

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 de Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de **DOCTORAT**

**MODELISATION DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES
PONTS ROUTIERS MULTI TRAVEES SUPPORTES PAR DES
APPUIS ELASTIQUES PONCTUELS**

Option : **Génie Mécanique**

Présentée et soutenue publiquement par : **GUEBAILIA Moussa**

Devant le jury composé de:

FATMI	Louendi	Professeur	Université de Guelma	Président
OUELAA	Nouredine	Professeur	Université de Guelma	Rapporteur
MILOUDI	Abdelhamid	Professeur	Université USTHB	Examineur
GUENFOUD	Salah	Professeur	Université de Guelma	Examineur
CHAOUI	Kamel	Professeur	Université d'Annaba	Examineur
HAMZAOUI	Nacer	Professeur	INSA-Lyon France	Examineur

2015

R e m e r c i e m e n t s

Je tiens tout vivement remercier et saluer mon directeur de thèse Monsieur Nouredine OUELAA, Professeur au département de Génie Mécanique à l'Université 8 mai 1945 Suelma pour sa patience et son aide et assistance scientifique jusqu'à la fin de cette recherche, ainsi que pour les encouragements qu'il n'a cessé d'apporter à mes travaux durant cette période.

J'adresse aussi mes remerciements à Monsieur Louendi FATMI, Professeur au département de Mécanique à l'université de Suelma d'avoir accepté de présider mon jury de soutenance.

Je remercie Monsieur Abdelhamid MILOUDI, Professeur à l'USTHB Alger d'avoir pris le soin d'examiner ce travail et me faire l'honneur de participer au jury.

Je remercie Monsieur Salah GUENFOUD, Professeur au département de Mécanique à l'Université de Suelma d'avoir pris le soin d'examiner ce travail et me faire l'honneur de participer au jury.

Je remercie Monsieur Kamel CHAOUI, Professeur à l'université Badji Mokhtar à Annaba d'avoir pris le soin d'examiner ce travail et me faire l'honneur de participer au jury.

Je remercie Monsieur Nacer HAMZAOUI, Professeur à l'INSA - Lyon, France d'avoir pris le soin d'examiner ce travail et me faire l'honneur de participer au jury.

Mes salutations, remerciements vont aussi tout particulièrement à l'ensemble des membres du laboratoire L.M.S. et du département de mécanique. Leur contribution a été essentielle dans la réalisation de ce travail.

Un grand merci à toute ma famille, ma petite famille (ma femme, mes deux filles et mes deux fils) pour avoir créé l'environnement meilleur pour réaliser mes tâches.

Notations & symboles

A_r	:	Coefficient de la rugosité spectrale de $10^{-6} \text{ m}^3 / \text{cycle}$,
a_1, a_2	:	Excentricités,
α_v	:	Rotation du bloc rigide du véhicule,
b	:	Largeur du pont,
c	:	Constante d'amortissement du pont,
CLEF	:	Logiciel d'analyse de structure par élément fini, université Laval,
c_v	:	Amortissement dans la suspension du véhicule,
CDPR	:	Logiciel développé «Comportement Dynamique des Ponts Routiers»
C_{ij}, c_{ij}	:	Amortissement modaux et généralisés,
c_{pi}	:	Amortissement dans le pneu i du véhicule,
c_{si}	:	Amortissement dans la suspension i du véhicule,
$[C_v]$:	Matrice d'amortissement du véhicule,
$[C^*]$:	Matrice d'amortissement généralisé du pont,
D	:	Rigidité de la flexion du pont,
D_x, D_y	:	Rigidités de la flexion du pont selon direction x et y ,
D_{xy}	:	Rigidité de la torsion du pont,
δ	:	Opérateur de Dirac,
δ_{ij}	:	Symbole de Kronecker,
Δ	:	Opérateur de Laplace,
Δt	:	Pas du temps,
Δ_x, Δ_y	:	Pas dans l'espace direction x et y ,
E_x, E_y	:	Modules d'élasticité direction x et y ,
ε	:	Tolérance de convergence de calcul,
FAD	:	Facteur d'amplification dynamique
F_v	:	Force d'interaction pont - véhicule,
F_{pk}^{int}	:	Force d'interaction de la $k^{\text{ème}}$ roue du véhicule et le pont,
F_j, F_{ij}	:	Forces modales,

f_{ij}	:	Fréquences propres du pont,
$\{F_g\}$:	Vecteur des forces de pesanteur,
$\{F_p^{int}\}$:	Vecteur des forces d'interaction sur le pont,
$\{F_v^{int}\}$:	Vecteur des forces d'interaction sur le véhicule,
ϕ_{ij}	:	Modes propres du pont,
φ_i	:	Modes propres du pont direction x ,
g	:	Accélération de la pesanteur,
G, G_{xy}	:	Module de cisaillement,
γ, β	:	Paramètres de stabilité de la méthode de Newmark,
h	:	Epaisseur du pont,
H	:	Rigidité flexionnelle équivalente du pont,
H_j	:	Fonction de déformées propres aux appuis direction y ,
I	:	Moment d'inertie du pont,
$I_{\theta 1}, I_{\theta 2}$:	Moment d'inertie des essieux avant et arrière du véhicule,
$I_{\theta v}, I_{\alpha v}$:	Moment d'inertie de tangage et de roulis du bloc rigide du véhicule,
K	:	Rigidité des appuis élastiques ponctuels,
K_{ij}, k_{ij}	:	Rigidités modales et généralisées,
k_{pi}	:	Rigidité dans le $i^{\text{ème}}$ pneu du véhicule,
k_{si}	:	Rigidité dans le $i^{\text{ème}}$ suspension du véhicule,
$[K^*]$:	Matrice de rigidité généralisée du pont,
$[K_v]$:	Matrice de rigidité du véhicule,
L	:	Longueur du pont,
l_i	:	Longueur de le $i^{\text{ème}}$ travée du pont,
\bar{m}	:	Masse par unité de longueur,
m_p	:	Masse du pont,
M_v	:	Masse du véhicule,
m_v	:	Masse de la $v^{\text{ème}}$ véhicule, masse du bloc rigide,

M_{ij}	:	Masses modales,
m_{ij}	:	Masses généralisées,
$[M_v]$:	Matrice de masse de véhicule,
$[M^*]$:	Matrice de masse du pont,
m_1, m_2	:	Masse équivalente des roues avec essieux avant et arrière,
n	:	Nombre de modes direction x ,
Ω_j	:	Fonction de déformée propre direction y sauf aux points des appuis,
n_v	:	Nombre de véhicules,
n_f	:	Nombre de forces
R	:	Paramètre d'appui,
ν, ν_{xy}, ν_{yx}	:	Coefficients de poisson

Liste des figures

Figure II-1 Pont modélisé par une plaque mince orthotrope, à 3 travées simplement appuyé.	13
Figure II-2 Superposition de $k_i(x)$ avec les déformées des modes i ($-\varphi_i(x) \text{ --- } k_i(x)$)	17
Figure II-3 Superposition des déformées propres du pont $\phi_j(x, y)$	22
Figure II-4 Les six premières déformées propres obtenues par ANSYS	24
Figure II-5 Les six premières déformées propres obtenues par la méthode proposée	25
Figure II-6 Superposition de $k_i(x)$ avec les déformées des modes i –pont asymétrique($-\varphi_i(x) \text{ --- } k_i(x)$)	26
Figure II-7 Les 6 premières déformées propres d'un pont asymétrique par ANSYS.....	28
Figure II-8 Les 6 premières déformées propres d'un pont asymétrique par CDPR	28
Figure III-1 Pont modélisé par une plaque mince orthotrope supportée par des appuis rigides	31
Figure III-2 Algorithme de la méthode de résolution.....	35
Figure III-3 La réponse dynamique du pont obtenue en haut par la référence [ZHU 02], en bas par la présente méthode.	37
Figure III-4 Superposition des résultats de la réponse dynamique obtenue par CLEF et CDPR	38
Figure III-5 L'influence de l'état de la chaussée sur le déplacement dynamique de pont.	39
Figure III-6 L'influence de l'état de la chaussée sur le déplacement dynamique des essieux avant (a) et arrière (b) du véhicule.	40
Figure III-7 La réponse dynamique pour différentes vitesses de passage du véhicule sur le milieu de la deuxième travée.....	41
Figure III-8 Les forces d'interaction.	42
Figure III-9 Forces d'interaction pour les différentes conditions de chaussée.	42
Figure III-10 Les forces d'interaction pour les différentes vitesses de passage.	43
Figure III-11 FAD des trois travées du pont pour les trois cas de charge.	46
Figure III-12 FAD de chaque cas de chargement pour les trois travées.	46
Figure IV-1 Pont modélisé par une plaque mince orthotrope supporté par des appuis élastiques ponctuels, à trois travées.	50
Figure IV-2 Pont modélisé par une poutre continue à trois travées sur des appuis élastiques.	52
Figure IV-3 Répartition des fonctions des déformées propres sur la direction longitudinale	57
Figure IV-4 Répartition des fonctions des déformées propres sur la direction transversale	59
Figure IV-5 Les déformées propres des trois premiers modes (a), (b) et (c) : appuis élastiques, (d), (e) et (f) : appuis rigides	62
Figure IV-6 Les six premières déformées propres obtenues par ANSYS cas libre-libre	63
Figure IV-7 Les six premières déformées propres du pont symétrique obtenues par CDPR ($K=0N/m$)	65
Figure IV-8 Les six premières déformées propres du pont non symétrique obtenues par CDPR ($K=0N/m$)	68
Figure IV-9 Influence du paramètre d'appui sur les fréquences propres	69

Liste des tableaux

Tableau II-1 Valeurs de k_i , k_{viESL} et k_{viMOY}	18
Tableau II-2 Les 16 premières fréquences propres du pont symétrique	23
Tableau II-3 Les 16 premières fréquences propres du pont asymétrique	27
Tableau III-1 Les facteurs d'amplification dynamiques (FAD)	44
Tableau IV-1 : Valeurs de k_i et k_{viESL} du pont symétrique pour $K=0$ N/m	64
Tableau IV-2 Les huit premiers modes de Vibration du pont symétrique ($K=0$ N/m)	65
Tableau IV-3 Valeurs de k_i et k_{viESL} du pont symétrique ($K=8 \cdot 10^{10}$ N/m)	65
Tableau IV-4 Les six premiers modes de Vibration du pont symétrique ($K=8 \cdot 10^{10}$ N/m)	65
Tableau IV-5 Valeurs de k_i et k_{viESL} du pont non symétrique ($K=0$ N/m)	66
Tableau IV-6 Les huit premiers modes de Vibration du pont non symétrique ($K=0$ N/m)	67
Tableau IV-7 Valeurs de k_i et k_{viESL} pont non symétrique pour $K=8 \cdot 10^{10}$ N/m	68
Tableau IV-8 Les huit premiers modes de Vibration du pont non symétrique ($K=8 \cdot 10^{10}$ N/m)	68

SOMMAIRE

RESUME	H
INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I...SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE	5
CHAPITRE II SOLUTION DE L'EQUATION DES VIBRATIONS LIBRES D'UN PONT MULTI TRAVEES PAR LA METHODE D'ESTIMATION LOCALE	12
II.1 INTRODUCTION	12
II.2 MODÉLISATION DU PONT	12
II.2.1 HYPOTHESES DE MODELISATION	12
II.2.2 DETERMINATION DES FREQUENCES PROPRES ET DES DEFORMEES PROPRES	14
II.2.3 RESOLUTION DE L'EQUATION DU MOUVEMENT DU PONT	18
II.3 EXEMPLE DE VALIDATION	22
II.3.1 PONT SYMETRIQUE	22
II.3.2 PONT ASYMETRIQUE:	25
II.3.3 ANALYSE DES RESULTATS	29
II.4 CONCLUSION	29
CHAPITRE III ÉTUDE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES PONTS ROUTIERS ORTHOTROPES MULTI TRAVEES SOLLICITES PAR LE PASSAGE D'UN VEHICULE	30
III.1 INTRODUCTION	30
III.2 MODÉLISATION DU PONT	30
III.3 RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE MOUVEMENT COUPLÉE PONT-VEHICULE	32
III.3.1 ALGORITHME DE LA METHODE DE RESOLUTION	34
III.4 EXEMPLE DE VALIDATION	35
III.4.1 LE DEPLACEMENT VERTICAL	36
III.4.2 INFLUENCE DES CONDITIONS DE LA CHAUSSEE	38
III.4.3 LES FORCES D'INTERACTION	41
III.4.4 FACTEUR D'AMPLIFICATION DYNAMIQUE (FAD)	43
III.5 CONCLUSION.	46

CHAPITRE IV SOLUTION DE L'EQUATION DU MOUVEMENT LIBRE D'UN PONT ROUTIER MULTI TRAVEES

SUPPORTE PAR DES APPUIS ELASTIQUES PONCTUELS.....49

IV.1 INTRODUCTION49

IV.2 MODÉLISATION DU PONT49

IV.3 DÉTERMINATION DES FRÉQUENCES PROPRES ET DES DÉFORMÉES PROPRES50

IV.3.1 DETERMINATION DE LA FONCTION $\varphi_i(x)$51

IV.3.2 DETERMINATION DE LA FONCTION $\Omega_i(x)$57

IV.3.3 DETERMINATION DE LA FONCTION $H_j(y)$58

IV.3.4 DETERMINATION DE LA FONCTION $h_j(y)$60

IV.3.5 DEFORMEES PROPRES MONODIMENSIONNELLES61

IV.4 EXEMPLES DE VALIDATION : PONT SYMETRIQUE62

IV.4.1 CAS D'UN PONT LIBRE-LIBRE, SIMULE SOUS ANSYS62

IV.4.2 CAS D'UN PONT A TROIS TRAVEES SUPPORTE PAR DES APPUIS ELASTIQUES SANS RAIDEUR63

IV.4.3 CAS D'UN PONT A TROIS TRAVEES SUPPORTE PAR DES APPUIS ELASTIQUES AVEC UNE RAIDEUR EQUIVALENTE A LA RAIDEUR D'UN APPUI RIGIDE65

IV.5 EXEMPLE DE VALIDATION : PONT NON SYMETRIQUE66

IV.5.1 CAS RAIDEUR $K=0$ N/M66

IV.5.2 CAS RAIDEUR $K=8.10^{10}$ N/M68

IV.6 ANALYSE DES RESULTATS69

IV.7 CONCLUSION70

CONCLUSION GENERALE & PERSPECTIVES71

CONCLUSION GENERALE71

PERSPECTIVES72

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....73

ANNEXES76

ANNEXE 1 EQUATION DE FREQUENCES76

ANNEXE 2 LE LOGICIEL CDPD DEVELOPPE AU SEIN DU LMS - GUELMA.....77

Résumé

Le phénomène de l'interaction pont – véhicule est un sujet qui intéresse beaucoup de chercheurs dans différents domaines. Dans ce travail, nous avons présenté en premier lieu la solution de l'équation du mouvement libre d'un pont simplement appuyé par la méthode d'estimation locale de la position x le long du pont, cette approche nous a rendu le problème bidirectionnel en un problème mono dimensionnel avec un gain de temps de calcul, cette méthode a été confrontée aux résultats de la littérature et aux simulations par élément finis.

Nous avons étudié en deuxième lieu le comportement dynamique en étudiant l'influence de différents paramètres sur la réponse dynamique. Nous avons pu tirer plusieurs constatations concernant le déplacement vertical du pont, influence de la rugosité, trajectoire et point de mesure. Nous avons étudié le facteur d'amplification dynamique et les forces d'interaction.

En fin, nous avons modélisé un pont supporté par des appuis élastiques ponctuels répartis sur les deux directions longitudinale et transversale. L'équation de mouvement du pont est résolue par la méthode d'estimation locale. Nous avons noté que le comportement des appuis élastiques ponctuels tend vers le comportement des appuis rigides pour un paramètre d'appui de 15% au plus et vers le comportement libre-libre pour un paramètre d'appui qui tend vers 0. Le comportement est celui d'un appui élastique dans l'intervalle 0 et 0.15.

Mots clés : *Appui élastique, FAD, Appui rigide, Comportement dynamique, Fréquences propres*

Abstract

The phenomenon of interaction bridge - vehicle is a subject that interests many researchers in different fields. In this work, we presented first the solution of the free movement equation of a simply supported bridge by the local estimation method the position x along the bridge, this approach simplify a two-dimensional problem to one-dimensional problem with a gain of computation time, this method has been confronted with the results of literature and finite element simulations.

We studied secondly the dynamic behavior by studying the influence of various parameters on the dynamic response. We were able to obtain several results concerning the vertical

movement of the bridge, influence of roughness, trajectory and point of measurement. We studied the dynamic amplification factor and interaction forces.

In the end, we modeled a bridge supported by point elastic supports distributed on both longitudinal and transverse directions. The bridge movement equation is solved by the local estimation method. We noted that the behavior of elastic supports tends to the behavior of rigid support for a 15% stiffness parameter and to the free-free behavior for a stiffness parameter which tends to 0. The behavior is that of an elastic support in the interval 0 and 0.15.

Keywords : *Elastic support, DAF, Stiffness parameter, Dynamic behavior, Natural frequencies*

المخلص:

ظاهرة التفاعل جسر - السيارة هي الموضوع الذي يثير العديد من الباحثين في مختلف المجالات. في هذا العمل، قدمنا أولاً حل معادلة الحركة الحرة لجسر بدعائم صلبة بطريقة التقدير المحلي لقيمة x على طول الجسر، أدى هذا النهج لجعل مشكلة ذات اتجاهين إلى مشكلة أحادية الأبعاد مع زيادة الوقت اللازم للحساب، وقد واجه هذا الأسلوب مع النتائج المنشورة و نتائج المحاكاة بالعناصر المحدودة.

درسنا ثانيا السلوك الديناميكي من خلال دراسة تأثير المتغيرات المختلفة على الاستجابة الديناميكية. كنا قادرين على رسم العديد من النتائج المتعلقة بحركة رأسية من الجسر، وتأثير خشونة، مسار ونقطة القياس. درسنا عامل التضخيم والتفاعل القوى الدينامية.

في نهاية ، قمنا بنمذجة جسر بدعائم مرنة نقطية موزعة على كلا الاتجاهين الطولي والعرضي. يتم حل معادلة حركة الجسر بطريقة التقدير المحلي. لاحظنا أن سلوك الدعائم المرنة يميل إلى سلوك دعائم صلبة عند 15% وأكثر من وسيد الدعم و يتجه إلى سلوك حر-حر عندما ينتهي وسيط الدعم إلى 0. السلوك يكون لدعائم مرنة في عندما يكون وسيط الدعم في المجال 0 و 0.15.

الكلمات المفتاحية: داعم مرن، عامل التضخيم الديناميكي، وسيط الداعم،

السلوك الديناميكي، الذبذبات الحرة

Introduction générale

Avant la révolution industrielle, les structures ont généralement une très grande masse en raison des lourdes poutres et des pierres qui ont été utilisés dans leur fabrication. Les sources d'excitation vibration ont de faibles amplitudes de sorte que la réponse dynamique des structures était extrêmement faible. En outre, l'application de ces méthodes de construction produit habituellement une structure avec un très grand amortissement propre, qui a également donné un faible taux de réponse structurelle à une excitation dynamique.

Au cours des 200 dernières années, avec l'arrivée des matériaux forts et légers comme la fonte, l'acier et l'aluminium, et l'augmentation de la connaissance des propriétés des matériaux et la charge structurale, la masse des structures construites pour remplir une fonction particulière a diminué. L'ampleur des forces d'excitation de vibrations est accrue. Ce processus d'augmentation de l'excitation avec la réduction de la masse structurelle et l'amortissement a poursuivi à un rythme de plus en plus à nos jours où peu, le cas échéant, les structures peuvent être conçues sans procéder à l'analyse de vibration nécessaire, si leur performance dynamique est acceptable.

En raison de très graves effets que les vibrations non désirées peuvent avoir sur la dynamique des structures, il est indispensable que l'analyse des vibrations doit être effectuée comme une partie inhérente de leur conception; lorsque les adaptations nécessaires peuvent plus facilement être prises pour éliminer les vibrations ou tout au moins à réduire autant que possible.

Il existe deux facteurs qui déterminent l'amplitude et la fréquence des vibrations dans une structure: l'excitation appliquée et la réponse de la structure à cette excitation particulière. La modification de l'excitation ou les caractéristiques dynamiques de la structure vont changer la vibration stimulée. L'objectif d'une analyse de vibration libre est de prévoir les fréquences propres de vibration et les déformées propres des systèmes lorsque aucune excitation externe d'une force variante dans le temps sur le système.

L'excitation provient de sources externes et moins de sources internes à la structure, telle que le déplacement de charges. Ces forces d'excitation peuvent être périodiques ou harmonique, en raison de chocs ou des charges d'impulsion, ou même de nature aléatoire.

Il est nécessaire d'analyser les vibrations de structures afin de prédire les fréquences propres et la réponse à l'excitation attendues. Les fréquences propres de la structure doivent être bien déterminées parce que si la structure est excitée à une de ces fréquences propres, la résonance aura lieu, avec comme conséquences de fortes amplitudes de vibration, de fortes contraintes dynamiques et des niveaux élevés de bruit. En conséquence, la résonance doit être évitée et la structure conçue de manière qu'il ne se rencontre pas dans des conditions normales. Si l'une des fréquences propres de vibration libre coïncide par des forces externes variantes dans le temps, une condition de résonance est rencontrée et dangereusement fortes amplitudes sont produites.

La connaissance des déformées modales joue un rôle important dans la recherche et le développement. Par exemple, très souvent, la réponse dynamique d'un système est mesurée en utilisant des dispositifs tels que des accéléromètres, des jauges de contrainte et transducteurs de pression, etc. Ce n'est que par la connaissance des déformées modales que l'on peut déterminer la position optimale de placer ces dispositifs de sorte que les mesures de ceux-ci peuvent être entièrement utilisées. Par exemple, si un accéléromètre est placé à un nœud, il ne sera évidemment pas enregistré tout. Il est donc évident que l'analyse de vibration libre joue un rôle très important dans la recherche des solutions à divers problèmes de vibrations rencontrés par les concepteurs et les ingénieurs de l'industrie.

Toutes les structures réelles consistent d'un nombre infini d'éléments de masse connectés et donc avoir un nombre infini de degrés de liberté; donc un nombre infini de coordonnées sont nécessaires pour décrire leur mouvement. Cela conduit à former des équations du mouvement et de longues analyses. Toutefois, le mouvement d'une structure est souvent simple que peu de coordonnées sont nécessaires pour décrire son mouvement. Ceci est parce que les déplacements des autres coordonnées sont retenus ou non excités, peuvent être négligés. Or, l'analyse d'une structure composée de quelques degrés de liberté est généralement plus facile à conduire que l'analyse d'une structure à plusieurs degrés de liberté, et donc seulement un modèle mathématique simple de structure convient du point de vue de l'analyse. Bien que le nombre d'informations qu'un modèle simple puisse donner est limité. Toutefois, des informations adéquates sur les vibrations d'une structure peuvent souvent être obtenues par l'analyse d'un modèle simple, au moins dans la première instance.

Durant les années récentes, les transports ferroviaires et routiers, aussi bien pour les voyageurs que pour les marchandises, se sont beaucoup développés avec comme conséquence un trafic qui devient plus rapide et plus sûr. Des recherches ont été réalisées afin d'améliorer la

vitesse des véhicules (trains) surtout dans les pays développés: le TGV en France, le Shinkansen au Japon, l'ICE en Allemand, l'X2000 en Suède, le Pendolino en Italie, le Thalys et l'EuroStar...etc. Des vitesses qui peuvent atteindre les 300Km/h en régime commercial et de 500Km/h en essai. La commercialisation du 1^{er} train haute-vitesse a eu lieu en 1964 avec une vitesse de 210Km/h dans "The Japanese rail ways connecting Tokyo and Osaka".

L'interaction entre un pont et les véhicules mobiles en passage est un problème de dynamique. La majorité des chercheurs s'intéressaient auparavant à la réponse d'impact du pont et non à la réponse des véhicules traversant. Pour le cas où seulement la réponse du pont est cherchée, les véhicules sont approximés par un nombre de charges mobiles. L'interaction dynamique entre un pont et un véhicule représente une discipline spéciale dans le domaine de la dynamique des structures

Le travail que nous avons développé dans cette thèse est organisé en quatre chapitres:

Dans le premier chapitre, une introduction avec une synthèse bibliographique enrichie par les derniers articles publiés dans le domaine de l'interaction pont-véhicule soit concernant la réponse dynamique du pont, les fréquences et modes propres du pont ou des véhicules, effet des irrégularités de la chaussée et des défauts de roues, effet de la vitesse de roulement, influence de la modélisation et méthode de solution sur la réponse dynamique du pont.

Au deuxième chapitre, nous présentons la modélisation d'un pont routier par l'équation du mouvement d'une plaque mince orthotrope multi travées supportée par des appuis simples. Nous proposons de résoudre l'équation du mouvement en vibration libre par une méthode d'estimation locale de la valeur de x le long du pont correspondant à l'amplitude maximale de la déformée de chaque mode. Cette nouvelle méthode que nous proposons, permet de minimiser énormément le temps de calcul, de bien s'intégrer dans le logiciel CDPR et d'éviter d'effectuer plusieurs intégrations comme dans le cas de la méthode de Rayleigh-Ritz.

Le troisième chapitre traite la partie de vibration forcée d'un pont multi travées excité par le passage d'un véhicule mobile. Plusieurs effets dynamiques importants peuvent être engendrés par le passage du véhicule à grandes vitesses sur les ponts routiers. Nous présentons la modélisation du comportement dynamique du pont routier modélisé par une plaque mince orthotrope sollicité par le passage d'un véhicule modélisé par un modèle dynamique H20-44 à sept degrés de liberté. Nous avons utilisé la méthode modale et la méthode d'intégration de

Newmark pour résoudre les équations de mouvement couplées pont-véhicule. La confrontation de la réponse dynamique pour trois cas de chargement et le facteur d'amplification dynamique avec les résultats de la bibliographie montre une bonne concordance.

Au quatrième chapitre, nous présentons une modélisation très complexe d'un pont routier par l'équation du mouvement d'une plaque mince orthotrope multi travées supportée par des appuis élastiques ponctuels dans les deux directions longitudinale et transversale. Les résultats obtenus sont validés dans les deux configurations de pont étudié, symétrique et non symétrique, avec les résultats obtenus par le logiciel ANSYS (cas d'un pont libre-libre) et avec les résultats d'un pont multi travées simplement appuyé (chapitre II). A l'issue de ce chapitre, nous avons conclu que lorsque le paramètre d'appui R tend vers 0.15, signifie que les appuis élastiques ont une grande rigidité et le comportement du pont en vibration libre (fréquences et déformées propres) tend vers celui d'un pont sur des appuis rigides.

Une conclusion générale résumant les principaux résultats des quatre chapitres est présentée à la fin de cette thèse.

CHAPITRE I

Synthèse bibliographique

L'interaction dynamique pont-véhicule, au moment où un véhicule traverse le pont est un phénomène très complexe, pour que l'étude soit significative, plusieurs paramètres doivent être pris en compte dans la modélisation telle que: la structure du pont, le type de véhicule comme étant la source d'excitation et les défauts (irrégularités) de la chaussée comme étant l'interface entre le véhicule et le pont.

Le pont a été modélisé par plusieurs modèles du simple modèle d'une poutre au début des recherches dans ce domaine afin d'éviter la complexité de ce type de problèmes. D'autres auteurs le modélise par une plaque mince orthotrope comme dans la référence [ZHU 02] ou par une plaque mince isotrope la référence [MAR99].

Dans la littérature l'excitateur de vibration des ponts a été modélisé dans les premiers travaux de recherches par des forces et des masses mobiles. Pour étudier le phénomène d'interaction pont-excitateur, ils analysent une poutre excitée par une ou plusieurs forces mobiles à 1 degré de liberté. Dans les études les plus récentes, les auteurs modélisent l'excitateur par un système de 7 degrés de liberté, selon la norme [AAS 05].

Les auteurs dans la référence [MAJ 08] ont étudié les effets de divers paramètres influant sur le comportement dynamique des ponts ferroviaires par le développement d'un modèle numérique. Ce modèle intègre un train multi corps de trois dimensions par la méthode des éléments finis. Les équations correspondantes de mouvement sont intégrées numériquement par l'application de la méthode de Newmark en combinant une procédure itérative. Les auteurs ont vérifié le modèle par des comparaisons dans la littérature. Ils ont effectué une analyse paramétrique, afin d'établir les variables clés qui influent sur la réponse dynamique des ponts de chemin de fer. Ils ont noté que la vitesse du train, la fréquence train-pont, ainsi que l'amortissement du pont ont été identifiés comme les variables significatives. Particulièrement, une forte amplification dynamique (FAD) a été trouvée pour le train d'essieux courts et régulièrement espacés se déplaçant à des vitesses critiques. Ils constatent que le FAD généralement accroit avec des vitesses élevées. L'amortissement du véhicule a moins d'influence sur la réponse dynamique du pont.

Les auteurs dans la référence [SHJ 03] examinent les caractéristiques de résonance des ponts en trois dimensions lors du passage des trains à grande vitesse. Ils ont utilisé la modélisation d'un pont multi travées simplement appuyé dans l'analyse dynamique par la méthode des éléments finis. Les fréquences dominantes du train peuvent être clairement vues du résultat des éléments finis. Afin d'éviter la résonance, les fréquences dominantes du train et les fréquences propres du pont devraient être aussi différentes que possible, en particulier pour la première fréquence dominante du train et la première fréquence propre du pont dans chaque direction. Si les deux premières fréquences sont les mêmes, la résonance de pont peut être grave. Ils constatent également que la rigidité axiale appropriée entre deux poutres simples peut réduire les vibrations à des conditions quasi-résonance.

Dans la référence [AKO 97], les auteurs ont présenté des résultats numériques reliés à l'interaction dynamique entre un ou plusieurs véhicules modélisés par des systèmes masses - ressorts - amortisseurs et trois ponts en béton armé en portée simple modélisés par éléments finis en trois dimensions. Pour les ponts considérés dans leur étude, les simulations effectuées leur permettent d'affirmer que l'équation de calcul du coefficient de majoration dynamique des ponts de la norme CAN/CSA-S6-88 donne une meilleure estimation que les normes OHBDC (1991), CHBDC (1994) et AAS (1992, 1994). Cependant, les auteurs constatent que cette équation reste valable uniquement lorsque les effets dynamiques sur les déplacements sont tenus en compte. Ils notent que dans le cas des efforts (moments fléchissant), la norme précédente a sous-estimée nettement le FAD pour une courte portée. Ils concluent qu'ils doivent éventuellement introduire la notion du FAD pour chaque type de réponses. Les auteurs recommandent de considérer un FAD pour la flexion et un autre pour l'effort tranchant.

Les auteurs de la référence [HXU 08] ont démontré par des exemples numériques que les conditions de couplage auront généralement un impact direct et significatif sur la vibration de chaque travée. En particulier, la déformation pic à pic sur une durée, dépend fortement des conditions locales de cette travée, et moins sensibles aux conditions de couplage aux jonctions éloignées. Pour un agencement de couplage donné, la déflexion de pic à pic sur chaque travée augmente typiquement avec la vitesse de déplacement de la charge mobile. En comparaison avec d'autres variables de conception, une raideur de couplage peut être pratiquement variée facilement par plusieurs ordres de grandeur. Ils constatent, cependant, que le comportement dynamique devient particulièrement sensible pour les conditions de couplage proches de la valeur de rigidité critique. Ainsi, le grand espace de conception devient plus petit. Enfin, un

grand rapport de la variance pour la déflexion sur chaque travée doit être compris comme un bon potentiel d'amélioration de la conception des ponts à travers l'optimisation des conditions de couplage entre travées. Dans le modèle que les auteurs présentent, il ya jusqu'à huit indépendants (soutien et accouplement) ressorts associés à chaque travée.

Dans la référence [YAU 01], les auteurs étudient la réponse d'impact des poutres élastiquement supportées soumis à une séquence de charges mobiles par une approche analytique. Un léger amortissement est supposé pour les poutres. Pour analyser la réponse dynamique d'une poutre supportée par des appuis élastiques soumis à une séquence de charges mobiles, les déformées propres de la poutre sont approximées par une combinaison d'une poutre flexible sur appuis rigides et une poutre rigide sur des appuis élastiques. Les conditions à la fois de résonance et de suppression des vibrations sont d'abord identifiées. Contrairement au cas de la poutre non amorti, dont la réponse de résonance a tendance à développer comme il n'y a plus de passage de charges mobiles, la réponse de résonance de la poutre amortie reste plus ou moins constante, indépendamment du nombre de charges mobiles. Ils concluent que l'installation de paliers élastiques avec un léger amortissement peut augmenter la réponse de la poutre dans la plupart des conditions de résonance.

Dans la référence [LIN 05], les auteurs ont testé la faisabilité du recours à un véhicule en passage pour balayer les fréquences propres du pont. Le système de véhicule considéré est une semi-remorque. Une camionnette à quatre roues motrices est choisie comme le tracteur, qui sert à exciter le pont, et un wagon à deux roues est excité par le pont et sert ainsi à un récepteur ou numériseur des vibrations de pont. Ils ont vérifié la possibilité d'employer le système semi-remorque pour balayer les fréquences du pont par la comparaison des résultats mesurés avec ceux d'autres essais dynamiques et études numériques. Basés sur des tests sur le terrain, ils ont confirmé que pour le tracteur - wagon se déplaçant à des vitesses inférieures à 40 km/h, les fréquences de pont peuvent être facilement identifiées à partir du spectre de la réponse du wagon. Cependant, comme la vitesse de véhicule augmente, les fréquences de pont deviennent floues en raison de l'implication des composantes à haute fréquence résultantes de la structure du wagon et la rugosité de la chaussée. Pour l'application de leur méthodologie pour des problèmes pratiques, ils proposent: (1) les propriétés dynamiques de la vitesse de véhicule sont d'abord identifiées. (2) la vitesse de véhicule sera maintenue inférieure pour les mauvaises conditions de la chaussée pour obtenir une meilleure résolution dans le spectre de fréquence. (3) au moins trois séries de tests avec différentes vitesses de véhicules doivent être effectuées avant que les

fréquences de pont soient établies à partir du spectre de la vitesse de véhicule. La méthodologie présentée ici peut être utilisée pour la numérisation de la première fréquence propre du pont.

