processing”, *Prentice Hall*, New Jersey, pp. (513).
- [80] Eberhart, R. Kennedy, J. (1995). “New optimizers using particle swarm theory”. In *Proceedings of the 6th International Symposium on Micro Machine and Human Science*, pp. (39-43).
- [81] Kennedy J., Eberhart R. C., (1995). “Particle swarm optimization. In Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks”, *Piscataway, New Jersey. IEEE Service Center*, pp. (1942- 1948).

- [82] Siami, M., Khaburi, D. A., & Rodriguez, J. (2018). “Simplified finite control set-model predictive control for matrix converter-fed PMSM drives”. *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol. 33(3),pp. (2438-2446).
- [83] Xia, C., Liu, N., Zhou, Z., Yan, Y., & Shi, T. (2018). “ Steady-State Performance Improvement for LQR-based PMSM Drives ”. *IEEE Transactions on Power Electronics*.
- [84] Bernard, P., & Praly, L. (2018). “Estimation of position and resistance of a sensorless PMSM: a nonlinear Luenberger approach for a non-observable system”.
- [85] Liang, D., Li, J., Qu, R., & Kong, W. (2018). “Adaptive second-order sliding-mode observer for PMSM sensorless control considering VSI nonlinearity”. *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol. 33(10),pp. (8994-9004).
- [86] Song, X., Fang, J., Han, B., & Zheng, S. (2016). “Adaptive compensation method for high-speed surface PMSM sensorless drives of EMF-based position estimation error ”. *IEEE Transactions on Power Electronics* ,Vol. 31(2),pp. (1438-1449).

# **ANNEXE**

# Annexe A : Transformation fractionnaire linéaire

## A.1. Définition d'une Transformation fractionnaire linéaire *LFT* :

Soit la matrice complexe  $M$  donnée par la matrice de transfert ci dessous :

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Soit la matrice complexe définissant les incertitude de modélisation  $\Delta_l$ . L'interconnexion entre  $M$  et  $\Delta_l$  peut être représentée par la Fig. A.1 comme suit :

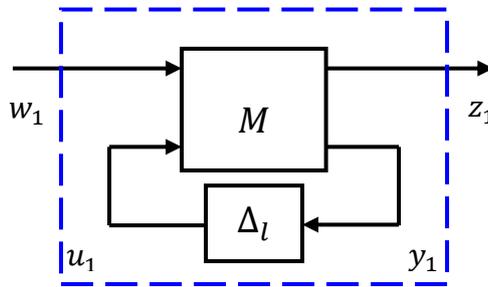


Fig. A.1. *LFT inférieure*

A partir de la Fig. A.1, il est possible de définir une *LFT* inférieure entre les deux transferts complexes  $M$  et  $\Delta_l$  telle que la relation ci-dessous :

$$F_l(M, \Delta_l) = M_{11} + M_{12}\Delta_l(I - M_{22}\Delta_l)^{-1}M_{21} \quad (\text{A.2})$$

Où la matrice complexe  $(I - M_{22}\Delta_l)$  doit être inversible. De plus, le transfert reliant l'entre avec la sortie de cette interconnexion, représentée par Fig.1 peut être exprimé comme suit :

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Sachant que :

$$u_1 = \Delta_l \cdot y_1 \quad (\text{A.4})$$

Supposons maintenant qu'on a une autre matrice complexe, notée  $\Delta_u$ . Alors, l'interconnexion entre  $M$  et  $\Delta_u$  est présentée par la Fig. A.2 comme suit :

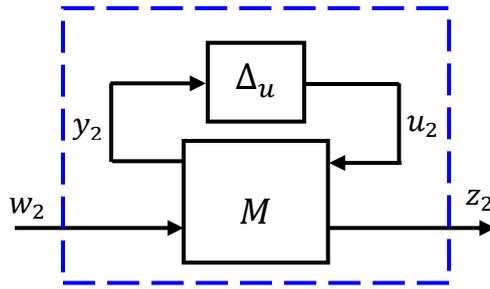


Fig. A.2. LFT supérieure

A partir de la Fig. A.2, il est possible de définir une LFT supérieure entre  $M$  et  $\Delta_u$  telle que la relation ci-dessous :

$$F_u(M, \Delta_u) = M_{22} + M_{21}\Delta_u(I - M_{11}\Delta_u)^{-1}M_{12} \quad (\text{A.5})$$

