République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Polycopié de cours

Par

Dr. BELLAOUAR Djamel

Algèbre 3
(Cours et exercices corrigés)

Deuxième Année Licence Mathématiques

2018 /2019

Algèbre III

BELLAOUAR Djamel
Polycopié de cours, Deuxième Année Licence Mathématiques
Université 8 Mai 1945 Guelma

9 mars 2019

bellaouar.djamel@univ-guelma.dz, bellaouardj@yahoo.fr

Table des matières

1. Cet examen a été réalisé par Dr. N. Azzouza le 23 Février 2009 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.
2. Cet examen a été réalisé par Dr. N. Azzouza le 18 Février 2010 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.
3. Ce micro-interrogation a été effectué par Dr. N. Azzouza le 22 Janvier 2011 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.

Abstract

This manuscript is intended for all students of the second year mathematics. One of the most useful techniques in applications of matrices and linear algebra is matrix reduction. Before discussing this, we have to look at the topic of eigenvalues and eigenvectors and their relations with diagonalization and tridiagonalization. Such notions are used for studying the minimal polynomial, nilpotent matrices and Jordan's decomposition. We shall explore a number of applications of diagonalization and trigonalization on the solution of iteration sequences and system of differential equations. At the end, we finish this manuscript by providing the previous exams and its solutions which carried at University of Guelma from 2009 to 2016.

Table des notations

Voici la table des notations. Ce sont des symboles qui permettent au lecteur de bien comprendre le contenu de ce manuscrit.

- ▷ $\mathbb{N}$ L'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.
- ▷ $\mathbb{K}$ Un corps qui peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- ▷ $\mathbb{K}^n$ Le produit cartésien $\mathbb{K}^n$ est l'espace vectoriel des n-uplets de scalaires.
- ▷ $\mathbb{R}^n$ L'espace vectoriel des n-uplets de réels : $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \ ; \ x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$.
- ▷ $\mathbb{R}_+$ L'ensemble des nombres réels positifs.
- ▷ $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ Désigne l'ensemble des matrices carrées à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- ▷ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ L'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, n entier ≥ 2.
- ▷ $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ Désigne l'ensemble des matrices symétrique à n lignes et n colonnes à coeffients dans $\mathbb{K}$.
- ▷ $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ Désigne l'ensemble des matrices anti-symétrique à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- ▷ $\mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$ Désigne l'ensemble des matrices inversibles à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- ▷ $p_A(x)$ Polynôme caractéristique de A, i.e., $p_A(x) = \det(A - xI_n)$.
- ▷ $p_f(x)$ Polynôme caractéristique de f, i.e., $p_f(x) = \det(f - xid_E)$.
- ▷ $m_A(x)$ Polynôme minimal de A.
- ▷ λ Désigne une valeur propre de A, on écrit aussi λ est une v.p de A.
- ▷ (λ, x) Désigne un élément propre de A : λ désigne une valeur propre de A et x désigne le vecteur propre associé.

- ▷ E_λ Le sous-espace propre associé à λ, i.e., $E_\lambda = \{x \in \mathbb{K}^n\,;\, Ax = \lambda x\}$.
- ▷ N_λ Le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ.
- ▷ $Sp\,(A)$ Le spectre d'une matrice (noté $Sp\,(A)$) est l'ensemble de ses valeurs propres, i.e., $Sp\,(A) = \underset{\lambda\,:\,\text{v.p}}{\cup} \{\lambda\}$.
- ▷ $\oplus$ Somme directe de deux sous-espaces vectoriels.
- ▷ $p_A(A)$: L'image de p_A par la matrice A, c'est une matrice de $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{K})$.
- ▷ A, B, C Matrices quelconques.
- ▷ I_n Matrice unité d'ordre n.
- ▷ I La matrice unité.
- ▷ $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ Les éléments d'une matrice carrée A. L'élément a_{ij} situé dans la ligne i et la colonne j.
- ▷ A_n Une matrice carrée d'ordre n possède quelques propriétés.
- ▷ Δ Désigne le déterminant d'une matrice carrée.
- ▷ Δ_n Désigne le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n.
- ▷ $\overline{A}$ Une matrice conjuguée d'une matrice A sur les complexes est la matrice (notée $\overline{A}$) formée des éléments de A conjugués.
- ▷ N Désigne une matrice nilpotente, i.e., $N^k = 0$ et $N^{k-1} \neq 0$ pour un certain $k \geq 0$.
- ▷ P Matrice de passage[4].
- ▷ D Une matrice diagonale ; parfois, D désigne une matrice diagonalisable. Par exemple, toute matrice carrée A dont le polynôme caractéristique est scindé s'écrit de manière unique sous la forme $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$.
- ▷ $diag\,\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ C'est une matrice diagonale entièrement détermi-

4. Si A est la matrice d'un endomorphisme f dans la base B_0, alors P est la matrice de passage de la base B_0 à une base B de vecteurs propres de A.

née par la liste de ses éléments diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

- $\triangleright$ T Matrice triangulaire supérieure.
- $\triangleright$ $A \sim B$ La notation $A \sim B$ signifie que la matrice A est semblable avec la matrice B.
- $\triangleright$ A^* La matrice adjointe A^* de A est la matrice transposée de la matrice conjuguée de A, i.e., $A^* = \left(\overline{A}\right)^t = \overline{A^t}$.
- $\triangleright$ $\|.\|$ Une norme sur un espace vectoriel.
- $\triangleright$ $\|x\|_1$ Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$: $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ et pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\|A\|_1 = \max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.
- $\triangleright$ $\|x\|_2 = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ La norme euclidienne sur $\mathbb{K}^n$.
- $\triangleright$ $\|x\|_\infty$ Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$: $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq \leq n} (|x_i|)$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\|A\|_\infty = \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.
- $\triangleright$ $\langle ., .\rangle$ Dans un espace vectoriel E, $\langle x, y\rangle$ désigne le produit scalaire de x par y.
- $\triangleright$ A^t La matrice transposée (on dit aussi la transposée) de A.
- $\triangleright$ A^k Les puissance de la matrice A, i.e., $A^k = AA...A$, k fois.
- $\triangleright$ $com(A)$ ou $Com(A)$ La comatrice[5] d'une matrice carrée A.
- $\triangleright$ $\det(A)$ Le déterminant d'une matrice carrée A.
- $\triangleright$ A^{-1} Matrice inverse d'une matrice inversible A. Rappelons que

$$A \text{ inversible } \Leftrightarrow 0 \notin Sp(A) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \{Ax = 0 \Rightarrow x = 0\}.$$

5. La comatrice d'une matrice carrée A est une matrice introduite par une généralisation du calcul de l'inverse de A. Elle a une importance considérable pour l'étude des déterminants. Ses éléments sont appelés cofacteurs de A, et ils permettent d'étudier les variations de la fonction déterminant. La comatrice est aussi appelée matrice des cofacteurs.

- ▷ $Tr(A)$ ou $tr(A)$ La trace de A, c'est la somme des coefficients situés sur la diagonale.
- ▷ e^A L'exponentielle[6] d'une matrice carrée A.
- ▷ $\sqrt{A}$ Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. Un élément H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une racine carrée[7] de A si $H^2 = A$.
- ▷ $\cos(A)$, $\sin(A)$ Si A est une matrice réelle d'ordre n, on note par $\cos(A)$ la partie réelle de e^{iA} et $\sin(A)$ sa partie imaginaire. Notons que $\cos^2(A) + \sin^2 A = I$.
- ▷ $f(A)$ C'est l'image de A par f. Par exemple, si $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale, alors $f(A) = Pf(D)P^{-1}$ à condition que la matrice $f(D)$ est bien définie.
- ▷ $\mathbf{0}$ La matrice nulle.
- ▷ 0_n Désigne l'élément nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- ▷ E, F On note par E, F des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$.
- ▷ (E) L'ensemble des applications linéaires de E dans E.
- ▷ $\mathcal{B}$ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On note par $\mathcal{B}$ une base quelconque de E et par $\mathcal{B}_0$ sa base canonique.
- ▷ $Vect\{A\}$ Dans un espace vectoriel E, le sous-espace vectoriel engendré par une partie A de E est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A, noté $Vect\{A\}$. C'est aussi l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de A.
- ▷ e_i i-ème vecteur colonne de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- ▷ $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ La base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- ▷ $\mathcal{M}_f(\mathcal{B})$ La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

6. Parfois, on note aussi $\exp(A)$.
7. Une matrice donnée peut n'admettre aucune racine carrée.

- $\triangleright$ id_E L'application identité ou la fonction identité est l'application qui n'a aucun effet lorsqu'elle est appliquée à un élément, i.e., $id_E(x) = x$ pour tout $x \in E$.
- $\triangleright$ 0_E L'élément neutre de E pour la loi $+$.
- $\triangleright$ $Im(f)$ On définit l'image d'une application f définie sur E : $Im(f) = f(E)$.
- $\triangleright$ $\ker(f)$ Le noyau d'un morphisme de groupes f d'un groupe G vers un groupe G' : $\ker(f) = \{x \in G\ ;\ f(x) = e_{G'}\}$.
- $\triangleright$ $End_{\mathbb{K}}(E)$ Désigne l'espace vectoriel des endomorphismes de E (notons que E est espace vectoriel sur $\mathbb{K}$).
- $\triangleright$ $\dim(E)$ La dimension de E est le cardinal commun à toutes ses bases. La dimension d'un espace vectoriel peut être calculée en choisissant une base canonique.
- $\triangleright$ $rg(A)$ Le rang d'une matrice A (dont les coefficients appartiennent à un corps commutatif de scalaires, $\mathbb{K}$), noté $rg(A)$, est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.
- $\triangleright$ $\mathbb{K}[X]$ On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients réels et $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes. Muni de l'addition des fonctions et de la multiplication d'une fonction par un réel, ces deux ensembles sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Ils sont de dimension infinie. Muni de l'addition des fonctions et de la multiplication d'une fonction par un complexe, l'ensemble $\mathbb{C}[X]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Il est de dimension infinie.
- $\triangleright$ $\mathbb{R}_n[X]$ L'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, noté $\mathbb{R}_n[X]$; c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension

$n+1$.

- ▷ $\mathbb{C}_n[X]$ L'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n, noté $\mathbb{C}_n[X]$; c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $2n+2$. Voir la en bas de lq bage[8].
- ▷ $C([a,b])$ L'espace des fonctions continues sur $[a,b]$.
- ▷ $C^\infty(E)$ L'espace des fonctions infiniment dérivables sur E.
- ▷ X_n Un vecteur dont ses composants sont des suites en fonction de n.
- ▷ X' Un vecteur de la forme $\begin{pmatrix} x'_1(t) & x'_2(t) & \ldots & x'_n(t) \end{pmatrix}^t$, où x_i sont des fonctions dérivables, $i \in \overline{1,n}$.
- ▷ C_k^i Sont les coefficients binomiaux (parfois aussi notés $\begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} = \frac{k!}{i!\,(k-i)!}$)[9].
- ▷ x^t Vecteur ligne, i.e., $x^t = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$. La transposée d'un vecteur-colonne est un vecteur-ligne.

---

8. La base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ sur $\mathbb{R}$ est $\{1, X, ..., X^n, i, iX, ..., iX^n\}$. C'est également un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$; il est alors de dimension $n+1$. Sa base canonique, en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel, est $\{1, X, ..., X^n\}$.
9. Notons que C_k^i sont des entiers positifs.

Introduction

Ce manuscrit s'adresse à tous les étudiants de deuxième année mathématiques et à tous ceux qui veulent acquérir les concepts de base de la réduction d'endomorphisme en dimension finie [9]. Ceci est le cours d'Algèbre III enseigné à l'université 08 Mai 1945 Guelma, à raison de 24 heures (TD et cours) dans le semestre.

L'objet de ce travail est d'étudier quelques procédés d'algèbre linéaire qui permet de simplifier la description de certains endomorphismes d'un espace vectoriel, en particulier de certaines matrices carrées. Elle consiste à rechercher et expliciter une base de l'espace vectoriel constituée de vecteurs propres, lorsqu'il en existe une. En dimension finie, ces procédés reviennent en effet à décrire cet endomorphisme à l'aide d'une matrice diagonale ou triangulaire.

Le contenu de ce manuscrit intègre aussi les démonstrations de certains résultats. Pour les détails voir par exemple [1], [2], [6] et [13]. D'autre part, les exemples et les exercices proposés puisqu'ils sont liés à déterminer les éléments propres, nous pouvons facilement construire des matrices pour que leurs valeurs propres soient dans $\mathbb{Z}$ et par lesquelles nous pouvons aussi presque appliquer tous les résultats de ce programme.

Notons que chaque chapitre est subdivisé en plusieurs sections dont chacune contient un résumé de cours, i.e., les notions fondamentales sont exposées en tête de chaque section, des exercices intégralement corrigés, et des exercices proposés. Le manuscript se termine enfin par un chapitre sur les examens effectués à l'université de Guelma de 2009 à 2016 avec des solutions détaillées.

En effet, ce cours, qui est basé sur les matrices carrées, est une étude de continuité de l'algèbre II enseigné en première année MI. Il est composé de quatre chapitres. Dans le Chapitre 1, on rappelle quelques définitions et on donne sans démonstration les résultats classiques sur les matrices carrées (avec leurs types mentionnés), un moyen pratique de trouver les valeurs propres et d'autres théoriques, tels que les normes et le produit scalaire. Au Chapitre 2 on introduit la notion de similarité et on traite en détail les propriétés des matrices diagonalisables par des application sur les suites récurrentes linéaires, systèmes de suites récurrentes et sur les systèmes différentiels à coefficients constants. Au Chapitre 3 on introduit le polynôme caractéristique p_A d'une matrice carrée A, et on étudie la trigonalisation des matrices. En effet, on démontre directement l'égalité $p_A(A) = 0$ (c'est notre premier résultat de réduction, théorème de Cayley-Hamilton) par la méthode des déterminants et on introduit le polynôme minimal m_A d'une matrice carrée A, puis, on démontre le théorème de décomposition de de Schur : Toute matrice à coefficients complexes est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Sans oublier bien sur de mentionner le théorème importante de Jordan : Toute matrice carrée A dont le polynôme caractéristique est scindé s'écrit de manière unique sous la forme $A = D + N$, avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$.

Un calcul explicite de D et N est obtenu grâce au théorème chinois[10] pour les polynômes. Ces résultats sont appliqués à l'itération des matrices et à la théorie des systèmes différentiels linéaires.

Nous terminons ce manuscrit par le Chapitre IV en citant, avec solution, les micro-interrogations, examens finals ainsi quelques rattrapages effectués par Mr. N. Azzouza et Mr. Dj. Bellaouar depuis 2009 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.

Mes remerciements à professeur A. Boudaoud qui a bien voulu relire le manuscrit et me faire part de ses utiles remarques.

Bellaouar Djamel. October, 2017.

10. Le théorème des restes chinois est un résultat d'arithmétique modulaire traitant de résolution de systèmes de congruences. Ce résultat, établi initialement pour $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, se généralise en théorie des anneaux. Ce théorème est utilisé en théorie des nombres. Pour plus de détails, voir [2].

Chapitre 1

Les Préliminaires indispensables

1.1 Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

On va donner un moyen pratique de trouver les valeurs propres d'une matrice carrée A.

Définition 1.1.1 (voir, [10, p. 210]) On définit le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme le polynôme

$$p_A(x) = \det(A - xI_n) = (-1)^n \det(xI_n - A).$$

Proposition 1.1.1 (voir [1, p. 115]) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le polynôme caractéristique de A est de degré n et, plus précisément, on a*

$$p_A(x) = (-1)^n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \quad \textit{avec } c_0 = \det(A) \ \textit{ et } c_{n-1} = (-1)^{n-1} Tr(A).$$

Exemple 1.1.1 Calculer le polynôme cractéristique de la matrice suivante.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Par définition, on a

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{c} c_1 \\ \downarrow \\ c_1+c_2 \end{array} \\ &= \begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ 3-x & 2-x \end{vmatrix} = (3-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = (3-x)(2-x-1) \\ &= (3-x)(1-x). \end{aligned}$$

D'où $p_A(x)=(1-x)(3-x)$.

Exemple 1.1.2 Soit la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Par définition, on a

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ x & -x & 1 \\ 0 & x & 1-x \end{vmatrix} \\ &= x^2 \begin{vmatrix} \overset{+}{-1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{1} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= x^2\left[-(x-1-1)+(1-0)\right] \\ &= x^2(3-x). \end{aligned}$$

D'où $p_A(x)=x^2(3-x)$.

Exemple 1.1.3 Calculer les polynômes caractéristiques des matrices suivantes.

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 13 & -12 & -6 \\ 6 & -5 & -3 \\ 18 & -18 & -8 \end{pmatrix} \\ A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(i) On écrit par définition

$$\begin{aligned} p_{A_1}(x) &= \det(A_1 - xI_3) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{4-x} & 2 & -1 \\ 2 & \mathbf{7-x} & -2 \\ -1 & -2 & \mathbf{4-x} \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{c} 1^{ère}\text{colonne} \\ \downarrow \\ 1^{ère} + 3^{ème} \end{array} \\ &= \begin{vmatrix} 3-x & 2 & -1 \\ 0 & 7-x & -2 \\ 3-x & -2 & 4-x \end{vmatrix} \\ &= (3-x) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7-x & -2 \\ 1 & -2 & 4-x \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{c} 2^{ème}\text{colonne} \\ \downarrow \\ 2 \times 3^{ème} + 2^{ème} \end{array} \\ &= (3-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3-x & -2 \\ 1 & 2(3-x) & 4-x \end{vmatrix} = (3-x)^2 \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{-1} \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4-x \end{vmatrix} \\ &= (3-x)^2 \left[4 - x + 4 - (0-1)\right] \\ &= (3-x)^2 (9-x). \end{aligned}$$

D'où $p_{A_1}(x) = (3-x)^2 (9-x)$.

(ii) Le calcul de $p_{A_2}(x)$:

$$\begin{aligned}
p_{A_2}(x) &= \begin{vmatrix} 13-x & -12 & -6 \\ 6 & -5-x & -3 \\ 18 & -18 & -8-x \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c} 1^{\text{ère}}\text{colonne} \\ \downarrow \\ 1^{\text{ère}} + 2^{\text{ème}} \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} (1-x) & -12 & -6 \\ (1-x) & -5-x & -3 \\ 0 & -18 & -8-x \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c} 2^{\text{ère}}\text{colonne} \\ \downarrow \\ (-2)\times 3^{\text{ème}} + 2^{\text{ème}} \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} (1-x) & 0 & -6 \\ (1-x) & (1-x) & -3 \\ 0 & (-2)(1-x) & -8-x \end{vmatrix} \\
&= (1-x)^2 \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{-6} \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -8-x \end{vmatrix} \\
&= (1-x)^2 \left(-8-x-6-6(-2)\right) \\
&= (1-x)^2 (-2-x).
\end{aligned}$$

(iii) Le calcul de $p_{A_3}(x)$:

$$\begin{aligned}
p_{A_3}(x) &= \begin{vmatrix} \mathbf{1-x} & -1 & -1 \\ -1 & \mathbf{1-x} & -1 \\ -1 & -1 & \mathbf{1-x} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \\ \downarrow & \downarrow \\ c_1 - c_2 & c_2 - c_3 \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 2-x & 0 & -1 \\ -(2-x) & 2-x & -1 \\ 0 & -(2-x) & 1-x \end{vmatrix} = (2-x)^2 \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{-1} \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} \\
&= (2-x)^2 [1-x-1-1] \\
&= -(1+x)(2-x)^2.
\end{aligned}$$

D'où $p_{A_3}(x) = -(1+x)(2-x)^2$.