Les auteurs de la référence [LHW 11] présentent une étude de vibration libre d'une plaque rectangulaire moyennement épaisse avec des conditions de bords élastiques et des colonnes internes comme supports. La puissante méthode d'énergie pb-2Ritz est incorporée avec la théorie de déformation de cisaillement de 3^{ème} ordre de Reddy est employée dans l'étude. Plusieurs exemples numériques démontrent la convergence, la précision numérique et l'applicabilité de cette procédure. Sur la base de convergence et des études de comparaison, quelques résultats numériques sont présentés pour étudier les influences de divers facteurs sur les paramètres des fréquences naturelles. De ces études numériques, ils concluent:(1) les paramètres de fréquence sont augmentés avec l'augmentation du facteur de rigidité des ressorts de support élastiques au niveau des limites de la plaque. Comme le facteur de rigidité est supérieur à une certaine valeur, le paramètre de fréquence change très lentement. L'influence de la raideur du ressort latéral sur les paramètres de fréquence est beaucoup plus importante que celui du ressort de torsion. (2) le modèle de colonne interne a une certaine influence sur les paramètres de fréquence. (3) en général, le modèle de connexion entre la colonne et à une fondation a très peu d'effets sur les paramètres de fréquence. (4) lorsque la rigidité de la colonne est relativement faible, les emplacements des colonnes ont des effets seulement pour les modes inférieurs. Quand la rigidité de la colonne est très grande, les emplacements de colonne auront une influence significative sur les paramètres de fréquence pour à la fois les modes inférieurs et les modes supérieurs.

Dans la référence [WLL 04], les auteurs utilisent un nouvel ensemble de fonctions admissibles dans la méthode de Rayleigh-Ritz pour étudier les vibrations libres de plaques rectangulaires supportées par appuis élastiques généraux le long des bords. Chacune de ces fonctions admissibles est exprimée comme une fonction trigonométrique en plus d'une fonction polynomiale. Les polynômes sont inclus ici seulement pour surmonter le problème de discontinuité potentielle de la fonction de déplacement au niveau des bords lorsqu'il est périodiquement étendu sur la totalité du plan $x - y$. La convergence et la précision de la solution courante ont été démontrées de manière répétée à travers des exemples numériques. Bien que, les fonctions polynômes ont été spécifiquement utilisées pour compléter les fonctions trigonométriques, d'autres fonctions continues devraient être également applicables à cet égard. Par conséquent, cette étude a effectivement mis au point une technique générale pour dériver un ensemble complet de fonctions admissibles qui peuvent être universellement appliquées à diverses conditions aux limites, dont les limites élastiques des supports plus complexes.

Dans la référence [WAN 06] les auteurs montrent qu'une fois la position optimale d'un support supplémentaire est prescrite correctement, une fréquence naturelle d'une poutre peut être soulevée pour sa limite supérieure à une exigence minimale de la raideur de support. En calculant les dérivées de fréquences naturelles, le problème de trouver la rigidité minimale réduit à la détermination de la pente nulle de la déformée propre associée. Ils développent la formulation analytique de la rigidité minimale de support pour différents types de conditions de bords de poutre d'une manière systématique en fonction des conditions de continuité au niveau du point d'appui. En outre, les auteurs ont montré qu'un support intermédiaire rigide est nécessaire pour augmenter une fréquence d'ordre supérieur à son maximum. Les solutions obtenues peuvent être utilisées dans la conception des supports pratiques.

Dans la référence [FRW 07], les auteurs concluent que quand une fréquence naturelle d'une structure plaque doit être augmentée, un support flexible situé de façon optimale peut obtenir un effet similaire à un support rigide. Dans leur étude, ils montrent que les raideurs minimums des supports supplémentaires sont calculées pour augmenter la fréquence naturelle fondamentale de la plaque supportée quand un bord est encasté ou simplement appuyée. Des exemples numériques confirment l'existence de la rigidité de soutien minimum et vérifient que la procédure présentée peut trouver cette raideur minimum pour différentes conditions aux limites. Si l'emplacement de support est spécifié à priori, puis la rigidité minimum requise pour atteindre une fréquence naturelle donnée est immédiatement obtenue. L'alternative est d'utiliser des méthodes d'optimisation pour minimiser la rigidité de soutien et de trouver l'emplacement d'un soutien optimal.

Les auteurs de la référence [YAN 04] étudient l'extraction des fréquences fondamentales du pont à partir de la réponse dynamique due au passage de véhicule, le but est de voir l'influence de la vitesse de roulement sur les fréquences propres du pont. Ils utilisent une méthode analytique et une simulation numérique par la méthode des éléments finis. Dans la référence [OUE 06], les auteurs présentent une modélisation vibro-acoustique d'un pont de chemin de fer excité par un train en mouvement. Ils modélisent le système pont-train en utilisant la méthode de la superposition modale en tenant compte de la masse du train et la suspension visco-élastique des véhicules afin de déterminer le bruit émis par le pont. Dans la référence [XIN 09], les auteurs présentent une nouvelle méthode de séparation de variables pour obtenir les solutions exactes des vibrations libres des plaques orthotropes.

Dans la référence [ZHU 02], les auteurs utilisent le modèle d'une plaque rectangulaire orthotrope continue multi travées, avec des appuis intermédiaires rigides pour modéliser un pont routier multi travées. Le véhicule est modélisé par un modèle dynamique tridimensionnel à deux essieux et 07 degrés de liberté conforme à la norme H20-44 [AAS 05]. Ils utilisent la méthode de Rayleigh-Ritz pour résoudre l'équation du mouvement en vibration libre pour obtenir les fréquences propres. La réponse dynamique du pont sollicité par un ou plusieurs véhicules est obtenue par la méthode de superposition modale. Dans le même sens, les auteurs de la référence [MAR 99] modélisent le pont par une plaque rectangulaire isotrope supportée par des appuis intermédiaires. Le véhicule est modélisé par un système dynamique, se déplaçant à une vitesse constante et en tenant compte des irrégularités de la chaussée. Ils utilisent la même méthode de résolution pour déterminer les fréquences propres et la réponse dynamique du pont.

L'auteur de la référence [BRO 99] a étudié le comportement dynamique des ponts sollicités par le trafic routier. L'évaluation des dalles de roulements des ponts est proposée en deux volets. Dans le premier volet, il propose, une évaluation simplifiée basée sur une analyse statique dans laquelle les effets sont déterminés par l'application d'un modèle de charge actualisée majoré par un facteur d'amplification dynamique. Si l'évaluation simplifiée ne peut pas être appliquée, le deuxième volet propose une évaluation de la dalle de roulement basée sur une analyse dynamique dans laquelle intervient une approche numérique ou expérimentale. Il a évalué l'influence des paramètres suivants sur la réponse dynamique de la dalle de roulement, la planéité de la chaussée, la masse du camion ou la charge, les vitesses de passages des camions. Il confronte les résultats obtenus en utilisant le logiciel CLEF. Dans la référence [GVS 01] l'auteur utilise aussi le logiciel CLEF pour étudier le phénomène d'interaction pont-véhicule, en intégrant dans ce dernier la modélisation mathématique d'un train composé d'une locomotive, wagon plein et wagon vide.

Dans la référence [HAM 10], les auteurs étudient les effets de divers paramètres y compris la vitesse de roulement, en utilisant 34 diverses vitesses, 12 différents essieux et différentes longueurs de travées. Ils ont observé qu'en comparant les résultats trouvés aux codes de conception des ponts dans beaucoup de cas les valeurs de facteur d'impact proposées par des codes de conception du pont sont sous-estimées et peut sûres. Les résultats montrent que le facteur d'impact est proportionnel à la vitesse de roulement. Le nombre de wagons n'a pas d'effet sur le facteur d'impact. Ils proposent des formules pour le calcul du facteur d'impact dans des intervalles de vitesses.

Les auteurs de la référence [YIN 10] présentent une nouvelle méthode pour analyser la réaction aléatoire non stationnaire des ponts en utilisant la technique d'équivalence de covariance. Ils emploient un modèle de véhicule à deux essieux. Ils analysent trois modèles typiques de pont. Les résultats numériques indiquent que l'amplitude de réactions aléatoires non stationnaire de roues est proportionnelle à la vitesse du véhicule. Ils montrent aussi que si en prenant le processus aléatoire stationnaire pour modéliser la perturbation de profil de la chaussée pour des différentes vitesses, elle peut sous-estimer ou surestimer les effets dynamiques.

Dans la référence [CAI 07], les auteurs développent un modèle couplé véhicule-pont entièrement automatisé. La méthodologie est validée par des essais pratiques sur un pont typique. Les résultats des essais montrent que ce modèle couplé est fiable pour prévoir la réponse dynamique des ponts en tenant compte des irrégularités de la chaussée. Ils concluent que les conditions initiales des véhicules entrants sur le pont ont une influence significative. Cette influence est élevée pour des ponts courts que pour des ponts longs.

Les auteurs de la référence [ZHU 01] présentent l'utilisation des fonctions d'orthogonalité pour l'identification des charges mobiles sur un pont multi-travées. Leur travail présente plusieurs améliorations sur la précision de méthode qu'ils proposent pour identifier les forces mobiles. Ils présentent une formulation améliorée des déformées analytiques des vibrations d'une poutre continue simplement appuyée, et ces déformées sont utilisées à la place des déformées supposées dans le problème inverse de l'identification d'une force mobile. Ils proposent une approche généralisée de fonction orthogonale pour obtenir la vitesse modale et l'accélération de la réponse de déformation mesurée. Cela réduit l'erreur due au bruit de mesure. Les charges mobiles sont identifiées par limitation de l'erreur en utilisant la méthode de régularisation dans la solution. Les observations sur les simulations de calcul et les résultats des tests expérimentaux leur permettent de conclure : (1) la méthode qu'ils proposent est efficace pour identifier les charges mobiles de déformations mesurées dans un pont multi travées dans le domaine temporel. (2) la méthode qu'ils proposent peut être utilisée pour identifier les forces d'interactions pont-véhicule à partir des déformations mesurées pour une poutre continue et des résultats acceptables peuvent être obtenus. (3) plus de déformées propres doivent être utilisées pour identifier les forces mobiles à des endroits à proximité de supports. (4) lorsque le nombre de déformées pour l'identification est le même que dans les réponses mesurées, l'erreur de l'identification sera le plus petite.

CHAPITRE II

Solution de l'équation des vibrations libres d'un pont multi travées par la méthode d'estimation locale

II.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous allons présenter la résolution de l'équation du mouvement libre du pont multi travées supporté par des appuis rigides par une nouvelle méthode d'estimation locale que nous avons développée. Cette méthode est basée sur la localisation de la position optimale x le long du pont correspondante à l'amplitude maximale de la déformée propre de chaque mode propre sur la direction longitudinale du pont.

L'équation du mouvement du pont après séparation de variables devienne une équation spatiale bidimensionnelle sur les directions longitudinale et transversale du pont. Par l'application de la nouvelle méthode, le problème bidimensionnel se simplifie en un problème monodimensionnel qui sera résolue seulement pour la variable y . en fixant la deuxième variable x par la valeur optimale déterminée des déformées propres d'une poutre.

Le critère de cette nouvelle méthode la valeur de x optimale est obtenue à partir des déformées propres d'une poutre multi travées, ces dernières sont faciles à les calculer.

II.2 MODÉLISATION DU PONT

II.2.1 Hypothèses de modélisation

Les hypothèses suivantes constituent la base de la mise au point mathématique présentée par [ZHU 02, MAR 99].

- (1) La dalle du pont est modélisée par une plaque rectangulaire orthotrope, multi travées, continue sur les appuis et simplement appuyée en $x = 0$ et $x = L$ et libre en $y = 0$ et $y = b$, voir figure II.1;
- (2) Le pont a un comportement élastique linéaire et les effets secondaires (cisaillement et inertie de rotation) sont négligés;

- (3) Les appuis intermédiaires sont linéaires, rigides et orthogonaux aux bords libres du pont ;
 (4) Comme les dimensions (longueur et largeur) du pont sont beaucoup plus grandes par rapport à son épaisseur, la théorie des plaques minces est utilisée.

Le pont est modélisé par une plaque mince orthotrope à trois travées (Figure II.1). Sur la base des hypothèses (1), (2) et (4), l'équation du mouvement du pont en vibration libre peut-être écrite sous la forme suivante :

$$\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (\text{II.1})$$

Avec

$\bar{m} = \rho h$ est la masse par unité de surface de la plaque,

$D_x = E_x h^3 / 12 (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$ est la rigidité de flexion selon la direction x ,

$D_y = E_y h^3 / 12 (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$ est la rigidité de flexion selon la direction y ,

c est la constante d'amortissement du pont,

ν_{xy} et ν_{yx} sont les coefficients de Poisson selon les directions x et y respectivement, E_x et

E_y sont les modules d'élasticité de Young selon les directions x et y respectivement.

$D_{xy} = G_{xy} h^3 / 12$ est la rigidité de torsion,

G_{xy} est le module de cisaillement,

$H = \nu_{xy} D_y + 2D_{xy}$ est la rigidité de flexion équivalente,

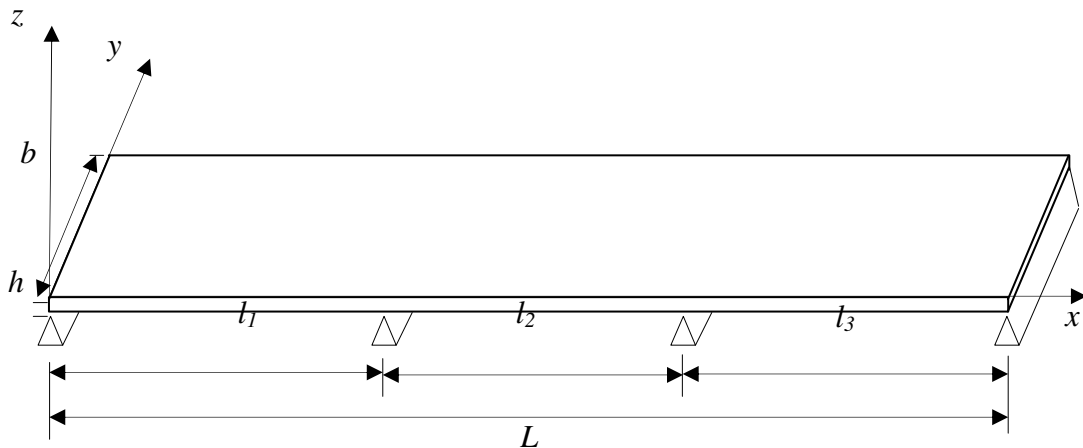


Figure II-1. Pont modélisé par une plaque mince orthotrope, à 3 travées simplement appuyé.

II.2.2 Détermination des fréquences propres et des déformées propres

Dans le but de déterminer les fréquences et déformées propres du pont, on résout l'équation suivante de mouvement du pont en vibration libre sans amortissement:

$$\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (\text{II.2})$$

En vibration libre, le déplacement vertical du pont peut s'exprimer par [MAR 99]:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \phi_{ij}(x, y) e^{j \omega_{ij} t} \quad (\text{II.3})$$

Avec:

ω_{ij} et $\phi_{ij}(x, y)$ sont respectivement les pulsations et les déformées propres du pont multi travées et les a_{ij} sont les amplitudes modales.

En remplaçant l'expression (II.3) dans l'équation (II.2), on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \left[-\bar{m} \omega_{ij}^2 \phi_{ij}(x, y) + D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} \right] e^{j \omega_{ij} t} = 0$$

En résolvant l'équation spatiale suivante, on détermine les modes propres du pont:

$$D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} - \bar{m} \omega_{ij}^2 \phi_{ij}(x, y) = 0 \quad (\text{II.4})$$

Plusieurs auteurs [ZHU 02, MAR 99] utilisent la méthode variationnelle de Rayleigh-Ritz pour déterminer les fréquences et les déformées propres du pont en employant les déformées propres des poutres comme fonctions d'approximation.

Ces auteurs décomposent $\phi_{ij}(x, y)$ en un produit de deux fonctions admissibles $\varphi_i(x)$ et $\psi_j(y)$ qui sont respectivement : les déformées propres d'une poutre continue sur appuis simples et les déformées propres d'une poutre libre.

Par conséquent, des centaines d'intégrales doivent être évalué pour calculer les matrices de masse et de rigidité du pont, pour résoudre le problème aux fréquences et déformées propres.

Dans la thèse [REZ 08], les auteurs considèrent que selon la direction x , les déformées propres du pont sont celles d'une poutre continue sur appuis simples présentées par une fonction $\varphi_i(x)$ et selon la direction y , les déformées propres sont présentées par une fonction $h_j(y)$ vérifiant les conditions aux limites d'une plaque aux bords libres $y = 0$ et $y = b$.

Ils résolvent l'équation du mouvement du pont au sens de la moyenne pour éviter d'effectuer un grand nombre d'intégrations. Cette méthode consiste à vérifier l'équation (II.4) au sens de la moyenne, par la multiplication de cette dernière par la déformée $\varphi_i(x)$ et de l'intégrer sur la longueur du pont de 0 à L, en remplaçant tout d'abords dans l'équation (II.4), $\phi_{ij}(x,y)$ par l'expression suivante:

$$\phi_{ij}(x,y) = \varphi_i(x) h_j(y) \quad (\text{II.5})$$

Dans le cas d'un pont à trois travées simplement appuyé, les déformées propres selon x sont celles d'une poutre à trois travées qui sont données par [REZ 08] :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} A_{1i} \left(\sin k_i x - \frac{\sin k_i l_1}{sh k_i l_1} sh k_i x \right) & \text{pour } 0 \leq x \leq l_1 \\ A_{2i} \left(\sin k_i (x-l_1) - \frac{\sin k_i l_2}{sh k_i l_2} sh k_i (x-l_1) \right) + B_{2i} (\cos k_i (x-l_1) - ch k_i (x-l_1) + \frac{ch k_i l_2 - \cos k_i l_2}{sh k_i l_2} sh k_i (x-l_1)) & \text{pour } l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \\ A_{3i} \left(\sin k_i (l-x) - \frac{\sin k_i l_3}{sh k_i l_3} sh k_i (l-x) \right) & \text{pour } l_1 + l_2 \leq x \leq L \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Avec k_i le nombre d'ondes obtenu en résolvant l'équation aux fréquences.

La dérivée seconde de (II.6) est:

$$\varphi''_i(x) = \begin{cases} -k_i^2 A_{1i} \left(\sin k_i x + \frac{\sin k_i l_1}{sh k_i l_1} sh k_i x \right) & \text{pour } 0 \leq x \leq l_1 \\ -k_i^2 A_{2i} \left(\sin k_i (x-l_1) + \frac{\sin k_i l_2}{sh k_i l_2} sh k_i (x-l_1) \right) - k_i^2 B_{2i} (\cos k_i (x-l_1) + ch k_i (x-l_1) - \frac{ch k_i l_2 - \cos k_i l_2}{sh k_i l_2} sh k_i (x-l_1)) & \text{pour } l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \\ -k_i^2 A_{3i} \left(\sin k_i (l-x) + \frac{\sin k_i l_3}{sh k_i l_3} sh k_i (l-x) \right) & \text{pour } l_1 + l_2 \leq x \leq L \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

En remplaçant (II.5) dans (II.4), on obtient :

$$D_x \varphi''''_i h_{ij} + 2H \varphi''_i \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2} + D_y \varphi_i \frac{d^4 h_{ij}}{dy^4} - \bar{m} \omega_{ij}^2 \varphi_i h_{ij} = 0 \quad (\text{II.8})$$

Divisons (II.8) par $D_y \varphi_i$, on obtient :

$$\frac{d^4 h_{ij}}{dy^4} + \frac{D_x \varphi_i''''}{D_y \varphi_i} h_{ij} + \frac{2H \varphi_i''}{D_y \varphi_i} \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2} - \frac{\bar{m} \omega_{ij}^2 \varphi_i}{D_y \varphi_i} h_{ij} = 0 \quad (\text{II.9})$$

Cette équation peut se réécrire sous la forme simplifiée suivante :

$$\frac{d^4 h_{ij}}{dy^4} + \frac{2H \varphi_i''}{D_y \varphi_i} \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2} + \left(\frac{D_x \varphi_i'''' - \bar{m} \omega_{ij}^2 \varphi_i}{D_y \varphi_i} \right) h_{ij} = 0$$

avec

$$\varphi_i'''' = k_i^4 \varphi_i \quad (\text{II.10})$$

et posons $k_{1i}^2 = -\frac{\varphi_i''}{\varphi_i}$,

l'équation (II.9) devient :

$$\frac{d^4 h_{ij}}{dy^4} - \frac{2H k_{1i}^2}{D_y} \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2} + \left(\frac{D_x k_i^4 - \bar{m} \omega_{ij}^2}{D_y} \right) h_{ij} = 0 \quad (\text{II.11})$$

La seule dépendance en x dans l'équation (II.11) est dans l'expression de k_{1i} . Dans le cas de la résolution de l'équation du mouvement, au sens de la moyenne [REZ 08], k_{1i} est calculé par l'expression (II.12) et noté k_{1iMOY} :

$$k_{1iMOY}^2 = k_i \sqrt{\int_0^l \psi_i \phi_i dx / \int_0^l \phi_i^2 dx} \quad (\text{II.12})$$

Avec

$$\varphi_i''(x) = -k_i^2 \psi_i(x) \quad (\text{II.13})$$

A partir des résultats obtenus par la résolution de l'équation (II.11) pour chaque mode i en fonction de x , ce qui nécessite sa résolution des milliers de fois et dans le souci d'alléger le nombre de résolutions de cette équation, nous proposons dans ce qui suit une méthode d'estimation locale de la position optimale de x qu'on va noter dorénavant (x_{opt}), permettant de résoudre l'équation (II.11) uniquement pour la seule valeur de x_{opt} et qui permet d'obtenir les fréquences propres du pont avec une précision meilleure.

Sur la figure II.2, nous présentons la superposition des déformées propres d'une poutre multi travées $\varphi_i(x)$ avec $k_{1i}(x)$.

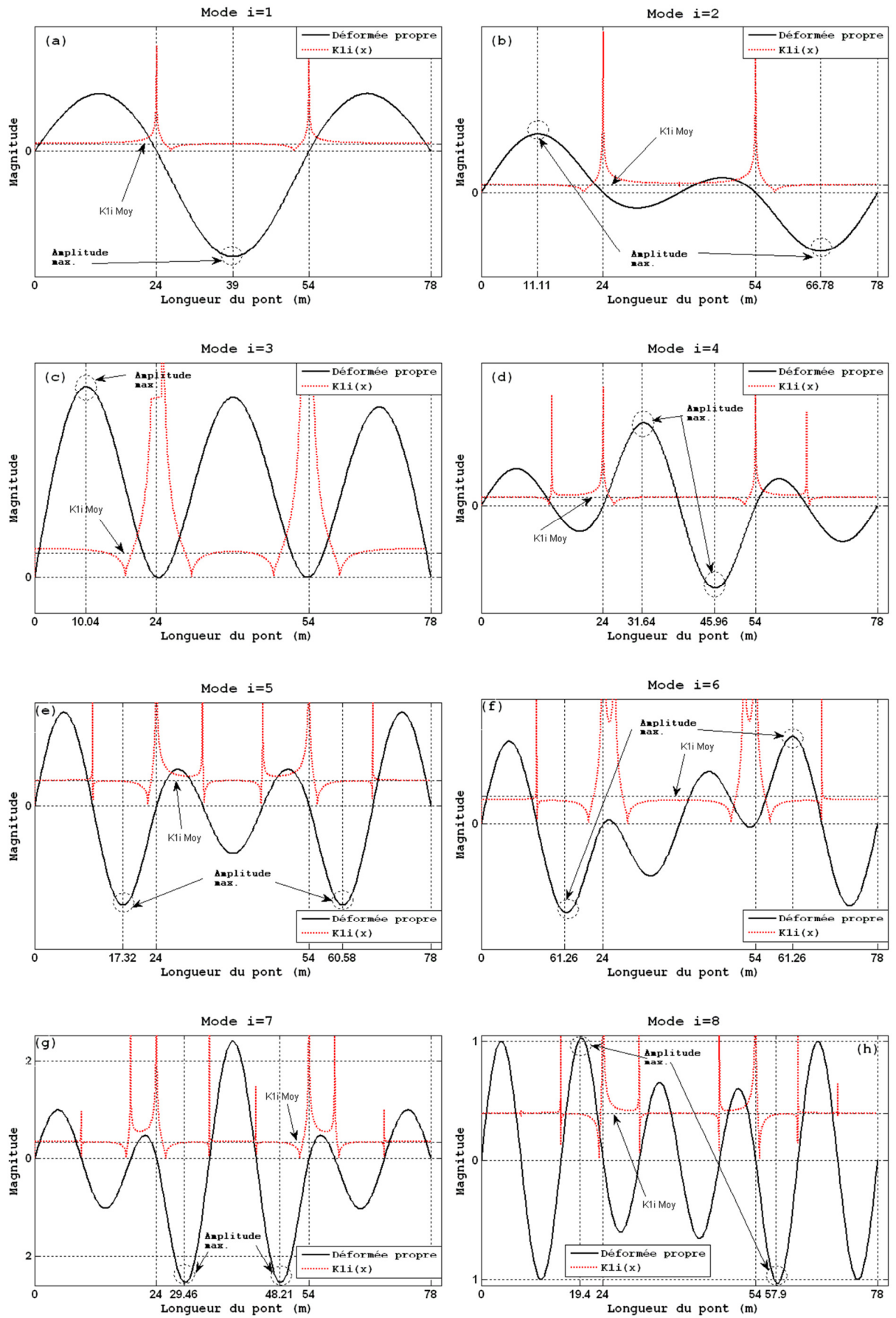


Figure II-2 Superposition de $k_i(x)$ avec les déformées des modes i ($-\varphi_i(x)$ --- $k_{li}(x)$)

De la figure II.2, on constate que la valeur optimale de x coïncide bien avec le ventre de $k_{li}(x)$ et avec l'amplitude maximale de la déformée de chaque mode de la poutre multi travées $\varphi_i(x)$.

$$\varphi_i(x_{Opt}) \rightarrow \frac{\text{Max}}{x =]0, L[} (\varphi_i(x)) \quad (\text{II.14})$$

La méthode d'estimation locale de la position x_{Opt} permet d'un coté de réduire énormément le nombre de résolutions de l'équation (II.11) et d'un autre côté, elle s'intègre bien dans un logiciel de calcul des structures vu qu'il n'y a pas d'intégration à effectuer comme dans la méthode de Rayleigh-Ritz [ZHU 02] qui nécessite d'effectuer un grand nombre d'intégrales pour former les matrices de masse et de raideur et la méthode de résolution au sens de la moyenne [REZ 08], qui donne de bons résultats, mais nécessite d'effectuer les intégrales de l'expression de k_{liMOY} (II.12).

Nous présentons dans le tableau II.1, les valeurs de k_i , obtenues par la résolution de l'équation aux fréquences propres d'une poutre multi travées [REZ 08], k_{liESL} obtenues par l'expression (II.12) et k_{liESL} obtenues pour x_{Opt} d'après (II.14).

Tableau II-1 Valeurs de k_i , k_{liESL} et k_{liMOY}

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k_i	0.1178	0.1455	0.1614	0.2304	0.2736	0.2857	0.3410	0.4002	0.4128
k_{liESL}	0.1104	0.1383	0.1413	0.2199	0.2616	0.2685	0.3206	0.3873	0.3884
k_{liMOY}	0.1145	0.1368	0.1330	0.2206	0.2678	0.2648	0.3245	0.3981	0.3967

II.2.3 Résolution de l'équation du mouvement du pont

La forme générale de la solution de l'équation (II.11) est:

$$h_{ij}(y) = A_{ij} e^{s_{ij} y} \quad (\text{II.15})$$

En remplaçant (II.15) dans (II.11) et k_{li} par k_{liESL} , on obtient :

$$S_{ij}^4 - \frac{2Hk_{liESL}^2}{D_y} S_{ij}^2 + \left(\frac{D_x k_i^4 - \bar{m} \omega_{ij}^2}{D_y} \right) = 0 \quad (\text{II.16})$$

Les solutions de (II.16) sont :

$$\begin{aligned}
s_1 &= \pm \frac{1}{\sqrt{D_y}} \sqrt{H k_{1iESL}^2 + \sqrt{H^2 k_{1iESL}^4 - D_y (D_x k_i^4 - \bar{m} \omega_{ij}^2)}} \\
&= \pm r_{1ij} \\
s_2 &= \pm j \frac{1}{\sqrt{D_y}} \sqrt{H k_{1iESL}^2 - \sqrt{H^2 k_{1iESL}^4 - D_y (D_x k_i^4 - \bar{m} \omega_{ij}^2)}} \\
&= \pm jr_{2ij}
\end{aligned} \tag{II.17}$$

Les nombres d'ondes r_{1ij} et r_{2ij} sont liés par les pulsations propres ω_{ij} . En remplaçant (II.17) dans (II.15) et en remplaçant les fonctions exponentielles par des fonctions trigonométriques et hyperboliques, on arrive à l'expression suivante:

$$h_{ij}(y) = C_{ij} \sin r_{2y} + D_{ij} \cos r_{2y} + E_{ij} \operatorname{sh} r_{1y} + F_{ij} \operatorname{ch} r_{1y} \tag{II.18}$$

C_{ij} , D_{ij} , E_{ij} et F_{ij} sont des constantes d'intégration. Elles sont déterminées par l'application des conditions aux limites aux bords libres $y=0$ et $y=b$. Sur ces bords, le moment fléchissant et l'effort tranchant sont nuls. En tenant compte des expressions (II.3) et (II.5), les conditions aux limites seront sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
D_y \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2}(0) - \nu_{yx} D_x k_{1iESL}^2 h_{ij}(0) &= 0 \\
D_y \frac{d^3 h_{ij}}{dy^3}(0) - (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) k_{1iESL}^2 \frac{dh_{ij}}{dy}(0) &= 0 \\
D_y \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2}(b) - \nu_{yx} D_x k_{1iESL}^2 h_{ij}(b) &= 0 \\
D_y \frac{d^3 h_{ij}}{dy^3}(b) - (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) k_{1iESL}^2 \frac{dh_{ij}}{dy}(b) &= 0
\end{aligned} \tag{II.19}$$

En appliquant les conditions aux limites (II.19) à l'expression (II.18), on obtient le système suivant (par omission des indices dans r_{1ij} , r_{2ij} , α_{ij} , θ_{ij} , γ_{ij} et χ_{ij}):

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & \theta \\ \gamma & 0 & \chi & 0 \\ \alpha \sin r_2 b & \alpha \cos r_2 b & \theta \operatorname{sh} r_1 b & \theta \operatorname{ch} r_1 b \\ \gamma \cos r_2 b & -\gamma \sin r_2 b & \chi \operatorname{ch} r_1 b & \chi \operatorname{sh} r_1 b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{ij} \\ D_{ij} \\ E_{ij} \\ F_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{II.20}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\alpha &= -D_y r_2^2 - v_{yx} D_x k_{iESL}^2 \\
\theta &= D_y r_1^2 - v_{yx} D_x k_{iESL}^2 \\
\gamma &= -D_y r_2^3 - (v_{yx} D_x + 4D_{xy}) r_2 k_{iESL}^2 \\
\chi &= D_y r_1^3 - (v_{yx} D_x + 4D_{xy}) r_1 k_{iESL}^2
\end{aligned} \tag{II.21}$$

L'annulation du déterminant de la matrice du système (II.20) permet d'aboutir à l'équation aux fréquences propres suivante.

$$2\alpha\theta\gamma\chi(\cos r_2 b \operatorname{chr}_1 b - 1) + (\theta^2 \gamma^2 - \alpha^2 \chi^2) \sin r_2 b \operatorname{shr}_1 b = 0 \tag{II.22}$$

On résout donc l'équation de fréquences (II.22) pour la valeur de x_{opt} correspondant à l'amplitude maximale des différents modes $\phi_i(x)$, par la suite, on calcule les racines r_1 et r_2 .

En réinjectant r_1 et r_2 dans les expressions (II.17), on obtient les pulsations propres du pont ω_{ij} . Pour déterminer les déformées propres du pont, on peut simplifier le système (II.20) par la normalisation de la première constante d'intégration C_{ij} ($C_{ij} = 1$).