Avec, la matrice  $(I - M_{11}\Delta_u)$  doit être inversible. Dans ce cas, le transfert d'entre/ sortie de cette interconnexion peut être exprimé comme :

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} w_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_2 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

En Tenant en compte la relation ci dessous :

$$u_2 = \Delta_u \cdot y_2 \quad (\text{A.7})$$

❖ **Remarque :**

- La transformée linéaire fractionnaire inférieure  $F_l(M, \Delta_l)$  fournit un transfert en boucle fermée dont l'entrée est  $w_1$  et la sortie est  $z_1$ .
- La transformée linéaire fractionnaire supérieure  $F_u(M, \Delta_u)$  fournit également un transfert en boucle fermée dont l'entrée est  $w_2$  et la sortie est  $z_2$ .
- La matrice  $M$  s'appelle « matrice du coefficient ». Elle représente le système à commander.
- La matrice  $\Delta$ , avec  $(\Delta_u$  ou  $\Delta_l)$  représente le contrôleur ou la perturbation.

**A.2. Produit star de Redheffer :**

Etant données les deux matrices de transfert  $P$  et telles que les relations suivantes:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

De l'équation (A.8), il existe un produit, appelé produit *star* de Redheffer appliqué sur les deux transferts complexes  $P$  et  $K$ . D'où le résultat de ce produit peut être défini comme suit:

$$S(P, K) = P * K = \begin{bmatrix} F_l(P, K_{11}) & P_{12}(I - K_{11}P_{22})^{-1}K_{12} \\ K_{21}(I - P_{22}K_{11})^{-1}P_{21} & F_u(K, P_{22}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Ce dernier résultat peut être illustré par la Fig. A.3 comme suit:



Fig. A.3. Produit star de Redheffer

L'interconnexion du produit star de Redheffer de  $P$  et  $K$  peut être représentée par la Fig. A.4 comme suit :

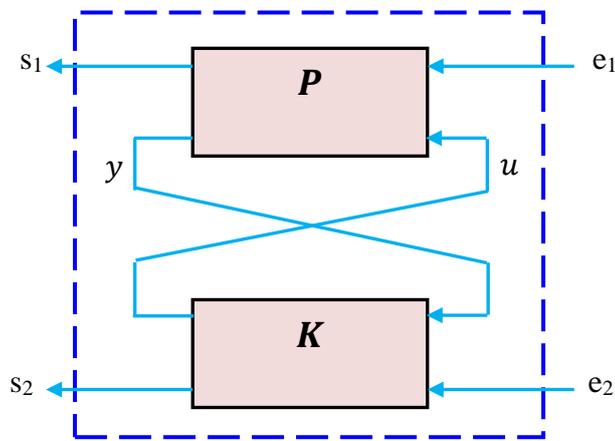


Fig. A.4. Diagramme fonctionnel de l'interconnexion entre  $P$  et  $K$

Si les matrices  $P$  et  $K$  n'ayant qu'un seul bloc, il est possible d'adopter les conventions suivantes:

$$P * K_{11} := F_l(P, K_{11}) \quad \text{et} \quad P_{22} * K := F_u(K, P_{22})$$

La fonction *starp* du *Matlab* peut être utilisée pour calculer le produit star de Redheffer comme suit :

$$P * K = \text{starp}(P; K; Dy; Du)$$

Avec :

- $Dy$  : la dimension de  $y$  ;
- $Du$  : la dimension de  $u$
- **Propriété :**

Le produit star de Redheffer est une opération associative vérifiant l'expression ci-dessous:

$$(P * K) * L = P * (K * L) = P * K * L \quad (\text{A.10})$$

### A.2.1. Espace d'état du produit star de Redheffer :

Soient les deux réalisations minimales de  $P$  et  $K$  données respectivement par :

$$P = \begin{pmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \quad ; \quad K = \begin{pmatrix} A_K & B_{K1} & B_{K2} \\ C_{K1} & D_{K11} & D_{K12} \\ C_{K2} & D_{K21} & D_{K22} \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

La réalisation minimale du produit star de Redheffer de  $P$  et  $K$  est donc donnée par :

$$P * K = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B}_1 & \bar{B}_2 \\ \bar{C}_1 & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} \\ \bar{C}_2 & \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Avec :