$(iiii)$ Le calcul de $p_{A_4}(x)$:

$$\begin{aligned}
p_{A_4}(x) &= \begin{vmatrix} 4-x & 1 & -1 \\ 2 & 5-x & -2 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{cc} 1^{\text{ère}}\text{colonne} & 2^{\text{ère}}\text{colonne} \\ \downarrow & \downarrow \\ 1^{\text{ère}}+3^{\text{ème}} & 2^{\text{ème}}+3^{\text{ème}} \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 3-x & 0 & -1 \\ 0 & 3-x & -2 \\ 3-x & 3-x & 2-x \end{vmatrix} \\
&= (3-x)^2 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \end{array} \\
&= (3-x)^2 (2-x+2+1) \\
&= (3-x)^2 (5-x).
\end{aligned}$$

Exemple 1.1.4 (a) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) En déduire le polynôme caractéristique de la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Pour la matrice A_4, on a

$$\begin{aligned}
p_{A_4}(x) &= \begin{vmatrix} \mathbf{1-x} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{1-x} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \mathbf{1-x} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \mathbf{1-x} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 1 \\ x & -x & 0 & 1 \\ 0 & x & -x & 1 \\ 0 & 0 & x & 1-x \end{vmatrix} = x^3 \begin{vmatrix} \overset{+}{-1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{0} & \overset{-}{1} \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} \\
&= x^3(-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} + x^3(-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= x^3(x-4).
\end{aligned}$$

Remarque 1.1.1 Pour la matrice A_n, on peut démontrer que

$$p_{A_n}(x) = x^{n-1}(x-n) \text{ ou } p_{A_n}(x) = x^{n-1}(n-x),\ n \geq 1.$$

Exemple 1.1.5 Calculer le polynôme caractéristique de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

On écrit,

$$
\begin{aligned}
p_A(x) &= \begin{vmatrix} 7-x & -6 & -2 \\ 2 & -x & -1 \\ 2 & -3 & 2-x \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} c_1 \\ \downarrow \\ 2\times c_3 + c_1 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3-x & -6 & -2 \\ 0 & -x & -1 \\ 2(3-x) & -3 & 2-x \end{vmatrix} \\
&= (3-x)\begin{vmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 0 & -x & -1 \\ 2 & -3 & 2-x \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} c_2 \\ \downarrow \\ 3\times c_3 - c_2 \end{matrix} \\
&= (3-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -(3-x) & -1 \\ 2 & 3(3-x) & 2-x \end{vmatrix} \\
&= (3-x)^2\begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{-2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2-x \end{vmatrix} \\
&= (3-x)^2\left(-2+x+3-2(2)\right) \\
&= (x-3)^3 .
\end{aligned}
$$

Exemple 1.1.6 Soit la matrice

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

On écrit par définition

$$\begin{aligned}
p_A(x) &= \begin{vmatrix} 3-x & 2 & -2 \\ -1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{c} c_2 \\ \downarrow \\ c_2+c_3 \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 3-x & 0 & -2 \\ -1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1-x & -x \end{vmatrix} \\
&= (1-x)\begin{vmatrix} 3-x & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{c} c_1 \\ \downarrow \\ c_1+c_3 \end{array} \\
&= (1-x)\begin{vmatrix} 1-x & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & -x \end{vmatrix} \\
&= (1-x)^2\begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{-2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} \\
&= (1-x)^2\left[(-x-1)-2(0-1)\right] \\
&= (1-x)^3.
\end{aligned}$$

D'où $p_A(x) = (1-x)^3$.

Exemple 1.1.7 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned}
p_A(x) &= \begin{vmatrix} -3-x & 1 & -1 \\ -7 & 5-x & -1 \\ -6 & 6 & -2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-x & 0 & -1 \\ -2-x & 4-x & -1 \\ 0 & 4-x & -2-x \end{vmatrix} \\
&= -(2+x)(4-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2-x \end{vmatrix} \\
&= -(2+x)(4-x)(-2-x+1-1) \\
&= (2+x)^2(4-x).
\end{aligned}$$

D'où $p_A(x) = (2+x)^2(4-x)$.

Exemple 1.1.8 Calculer le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \mathbf{1+x} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \mathbf{1+x} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \mathbf{1+x} \end{vmatrix}$$

Pour le calcul de Δ_n

- $1^{\text{ière}}$colonne $\longrightarrow 1^{\text{ière}}$colonne
- $2^{\text{ème}}$colonne $\longrightarrow 2^{\text{ème}}$colonne - $1^{\text{ière}}$colonne
- $3^{\text{ème}}$colonne $\longrightarrow 3^{\text{ème}}$colonne - $1^{\text{ière}}$colonne, ... On trouve

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \mathbf{x} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \mathbf{x} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{x} \end{vmatrix} = x^{n-1}.$$

D'où $\Delta_n = x^{n-1}$.

Proposition 1.1.2 *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $r \in \mathbb{R}^*$. On a*

$$p_{rA}(x) = r^n p_A\left(\frac{x}{r}\right) ;\ r \neq 0.$$

Preuve. En effet

$$
\begin{aligned}
p_{rA}(x) &= \begin{vmatrix} ra_{11}-x & ra_{12} & \dots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22}-x & \dots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{n1} & ra_{n2} & \dots & ra_{nn}-x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} r\left(a_{11}-\dfrac{x}{r}\right) & ra_{12} & \dots & ra_{1n} \\ ra_{21} & r\left(a_{22}-\dfrac{x}{r}\right) & \dots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{n1} & ra_{n2} & \dots & r\left(a_{nn}-\dfrac{x}{r}\right) \end{vmatrix} \\
&= r^n \begin{vmatrix} a_{11}-\dfrac{x}{r} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\dfrac{x}{r} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\dfrac{x}{r} \end{vmatrix} \\
&= r^n p_A\left(\frac{x}{r}\right).
\end{aligned}
$$

D'où le résultat. ■

Exercice 1.1.1 Soit le déterminant de vendermonde[1] suivant

$$
\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}
$$

Montrer que $\Delta = (b-a)(c-a)(c-b)$. Généraliser ?

1. En algèbre linéaire, une matrice de Vandermonde est une matrice avec une progression géométrique dans chaque ligne. Elle tient son nom du mathématicien français Alexandre-Théophile Vandermonde. Elle est, en particulier, utilisée en analyse numérique pour la résolution d'un système formé par l'interpolation polynômiale.

Solution. Nous avons

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \\ \downarrow & \downarrow \\ c_2 - c_1 & c_3 - c_2 \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b-a & c-b & c \\ b^2-a^2 & c^2-b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ b+a & c+b & c^2 \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-b)(c-a).
\end{aligned}$$

Généralement, le déterminant de Vendermonde est

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

1.1.1 Problèmes

Ex 01. On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer $p_A(x)$ et $p_B(x)$. **Rép.**

$$p_A(x) = (1+x)^2 (2-x) \text{ et } p_B(x) = -(x-2)^3$$

Ex 02. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $p_A(x) = (x+1)(x-1)(x-3)$.

Ex 03. Soit

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $p_A(x)=(2+x)^2(4-x)$.

Ex 04. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice tri-diagonale, i.e.,

$$A=\begin{pmatrix} a & b & & \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ & & c & a \end{pmatrix},\ a,b,c\in\mathbb{R}$$

Calculer $p_A(x)$.

Ex 05. On considère la matrice

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Vérifier que le polynôme caractéristique $p_A(x)$ est donné par :

$$p_A(x)=x^2-tr(A)\,x+\det(A)$$

Notons que $Tr(A)$ est la trace de A.

Ex 06. Soit la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $p_A(x)=x^4-1$.

1.2 Sur l'inverse d'une matrice carrée

Critère 1.3 *Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\det(A)\neq 0$, alors A^{-1} existe. De plus, on a la formule de A^{-1} suivante :*

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}(Com(A))^t, \tag{1.1}$$

où $Com(A)$ désigne la comatrice de A.

Remarque 1.3.1 Notons que la formule (1.1) est un cas particulier du Lemme 3.1.1. Il faut signaler que cette méthode de calcul de l'inverse d'une matrice n'a qu'un intérêt théorique.

Exemple 1.3.1 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a

$$\det(A) = ad - cb \text{ et } A^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.3.2 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{3} \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} \\ &= -3 + 24 - 24 \\ &= -3 \neq 0. \end{aligned}$$

D'après (1.1), on a

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^t \\
&= \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t \\
&= \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 12 & -8 \\ 6 & -15 & 8 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}^t = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 12 & -15 & 6 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

1.3.1 Problèmes

Ex 01. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & & & \\ & 1 & -\alpha & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -\alpha \\ & & & & 1 \end{pmatrix}; \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Prouver que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} \\ & 1 & \alpha & \dots & \alpha^{n-2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & \alpha \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Ex 02. Soit $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Supposons que A est inversible. Montrer que $p_{AB} = p_{BA}$.

1.4 Valeurs et vecteurs propres d'un endomorphisme, sous-espaces propres

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E (c'est-à-dire une application linéaire de E dans lui-même).

Définition 1.4.1 (voir, [6, p. 273]) Si il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) et un vecteur non nul $v \in E$ tels que $f(v) = \lambda v$, on dit que λ est une valeur propre de f. Si λ est une valeur propre de f, un vecteur propre de f associé λ est un vecteur v tel que $f(v) = \lambda v$.

Proposition 1.4.1 (voir, [6]) *Soit λ une valeur propre de f, le sous ensemble des vecteurs propres de f associé à λ est un sous-espace vectoriel appelé sous-espace propre de f associé à λ et noté E_λ.*

Proposition 1.4.2 (voir, [6]) *L'espace E_λ est un sous-espace vectoriel stable par f.*

Preuve. E_λ est le noyau d'un endomorphisme donc c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de départ de cet endomorphisme.

Montrons qu'il est stable par f. Soit $x \in E_\lambda$, alors $f(x) = \lambda x$. Donc

$$f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

On a montré que $f(x) \in E_\lambda$, ce qui prouve que E_λ est stable par f. ■

Remarque 1.4.1 L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé le spectre de f et est noté $Sp(f)$.

Théorème 1.4.1 (voir [6, p. 280]) *Le scalaire λ est valeur propre de f si et seulement si l'endomorphisme $f - \lambda id$ n'est pas inversible. Autrement dit si et seulement si* $\det (f - \lambda id) = 0$.

On sait que pour calculer ce déterminant on peut choisir une base quelconque de E, dans laquelle f pour matrice A, alors la matrice de $f - \lambda id$ est $A - \lambda I_n$. Le déterminant cherché est celui de cette matrice.

Théorème 1.4.2 *Le scalaire λ est valeur propre de l'endomorphisme f si et seulement si il est racine du polynôme caractéristique.*

Proposition 1.4.3 *Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ des scalaires distincts deux à deux. Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, ..., E_{\lambda_k}$ sont en somme directe.*

Proposition 1.4.4 *Soit $f \in \pounds(E)$ et λ une valeur propre de multiplicité α, alors*

$$dim E_\lambda \leq \alpha.$$

1.5 Valeurs et vecteurs propres d'une matrice carrée

Dans tout cette section $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. L'espace vectoriel $\mathbb{K}$ est identifié à l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des matrices uni colonnes à n lignes.

Définition 1.5.1 (voir [9, p. 14], [12, p. 145]) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1. On dit que le scalaire λ est valeur propre de A s'il existe un vecteur x non nul de $\mathbb{K}^n$ tel que $Ax = \lambda x$, autrement dit si $A - \lambda id_{\mathbb{K}^n}$ n'est pas injective.
2. On dit que le vecteur x non nul de $\mathbb{K}^n$ est vecteur propre de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $Ax = \lambda x$.
3. Lorsque λ est valeur propre de A, le sous-espace

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{K}^n \ ; \ Ax = \lambda x\} = \ker (A - \lambda id_{\mathbb{K}^n})$$

   est appelé sous-espace propre de A associé à λ.

Conclusion 1.5.1 Un vecteur $x \in E$ est un vecteur propre de A si

1. x est non nul,
2. il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $Ax = \lambda x$.

Remarque 1.5.1 On a

1. si λ n'est pas valeur propre, $E_\lambda = \{0\}$.
2. si λ est valeur propre, $\dim E_\lambda \geq 1$.
3. L'ensemble des valeurs propres de A appelé le spectre de A et noté $Sp(A)$.

Définition 1.5.2 On dit qu'une valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de multiplicité α si elle est racine d'ordre α du polynôme caractéristique de A. On dit qu'une valeur propre λ de A est simple quand elle est sa multiplicité est égale à 1.

Une fois déterminées les valeurs propres, on détermine l'espace des vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs en résolvant le système linéaire

$$(A - \lambda I_n)(x) = 0,$$

où A est la matrice de f dans une certaine base.

Exemple 1.5.1 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

1. D'après l'Exemple 1.1.1, les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.
2. Calculons les sous-espaces propres associés :

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\; \begin{array}{c} x + 2y = x \\ 2x + y = y \end{array} \right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y = -x\right\} \\ &= Vect\left\{(1,-1)\right\}. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\; \begin{array}{c} x + 2y = 3x \\ 2x + y = 3y \end{array} \right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y = x\right\} \\ &= Vect\left\{(1,1)\right\}. \end{aligned}$$

Exemple 1.5.2 Calculer les éléments propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rép. On a $\lambda_1 = 4,\ v_1 = (2, 3)$ et $\lambda_2 = -1,\ v_2 = (1, -1)$.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Rép. On a $\lambda_1 = e^{i\theta},\ v_1 = (-i, 1)$ et $\lambda_2 = e^{-i\theta},\ v_2 = (i, 1)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Rép. On a $\lambda_1 = 1,\ E_1 = Vect\{(1, 0)\}$ et $\lambda_2 = 5,\ E_5 = Vect\{(1, 2)\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rép. On a $\lambda = 2$ (double), $E_\lambda = Vect\{(1, 0)\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Rép. On a $\lambda_1 = 1,\ E_1 = Vect\{(1, 0, 0)\},\ \lambda_2 = 2,\ E_2 = Vect\{(2, 1, 0)\}$ et $\lambda_3 = -5,\ E_{-5} = Vect\{(5, 6, -14)\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rép. On a $\lambda_1 = 1,\ E_{\lambda_1} = Vect\{(-1, 1, 1)\},\ \lambda_2 = 2$ (double), $E_{\lambda_2} = Vect\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rép. On a $\lambda = 0$ (valeur propre triple), $E_\lambda = Vect\{(1, 0, 0), (0, 1, -1)\}$. Le sous-espace propre associé à $\lambda = 0$ est de dimension 2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rép. On a $\lambda = 2$ (valeur propre triple), $E_{\lambda} = Vect\{(0,0,1)\}$. Le sous-espace propre associé à $\lambda = 2$ est de dimension 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rép. On a $\lambda_1 = 0$ (valeur propre simple), $E_{\lambda_1} = Vect\{(-1,1,0)\}$ et $\lambda_2 = 2$ (valeur propre double), $E_{\lambda_2} = Vect\{(0,0,1),(1,1,0)\}$. Le sous-espace propre associé à λ_1 est de dimension 1 et le sous-espace propre associé à λ_2 est de dimension 2.

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 0 & 2a & 8 \\ 0 & 0 & 3a \end{pmatrix} ;\ a \in \mathbb{R}.$$

Rép. On a $\lambda_1 = a$ et $E_{\lambda_1} = Vect\{(1,0,0)\}$, $\lambda_2 = 2a$ et $E_{\lambda_2} = Vect\left\{\left(\frac{2}{a},1,0\right)\right\}$, $\lambda_3 = 3a$ et $E_{\lambda_3} = Vect\left\{\left(\frac{1}{2a^2}(3a+16), \frac{8}{a}, 1\right)\right\}$

Corollaire 1.5.1 *Soit (λ, x) un élément propre de A, alors $\left(\lambda^k, x\right)$ est un élément propre de A^k.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \Rightarrow A^2 x = A(\lambda x) = \lambda A x = \lambda^2 x \\ &\Rightarrow Ax = \lambda x \Rightarrow \forall\ k \geq 0 : A^k x = \lambda^k x. \end{aligned}$$

■

Corollaire 1.5.2 *Soit (λ, x) un élément propre de A avec $\lambda \neq 0$, alors $\left(\frac{1}{\lambda}, x\right)$ est un élément propre de A^{-1}.*

Preuve. Par définition, on a

$$\begin{aligned} A^{-1}x &= A^{-1}(1.x) = A^{-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda}.x\right) = \frac{1}{\lambda}A^{-1}(\lambda x) \\ &= \frac{1}{\lambda}A^{-1}(Ax) \quad (\text{car } Ax = \lambda x) \\ &= \frac{1}{\lambda}x. \end{aligned}$$

■

Corollaire 1.5.3 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit λ une valeur propre de A et soit $p \in \mathbb{K}[x]$. Alors $p(A)x = p(\lambda)x$ pour tout $x \in E_\lambda$.*

Preuve. Soit $x \in E_\lambda$. On a $Ix = x$, et une récurrence immédiate montre que $A^k x = \lambda^k x$ pour $k \geq 1$. Soit maintenant $p = a_0 + a_1x + ... + a_m x^m \in \mathbb{K}[x]$. On a $p(A)x = a_0x + a_1\lambda x + ... + a_m\lambda^m x^m = p(\lambda)x$. ■

Proposition 1.5.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors la sommes des valeurs propres de A, répétées selon leurs multiplicités, est égale à $Tr(A)$, et le produit des valeurs propres de A, répétées selon leurs multiplicités, est égal à $\det(A)$.*

1.5.1 Problèmes

Ex 01. Calculer les éléments propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Ex 02. Soit $P \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$ et soit D la matrice diagonale définie par

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Calculer les éléments propres de D, puis en déduire les éléments propres de la matrice PDP^{-1}.

Ex 03. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Prouver que

$$x \text{ vecteur propre de } A \Rightarrow \alpha x \text{ est un vecteur propre de } A.$$

Ex 04. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ_1, λ_2 deux valeurs propres de A avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Prouver que

$$E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

Notons que $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ Ax = \lambda x\}$.

1.6 Normes matricielles

Définition 1.6.1 (voir [10, p. 352]) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme $\|.\|$ sur E une application

$$\begin{aligned} \|.\| \quad &: \quad E \to \mathbb{R}_+ \\ x \quad &\mapsto \quad \|x\| \quad \text{(se lit : la norme de } x\text{)} \end{aligned}$$

telle que

1. $\forall\, x \in E : \|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$;
2. $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \forall\, x \in E : \|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$;
3. $\forall\, x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dans ce cas, l'espace $(E, \|.\|)$ est dit espace vectoriel normé (**e.v.n**).

Exemple 1.6.1 Dans ce cours, on utilise seulement les deux espaces vectoriels, $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. On définit sur $\mathbb{K}^n$ les normes suivantes

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \ \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|x\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq n} (|x_i|) \end{aligned}$$

2. Sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit les normes

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \ \text{ et } \ \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Notons que pour $x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^t$, on a

$$\|x\|_1 = 4, \quad \|x\|_2 = \sqrt{6} \text{ et } \|x\|_\infty = 2.$$

et pour $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\|A\|_1 = \max(8,5) = 8 \text{ et } \|A\|_\infty = \max(3,10) = 10.$$

Lemme 1.6.1 ([10]) *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a*

$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|.$$

1.7 Produit Scalaire

Définition 1.7.1 (voir, [6, p. 333]) *Soit E un espace vectoriel. Le produit* *scalaire sur $\mathbb{R}$ est une application définie par*

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle \quad &: \quad E \times E \to \mathbb{R} \\ (x, y) \quad &\mapsto \quad \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

telle que

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ *et* $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
2. $\forall\ x, y \in E : \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle .$
3. $\forall\ x, y \in E,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R} : \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. $\forall\ x, y, z \in E : \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle .$

On définit sur $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire $\langle .,. \rangle$ par

$$\forall\ x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^t, y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Remarque 1.7.1 Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a

$$\langle x, y \rangle = x^t y.$$

Notons que le produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$ est donné par

$$\langle x, y \rangle = x^t \overline{y}, \tag{1.2}$$

où $\overline{y}$ est le conjugué de y.

Exemple 1.7.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver une matrice symétrique $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$x^t A x = x^t B x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} x^t A x &= \left(x^t A x\right)^t \quad (\text{car } x^t A x = a \in \mathbb{R}) \\ &= x^t A^t x, \end{aligned}$$

de sorte que

$$x^t A x = \frac{1}{2} x^t A x + \frac{1}{2} x^t A^t x = x^t \frac{A + A^t}{2} x.$$

Notons que la matrice $B = \dfrac{A + A^t}{2}$ est symétrique.

On définit sur l'espace vectoriel $C([a,b])$ le produit scalaire

$$\forall\ f, g \in C([a,b]) : \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

Proposition 1.7.1 *Soient A une matrice symétrique et $(\alpha, x), (\beta, y)$ deux éléments propres de A avec $\alpha \neq \beta$, alors $x \perp y$; i.e.,*

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Preuve. En effet, on a

$$\begin{aligned} \alpha \langle x, y \rangle &= \langle \alpha x, y \rangle = \langle A x, y \rangle \\ &= \left\langle x, A^t y \right\rangle = \langle x, A y \rangle \\ &= \langle x, \beta y \rangle = \beta \langle x, y \rangle, \end{aligned}$$

et puisque $\alpha \neq \beta$, implique $\langle x, y \rangle = 0$. ■

1.7.1 Problèmes

Ex 01. On considère l'équation

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0. \tag{1.3}$$

Écrire (1.3) sous la forme $X^tAX = 0$, où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Rép. $A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$.

Ex 02. Écrire l'équation $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 0$ sous la forme $X^tAX = 0$, où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Ex 03. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-ce-que

$$\left(x^tAx = 0\,;\, \forall\ x \in \mathbb{R}^n\right) \Rightarrow A = 0\ ?$$

Rép. Non, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.8 Matrices Symétriques

Définition 1.8.1 (voir, [6, p. 403]) Soit A une matrice (carrée ou non).

On appelle transposée de A, et l'on note A^t la matrice dont les lignes sont les colonnes de A, i.e., la matrice A^t obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A. Nous avons

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \Rightarrow A^t = (a_{ji})_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq i\leq m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}).$$

Il est clair que l'application $A \mapsto A^t$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, et que si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on a

$$\left(A^t\right)^t = A.$$

D'autre part si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a

$$(AB)^t = B^t A^t \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K}).$$

Exemple 1.8.1 Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}),$$

alors

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}).$$

Théorème 1.8.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A et A^t ont même valeurs propres.*

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(A - xI) = \det\left((A - xI)^t\right) \quad (\text{car } \det B = \det B^t) \\ &= \det\left(A^t - xI\right) \\ &= p_{A^t}(x). \end{aligned}$$

Donc, A et sa transposée ont le même polynôme caractéristique. ■

Définition 1.8.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. A est dite symétrique si, et seulement, si $A^t = A$.

Exemple 1.8.2 *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

est symétrique ; car $A^t = A$.