On aura donc quatre équations à trois inconnus. On simplifie pour avoir trois équations parmi les quatre :

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \theta \\ 0 & x & 0 \\ \alpha \cos r_2 b & \theta \operatorname{shr}_1 b & \theta \operatorname{chr}_1 b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{ij} \\ E_{ij} \\ F_{ij} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma \\ \alpha \sin r_2 b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{II.23}$$

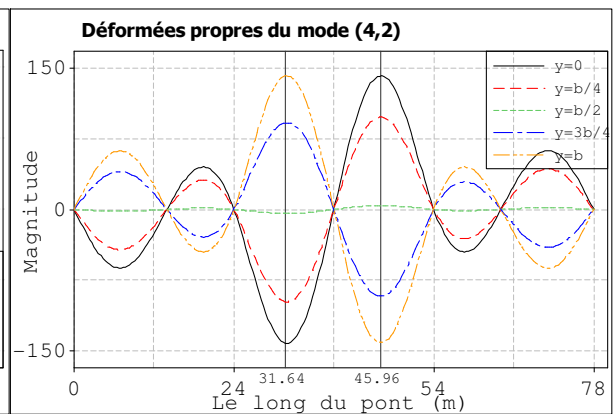
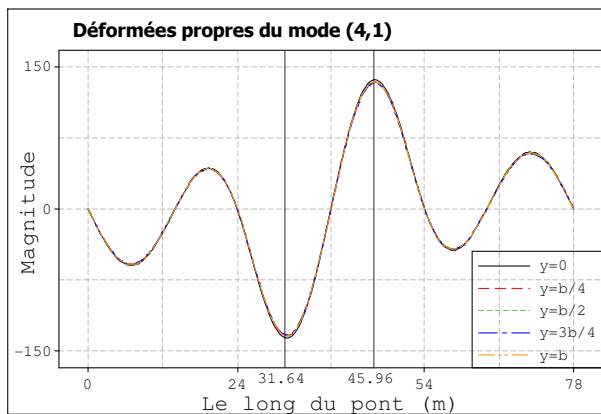
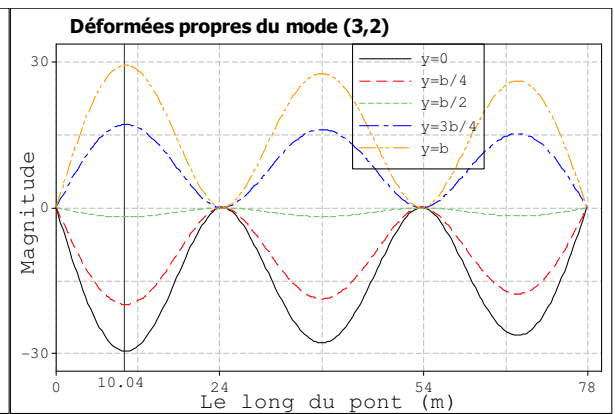
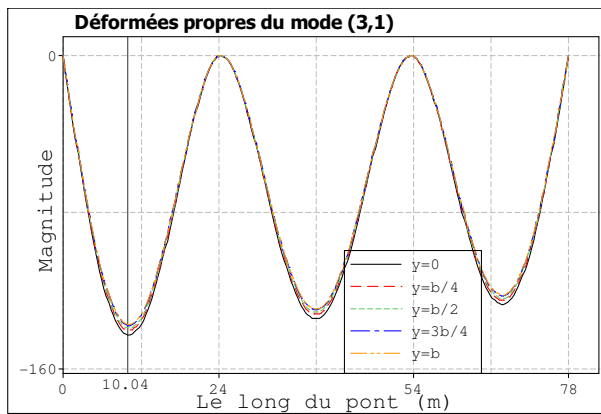
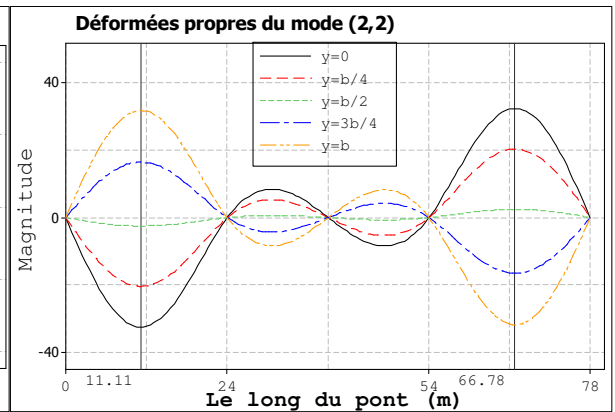
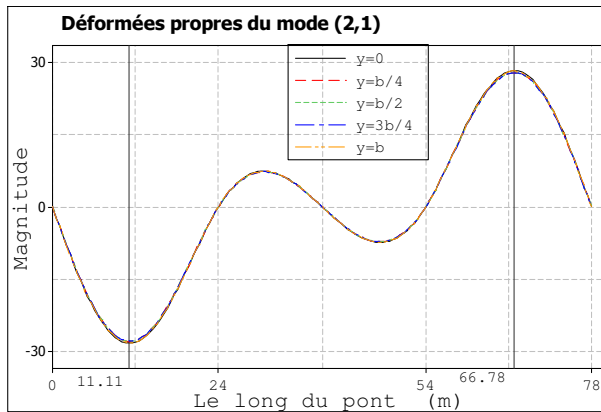
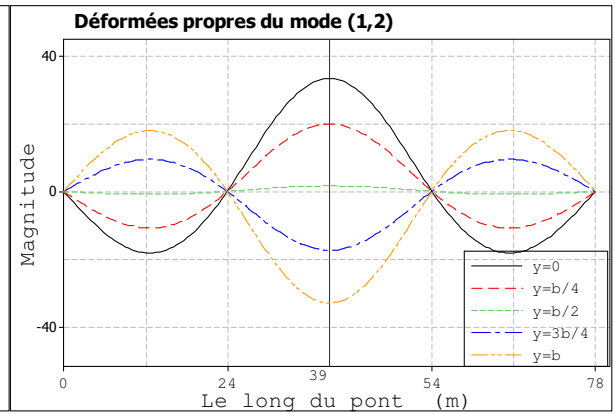
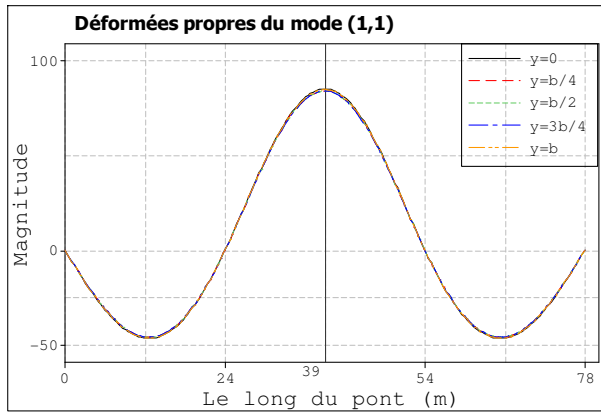
D'où on obtient les expressions des constantes D_{ij}, E_{ij}, F_{ij} :

$$\begin{aligned}
D_{ij} &= \left(\alpha \sin r_2 b - \frac{\gamma \theta}{x} \operatorname{shr}_1 b \right) / (\alpha \operatorname{chr}_1 b - \alpha \cos r_2 b) \\
E_{ij} &= -\frac{\gamma}{x} \\
F_{ij} &= \left(-\alpha \sin r_2 b + \frac{\gamma \theta}{x} \operatorname{shr}_1 b \right) / (\theta \operatorname{chr}_1 b - \theta \cos r_2 b)
\end{aligned} \tag{II.24}$$

Donc les déformées propres du pont sont :

$$\phi_{ij}(x, y) = \phi_i(x) \cdot \{ \sin r_2 y + D_{ij} \cdot \cos r_2 y + E_{ij} \cdot \operatorname{shr}_1 y + F_{ij} \cdot \operatorname{chr}_1 y \} \tag{II.25}$$

Sur la figure II.3, nous présentons la superposition des déformées propres du pont $\phi_{ij}(x, y)$ pour différentes positions de y sur la largeur du pont.



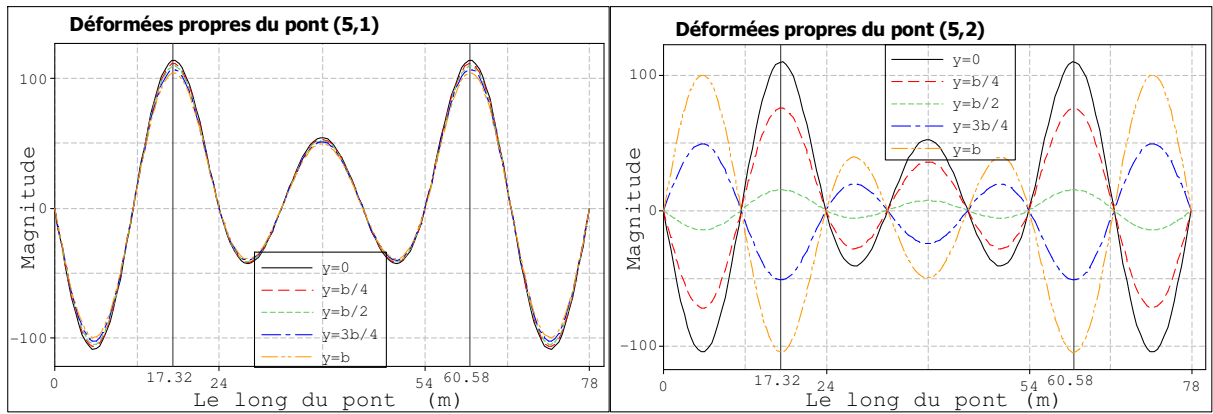


Figure II-3 Superposition des déformées propres du pont $\phi_{ij}(x, y)$ pour différentes positions de y .

La figure II.3, montre clairement que l'amplitude maximale de la déformée propre de chaque mode du pont $\phi_{ij}(x, y)$ pour les différentes positions de y selon la largeur du pont ($y = 0, y=b/4, y=b/2, y=3b/4, y=b$) coïncide bien avec l'amplitude maximale de la déformée de chaque mode de la poutre multi travées $\phi_i(x)$ qui est obtenue bien avant la résolution de l'équation (II.11).

II.3 EXEMPLE DE VALIDATION

II.3.1 Pont symétrique

Afin de valider la présente méthode, nous présentons le calcul des fréquences propres d'un pont multi travées par deux méthodes de résolution : Méthode numérique par le logiciel d'élément fini ANSYS et la méthode d'estimation locale proposée.

Les résultats obtenus sont comparés avec ceux de la référence [ZHU 02], à partir de laquelle les données du pont sont prises.

Longueur du pont $L=78\text{m}$,

Largeur $b=13.715\text{m}$,

Longueurs des travées $l_1=l_3=24\text{m}$ et $l_2=30\text{m}$,

Epaisseur du pont $h=0.21157\text{m}$,

La masse par unité de longueur $\rho=3265.295\text{kg/m}^3$,

La rigidité de flexion selon x est $D_x=2.415 \cdot 10^9\text{Nm}$,

La rigidité de flexion selon y est $D_y=2.1807 \cdot 10^7\text{Nm}$,

La rigidité de torsion $D_{xy}=1.1424 \cdot 10^8\text{Nm}$,

Le coefficient de poisson $\nu_{xy}=0.3$,

Les modules de Young $E_x=3.0576 \cdot 10^{12}\text{N/m}^2$, $E_y=2.7607 \cdot 10^{10}\text{N/m}^2$,

Le module de cisaillement $G_{xy}=1.4475 \cdot 10^{11}\text{N/m}^2$.

Nous présentons dans le tableau II.2, les résultats des fréquences propres d'un pont multi travées, obtenus par le logiciel ANSYS (maillage 468x60, élément Shell 63), les résultats obtenus par le logiciel que nous avons développé sur la base de la modélisation présentée CDPR ci-dessus et les résultats de la référence [ZHU 02].

Tableau II-2 Les 16 premières fréquences propres du pont symétrique

Modes	Ordre des modes	ANSYS	Présente approche	Écart %	[ZHU 02]
		(1)	(2)	(1)/(2)	
1	(1,1)	4.13	4.13	0.00	4.13
2	(1,2)	5.45	5.43	-0.37	4.70
3	(2,1)	6.30	6.3	0.00	6.31
4	(2,2)	7.59	7.59	0.00	6.86
5	(3,1)	7.76	7.77	0.13	7.76
6	(3,2)	8.79	8.96	1.90	8.20
7	(1,3)	9.00	8.93	-0.78	-
8	(2,3)	11.23	11.26	0.27	-
9	(3,3)	12.01	12.69	5.35	-
10	(1,4)	14.87	14.85	-0.13	-
11	(4,1)	15.80	15.8	0.00	15.81
12	(4,2)	17.16	17.14	-0.12	16.39
13	(2,4)	17.25	17.33	0.46	-
14	(3,4)	17.72	18.78	5.64	-
15	(4,3)	21.17	21.15	-0.09	-
16	(5,1)	22.27	22.29	0.09	20.84

Sur la figure II.4, nous présentons les 6 premiers modes propres du pont obtenus par ANSYS (maillage 360x60, élément Shell 63).

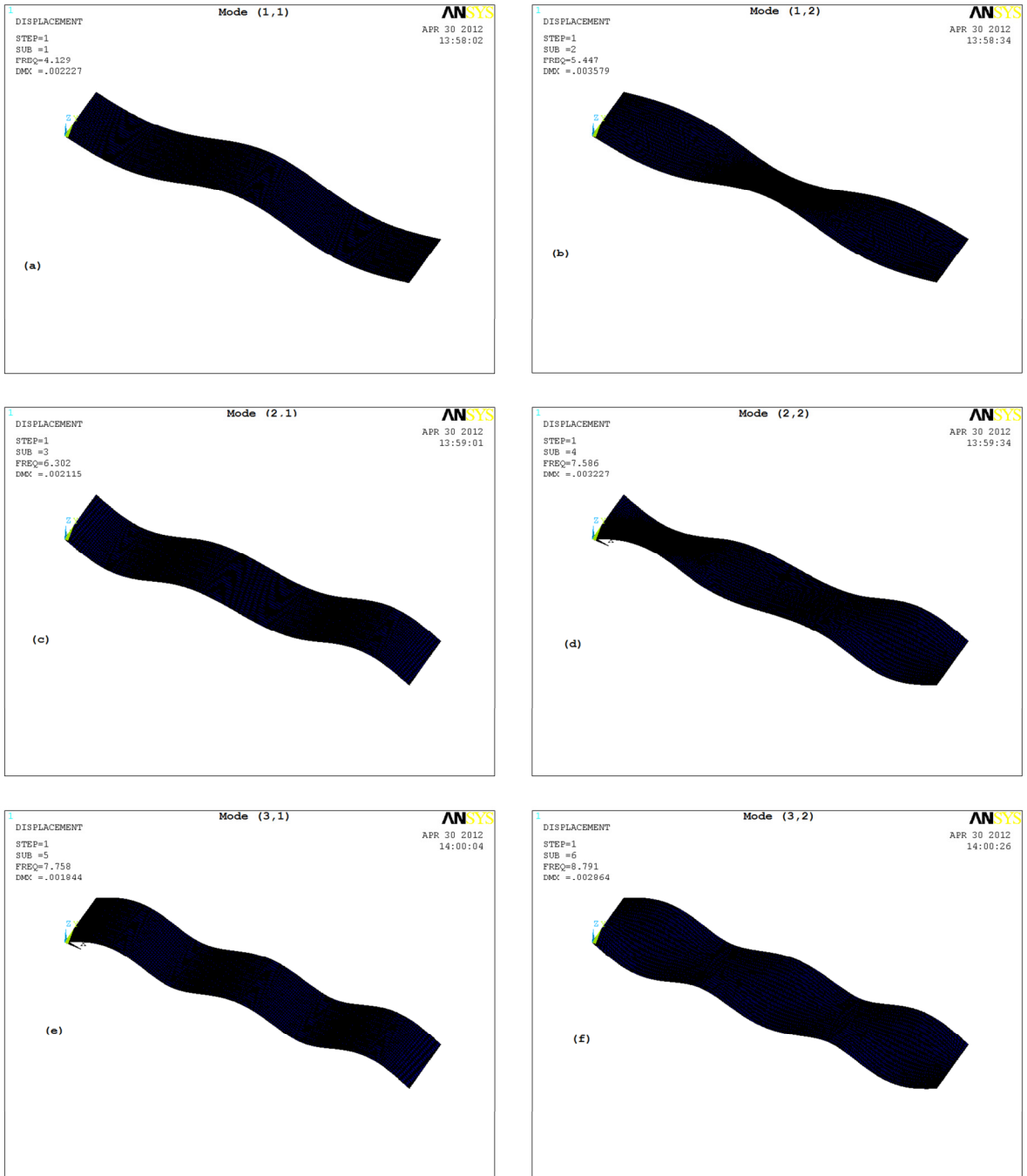


Figure II-4 Les six premières déformées propres obtenues par ANSYS

Nous présentons en comparaison sur la figure II.5 les six premières déformées propres du pont obtenues par la méthode proposée d'estimation locale de la position optimale de x (Logiciel CDPR que nous avons développé au sein du laboratoire LMS de l'université de Guelma).

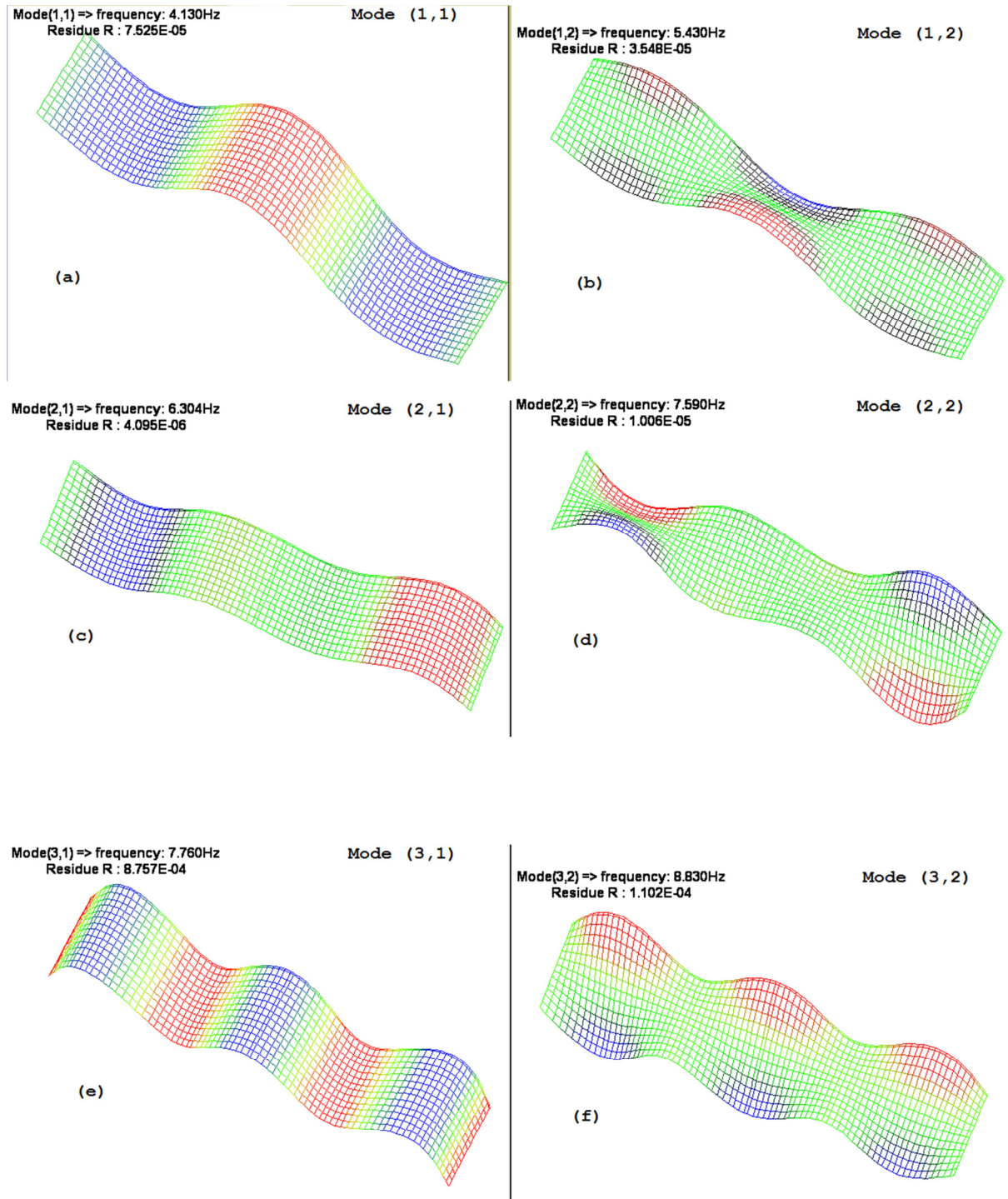


Figure II-5 Les six premières déformées propres obtenues par la méthode proposée

On peut noter qu'il y a une bonne concordance entre les déformées propres obtenues par le logiciel ANSYS et le logiciel que nous avons développé CDPR.

II.3.2 Pont asymétrique:

Afin de généraliser la méthode d'estimation locale proposée dans ce chapitre, nous traitons dans ce qui suit le cas d'un pont asymétrique.

Nous avons gardé les mêmes caractéristiques mécaniques du pont précédent, mais avec des travées non symétriques $l_1=20\text{m}$, $l_2=32\text{m}$ et $l_3=26\text{m}$.

Sur la figure II.6, nous présentons la superposition des déformées propres d'une poutre multi travées $\varphi_i(x)$ avec $k_{li}(x)$ (cas d'un pont non symétrique) :

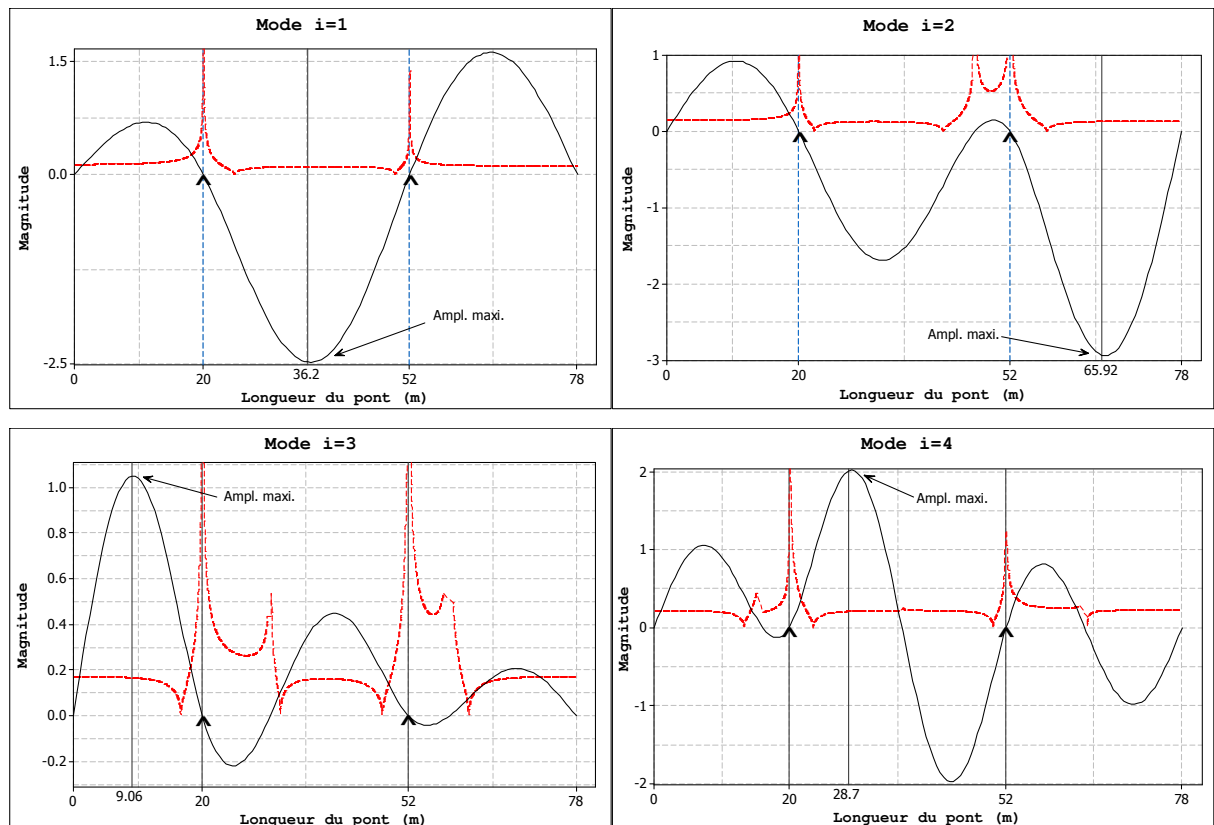


Figure II-6 Superposition de $k_{li}(x)$ avec les déformées des modes i –pont asymétrique
(— $\varphi_i(x)$ --- $k_{li}(x)$)

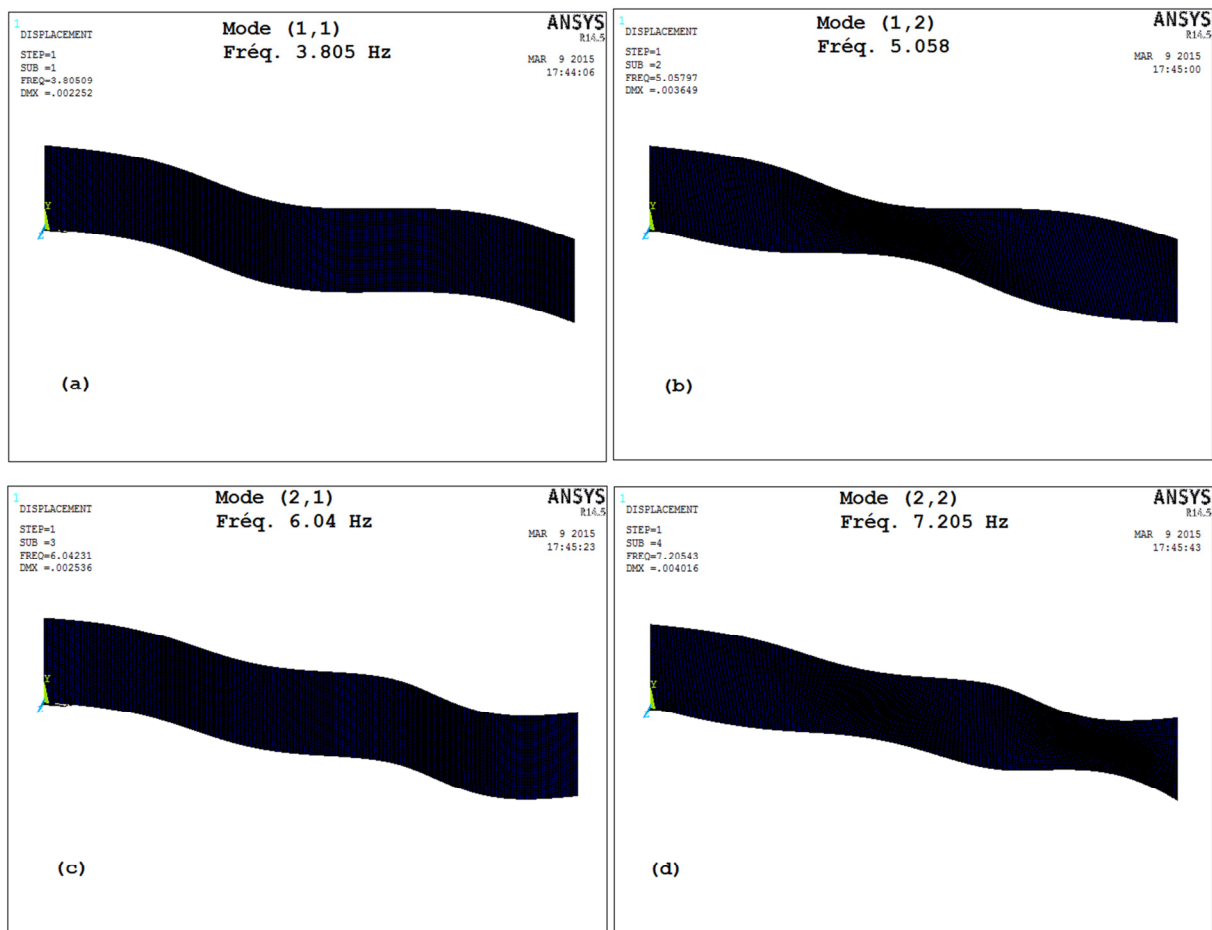
De la figure II.6 on constate bien que la position optimale de x (x_{op}) coïncide avec l'amplitude maximale de la déformée propre du mode concerné dans le cas d'un pont non symétrique.

Nous présentons dans le tableau II.3, les résultats des fréquences propres du pont asymétrique, obtenus par le logiciel ANSYS (maillage 468x60) et les résultats obtenus par le logiciel que nous avons développé sur la base de la modélisation présentée ci-dessus.

Tableau II-3 Les 16 premières fréquences propres du pont asymétrique

Modes	Ordre du mode	ANSYS (1)	Présente approche (2)	Écart % (1)/(2)
1	(1,1)	3.81	3.82	0.26
2	(1,2)	5.06	5.04	-0.40
3	(2,1)	6.04	6.05	0.17
4	(2,2)	7.21	7.25	0.55
5	(1,3)	8.48	8.47	-0.12
6	(3,1)	9.24	9.25	0.11
7	(3,2)	10.5	10.58	0.76
8	(2,3)	10.61	10.86	2.30
9	(3,3)	14.21	14.43	1.52
10	(1,4)	14.26	14.33	0.49
11	(4,1)	14.48	14.57	0.62
12	(4,2)	15.77	15.85	0.50
13	(2,4)	16.44	16.86	2.49
14	(4,3)	19.58	19.69	0.56
15	(5,1)	20.14	19.98	-0.80
16	(3,4)	20.35	20.7	1.69

La figure II.7 présente les 6 premières déformées propres d'un pont non symétrique obtenues par ANSYS (maillage 360x60, élément Shell 63).



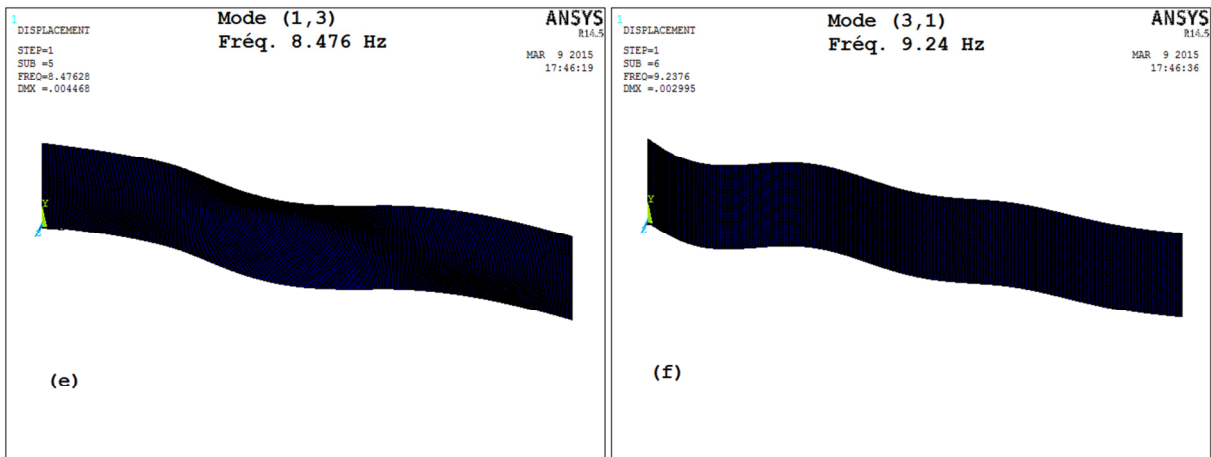


Figure II-7 Les 6 premières déformées propres d'un pont asymétrique par ANSYS

Sur la figure II-8, nous présentons les 6 premières déformées propres d'un pont asymétrique obtenues par le logiciel CDPR.

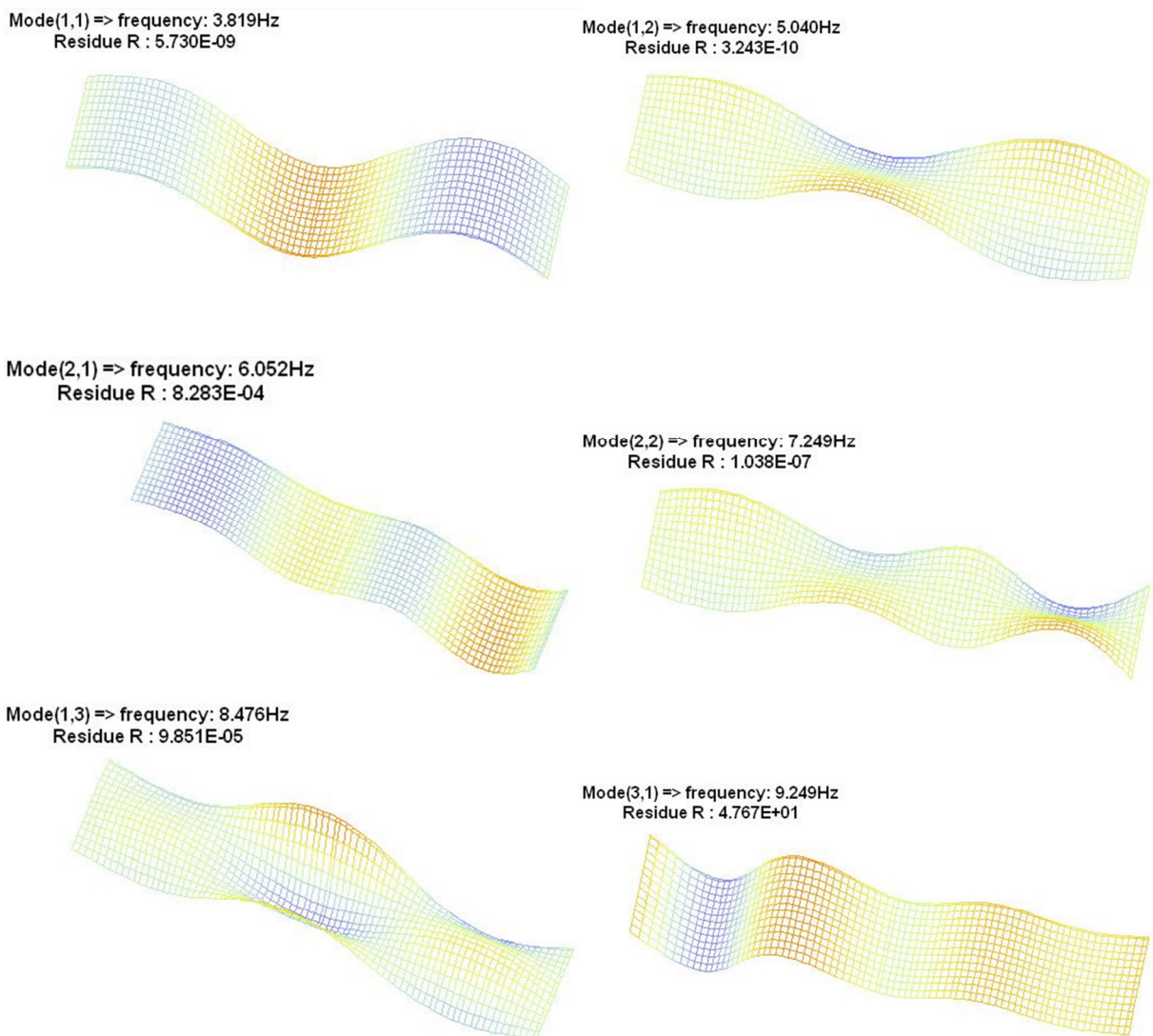


Figure II-8 Les 6 premières déformées propres d'un pont asymétrique par CDPR

II.3.3 Analyse des résultats

L'analyse des résultats des fréquences propres présentées dans les tableaux II.2 et II.3, montrent que :

- ✓ Par comparaison avec les résultats numériques obtenus par ANSYS, les résultats obtenus par la résolution de l'équation du mouvement par la méthode d'estimation locale sont plus précis que ceux de la référence [ZHU 02].
- ✓ La comparaison de nos résultats avec ceux de la référence [ZHU 02], montre une bonne concordance entre les modes de flexion, alors que des erreurs importantes apparaissent pour les modes d'ordre 2 dans la direction de la largeur du pont ($i,2$), cela s'explique par la prise des conditions aux limites de poutre sur la largeur du pont dans la référence [ZHU 02], alors que dans notre étude, nous avons pris des conditions aux limites de plaque. Les modes d'ordre élevé dans la direction de la largeur ($i,3$), ($i,4$)... n'apparaissent pas dans la référence [ZHU 02].
- ✓ L'écart entre les résultats des fréquences propres obtenus par la résolution de l'équation du mouvement par la présente méthode et ceux obtenus par ANSYS ne dépasse pas 2.5%, sauf pour les deux modes (3,3) et (3,4) du pont symétrique où l'écart atteint 5.5%, qui s'explique par la non-symétrie de ces deux modes.