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & B_2 \\ C_2 & D_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} D_{K11} & C_{K1} \\ B_{K1} & A_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + B_2 \cdot \tilde{R}^{-1} D_{K11} C_2 & B_2 \tilde{R}^{-1} C_{K1} \\ B_{K1} R^{-1} C_2 & A_K + B_{K1} R^{-1} D_{22} C_{K1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} D_{K11} & D_{K12} \\ B_{K1} & B_{K2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 + B_2 \cdot \tilde{R}^{-1} D_{K11} D_{21} & B_2 \cdot \tilde{R}^{-1} D_{K12} \\ B_{K1} R^{-1} D_{21} & B_{K2} + B_{K1} R^{-1} D_{22} D_{K12} \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} C_1 & D_{12} \\ C_2 & D_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} D_{K11} & C_{K1} \\ D_{K21} & C_{K2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + D_{12} D_{K11} R^{-1} C_2 & D_{12} \cdot \tilde{R}^{-1} C_{K1} \\ D_{K21} R^{-1} C_2 & C_{K2} + D_{K21} R^{-1} D_{22} C_{K1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} D_{K11} & D_{K12} \\ D_{K21} & D_{K22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} + D_{12} D_{K11} R^{-1} D_{21} & D_{12} \cdot \tilde{R}^{-1} D_{K11} \\ D_{K21} R^{-1} D_{21} & D_{K22} + D_{K21} R^{-1} D_{22} D_{K12} \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Sachant que les deux matrices  $R$  et  $\tilde{R}$  sont définies comme suit :

$$R = I - D_{22} D_{K11} \quad \text{et} \quad \tilde{R} = I - D_{K11} D_{22}$$

### A.3. Composition de LFTs :

Considérons le système d'interconnexion entre les trois blocs des transferts présentés ci-dessous. Sachant que chaque bloc possédant un model LFT incertain (voir la Fig. A.5) :

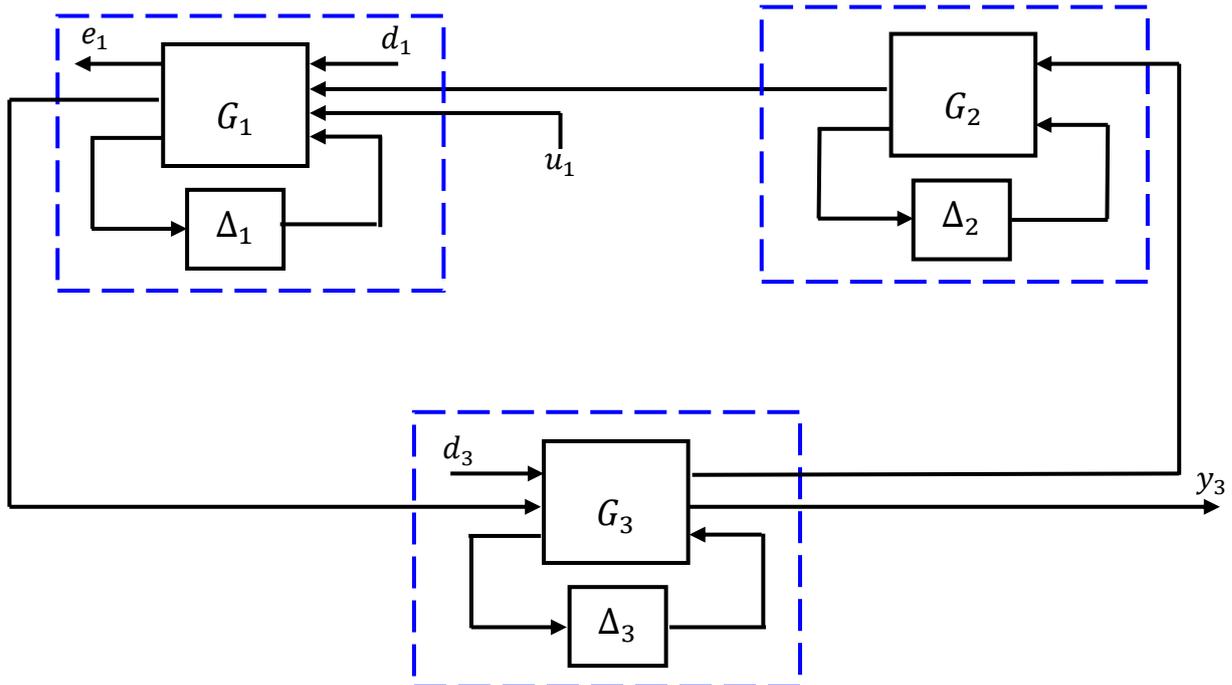


Fig. A.5. Interconnexion entre trois systèmes incertains

En faisant quelques simplifications sur le schéma précédent et rassemblant tous les transferts connus dans un seul bloc  $P$  et les autres transferts inconnus (perturbations) dans le bloc  $\Delta_i$ . On obtient donc le système *LFT* présenté dans la Fig. A.6 comme suit :