Corollaire 1.8.1 *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^t A$ et AA^t sont toujours symétriques.*

Preuve. Il est clair que

$$\left(A^t A\right)^t = A^t \left(A^t\right)^t = A^t A.$$

Donc pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^t A$ est symétrique. ■

Proposition 1.8.1 *Les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réels.*

Preuve. Voir la matrice Hermitienne et le Théorèème 1.11.1. ■

Corollaire 1.8.2 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et soit $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$ avec $m \geq 1$. La matrice*

$$\alpha_0 I + \alpha_1 A + ... + \alpha_m A^m$$

est aussi symétrique.

Preuve. (Facile). ■

1.9 Matrices anti-symétriques

Définition 1.9.1 Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. A est dite anti-symétrique $\Leftrightarrow A^t = -A \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}$, pour tous $i, j \in \overline{1, n}$.

Lemme 1.9.1 *Toute matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit $A + B$, avec A anti-symétrique et B symétrique.*

Preuve. Il est claire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}\left(M - M^t\right)}_{\text{anti-symétrique}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(M + M^t\right)}_{\text{symétrique}}.$$

■

Théorème 1.9.1 *Soit B une matrice anti-symétrique ; i.e., $B^t = -B$, alors la matrice $A = I - B$ est inversible.*

Remarque 1.9.1 Notons qu'une matrice A est inversible $\Leftrightarrow (Ax = 0 \Rightarrow x = 0)$.

Démonstration du Théorème 1.9.1 . Il suffit de prouver $Ax = 0$ implique $x = 0$. En effet, si $Ax = 0$, il vient

$$Bx = x.$$

Ce qui donne

$$\langle x, x\rangle = \langle x, Bx\rangle$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
x^t x &= x^t B x \\
&\Rightarrow x^t x = x^t B^t x \quad \left(\text{car } \left(x^t x\right)^t = x^t x \text{ et } \left(x^t B x\right)^t = x^t B^t x\right) \\
&\Rightarrow x^t x = x^t(-B)\,x \quad (\text{car } B \text{ est anti-symétrique}) \\
&\Rightarrow x^t x = -x^t B x \\
&\Rightarrow x^t x = -x^t x \\
&\Rightarrow x^t x = 0.
\end{aligned}$$

Posons $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^t$, on trouve

$$x^t x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 0.$$

D'où $x_i = 0$ pour tout $i \in \overline{1,n}$. Par conséquent $x = 0$. ■

1.9.1 Problèmes

1. Vérifier que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

est anti-symétrique.

2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans ce cas, on a

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),$$

où $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques.

1.10 Matrices Orthogonales

Définition 1.10.1 (voir, [10, p. 141]) *Une matrice A est dite orthogonale si et seulement, si $A^t = A^{-1}$.*

Exemple 1.10.1 La matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix};\ \theta \in \mathbb{R}$$

est orthogonale, car

$$A^t A = AA^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Une telle matrice possède les propriétés suivantes :

1. Ces vecteurs colonnes (lignes) sont orthonormales,
2. $A^t A = AA^t = I_n$,
3. $A^t = A^{-1}$,
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n : \|Ax\| = \|x\|$,
5. $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$.

Corollaire 1.10.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale, alors*

$$\det(A) = \pm 1.$$

Preuve. Puisque $A^t = A^{-1}$, implique $A^t A = I_n$. Ce qui donne

$$\det\left(A^t A\right) = \det\left(A^t\right)\det(A) = (\det(A))^2 = \det(I_n) = 1.$$

D'où $\det(A) = \pm 1$. ■

Théorème 1.10.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1) A est orthogonale.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n : \|Ax\| = \|x\|$.

3) $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$.

Preuve. 1)$\Rightarrow$2). Supposons que A orthogonale. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \langle Ax, Ax \rangle = \left\langle x, A^t A x \right\rangle \\ &= \langle x, I_n x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 . \end{aligned}$$

D'où $\|Ax\| = \|x\|$.

2)$\Rightarrow$3). Supposons que $\forall\ x \in \mathbb{R}^n : \|Ax\| = \|x\|$. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|A(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2 ;$$

C'est-à-dire

$$\langle Ax + Ay, Ax + Ay \rangle = \langle x + y, x + y \rangle ,$$

de sorte que

$$\langle Ax, Ax \rangle + \langle Ay, Ay \rangle + 2 \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2 \langle x, y \rangle$$

Donc $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$.

3)$\Rightarrow$1). Supposons que $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$. Donc

$$\left\langle x, A^t A y \right\rangle = \langle x, y \rangle$$

i.e.,

$$\left\langle x, A^t A y - y \right\rangle = 0$$

En particulier, pour $x = x^t A y - y$, on obtient

$$\left\| A^t A y - y \right\|^2 = 0.$$

D'où $A^t A y = y$. Et par conséquent $A^t A = I_n$. ■

Exercice 1.10.1 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Prouver que $e^{\theta A}$ est orthogonale[2].

Exercice 1.10.2 *Soit A une matrice orthogonale. Prouver que*

1. *A^{-1} est orthogonale.*
2. *Pour tout $\lambda \in Sp(A) \Rightarrow |\lambda| = 1$.*
3. *Si A_1 et A_2 sont deux matrices orthogonales, alors $A_1 A_2$ l'est aussi.*

1.11 Matrices Hermitiennes

Définition 1.11.1 (voir [10, p. 280]) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La

matrice $(\overline{a_{ij}})_{1 \leq i,j \leq n}$ est appelée conjuguée de A, on la note $\overline{A}$. La matrice transposée de la conjuguée de A est appelée matrice adjointe de A, on la note A^* ou encore $\overline{A^t} = (\overline{A})^t$. On dit que A est hermitienne[3] si elle est égale à son adjointe, i.e., $A^* = A$.

Exemple 1.11.1 La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & -2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{pmatrix}$$

est hermitienne ; car $A^* = A$.

2. Voir le Chapitre 2.3, calculer l'expression de $e^{\theta A}$ puis montrer qu'elle est orthogonale.
3. Par contre, la matrice A est dite anti-hermitienne si et seulement, si $A^* = -A$.

Proposition 1.11.1 *Les coefficients diagonaux d'une matrice hermitienne sont réels.*

Preuve. D'après la Définition 1.11.1, la démonstration est évidente. ■

Théorème 1.11.1 *Les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont réelles.*

Preuve. Soit (λ, x) un élément propre d'une matrice hermitienne. Montrons que $\lambda \in \mathbb{R}$. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\lambda \langle x, x\rangle &= \langle \lambda x, x\rangle \quad \text{(d'après la définition)} \\
&= \langle Ax, x\rangle \quad (\text{car } Ax = \lambda x) \\
&= (Ax)^t \, \overline{x} \quad \text{(d'après (1.2))} \\
&= x^t A^t \overline{x} \qquad \text{(résultat connu)} \\
&= x^t \left(\overline{A}^t\right)^t \overline{x} \quad (\text{car } A \text{ est hermitienne}) \\
&= x^t \overline{Ax} \\
&= \langle x, Ax\rangle \quad \text{(d'après (1.2))} \\
&= \langle x, \lambda x\rangle \quad (\text{car } Ax = \lambda x) \\
&= \overline{\lambda} \langle x, x\rangle \quad \text{(d'après la définition)}
\end{aligned}$$

D'où $\lambda = \overline{\lambda}$, car $x \neq 0$.

Remarque 1.11.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On peut facilement prouver que les matrices $A + A^*$, AA^* et A^*A sont hermitiennes.

■

1.12 Matrice Unitaire

Définition 1.12.1 Une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite unitaire si, et seulement, si

$$U^{-1} = U^*.$$

Autrement dit, une matrice carrée U à coefficients complexes est dite unitaire si elle vérifie les égalités :

$$U^*U = UU^* = I_n.$$

1. L'ensemble des matrices unitaires de taille n forme le groupe unitaire $U(n)$.
2. Les matrices unitaires à coefficients réels sont les matrices orthogonales.

Exemple 1.12.1 La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

est unitaire ; car

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Toute matrice unitaire U vérifie les propriétés suivantes :

a. son déterminant est de module 1 ;

b. ses vecteurs propres sont orthogonaux ;

c. U est diagonalisable, i.e.,

$$U = VDV^*$$

où V est une matrice unitaire et D est une matrice diagonale et unitaire.

d. U peut s'écrire sous la forme d'une exponentielle d'une matrice :

$$U = e^{iH},$$

où i est l'unité imaginaire et H est une matrice hermitienne.

Proposition 1.12.1 *Soit U une matrice carrée de taille n à coefficients complexes ; les cinq propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *U est unitaire ;*
2. *U^* est unitaire ;*
3. *U est inversible et son inverse est U^* ;*
4. *les colonnes de U forment une base orthonormale pour le produit hermitien canonique sur $\mathbb{C}^n$;*
5. *U est normale et ses valeurs propres sont de module 1.*

Chapitre 2

Matrices semblables et matrices diagonalisables

2.1 Matrices semblables

On va maintenant introduire la notion de similarité, voir [4, p. 383-464].

Définition 2.1.1 Deux matrices A et B de même type sont dites **semblables** s'il existe une matrice P inversible telle que

$$A = PBP^{-1}.$$

Notation 2.1.1 La notation $A \sim B$ signifie que la matrice A est semblable avec la matrice B.

On a les propriétés suivantes.

Théorème 2.1.1 *Soient A et B deux matrices semblables ; i.e., il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. Alors*

1. *pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$.*

2. $p_A(x) = p_B(x)$, *c'est-à-dire* A *et* B *ont le même polynôme caractéristique.*

Preuve. Montrons le théorème comme suit :

1. Soient A et B deux matrices semblable. Supposons qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. Pour tout entier $k \geq 0$ on a

$$\begin{aligned} A^k &= \underbrace{\left(PBP^{-1}\right)\left(PBP^{-1}\right)...\left(PBP^{-1}\right)}_{k-\text{fois}} \\ &= P\underbrace{BB...B}_{k-\text{fois}}P^{-1} \\ &= PB^kP^{-1}. \end{aligned}$$

2. Montrons que

$$A \sim B \Rightarrow p_A(x) = p_B(x). \tag{2.1}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(A - xI) \\ &= \det\left(PBP^{-1} - xPP^{-1}\right) \quad \text{car } x \in \mathbb{R} \\ &= \det\left(P(B - xI)P^{-1}\right) \\ &= \det(P)\det(B - xI)\det\left(P^{-1}\right) \qquad (2.2) \\ &= \det(B - xI) \qquad (2.3) \\ &= p_B(x). \end{aligned}$$

Notons que le passage de (2.2) à (2.3) parce que $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$.

■

Remarque 2.1.1 La réciproque de (2.1) est fausse. Par exemple, pour

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$$

On voit que $p_A(x)=p_B(x)$ et par conséquent, $Sp(A)=Sp(B)=\{1\}$ et $\det(A)=\det(B)$. De plus, si A est semblable avec B il existe donc une matrice P inversible telle que

$$A=PBP^{-1}=PI_2P^{-1}=I_2.$$

Une contradiction, i.e., $A\nsim B$. On peut également écrire

$$\begin{cases} Sp(A)=Sp(B)\nRightarrow A\sim B,\\ p_A(x)=p_B(x)\nRightarrow A\sim B,\\ \det(A)=\det(B)\nRightarrow A\sim B.\end{cases}$$

Remarque 2.1.2 En appliquant la règle suivante :

$$\det(A)=0\Leftrightarrow 0\in Sp(A). \tag{2.4}$$

Soient A et B deux matrices semblables, i.e., il existe une matrice P inversible telle que $A=PBP^{-1}$. On peut également prouver que $Sp(A)=Sp(B)$. Soit $\lambda\in Sp(A)$, il existe un vecteur non nul x tel que $Ax=\lambda x$. Donc

$$(A-\lambda I)x=0=0.x$$

Ce qui donne $0\in Sp(A-\lambda I)$. D'autre part, on a

$$A-\lambda I=P(B-\lambda I)P^{-1}. \tag{2.5}$$

Supposons que $0\notin Sp(B-\lambda I)$, de (2.4) et (2.5) on a $B-\lambda I\in\mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$. Par suite, $A-\lambda I\in\mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$. D'après (2.4), $0\notin Sp(A-\lambda I)$. Une contradiction.

Finalement, on en déduit que $0\in Sp(B-\lambda I)$, et par conséquent $\lambda\in Sp(B)$. D'où $Sp(A)\subset Sp(B)$.

Corollaire 2.1.1 *Deux matrices semblables A et B ont même déterminant.*

Preuve. Soient A et B deux matrices semblable, il existe donc une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. Donc

$$\det(A) = \det\left(PBP^{-1}\right) = \det(P)\det(B)\det\left(P^{-1}\right) = \det(B).$$

■

Exemple 2.1.1 On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

On voit que $A \nsim B$, car $\det(A) = -1 \neq \det(B) = -3$. On a donc le résultat

$$\det(A) \neq \det(B) \Rightarrow A \nsim B.$$

Théorème 2.1.2 *La relation " $\sim$ " similarité est une relation d'équivalence.*

Preuve. Cette relation est ce qu'on appelle une relation d'équivalence, car on a les trois propriétés suivantes :

1. La relation " $\sim$ " est réflexive, car pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$A = I_n A I_n^{-1}$$

Donc $A \sim A$.

2. La relation " $\sim$ " est symétrique, car pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$A \sim B \Rightarrow \exists\ P \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } A = PBP^{-1}$$

Il vient

$$B = \underbrace{P^{-1}}_{C} AP = CAC^{-1} \text{ avec } C \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$$

Donc $B \sim A$.

3. La relation " $\sim$ " est transitive, car pour toutes matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\left.\begin{array}{l} A \sim B \\ B \sim C \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\ P \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } A = PBP^{-1} \\ \exists\ Q \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } B = QCQ^{-1} \end{array}\right.$$

Ceci implique

$$A = P\left(QCQ^{-1}\right)P^{-1} = \underbrace{(PQ)}_{R} C (PQ)^{-1} = RCR^{-1} \text{ avec } R \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Donc $A \sim C$.

■

Proposition 2.1.1 *Soit $P \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$. On définit l'application T_P par*

$$\begin{array}{rcl} T_P & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & T_P(A) = P^{-1}AP. \end{array}$$

Alors

1. $T_P(I_n) = I_n$
2. $T_P(A + B) = T_P(A) + T_P(B)$
3. $T_P(AB) = T_P(A)\,T_P(B)$
4. $T_P(rA) = rT_P(A)$
5. $T_P\left(A^k\right) = (T_P(A))^k$

6. $T_P\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{T_P\left(A\right)}$
7. $T_P\left(e^A\right) = e^{T_P(A)}$
8. $T_Q\left(T_P\left(A\right)\right) = T_{PQ}\left(A\right).$

Preuve. 8. Nous avons

$$T_Q\left(T_P\left(A\right)\right) = Q^{-1}T_P\left(A\right)Q = Q^{-1}\left(P^{-1}AP\right)Q = \left(PQ\right)^{-1}A\left(PQ\right) = T_{PQ}\left(A\right).$$

■

Remarque 2.1.3 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $A \sim B$, alors

$$A \in \mathbb{GL}_n\left(\mathbb{R}\right) \Leftrightarrow B \in \mathbb{GL}_n\left(\mathbb{R}\right).$$

Conclusion 2.1.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $B = P^{-1}AP \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice semblable à A. Alors A et B ont le même polynôme caractéristique. De plus $q(A) = Pq(B)P^{-1}$ pour tout $q \in \mathbb{K}[X]$, et en particulier $A^k = PB^kP^{-1}$pour $k \geq 1$.

Corollaire 2.1.2 *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A et B sont semblables, alors $Tr(A) = Tr(B)$.*

Preuve. On sait que

$$\forall\ M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : T\left(MN\right) = Tr\left(NM\right).$$

Donc

$$Tr\left(A\right) = Tr\left(PBP^{-1}\right) = Tr\left(BPP^{-1}\right) = Tr\left(B\right).$$

■

Corollaire 2.1.3 *Deux matrice semblables ont même rang.*

Preuve. A et B représentent le même endomorphisme f.

$$\left.\begin{array}{l} rang\,(A) = \dim\,(Imf) \\ rang\,(B) = \dim\,(Imf) \end{array}\right\} \Rightarrow rang\,(A) = rang\,(B)\,.$$

■

Conclusion 2.1.2 Deux matrices semblables ont même déterminant, même trace, même rang, même polynôme caractéristique, même valeurs propres.

Par contre, on a le résultat absolument remarquable suivant.

Théorème 2.1.3 *En dimension* 2 *et* 3*, deux matrices sont semblables ssi elles ont même polynôme minimal et même polynôme caractéristique.*

2.1.1 Problèmes

Ex 01. Soient A et B deux matrices semblables, i.e., il existe donc une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. Prouver que

(λ, x) élément propre de $A \Rightarrow \left(\lambda, P^{-1}x\right)$ est un élément propre de B.

Ex 02. Soient A, B $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f\,(x) = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{R}\,[X]$ un polynôme de degré n. Prouver que

$$A \sim B \Rightarrow f\,(A) \sim f\,(B)\,.$$

Ex 03. On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A \nsim B$; i.e., A et B ne sont pas semblables.

Ex 04. Prouver que

$$A - \lambda I \sim B \Rightarrow A \sim B + \lambda I$$

Ex 05. En utilisant deux méthodes. Prouver que les matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

Ex 06. Montrer que

$$A \sim B \Rightarrow e^A \sim e^B.$$

Ex 07. Sans calculer, ni valeurs propres ni vecteurs propres, montrer que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2 Matrices diagonalisables

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E. Si on se place dans une base de E, on peut représenter f par une matrice. Le but de ce chapitre est de trouver une base de E telle que la matrice représentant f dans cette base soit la plus "simple" possible (on prend la même base pour E ensemble de départ que pour E ensemble d'arrivée). On peut voir, [6, p. 288-296], [13].

Définition 2.2.1 On a

1. Soit $f \in End(E)$. On dit que f est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.
2. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. A est dite **diagonale**, si seulement, si

$$a_{ij} = 0, \ \forall\, i \neq j.$$

On écrit aussi

$$A = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

3. A est dite diagonalisable si A est semblable avec une matrice diagonale i.e.,

$$A \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \exists\ P \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R}) \ : A = PDP^{-1},$$

où $D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$.

Remarque 2.2.1 Si A est diagonalisable, les termes qui apparaissent sur la diagonale de la matrice représentant f dans une base de vecteurs propres sont les valeurs propres associées.

Exemple 2.2.1 Considérons les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après un calcul simple, on trouve $A = PDP^{-1}$. Donc A est diagonalisable.

Mais, la question posée est de savoir comment déterminer P et D s'ils existent. Voici le théorème suivant.

Théorème 2.2.1 (Condition nécessaire et suffisante de diago-, [10, p. 245]) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. A est diagonalisable si seulement, s'il existe une base B de $\mathbb{R}^n$ formée de n vecteurs propres de A.*

Preuve. Supposons que A diagonalisable, il existe donc une matrice inversible P telle que

$$A = PDP^{-1}$$

Ce qui équivaut

$$P^{-1}AP = D.$$

Posons

$$P = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Pe_1 & Pe_2 & \dots & Pe_n \end{bmatrix},$$

où $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} = diag\left\{d_{1,}d_2, ..., d_n\right\}.$$

Ceci implique

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Ay_1 & Ay_2 & \dots & Ay_n \end{bmatrix} &= AP \\ &= I_nAP \\ &= PP^{-1}AP \\ &= PD \\ &= P\begin{bmatrix} d_1e_1 & d_2e_2 & \dots & d_ne_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_1Pe_1 & d_2Pe_2 & \dots & d_nPe_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_1y_1 & d_2y_2 & \dots & d_ny_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que $\forall\ i \in \overline{1,n}$, $Ay_i = d_iy_i$. Donc y_i est un vecteur propre de A associé à d_i et puisque P inversible, alors la famille $B = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Réciproquement, s'il existe une base $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formée par des vecteurs propres de A. Dans ce cas, posons

$$P = \left[\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array}\right]$$

On a donc

$$\begin{aligned} AP &= \left[\begin{array}{cccc} Ax_1 & Ax_2 & \dots & Ax_n \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cccc} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_n x_n \end{array}\right], \end{aligned}$$

où $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ sont les valeurs propres de A associés à $(x_i)_{1\leq i\leq n}$, respectivement. Ce qui donne

$$\begin{aligned} AP &= \begin{pmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{21} & \dots & \lambda_n x_{n1} \\ \lambda_1 x_{12} & \lambda_2 x_{22} & \dots & \lambda_n x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1 x_{1N} & \lambda_2 x_{2N} & \dots & \lambda_n x_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= PD. \end{aligned}$$

D'où $A = PDP^{-1}$, où D est diagonale et P inversible. ∎

Corollaire 2.2.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable, alors il existe une base $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formée par n vecteurs propres de A.*

Preuve. Supposons que $A = PDP^{-1}$. On sait que $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ sont des vecteurs propres de D associés à $diag(D)$, i.e.,

$$De_i = P^{-1}APe_i = \lambda_i e_i, \text{ pour } i = 1, 2, ..., n.$$

D'où

$$APe_i = \lambda_i Pe_i, \text{ pour } i = 1, 2, ..., n.$$

Donc $\{Pe_i\}_{1\leq i\leq n}$ sont des vecteurs propres de A et puisque P inversible, alors $\{Pe_i\}_{1\leq i\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. ■

Exemple 2.2.2 Montrer que la matrice suivante est diagonalisable.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est $p_A(x) = (x-7)(x-3)^3$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 7$ (simple), et $\lambda_2 = 3$ (triple). Les vecteurs propres associés sont $v_1 = (1,1,1,1)$ pour λ_1, $v_2 = (-1,1,0,0)$, $v_3 = (-1,0,1,0)$ et $v_4 = (-1,0,0,1)$ pour λ_2. La matrice A est donc diagonalisable ; car $\dim E_{\lambda_i} = m_i$, pour $i = 1, 2$.