II.4 CONCLUSION

Sur la base des deux méthodes de résolution de l'équation du mouvement du pont en vibration libre présentées dans la référence [REZ 08] et dans ce chapitre, nous avons développé un logiciel interactif permettant le calcul des fréquences et déformées propres des ponts routiers.

La première méthode consiste à résoudre l'équation de mouvement libre du pont au sens de la moyenne, ce qui nécessite d'effectuer un certain nombre d'intégral pour calculer le k_{1i} . Alors que la méthode d'estimation locale présentée dans ce chapitre permet dans un premier temps la localisation de la position optimale de $x(x_{opt})$ le long du pont correspondante à l'amplitude maximale de la déformée propre de chaque mode, ce qui minimise beaucoup le nombre de résolutions de l'équation du mouvement d'un côté et d'un autre côté permet d'éviter d'effectuer des intégrales et rend la méthode facilement intégrable dans un logiciel de calcul des structures. Les résultats obtenus par cette méthode sont très satisfaisants et comparables avec ceux de la littérature et ceux de la simulation numérique par le logiciel ANSYS.

CHAPITRE III

Étude du comportement dynamique des ponts routiers orthotropes multi travées sollicités par le passage d'un véhicule

III.1 INTRODUCTION

L'interaction pont-véhicule est un phénomène important, engendre plusieurs effets indésirables dus aux vibrations de la structure et de véhicule. Le comportement dynamique des ponts routiers est devenu une nécessité dans le domaine de l'ingénierie des ouvrages d'art soit pour prendre des mesures lors de la conception pour minimiser ces effets soit pour maintenir ces ouvrages.

Dans ce chapitre, nous présentons une étude du comportement dynamique d'un pont routier modélisé par une plaque mince orthotrope multi travées simplement appuyée, excité par le passage d'un véhicule. Plusieurs paramètres physiques peuvent être étudiés : le déplacement vertical du pont, les forces d'interaction pont-véhicule et le facteur d'amplification dynamique, qui représente un index du comportement dynamique des ponts routiers.

Vu les difficultés de validation expérimentalement des résultats, on fait recours au logiciel CLEF, qui est un logiciel d'analyse des structures par éléments finis réalisé par un groupe de chercheurs canadiens de l'université Laval basé sur les travaux de [HEN 95].

III.2 MODÉLISATION DU PONT

Le pont est modélisé par une plaque mince orthotrope à trois travées (figure III.1). L'équation du mouvement du pont peut être écrite sous la forme suivante :

$$\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \sum_{k=1}^{nf} F_{pk}^{int} \delta(x - x_k(t), y - y_k) \quad (\text{III. 1})$$

Avec

c est la constante d'amortissement du pont,

F_{pk}^{int} est la force d'interaction entre la $k^{ème}$ roue du véhicule et le pont,

$(x_k(t), y_k)$ est la position de la $k^{ème}$ force d'interaction sur le pont,

ν_{xy} et ν_{yx} sont les coefficients de Poisson selon les directions x et y respectivement,

On suppose que le véhicule se déplace le long du pont ce que signifie que les y_k sont constantes. Comme la vitesse de roulement est considérée constante, donc $x_k(t)=v_x \cdot t_k$ (avec v_x la vitesse linéaire du véhicule, t_k est le temps au point k).

L'équation du mouvement (III.1) sera résolue par la méthode de superposition modale et la méthode de Newmark. En décomposant le déplacement vertical du pont dans la base modale comme suit :

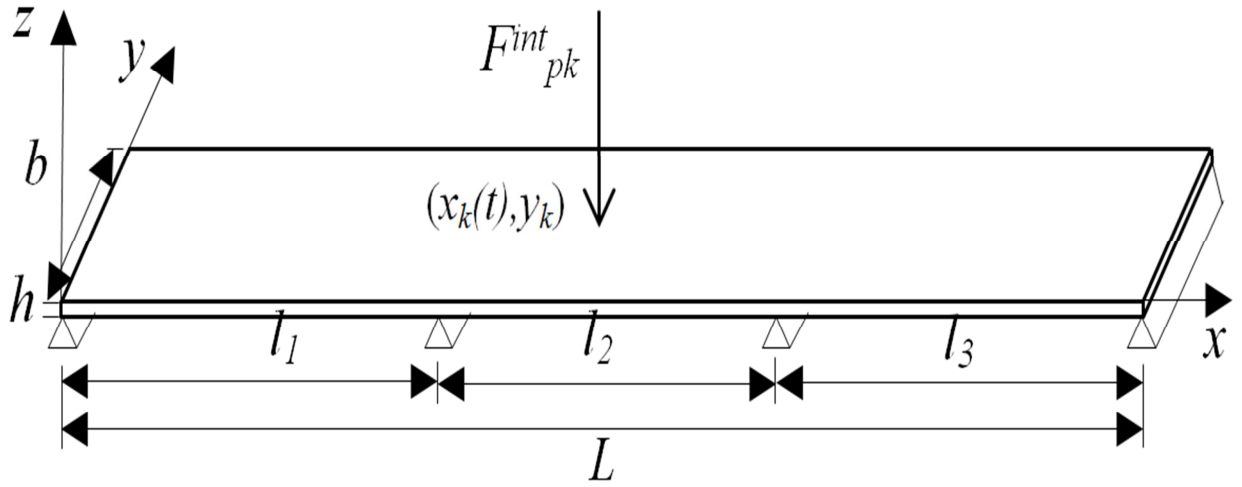


Figure III-1 Pont modélisé par une plaque mince orthotrope supportée par des appuis rigides

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \phi_{ij}(x, y) \cdot q_{ij}(t) \quad (III.2)$$

Où $\phi_{ij}(x, y)$ sont les modes propres d'une plaque mince orthotrope multitravées auxquelles sont associées les pulsations propres ω_{ij} , $q_{ij}(t)$ sont les coordonnées généralisées.

En remplaçant l'expression (III.2) dans l'équation de mouvement (III.1), puis en multipliant les deux membres par $\phi_{kl}(x, y)$ et en intégrant sur toute la surface du pont, on obtient :

$$\begin{aligned} & \iint_s m \sum_{i,j=1}^{n,m} \phi_{ij}(x, y) \ddot{q}_{ij}(t) \phi_{kl}(x, y) dx dy + \iint_s c \sum_{i,j=1}^{n,m} \phi_{ij}(x, y) \dot{q}_{ij}(t) \phi_{kl}(x, y) dx dy + \iint_s D_x \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} q_{ij}(t) \phi_{kl}(x, y) dx dy \\ & + 2 \iint_s H \frac{\partial^2 \phi_{ij}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_{ij}}{\partial y^2} q_{ij}(t) \phi_{kl}(x, y) dx dy + \iint_s D_y \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} q_{ij}(t) \phi_{kl}(x, y) dx dy \\ & = - \iint_s \sum_{k=1}^{nf} F_{pk}^{int} \phi_{kl} \delta(x - x_k(t), y - y_k) \end{aligned} \quad (III.3)$$

Les modes propres sont orthogonaux, alors :

$$\iint_S \bar{m} \phi_{ij}(x, y) \phi_{kl}(x, y) dx dy = \begin{cases} 0 & \text{pour } ij \neq kl \\ M_{ij} & \text{pour } ij = kl \end{cases}$$

$$\iint_S c \phi_{ij}(x, y) \phi_{kl}(x, y) dx dy = \begin{cases} 0 & \text{pour } ij \neq kl \\ C_{ij} = 2\xi_{ij} \omega_{ij} M_{ij} & \text{pour } ij = kl \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

$$\iint_S \left(D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} \right) \phi_{kl}(x, y) dx dy = \begin{cases} 0 & \text{pour } ij \neq kl \\ \omega_{ij}^2 M_{ij} = K_{ij} & \text{pour } ij = kl \end{cases}$$

Où ξ_{ij} sont les coefficients d'amortissement modal visqueux du pont.

En tenant compte des conditions d'orthogonalité dans (III.4), les termes dans l'équation (III.3), qui vérifient $ij \neq kl$ disparaissent, il reste (i, j) équations modales découplées :

$$M_{ij} \ddot{q}_{ij}(t) + C_{ij} \dot{q}_{ij}(t) + K_{ij} q_{ij}(t) = F_{ij}(t) \quad (\text{III.5})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_S \bar{m} \phi_{ij}^2(x, y) dx dy$$

$$C_{ij} = \iint_S c \phi_{ij}^2(x, y) dx dy = 2\xi_{ij} \omega_{ij} M_{ij}$$

$$K_{ij} = \iint_S \left(D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} \right) \phi_{ij} dx dy = M_{ij} \omega_{ij}^2$$

$$F_{ij} = - \iint_S \sum_{k=1}^{nf} F_{pk}^{\text{int}} \delta(x - x_k(t), y - y_k) \phi_{ij}(x, y) ds = - \sum_{k=1}^{nf} F_{pk}^{\text{int}}(x_k, y_k) \phi_{ij}(x_k, y_k) \quad (\text{III.6})$$

III.3 RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE MOUVEMENT COUPLÉE PONT-VEHICULE

Les équations de mouvement du modèle de véhicule avec sept degrés de liberté sont obtenues en appliquant la loi de l'équilibre dynamique des forces et des moments pour chaque degré de liberté. Après simplification, le système suivant est obtenu:

$$[M_v] \{\ddot{Z}_v\} + [C_v] \{\dot{Z}_v\} + [K_v] \{Z_v\} = \{F_v^{\text{int}}\} \quad (\text{III.7})$$

Avec $[M_v]$, $[C_v]$ et $[K_v]$ sont les matrices de masse, amortissement et rigidité du véhicule.

Pour résoudre les équations de mouvement couplées pont – véhicule, nous utilisons la méthode d'intégration numérique de Newmark.

A l'instant $t + \Delta t$, l'équation de mouvement du véhicule (III.7) peut être écrite sous la forme suivante :

$$[M_v] \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} + [C_v] \{\dot{Z}_v\}_{t+\Delta t} + [K_v] \{Z_v\}_{t+\Delta t} = \{F_v^{\text{int}}\}_{t+\Delta t} \quad (\text{III.8})$$

Les déplacements et les vitesses sont respectivement :

$$\{Z_v\}_{t+\Delta t} = \{Z_v\}_t + \Delta t \{\dot{Z}_v\}_t + \Delta t^2 (0,5 - \beta) \{\ddot{Z}_v\}_t + \beta \Delta t^2 \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} \quad (\text{III.9})$$

$$\{\dot{Z}_v\}_{t+\Delta t} = \{\dot{Z}_v\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_t + \gamma \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} \quad (\text{III.10})$$

Où γ et β sont les paramètres de stabilité de la méthode de Newmark et Δt est le pas du temps d'intégration.

En substituant les expressions (III.9) et (III.10) dans l'équation (III.8), nous obtenons après factorisation:

$$[S_v] \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} + [C_v] \{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} + [K_v] \{Z_v^*\}_{t+\Delta t} = \{F_v^{\text{int}}\}_{t+\Delta t} \quad (\text{III.11})$$

$$\text{Avec: } \{S_v\} = \{M_v\} + \gamma \Delta t \{C_v\} + \beta \Delta t^2 \{K_v\}$$

$$\{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} = \{\dot{Z}_v\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_t$$

$$\{Z_v^*\}_{t+\Delta t} = \{Z_v\}_t + \Delta t \{\dot{Z}_v\}_t + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \{\ddot{Z}_v\}_t \quad (\text{III.12})$$

Multiplions l'équation (III.11) by $[S_v]^{-1}$, nous obtenons:

$$\{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} = \{P_v\}_{t+\Delta t} - [U_v] \{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} - [V_v] \{Z_v^*\}_{t+\Delta t}$$

Avec :

$$\{P_v\}_{t+\Delta t} = [S_v]^{-1} \{F_v^{\text{int}}\}_{t+\Delta t}, \quad (\text{III.13})$$

$$[U_v] = [S_v]^{-1} [C_v],$$

$$[V_v] = [S_v]^{-1} [K_v]$$

De la même manière, l'équation du mouvement du pont (III.5), à l'instant $t + \Delta t$ et après sa division par la masse modale M_{ij} , l'équation s'écrit:

$$\ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} + 2\xi_{ij} \omega_{ij} \dot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} + \omega_{ij}^2 q_{ij}^{(t+\Delta t)} = \frac{1}{M_{ij}} F_{ij}^{(t+\Delta t)} \quad (\text{III.14})$$

De même les expressions généralisées des déplacements et des vitesses du pont seront :

$$q_{ij}^{(t+\Delta t)} = q_{ij}^{(t)} + \Delta t \dot{q}_{ij}^{(t)} + \Delta t^2 (0,5 - \beta) \ddot{q}_{ij}^{(t)} + \beta \Delta t^2 \ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} \quad (\text{III.15})$$

$$\dot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} = \dot{q}_{ij}^{(t)} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t)} + \gamma \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} \quad (\text{III.16})$$

En substituant les expressions (III.15) et (III.16) dans l'équation (III.14), nous aurons alors:

$$\ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} = \left(\frac{1}{M_{ij}} F_{ij}^{(t+\Delta t)} - 2\xi_{ij} \omega_{ij} \dot{q}_{ij}^{*(t+\Delta t)} - \omega_{ij}^2 q_{ij}^{*(t+\Delta t)} \right) / (1 + 2\Delta t \xi_{ij} \omega_{ij} + \beta \Delta t^2 \omega_{ij}^2) \quad (\text{III.17})$$

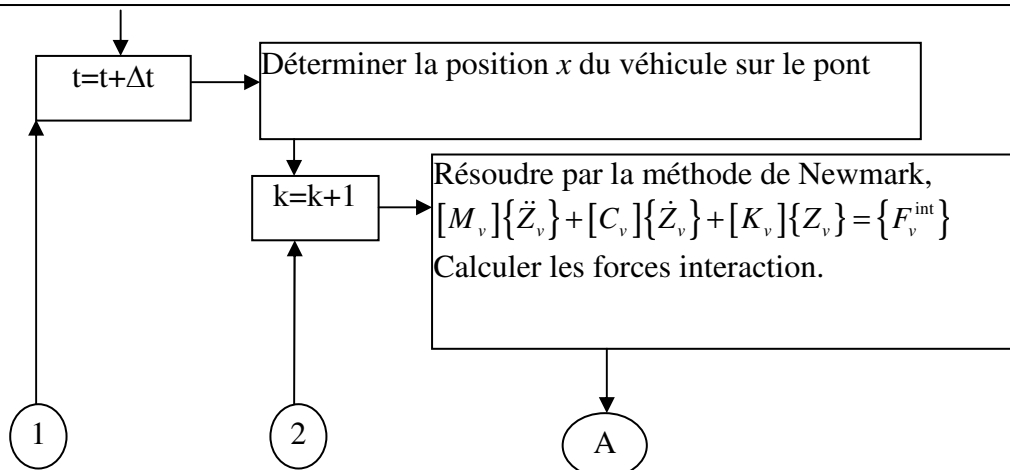
Avec: $q_{ij}^{*(t+\Delta t)} = q_{ij}^{(t)} + \Delta t \dot{q}_{ij}^{(t)} + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \ddot{q}_{ij}^{(t)}$

$$\dot{q}_{ij}^{*(t+\Delta t)} = \dot{q}_{ij}^{(t)} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t)} \quad (\text{III.18})$$

III.3.1 Algorithme de la méthode de résolution

Nous présentons ci-après les différentes étapes de la résolution l'équation du mouvement couple pont – véhicule.

- Lecture des données du: Pont, Véhicule, Chaussée,
- Calculer: $D_x, D_y, H, D_{xy} \dots$
- Choisir le nombre de modes propres: n, m
- Déterminer les fréquences propres, calculer les déformées propres,
- Choisir la vitesse de passage du véhicule sur le pont,
- Choisir le pas du temps, paramètres de stabilité de Newmark et la précision,
- Calculer les matrices de: masse, rigidité et amortissement modaux du pont, véhicule,
- Choisir les conditions initiales,
Déplacements, vitesses et accélérations généralisées (cordonnées modaux). q, \dot{q}, \ddot{q}
Véhicule: $\{Z\}_0, \{\dot{Z}\}_0, \{\ddot{Z}\}_0$, Degrés de liberté de véhicule,
- Choisir la trajectoire du véhicule sur le pont,



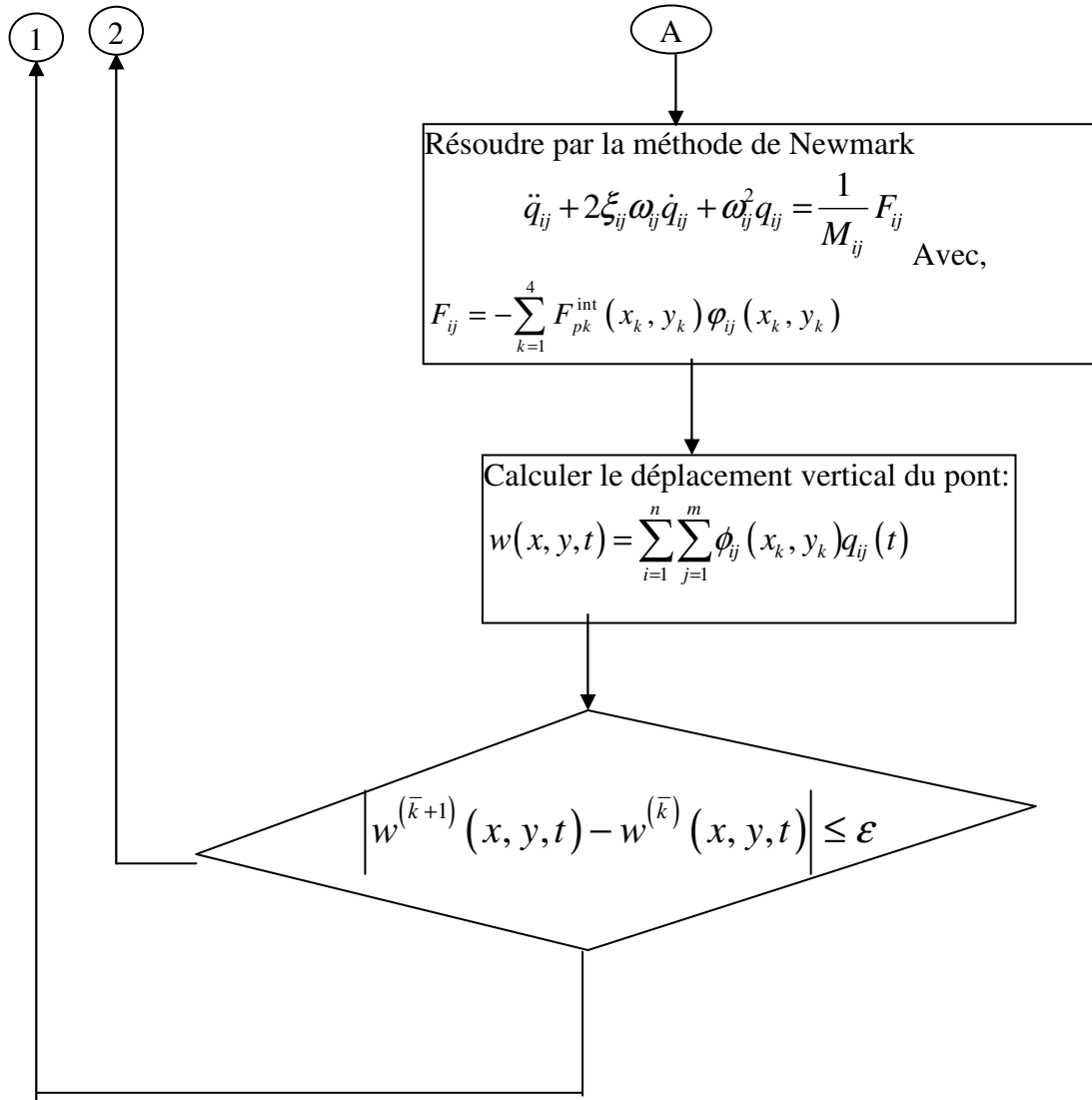


Figure III-2 Algorithme de la méthode de résolution.

III.4 Exemple de validation

Les données du véhicule sont prises de la référence [ZHU 02] :

m_1, m_2 les masses des roues avec les essieux avant et arrière respectivement,

$m_v, I_{\theta v}, I_{\alpha v}$ la masse et les moments d'inertie du bloc rigide du véhicule,

$I_{\theta 1}, I_{\theta 2}$ les moments d'inertie des essieux avant et arrière respectivement,

$K_{pi, i=1, 4}$ les rigidités dans les pneus,

$C_{pi, i=1, 4}$ les amortissements des pneus,

$K_{si, i=1, 4}$ les rigidités des suspensions,

$C_{si}, i=1, 4$ les amortissements des suspensions,

S_{p1}, S_{p2} les espacements entre les points de contact des pneus avant et arrière respectivement,

S_1, S_2 les espacements entre les essieux avant et arrière respectivement.

Avec:

$$m_v=17000\text{kg}, \quad m_1=600\text{kg}, m_2=1000\text{kg},$$

$$I_{\theta v}= 9 \cdot 10^4 \text{kg m}^2, \quad I_{\theta 1}=1.3 \cdot 10^4 \text{kg m}^2,$$

$$I_{\theta 2}= 550 \text{kg m}^2, \quad I_{\theta 3}=600 \text{kg m}^2,$$

$$S_x=4.73\text{m}, \quad S_{p1}=S_{p2}=2.05\text{m},$$

$$S_1=S_2=1.41\text{m}, \quad a_1=0.67\text{m}, a_2=0.33\text{m},$$

$$K_{s1}=K_{s2}=1.16 \cdot 10^5 \text{ N/m}, \quad K_{s3}=K_{s4}=3.73 \cdot 10^5 \text{ N/m},$$

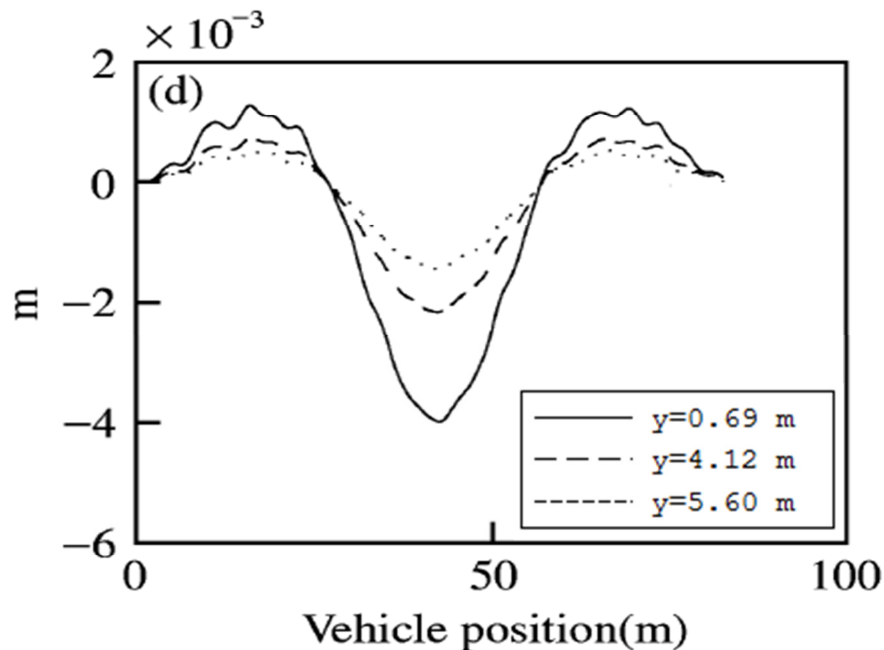
$$K_{p1}=K_{p2}= 7.85 \cdot 10^5 \text{ N/m}, \quad K_{p3} = K_{p4}= 5.7 \cdot 10^5 \text{ N/m},$$

$$C_{p1}=C_{p2}=2.5 \cdot 10^4 \text{ Ns/m}, \quad C_{p3} = C_{p4}= 3.5 \cdot 10^4 \text{ Ns/m},$$

$$C_{s1} =C_{s2} =1.0 \cdot 10^2 \text{ Ns/m}, \quad C_{s3} = C_{s4} =2.0 \cdot 10^2 \text{ Ns/m},$$

III.4.1 Le déplacement vertical

La figure III.3 représente la comparaison du déplacement dynamique de pont au milieu de la seconde travée sur la première poutre obtenu par la méthode présentée avec ceux obtenus par la référence [ZHU 02].



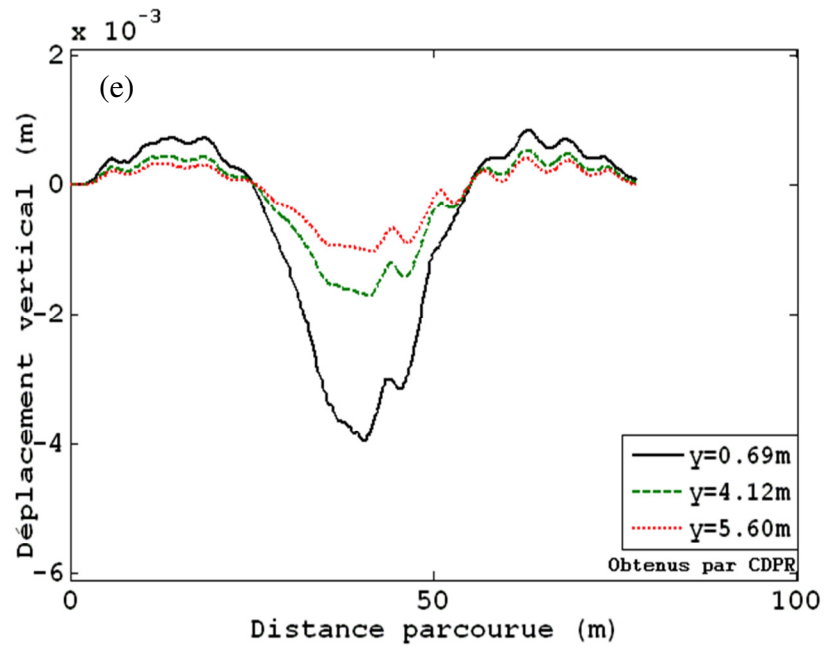


Figure III-3 La réponse dynamique du pont obtenue : (d) référence [ZHU 02], (e) présente méthode.

Il y a un bon commun accord entre les deux résultats, avec de petites différences dans les minima et les maxima sont principalement dus à la non-prise en compte des modes de torsion (couplage intermodal) dans la référence [ZHU 02].

Nous présentons sur la figure III.4, une autre comparaison des résultats par la superposition des réponses dynamiques du pont pour trois trajectoires du véhicule sur le pont (a) $y=0.69\text{m}$, (b) $y=4.12\text{m}$, (c) $y=5.60\text{m}$ et pour une vitesse de roulement de 30 m/s, obtenues par le logiciel CLEF et le logiciel que nous avons développé CDPR.

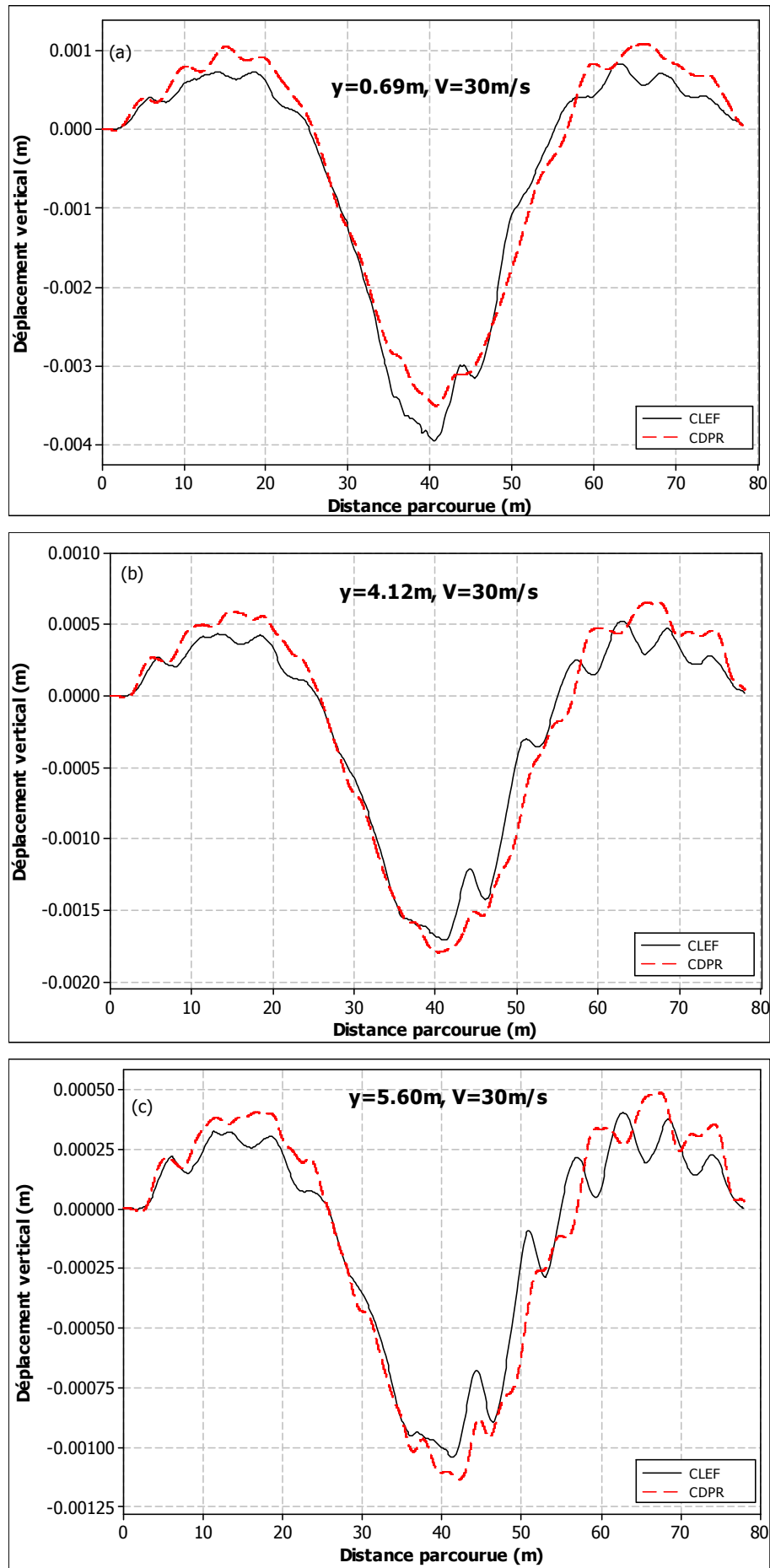


Figure III-4 Superposition des résultats de la réponse dynamique obtenue par CLEF et C DPR

On constate une bonne concordance entre les différents résultats.

III.4.2 Influence des conditions de la chaussée

Les figures III.5 et III.6 présentent les déplacements dynamiques du pont et des essieux du véhicule obtenus par le logiciel CDPR pour une vitesse de 30 m / s et avec différentes rugosités de la chaussée.

On peut admettre que la rugosité n'a pas un effet majeur sur le déplacement dynamique du pont [OUE 06]; cependant elle a une grande influence sur les essieux du véhicule.