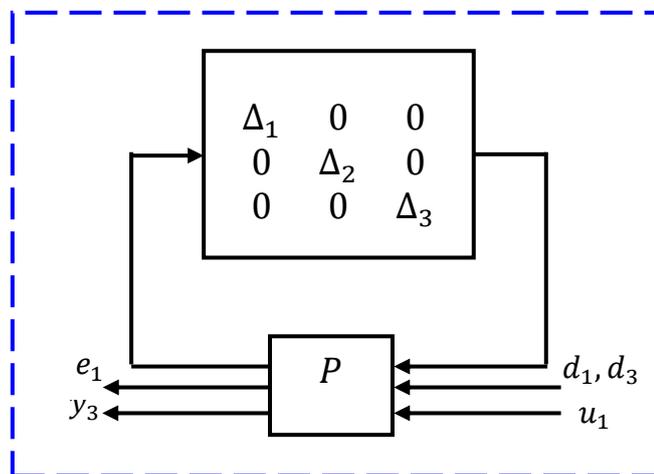


Fig.6. Système *LFT* équivalent

A partir de la Fig. A.6, on peut envisager les opérations ci-dessous :

**A.3.1. Opérations sur *LFT* :**

Supposons qu'on a deux systèmes incertains donnés par les réalisations minimales ci-dessous :

$$G_1(\Delta_1) = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad G_2(\Delta_2) = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \tag{A.17}$$

D'où, la matrice des incertitudes  $\Delta$  peut être donc définie comme suit :

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

**a. Produit des LFTs :**

Le système résultant  $P_c(\Delta)$  fourni par l'association en cascade des deux systèmes incertains  $G_1(\Delta_1)$  et  $G_2(\Delta_2)$  représente aussi un système LFT dont la réalisation minimale correspondante est donnée par:

$$P_c(\Delta) = (G_1 G_2)(\Delta) = \begin{bmatrix} A_{Pc} & B_{Pc} \\ C_{Pc} & D_{Pc} \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Avec :

$$A_{Pc} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 C_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}; B_{Pc} = \begin{pmatrix} B_1 D_2 \\ B_2 \end{pmatrix}; C_{Pc} = (C_1 \quad D_1 C_2); D_{Pc} = D_1 D_2$$

**b. Somme des LFTs :**

De plus, l'addition des deux transferts  $G_1(\Delta_1)$  et  $G_2(\Delta_2)$  représente également un système LFT défini par la réalisation minimale suivante:

$$P_A(\Delta) = (G_1 + G_2)(\Delta) = \begin{bmatrix} A_{Pa} & B_{Pa} \\ C_{Pa} & D_{Pa} \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Avec:

$$A_{Pa} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}; B_{Pa} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}; C_{Pa} = (C_1 \quad C_2); D_{Pa} = D_1 + D_2$$

**c. Inversion des LFTs :**

a) Supposons qu'on a la matrice de transfert  $G$  telle que:

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Sachant que le transfert  $G_{11}$  doit être inversible (non singulière). Supposons, maintenant, que toutes les incertitudes de modélisation peuvent être englobées dans une seule matrice, notée  $\Delta$ . Dans ce cas, la LFT inférieure du système d'interconnexion  $(P - G - \Delta)$  peut être écrite comme :

$$P = F_l(G, \Delta) \quad (\text{A.22})$$

L'inverse de LFT inférieure de l'expression donnée par (A.22) est donc donnée par :

$$P^{-1} = (F_l(G, \Delta))^{-1} = F_l(\hat{G}, \Delta) \quad (\text{A.23})$$

Avec :

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} M_{11}^{-1} & -M_{11}^{-1}M_{12} \\ M_{21}M_{11}^{-1} & M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

b) Supposons maintenant que la matrice  $G$  est définie par :

$$G = F_l(P, K) \quad (\text{A.25})$$

Avec  $P$ ,  $P_{12}$  et  $P_{21}$  sont des matrices carrées et inversibles. Alors il est possible d'écrire :