D'après le Théorème 2.2.1, on a la remarque suivante :

Remarque 2.2.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

Exemple 2.2.3 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Calculer $\lim_{n\to+\infty} A^n$.

Tout d'abord, calculons les valeurs et vecteurs propres de A. D'après le calcul, on trouve

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1, \ v_1 = (1,1), \\ \lambda_2 = \frac{1}{4}, \ v_2 = (-2,1). \end{cases}$$

Comme $A = PDP^{-1}$, alors $A^k = PD^kP^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Ce qui donne

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} A^n &= \lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Proposition 2.2.1 *Soient A et B deux matrices diagonalisables avec $P^{-1}AP = D_1$ et $P^{-1}BP = D_2$ pour une matrice inversible P, alors $AB = BA$.*

Preuve. On vérifie aisément que si $P^{-1}AP = D_1$ et $P^{-1}BP = D_2$, il vient

$$\begin{cases} A = PD_1P^{-1} \\ B = PD_2P^{-1} \end{cases}$$

Notons que $D_1D_2 = D_2D_1$, et par conséquent

$$AB = PD_1D_2P^{-1} = PD_2D_1P^{-1} = PD_2P^{-1}PD_1P^{-1} = BA.$$

D'où le résultat. ■

Définition 2.2.2 $\lambda \in \mathbb{R}$ est dite valeur propre de multiplicité m si seulement, si

$$p_A(x) = (x-\lambda)^m q(x) \text{ avec } q(\lambda) \neq 0.$$

Corollaire 2.2.2 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Supposons que*

$$p_A(x) = (x-\lambda_1)^{\alpha_1}(x-\lambda_2)^{\alpha_2}\dots(x-\lambda_k)^{\alpha_k}, \text{ où } k \leq n.$$

Alors, A est diagonalisable si seulement, si $\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i$, pour $i = 1, 2, ..., k$.

Exemple 2.2.4 Pour les matrices suivantes, en calculant les éléments propres

on trouve

Matrice	$p_A(x)$	$Sp(A)$	multiplicité	$\dim E_\lambda$
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$x(x-2)^2$	0 2	1 2	1 2
$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$(x+1)^2(x-3)$	-1 3	2 1	1 1
$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$(x+1)(x-1)(x-3)$	-1 1 3	1 1 1	1 1 1

On en déduit que A et B sont diagonalisables, mais B ne l'est pas.

Exemple 2.2.5 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Alors $p_A(x) = (x-3)(x+1)^2$ et A n'est diagonalisable ni sur $\mathbb{R}$, ni sur $\mathbb{C}$. En effet, on a

$$E_{-1} = Vect\{(1,-2,-1)\}$$

Dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{C}^3$, E_{-1} est un espace vectoriel de dimension 1 engendré par $(1,-2,-1)$. Comme -1 est une valeur propre de A de multiplicité 2, A n'est pas diagonalisable.

Corollaire 2.2.3 (voir [1, p. 123]) *L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si E est somme directe de ses sous-espaces propres.*

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Si on note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f, on a

Corollaire 2.2.4 (voir [1, p. 124]) *L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si*

$$\dim E = \dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + ... + \dim E_{\lambda_k}.$$

Théorème 2.2.2 (voir [1, p. 124]) *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si les deux propositions suivantes sont vérifiées*

1. *$p_f(x)$ est scindé dans $\mathbb{K}$, ce qui veut dire que*

   $$p_f(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{\alpha_1} (x-\lambda_2)^{\alpha_2} ... (x-\lambda_k)^{\alpha_k},$$

   avec $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ scalaires et $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = n$.

2. *Pour chaque valeur propre λ de multiplicité α, on a*

   $$\dim E_\lambda = \alpha.$$

Corollaire 2.2.5 *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n. Si f admet n valeurs propres distinctes deux à deux, alors f est diagonalisable.*

Corollaire 2.2.6 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice possède une valeur propre unique λ, alors A est diagonalisable si et seulement, si $A = \lambda I_n$.*

Preuve. Il est clair que si $A = \lambda I_n$, alors A est diagonalisable. Réciproquement, supposons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable et possède une valeur propre unique λ, il existe donc une matrice P inversible telle $P^{-1}AP$ soit diagonale. Posons $P^{-1}AP = D$, où $diag\,(D) = Sp\,(A) = \{\lambda\}$. Donc

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} = \lambda P \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \lambda P I_n P^{-1} = \lambda I_n.$$

D'où le résultat. ■

2.2.1 Applications de la diagonalisation

Calcul de la puissance d'une matrice :

Une application classique est le calcul des puissances d'une matrice A. Supposons que A soit diagonalisable. C'est-à-dire qu'il existe P et D avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et $D = P^{-1}AP$. On a pour tout entier $k \geq 0$

$$A^k = PD^kP^{-1}.$$

La formule précédente se généralise alors à $k \in \mathbb{Z}$. La matrice A est alors inversible si, et seulement si, D est inversible et

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}.$$

Exercice 2.2.1 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n, où $n \geq 0$.

Solution. Calculons le polynôme caractéristique de A

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ -1 & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ 1-x & 2-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)(3-x). \end{aligned}$$

Donc $Sp(A) = \{1, 3\}$.

Calculons les vecteurs propres de A :

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \begin{array}{c} 2x - y = x \\ -x + 2y = y \end{array} \right\} \\ &= Vect\{(1,1)\}. \end{aligned}$$

Et aussi, on a

$$\begin{aligned} E_3 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \begin{array}{c} 2x - y = 3x \\ -x + 2y = 3y \end{array} \right\} \\ &= Vect\{(1,-1)\}. \end{aligned}$$

Posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Il vient

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{1+3^n}{2} & \dfrac{1-3^n}{2} \\ \dfrac{1-3^n}{2} & \dfrac{1+3^n}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Remarque 2.2.3 Si A est la matrice d'un endomorphisme f dans la base B_0, alors P est la matrice de passage de la base B_0 à une base B de vecteurs propres de A. La matrice P est obtenue en mettant les coordonnées dans la base B_0 des vecteurs propres de A en colonnes (De l'ordre des vecteurs propres dans la base B dépend l'ordre des valeurs de la diagonale de D, et réciproquement).

Soit

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ceci permet de calculer les suites linéaires récurrentes [10, p. 254].

$$U_k = AU_{k-1},\, U_k = A^k U_0.$$

Proposition 2.2.2 *Soit A une matrice diagonalisable* [1] *avec $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$, alors*

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 .... \lambda_n. \tag{2.7}$$

1. Notons que le résultat de l'équation (2.7) est toujours vrai pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable ou non.

Preuve. Supposons que $A = PDP^{-1}$, où $D = diag\left\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right\}$. Donc

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det\left(PDP^{-1}\right) \\ &= \det(P)\det(D)\det\left(P^{-1}\right) \\ &= \det(D) \\ &= \lambda_1\lambda_2....\lambda_n.\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Exemple 2.2.6 Soient l'application

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ p \quad &\mapsto \quad f(p) = 3xp - \left(x^2 - 1\right)p' \end{aligned}$$

et $\mathcal{B} = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Calculer $M_f(\mathcal{B})$.
2. f est-elle diagonalisable ? si oui, effectuer la diagonalisation.

   Solution. Il y a trois étapes :

▷ Le calcul de $M_f(\mathcal{B})$. On voit que

$$\begin{cases} f(1) = 3x = 0 + 3x + 0x^2 + 0x^3 \\ f(x) = 1 + 2x^2 = 1 + 0x + 2x^2 + 0x^3 \\ f(x^2) = 2x + x^3 = 0 + 2x + 0x^2 + 1x^3 \\ f(x^3) = 3x^2 = 0 + 0x + 3x^2 + 0x^3 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$M_f(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

▷ Calculons le polynôme caractéristique de $M_f(\mathcal{B})$. En effet, on a

$$p_{M_f(\mathcal{B})}(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -x & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -x & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = x^4 - 10x^2 + 9.$$

Les valeurs propres de A sont $\{-1, 1, -3, 3\}$. D'après le Corollaire 2.2.5, $M_f(\mathcal{B})$ est diagonalisable.

▷ Diagonalisation de $M_f(\mathcal{B})$: Tout d'abord, calculons les vecteurs propres de $M_f(\mathcal{B})$, on trouve

$$M_f(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Problèmes

Ex 01. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice carrée telle que

$$p_A(x) = (x-1)(x-2)^2.$$

A est-elle diagonalisable ?

Ex 02. Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E. Montrer que

$$E = \ker f \oplus Imf.$$

Ex 03. Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel réel vérifiant $f^k = id_E$ pour un certain entier naturel k. Montrer que

$$f^2 = id_E.$$

Ex 04. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer $(A - 2I_3)$, puis $(A - 2I_3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Ex 05. Soit M une matrice carrée complexe vérifiant $M^k = I$ pour un certain entier naturel k. Montrer que M est diagonalisable.

Ex 06. Étudier la diagonalisation de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix};\ a \in \mathbb{R}$$

Rép. A est diagonalisable $\Leftrightarrow a = 0$.

Ex 07. Vérifier que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable. **Rép :** $Sp\,(A) = \{1, 2, 3\}$.

Ex 08. Étudier la diagonalisation de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix};\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Ex 09. Vérifier que les matrices de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ c \neq 0$$

ne sont pas diagonalisables.

Ex 10. On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

– Vérifier que A et B ont même valeurs propres.

– Prouver que $A \nsim B$.

Ex 11. Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas diagonalisable.

Ex 12. Soit la matrice

$$A = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S^{-1}\,;\; S \in \mathbb{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ et } \lambda_{1,}\lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Calculer le déterminant de A et A^{-1}.

Ex 13. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables ?. Si oui, déterminer une base de vecteurs propres.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$, \begin{pmatrix} -7 & -2 & 1 \\ 28 & 8 & -4 \\ 31 & 10 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -7 \\ -12 & -6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Ex 14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalosable $\Leftrightarrow A^t$ est diagonalisable.

Ex 15. Étudier la diagonalisation de la matrice suivante

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};a\neq 0 \text{ et } b,c,d,e,f\in\mathbb{R}.$$

Ex 16. Étudier la diagonalisation des matrices suivantes

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } A_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Rép. A_1 : Oui, A_2 : Non

Ex 17. Soient A et B deux matrices diagonalisables avec $P^{-1}AP=D_1$ et $P^{-1}BP=D_2$ avec P inversible et D_1,D_2 sont diagonales. Prouver que $AB=BA$.

Ex 18. Discuter la diagonalisation, selon $a,b\in\mathbb{R}$ de la matrice

$$A=\begin{pmatrix} a & b & a-b \\ b & 2b & -b \\ a-b & -b & a \end{pmatrix};\ ab\neq 0$$

et trouver α,β et γ tels que

$$A^3=\alpha A^2+\beta A+\gamma I_3.$$

Rép. $p_A(x)=x(x-3b)(x-2a+b)$.

Ex 19. Déterminer le réel a pour que la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable.

Ex 20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable avec $Sp(A) = \{-1, 1\}$. Prouver que $A = A^{-1}$.

Ex 21. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$i)$ Montrer que A est diagonalisable et trouver une matrice $P \in \mathbb{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

$ii)$ Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$ et déduire $\exp(A)$.

Ex 22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$, montrer que A est une matrice diagonalisable.

Ex 23. Calculer $p(A) = 2A^8 - 3A^5 + A^4 + A^2 - 4I_3$, où A est l'élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ex 24. On considère la matrice
$$A_\alpha(n) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ \frac{-\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

Prouver que
$$\lim_{n\to+\infty} A_\alpha(n) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Ex 25. Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Vérifier que
$$\lim_{n\to+\infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ex 26. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n, où $n \in \mathbb{N}$. **Rép.**

$$A^n = \begin{pmatrix} 9^n & 0 & 0 \\ 4^n - 9^n & 4^n & 0 \\ 1 - 9^n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex 27. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser B.
2. La matrice A est-elle semblable à B ?

Ex 28. Soit $n \geq 2$. Soit A la matrice réelle $n \times n$ de coefficients $a_{ij} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = 0$ pour tout i. On pose $B = A + I_n$.

1. Quel est le rang de la matrice B ? En déduire que -1 est une valeur propre de A et déterminer la dimension de l'espace propre associé.
2. Calculer
$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$
et en déduire une nouvelle valeur propre de A.
3. Justifier que A est diagonalisable puis donner son polynôme caractéristique.
4. Donner une matrice P inversible et une matrice D telles que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de calculer P^{-1}).

2.3 Exponentielle de matrice

L'exponentielle matricielle est la généralisation naturelle aux matrices carrées (ici, à coefficients réels) de la série entière exponentielle, définie sur $\mathbb{R}$. Notons que l'exponentielle d'une matrice intervient notamment dans la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires.

Dans la section suivante, on présente quelques définitions et propriétés remarquables sur l'exponentielle d'une matrice carrée diagonalisable ou non, on peut voir [9, p. 38].

Définition 2.3.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée $n \times n$. L'exponentielle de A, notée $\exp(A)$ ou e^A, est la matrice définie par

$$e^A = I_n + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + ... + \frac{A^k}{k!} + ... = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

C'est la matrice exponentielle de A.

Notons que pour $A = 0$ (la matrice nulle) ; on a $e^0 = I_n$. En effet, on a

$$e^0 = I_n + \frac{0}{1!} + \frac{0}{2!} + ... + \frac{0}{k!} + ... = I_n.$$

On a aussi pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\exp(kA) = (\exp A)^k$.

Exemple 2.3.1 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2 et A^3, puis en déduire e^A.

En effet, d'après le calcul, on a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

De plus,

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la Définition 2.3.1, on obtient

$$\begin{aligned} e^A &= I_3 + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} \\ &= I_3 + A + \frac{A^2}{2} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \frac{13}{2} & \frac{9}{2} & \frac{21}{2} \\ \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-7}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La série entière qui définit l'exponentielle d'un nombre réel, ou complexe, est aussi convergente pour une matrice. De plus, on a

Théorème 2.3.1 *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

est absolument convergente (donc convergente) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Preuve. Pour tout $k \geq 0$, on a

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$$

et d'après la Règle de d'Alembert [2], on trouve

$$\lim_{k\to+\infty} \left| \frac{\frac{\|A\|^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{\|A\|^k}{k!}} \right| = \lim_{k\to+\infty} \frac{\|A\|}{k+1} = 0 < 1.$$

D'où $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{A^k}{k!}$ est convergente. Puisque

$$\left\| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}.$$

La série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{A^k}{k!}$ est donc absolument convergente. ■

Corollaire 2.3.1 *Soit D une matrice diagonale ; i.e.,*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = diag\left\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right\}.$$

Alors

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} = diag\left\{e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, ..., e^{\lambda_n}\right\}. \tag{2.8}$$

2. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Si la limite (fini ou non)

$$l = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

existe, alors

1. la série $\sum u_n$ est convergente si $l < 1$,
2. la série $\sum u_n$ est divergente si $l > 1$.

Preuve. En effet, on a pour $D = diag\left\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right\}$, on obtient

$$\forall\ k \geq 0 : D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Par définition, on a

$$\begin{aligned} e^D &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & & \\ & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_2^k}{k!} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

Exemple 2.3.2 Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer e^A.

En efftet, d'après (2.8), on obtient

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.3.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable, alors e^A est aussi diagonalisable. De plus, on a*

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow e^A = Pe^D P^{-1}.$$

Preuve. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable, il existe donc une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale. Il vient

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(PDP^{-1}\right)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{PD^kP^{-1}}{k!} \\ &= P\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!}\right)P^{-1} \\ &= Pe^DP^{-1}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Théorème 2.3.2 *Soient $S \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors*

$$e^{SAS^{-1}} = Se^AS^{-1}.$$

Preuve. Soient $S \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} e^{SAS^{-1}} &= I_n + \frac{SAS^{-1}}{1!} + \frac{\left(SAS^{-1}\right)^2}{2!} + \frac{\left(SAS^{-1}\right)^3}{3!} + ... \\ &= I_n + \frac{SAS^{-1}}{1!} + \frac{SA^2S^{-1}}{2!} + + \frac{SA^3S^{-1}}{3!} + ... \\ &= SI_nS^{-1} + \frac{SAS^{-1}}{1!} + \frac{SA^2S^{-1}}{2!} + + \frac{SA^3S^{-1}}{3!} + ... \\ &= S\left(I_n + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ...\right)S^{-1} \\ &= Se^AS^{-1}. \end{aligned}$$

■

Corollaire 2.3.2 *Si (λ, x) est un élément propre de A, alors $\left(e^{\lambda}, x\right)$ est un élément propre de e^{A}.*

Preuve. Soit (λ, x) est un élément propre de A. Par définition, on a

$$\begin{aligned} e^{A}x &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}\right) x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k x}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k x}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\right) x \\ &= e^{\lambda} x. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.3.2 *Soit A une matrice carrée. Alors*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{xA} - I}{x} = A.$$

Preuve. Nous avons

$$e^{xA} - I - xA = \frac{(xA)^2}{2!} + \frac{(xA)^3}{3!} + ...$$

Donc, on peut écrire

$$\begin{aligned} \left\| e^{xA} - I - xA \right\| &= \left\| \frac{(xA)^2}{2!} + \frac{(xA)^3}{3!} + ... \right\| \\ &\leq \frac{\|xA\|^2}{2!} + \frac{\|xA\|^3}{3!} + ... \\ &= e^{\|xA\|} - 1 - \|xA\|. \end{aligned}$$

Pour tout $x \neq 0$, on obtient

$$\left\| \frac{e^{xA} - I}{x} - A \right\| \leq \frac{e^{\|xA\|} - 1 - \|xA\|}{|x|} = \left(\frac{e^{|x|.\|x\|} - 1}{|x|} - \|A\| \right) \to 0.$$

D'où le résultat. ■

L'exponentielle de matrice vérifie les propriétés suivantes :

1. $\exp(0) = I_n$
2. $\exp(A)$ est toujours une matrice inversible. On a en effet la relation

$$\exp(A)\exp(-A) = I_n.$$

3. L'identité fonctionnelle de la fonction exponentielle, à savoir $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$, n'est plus toujours vérifiée. En revanche, on sait qu'elle a lieu si A et B commutent, c'est-à-dire si $AB = BA$. C'est-à-dire si A, B ne commutent pas, en général $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$.
4. Il est facile de calculer l'exponentielle d'une matrice diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, si l'on souhaite calculer l'exponentielle d'une matrice, on réduira d'abord cette matrice sous forme de Jordan, voir la Section 3.7.

Proposition 2.3.3 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a*

$$\forall\ t \in \mathbb{R} : (\exp(tA))' = A\exp(tA) = \exp(tA)\,A.$$

Lemme 2.3.1 *On a les deux propriétés suivantes :*

(i) Pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Ae^{At} = e^{At}A.$$

(ii) Pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{tI_n} = e^t A.$$

Preuve. Par définition, on a

$$Ae^{At} = A\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^{k+1} t^k}{k!} = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!}\right) A = e^{At}A.$$

De même, on a

$$e^{tI_n} = e^{\begin{pmatrix} t & & \\ & \ddots & \\ & & t \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^t & & \\ & \ddots & \\ & & e^t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = e^t I_n.$$

■

Remarque 2.3.1 D'après le lemme précédent, on a

$$e^{tI_n} I_n = e^{tI_n} = e^t I_n.$$

Attention, $e^{tI_n} \neq e^t$; car $e^{tI_n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $e^t \in \mathbb{R}$.

2.3.1 Calcul de l'exponentielle

Il y a quelques cas où l'on peut calculer explicitement l'exponentielle d'une matrice donnée.

Cas où l'on peut reconnaître des séries entières

En voici un exemple. On pose

$$A = A_t = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, on montre que

$$A^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k t^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k t^{2k} \end{pmatrix} \text{ et } A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k t^{2k+1} \\ (-1)^k t^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$e^{A_t} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Cas nilpotent

On est réduit à une somme finie.

Cas diagonalisable, si l'on connaît les valeurs propres

Soit A une matrice diagonalisable sur $\mathbb{C}$, et soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres (complexes, non nécessairement distinctes). Alors

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow e^A = Pe^D P^{-1}.$$

Dunford et exponentielles, Calcul et diagonalisabilité

La décomposition de Dunford (lorsque le polynôme est scindé, la décomposition de Dunford s'applique) est bien adaptée à l'étude de l'exponentielle d'une matrice : on peut ramener certains problèmes à l'étude du cas diagonale et du cas nilpotent. C'est le cas pour le calcul ici.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A = D + N$ sa décomposition de Dunford (voir le Théorème 3.7.1), alors

$$\exp(A) = \exp(D)\exp(N).$$

Proposition 2.3.4 *On trouve alors que la décomposition de Dunford de e^A est*

$$e^A = e^D + e^D\left(e^N - I_n\right).$$

Preuve. On a la matrice e^D est diagonale. De plus d'après le Corollaire 2.3.2, $Sp(N) = \{1\}$ et donc $Sp\left(e^D\left(e^N - I_n\right)\right) = \{0\}$, ce qui donne le fait que cette matrice est nilpotente. On conclut par unicité. ■

Théorème 2.3.3 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors A est diagonalisable si et seulement si* $\exp(A)$ *est diagonalisable.*

Preuve. Le sens direct est évident vu la proposition 2.3.2. Pour la réciproque, on utilise la décomposition de Dunford que l'on vient de voir. On a alors, par unicité, $e^N = I_n$.