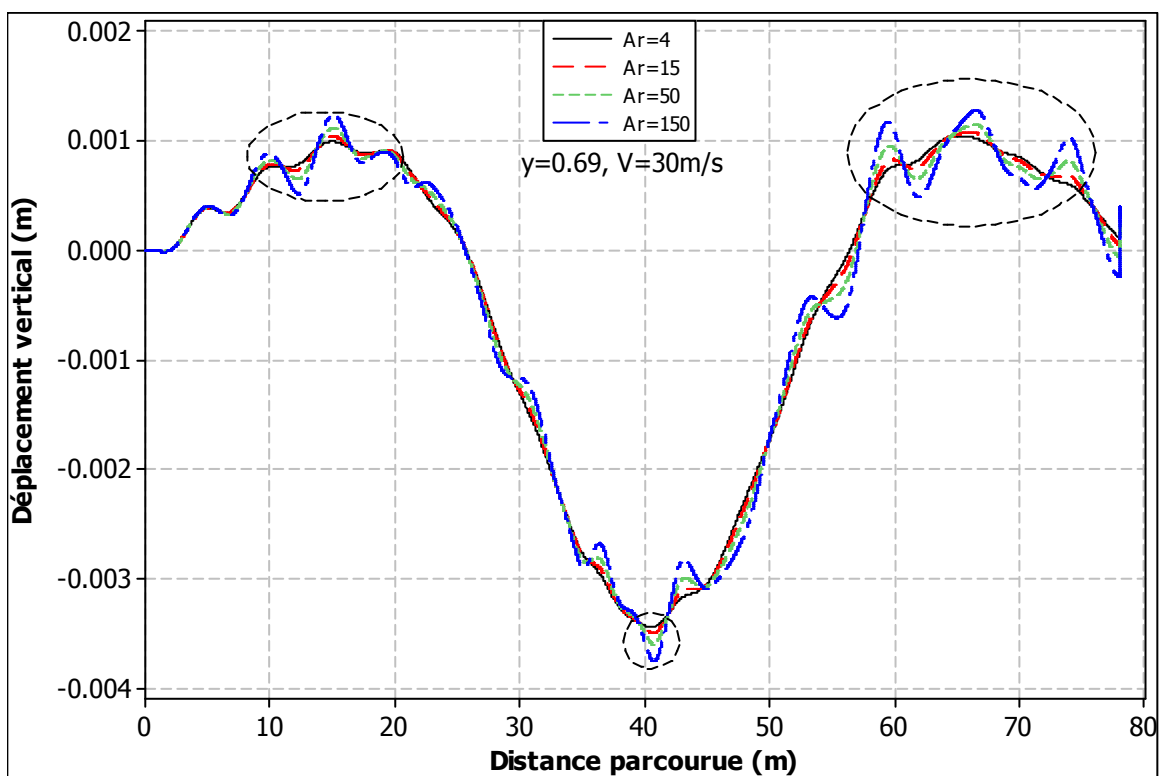


Figure III-5 L'influence de l'état de la chaussée sur le déplacement dynamique de pont.

L'influence de la rugosité peut également être observée au milieu de la deuxième travée (point de mesure), les déplacements dynamiques de l'essieu avant du véhicule atteint 5 fois et l'essieu arrière du véhicule 8 fois par rapport aux bonnes conditions de chaussée.

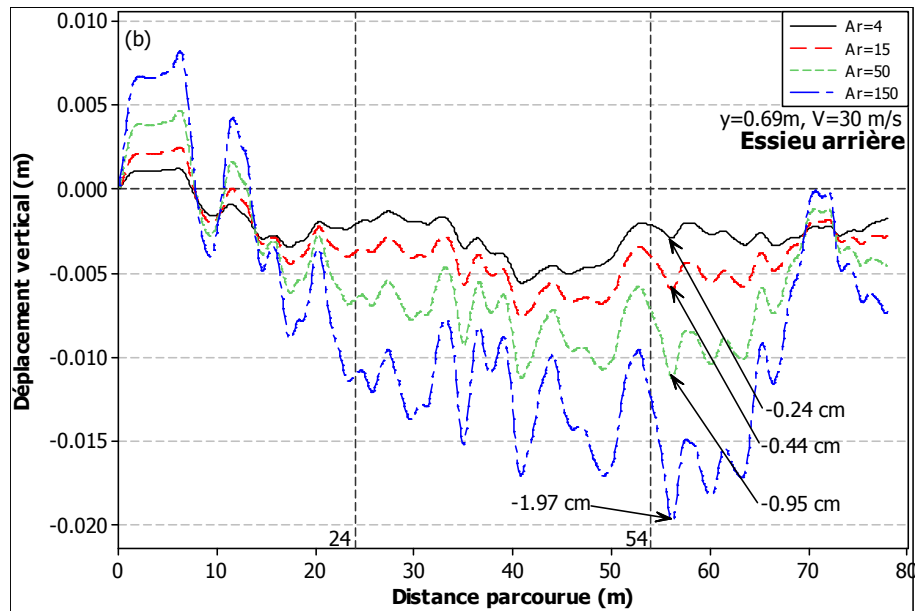
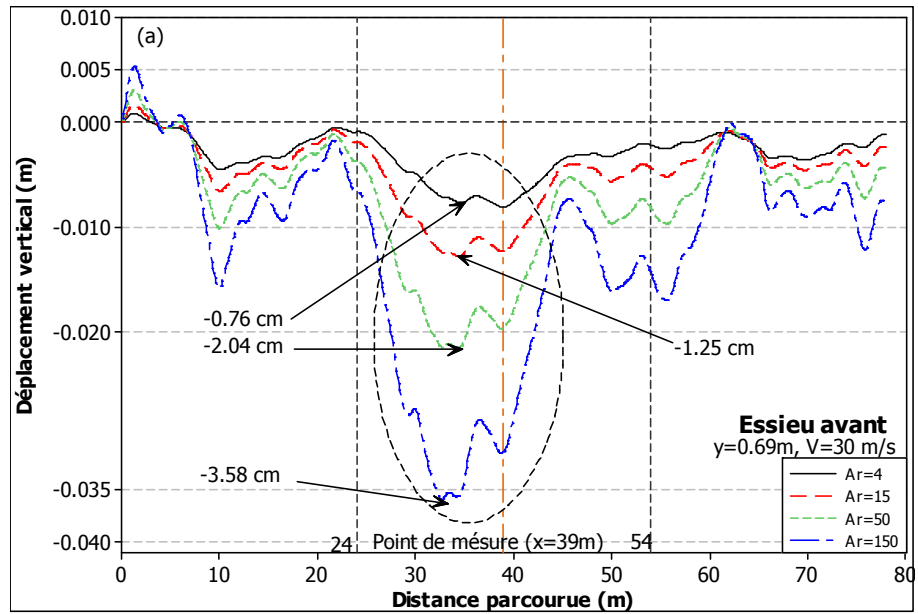


Figure III-6 L'influence de l'état de la chaussée sur le déplacement dynamique des essieux avant (a) et arrière (b) du véhicule.

La figure III.7 présente la réponse dynamique pour différentes vitesses de passage au milieu de la seconde travée.

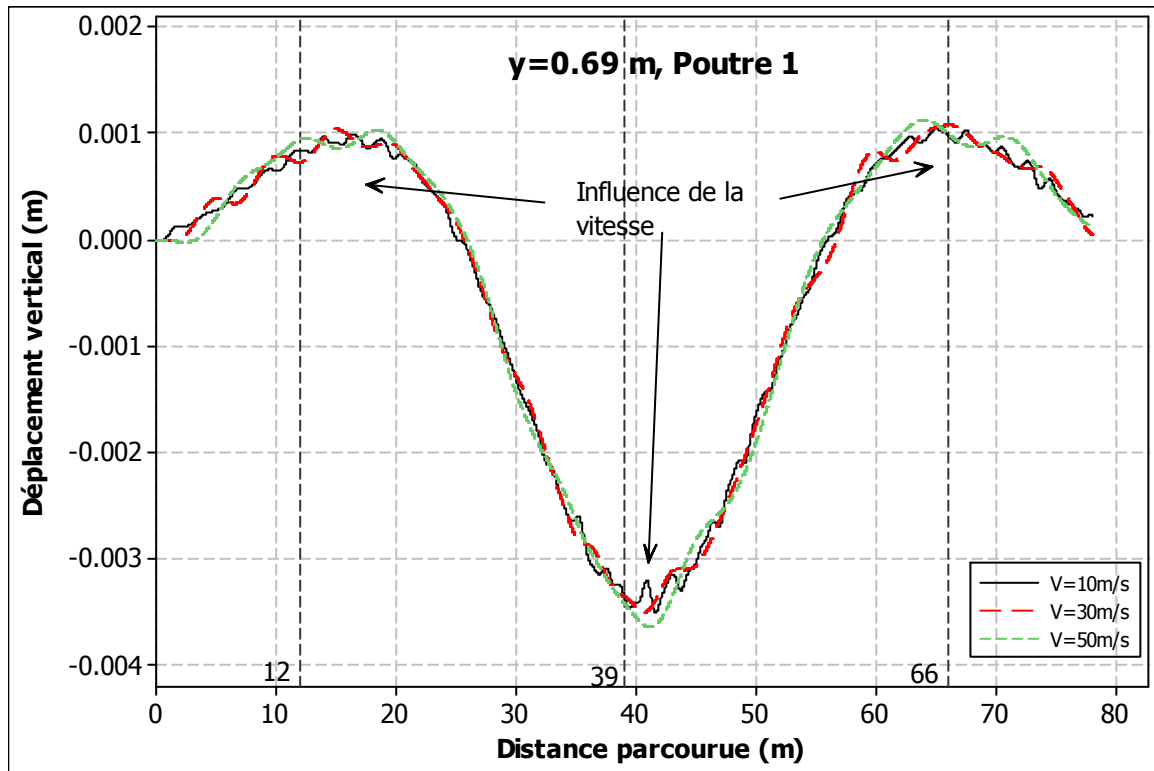


Figure III-7 La réponse dynamique pour différentes vitesses de passage du véhicule sur le milieu de la deuxième travée.

On constate que l'accroissement de la vitesse de passage du véhicule a une influence sur le déplacement vertical du pont uniquement au milieu de chaque travée accompagné d'une diminution des oscillations.

III.4.3 Les forces d'interaction

La figure III.8, présente un aperçu des forces d'interaction qui sont appliquées par les roues droites avant et arrière du véhicule se déplaçant sur le pont.

Le véhicule se déplace à une vitesse de 30m / s, sur une trajectoire de $y = 0.69\text{m}$ et un profil de la chaussée dans un état moyen. En outre, lorsque A_r est dans l'ordre de $10^{-6} \text{ m}^3 / \text{cycle}$, pour les deux roues, la force d'interaction varie avec le temps de passage du véhicule et en fonction de la position de la roue autour d'une valeur moyenne qui correspond à la force statique.

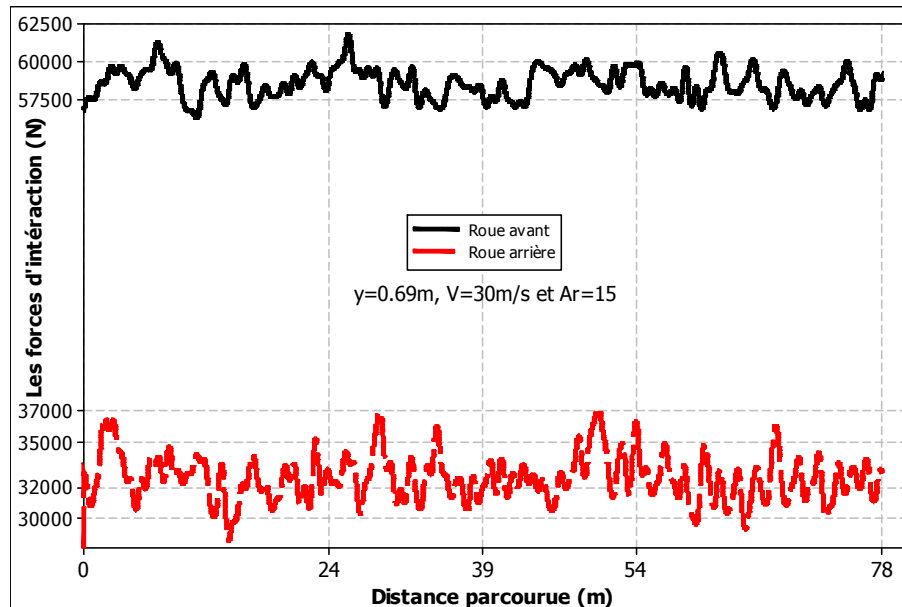


Figure III-8 Les forces d'interaction.

La figure III.9 présente l'influence de la rugosité de la chaussée sur les forces d'interactions. On peut clairement observer que la rugosité de la chaussée a une grande influence sur les forces d'interactions de pont-véhicule. Pour une chaussée dégradée, la force d'interaction dépasse celle d'une route en bon état par une valeur de 1500 à 3000N.

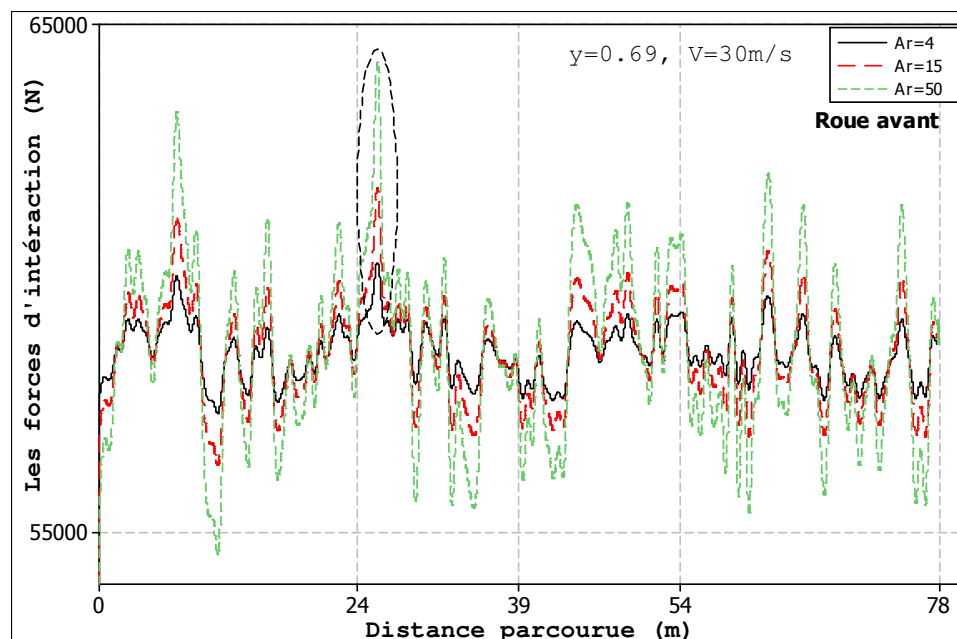


Figure III-9 Forces d'interaction pour les différentes conditions de chaussée.

Les forces d'interactions obtenues par les différentes vitesses de passage sont présentées sur la figure III.10. Nous remarquons que pour les mêmes conditions de la route, l'augmentation de la vitesse au-delà de 30 m / s entraîne une augmentation significative de la force de l'interaction, et ce pour les deux roues avant et arrière.

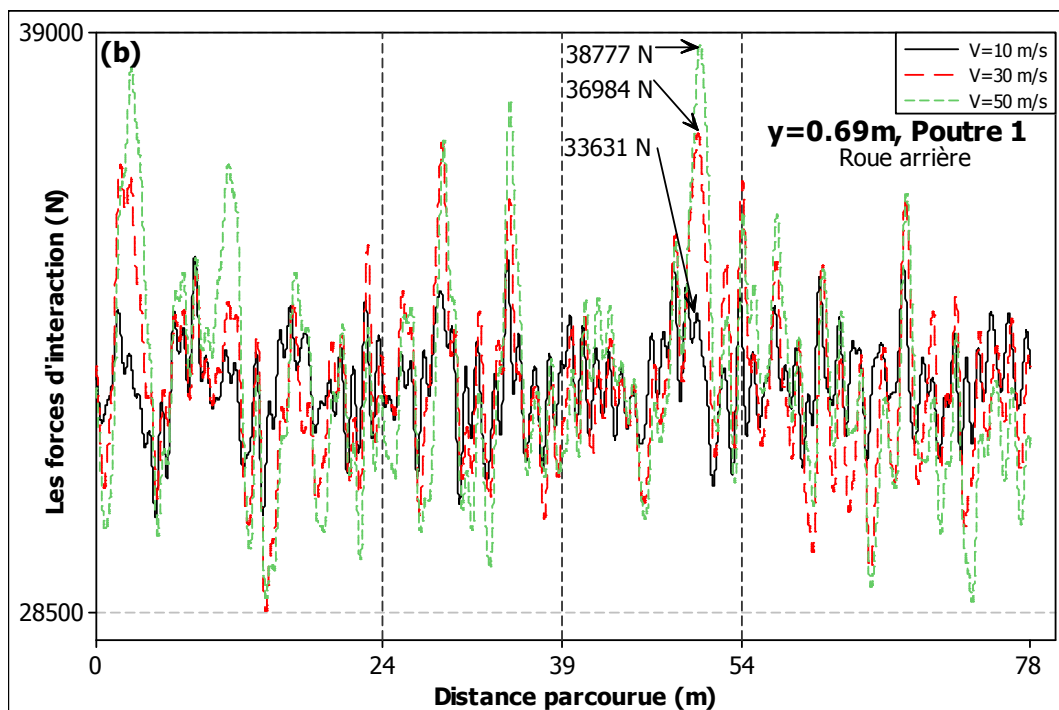
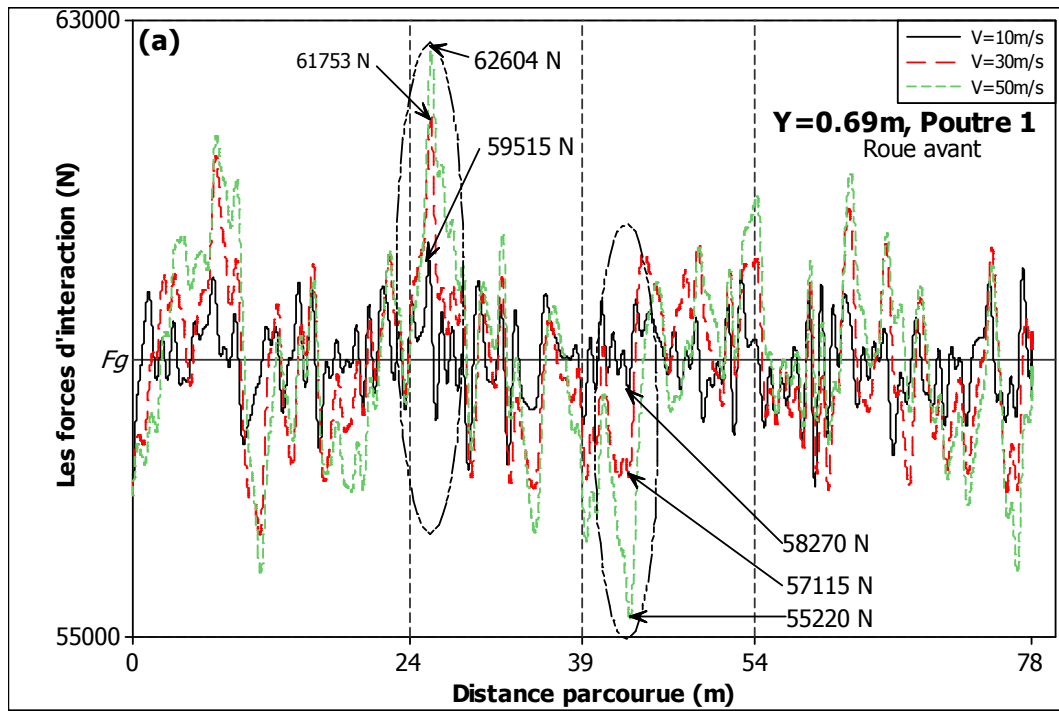


Figure III-10 Les forces d'interaction pour les différentes vitesses de passage.

III.4.4 Facteur d'amplification dynamique (FAD)

Le facteur d'amplification dynamique (FAD) est défini dans la plupart des travaux bibliographiques comme étant le rapport entre la déflexion statique maximale et déflexion dynamique maximale.

Les auteurs de la référence [TER 07] ont montré que la valeur de FAD peut dépasser la valeur critique de 2.0, ce qui représente la valeur maximale dans la conception des ouvrages d'art.

$$FAD = \frac{R_{DynMax}}{R_{StaMax}}$$

Avec:

R_{DynMax} la réponse dynamique maximale du pont,

R_{StaMax} la réponse statique maximale du pont.

Le tableau III.1, présente les résultats des facteurs d'amplification dynamiques obtenus par notre travail (logiciel CDPR) et le logiciel CLEF par rapport aux résultats obtenus dans la référence [ZHU 02].

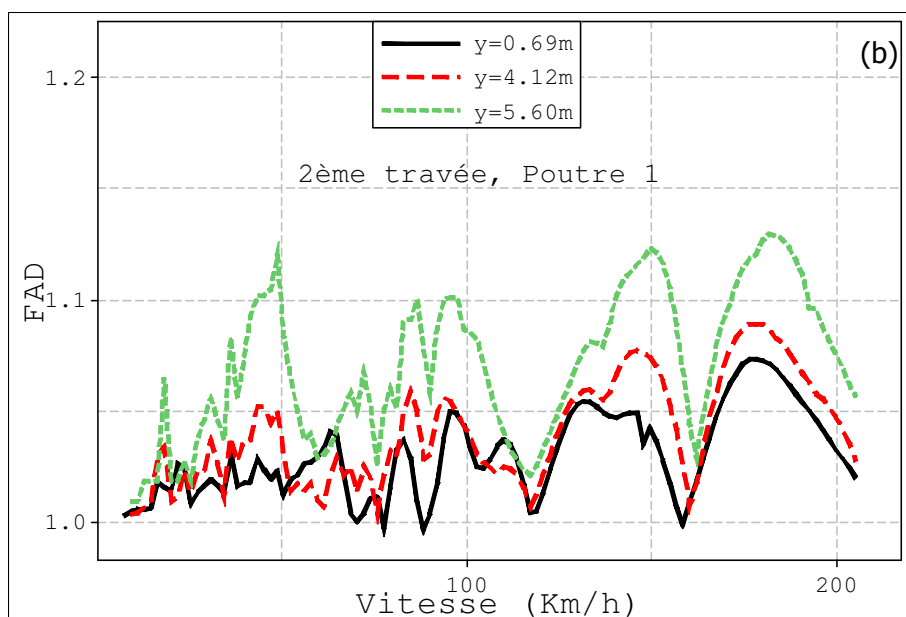
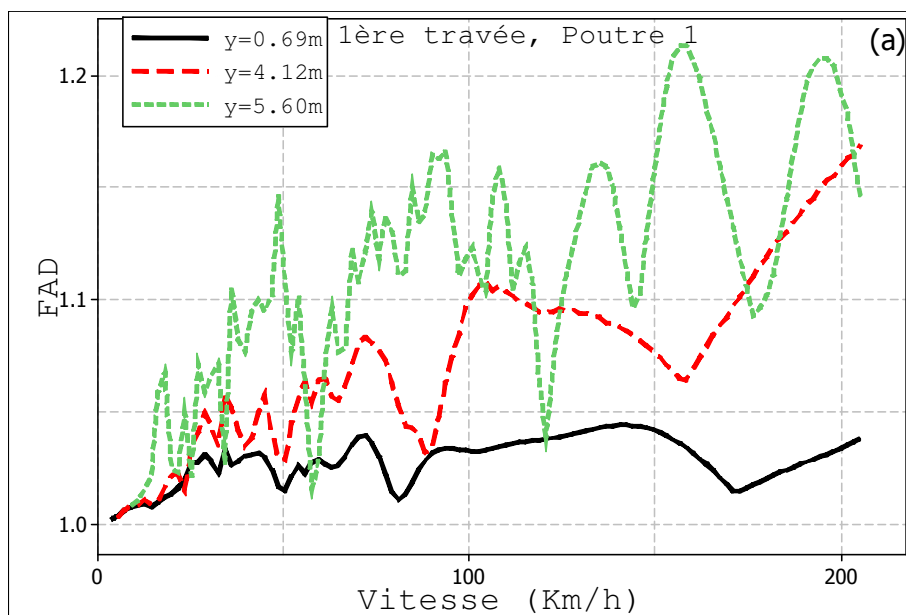
Les facteurs d'amplification dynamiques obtenus par le logiciel CLEF pour la poutre 5 cas première et troisième travée dépassent les FAD admis dans la construction des ponts routiers. Les résultats des FAD obtenus par le logiciel CDPR ne dépassant pas 1,61, ainsi le pont étudié fonctionne dans de bonnes conditions, quelle que soit la trajectoire de la charge. Les FAD obtenus par la référence [ZHU 02] sont pratiquement indépendants des travées, poutres et de la chaussée cela est dû à la non-prises en compte des modes de torsion.

Tableau III-1 Les facteurs d'amplification dynamiques (FAD) obtenus par les différentes méthodes

Travée	Cas de chargement	[ZHU 02]					CLEF					CDPR				
		Poutre 1	Poutre 2	Poutre 3	Poutre 4	Poutre 5	Poutre 1	Poutre 2	Poutre 3	Poutre 4	Poutre 5	Poutre 1	Poutre 2	Poutre 3	Poutre 4	Poutre 5
1 ^{ère}	1	1.03	1.03	1.04	1.21	1.07	1.03	1.05	1.08	1.18	2.03	1.03	1.03	1.11	1.14	1.23
	2	1.03	1.03	1.03	1.04	1.05	1.04	1.03	1.05	1.09	1.15	1.04	1.03	1.02	1.02	1.14
	3	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.06	1.04	1.04	1.06	1.09	1.11	1.01	1.01	1.01	1.07
2 ^{ème}	1	1.04	1.04	1.05	1.14	1.06	1.06	1.07	1.10	1.14	1.31	1.04	1.05	1.09	1.19	1.20
	2	1.03	1.03	1.04	1.05	1.07	1.07	1.06	1.07	1.09	1.15	1.06	1.06	1.04	1.05	1.16
	3	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04	1.09	1.07	1.07	1.08	1.11	1.09	1.05	1.04	1.05	1.10
3 ^{ème}	1	1.05	1.05	1.05	1.17	1.11	1.03	1.05	1.06	1.13	2.14	1.05	1.06	1.08	1.29	1.61
	2	1.05	1.05	1.05	1.04	1.06	1.07	1.03	1.07	1.16	1.26	1.06	1.04	1.05	1.05	1.20
	3	1.04	1.04	1.04	1.04	1.05	1.08	1.06	1.06	1.07	1.13	1.07	1.05	1.04	1.06	1.09

Les figures III. 11a, b et c présentent les FAD des trois travées du pont pour les trois cas de charge en fonction de la vitesse de passage du véhicule. Il est constaté que le FAD est

supérieur sur la première travée (longueur 24 m), après il diminue sur la seconde travée (longueur 30 m) et enfin, a légèrement augmenté sur la troisième travée (longueur 24 m).



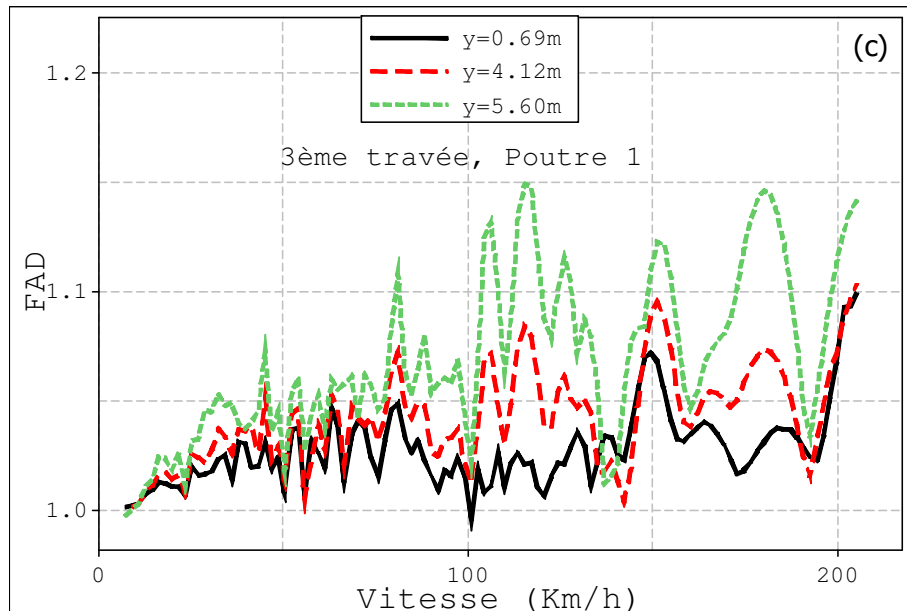
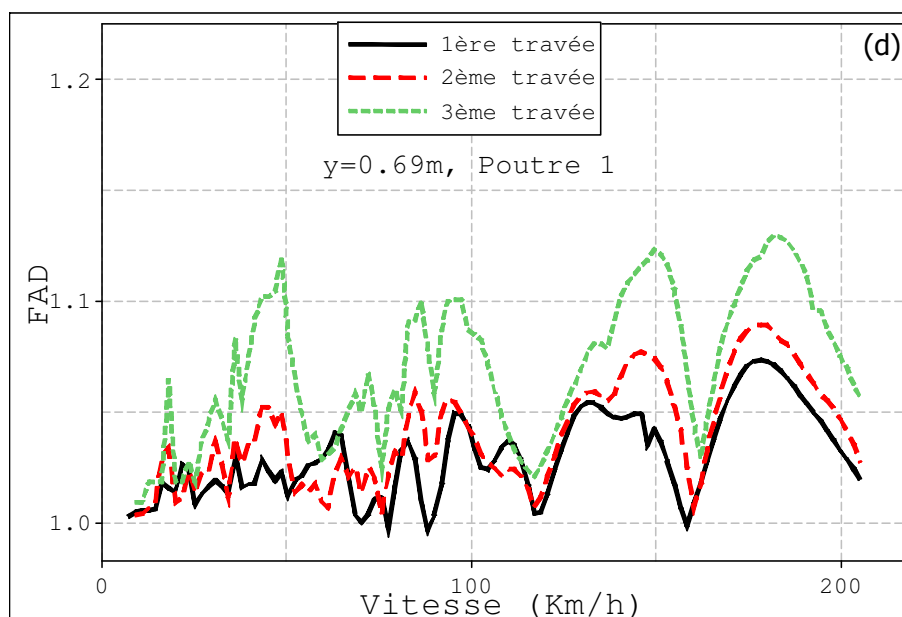


Figure III-11 FAD des trois travées du pont pour les trois cas de charge.

La deuxième observation est que le FAD augmente lorsque la charge se déplace au centre du pont en raison de l'éloignement du point de mesure de la déflexion statique et dynamique qui se trouve toujours au milieu de chaque travée et sur la première poutre (Poutre 1).

Sur les figures III 12d, e et f, nous présentons le FAD de chaque cas de chargement pour les trois travées. Nous constatons que le FAD est plus grand sur la première travée et lorsque la charge passe par le milieu du pont (Figure III. 12f)



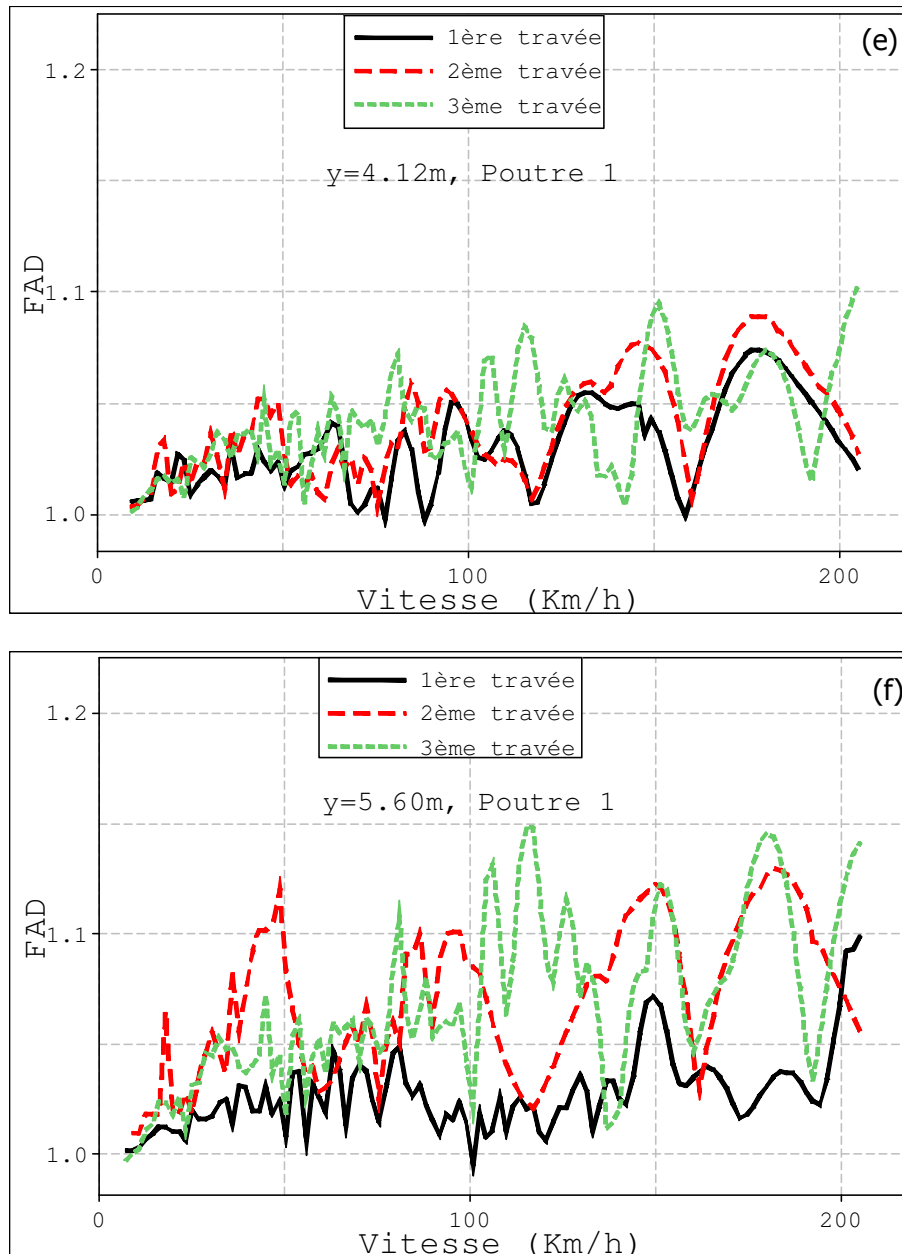


Figure III-12 FAD de chaque cas de chargement pour les trois travées.