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Or :

$$u = K \cdot y \quad (\text{A.27})$$

Sachant que :

$$z = F_l(P, K) \cdot w = G \cdot w \quad (\text{A.28})$$

Il est possible de résoudre cette équation, pour  $K = F_u(P^{-1}, G)$ , comme suite :

$$\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

Avec :

$$z = G \cdot w \quad (\text{A.30})$$

Tenant compte la relation :

$$u = F_u(P^{-1}, G) \cdot y \quad (\text{A.31})$$

Avec :

$$K = F_u(P^{-1}, G) \quad (\text{A.32})$$

### A.3.2. Fonctions des sensibilités sous formes LFT :

Supposons le système bouclé représenté sous la forme LFT présentée par la Fig. A.7 :

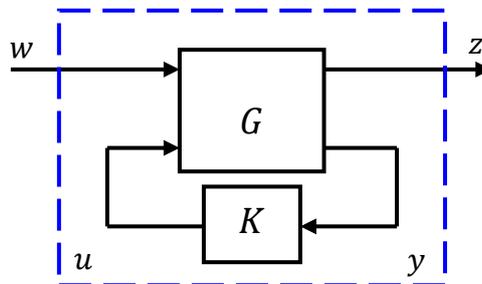


Fig. A. 7. LFT inférieure d'un système bouclé

Les fonctions des sensibilités du système bouclé de la Fig. A.7 peuvent être exprimées sous formes des *LFT* comme suite :

❖ Fonction de sensibilité directe :

$$S_y = (I + GK)^{-1} = F_\ell \left( \begin{bmatrix} I & -G \\ I & -G \end{bmatrix}, K \right) \quad (\text{A.33})$$

❖ Fonction de sensibilité complémentaire :

$$T_y = GK(I + GK)^{-1} = F_\ell \left( \begin{bmatrix} 0 & G \\ I & -G \end{bmatrix}, K \right) \quad (\text{A.34})$$

---

## عنوان الأطروحة :

تمتين وحدة تحكم بسيطة بواسطة الأوزان الكسرية

### الملخص

في هذه الأطروحة, نقترح إستراتيجية جديدة من اجل تقويم وحدة التحكم متينة أولية, هاته الإستراتيجية تركز على اختيار نظامي منهجي لأوزان كسرية. متانة النظام الحلقي ستتحسن جدا ولا تتأثر بوجود الارتياح, طريقة المتانة المقترحة تتبع الخطوات التالية: أولا تصميم نظام متين أولي عبر حل مشكلة الحساسية الممزوجة باستعمال أوزان طبيعية, ثانيا استعمال اختيار نظامي منهجي باستعمال خوارزمية السرب العملي لإيجاد أوزان كسرية, ثالثا بعد استخراج المعلومات الترددية للأوزان الكسرية تقرب هاته الأوزان إلى أوزان طبيعية باستعمال طرق تقريبية ترددية, وأخيرا يتم حل مشكل حساسية ممزوجة جديد باستعمال الأوزان الجديدة. يجب أن يثبت نظام التحكم المتحصل عليه الجديد انه أكثر متانة من الأول وإلا يجب إعادة الخطوات الثلاثة الأخيرة. ولقد تمت مقارنة النتائج المتحصل عليها من طرف نظام التحكم المتحصل عليه عن طريق الأوزان الكسرية مع نظام التحكم المتحصل عليه عن طريق الأوزان الطبيعية على محرك متزامن بمغناطيس دائم حيث تمت مقارنة وتحليل النتائج.

### كلمات مفتاحيه

وحدات التحكم الأساسية والمتحولة  $H_{\infty}$ , محرك متزامن بمغناطيس دائم, الخوارزمية الجينية, خوارزمية السرب الأمثل.