Soit a l'indice de nilpotence de N. Son polynôme minimal est x^a, mais alors, si $a > 1$, on a $e^N = I_n$ qui peut s'écrire

$$I_n + N + ... + \frac{1}{a-1}N^{a-1} + 0 = I_n,$$

et alors

$$N + ... + \frac{1}{a-1}N^{a-1} = 0$$

ce qui contredit la définition du polynôme minimal ($a - 1 < a$). D'où $a = 1$ et $N = 0$ et le résultat est montré. ■

Corollaire 2.3.3 $\exp(A) = I_n \Leftrightarrow$ *A est diagonalisable et $Sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$.*

2.3.2 Problèmes

Ex 01. Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

sont-elles des exponentielles de matrices ?

Ex 02. Montrer que la matrice

$$J_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

n'est le carré ni l'exponentielle d'aucune matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mais que

$$J_4 = \begin{pmatrix} J_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2 \end{pmatrix} \text{ et } J_3 = \begin{pmatrix} J_2 & I_2 \\ \mathbf{0} & J_2 \end{pmatrix}$$

sont le carré et l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Ex 03. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Calculer e^A.

Ex 04. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $e^A e^B$, e^{A+B} et $e^B e^A$.

Ex 05. On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $C = e^{A+B}$, $D = e^A e^B$ et $F = e^B e^A$. Puis, vérifier que $C \neq D \neq F$.

Ex 06. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $\log A$. i.e., trouver une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A = e^B$.

Ex 07. On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer e^A, e^B. Puis, en déduire le calcul de e^F, où

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.4 Racine d'une matrice, cos(A), sin(A),...

Lemme 2.4.1 *Soit*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ où } \lambda_i > 0 \ (1 \leq i \leq n).$$

Alors

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Preuve. Il est clair que $\sqrt{D}\sqrt{D} = D$. ■

Proposition 2.4.1 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice diagonalisable avec* $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$, *alors* $\sqrt{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Preuve. Supposons que $A = PDP^{-1}$, où $Sp\,(D) \subset \mathbb{R}_+$. Posons

$$H = P\sqrt{D}P^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Il vient

$$H^2 = \left(P\sqrt{D}P^{-1}\right)\left(P\sqrt{D}P^{-1}\right) = PDP^{-1} = A.$$

Donc $\sqrt{A} = H$. ■

Exemple 2.4.1 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\sqrt{A}$.

Les éléments propres de A sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0,\ E_{\lambda_1} = Vect\,\{(0,1,1)\}\,, \\ \lambda_2 = 1,\ E_{\lambda_2} = Vect\,\{(-1,-1,1)\}\,, \\ \lambda_3 = 16,\ E_{\lambda_3} = Vect\,\{(2,-1,1)\}\,. \end{cases}$$

De plus, on a

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 16 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= P\sqrt{D}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{0} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Définition 2.4.1 *Soit $A = PDP^{-1}$ une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont données par la matrice*

$$D = diag\left\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right\}$$

Pour toute fonction $f(x)$ définie aux points $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$, on a

$$f\left(A\right) = Pf\left(D\right)P^{-1} = P\begin{pmatrix} f\left(\lambda_1\right) & & \\ & f\left(\lambda_2\right) & \\ & & & \\ & & & f\left(\lambda_n\right)\end{pmatrix}P^{-1}$$

Par exemple, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $A = PDP^{-1}$ alors

$$\begin{cases} f\left(x\right) = x^k \Rightarrow f\left(A\right) = A^k = PD^kP^{-1} \\ f\left(x\right) = \sqrt{x} \Rightarrow f\left(A\right) = \sqrt{A} = P\sqrt{D}P^{-1} \\ f\left(x\right) = \cos x \Rightarrow f\left(A\right) = \cos A = P\cos DP^{-1} \\ f\left(x\right) = e^x \Rightarrow f\left(A\right) = e^A = Pe^DP^{-1} \\ ... \end{cases}$$

2.4.1 Problèmes

Ex 01. Si M est une matrice réelle d'ordre n, on note par $\cos M$ la partie réelle de e^{iM} et $\sin M$ sa partie imaginaire.

1. Montrer que $\cos M$ et $\sin M$ commutent et que

$$\left(\cos M\right)^2 + \left(\sin M\right)^2 = I_n$$

2. Soit θ un réel, calculer

$$\cos\begin{pmatrix} \theta & 1 \\ 0 & \theta \end{pmatrix} \text{ et } \sin\begin{pmatrix} \theta & 1 \\ 0 & \theta \end{pmatrix}.$$

Ex 02. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Calculer $\sqrt{A}$.

2.5 Systèmes de suites avec les relations de récurrence

2.5.1 Suites Récurrentes Linéaires

Concernant les références de cette section, on peut voir [10], [11], [12] et [13].

Soient a et b deux réels donnés non simultanément nuls. Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifie la relation

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,\ u_0 \text{ et } u_1 \text{ donnés.}$$

Matriciellement, ceci peut s'´ecrire

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

On est donc ramené à un calcul de puissance de matrice.

Soit $(a_0, a_1, ..., a_{k-1})$ k réels donnés non tous nuls. Une suite récurrente linéaire d'ordre k vérifie la relation

$$u_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i u_{n+i}\ ,\ \{u_0, u_1, ..., u_{k-1}\} \text{ donnés.}$$

On écrit cette égalité sous forme matricielle et on est encore ramené à un calcul de puissance de matrice d'ordre k.

Exemple 2.5.1 Soit la suite (x_n) définie par

$$x_{n+2} = \frac{2}{\dfrac{1}{x_n} + \dfrac{1}{x_{n+1}}}\ ;\ x_0, x_1 \in \mathbb{R}_+^*. \tag{2.9}$$

Trouver l'expression de x_n en fonction de n, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

En effet, on écrit (2.9) sous la forme

$$\frac{2}{x_n} = \frac{1}{x_{n-2}} + \frac{1}{x_{n-1}}$$

Posons $\frac{2}{x_n} = y_n$, on obtient

$$2y_n = y_{n-1} + y_{n-2} \text{ i.e., } y_n = \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2}.$$

Sous la forme matricielle, on a

$$\begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ y_{n-2} \end{pmatrix} ; \begin{cases} y_0 = \frac{1}{x_0} \\ y_1 = \frac{1}{x_1} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}, \text{ où } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après un calcul simple, on trouve

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left[2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right] & \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right] \\ \frac{1}{3}\left[2 - 2\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right] & \frac{1}{3}\left[1 + 2\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right] \end{pmatrix}$$

Il vient

$$y_n = \frac{1}{3}\left[2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right] y_1 + \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right] y_0$$

Comme $x_n = \frac{1}{y_n}$, alors

$$x_n = \frac{3}{\left[2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right] \frac{1}{x_1} + \left[1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right] \frac{1}{x_0}}$$

Par passage à la limite, on obtient donc

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \frac{3}{\frac{2}{x_1} + \frac{1}{x_0}}.$$

2.5.2 Systèmes de suites récurrentes

Dans ce sujet, la théorie des suites récurrentes linéaires, nous avons utilisé la référence [3]. Au début, nous commençons par quelques cas simples.

Soit le système formé par deux suites (x_n) et (y_n) suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n \\ y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n \end{array} \right. \; ; \;\; (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.10}$$

Sous la forme matricielle, on obtient

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}}_{X_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}}_{X_n}$$

i.e., on écrit (2.10) sous la forme

$$X_{n+1} = AX_n \text{ , où } X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$X_n = AX_{n-1} = A\left(AX_{n-2}\right) = A^2 X_{n-2} = ... = A^n X_0. \tag{2.11}$$

Dans le cas général, on considère le système de suites $x_n^{(i)}$, pour $i = 1, 2, ..., k$ défini par

$$\left\{ \begin{array}{c} x_{n+1}^{(1)} = a_{11}x_n^{(1)} + a_{12}x_n^{(2)} + ... + a_{1k}x_n^{(k)} \\ x_{n+1}^{(2)} = a_{21}x_n^{(1)} + a_{22}x_n^{(2)} + ... + a_{2k}x_n^{(k)} \\ \vdots \\ x_{n+1}^{(k)} = a_{k1}x_n^{(1)} + a_{k2}x_n^{(2)} + ... + a_{kk}x_n^{(k)} \end{array} \right. \; ; \;\; x_0^{(i)} \in \mathbb{R}, \text{ pour } i = 1, 2, ..., k.$$

Matriciellement, on peut écrire

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1}^{(1)} \\ x_{n+1}^{(2)} \\ \vdots \\ x_{n+1}^{(k)} \end{pmatrix}}_{X_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}}_{X_n} \text{, où } X_0 = \begin{pmatrix} x_0^{(1)} \\ x_0^{(2)} \\ \vdots \\ x_0^{(k)} \end{pmatrix}$$

de (2.11) on trouve

$$X_n = A^n X_0.$$

Ces problèmes (la solution de (2.10)) se réduisent au calcul de A^n.

Exemple 2.5.2 Résoudre le système de suites avec les relations de récurrence suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n \\ y_{n+1} = -x_n + 2y_n \end{cases} ; \ (x_0, y_0) = (0, -1). \tag{2.12}$$

On écrit ce système (2.12) sous la forme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}}_{X_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}}_{X_n} ; X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'après (2.11), on a $X_n = A^n X_0$. De plus, d'après (2.6), l'expression de A^n en fonction de n est donnée par

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1+3^n}{2} & \frac{1-3^n}{2} \\ \frac{1-3^n}{2} & \frac{1+3^n}{2} \end{pmatrix} ; n \geq 0. \tag{2.13}$$

D'où

$$X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1+3^n}{2} & \frac{1-3^n}{2} \\ \frac{1-3^n}{2} & \frac{1+3^n}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{-3^n-1}{2} \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

De même, considérons le système de suites $x_n^{(i)}$, pour $i = 1, 2, ..., k$ défini par

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = a_{11}x_n^{(1)} + a_{12}x_n^{(2)} + ... + a_{1k}x_n^{(k)} + c_1 \\ x_{n+1}^{(2)} = a_{21}x_n^{(1)} + a_{22}x_n^{(2)} + ... + a_{2k}x_n^{(k)} + c_2 \\ \vdots \\ x_{n+1}^{(k)} = a_{k1}x_n^{(1)} + a_{k2}x_n^{(2)} + ... + a_{kk}x_n^{(k)} + c_k \end{cases} ; \ c_i, x_0^{(i)} \in \mathbb{R}, \text{ pour } i = 1, 2, ..., k.$$

Sous la forme matricielle, on trouve

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1}^{(1)} \\ x_{n+1}^{(2)} \\ \vdots \\ x_{n+1}^{(k)} \end{pmatrix}}_{X_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_{n}^{(1)} \\ x_{n}^{(2)} \\ \vdots \\ x_{n}^{(k)} \end{pmatrix}}_{X_n} + \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}}_{C}, \text{ où } X_0 = \begin{pmatrix} x_{0}^{(1)} \\ x_{0}^{(2)} \\ \vdots \\ x_{0}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned} X_n &= AX_{n-1} + C = A\left(AX_{n-2} + C\right) + C \\ &= A^2 X_{n-2} + (A + I)\, C \\ &= \dots \\ &= A^n X_0 + \left(A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I\right) C. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Ces problèmes se réduisent au calcul de A^n et $\sum\limits_{i=0}^{n-1} A^i$.

Exemple 2.5.3 Résoudre le système de suites avec les relations de récurrence suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n - 1 \\ y_{n+1} = -x_n + 2y_n + 2 \end{cases} ; \quad (x_0, y_0) = (0, -1). \tag{2.16}$$

On écrit ce système (2.16) sous la forme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}}_{X_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}}_{X_n} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{C}$$

D'après (2.15), il suffit de calculer $A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I$. De plus, de (2.13) on peut écrire

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1+3^n}{2} & \dfrac{1-3^n}{2} \\ \dfrac{1-3^n}{2} & \dfrac{1+3^n}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}U + \frac{3^n}{2}V, \text{ où } U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc on écrit

$$\begin{aligned} A^{n-1}+A^{n-2}+...+A+I &= \frac{n}{2}U+\left(\frac{1+3+...+3^{n-1}}{2}\right)V \\ &= \frac{n}{2}U+\left(\frac{3^n-1}{4}\right)V. \end{aligned}$$

Finalement, d'après (2.15) on a

$$\begin{aligned} X_n &= \left(\frac{1}{2}U+\frac{3^n}{2}V\right)X_0+\left[\frac{n}{2}U+\left(\frac{3^n-1}{4}\right)V\right]C \\ &= \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\frac{3^n}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}+ \\ &\quad \left[\frac{n}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\left(\frac{3^n-1}{4}\right)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{2n-3^n+1}{4} \\ \dfrac{2n+3^n-5}{4} \end{pmatrix};\ n\geq 0. \end{aligned}$$

Exercice 2.5.1 *Soit* $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. *Si* $(A-I_2)^{-1}$ *existe, démontrer que*

$$A^{n-1}+A^{n-2}+...+A+I=(A^n-I_2)(A-I_2)^{-1}.$$

2.6 Systèmes différentiels à coefficients constants

On veut résoudre le système différentiel (voir par exemple S. Gilbert [10, p. 280], [5], [6] [7]) défini par

$$\begin{cases} x_1'(t)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+...+a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t)=a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+...+a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t)=a_{n1}x_1(t)+a_{n2}x_2(t)+...+a_{nn}x_n(t), \end{cases} \tag{2.17}$$

avec $a_{ij}\in\mathbb{R}$ et $x_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables. On pose $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^t$, alors le système (2.17) s'écrit sous forme matricielle

$$\frac{dX}{dt}=X'=AX.$$

Supposons A diagonalisable. Il existe alors une matrice D diagonale et une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$. Si on pose

$$\begin{cases} X' = PY' \\ Y' = DY \\ Y = P^{-1}X, \end{cases}$$

le système devient $Y' = DY$, système qui s'intègre facilement car D est diagonale.

Remarque 2.6.1 (2.17) s'appelle système linéaire homogène d'équations différentielles du premier ordre.

Proposition 2.6.1 (voir [4]) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable, et soit*

$$P = \begin{bmatrix} X_1 & X_n & ... & X_n \end{bmatrix}$$

la matrice formée par n vecteurs propres linéairement indépendants. Alors, le système $X' = AX$ avec $X(0) = C_0$ possède une solution unique donnée par la formule

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} X_2 + ... + c_n e^{\lambda_n t} X_n, \tag{2.18}$$

où $(c_1, c_2, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$

Preuve. La solution unique du système $X' = AX$ est

$$X(t) = e^{At}.\xi, \text{ où } \xi \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Puisque A diagonalisable, on a

$$X(t) = Pe^{Dt}P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1}.\xi \tag{2.19}$$

Posons

$$P^{-1}.\xi = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = C,$$

et (2.19) devient

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{bmatrix} X_1 & X_n & ... & X_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} X_1 & e^{\lambda_2 t} X_n & ... & e^{\lambda_n t} X_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} X_2 + ... + c_n e^{\lambda_n t} X_n. \end{aligned}$$

Comme $X(0) = C_0$, implique $C = P^{-1} C_0$. ∎

Exemple 2.6.1 Résoudre le système difféetiel

$$X' = AX,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ avec } X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -1$. De plus, on a

$$E_{\lambda_1} = \{(2,3)\} \text{ et } E_{\lambda_2} = \{(1,-1)\}. \tag{2.20}$$

En appliquant (2.18), la solution du système différentiel $X' = AX$ est donné par la formule suivante (d'après le calcul des valeurs et vecteurs propres de la matrice A) :

$$X(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{cases} x(t) = 2c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} \\ y(t) = 3c_1 e^{4t} - c_2 e^{-t}. \end{cases}$$

Comme $X(0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}^t$, alors

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 = 3 \\ 3c_1 - c_2 = 2. \end{cases}$$

Ceci implique $c_1 = c_2 = 1$. Par conséquent

$$\begin{cases} x(t) = 2e^{4t} + e^{-t} \\ y(t) = 3e^{4t} - e^{-t}. \end{cases}$$

Remarque 2.6.2 D'une autre manière, qui est très long et basée sur le calcul de P et P^{-1} avec $A = PDP^{-1}$. Ceci implique

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}. \tag{2.21}$$

D'autre part, la solution du système différentiel $X' = AX$ est $X(t) = e^{At}.C$, où C est une constante arbitraire. Comme $X(0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}^t = C_0$, alors

$$X(t) = e^{At}.C_0. \tag{2.22}$$

D'après (2.20), (2.21) et (2.22), on a

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \text{ donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{At}.C_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{4t} + e^{-t} \\ 3e^{4t} - e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple 2.6.2 Résoudre le système differetiel

$$X' = AX \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'après un calcul simple, on a

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1,\ v_1 = (-1, 1, 1) \\ \lambda_1 = 2,\ v_2 = (0, 1, 0) \text{ et } v_3 = (0, 0, 1). \end{cases}$$

La matrice A est diagonalisable, donc d'après (2.18), on a

$$X(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{cases} x(t) = -c_1 e^t \\ y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ z(t) = c_1 e^t + c_3 e^{2t}. \end{cases}$$

2.6.1 Problèmes

Ex 01. Calculer e^{At} pour tout $t \in \mathbb{R}$, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En déduire la solution générale du système différentiel

$$\begin{cases} p' = -q + r \\ q' = r \\ r' = -p + r \end{cases}$$

Ex 02. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = z(t) \\ z'(t) = w(t) \\ w'(t) = x(t) \end{cases}$$

Chapitre 3

Matrices Trigonalisables

3.1 Théorème de Cayley-Hamilton.

Nous présentons ici une démonstration du Théorème de **Cayley-Hamilton** [12, p. 160] (qui est à la fois élémentaire et aussi peu calculatoire que possible) en utilisant la méthode de la comatrice. Notons que jusqu'à présent, il existe quatre méthodes sur la démonstration du théorème de Cayley-Hamilton : les matrices compagnons, la comatrice, densité des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et par une représentation intégrale des puissances d'une matrice.

Définition 3.1.1 Soit $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_kx^k \in \mathbb{K}[X]$, et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose

$$p(A) = a_0I_n + a_1A + ... + a_kA^k.$$

Autrement dit $p(A)$ est la matrice obtenue en remplacant x^i par A^i, pour $i = 0, 1, ..., k$, dans l'expression de p, avec la convention $A^0 = I_n$.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $p_A(x)$ son polynôme caractéristique. Notre but est de montrer que p_A annule A, i.e.,

$$p_A(A) = 0.$$

Remarque 3.1.1 Si on remplace x par A dans la formule du polynôme p_A, ce qui donne

$$p_A(A) = \det(A - A) = \det(0) = 0.$$

Déjà, écrire $p_A(A) = \det(A - A)$ fournit un calcul de déterminant dans le corps $\mathbb{K}$, ce qui donne unscalaire et non une matrice comme ça devrait, d'où problème.

L'erreur réside en fait dans l'ordre de étapes « évaluation du déterminant » et « subtitution de A à x » . Quand on écrit proprement

$$p_A(A) = \det(A - xI_n)(A),$$

on calcule le déterminant dans l'anneau $\mathbb{K}[X]$, puis on évalue ce polynôme en la matrice A dans l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Rappelons l'énoncé du très classique théorème de Cayley-Hamilton[1] :

Théorème 3.1.1 (Cayley-Hamilton, voir [9, p. 17], [12, p. 160]) *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p_A(x)$ son polynôme caractéristique, alors $p_A(A) = 0$.*

1.

- ▹ Arthur Cayley (16 Août 1821, 26 Janvier 1895) est un mathématicien britannique. Il fait partie des fondateurs de l'école britannique moderne de mathématiques pures.
- ▹ William Rowan Hamilton (4 Août 1805, 2 Septembre 1865) est un mathématicien, physicien et astronome irlandais.

Lemme 3.1.1 *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a*

$$A.(com(A))^t = (com(A))^t .A = \det A.I_n \tag{3.1}$$

En particulier, si A est inversible, son inverse est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(com(A))^t.$$

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} A.(com(A))^t &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(A) I_2. \end{aligned}$$

Preuve du Théorème de Cayley-Hamilton (voir Théorème 3.1.1).

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

De plus, supposons que $p_A(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + ... + c_1 x + c_0$.