III.5 CONCLUSION.

L'étude des vibrations forcés du pont sollicité par le passage d'un véhicule, nous a permis d'étudier l'influence de plusieurs paramètres physiques dues au phénomène d'interaction pont-véhicule. Les résultats obtenus ont été vérifiés par une confrontation avec ceux de la littérature et numériques obtenus par le logiciel CLEF. Un logiciel de calcul des structures (CDPR) a été développé sur la base de cette modélisation. Les principales constatations qu'on peut dégagées de cette étude sont:

- ✓ Les différences notées par rapport à la référence [ZHU 02], s'expliquent par la non-prise des modes de torsion selon la largeur du pont dans le calcul de la réponse dynamique du pont, au profil de la chaussée et au coefficient d'amortissement qui n'ont pas été mentionné dans la référence.
- ✓ L'augmentation de la vitesse de roulement réduit les oscillations apparentes sur la réponse dynamique.
- ✓ En s'éloignant du point de mesure, la réponse dynamique diminue.
- ✓ L'état de la chaussée a peu d'influence sur la réponse dynamique du pont.
- ✓ Une variation très importante de la force d'interaction pour les roues avant et arrière de (55 à 60KN) et de (30 à 35KN) respectivement.
- ✓ La force d'interaction exercée par une roue varie autour d'une valeur moyenne qui correspond à la force statique.
- ✓ Le facteur d'amplification dynamique accroit proportionnellement à la vitesse de roulement et atteint des valeurs maximales pour des vitesses supérieures à 150 Km/h qui peut être dû à la coïncidence avec une des fréquences propres du pont.

CHAPITRE IV

Solution de l'équation du mouvement libre d'un pont routier multi travées supporté par des appuis élastiques ponctuels

IV.1 INTRODUCTION

Dans la plus part des travaux de recherches dans ce domaine, les conditions aux limites étudiées sont des conditions classiques comme les appuis rigides, les encastremets... Le choix de ces conditions est probablement dû à la simplicité des fonctions admissibles posées dans les calculs. Dans ce chapitre, nous allons présenter la modélisation d'un pont routier multi travées supporté par des appuis élastiques ponctuels répartis sur toute la longueur aux limites et aux appuis intermédiaires et sur la largeur du pont aux limites et au milieu. Une étude des vibrations libres est menée, cette dernière est une étape essentielle dans l'étude du comportement dynamique d'un pont routier. Pour cela, nous allons modéliser les déformées propres du pont par un ensemble de fonctions admissibles, deux fonctions dans la direction longitudinale du pont et deux autres fonctions dans sa direction transversale. Cette décomposition des déformées propres nous permet d'entamer une étude des vibrations libres très complexe avec un aperçu globale sur le comportement des appuis élastiques.

La résolution de l'équation de mouvement du pont va être réalisée par la méthode d'estimation locale présentée dans le chapitre II. La modélisation présentée dans ce chapitre nous permet donc de vérifier la validité de la méthode d'estimation locale par une autre application.

IV.2 MODÉLISATION DU PONT

Les hypothèses suivantes constituent la base de la modélisation mathématique :

- (1) La dalle du pont est modélisée par une plaque rectangulaire orthotrope, multi travées, continue sur des appuis élastiques ponctuels, voir figure IV.1;
- (2) Le pont a un comportement élastique linéaire et les effets secondaires (cisaillement et inertie de rotation) sont négligés ;
- (3) Les appuis intermédiaires sont linéaires, élastiques et orthogonaux;
- (4) Comme les dimensions (longueur et largeur) du pont sont beaucoup plus grandes par rapport à son épaisseur, la théorie des plaques minces est utilisée.

Le pont est modélisé par une plaque mince orthotrope à trois travées (figure IV.1) supporté par des appuis élastiques de raideur K dans la direction longitudinale et transversale.

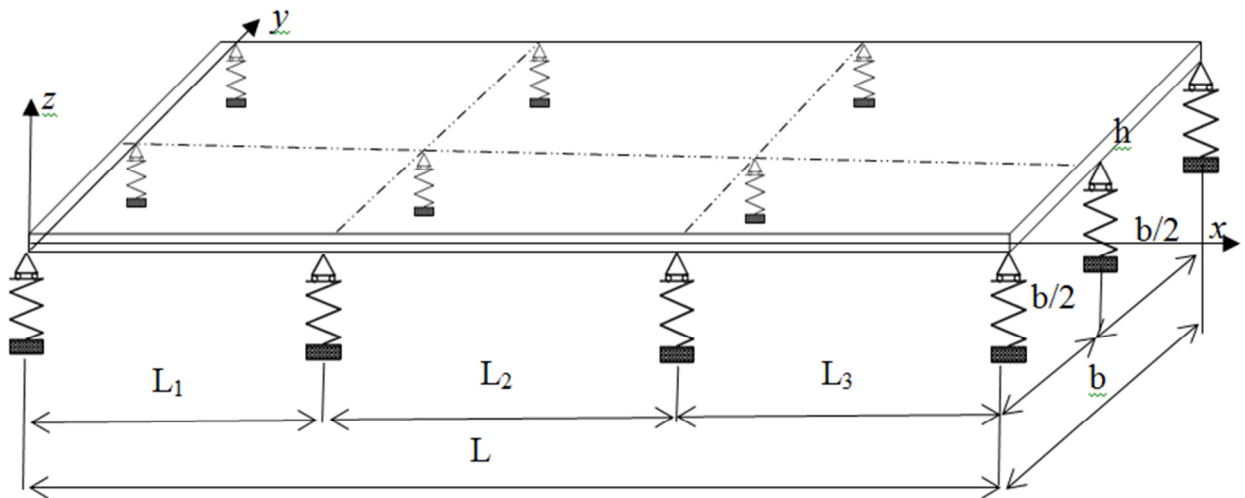


Figure IV-1 Pont modélisé par une plaque mince orthotrope supporté par des appuis élastiques ponctuels, à trois travées.

IV.3 DÉTERMINATION DES FRÉQUENCES PROPRES ET DES DÉFORMÉES PROPRES

Pour déterminer les fréquences et les déformées propres du pont, on résout l'équation de mouvement en vibration libre sans amortissement et sur la base des hypothèses (1), (2) et (4). L'équation du mouvement du pont en vibration libre peut être écrite sous la forme suivante :

$$\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (IV.1)$$

En vibration libre, le déplacement vertical du pont est exprimé par:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \phi_{ij}(x, y) e^{j\omega_{ij}t} \quad (IV.2)$$

En remplaçant l'expression (IV.2) dans l'équation (IV.1), on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \left[-\bar{m} \omega_{ij}^2 \phi_{ij}(x, y) + D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} \right] e^{j\omega_{ij}t} = 0 \quad (IV.3)$$

En résolvant l'équation spatiale suivante, on détermine les modes propres du pont:

$$D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} - \bar{m} \cdot \omega_{ij}^2 \cdot \phi_{ij}(x, y) = 0 \quad (IV.4)$$

Nous considérons que selon la direction x , les déformées propres du pont sont composées de deux fonctions : $\varphi_i(x)$ appliquée sur les appuis élastiques et $\Omega(x)$ appliquée sur la partie libre.

$\varphi_i(x)$ est la déformée propre d'une poutre continue sur des appuis élastiques ponctuels appliquée pour $y=0, y=b/2$ et $y=b$ et $\Omega(x)$ est la déformée propre d'une poutre libre - libre appliquée sur toute la largeur du pont sauf aux points des appuis élastiques ponctuels ($y=0, y=b/2$ et $y=b$). Les déformées propres selon y sont présentées par deux fonctions $h_j(y)$ et $H_j(y)$ vérifiant respectivement les conditions aux limites d'une plaque aux bords libres $y = 0$ et $y = b$ et une poutre à deux travées égales ($b/2$) supportée par des appuis élastiques ponctuels à ($y=0, y=b/2$ et $y=b$).

Les déformées propres du pont sur appuis élastiques peuvent s'écrire comme suit :

$$\phi_{ij}(x, y) = \begin{cases} \varphi_i(x) \cdot \begin{cases} h_j(y) \\ H_j(y) \end{cases} \\ \Omega_i(x) \cdot \begin{cases} h_j(y) \\ H_j(y) \end{cases} \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

Ces fonctions de déformées propres sont définies en fonction de x et y dans les domaines suivants:

$$\begin{aligned} \varphi_i(x), \quad \forall \begin{cases} y = \left\{ 0, \frac{b}{2}, b \right\} \\ x \in [0, L] \end{cases} & \rightarrow \text{Déformée d'une poutre appui-appui} \\ & \text{(élastique)} \\ \Omega_i(x), \quad \forall \begin{cases} y \in]0, \frac{b}{2}[\wedge]\frac{b}{2}, b[\\ x \in [0, L] \end{cases} & \rightarrow \text{Déformée d'une poutre libre-libre} \\ & \text{(IV.6)} \\ h_j(y), \quad \forall \begin{cases} x \in]0, L_1[\\ \wedge]L_1, L_1 + L_2[\\ \wedge]L_1 + L_2, L[\\ y \in [0, b] \end{cases} & \rightarrow \text{Déformée d'une poutre libre-libre} \\ & \text{(conditions aux limites d'une plaque)} \\ H_j(y), \quad \forall \begin{cases} x = \{0, L_1, L_1 + L_2, L\} \\ y \in [0, b] \end{cases} & \rightarrow \text{Déformée d'une poutre appui-appui} \\ & \text{(élastique)} \end{aligned}$$

IV.3.1 Détermination de la fonction $\varphi_i(x)$

Pour déterminer les fréquences et les déformées propres d'une poutre continue (multi travées) figure IV.2, il faut déterminer les fréquences et les déformées propres pour chaque travée avec

la prise en compte des conditions aux limites et de continuités aux appuis élastiques intermédiaires. L'expression de la déformée propre en vibration transversale pour chaque travée i est donnée par:

$$\varphi_i(x) = A_i \cdot \sin(k \cdot x) + B_i \cdot \cos(k \cdot x) + C_i \cdot \text{sh}(k \cdot x) + D_i \cdot \text{ch}(k \cdot x), \quad i = 1..r \quad (\text{IV.7})$$

Avec r le nombre de travée constituant le pont.

Un appui élastique est souvent représenté par un ressort, car son comportement est similaire. La loi de comportement qui régit l'appui élastique traduit la proportionnalité entre le déplacement d'un point et l'action de contact, donc sa raideur peut être exprimée par l'expression suivante :

$$K = -\frac{F_{\text{Réaction}}}{w} \quad (\text{IV.8})$$

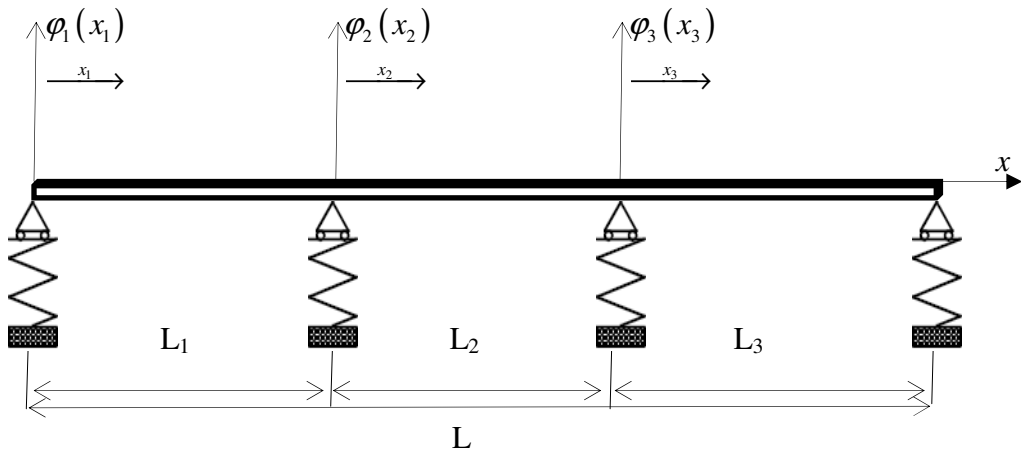


Figure IV-2 Pont modélisé par une poutre continue à trois travées sur des appuis élastiques.

Afin de déterminer les constantes d'intégration A_i , B_i , C_i et D_i , nous appliquons les conditions aux limites. L'effort tranchant sur les extrémités du pont en $x=0$ et $x=L$. Dans le cas général d'un pont avec un nombre de travées supérieur à 3, on note l'extrémité de la dernière travée L_r :

$$E.I \frac{d^3 \varphi_1(x_1)}{dx_1^3} \Big|_{x_1=0} = -K \cdot \varphi_1(x_1 = 0) \quad (\text{IV.9})$$

$$E.I \frac{d^3 \varphi_r(x_r)}{dx_r^3} \Big|_{x_r=L_r} = K \cdot \varphi_r(x_r = L_r)$$

Posons $R = \frac{K}{E.I}$ comme le paramètre d'appui.

Les conditions aux limites (IV.9) deviennent :

$$\frac{d^3 \varphi_1(x_1)}{dx_1^3} \Big|_{x_1=0} = -R \cdot \varphi_1(x_1 = 0) \quad (\text{IV.10})$$

$$\frac{d^3 \varphi_r(x_r)}{dx_r^3} \Big|_{x_r=L_r} = R \cdot \varphi_r(x_r = L_r)$$

Le moment fléchissant est nul aux bords extérieurs du pont :

$$\begin{cases} \left. \frac{d^2 \varphi_1(x_1)}{dx_1^2} \right|_{x_1=0} = 0 \\ \left. \frac{d^2 \varphi_r(x_r)}{dx_r^2} \right|_{x_r=L_r} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.11})$$

Donc, on a quatre conditions aux limites pour les extrémités du pont selon sa longueur.

Pour les conditions de continuités sur tous les appuis élastiques intermédiaires ; quatre types de conditions doivent être imposés. Il s'agit de la continuité de l'effort tranchant, moment fléchissant, déformée propre et la pente.

Les continuités de l'effort tranchant et le moment fléchissant sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \left. \frac{d^3 \varphi_i(x_i)}{dx_i^3} \right|_{x=L_i} = (-1)^{i+1} \cdot R \cdot \varphi_i(x_i=L_i) + \frac{d^3 \varphi_{i+1}(x_{i+1}=0)}{dx_{i+1}^3} \\ \left. \frac{d^2 \varphi_i(x_i)}{dx_i^2} \right|_{x=L_i} = \frac{d^2 \varphi_{i+1}(x_{i+1}=0)}{dx_{i+1}^2} = 0 \end{cases} \quad (i=1 \dots r-1) \quad (\text{IV.12})$$

Deux autres continuités doivent être imposées et vérifier pour assurer les continuités de la déflexion et la pente.

$$\begin{cases} \varphi_i(x_i)|_{x=L_i} = \varphi_{i+1}(x_{i+1})|_{x_{i+1}=0} , \\ \left. \frac{d\varphi_i(x_i)}{dx_i} \right|_{x=L_i} = \left. \frac{d\varphi_{i+1}(x_{i+1})}{dx_{i+1}} \right|_{x_{i+1}=0} \end{cases} \quad (i=1 \dots r-1) \quad (\text{IV.13})$$

Nous avons alors $4x(r-1)$ conditions de continuité qui seront ajoutées aux quatre conditions aux limites. Nous aurons au total $4xr$ conditions aux limites et de continuités. Pour le cas du pont à trois travées que nous allons traiter dans ce chapitre, on aura 12 conditions, qui permettent d'engendrer 12 équations à 12 inconnus.

La généralisation de l'expression de la déformée propre présentée par l'expression (IV.7), pour les trois travées du pont peut être présentée sous la forme suivante :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} = A_1 \cdot \sin(k_i \cdot x) + B_1 \cdot \cos(k_i \cdot x) + C_1 \cdot sh(k_i \cdot x) + D_1 \cdot ch(k_i \cdot x) & , (0 \leq x \leq L_1) \\ = A_2 \cdot \sin(k_i \cdot (x - L_1)) + B_2 \cdot \cos(k_i \cdot (x - L_1)) + C_2 \cdot sh(k_i \cdot (x - L_1)) + D_2 \cdot ch(k_i \cdot (x - L_1)) & , (L_1 \leq x \leq L_1 + L_2) \\ = A_3 \cdot \sin(k_i \cdot (x - L_1 - L_2)) + B_3 \cdot \cos(k_i \cdot (x - L_1 - L_2)) + C_3 \cdot sh(k_i \cdot (x - L_1 - L_2)) + D_3 \cdot ch(k_i \cdot (x - L_1 - L_2)) & , (L_1 + L_2 \leq x \leq L) \end{cases} \quad (IV.14)$$

En appliquant les conditions aux limites (IV.10) et (IV.11) et les conditions de continuités (IV.12) et (IV.13) sur les déformées propres (IV.14), on obtient un système de 12 équations avec 12 constantes d'intégrations $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, A_3, B_3, C_3$ et D_3 , qu'on peut le mettre sous la forme matricielle suivante :

$$[B]_{4xr,4xr} \cdot \{A\}_{4xr} = \{0\} \quad (IV.15)$$

La Matrice $[B]$ représente la matrice des coefficients $\{A_i, B_i, C_i$ et D_i avec $i=1, r\}$ dont les éléments sont définis comme suit :

Première travée :

$$\begin{aligned} B_{1,1} &= -k_i^3, & B_{1,2} &= R, \\ B_{1,3} &= k_i^3, & B_{1,4} &= R, \\ B_{2,2} &= -1, & B_{2,4} &= 1 \end{aligned}$$

Dernière travée :

$$\begin{aligned} B_{4xr-1,4xr-3} &= -k_i^3 \cos(k_i \cdot L_r) + (-1)^r R \cdot \sin(k_i \cdot L_r), \\ B_{4xr-1,4xr-2} &= k_i^3 \sin(k_i \cdot L_r) + (-1)^r R \cdot \cos(k_i \cdot L_r) \\ B_{4xr-1,4xr-1} &= k_i^3 ch(k_i \cdot L_r) + (-1)^r R \cdot sh(k_i \cdot L_r) \\ B_{4xr-1,4xr} &= k_i^3 sh(k_i \cdot L_r) + (-1)^r R \cdot ch(k_i \cdot L_r), \\ B_{4xr,4xr-3} &= -\sin(k_i \cdot L_r) \quad , \\ B_{4xr,4xr-2} &= -\cos(k_i \cdot L_r) \\ B_{4xr,4xr-1} &= sh(k_i \cdot L_r) \quad , \\ B_{4xr,4xr} &= ch(k_i \cdot L_r) \end{aligned}$$

Travées intermédiaires :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 B_{M+3,M+1} = -k_i^3 \cos(k_i.L_m) + (-1)^m R.\sin(k_i.L_m), \\
 B_{M+3,M+2} = k_i^3 \sin(k_i.L_m) + (-1)^m R.\cos(k_i.L_m) \\
 B_{M+3,M+3} = k_i^3 ch(k_i.L_m) + (-1)^m R.sh(k_i.L_m), \\
 B_{M+3,M+4} = k_i^3 sh(k_i.L_m) + (-1)^m R.ch(k_i.L_m) \\
 B_{M+3,M+5} = k_i^3 \quad , \\
 B_{M+3,M+7} = -k_i^3 \\
 \\
 B_{M+4,M+1} = -\sin(k_i.L_m), \\
 B_{M+4,M+2} = -\cos(k_i.L_m), \\
 B_{M+4,M+3} = sh(k_i.L_m), \\
 B_{M+4,M+4} = ch(k_i.L_m) \\
 B_{M+4,M+6} = 1, \\
 B_{M+4,M+8} = -1 \\
 \\
 B_{M+5,M+1} = \sin(k_i.L_m), \\
 B_{M+5,M+2} = \cos(k_i.L_m), \\
 B_{M+5,M+3} = sh(k_i.L_m), \\
 B_{M+5,M+4} = ch(k_i.L_m) \\
 B_{M+5,M+6} = -1 \quad , \\
 B_{M+5,M+8} = -1 \\
 \\
 B_{M+6,M+1} = \cos(k_i.L_m), \\
 B_{M+6,M+2} = -\sin(k_i.L_m), \\
 B_{M+6,M+3} = ch(k_i.L_m), \\
 B_{M+6,M+4} = sh(k_i.L_m) \\
 B_{M+6,M+5} = -1, \\
 B_{M+6,M+7} = -1
 \end{array} \right.$$

(IV.16)

avec $(M = 4(m-1)), (m = 1, r-1)$

Les valeurs du nombre d'onde k_i sont déterminées en cherchant les valeurs qui annulent le déterminant de la matrice des coefficients $[B]$. L'équation caractéristique de la matrice $[B]$ (appelée aussi équation de fréquence) est obtenue en utilisant le logiciel Mathematica. Vu sa complexité, nous présentons son expression en annexe (A1.1). Pour la résoudre, nous avons intégré la méthode du *RegulaFalsi* dans le logiciel CDPR développé précédemment.

L'équation (A1.1) dépend des longueurs des travées et du paramètre d'appui des appuis élastiques.

Pour une solution non triviale et afin de déterminer les constantes $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, A_3, B_3, C_3$ et D_3 du système d'équations (IV.15), on normalise la première constante $A_1=1$, ce dernier système se simplifie de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} R & k_i^3 & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{3,2} & B_{3,3} & B_{3,4} & k_i^3 & 0 & -k_i^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{4,2} & B_{4,3} & B_{4,4} & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{5,2} & B_{5,3} & B_{5,4} & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{6,2} & B_{6,3} & B_{6,4} & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{7,5} & B_{7,6} & B_{7,7} & B_{7,8} & k_i^3 & 0 & -k_i^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{8,5} & B_{8,6} & B_{8,7} & B_{8,8} & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & B_{9,5} & B_{9,6} & B_{9,7} & B_{9,8} & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & B_{10,5} & B_{10,6} & B_{10,7} & B_{10,8} & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{11,9} & B_{11,10} & B_{11,11} & B_{11,12} \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \\ A_3 \\ B_3 \\ C_3 \\ D_3 \end{cases} = \begin{cases} k_i^3 \\ 0 \\ -B_{1,3} \\ -B_{1,4} \\ -B_{1,5} \\ -B_{1,6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

La détermination de ces constantes est obtenue par la méthode des pivots partiels de Gauss. Une fois ces constantes sont déterminées, ils seront injectés dans les expressions des déformées propres (IV.14). Pour simplifier l'équation différentielle du mouvement du pont (voir chapitre II, équation (II.9)), on présente dans ce qui suit les dérivées seconde et quatrième de $\varphi_i(x)$:

$$\varphi_i''(x_i) = \begin{cases} = -k^2 \cdot \begin{pmatrix} A_1 \cdot \sin(k \cdot x) + B_1 \cdot \cos(k \cdot x) \\ -C_1 \cdot \text{sh}(k \cdot x) - D_1 \cdot \text{ch}(k \cdot x) \end{pmatrix} \\ \text{Pour } 0 \leq x \leq L_1 \\ \\ = -k^2 \cdot \begin{pmatrix} A_2 \cdot \sin(k \cdot (x - L_1)) + B_2 \cdot \cos(k \cdot (x - L_1)) \\ -C_2 \cdot \text{sh}(k \cdot (x - L_1)) - D_2 \cdot \text{ch}(k \cdot (x - L_1)) \end{pmatrix} \\ \text{Pour } L_1 \leq x \leq L_2 \\ \\ = -k^2 \cdot \begin{pmatrix} A_3 \cdot \sin(k \cdot (x - L_1 - L_2)) + B_3 \cdot \cos(k \cdot (x - L_1 - L_2)) \\ -C_3 \cdot \text{sh}(k \cdot (x - L_1 - L_2)) - D_3 \cdot \text{ch}(k \cdot (x - L_1 - L_2)) \end{pmatrix} \\ \text{Pour } (L_1 + L_2) \leq x \leq L \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

$$\varphi_i'''(x) = \begin{cases} = k^4 \cdot \begin{pmatrix} A_1 \cdot \sin(k \cdot x) + B_1 \cdot \cos(k \cdot x) \\ + C_1 \cdot \text{sh}(k \cdot x) + D_1 \cdot \text{ch}(k \cdot x) \end{pmatrix} \\ \text{Pour } 0 \leq x \leq L_1 \\ \\ = k^4 \cdot \begin{pmatrix} A_2 \cdot \sin(k \cdot (x - L_1)) + B_2 \cdot \cos(k \cdot (x - L_1)) \\ + C_2 \cdot \text{sh}(k \cdot (x - L_1)) + D_2 \cdot \text{ch}(k \cdot (x - L_1)) \end{pmatrix} \\ \text{Pour } L_1 \leq x \leq L_2 \\ \\ = k^4 \cdot \begin{pmatrix} A_3 \cdot \sin(k \cdot (x - L_1 - L_2)) + B_3 \cdot \cos(k \cdot (x - L_1 - L_2)) \\ + C_3 \cdot \text{sh}(k \cdot (x - L_1 - L_2)) + D_3 \cdot \text{ch}(k \cdot (x - L_1 - L_2)) \end{pmatrix} \\ \text{Pour } (L_1 + L_2) \leq x \leq L \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

La dérivée quatrième peut s'écrire en fonction de la déformée propre :

$$\varphi_i'''(x) = k^4 \cdot \varphi_i(x) \quad (\text{IV.20})$$

Pour résoudre ce problème, on utilise la méthode d'estimation locale, présentée au chapitre II.

IV.3.2 Détermination de la fonction $\Omega_i(x)$

Afin de déterminer les déformées propres $\Omega_i(x)$ sur toute la largeur et la longueur du pont en dehors des appuis élastiques, nous modélisons cette déformée comme celle d'une poutre libre-libre, voir figure (IV.3). La fonction des déformées $\Omega_i(x)$ propres est sous la forme suivante:

$$\Omega_i(x) = C_i \cdot \sin(k_i \cdot x) + D_i \cdot \cos(k_i \cdot x) + E_i \cdot \text{sh}(k_i \cdot x) + F_i \cdot \text{ch}(k_i \cdot x) \quad (\text{IV.21})$$

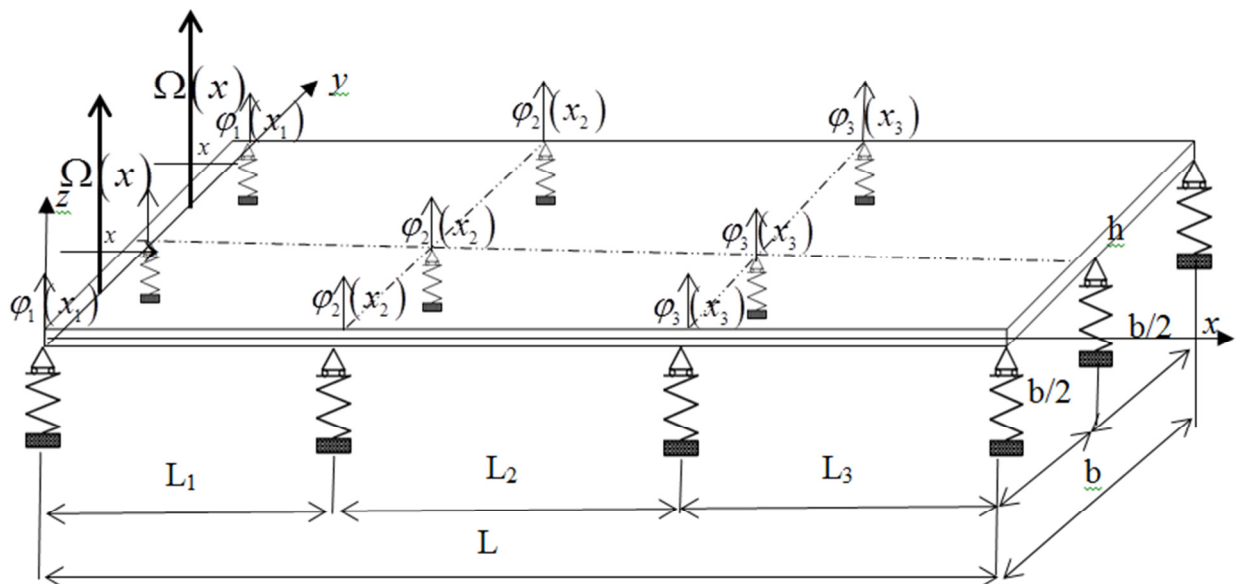


Figure IV-3 Répartition des fonctions des déformées propres sur la direction longitudinale

Les conditions aux limites d'une poutre libre-libre sont le moment fléchissant et l'effort tranchant nuls:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{d^2 \Omega_i(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 \Omega_i(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 \\ \left. \frac{d^3 \Omega_i(x)}{dx^3} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^3 \Omega_i(x)}{dx^3} \right|_{x=L} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{IV.22})$$

En appliquant ces conditions à l'expression de la déformée propre $\Omega_i(x)$ (IV.21), on obtient:

$$\Omega_i(x) = \sin(k_i \cdot x) + sh(k_i \cdot x) + \theta \cdot (\cos(k_i \cdot x) + ch(k_i \cdot x))$$

$$\text{La fonction est définie sur : } x \in [0, L], y \in \left] 0, \frac{b}{2} \left[\cup \right] \frac{b}{2}, b \left[\quad (\text{IV.23})$$

$$\text{Avec : } \theta = \frac{-(\cos(k_i \cdot L) + sh(k_i \cdot L))}{ch(k_i \cdot L) - \cos(k_i \cdot L)}$$

Les déformées propres le long du pont peuvent être regroupées sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_i(x) \left\{ \begin{array}{l} = A_1 \cdot \sin(k_i \cdot x) + B_1 \cdot \cos(k_i \cdot x) + C_1 \cdot sh(k_i \cdot x) + D_1 \cdot ch(k_i \cdot x) \\ \text{Pour } (0 \leq x \leq L_1) \\ = A_2 \cdot \sin(k_i \cdot (x - L_1)) + B_2 \cdot \cos(k_i \cdot (x - L_1)) + C_2 \cdot sh(k_i \cdot (x - L_1)) \\ + D_2 \cdot ch(k_i \cdot (x - L_1)) \\ \text{Pour } (L_1 \leq x \leq L_1 + L_2) \\ = A_3 \cdot \sin(k_i \cdot (x - L_1 - L_2)) + B_3 \cdot \cos(k_i \cdot (x - L_1 - L_2)) \\ + C_3 \cdot sh(k_i \cdot (x - L_1 - L_2)) + D_3 \cdot ch(k_i \cdot (x - L_1 - L_2)) \\ \text{Pour } (L_1 + L_2 \leq x \leq L) \end{array} \right. \\ \Omega_i(x) \left\{ \begin{array}{l} = \sin(k_i \cdot x) + sh(k_i \cdot x) + \theta \cdot (\cos(k_i \cdot x) + ch(k_i \cdot x)) \\ \text{Pour } x \in [0, L], y \in \left] 0, \frac{b}{2} \left[\cup \right] \frac{b}{2}, b \left[\end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{IV.24})$$

IV.3.3 Détermination de la fonction $H_j(y)$

La fonction des déformées propres $H_j(y)$ appliquée pour toute la largeur du pont, définie dans le domaine spatial suivant: $(y \in [0, b] \wedge x = \{0, L_1, L_1 + L_2, L\})$.

Cette déformée est celle d'une poutre continue à deux travées égales ($b/2$) supportée par des appuis élastiques ponctuels (Figure IV.4).

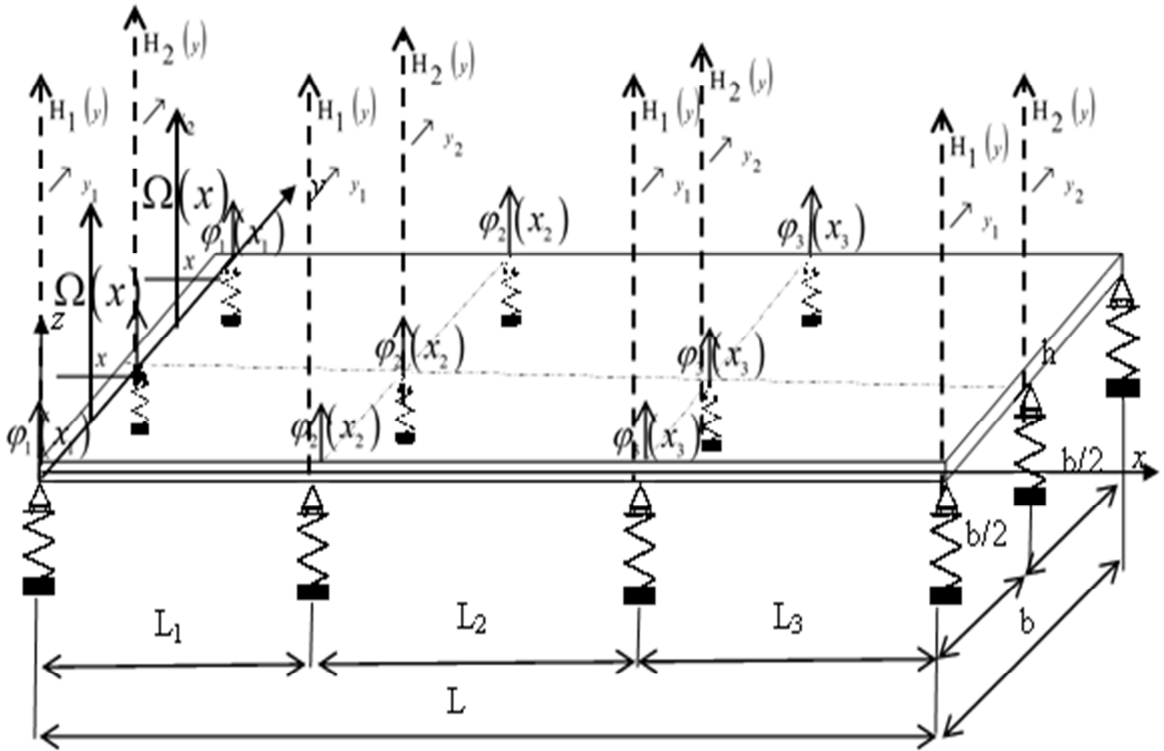


Figure IV-4 Répartition des fonctions des déformées propres sur la direction transversale

Pour simplifier la résolution, nous décomposons $H_j(y)$ en deux fonctions, la première est définie entre $y_1=y=0$ et $y_1=y=b/2$ est notée $H_1(y_1)$ et la deuxième est définie entre $y_2=0$ correspondant à $y=b/2$ et $y_2=b/2$ correspondant à $y=b$, notée $H_2(y_2)$. Les conditions aux limites aux bords du pont sont :

L'effort tranchant en $y=0$ et $y=b$:

$$\left. \frac{d^3 H_1(y_1)}{dy_1^3} \right|_{y_1=0} = -R.H_1(y_1)|_{y_1=0} \tag{IV.25}$$

$$\left. \frac{d^3 H_2(y_2)}{dy_2^3} \right|_{y_2=b/2} = R.H_2(y_2)|_{y_2=b/2}$$

Le moment fléchissant en $y=0$ et $y=b$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{d^2 H_1(y_1)}{dy_1^2} \right|_{y_1=0} = 0 \\ \left. \frac{d^2 H_2(y_2)}{dy_2^2} \right|_{y_2=b/2} = 0 \end{array} \right. \tag{IV.26}$$

Nous avons alors quatre conditions aux limites.