---

---

## INTITULE DU MANUSCRIT :

### **ROBUSTIFICATION D'UN CONTROLEUR CONVENTIONNEL PAR UN TRANSFERT D'ORDRE NON ENTIER**

#### **Résumé:**

Dans ce travail, une nouvelle stratégie de robustification d'un contrôleur  $H_\infty$  primaire basée sur une sélection systématique des pondérations irrationnelles adéquate est proposée afin d'améliorer plusieurs marges de robustesse, en particulier marge des performances robustes  $RP$ . Cette marge doit être garantie face aux incertitudes multiplicatives non structurées affectant le modèle nominal de synthèse. Le contrôleur  $H_\infty$  robustifié est obtenu à partir de la robustification du contrôleur  $H_\infty$  primaire tout en suivant les étapes suivantes : Premièrement, le contrôleur  $H_\infty$  primaire est conçu à partir de la résolution du problème de sensibilités pondérée utilisant les pondérations irrationnelles fixes. Ces pondérations sont ensuite utilisées afin d'initialiser d'un côté, l'algorithme de robustification proposée. Elles sont également utilisées pour définir l'espace de recherches à d'autres pondérations fractionnaires ajustables. La sélection optimale de ces dernières est assurée par l'algorithme d'optimisation d'essaim de particules  $PSO$  de telles sortes que certaines règles de réglage existant dans la littérature doivent être respectées. Comme la méthode  $H_\infty$  est adaptée uniquement pour les pondérations d'ordre non entier, ce qui peut poser des problèmes sérieux avec celles d'ordre non entier, qui sont sélectionnées préalablement par l'algorithme  $PSO$ . A cet effet on doit recourir une approche basée sur l'identification fréquentielle avec laquelle toutes les pondérations fractionnaires ajustables peuvent être approximées par des filtres d'ordre entiers. Ces derniers permettant de reformuler un nouveau problème de sensibilité pondérée qu'avec lequel une représentation d'état d'un nouveau contrôleur est obtenue via sa solution optimale. Ces étapes sont répétées en tant que la condition sur  $RP$  n'est satisfaite. L'algorithme de robustification est donc achevé par l'obtention du contrôleur  $H_\infty$  robustifié assurant une bonne marge de robustesse de  $RP$  non seulement pour le régime de fonctionnement nominal du système physique, mais aussi pour un ensemble englobant un nombre très élevé des régimes de fonctionnement perturbé. La validation de cette nouvelle proposition est montrée à partir de la commande d'un moteur synchrone à aimants permanents où son comportement réel est modélisé par un modèle linéaire incertain. Les résultats de simulation obtenus sont comparés dans le plan fréquentiel en utilisant les lieux des valeurs singulières de différentes sensibilités du système bouclé. Ces résultats sont aussi comparés dans le plan temporel en utilisant l'environnement *Powersim*.

#### **Mots-clés :**

Contrôleurs  $H_\infty$  Primaire et Robustifié ; Moteur Synchrone à Aimants Permanent ; Algorithme Génétique ; Algorithme d'optimisation par l'Essaim Particulaire.

---

---

**MANUSCRIPT TITLED**  
**ROBUSTIFICATION OF A CONVENTIONAL CONTROLLER BY FRACTIONAL**  
**ORDER TRANSFER FUNCTIONS**

**Abstract:**

In this work, a new robustification strategy of a primary  $H_\infty$  controller based on a systematic selection of adequate fractional weights is proposed. Its robust performance  $RP$  margin is well enhanced with respect to unstructured multiplicative uncertainties presented in linear feedback systems. The proposed robustification strategy provides a robustified  $H_\infty$  controller when following proposed hierarchical control is well respected. First, the primary  $H_\infty$  controller is synthesized from solving a weighted-mixed sensitivity  $H_\infty$  problem using initial integer weights. Thus, an initial  $RP$  margin is obtained. Second, an automatic selection of adjustable fractional weights is performed by the particle swarm optimization algorithm, in which some proposed tuning rules are accordingly well satisfied. Third, frequency response data of these weights are computed and then fitted by corresponding approximated integer weights using a frequency identification technique. Finally, these weights reformulate a new weighted-mixed sensitivity problem. The optimal solution to this problem updates the previous initial  $RP$  margin. These last three steps are repeated as the updated  $RP$  margin is diminished. Otherwise, the proposed hierarchical control is achieved by selecting the best adjustable fractional weights, providing, therefore, the best approximated integer weights and leading, therefore, to the robustified  $H_\infty$  controller. In order to confirm the effectiveness of our proposed hierarchical control, primary and robustified  $H_\infty$  controllers are applied on a permanent magnet synchronous motor where its actual behavior is modeled by an unstructured multiplicative uncertain model. The results obtained are compared in frequency domains using the singular value plots of their sensitivity functions. Otherwise, the same results are compared in time domains using the *Powersim* software.

**Key-words**

Primary and Robustified  $H_\infty$  controllers; Permanent Magnet Synchronous Motor; Genetic Algorithm; Particle Swarm Optimization algorithm.

---