En appliquant le Lemme 3.1.1 sur la matrice $xI_n - A$, on obtient

$$(xI_n - A).com(xI - A)^t = \det(xI_n - A).I_n$$

où

$$xI - A = \begin{pmatrix} x - a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & x - a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & x - a_{nn} \end{pmatrix}$$

D'où

$$com\,(xI-A)=\begin{pmatrix} p_{n-1}^{(1,1)}(x) & p_{n-1}^{(1,2)}(x) & \ldots & p_{n-1}^{(1,n)}(x) \\ p_{n-1}^{(2,1)}(x) & p_{n-1}^{(2,2)}(x) & \ldots & p_{n-1}^{(2,n)}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n-1}^{(n,1)}(x) & p_{n-1}^{(n,2)}(x) & \ldots & p_{n-1}^{(n,n)}(x) \end{pmatrix},$$

où $p_{n-1}^{(i,j)}$ sont des polynômes de degré $n-1$. Posons

$$com\,(xI-A)^t = B_0+xB_1+x^2B_2+...+x^{n-1}B_{n-1},\ \text{où}\ (B_i)_{i=0,1,\ldots,n-1}\in M_n(\mathbb{R})\,.$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned}(xI-A)\left(B_0+xB_1+x^2B_2+...+x^{n-1}B_{n-1}\right) &= \det(xI_n-A)\,.I_n \\ &= x^nI_n+c_{n-1}x^{n-1}I_n+...+c_1xI_n+c_0I_n.\end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned}& x^nB_{n-1}+x^{n-1}(B_{n-2}-AB_{n-1})+...+x(B_0-AB_1)-AB_0 \\ = \ & x^nI_n+c_{n-1}x^{n-1}I_n+...+c_1xI_n+c_0I_n.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} B_{n-1}=I_n \\ B_{n-2}-AB_{n-1}=c_{n-1}x^{n-1}I_n \\ \vdots \\ B_0-AB_1=c_1I_n \\ -AB_0=c_0I_n \end{cases}$$

Ceci implique

$$\begin{aligned}p_A(A) &= c_0I_n+c_1A+...+c_{n-1}A^{n-1}+A^n \\ &= -AB_0+A(B_0-AB_1)+...+A^{n-1}(B_{n-2}-AB_{n-1})+A^nB_{n-1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ce qui conclut la démonstration. ■

Remarque 3.1.2 Le théorème de Cayley-Hamilton est à peu près trivial pour une matrice diagonale, donc aussi pour une matrice diagonalisable.

Exemple 3.1.1 Trouver un polynôme $p(x)$ qui annule la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Rép. $p(x) = x^2 - 3x - 2.$

Corollaire 3.1.1 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *avec*

$$p_A(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + ... + c_1 x + c_0,$$

où $c_0 \in \mathbb{R}^*$ *et* $c_1, c_2, ..., c_{n-1} \in \mathbb{R}$, *alors*

$$A^{-1} = \frac{-1}{c_0}\left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i A^{i-1} + A^{n-1}\right).$$

Preuve. En effet, puisque

$$p_A(A) = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + ... + c_{n-1}A^{n-1} + A^n = 0,$$

il vient

$$\left(c_1 I + c_2 A + ... + c_{n-1}A^{n-2} + A^{n-1}\right) A = -c_0 I,$$

et donc, en fait

$$A^{-1} = \frac{-1}{c_0}\left(c_1 I + c_2 A + ... + c_{n-1}A^{n-2} + A^{n-1}\right).$$

D'où le résultat. ■

Exemple 3.1.2 En utilisant le Théorème de Cayley-Hamilton, calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tout d'abord, calculons $p_A(x)$:

$$\begin{aligned}
p_A(x) &= \begin{vmatrix} \overset{+}{x-1} & \overset{-}{1} & \overset{+}{0} \\ -1 & x & 0 \\ 2 & 0 & x+1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)\left[x(x+1)\right] + (x+1) \\
&= (x-1)\left(x^2 - x + 1\right) \\
&= x^3 + 1.
\end{aligned}$$

D'où $p_A(x) = x^3 + 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
p_A(A) &= 0 \Rightarrow A^3 + I_3 = 0 \\
&\Rightarrow A^{-1} = -A^2.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $p \in \mathbb{K}[X]$:

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0.$$

Si $f \in (E)$, on note p_f l'endomorphisme de E défini par

$$p_f = a_m f^m + a_{m-1} f^{m-1} + ... + a_1 f + a_0 id,$$

où

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{k\text{-fois}}$$

Définition 3.1.2 *Soit $f \in (E)$. Un polynôme $p(x)$ de $\mathbb{K}[X]$ est dit annulateur de f si $p(f) = 0$.*

Proposition 3.1.1 *Soit $p(x)$ un polynôme annulateur de f. Alors les valeurs propres de f sont des racines de p.*

Remarque 3.1.3 *Un endomorphisme qui vérifie $p(f) = 0$ ne peut avoir pour valeur propre que des racines de P ; par contre, toutes les racines de p ne sont pas forcément des valeurs propres de f.*

Théorème 3.1.2 (Théorème de Cayley-Hamilton, voir [1, p. 116]) *Soient $f \in (E)$ et $p_f(x)$ son polynôme caractéristique. On a*

$$p_f(f) = 0,$$

i.e., le polynôme caractéristique de f est un polynôme annulateur de f. Autrement dit, m_f divise p_f.

3.2 Polynôme minimal

On introduit ici un second polynôme attaché à une matrice carrée ou à un endomorphisme d'un espace vectoriel.

Définition 3.2.1 Soit $p_A(x)$ le polynôme caractéristique de A, le polynôme minimal de A noté $m_A(x)$ est un polynôme vérifiant les deux conditions suivantes :

1. $m_A(x)/p_A(x)$; i.e., $m_A(x)$ divise le polynôme caractéristique $p_A(x)$.
2. $m_A(A) = p_A(A) = 0$ (la matrice nulle).

Théorème 3.2.1 (voir [9, p. 20]) *Les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal.*

Preuve. Soient λ une valeur propre de A et x le vecteur propre associé. On fait la division euclidienne de $m_A(x)$ par $x - \lambda$, elle s'écrit

$$m_A(x) = Q(x)(x - \lambda) + c;\ c \in \mathbb{R} \text{ et } Q \in \mathbb{R}[X].$$

On en déduit

$$0 = m_A(A) = Q(A)(A - \lambda I) + cI.$$

Si l'on applique cela au vecteur x, on obtient

$$0 = Q(A)(Ax - \lambda x) + cx.$$

D'où $cx = 0$. Comme x n'est pas nul, on obtient $c = 0$, de sorte que $m_A(x) = Q(x)(x - \lambda)$. Cela signifie que λ est racine de m_A. ■

Remarque 3.2.1 On en déduit que $m_A(x)$ est un polynôme minimal de A $\Leftrightarrow$ les trois conditions suivantes sont vérifées :

1. $m_A(x)/p_A(x)$,
2. $m_A(A) = p_A(A) = 0$ (la matrice nulle),
3. $\forall\ \lambda \in Sp(A) : m_A(\lambda) = 0$.

Conclusion 3.2.1 *Le polynôme minimal d'une matrice A est un polynôme m_A de degré minimal tel que $m_A(A) = 0$ et de coefficient dominant égal à 1. Un tel polynôme divise tous les polynômes tels que $p(A) = 0$, il divise le polynôme caractéristique de A et il a les mêmes racines que le polynôme caractéristique.*

Exemple 3.2.1 Calculer le polynôme minimal de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tout d'abord, le polynôme caractéristique est $p_A(x) = (x-1)^2$. D'où

$$m_A(x) = (x-1) \text{ ou } m_A(x) = (x-1)^2,$$

et puisque $A - I_2 \neq 0$, alors $m_A(x) = p_A(x) = (x-1)^2$.

Exemple 3.2.2 Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

– On voit que $p_A(x) = x^3$. Donc, $m_A(x) = x^3$ ou x^2 ou x. D'autre part, on a $m_A(x) = x^2$; car $A \neq 0$ et $A^2 = 0$.
– Comme $p_B(x) = (x-3)^2(x-6)$, alors $m_B(x) = (x-3)(x-6)$ ou $m_B(x) = (x-3)^2(x-6)$. Mais,

$$\begin{aligned}(B-3I_3)(B-6I_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Donc $m_B(x) = (x-3)(x-6)$.
– D'après un calcul simple, on obtient $p_C(x) = (x-1)^2$. Or $A - I_2 \neq 0$, alors

$$m_C(x) = (x-1)^2 = p_C(x).$$

Corollaire 3.2.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $m_A(x) = (x-a)(x-b)$; $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, A^n s'écrit en fonction de A et I.*

Preuve. La démonstration se fait par récurrence sur n. En effet, pour $n = 1$, on a

$$A^1 = 1.A + 0.I.$$

De plus, pour $n = 2$, $A^2 = (a+b)A - abI$; car $m_A(A) = 0$. Supposons que A^n s'écrit en fonction de A et I ; i.e.,

$$A^n = a_n A + b_n I,$$

alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n = A(a_n A + b_n I) \\ &= a_n A^2 + b_n A \\ &= a_n((a+b)A - abI) + b_n A \\ &= ((a+b)a_n + b_n)A - aba_n I \\ &= f(A, I) \end{aligned}$$

Donc A^{n+1} s'écrit aussi en fonction de A et I. ∎

Exemple 3.2.3 *Étudier la diagonalisation de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

On voit que $\lambda = a$ est une valeur propre d'odre 3. Par conséquent $p_A(x) = (x-a)^3$. Comme $(A - aI) \neq 0$, alors la racine $\lambda = a$ de $m_A(x)$ n'est pas simple. Donc A n'est pas diagonalisable.

Exemple 3.2.4 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

Montrer que A est diagonalisable.

En effet, on a

$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = aI_3 + bB.$$

Il suffit de prouver que B est diagonalisable. Comme $m_B(x) = (x+1)(x-2)$, alors B est diagonalisable. Donc, B peut s'écrire $B = PDP^{-1}$. D'où

$$\begin{aligned} A &= aI_3 + bPDP^{-1} \\ &= P(aI_3 + bD)P^{-1}. \end{aligned}$$

Puisque $aI_3 + bD$ diagonale, alors A est diagonalisable.

Exemple 3.2.5 *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $m_A(x) = x(x-3)$. Donc A est diagonalisable car les racines de $m_A(x)$ sont simples.

Théorème 3.2.2 *Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé et a toutes ses racines simples.*

3.2.1 Problèmes

Ex 01. Trouver le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

En déduire que A est diagonalisable. **Rép.**

$$p_A(x) = (x-3)(x-1)^2 \text{ et } m_A(x) = (x-3)(x-1).$$

Ex 02. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme minimal. Qu'on déduire ? **Rép.** $m_A(x) = x(x-2)$.

Ex 03. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

En déduire le polynôme minimal. **Rép.**

$$p_A(x) = (3-x)^3(7-x) \text{ et } m_A(x) = (3-x)(7-x).$$

Ex 04. Calculer le polynôme minimal des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ex 05. Vérifier que les matrices de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R}^*$$

ne sont pas diagonalisables.

Ex 06. Calculer le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & \lambda & \\ & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

A est-elle diagonalisable ?

Ex 07. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer le polynôme caractéristique de A.

b) Déterminer le polynôme minimal de A.

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Ex 08. Caractériser toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont le polynôme minimal est $x^2 + 1$.

Ex 09. Calculer le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rép. $m_A(x) = x(x-8)$.

Ex 10. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Rép. $p_A(x) = (x-2)^3 (x-7)^2$ et $m_A(x) = (x-2)^2 (x-7)$.

Ex 11. Soit A une matrice $n \times n$. Donner (sans démonstration) une condition nécessaire et suffisante sur le polynôme minimal de A pour que A soit diagonalisable.

3.3 Sous-espaces Caractéristiques

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n. On note $p_f(x)$ le polynôme caractéristique de f. On suppose que $p_f(x)$ est scindé et s'´ecrit

$$p_f(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (x-\lambda_k)^{\alpha_k},$$

où les λ_i sont distincts deux à deux.

Définition 3.3.1 (voir [9, p. 33]) *On appelle sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i le sous-espace vectoriel*

$$N_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i id_E)^{\alpha_i} \ ; \ 1 \leq i \leq k.$$

Proposition 3.3.1 *N_{λ_i} est stable par f.*

Preuve. Soit $x \in N_{\lambda_i}$. Montrons que $f(x) \in N_{\lambda_i}$. On a $(f - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}(x) = 0$. Les endomorphismes f et $(f - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$ commutent donc

$$(f - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}(f(x)) = f \circ (f - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}(x) = 0,$$

et on a prouvé que

$$f(x) \in \ker(f - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}.$$

■

Remarque 3.3.1 *On a toujours $E = N_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus N_{\lambda_k}$ que f soit diagonalisable ou pas.*

Théorème 3.3.1 (Réduction selon les sous-espaces caractéristiques) *Soit $f \in \pounds(E)$ telle que son polynôme caractéristique soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe une base $B = \{B_1, B_2, ..., B_k\}$, où B_i est une base de N_{λ_i} telle que*

$$M_f(B) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & \times & \times \\ & \ddots & \times \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & \times & \times \\ & \ddots & \times \\ & & \lambda_2 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_k & \times & \times \\ & \ddots & \times \\ & & \lambda_k \end{matrix}} \end{pmatrix},$$

où $\begin{pmatrix} \lambda_i & \times & \times \\ & \ddots & \times \\ & & \lambda_i \end{pmatrix}$ est la matrice (triangulaire supérieure) de la restriction de f à N_{λ_i} dans la base B_i (c'est une matrice de $\mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{R})$).

3.4 Systèmes différentiels et matrices non diagonalisables

Concernant les références de cette section, on peut voir [11], [12] et [13].

Étant donné un système différentiel à coefficients constants dont la matrice associée n'est diagonalisable. En effet, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non diagonalisable et soit le système

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{array} \right. \tag{3.2}$$

On écrit (3.2) sous la forme matricielle suivante : $X' = AX$. Dans ce cas la solution générale de (3.2) est

$$X(t) = e^{tA}c,$$

où $c = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}^t$ est une constante.

Dans ce programme, nous considérons seulement certains cas. Par exemple, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mais possède une valeur propre unique ou lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque avec $n \leq 4$. La situation est particulièrement simple dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Corollaire 3.4.1 (voir [11]) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée possède une seule valeur propre λ, alors*

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} (A - \lambda I_n)^k \frac{t^k}{k!}.$$

Preuve. Notons que $p_A(x) = (x-\lambda)^n$ car la matrice A possède une seule valeur propre. Par définition, on a

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{\lambda t I_n + t(A-\lambda I_n)} \qquad (3.3) \\ &= e^{\lambda t I_n} e^{t(A-\lambda I_n)} \quad \text{(car } \lambda t I_n \text{ et } t(A-\lambda I_n) \text{ commutent)} \\ &= e^{\lambda t} e^{t(A-\lambda I_n)} \quad \text{(car } e^{\alpha I_n} B = e^{\alpha} B \text{ pour tous } B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}) \\ &= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} (A-\lambda I_n)^k \frac{t^k}{k!} \\ &= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} (A-\lambda I_n)^k \frac{t^k}{k!}, \end{aligned}$$

où $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} (A-\lambda I_n)^k = 0$; car d'après le théorème de Cayley-Hamilton $p_A(A) = (A-\lambda I_n)^n = 0$. ■

Remarque 3.4.1 *Cas particulier du Corollaire 3.4.1. Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $Sp(A) = \{\lambda\}$, on a*

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \{I_2 + (A-\lambda I_2)t\}. \qquad (3.4)$$

De plus, si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $Sp(A) = \{\lambda\}$, on a

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \left\{ I_3 + (A-\lambda I_3)t + \frac{1}{2}(A-\lambda I_3)^2 t^2 \right\}. \qquad (3.5)$$

Exemple 3.4.1 Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y \end{cases} \qquad (3.6)$$

Soit A la matrice associée à (3.6), i.e.,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

D'après (3.4), on a

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{2t}\left\{I_2+(A-2I_2)\,t\right\} \\ &= e^{2t}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)t\right\} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La solution du système (3.6) est

$$X(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1e^{2t}+tc_2e^{2t} \\ c_2e^{2t} \end{pmatrix},$$

où c_1, c_2 sont des constantes.

Exemple 3.4.2 On considère le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$p_A(x)=(x+2)^3.$$

Donc A possède une valeur propre unique, $\lambda=-2$. D'après (3.5), on a

$$e^{tA}=e^{-2t}\left\{I_3+(A+2I_3)\,t+\frac{1}{2}(A+2I_3)^2\,t^2\right\},$$

où

$$A+2I_3=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A+2I_3=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
e^{tA} &= e^{-2t}\left\{I_3+(A+2I_3)\,t+\frac{1}{2}(A+2I_3)^2\,t^2\right\}\\
&= e^{-2t}\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&1&-2\\-2&1&1\end{pmatrix}t+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&0&-3\\3&0&-3\\3&0&-3\end{pmatrix}t^2\right\}\\
&= e^{-2t}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}t^2-2t+1 & t & t-\frac{3}{2}t^2\\ \frac{3}{2}t^2+t & t+1 & -\frac{3}{2}t^2-2t\\ \frac{3}{2}t^2-2t & t & -\frac{3}{2}t^2+t+1\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Exercice 3.4.1 Résoudre le système différentiel

$$
\begin{pmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\\x_3'(t)\\x_4'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&1&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\x_4(t)\end{pmatrix}
$$

Théorème 3.4.1 (voir [11]) *Soient $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non diagonalisable possède deux valeurs propres distincts λ et μ avec λ est double, alors*

$$
e^{tA}=e^{\lambda t}\left(I+t\,(A-\lambda I)\right)+\frac{e^{\mu t}-e^{\lambda t}}{(\mu-\lambda)^2}(A-\lambda I)^2-\frac{te^{\lambda t}}{\mu-\lambda}(A-\lambda I)^2. \quad (3.7)
$$

Preuve. D'après (3.3), on a

$$
\begin{aligned}
e^{tA} &= e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{+\infty}(A-\lambda I)^k\frac{t^k}{k!}\\
&= e^{\lambda t}\left(I+(A-\lambda I)\right)+e^{\lambda t}\sum_{k=2}^{+\infty}(A-\lambda I)^k\frac{t^k}{k!}\\
&= e^{\lambda t}\left(I+(A-\lambda I)\right)+e^{\lambda t}\sum_{r=0}^{+\infty}(A-\lambda I)^{2+r}\frac{t^{2+r}}{(2+r)!}
\end{aligned}
$$

Maintenant, soit $p_A(x)=(x-\lambda)^2(x-\mu)$ le polynôme caractéristique de A. D'abort, on écrit

$$
A-\mu I=(A-\lambda I_n)-(\mu-\lambda)\,I
$$

donc, d'après le Théorème de Cayley-Hamilton,

$$0 = (A - \lambda I)^2 (A - \mu I) = (A - \lambda I)^3 - (\mu - \lambda)(A - \lambda I)^2$$

Ce qui donne

$$(A - \lambda I)^3 = (\mu - \lambda)(A - \lambda I)^2$$

D'où (par récurrence sur r) pour tout $r \geq 1$,

$$(A - \lambda I)^{2+r} = (\mu - \lambda)^r (A - \lambda I)^2$$

D'après ce qui précède, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{+\infty} (A - \lambda I)^{2+r} \frac{t^{2+r}}{(2+r)!} &= \sum_{r=0}^{+\infty} (\mu - \lambda)^r \frac{t^{2+r}}{(2+r)!}^{r} (A - \lambda I)^2 \\ &= \frac{1}{(\mu - \lambda)^2} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} (\mu - \lambda)^k (A - \lambda I)^2 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{\lambda t} (I + (A - \lambda I)) + \frac{e^{\lambda t}}{(\mu - \lambda)^2} \left\{ e^{(\mu - \lambda) t} - 1 - (\mu - \lambda) t \right\} (A - \lambda I)^2 \\ &= e^{\lambda t} (I + t (A - \lambda I)) + \frac{e^{\mu t} - e^{\lambda t}}{(\mu - \lambda)^2} (A - \lambda I)^2 - \frac{t e^{\lambda t}}{\mu - \lambda} (A - \lambda I)^2 . \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Exemple 3.4.3 Résoudre le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est $p_A(x) = x^2 (x + 1)$. Donc, A possède deux valeurs propres $\lambda = 0$ (double) et $\mu = -1$ (simple). D'après la formule (3.7), on a

$$e^{At} = I_3 + tA + \left(t + e^{-t} - 1\right) A^2.$$

D'après un calcul simple, on a

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 4t + \frac{2}{e^t} - 1 & 1 - \frac{1}{e^t} - 2t & 3t + \frac{1}{e^t} - 1 \\ 8t - \frac{2}{e^t} + 2 & \frac{1}{e^t} - 4t & 6t - \frac{1}{e^t} + 1 \\ 4 - \frac{4}{e^t} & \frac{2}{e^t} - 2 & 3 - \frac{2}{e^t} \end{pmatrix}.$$

3.5 Matrices nilpotentes

On va maintenant s'intéresser à une classe particulière de matrices. Une matrice nilpotente est une matrice dont il existe une puissance égale à la matrice nulle. Elle correspond à la notion d'endomorphisme nilpotent sur un espace vectoriel de dimension finie. Pour plus de détails, voir [9, p. 31].