Pour les conditions de continuité sur tous les appuis élastiques intermédiaires, nous avons la continuité de l'effort tranchant, le moment fléchissant, la déformée propre et la pente.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^3 H_1(y_1)}{dy_1^3} \Big|_{y_1=b/2} = R.H_1(y_1) \Big|_{y_1=b/2} + \frac{d^3 H_2(y_2)}{dy_2^3} \Big|_{y_2=0} \\ \frac{d^2 H_1(y_1)}{dy_1^2} \Big|_{y_1=b/2} = \frac{d^2 H_2(y_2)}{dy_2^2} \Big|_{y_2=0} \\ H_1(y_1) \Big|_{y_1=b/2} = H_2(y_2) \Big|_{y_2=0} , \\ \frac{dH_1(y_1)}{dy_1} \Big|_{y_1=b/2} = \frac{dH_2(y_2)}{dy_2} \Big|_{y_2=0} \end{array} \right. \quad (IV.27)$$

Donc, on a quatre conditions de continuités qui sont ajoutées aux quatre conditions aux limites. Nous aurons alors huit équations à huit inconnues.

Les expressions des déformées propres pour les deux travées respectivement sont :

Première travée :

$$H_1(y_1) = A_1 \cdot \sin(k_i \cdot y_1) + B_1 \cdot \cos(k_i \cdot y_1) + C_1 \cdot sh(k_i \cdot y_1) + D_1 \cdot ch(k_i \cdot y_1) \quad (IV.28)$$

Seconde travée :

$$H_2(y_2) = A_2 \cdot \sin(k_i \cdot y_2) + B_2 \cdot \cos(k_i \cdot y_2) + C_2 \cdot sh(k_i \cdot y_2) + D_2 \cdot ch(k_i \cdot y_2) \quad (IV.29)$$

En appliquant les conditions aux limites (IV.25) et (IV.26) et les conditions de continuités (IV.27) sur les déformées propres (IV.28) et (IV.29), on obtient un système de 8 équations avec 8 constantes d'intégrations $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2$ et D_2 . Après sa résolution on obtient les expressions des déformées propres suivantes :

$$H_j(y) = \left\{ \begin{array}{l} = \sin(k_i \cdot y) + B_1 \cdot \cos(k_i \cdot y) + C_1 \cdot sh(k_i \cdot y) + D_1 \cdot ch(k_i \cdot y) \\ \quad \text{Pour } y \in [0, b/2], x = \{0, L_1, L_1 + L_2, L\} \\ = A_2 \cdot \sin(k_i \cdot (y - \frac{b}{2})) + B_2 \cdot \cos(k_i \cdot (y - \frac{b}{2})) \\ \quad + C_2 \cdot sh(k_i \cdot (y - \frac{b}{2})) + D_2 \cdot ch(k_i \cdot (y - \frac{b}{2})) \\ \quad \text{Pour } y \in [b/2, b], x = \{0, L_1, L_1 + L_2, L\} \end{array} \right. \quad (IV.30)$$

IV.3.4 Détermination de la fonction $h_j(y)$

Les déformées propres du pont selon sa largeur $h_j(y)$ sont définis dans les domaines spatiaux suivants :

$$h_j(y), \quad \forall \begin{cases} x \in]0, L_1[\\ \quad \wedge]L_1, L_1 + L_2[\\ \quad \wedge]L_1 + L_2, L[\\ y \in [0, b] \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Déformée d'une poutre libre-libre} \\ \text{(conditions aux limites d'une plaque)} \end{array} \quad (\text{IV.31})$$

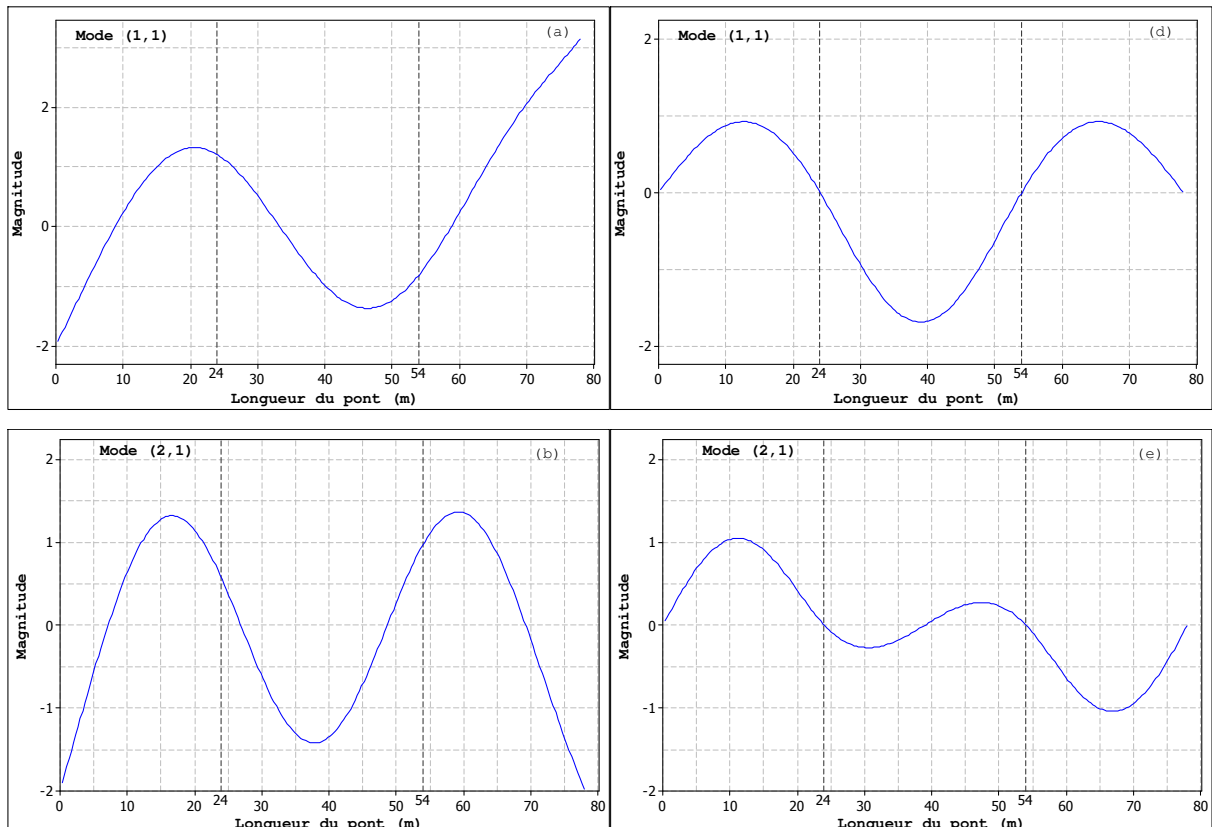
La détermination de $h_j(y)$ est la même que celle présentée au chapitre II.

Enfin, le regroupement de toutes les déformées propres précédentes, nous donne l'expression finale de la déformée du pont sur des appuis élastiques ponctuels suivante :

$$\phi_{ij}(x, y) = \begin{cases} \varphi_i(x) \cdot \begin{Bmatrix} H_j(y) \\ h_j(y) \end{Bmatrix} \\ \Omega_i(x) \cdot \begin{Bmatrix} H_j(y) \\ h_j(y) \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (\text{IV.32})$$

IV.3.5 Déformées propres monodimensionnelles

Nous présentons sur la figure IV.5 les déformées propres longitudinales pour les deux type de conditions aux limites, la première d'un pont supporté par des appuis élastiques ponctuels et la deuxième du même pont supporté par des appuis rigides.



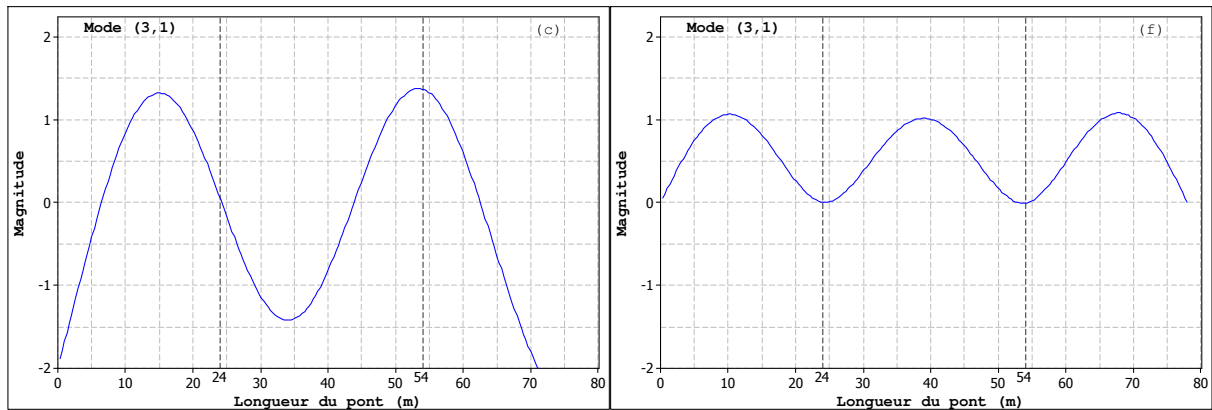


Figure IV-5 Les déformées propres des trois premiers modes (a), (b) et (c) : appuis élastiques, (d), (e) et (f) : appuis rigides

Pour le pont sur appuis élastiques, les déplacements aux points d'appuis ne sont pas nuls, alors que pour le pont sur appuis rigides ils sont nuls, donc notre formulation des déformées propres concernant le pont sur appuis élastiques est correcte.

IV.4 Exemples de validation : Pont symétrique

Pour valider la modélisation présentée ci-dessus, nous allons utiliser les données de l'exemple du pont du chapitre II, paragraphe II.3.1.

Nous présentons dans ce qui suit deux exemples de validations, le premier pour un pont libre-libre simulé sous le logiciel ANSYS et le deuxième exemple pour un pont à trois travées avec des appuis élastiques de raideurs équivalentes à des appuis rigides.

IV.4.1 Cas d'un pont libre-libre, simulé sous ANSYS

Un pont de longueur $L=78m$ est simulé sous le logiciel ANSYS avec des conditions aux limites libre-libre. Un maillage de 312×60 éléments Shell63 a été utilisé et la convergence a été vérifiée.

Les résultats numériques des 8 premières fréquences propres, obtenues par le logiciel ANSYS sont :

Mode 1 : **1.094Hz**, mode 2 : **1.346Hz**, mode 3 : **2.923Hz**, mode 4 : **3.015Hz**, mode 5 : **3.367Hz**, mode 6 : **4.322Hz**, mode 7 : **5.041Hz** et mode 8 : **5.912Hz**.

Les déformées propres obtenus par ANSYS sont présentées sur la figure IV-6.

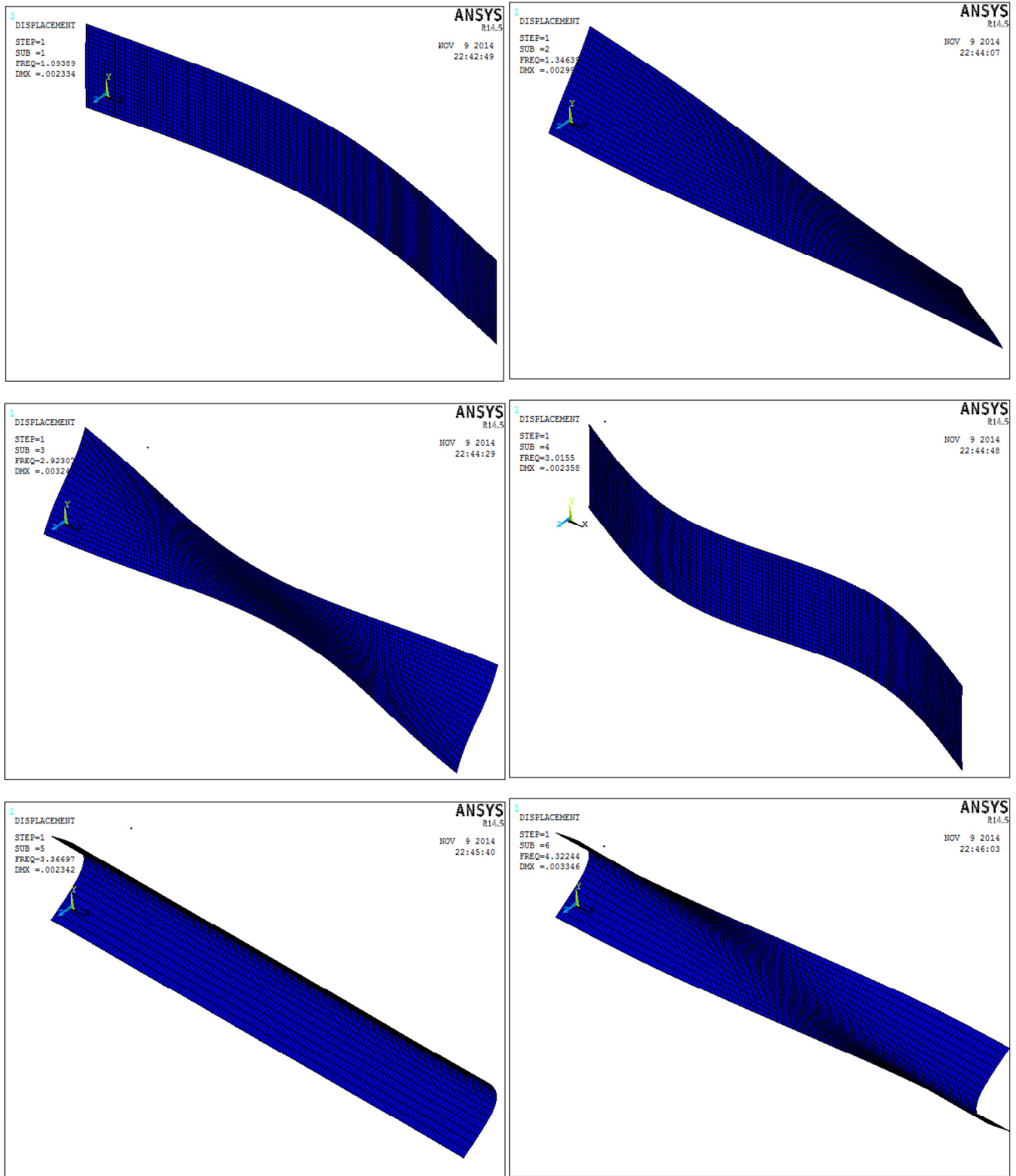


Figure IV-6 Les six premières déformées propres obtenues par ANSYS cas libre-libre

IV.4.2 Cas d'un pont à trois travées supporté par des appuis élastiques sans raideur

Pour valider notre modélisation avec celle de la méthode des éléments finis, on introduit une raideur $K=0$ N/m pour les appuis élastiques ponctuels. Les caractéristiques du pont sont celles du chapitre II ($L=78$ m, $L_1=L_3=24$ m et $L_2=30$ m).

Nous présentons tous d'abord les valeurs des nombres d'ondes k_i et k_{iESL} dans le tableau IV-1.

Tableau IV-1 Valeurs de k_i et k_{iESL} du pont symétrique pour $K=0$ N/m

i	1	2	3	4	5
k_i	0.0606	0.1007	0.1410	0.1812	0.2215
k_{iESL}	0.0693	0.0440	0.0850	0.1365	0.1938

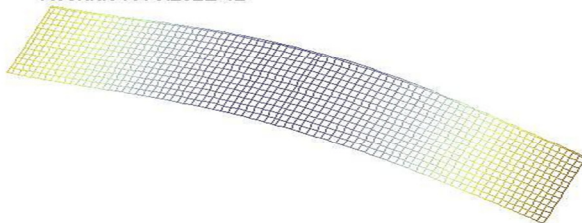
Le tableau IV-2 présente les résultats des huit (08) premières fréquences propres obtenus par la présente modélisation et ceux obtenus par le logiciel ANSYS. La comparaison montre une bonne concordance surtout pour les modes de flexion.

Tableau IV-2 Les huit premiers modes de vibration du pont symétrique ($K=0$ N/m)

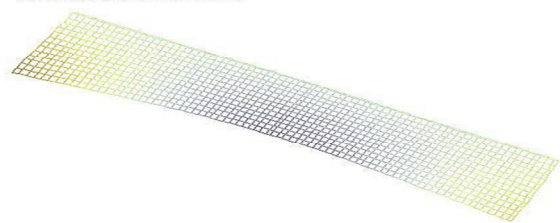
Ordre mode	Méthode d'estimation locale	ANSYS	Erreur en %
(1,1)	1.094	1.094	0.00
(1,2)	1.480	1.346	9.05
(1,3)	2.459	2.923	18.87
(2,1)	3.016	3.015	0.03
(2,2)	3.550	3.367	5.15
(2,3)	4.526	4.322	4.51
(1,4)	5.750	5.041	12.33
(3,1)	5.913	5.912	0.02

Sur la figure IV.7, nous présentons les six premières déformées propres pour une raideur nulle des appuis élastiques ponctuels obtenues par la présente méthode.

Mode(1,1) => frequency: 1.094Hz
Residue R : 9.252E-12



Mode(1,2) => frequency: 1.480Hz
Residue R : 5.192E-06



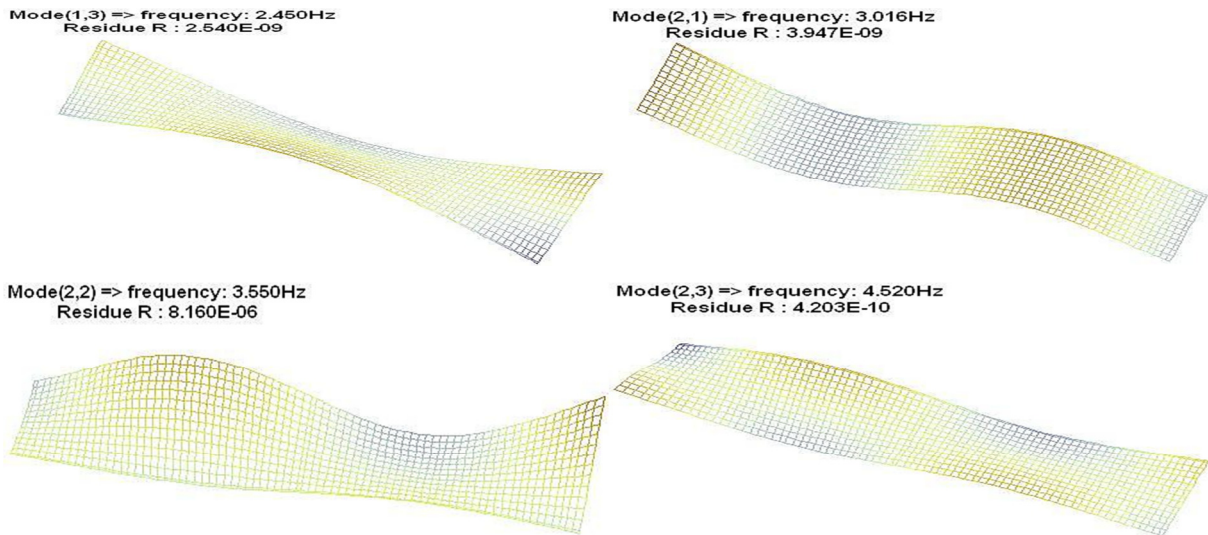


Figure IV-7 Les six premières déformées propres du pont symétrique obtenues par CDPR ($K=0N/m$)

IV.4.3 Cas d'un pont à trois travées supporté par des appuis élastiques avec une raideur équivalente à la raideur d'un appui rigide

Nous présentons ci-après les résultats des nombres d'ondes et des fréquences propres pour le même cas du pont précédent mais avec une raideur des appuis élastiques égale à $K=8 \cdot 10^{10}$ N/m équivalente à la raideur d'un appui rigide. Ces résultats seront comparés avec ceux du chapitre II paragraphe II.3.1.

Nous présentons tous d'abord les valeurs des nombres d'ondes k_i et k_{iESL} dans le tableau IV-3.

Tableau IV-3 Valeurs de k_i et k_{iESL} du pont symétrique ($K=8 \cdot 10^{10}$ N/m)

i	1	2	3	4	5
k_i	0.1178	0.1455	0.1614	0.2304	0.2734
k_{iESL}	0.1104	0.1371	0.1506	0.2186	0.2609

Les résultats des fréquences propres sont en parfaite concordance, l'erreur ne dépasse pas 1 %, voir tableau IV-4, ce qui valide notre modélisation.

Tableau IV-4 Les six premiers modes de vibration du pont symétrique ($K=8 \cdot 10^{10}$ N/m)

Ordre mode	Méthode d'estimation locale	Simplement appuyé ANSYS	Erreur en %

(1,1)	4.13	4.13	0.00
(1,2)	5.44	5.45	0.18
(2,1)	6.30	6.30	0.00
(2,2)	7.62	7.59	0.39
(3,1)	7.76	7.76	0.00
(1,3)	8.88	8.79	1.01
(3,2)	8.97	9.00	0.33
(2,3)	11.35	11.23	1.06

IV.5 Exemple de validation : Pont non symétrique

Pour valider la modélisation présentée ci-dessus dans le cas d'un pont non symétrique, nous allons utiliser les données de l'exemple du pont du chapitre II, paragraphe II.3.2.

Deux exemples de validations, le premier pour un pont libre-libre avec une raideur d'appuis nul $K=0$ N/m et le deuxième exemple pour un pont à trois travées avec des appuis élastiques de raideurs équivalentes à des appuis rigides $K=8.10^{10}$ N/m.

Les longueurs des travées sont les suivantes : $L_1=20$ m, $L_2=32$ m et $L_3=26$ m.

IV.5.1 Cas raideur $K=0$ N/m

Sur le tableau IV-5, les valeurs de k_i sont présentées.

Tableau IV-5 Valeurs de k_i et k_{iESL} du pont non symétrique ($K=0$ N/m)

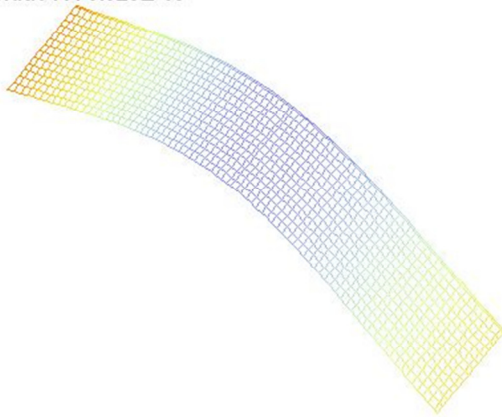
i	1	2	3	4	5
k_i	0.0606	0.10068	0.1410	0.1812	0.2215
k_{iESL}	0.0638	0.2353	0.1002	0.1814	0.1871

Le tableau IV-6 présente les résultats des huit (08) premières fréquences propres obtenus par la présente modélisation et ceux obtenus par le logiciel ANSYS, pour un pont non symétrique avec des raideurs d'appuis nuls. La comparaison montre une bonne concordance surtout pour les modes de flexion.

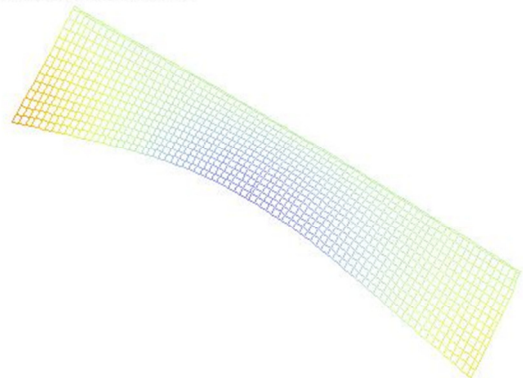
Tableau IV-6 Les six premiers modes de vibration du pont non symétrique ($K=0$ N/m)

Ordre mode	Méthode d'estimation locale	ANSYS	Erreur en %
(1,1)	1.093	1.094	0.09
(1,2)	1.483	1.346	9.24
(1,3)	2.461	2.923	18.77
(2,1)	3.017	3.015	0.07
(2,2)	3.325	3.367	1.26
(2,3)	4.512	4.322	4.21
(1,4)	5.753	5.041	12.38
(3,1)	5.916	5.912	0.07

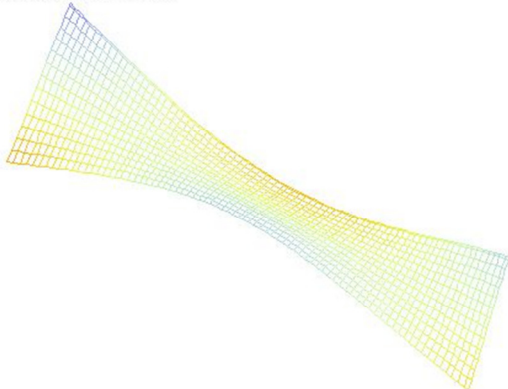
Mode(1,1) => frequency: 1.093Hz
Residue R : 3.528E-13



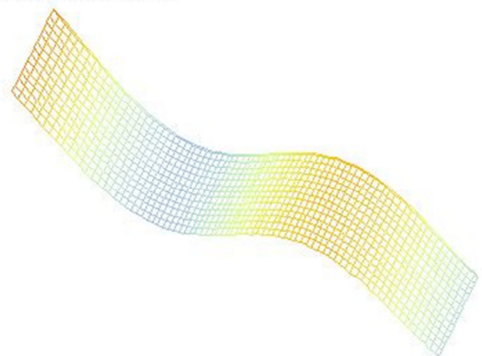
Mode(1,2) => frequency: 1.483Hz
Residue R : 9.955E-09



Mode(1,3) => frequency: 2.459Hz
Residue R : 1.542E-11



Mode(2,1) => frequency: 3.016Hz
Residue R : 1.545E-08



Mode(2,2) => frequency: 3.325Hz
Residue R : 3.092E-07

Mode(2,3) => frequency: 4.512Hz
Residue R : 1.487E-09

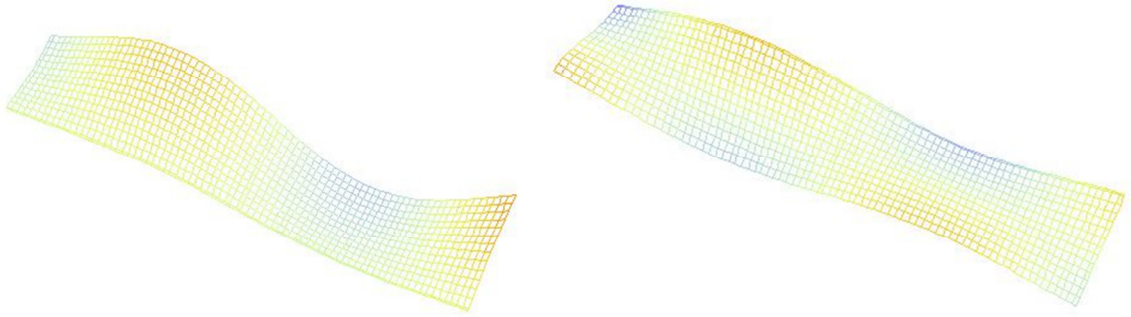


Figure IV-8 Les six premières déformées propres du pont non symétrique obtenues par CDP (K=0N/m)

IV.5.2 Cas raideur K=8.10¹⁰ N/m

De la même façon que dans le cas de pont symétrique, on compare les résultats de la présente modélisation avec ceux obtenus dans le chapitre II, cas du pont non symétrique.

On présente sur le tableau IV-7, les valeurs de k_i et k_{iESL} dans le cas du pont non symétrique.

Tableau IV-7 Valeurs de k_i et k_{iESL} pont non symétrique pour K=8.10¹⁰ N/m

i	1	2	3	4	5
k_i	0.11327	0.1421	0.1763	0.2212	0.2591
k_{iESL}	0.12444	0.1355	0.1545	0.1836	0.2064

Tableau IV-8 Les six premiers modes de vibration du pont non symétrique (K=8.10¹⁰ N/m)

Ordre mode	Méthode d'estimation locale	Simplement appuyé ANSYS	Erreur en %
(1,1)	3.81	3.81	0.00
(1,2)	5.11	5.06	0.98
(2,1)	6.04	6.04	0.00
(2,2)	7.08	7.21	-1.84
(1,3)	8.66	8.48	2.08
(3,1)	9.23	9.24	-0.11

(2,3)	10.25	10.5	-2.44
(3,2)	10.44	10.61	-1.63

Les résultats des fréquences propres sont en bonne concordance, l'erreur ne dépasse pas 0.5% pour les modes de flexion et 9% pour les modes d'ordre 2, voir tableau IV-8, ce qui valide notre modélisation.

IV.6 Analyse des résultats

Nous présentons sur la figure IV.8, les résultats de la superposition des fréquences propres d'un pont symétrique à trois travées, pour différentes valeurs de raideur des appuis élastiques, avec des paramètres d'appuis R variant de 0 à 0.15. Ces résultats sont comparés à ceux obtenus dans le cas d'un pont à trois travées symétrique et simplement appuyé du chapitre II. On constate bien que lorsque $R \xrightarrow{\text{tend vers } 0}$ le comportement du pont converge vers un pont libre-libre et quand $R \xrightarrow{>0} 0.15$ le comportement du pont converge vers un pont simplement appuyé.

De la figure IV.8, on note que le paramètre d'appui $R=0.15$ est une limite du comportement des appuis élastiques, au-delà, ces derniers auront un comportement d'appui rigide.

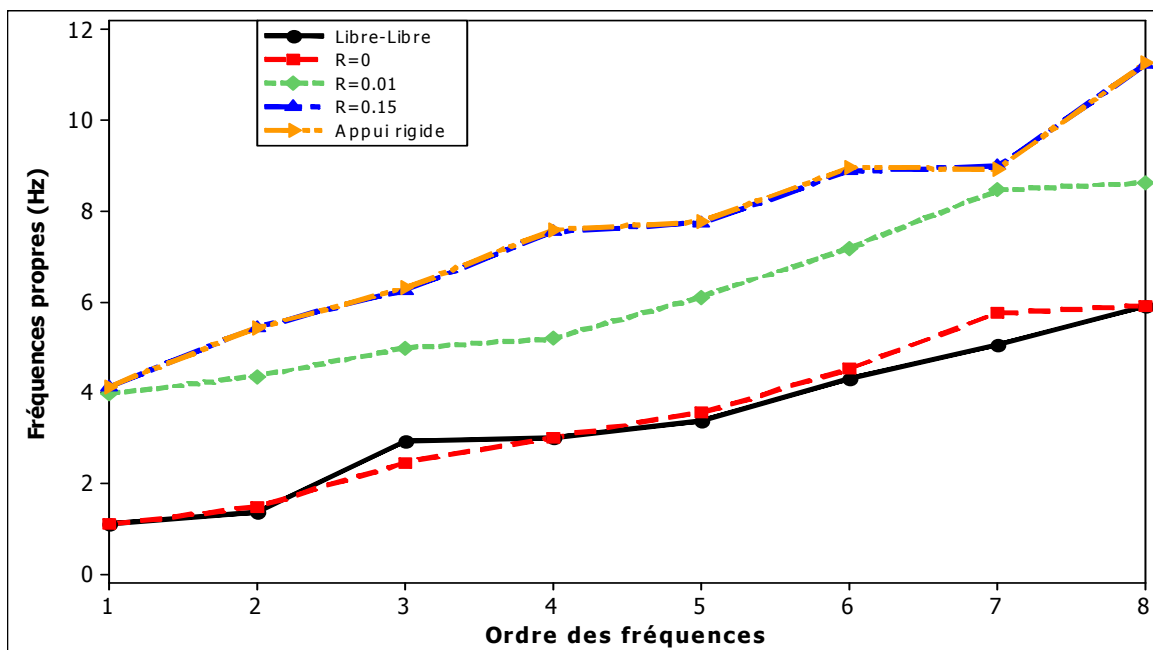


Figure IV-9 Influence du paramètre d'appui sur les fréquences propres

IV.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une modélisation très complexe d'un pont routier par une plaque orthotrope continue multi-travées supportée par des appuis élastiques ponctuels le long des directions longitudinale et transversale dans le cas de pont symétrique et non symétrique.

Les résultats des fréquences propres dans les deux configurations du pont, ont été validé pour le cas libre-libre et appuyé-appuyé, par la méthode des éléments finis (ANSYS) et par les résultats du chapitre II dans le cas d'appuis rigides.