Définition 3.5.1 On a

1. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier k (l'indice de A) tel que

$$A^k = 0 \ \ (0 \text{ c'est la matrice nulle}).$$

2. L'indice d'une matrice A est le plus petit entier positif k avec $A^k = 0$.

Corollaire 3.5.1 *Une matrice nilpotente non nulle n'est pas diagonalisable.*

Preuve. En effet si A est nilpotente et diagonalisable, il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$, et il existe une matrice P inversible pour laquelle $D = P^{-1}AP$ soit diagonale. On a alors

$$D^k = P^{-1}A^kP = 0.$$

Comme D diagonale, on a $D = 0$, et $A = PDP^{-1} = 0$. Une contradiction ■

Exemple 3.5.1 Déterminer l'indice de la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après le calcul, on a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $N^3 = 0$ et $N^2 \neq 0$, la matrice N est donc nilpotente d'indice $k = 3$.

Remarque 3.5.1 Le produit de deux matrices non nulles peut être nul. En effet, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$A^2 = 0 \nRightarrow A = 0.$$

Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$. On voit que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mais $A \neq 0$.

Exemple 3.5.2 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Déterminons alors le polynôme caractéristique p_A de la matrice

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \begin{vmatrix} 3-x & 9 & -9 \\ 2 & -x & 0 \\ 3 & 3 & -3-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & -9 \\ 2 & -x & 0 \\ 3 & -x & -3-x \end{vmatrix} \\ &= -x \begin{vmatrix} 3-x & 0 & -9 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -3-x \end{vmatrix} \\ &= -x^3. \end{aligned}$$

Comme $A^2 \neq 0$, A est bien nilpotente d'indice 3.

Théorème 3.5.1 *Soient N une matrice nilpotente d'indice k et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul tel que $N^{k-1}x \neq 0$, alors la famille*

$$\left\{Ix, Nx, N^2x, ..., N^{k-1}x\right\}$$

est libre.

Preuve. Soit $(\alpha_i)_{0\leq i\leq k-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i N^i x = 0.$$

Ceci implique

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha_0 N^{k-1}x + \alpha_1 N^k x + ... + \alpha_{k-1}N^{2k-2}x = 0 \\ \alpha_0 N^{k-2}x + \alpha_1 N^{k-1}x + ... + \alpha_{k-1}N^{2k-3}x = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0 Nx + \alpha_1 N^2 x + ... + \alpha_{k-1}N^k x = 0 \\ \alpha_0 Ix + \alpha_1 Nx + ... + \alpha_{k-1}N^{k-1}x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha_0 N^{k-1}x = 0 \\ \alpha_1 N^{k-1}x \\ \vdots \\ \alpha_{k-2}N^{k-1}x = 0 \\ \alpha_{k-1}N^{k-1}x = 0 \end{array}\right.$$

Puisque $N^{k-1}x \neq 0$, on a alors $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_{k-1} = 0$. ■

Définition 3.5.2 (Endomorphismes nilpotents) Un endomorphisme f de E est dit nilpotent s'il existe un entier k non nul tel que $f^k = 0$. On pose alors

$$k_0 = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \,;\, f^k = 0\right\}.$$

L'entier naturel k_0 est appelé l'indice de f.

Proposition 3.5.1 *Soient deux endomorphismes nilpotents qui commutent alors leur somme est nilpotente.*

Proposition 3.5.2 (voir [9]) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente, alors*

$$p_A(x) = (-x)^n.$$

En particulier $A^n = 0$.

Preuve. Le résultat est trivial si $n = 1$. Supposons que ce résultat est vrai pour $n \geq 1$, et soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Si $A = 0$, $p_A(x) = (-x)^{n+1}$. Si $A \neq 0$, soit $p \geq 2$ le plus petit entier positif tel que $A^p = 0$, et soit $X_1 \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $A^{p-1}X_1 \neq 0$. Posons $Y_1 = A^{p-1}X_1$, et soit $(Y_2, Y_3, ..., Y_{n+1})$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}^n$ telle que $\mathcal{B} = \{Y_1, Y_2, ..., Y_{n+1}\}$ soit une base de $\mathbb{K}^{n+1}$. Soit $u : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^{n+1}$ associé à A, et soit $B = \mathcal{M}_u(\mathcal{B})$. Comme $A = \mathcal{M}_u(\mathcal{B}_0)$, $\mathcal{B}_0$ désignant la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$, B est semblable à A et $p_A = p_B$. Comme $u(Y_1) = 0$, la première colonne de B est nulle, et on peut écrire

$$B = \begin{pmatrix} 0 & L_1 \\ 0_n & C \end{pmatrix},$$

avec $L_1 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, 0_n désignant l'élément nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Une récurrence immédiate montre que pour $p \geq 1$ la matrice B^p est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 0 & L_p \\ 0_n & C^p \end{pmatrix}$$

avec $L_p \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. Donc C est nilpotente, et $p_C = x^n$. En développant par rapport à la première colonne on obtient $p_B = xp_C = x^{n+1}$, et on voit par récurrence sur n que $p_A = x^n$ si A est nilpotente. Le fait que dans ce cas $A^n = 0$ résulte alors du théorème de Cayley-Hamilton. ■

Conclusion 3.5.1 Si A est nilpotente, d'après la Proposition 3.5.2, il est clair que toutes les valeurs propres de A sont nulles.

Remarque 3.5.2 Dans le cas où la dimension de l'espace vectoriel est égale à n, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit nilpotent est que son polynôme caractéristique soit égal à $(-x)^n$.

Critère 3.6 (Formule de Binôme) *Soient A et B deux matrices carrées avec $AB = BA$, alors*

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i A^{n-i} B^i = \sum_{i=0}^{n} C_n^i A^i B^{n-i}.$$

Proposition 3.6.1 (voir [9]) *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices nilpotentes. Si $AB = BA$, alors $A - B$ est nilpotente.*

Preuve. Soient $p \geq 1$ et $q \geq 1$ deux entiers tels que $A^p = B^q = 0$. Comme $AB = BA$, on peut calculer $(A-B)^{p+q}$ en utilisant le binôme de Newton et on obtient

$$(A-B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} (-1)^{p+q-k} C_{p+q}^k A^k B^{p+q-k}.$$

Si $p \leq k \leq p+q$, on a $A^k = 0$. Si $0 \leq k \leq p$, on a $p+q-k \geq q$, et $B^{p+q-k} = 0$. Donc $(A-B)^{p+q} = 0$. ■

Corollaire 3.6.1 *Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable, et soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente telle que $DN = ND$, alors D et $D+N$ ont même polynôme caractéristique.*

3.6.1 Problèmes

Ex 01. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Montrer que

$$\det(A + I_n) = 1.$$

Ex 02. Est-ce-que $A^2 = 0 \Rightarrow A = 0$?

Ex 03. Prouver que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

est nilpotente.

Ex 04. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculer A^3. Qu'on déduire ?

Ex 05. Montrer que les matrices strictement triangulaires sont nilpotentes.

Ex 06. Dans $\mathbb{C}$, A et $2A$ sont semblables ssi A nilpotente. Notons que voir la solution de la Micro-interrogation 4.30, on a montré que

$$A \sim 2A \Rightarrow A \text{ est nilpotente dans } \mathbb{R}.$$

3.7 Théorème de décomposition de Jordan

Maintenant, on présente le théorème de décomposition de Jordan [2].

2. ▷ La réduction de Jordan est la traduction matricielle de la réduction des endomorphismes introduite par Jordan. Cette réduction est tellement employée, en particulier en

Théorème 3.7.1 (Théorème de décomposition de Jordan,[9]) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé. Alors il existe un unique couple (D, N) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $A = D + N$.
2. D *est diagonalisable.*
3. N *est nilpotente.*
4. $DN = ND$.

Notons que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec A diagonalisable, et la décomposition de Jordan est alors la décomposition triviale $D = A, N = 0$. Si A est non-diagonalisable, et comme $Sp\,(A) = \{\lambda\}$, on a

$$D = \lambda I_2 \text{ et } N = A - \lambda I_2. \tag{3.8}$$

Exemple 3.7.1 Décomposition de Jordan de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\det(A) = 4$, $Tr(A) = 4$, donc $p_A\,(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Donc A possède 2 comme valeur propre double. On a donc d'après la formule ci-dessus (voir la formule (3.8)).

$$D = 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour les matrices 3×3, on déduit du Théorème 3.7.1 le résultat suivant.

analyse pour la résolution d'équations différentielles ou pour déterminer le terme général de certaines suites récurrentes, qu'on la nomme parfois «jordanisation des endomorphismes».

▷ Camille Jordan, né le 5 janvier 1838 à Lyon et mort le 22 janvier 1922 à Paris, est un mathématicien français, connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent Cours d'analyse. Il est renommé pour réduction de Jordan.

Corollaire 3.7.1 (voir [3]) *Soit* $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *et soit* $p_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$ *le polynôme caractéristique de* A, *et soit* $A = D + N$, *avec* D *diagonalisable,* N *nilpotente,* $ND = DN$ *la décomposition de Jordan de* A.

1. *Si les trois valeurs propres* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *sont distinctes, alors* $D = A$ *et* $N = 0$.
2. *Si les trois valeurs propres* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *sont égales, alors* $D = \lambda_1 I$, *et* $N = A - \lambda_1 I$.
3. *Si* $\lambda_3 = \lambda_2 \neq \lambda_1$, *alors*
$$D = \lambda_2 I + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(A - \lambda_2 I\right)^2,$$
et
$$N = A - D = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(A - \lambda_1 I\right)\left(A - \lambda_2 I\right).$$

Exemple 3.7.2 *Décomposition de Jordan de*
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$
On voit tout de suite que $\det(A) = 0$, *puisque les deux dernières lignes de* A *sont égales. On obtient, en retirant la seconde ligne à la troisième dans le calcul du déterminant ci -dessous, puis en ajoutant la troisième colonne à la seconde*
$$\begin{aligned} p_A(x) &= \begin{vmatrix} -x & 2 & -1 \\ -1 & 4-x & -2 \\ -1 & 4 & -2-x \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -x & 2 & -1 \\ -1 & 4-x & -2 \\ 0 & x & -x \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} -x & 1 & -1 \\ -1 & 2-x & -2 \\ 0 & x & -x \end{vmatrix} = x\left[x\left(x-2\right)+1\right] = x\left(x-1\right)^2. \end{aligned}$$

On voit donc que A admet 0 pour valeur propre simple et 1 pour valeur propre double. D'après le corollaire précédent, on a

$$D = I - (A - I)^2 \text{ et } N = A(A - I), \text{ où}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } (A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.8 Matrices triangularisables (trigonalisables)

Il y a des des endomorphismes qu'il est impossible de diagonaliser (voir la matrice B de l'exemple 2.2.4 et il y en a beaucoup d'autres). La prochaine section d'endomorphismes à considérer sont ceux pour lesquels il existe une base dans laquelle la matrice représentative est triangulaire supérieure : les puissances successives d'une matrice triangulaire sont un peu plus dificiles à calculer que celles des matrices diagonales et beaucoup moins que celles d'une matrice quelconque.

Définition 3.8.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est une matrice trigonalisable s'il existe une matrice inversible $P \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice triangulaire supérieure T telles que

$$A = PTP^{-1} \text{ (ou, ce qui est équivalent : } T = P^{-1}AP).$$

Notons que les éléments diagonaux de T sont des valeurs propres de A.

– Une matrice carrée A à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ est dite **trigonalisable** (ou **triangularisable**) sur $\mathbb{K}$ si elle est semblable à une matrice triangulaire T à coefficients dans $\mathbb{K}$.

– Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure (respectivement inférieure) si elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & \mathbf{a}_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{resp. } A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & \mathbf{a}_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix})$$

– Toute matrice triangulaire supérieure est trigonalisable (il suffit de choisir $P = I_n$, où I_n est la matrice identitée de dimension n).

Remarque 3.8.1 Toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Théorème 3.8.1 *Un endomorphisme est triangularisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$.*

Maintenant, on présente le théorème sur la décomposition de Schur [3] d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Théorème 3.8.2 (Théorème de Décomposition de Schur, [13]) *Toute matrice à coefficients complexes est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

3. ▷ Notons que la décomposition de Schur (nommée après le mathématicien Issai Schur) d'une matrice carrée complexe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une décomposition de la forme

$$A = PTP^*,$$

où P est une matrice unitaire ($P^*P = I$) et T une matrice triangulaire supérieure.
▷ Issai Schur, né à Moguilev le 10 janvier 1875 et mort à Tel-Aviv le 10 janvier 1941, est un mathématicien d'origine russe.

Preuve. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrons que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

La démonstration se fait par récurrence sur n. En effet, pour $n = 1$ on a

$$A = (a_{11}), \text{ où } a_{11} \in \mathbb{C}$$

Dans ce cas, on peut écrire

$$A = I\,(a_{11})\,I^{-1} = PTP^{-1} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{c} P = I = (1) \\ T = (a_{11}) = A. \end{array} \right.$$

Supposons que toute matrice $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ est trigonalisable. Soient (λ, x) un élément propre de A et $\{x, u_2, ..., u_n\}$ une base de $\mathbb{C}^n$. Posons $U = \begin{pmatrix} x & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} AU &= \begin{pmatrix} Ax & Au_2 & \dots & Au_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x & Au_2 & \dots & Au_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Maintenant, calculons $U^{-1}AU$. En effet, on a

$$U^{-1}x = U^{-1}Ue_1 = e_1,$$

où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^t$. D'où

$$\begin{aligned} U^{-1}AU &= U^{-1}\begin{pmatrix} \lambda x & Au_2 & \dots & Au_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda e_1 & U^{-1}Au_2 & \dots & U^{-1}Au_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient aussi

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda & \times & \times & \dots & \times \\ 0 & \times & \times & \dots & \times \\ 0 & \times & \times & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \times & \times & \dots & \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & C \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = T_1, \qquad (3.9)$$

où $C \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$ et $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. Il existe donc une matrice inversible W telle que $W^{-1}A_1W = T'$ est est triangulaire supérieure. D'où

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & C \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & CW \\ 0 & W^{-1}A_1W \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & CW \\ 0 & T' \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

De (3.9) et (3.10), il vient

$$A \sim T_1 \sim \begin{pmatrix} \lambda & CW \\ 0 & T' \end{pmatrix} = T.$$

Donc A est bien semblable avec T, ce qu'il fallait démontrer. ■

Exercice 3.8.1 Trigonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Puis, calculer A^n, B^n et C^n ; où $n \geq 0$.

1. D'après un calcul simple, on a

$$p_A(x) = (x-3)^2.$$

Donc, $\lambda = 3$ est une valeur propre double et la matrice A n'est pas diagonalisable ; car $A \neq 3I$.

Vecteurs propres :

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \begin{array}{c} 2x - y = 3x \\ x + 4y = 3y \end{array}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y = -x\right\} \\ &= Vect\{(1,-1)\} = Vect\{v_1\}. \end{aligned}$$

Notons que $\dim\ker(A-3I)^2 = 2$. $\{(1,-1)\}$. On peut prendre $v_2 = (1,1)$ (un vecteur non nul vérifiant $\{v_1, v_2\}$ soit libre) et posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = T$$

Donc $A \sim T$.

Le calcul de A^n : on a

$$A^n = PT^nP^{-1}.$$

Le calcul de T^n : On écrit T sous la forme

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}_D + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_N, \text{ où } N^2 = 0.$$

D'où

$$\begin{aligned} T^n &= D^n + nD^{n-1}N \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & -2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}; \ n \geq 0. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & -2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n - n \times 3^{n-1} & -n \times 3^{n-1} \\ n \times 3^{n-1} & n \times 3^{n-1} + 3^n \end{pmatrix}; \ n \geq 0. \end{aligned}$$

Remarque 3.8.2 Si la matrice A est triangularisable, les éléments diagonaux de la matrice triangulaire semblable à A sont les valeurs propres de A.

Théorème 3.8.3 (voir [13]) *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a*

$$\det(A) = \prod_{\lambda_i \in Sp(A)} \lambda_i.$$

Notons que $Sp(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A.

Preuve. Puisque A est trigonalisable, il existe donc une matrice inversible $P \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure T telles que

$$A = PTP^{-1} \ (T = (t_{ij}) \text{ avec } t_{ii} \in Sp(A)).$$

Donc

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\left(PTP^{-1}\right) \\ &= \det(P)\det(T)\det\left(P^{-1}\right) \\ &= \det(T) \\ &= t_{11}t_{22}...t_{nn} \\ &= \prod_{\lambda_i \in Sp(A)} \lambda_i. \end{aligned}$$

■

Corollaire 3.8.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a*

$$0 \notin Sp(A) \Rightarrow A^{-1} \text{ existe.}$$

Preuve. D'après le Théorème 3.8.3, on a $0 \notin Sp(A)$ implique $\det(A) \neq 0$.

■

3.8.1 Calcul des puissances d'une matrice

Le résultat suivant donne un moyen effectif de calculer les puissances d'une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé quand on connait ses valeurs propres.

Proposition 3.8.1 (voir [13]) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé, et soit $A = D + N$, avec D diagonalisable, N nilpotente, $ND = DN$ la décomposition de Jordan de A. On a alors, pour $k \geq 1$,*

$$A^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i D^{k-i} N^i = \sum_{i=0}^{\min(m-1,k)} C_k^i D^{k-i} N^i,$$

où $C_k^i = \dfrac{k!}{i!\,(k-i)!}$ pour $0 \leq i \leq k$, avec les conventions $0! = 1! = 1$, et où m est le plus petit entier ≥ 1 tel que $N^m = 0$.

Preuve. Comme $ND = DN$, ceci résulte immédiatement du binôme de Newton. Le fait que l'on peut arrêter la sommation à $m-1$ si $m-1 \leq k$ provient du fait que $N^k = 0$ pour $k \geq m$. ■

Notons que le calcul de D^k se fait en diagonalisant D : il existe Δ diagonale et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles telles que $\Delta = P^{-1}DP$, soit $D = P\Delta P^{-1}$. Une récurrence immédiate montre que l'on a, pour $k \geq 1$,

$$D^k = P\Delta^k P^{-1}$$

D'autre part si $\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_n \end{pmatrix}$ est diagonale, on a pour $k \geq 1$,

$$\Delta^k = \begin{pmatrix} \delta_1^k & & & \\ & \delta_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_n^k \end{pmatrix},$$

ce qui permet de calculer effectivement D^k.

Exemple 3.8.1 Soit la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Calculer A^n pour tout $n\geq 0$.Posons $A=I+N$, où $N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ et I est la matrice unité d'ordre 3. De plus, on a

$$N^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\text{ et }N^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Implique

$$\begin{aligned}A^n &= I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2\\ &= \left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\}\\ &= \begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exemple 3.8.2 On a, pour $k\geq 0$,

$$\begin{pmatrix}1&-1\\1&3\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}2^k-k2^{k-1}&-k2^{k-1}\\k2^{k-1}&2^k+k2^{k-1}\end{pmatrix}.$$

En effet posons $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&3\end{pmatrix}$. Nous avons

$$p_A(x)=x^2-Tr(A)+\det(A)=x^2-4x+4=(x-2)^2.$$

donc A possède une valeur propre double égale à 2. Comme le polynôme constant $p=2$ vérifie trivialement l'équation $p\equiv 2\ \left(mod\ \left((x-2)^2\right)\right)$, la décomposition de Jordan $A = D + N$ de A donne

$$D = p(A) = 2I \text{ et } N = A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $N^2 = 0$, et on obtient, pour $k \geq 0$,

$$A^k = 2^k I + k2^{k-1} N = \begin{pmatrix} 2^k - k2^{k-1} & -k2^{k-1} \\ k2^{k-1} & 2^k + k2^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.8.3 On a, pour $k \geq 1$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1-k & 2k & -k \\ -k & 2+2k & -1-k \\ -k & 2+2k & -1-k \end{pmatrix}.$$

En effet on connait la décomposition de Jordan $A = D+N$ de $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, qui est

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Les polynômes caractérisques p_A et p_D de A coïncident, et d'après un calcul effectué au chapitre précédent on a

$$p_A(x) = p_D(x) = x(x-1)^2.$$

Comme D est diagonalisable le sous-espace E_0 associé à la valeur propre 0 de D est engendré par les colonnes de

$$D - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

et le sous espace propre associé à la valeur propre 1 de D est engendré par les colonnes de D. Donc si on pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

on obtient une matrice inversible dont les colonnes sont des vecteurs propres de D associés aux valeurs propres $1, 1$ et 0 de D. On obtient

$$P^{-1}DP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

soit pour $k \geq 1$,

$$D^k = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^k P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 1^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = D.$$

D'autre part, on a

$$N^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$ND = DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = N,$$

et on obtient, pour $k \geq 1$,

$$A^k = D^k + kD^{k-1}N = D + kN = \begin{pmatrix} 1-k & 2k & -k \\ -k & 2+2k & -1-k \\ -k & 2+2k & -1-k \end{pmatrix}.$$

Chapitre 4

Tests d'Algèbre III de 2009 à 2016

4.1 Examen final d'Algèbre III (2009) [1]

Exercice 01. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver $P \in \mathbb{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} ;\ \alpha, \beta \text{ à calculer.}$$

2. Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer A^{-1} en fonction de I_3, A et A^2.

Exercice 02. Résoudre le système différentiel

$$X'(t) = A.X(t)$$

avec A est la matrice de l'exercice **01** et

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Exercice 03. Soit la matrice

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a+b & 0 & 1-b \\ a+2 & 1 & -2 \end{pmatrix} ;\ a, b \in \mathbb{R}$$

1. En utilisant le polynôme minimal de $M_{a,b}$, trouver les valeurs de a et b pour lesquelles $M_{a,b}$ soit diagonalisable.