Nous avons constaté que lorsque le paramètre d'appui R tend vers zéro, ce qui signifie que les appuis élastiques ont une raideur qui tend vers zéro, le comportement du pont, sur appuis élastiques ponctuels, en vibration libre (fréquences et déformées propres) tend vers celui d'un pont libre-libre.

Lorsque le paramètre d'appui R tend vers 0.15, signifie que les appuis élastiques ont une grande rigidité, le comportement du pont, sur appuis élastiques ponctuels, en vibration libre (fréquences et déformées propres) tend vers celui d'un pont sur des appuis rigides.

Pour un paramètre d'appui R dans l'intervalle,]0 à 0.15[, les valeurs des fréquences propres du pont basculent entre le comportement d'un pont libre-libre et sur appuis rigides.

La modélisation généralisée du comportement en vibration libre d'un pont routier à r travées supporté par des appuis élastiques ponctuels est intégré dans le logiciel CDPR.

Conclusion générale & perspectives

CONCLUSION GENERALE

A l'issu de ce travail de recherche et sur la base d'autres travaux réalisés dans ce domaine dans le laboratoire de mécanique et structures, nous avons pu développer un logiciel interactif permettant de calculer les fréquences propres et les déformées propres des ponts routiers en se basant sur les deux méthodes de résolution de l'équation du mouvement du pont en vibration libre présentées dans la référence [REZ 08] et celle que nous avons présentée dans le chapitre II, est qui a fait l'objet d'une publication dans le Journal Engineering et Structures référence [GUE 13].

La méthode d'estimation locale développée dans le 2^{ème} chapitre, permet dans un premier temps la localisation de la position x_{opt} le long du pont correspondant à l'amplitude maximale de la déformée propre de chaque mode. Cette méthode permet de minimiser le nombre de résolutions de l'équation du mouvement d'un côté et d'un autre coté d'éviter d'effectuer des intégrales, ce qui la rend facilement intégrable dans un logiciel de calcul des structures. Les résultats obtenus par cette méthode sont très satisfaisants et comparables avec ceux de la littérature et ceux de la simulation numérique par le logiciel ANSYS.

L'extension de l'étude aux vibrations forcées du pont lors du passage de véhicule est aussi intégrée dans le logiciel CDPR. Ce dernier permet donc d'étudier le phénomène d'interaction pont-véhicule. La réponse dynamique obtenue par le logiciel CDPR est en bonne concordance avec celle obtenue par le logiciel CLEF et plus au moins en concordance avec celle obtenue par [ZHU 02]. Les différences sont dû principalement à la non prise en compte des modes de torsion selon la largeur du pont dans le calcul de la réponse dynamique du pont, au profil de la chaussée et au coefficient d'amortissement qui n'ont pas été mentionné dans cette dernière référence. On note aussi les constatations suivantes :

- ✓ L'état de la chaussée a peu d'influence sur la réponse dynamique du pont, cependant, elle a une grande influence sur le niveau vibratoire du véhicule.
- ✓ Une variation très importante de la force d'interaction entre les roues avant et arrière du véhicule de (55 à 60KN) et de (30 à 35KN) respectivement, pour différents états de la chaussée.

- ✓ Le facteur d'amplification dynamique s'accroît proportionnellement à la vitesse de roulement et atteint la valeur de 1.28 pour la vitesse de 120Km/h qui peut être une des fréquences propres de véhicule.

Dans le dernier chapitre, nous avons présenté la modélisation d'un pont multi travées supporté par des appuis élastiques ponctuels répartis sur ces directions longitudinale et transversale. Afin d'avoir un aperçu globale du comportement des ponts supportés par des appuis élastiques, nous avons décomposé les fonctions des déformées propres en deux types, le premier reflète le comportement des appuis élastiques et le deuxième reflète le cas libre - libre. Nous avons constaté que l'action de l'appui élastique est liée au paramètre d'appui R . Lorsque R est dans l'intervalle $]0 \text{ à } 0.15[$ le comportement du pont est celui d'un pont sur appuis élastiques. Quand R tend vers 0, on a le comportement d'un pont libre-libre et lorsque R tend vers 0.15 et plus, on a le comportement d'un pont sur appuis rigides. Les résultats obtenus sont validés par ceux obtenus par ANSYS dans les deux configurations libre-libre et appuis rigides.

Enfin, nous avons aussi intégré cette modélisation très complexe dans le logiciel CDPR.

PERSPECTIVES

- ✓ Intégration d'autres modèles de véhicules dans le logiciel CDPR,
- ✓ Implantation d'une étude non linéaire afin de se rapprocher au cas réel,
- ✓ Étude d'autres paramètres qui peuvent avoir une influence sur le comportement des ponts.

Références bibliographiques

- [CLE 91] Logiciel d'analyse de structure par element fini CLEF. Dept. Genie Civile Université Laval (1991).
- [HEN 95] K. Henchi «Analyses dynamiques des ponts par éléments finis sous les sollicitations des véhicules mobiles». Thèse de Doctorat 1995, Université de technologie de Compiègne.
- [AKO97] K. E. Akoussah, M. Fafard, M. Talbot et D. Beaulieu «Étude paramétrique du facteur d'amplification dynamique des charges pour des ponts à travée simple en béton armé», Can. J. Civ. Eng. 24 : 313-322 (1997)
- [BRO 99] C. Broquet «Comportement dynamique des dalles de roulement des ponts en béton sollicités par le trafic routier». Thèse de Doctorat 1999, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.
- [MAR 99] S. Marchesiello, A. Fasana, L. Garibaldi et B.A.D. Piombo «Dynamics of multi-span continuous straight Bridges subject to multi-degrees of freedom Moving vehicle excitation». Journal of Sound and Vibration (1999) 224(3), 541-561
- [GEV 01] I.G. Tremblay «Analyse par éléments finis de l'interaction dynamique entre les trains et les ponts ferroviaires». Thèse de Maître ès en art (M.A.) 2001 , Université Laval.
- [YAU 01] J.-D. Yau, Y.-S. Wu et Y.-B. Yang «Impact response of bridges with elastic bearings to moving loads». Journal of Sound and Vibration 248 (2001) 9-30
- [ZHU 01] X.Q. Zhu et S. S. Law «Orthogonal function in moving loads identification on a multi-span bridge». Journal of Sound and Vibration (2001) 245(2), 329-345
- [ZHU 02] X.Q. Zhu et S. S. Law «Dynamic load on continuous multi-lane bridge deck from moving vehicles». Journal of Sound and Vibration (2002) 251(4), 697-716
- [SHJ 03] S.H. Ju et H.T. Lin «Resonance characteristics of high-speed trains passing simply supported bridges». Journal of Sound and Vibration 267 (2003) 1127-1141
- [YAN 04] Y.B. Yang, C.W. Lin et J.D. Yau «Extracting bridge frequencies from the dynamic response of a passing vehicle». Journal of Sound and Vibration 272 (2004) 471-493
- [WLL 04] W.L. Li «Vibration analysis of rectangular plates with general elastic boundary supports». Journal of Sound and Vibration 273 (2004) 619-635
- [LIN 05] C.W. Lin et Y.B. Yang «Use of a passing vehicle to scan the fundamental bridge frequencies : An experimental verification». Engineering Structures 27 (2005) 1865-1878

- [AAS 05] «AASHTO LRFD BRIDGE Design Specifications», SI Units 3rd edition , 2005 By American Association of State Highway and Transportation officials.
- [EUG 06] Eugene Obrien, Yingyan Li et Arturo González «Bridge roughness index as an indicator of bridge dynamic amplification». *Computers & Structures* 84 (2006) 759-769
- [OUE 06] N. Ouelaa, A. Rezaiguia et B. Laulagnet «Vibro-acoustic modeling of a railway crossed by a train». *Applied Acoustics* 67 (2006) 461-475.
- [WAN 06] D. Wang, M.I. Friswell et Y. Lei «Maximizing the natural frequency of a beam with an intermediate elastic support». *Journal of Sound and Vibration* 291 (2006) 1229-1238
- [TER 07] A.M. Ruiz-Teran et AC Aparicio «Dynamic amplification factors in cable-stayed structures». *Journal of Sound and Vibration* (2007) 300, 197-216.
- [CAI 07] C.S. Cai, X.M. Shi, M. Araujo et S.R. Chen et al. «Effect of approach span condition on vehicle-induced dynamic response of slab-on-girder road bridges». *Engineering Structures* 29 (2007) 3210-3226
- [FRW 07] M.I. Friswell et D. Wang «The minimum support stiffness required to raise the fundamental natural frequency of plate structures», *Journal of Sound and Vibration* 301 (2007) 665-677
- [REZ 08] A. Rezaiguia «Modélisation du Comportement vibratoire et acoustique d'un pont de la chaussée lors du passage de véhicules». Thèse de Doctorat 2008, Université de Badji Mokhtar Annaba.
- [MAJ 08] M. Majika et M. Hartnett «Effect of speed, load and damping on the dynamic response of railway bridges and vehicle». *Computers and Structures* 86 (2008) 556-572
- [HXU 08] Hongan Xu et Wen L. Li «Dynamic behavior of multi-span bridges under moving loads with focusing on the effect of the coupling conditions between spans». *Journal of Sound and Vibration* 312 (2008) 736-753
- [XIN 09] X.F. Xing et B. Liu «New exact solutions for free vibrations of thin orthotropic rectangular plates». *Composite Structures* 89 (2009) 567-574
- [HAM 10] Sajad Ahmad Hamidi et Farhad Danshjo «Determination of impact factor for steel railway bridges considering simultaneous effects of vehicle speed and axle distance to span length ratio». *Engineering Structures* 32 (2010) 1369-1376
- [YIN 10] Xinfeng Yin, Zhi Fang, C.S. Cai et Lu Deng «Non-stationary random vibration of bridges under vehicles with variable speed». *Engineering Structures* 32 (2010) 2166-2174

- [ROD 10] M.D. Martinez – Rodrigon, J. Lavado et P. Museros «Transverse vibration in existing railway bridges under resonant conditions: single-track versus double-track configurations». Eng Struct 2010;32:1861-75.
- [LHW 11] L.H. Wu et Y. Lu «Free vibration analysis of rectangular plates with internal columns and uniform elastic edge supports by pb-2 Ritz method». International Journal of Mechanical Sciences 53 (2011) 494-504
- [ANS 12] Logiciel ANSYS (2012).
- [GUE 13] M. Guebailia et al. «Solution of the free vibration equation of a multi span bridge deck by local estimation method». Engineering Structures EngStruct 48 (2013) 695-703.
- [MAT 13] Logiciel Wolfram Mathematica 9 (2013).

Annexe 1 - Equation de fréquences

$$\begin{aligned}
 & 4 (4 k^{12} \text{Cos}[k L1]^2 \text{Cos}[k L2]^2 \text{Cos}[k L3]^2 - 8 k^{12} \text{Cos}[k L1] \text{Cos}[k L2] \text{Cos}[k L3] \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] + 4 k^{12} \text{Ch}[k L1]^2 \text{Ch}[k L2]^2 \text{Ch}[k L3]^2 - 2 k^9 R \text{Cos}[k L2]^2 \text{Cos}[k L3]^2 \text{Ch}[k L1] \text{Sin}[k L1] + 2 k^9 R \text{Cos}[k L2] \text{Cos}[k L3]^2 \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Sin}[k L1] - 16 k^9 R \text{Cos}[k L2] \text{Cos}[k L3] \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L1] + 2 k^9 R \text{Cos}[k L2] \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3]^2 \text{Sin}[k L1] - 2 k^9 R \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2]^2 \text{Ch}[k L3]^2 \text{Sin}[k L1] + 4 k^{12} \text{Cos}[k L2]^2 \text{Cos}[k L3]^2 \text{Sin}[k L1]^2 + 2 k^9 R \text{Cos}[k L1] \text{Cos}[k L3]^2 \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Sin}[k L2] - 2 k^9 R \text{Cos}[k L1]^2 \text{Cos}[k L3] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L2] - 16 k^9 R \text{Cos}[k L1] \text{Cos}[k L3] \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L2] - 2 k^9 R \text{Cos}[k L3] \text{Ch}[k L1]^2 \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L2] + 2 k^9 R \text{Cos}[k L1] \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3]^2 \text{Sin}[k L2] + k^6 R^2 \text{Cos}[k L3]^2 \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Sin}[k L1] \text{Sin}[k L2] + 8 k^{12} \text{Cos}[k L3] \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L1] \text{Sin}[k L2] - 6 k^6 R^2 \text{Cos}[k L3] \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L1] \text{Sin}[k L2] + k^6 R^2 \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3]^2 \text{Sin}[k L1] \text{Sin}[k L2] - 2 k^9 R \text{Cos}[k L3] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L1]^2 \text{Sin}[k L2] + 4 k^{12} \text{Cos}[k L1]^2 \text{Cos}[k L3]^2 \text{Sin}[k L2]^2 - 2 k^9 R \text{Cos}[k L3]^2 \text{Ch}[k L1] \text{Sin}[k L1] \text{Sin}[k L2]^2 + 4 k^{12} \text{Cos}[k L3]^2 \text{Sin}[k L1]^2 \text{Sin}[k L2]^2 + 2 k^9 R \text{Cos}[k L1]^2 \text{Cos}[k L2]^2 \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L3] - 2 k^9 R \text{Cos}[k L1]^2 \text{Cos}[k L2] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L3] - 16 k^9 R \text{Cos}[k L1] \text{Cos}[k L2] \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L3] - 2 k^9 R \text{Cos}[k L2] \text{Ch}[k L1]^2 \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L3] + 2 k^9 R \text{Ch}[k L1]^2 \text{Ch}[k L2]^2 \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L3] - k^6 R^2 \text{Cos}[k L2]^2 \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L1] \text{Sin}[k L3] + 8 k^{12} \text{Cos}[k L2] \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L1] \text{Sin}[k L3] + 2 k^6 R^2 \text{Cos}[k L2] \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L1] \text{Sin}[k L3] - k^6 R^2 \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2]^2 \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L1] \text{Sin}[k L3] + 2 k^9 R \text{Cos}[k L2]^2 \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L1]^2 \text{Sin}[k L3] - 2 k^9 R \text{Cos}[k L2] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L1]^2 \text{Sin}[k L3] + k^6 R^2 \text{Cos}[k L1]^2 \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L2] \text{Sin}[k L3] + 8 k^{12} \text{Cos}[k L1] \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L2] \text{Sin}[k L3] + 10 k^6 R^2 \text{Cos}[k L1] \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L2] \text{Sin}[k L3] + k^6 R^2 \text{Ch}[k L1]^2 \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L2] \text{Sin}[k L3] + 16 k^9 R \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L1] \text{Sin}[k L2] \text{Sin}[k L3] + 4 k^3 R^3 \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L1] \text{Sin}[k L2] \text{Sin}[k L3] + k^6 R^2 \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L1]^2 \text{Sin}[k L2] \text{Sin}[k L3] + 2 k^9 R \text{Cos}[k L1]^2 \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L2]^2 \text{Sin}[k L3] - k^6 R^2 \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L1] \text{Sin}[k L2]^2 \text{Sin}[k L3] + 2 k^9 R \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L1]^2 \text{Sin}[k L2]^2 \text{Sin}[k L3] + 4 k^{12} \text{Cos}[k L1]^2 \text{Cos}[k L2]^2 \text{Sin}[k L3]^2 - 2 k^9 R \text{Cos}[k L2]^2 \text{Ch}[k L1] \text{Sin}[k L1] \text{Sin}[k L3]^2 + 2 k^9 R \text{Cos}[k L2] \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Sin}[k L1] \text{Sin}[k L3]^2 + 4 k^{12} \text{Cos}[k L2]^2 \text{Sin}[k L1]^2 \text{Sin}[k L3]^2 + 2 k^9 R \text{Cos}[k L1] \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Sin}[k L2] \text{Sin}[k L3]^2 + k^6 R^2 \text{Ch}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Sin}[k L1] \text{Sin}[k L2] \text{Sin}[k L3]^2 + 4 k^{12} \text{Cos}[k L1]^2 \text{Sin}[k L2]^2 \text{Sin}[k L3]^2 - 2 k^9 R \text{Ch}[k L1] \text{Sin}[k L1] \text{Sin}[k L2]^2 \text{Sin}[k L3]^2 + 4 k^{12} \text{Sin}[k L1]^2 \text{Sin}[k L2]^2 \text{Sin}[k L3]^2 + 2 k^9 R \text{Cos}[k L1] \text{Cos}[k L2]^2 \text{Cos}[k L3]^2 \text{Sh}[k L1] - 2 k^9 R \text{Cos}[k L1] \text{Cos}[k L2] \text{Cos}[k L3]^2 \text{Ch}[k L2] \text{Sh}[k L1] + 16 k^9 R \text{Cos}[k L1] \text{Cos}[k L2] \text{Cos}[k L3] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sh}[k L1] - 2 k^9 R \text{Cos}[k L1] \text{Cos}[k L2] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3]^2 \text{Sh}[k L1] + 2 k^9 R \text{Cos}[k L1] \text{Ch}[k L2]^2 \text{Ch}[k L3]^2 \text{Sh}[k L1] + 4 k^6 R^2 \text{Cos}[k L2]^2 \text{Cos}[k L3]^2 \text{Sin}[k L1] \text{Sh}[k L1] - 4 k^6 R^2 \text{Cos}[k L2] \text{Cos}[k L3]^2 \text{Ch}[k L2] \text{Sin}[k L1] \text{Sh}[k L1] + 16 k^6 R^2 \text{Cos}[k L2] \text{Cos}[k L3] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L1] \text{Sh}[k L1] - 4 k^6 R^2 \text{Cos}[k L2] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3]^2 \text{Sin}[k L1] \text{Sh}[k L1] + 4 k^6 R^2 \text{Ch}[k L2]^2 \text{Ch}[k L3]^2 \text{Sin}[k L1] \text{Sh}[k L1] - 5 k^6 R^2 \text{Cos}[k L1] \text{Cos}[k L3]^2 \text{Ch}[k L2] \text{Sin}[k L2] \text{Sh}[k L1] + 14 k^6 R^2 \text{Cos}[k L1] \text{Cos}[k L3] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L2] \text{Sh}[k L1] - 5 k^6 R^2 \text{Cos}[k L1] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3]^2 \text{Sin}[k L2] \text{Sh}[k L1] + 2 k^9 R \text{Cos}[k L3]^2 \text{Ch}[k L2] \text{Sin}[k L1] \text{Sin}[k L2] \text{Sh}[k L1] - 2 k^3 R^3 \text{Cos}[k L3]^2 \text{Ch}[k L2] \text{Sin}[k L1] \text{Sin}[k L2] \text{Sh}[k L1] - 12 k^9 R \text{Cos}[k L3] \text{Ch}[k L2] \text{Ch}[k L3] \text{Sin}[k L1] \text{Sin}[k L2] \text{Sh}[k L1] + 4 k^3 R^3 \text{Cos}[k L3] \text{Sin}[k L1] \text{Sin}[k L2] \text{Sh}[k L1] + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots \\
 & \text{Sh}[k L2] \text{Sh}[k L3]^2 - 2 k^9 R \text{Cos}[k L2] \text{Sin}[k L1] \text{Sh}[k L1] \text{Sh}[k L2] \text{Sh}[k L3]^2 - 2 k^3 R^3 \text{Cos}[k L2] \text{Sin}[k L1] \text{Sh}[k L1] \text{Sh}[k L2] \text{Sh}[k L3]^2 - 2 k^9 R \text{Cos}[k L1] \text{Sin}[k L2] \text{Sh}[k L1] \text{Sh}[k L2] \text{Sh}[k L3]^2 - 2 k^3 R^3 \text{Cos}[k L1] \text{Sin}[k L2] \text{Sh}[k L1] \text{Sh}[k L2] \text{Sh}[k L3]^2 - k^6 R^2 \text{Sin}[k L2] \text{Sh}[k L1]^2 \text{Sh}[k L2] \text{Sh}[k L3]^2 + 4 k^{12} \text{Ch}[k L1]^2 \text{Sh}[k L2]^2 \text{Sh}[k L3]^2 - 2 k^9 R \text{Ch}[k L1] \text{Sin}[k L1] \text{Sh}[k L2]^2 \text{Sh}[k L3]^2 + 2 k^9 R \text{Cos}[k L1] \text{Sh}[k L1] \text{Sh}[k L2]^2 \text{Sh}[k L3]^2 + 4 k^6 R^2 \text{Sin}[k L1] \text{Sh}[k L1] \text{Sh}[k L2]^2 \text{Sh}[k L3]^2 - 4 k^{12} \text{Sh}[k L1]^2 \text{Sh}[k L2]^2 \text{Sh}[k L3]^2) = 0
 \end{aligned}$$

(A1.1)

Annexe 2

Le logiciel CDPBR développé au sein du LMS - Guelma

A2.1 Interface

Comportement Dynamique des Ponts Routiers (CDPR)

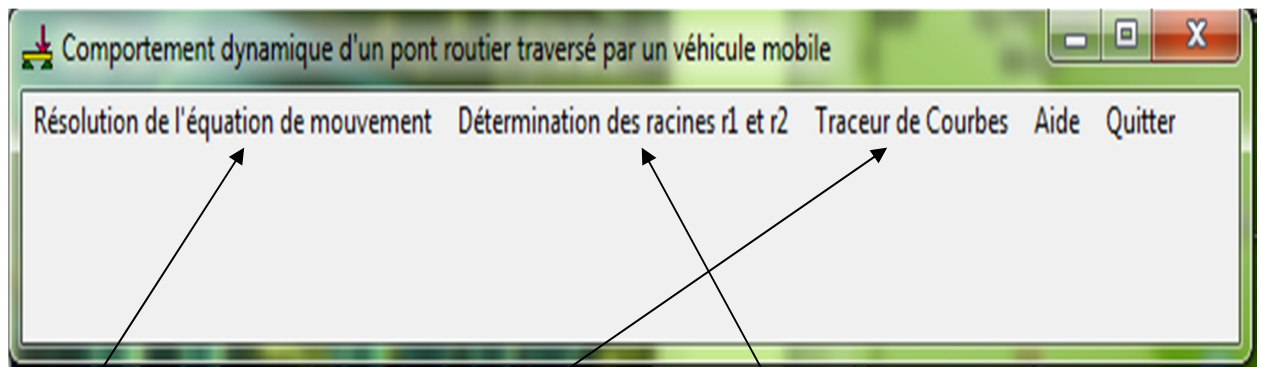
Développé par-> **GUEBAILIA Moussa**
Sous la Direction----> **Pr. OUELAA Nouredine**

*Laboratoire de Mécanique
et Structures
"LMS"*

Université 08 Mai 45 Guelma

Développé sous l'environnement : C++ (c) 2010-2015

A2.2 Menu principal



Choix de la méthode de résolution
(au sens de la moyenne, estimation locale)
(appui rigide, appui élastique)

Détermination des fréquences, déformées,
nombres d'ondes..

Traceur de courbes des résultats
obtenus par le logiciel CLEF

A2.3 Fenêtre de saisie : Données du pont – cas appui rigide

Différentes onglets (étapes de saisie et calcul)

Données du pont

Données géométriques :
 $b = 13.715$
 $h = 0.21157$
 $l_1 = 24$, $l_2 = 30$, $l_3 = 24$
 $l = 78$

Propriétés du pont :
 Masse volumique du pont [Kg/m³]: 3600.000
 Amortissement visqueux du pont: 0.02
 Type de matériau: ISOTROPE, ORTHOTROPE
 Pont modèle ORTHOTROPE

Module d'Elasticité du pont [N/m ²]		Coefficients du Poisson du pont		Rigidité du flexion du pont [N/m ²]	
E _{xx}	3.05760E+0012	NU _{xy}	0.3000	G _{xy}	1.44750E+0011
E _{yy}	2.76070E+0010	NU _{yz}	0	G _{yz}	0
E _{zz}	0.00000E+0000	NU _{xz}	0.0027	G _{xz}	0

Buttons: **Lecture**, **Sauvegarde**, **Racines r1 et r2**

Géométrie du pont
Type de pont

Caractéristique mécanique

Détermination des fréquences propres...

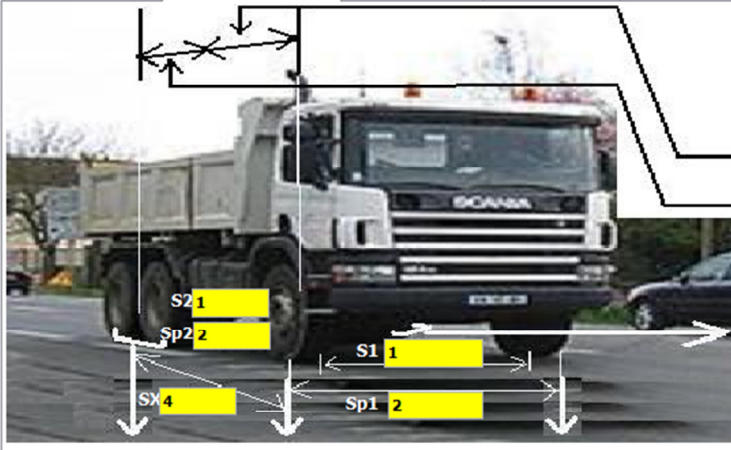
Lecture & sauvegarde de la base des données

A2.4 Fenêtre de saisie : Données du véhicule

Méthode modale au sens de la MOYENNE

Géométrie du pont | **Données du véhicule** | Nombre. d'ondes | Param. solution | Réponse dynamique | Forces d'interaction

Données du véhicule



A1 [m] x SX
 A2 [m] x SX

M1
 M2
 MV

Itéta1
 Itéta2
 ItétaV
 IalfaV

Kp4
 Cp4
 Ks4
 Cs4

Kp3
 Cp3
 Ks3
 Cs3

Kp1
 Cp1
 Ks1
 Cs1

Kp2
 Cp2
 Ks2
 Cs2

A2.5 Fenêtre de saisie : Nombres d'ondes

Méthode modale au sens de la MOYENNE

Géométrie du pont | Données du véhicule | **Nombre. d'ondes** | Param. solution | Réponse dynamique | Forces d'interaction

Nombres d'ondes

Racines de l'équation aux fréquences les ((Ki))

La valeurs ((K1 i)) K1 i= Ki . Racine(Int1/Int2)

Kr1
 Kr2
 Kr3
 Kr4
 Kr5
 Kr6
 Kr7
 Kr8
 Kr9
 Kr10

A2.6 Fenêtre de saisie : Paramètres de la méthode de Newmark

Méthode modale au sens de la MOYENNE

Géométrie du pont | Données du véhicule | Nombre. d'ondes | Param. solution | Réponse dynamique | Forces d'interaction

Paramètres de stabilité de la méthode de Newmark

Gamma

Betta

Facteur du profil du chaussée

Coefficient Ar 1.E-06

Précision du calcul

Epsilon

Lecture | Sauvegarde | Racines r1 et r2

A2.7 Fenêtre de saisie : Données du pont – cas appui élastique

Méthode modale par Estimation locale sous appuis élastiques

Géométrie du pont | Données du véhicule | Nombre.d'ondes et Fréqs.Référence | Param. solution | Réponse dynamique | Forces d'Interaction | Facteur d'amplificati

Données du pont

Nombre de Travées

b $b/2$ $b/2$ h

z y x L o Raideur K

Masse volumique du pont [Kg/m3] Amortissement visqueux du pont

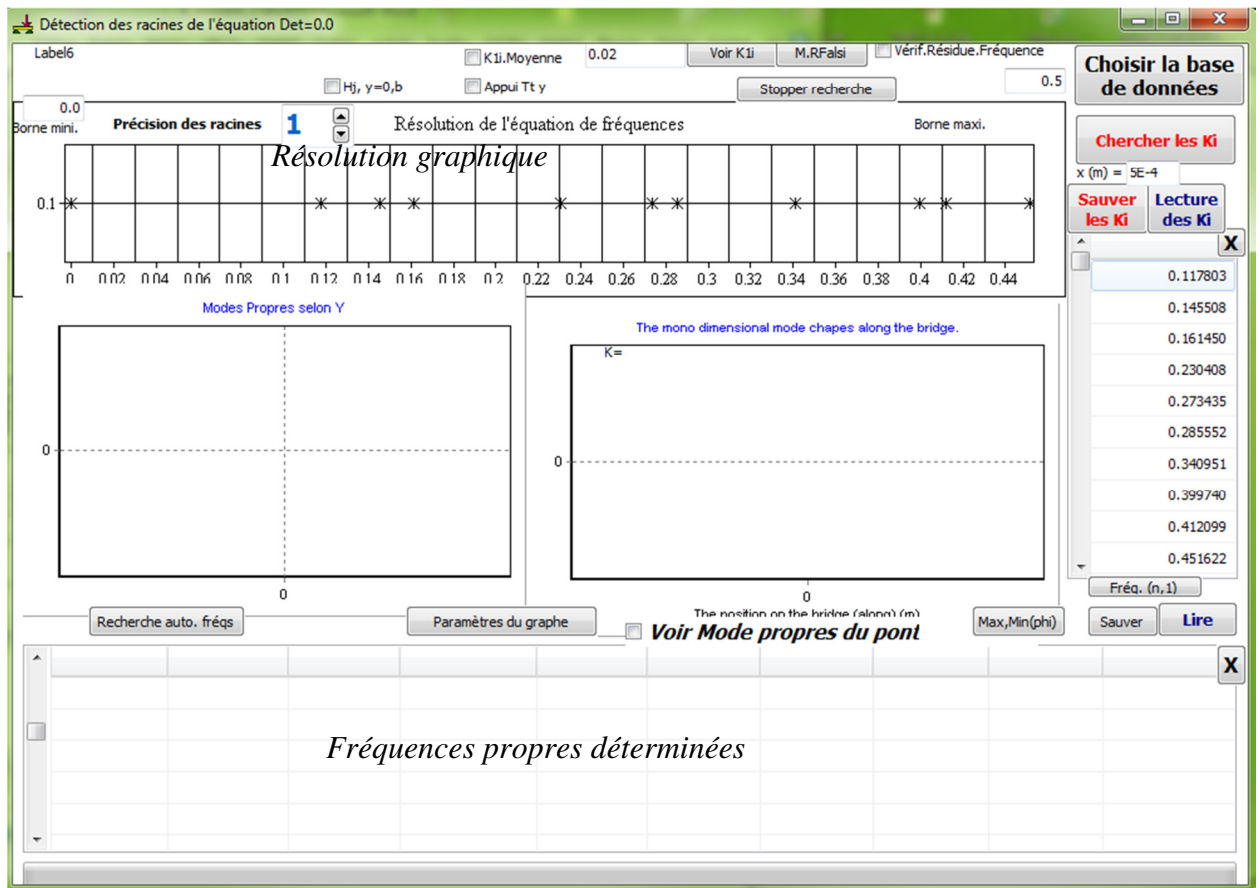
Type d'Anisotropie ISOTROPE ORTHOTROPE

Pont ORTHOTROPE

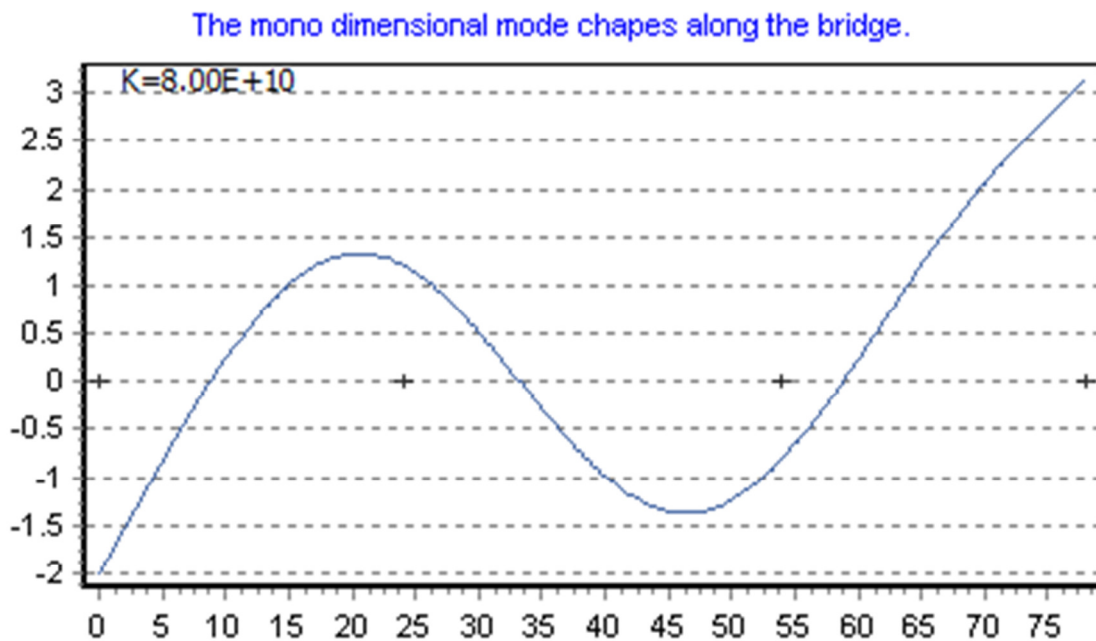
Module d'Elasticité du pont [N/m2]		Coefficients du Poisson du pont		Rigidité du flexion du pont [N/m2]	
E _{xx}	<input type="text" value="3.05760E+0012"/>	NU _{xy}	<input type="text" value="0.3000"/>	G _{xy}	<input type="text" value="1.44750E+0011"/>
E _{yy}	<input type="text" value="2.76060E+0010"/>	NU _{yz}	<input type="text" value="0"/>	G _{yz}	<input type="text" value="0"/>
E _{zz}	<input type="text" value="0.00000E+0000"/>	NU _{xz}	<input type="text" value="0.0027"/>	G _{xz}	<input type="text" value="0"/>

Lecture | Sauvegarde | Racines r1,r2 (Eq.aux fréqs) | Button12 | Configurer graphes

A2.8 Fenêtre de saisie : Détermination des nombres d'ondes & fréquences propres



A2.9 Déformées propres à une dimension



A2.10 Déformées propres à deux dimensions