1. Cet examen a été réalisé par Dr. N. Azzouza le 23 Février 2009 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.

2. Calculer A^n ; $n \in \mathbb{N}$, où $A = M_{0,0}$, puis en déduire le calcul de u_n en fonction de n, où

$$\begin{cases} u_{n+3} = 2u_n + u_{n+1} - 2u_{n+2} \\ u_0 = -1,\ u_1 = 1 \text{ et } u_2 = 5. \end{cases}$$

Exercice 04. Soit $f \in End\,(E)$, où $\dim E = n$ et $rg\,(f) = 2$. On suppose qu'il existe $u, v \in E - \{0\}$ t.q $f\,(u) = u$ et $f\,(v) = -v$. Montrer que f est diagonalisable (Discuter sur n, et rappelez-vous $\dim E = rg\,(f) + \dim \ker f$).

Exercice supplémentaire (Facultatif, 1.5 pts). Sans calculer, ni valeurs propres ni vecteurs propres, montrer que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

Bonne Chance !

4.2 Examen final d'Algèbre III (2010) [2]

Exercice 01. Discuter la diagonalisation de la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&b&d\\0&1&c\\0&0&a\end{pmatrix},\text{ selon } a,b,c,d\in\mathbb{R}.$$

Exercice 02. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que

1) $\det(A)=0\Rightarrow 0$ est une valeur propre de A.

2) $A^2=A\Rightarrow A$ est diagonalisable.

3) $m_A(x)=(x-a)(x-b)\,;\ a\neq b\Rightarrow A^n$ s'écrit en fonction de A et I.

Exercice 03. Soit

$$A=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{R}.$$

1. Écrire A sous la forme $aB+bC$, où B et C indépendants de a et b.
2. Calculer $P\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}CP$ soit diagonale.
3. En déduire que A est diagonalisable, sans calculer ses valeurs et vecteurs propres.

Exercice 04. Soit

$$M=\begin{pmatrix}4&2&-2\\1&5&-1\\1&3&1\end{pmatrix}$$

Montrer que

$$M\sim\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&1\\0&0&\beta\end{pmatrix},$$

où α,β à calculer, puis, calculer M^n, où $n\in\mathbb{N}$.

Bonne Chance !

2. Cet examen a été réalisé par Dr. N. Azzouza le 18 Février 2010 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.

4.3 Micro-interrogation d'Algèbre III (2011) [3]

(I) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

I.1) Calculer $p_A(x)$ le polynôme caractéristique de A, puis sans calculer les vecteurs propres de A, montrer que A est diagonalisable et ceci de deux façons différentes.

I.2) Soit m_A le polynôme minimal de A. Donner les relations entre m_A et p_A.

I.3) Calculer a_n , b_n réels tels que

$$A^n = a_n A + b_n I.$$

De même, calculer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$A^{-1} = aA + bI.$$

(II) Montrer que

$i)$ $A \sim B \Rightarrow e^A \sim e^B$,

$ii)$ $A \sim B \Rightarrow p_A(x) = p_B(x)$.

Bonne chance !

3. Ce micro-interrogation a été effectué par Dr. N. Azzouza le 22 Janvier 2011 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.

4.4 Examen final d'Algèbre III (2011)

[4]

I. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}.$$

Calculer p_A, le polynôme caractéristique de A, puis m_A le polynôme minimal de A. A est-elle diagonalisable ?

Calculer A^n en fonction de A et de I_3 (utiliser la division euclidienne)

Résoudre $X' = AX$, où $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ pour $a = 1$.

Montrer que $(\exp(At))' = A \exp(At)$ et en déduire que $X = \exp(At) B$, où

$$B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

est solution de $X' = AX$.

II. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

sans calculs, montrer que A est diagonalisable et que B ne l'est pas.

Quelles sont les 2 formes de Jordan possibles de B, puis par calcul, préciser laquelle est semblable à B.

4. Cet examen a été réalisé par Dr. N. Azzouza en Février 2011 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.

III. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est trigonalisable et trouver une matrice P inversible telle que $T = P^{-1}AP$ soit une matrice triangulaire de la forme de Jordan.

En écrivant T sous la forme $D+N$, où D est diagonale et N nilpotente, calculer T^n, puis en déduire A^n.

IV. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

une matrice diagonale par blocs avec $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer p_A en fonction de p_{A_1} et p_{A_2}, puis m_A en fonction de m_{A_1} et m_{A_2}, A est-elle diagonalisable ?

4.5 Micro-interrogation d'Algèbre 3 (2012)

[5]

Exercice 01 (4pts). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver que

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n, \text{ où } \lambda_i \in Sp(A).$$

En déduire que

$$0 \notin Sp(A) \Rightarrow A^{-1} \text{ existe.}$$

Exercice 02 (4pts). Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x + y \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

Exercice 03 (4pts). Résoudre le système de suites (a_n), (b_n) :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \lambda a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = \lambda b_n \end{cases} ; \; a_0 = 0, b_0 = 1 \text{ et } \lambda \neq 0.$$

Exercice 04 (4pts). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable possède une valeur propre unique λ. En utilisant deux méthodes, démontrer que $A = \lambda I_n$.

Exercice 05 (4pts). Étudier la diagonalisation de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} ; \; a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Good Luck.

5. Ce micro-interrogation a été réalisé par Dr. Dj. Bellaouar le 10-01-2012 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.

4.6 Examen final d'Algèbre 3 (2012)

[6]

Exercice 1 (2pts).

Soit la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} ;\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Trouver l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles A_α soit diagonalisable.

Exercice 2 (4pts). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice possède une seule valeur propre λ. Calculer $e^{At};\ t \in \mathbb{R}$.

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = y + z \\ z' = z \end{cases}$$

Exercice 3 (2pts).

- Trouver la relation entre les éléments propres de A et ceux de $P^{-1}AP$.
- Montrer que les matrices semblables ont le même polynôme caractéristique (utiliser deux méthodes).
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable avec $Sp(A) = \{-1, 1\}$. Prouver que $A^{-1} = A$.

Exercice 4 (6pts).

Démontrer le théorème de Cayley-Hamilton suivante

$$\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : p_A(A) = 0.$$

6. Cet examen a été réalisé par Dr. Dj. Bellaouar en 2012 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.

Est-ce-que la démonstration suivante du théorème de Cayley-Hamilton est vraie ?

$$p_A(x) = \det(A - xI) \Rightarrow p_A(A) = \det(A - AI) = \det(0) = 0.$$

Exercice 5 (3pts). Calculer le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Qu'en déduire ?

Exercice 6 (3pts). Soit le déterminant

$$D_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$. Calculer D_n en fonction de n.

Good Luck.

4.7 Examen de rattrapage d'Algèbre 3 (2012)

[7]

Exercice 1 (5+2pts).

a) Questions de cours

Résoudre le système différentiel linéaire homogène à coefficient constants

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + ... + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + ... + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + ... + a_{nn}x_n(t), \end{cases}$$

où a_{ij} sont des constantes complexes, et où les fonctions x_i sont des fonctions dérivables inconnues à valeurs complexes.

b) Résoudre le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (3pts). Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{-\pi}{2} \end{pmatrix}$$

Calculer $\cos^2 A + \sin^2 A$.

Exercice 3 (3pts). Montrer le résultat suivant :

‹‹Soit A une matrice diagonalisable, alors il existe une base $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formée par n vecteurs propres de A››.

7. Cet examen de rattrapage a été effectué par Dr. Dj. Bellaouar en 2012 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.

Exercice 4 (2+2pts). Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice complexe carrée d'ordre n telle que pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on ait

$$|a_{ij}| < \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que la suite de matrices $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ définie par

$$B_m = I_n + A + A^2 + ... + A^m$$

   est convergente.
2. Montrer que $I_n - A$ est inversible d'inverse la matrice $\lim\limits_{m \to +\infty} (B_m)$.

Exercice 5 (3pts). Soit le déterminant

$$D_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrer que $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$. Calculer D_n en fonction de n.

Good Luck !

4.8 Micro-interrogation d'Algèbre 3 (2013)

[8]

Exercice 1 (5pts).

1. Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}. \qquad \text{(2pts)}$$
Calculer A^2, puis, montrer que $e^A = I_3 + (e-1)A$.
2. Résoudre le système différentiel
$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t). \end{cases} \qquad \text{(3pts)}$$

Exercice 2 (3pts). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-ce-que
$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}\right) = -e^{-At}.A \text{ ou } \frac{d}{dt}\left(e^{-At}\right) = -A.e^{-At} \quad ? \qquad \text{(1pt)}$$
Si A est inversible montrer que
$$\int_0^{+\infty} e^{-At}dt = A^{-1}. \qquad \text{(2pts)}$$

Exercice 3 (2pts). Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices diagonalisables. supposons que $AB = BA$ et soit $P \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$ (i.e., P inversible) telle que
$$\begin{cases} P^{-1}AP = D_A = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} \\ P^{-1}BP = D_B = diag\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n\}. \end{cases}$$

8. Ce micro-interrogation a été réalisé par Dr. Dj. Bellaouar le 10 Janvier 2013 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.

Montrer que

$$e^{A+B} = e^{A}.e^{B}. \qquad \text{(2pts)}$$

Exercice 4 (4pts).

On considère la matrice

$$A_{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & 1 \\ 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Trouver l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles A_{α} est diagonalisable.

Exercice 5 (3pts).

Soit

$$A = \begin{pmatrix} I_3 & C \\ 0 & C \end{pmatrix}; \ C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Prouver que

$$A^{k} = \begin{pmatrix} I_3 & kC \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

En déduire le calcul de A^{300}.

Exercice 6 (3pts).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'indice $k = 2$, i.e., $A^2 = 0$ et $A \neq 0$. En utilisant deux méthodes, montrer que pour tout entier m on a

$$A(I_n + A)^m = A.$$

4.9 Examen final d'Algèbre 3 (2013)

[9]

Ex 01 (6pts) : Questions de cours

(i) Démontrer le théorème suivant :

Toute matrice à coefficients complexes est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(ii) Définissez les notions suivantes :

(a) Sur le calcul de A^k ; $k \geq 0$.

(b) Exponentielle de matrice, $cos(A)$,..., f(matrice).

(c) Systèmes de suites avec les relations de récurrence.

(d) Systèmes différentiels et matrices diagonalisables.

(e) Systèmes différentiels et matrices non diagonalisables.

(f) Polynôme minimal.

Ex 02 (8pts) : **Partie I :**

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Supposons que les éléments propres de A sont

$$\left(\lambda_1, (a,b)_{v_1}\right) \text{ et } \left(\lambda_2, (c,d)_{v_2}\right).$$

Posons

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2, \text{ où } G_1, G_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

9. Cet examen final a été effectué par Dr. Dj. Bellaouar en 2013 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.

avec G_1, G_2 sont définies par :

$$G_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & c' \end{pmatrix} \text{ et } G_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b' & d' \end{pmatrix}$$

Partie II.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Supposons que $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \,;\, k \leq n\}$.

(II.1) Vérifier que

$$\cos^2 A + \sin^2 A = I_n \tag{4.1}$$

(II.2) Pour toute fonction f définie aux points $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq k}$, montrer le résultat suivant

$$f(A) = \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) G_i \,;\, G_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (1 \leq i \leq k).$$

(II.3) En utilisant la formule (4.1), vérifier que

$$\sum_{i=1}^{k} G_i = I_n.$$

(II.4) Si $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$. Pour tout entier positif m, posons $f(x) = x^m$. Prouver que

$$\lim_{m \to +\infty} \left(\frac{A}{\lambda_1} \right)^m = G_1.$$

(II.5) Établir que

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{\|A^m\|^{\frac{1}{m}}}{|\lambda_1|} = 1.$$

Ex 03 (6pts) : (a) Trigonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Puis, calculer les puissances $A^n;\ n \geq 0$.

(b) Soient $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En utilisant la définition de l'exponentielle de matrice et la formule de binôme, montrer que

$$AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

Good Luck.

4.10 Examen de Rattrapage d'Algèbre 3 (2013)

[10]

Ex 01 (7pts) :

1. Est-ce-que la démonstration suivante du théorème de Cayley-Hamilton est vraie ?

$$p_A(x) = \det(A - xI) \Rightarrow p_A(A) = \det(A - AI) = \det(0) = 0.$$

2. Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton. Calculer l'inverse de la matrice A.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Sp(A) = \{\lambda\}$. Montrer que :
$$e^A = e^\lambda \left[I_n + (A - \lambda I_n) + \frac{(A - \lambda I_n)^2}{2!} + ... + \frac{(A - \lambda I_n)^{n-1}}{(n-1)!} \right].$$

4. Résoudre le système différentiel
$$X' = AX.$$

Ex 02 (6pts) : On définit la suite (u_n) par

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \\ u_1 = u_2 = 1. \end{cases} \tag{4.2}$$

10. Cet examen de rattrapage a été effectué par Dr. Dj. Bellaouar en 2013 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.

Écrire (4.2) sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \; ; \; M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Montrer que

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \; ; \; n \in \mathbb{N}.$$

Ex 03 (7pts) : Si M et N des matrices carrées qui commutent (c'est-à-dire qui vérifient $MN = NM$). Prouver que

$$e^{M+N} = e^M e^N = e^N e^M$$

En déduire que

$$\left(e^M\right)^{-1} = e^{-M}.$$

Soient u et v des Endomorphismes d'un espace vectoriel E. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

Soit $p_n \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme de degré n. Démontrer que :

$$u[\ker p_n(u)] \subset \ker p_n(u)$$

Good Luck.

4.11 Micro-interrogation D'Algèbre 3 (2014)

[11]

Exercice 1 (2pts).

i) Soit $\alpha \in \mathbb{R}- \{0\}$. Prouver que

$$B \sim \alpha I_n \Leftrightarrow B = \alpha I_n.$$

ii) Vérifier que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \nsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (5pts).

Une matrice A est dite nilpotente, s'il existe un entier k (l'indice de A) tel que $A^k = 0$. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, montrer que

a) $Sp(N) = \{0\}$

b) $I - N \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$

Application. $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Exercice 3 (3pts). Calculer le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problème (10pts).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$.

11. Ce micro-interrogation a été effectué par Dr. Dj. Bellaouar en 2014 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.

1. Calculer B^k ; $k \geq 0$ (utiliser la démonstration par récurrence sur k).
2. Étudier la diagonalisation de la matrice
$$A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix};\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
3. Résoudre le système différentiel
$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = \beta x + \alpha y \end{cases}$$
4. Prouver que $A_{\alpha,\beta}$ est nilpotente $\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$.
5. Calculer $C_{\alpha,\beta}^k$; $k \geq 0$, où
$$C_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} A_{\alpha,\beta} & 0 \\ A_{\alpha,\beta} & A_{\alpha,\beta} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

Good Luck.

4.12 Examen final D'Algèbre 3 (2014)

[12]

Exercice 1 (3pts).

Questions de cours.

(i) Définissez les notions suivantes : Matrice Trigonalisable, Matrice Nilpotente, Exponentielle de matrice, et Produit Scalaire.

(ii) Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. Calculer le polynôme minimal $m_D(x)$.

Exercice 2 (3pts). Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A \sim B$.

Exercice 3 (7pts). Considérons la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le polynôme minimal de A ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels α_n et β_n tels que l'on ait
$$A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3.$$
3. Calculer α_n et β_n en fonction de n. On en déduit alors la forme explicite de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

12. Cet examen final a été effectué par Dr. Dj. Bellaouar en 2014 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.

Exercice 4 (7pts). Soit

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix};\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

a. Étudier la diagonalisation de la matrice $A_{\alpha,\beta}$.

b. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = \beta x + \alpha y \end{cases}$$

c. Prouver que $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k_{\alpha,\beta} = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \left]-1, 1\right[$ et $\beta \in \left]-1-\alpha, 1-\alpha\right[$.

d. Supposons que $|\alpha| >> |\beta|$, calculer $\lim\limits_{\alpha,\beta \to -\infty} e^{A_{\alpha,\beta}}$

e. Résoudre le système de suites

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n + \beta y_n + 1 \\ y_{n+1} = \beta x_n + \alpha y_n + 2 \end{cases};\ x_0 = 1,\ y_0 = 0.$$

Remark. Please, don't forget to use the methodical manner of mathematics.

Good Luck

4.13 Examen de rattrapage d'Algèbre 3 (2014)

[13]

Exercice 01

(a) Déterminer les réels a, b, c et d pour que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & b & d \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable

(b) On considère la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \alpha \end{pmatrix} \; ; \; \alpha \in \mathbb{R}$$

En utilisant deux méthodes. Prouver que A_n est diagonalisable.

Exercice 02

(i) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \notin Sp(A)$. Prouver que

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \alpha I_n)^{-1} x = \frac{1}{\lambda - \alpha} x.$$

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver que

$$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in Sp(A^*).$$

13. Cet examen de rattrapage a été effectué par Dr. Dj. Bellaouar le 11 Juin 2014 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.

(iii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Vérifier que

$$\lim_{k \to +\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \max_{\lambda_i \in Sp(A)} (|\lambda_i|) < 1.$$

De plus, si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ sont des valeurs propres de A avec $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_k|$, $\lambda_1 \neq 0$. Montrer que

$$|\lambda_1| = \lim_{m \to +\infty} \|A^m\|^{\frac{1}{m}}.$$

Exercice 03. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix} \ ; \ \alpha + \beta \neq 0.$$

Calculer les éléments propres de A. Prouver que

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} G_1 + e^{\lambda_2 t} G_2, \text{ où } \lambda_1, \lambda_2 \in Sp(A) \text{ et } G_1, G_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Résoudre le système différentiel $X' = AX$.

Exercice 04. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & e^t - e^{-t} \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}.$$

Écrire A sous la forme : $A = PDP^t$ avec D diagonale et P orthogonale.

Good Luck.

4.14 Micro-interrogation d'Algèbre 3 (2015)

[14]

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, prouver que

$$A \text{ diagonalisable} \Rightarrow A = 0.$$

En déduire la diagonalisation de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$A \sim 2A \Rightarrow A \text{ est nilpotente.}$$

3. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{-\pi}{2} \end{pmatrix}$$

Calculer $\cos^2 A$ et $\sin^2 A$.

4. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } (\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathbb{R}.$$

Calculer $p_A(x)$.

14. Ce micro-interrogation a été effectué par Dr. Dj. Bellaouar le 13 Janvier 2015 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.

5. Soit $A \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$. Posons

$$\widetilde{A} = (Com\,(A))^t$$

et soit (λ, x) un élément propre de A. Montrer que $\left(\dfrac{\det(A)}{\lambda}, x\right)$ est un élément propre de $\widetilde{A}$.

En déduire que $\widetilde{A} \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$.

Good Luck.

4.15 Examen final d'Algèbre 3 (2015)

[15]

Exercice 01 (2pts). Donner pour chacune des matrices suivantes le polynôme caractéristique et le polynôme minimal. Ne faites pas de grands calculs.

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix};\ a,b \in \mathbb{R},\ M_2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix};\ a,b,c \in \mathbb{R}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix};\ a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 02 (8pts).

Partie I. Définissez les notions suivantes :

– Norme et espace vectoriel normé

– Produit scalaire

Partie II.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale, si et seulement, si

$$A^t A = AA^t = I_n.$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Prouver que $\det(A) = \pm 1$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

15. Cet examen a été réalisé par Dr. Dj. Bellaouar le 29 Janvier 2015 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.

(i) A est orthogonale

(ii) $\forall\ x \in \mathbb{R}^n : \|Ax\| = \|x\|$

(iii) $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$

3. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout θ réel, prouver que

$$e^{\theta A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Qu'en déduire ?

Exercice 03 (7pts). Considérons la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le polynôme minimal de M ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels α_n et β_n tels que l'on ait
$$M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3$$
3. Calculer α_n et β_n en fonction de n. On en déduit alors la forme explicite de M^n pour tout entier n.
4. Résoudre le système différentiel
$$X' = M.X.$$

Exercice 04 (3pts). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que

$a.$ $\det(A) = 0 \Rightarrow 0$ est une valeur propre de A.

b. $A^2 = A \Rightarrow A$ est diagonalisable.

c. $m_A(x) = (x-a)(x-b)\,;\ a \neq b \Rightarrow A^n$ s'écrit en fonction de A et I.

Good Luck !

4.16 Examen de Rattrapage (2015)

[16]

Exercice 01. En utilisant deux méthodes, montrer le théorème de Cayley-Hamilton pour une matrice $(2,2)$.

Exercice 02.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, montrer que A est trigonalisable.

Exercice 03.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda AB + A + B = 0.$$

Prouver que A et B commutent.

Exercice 04.

Considérons la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

- Quel est le polynôme minimal de A ?
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels α_n et β_n tels que l'on ait

$$A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer α_n et β_n en fonction de n

16. Cet examen de rattrapage a été réalisé par Dr. Dj. Bellaouar le 29 Janvier 2015 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.

– Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{ij} = -1$ pour $i \neq j$, 0 pour $i = j$. Dans ce cas, prouver que A est diagonalisable.

Good luck

4.17 Micro-interrogation d'Algèbre 3 (2016)

[17]

Ex 01 (05pts).

1. Calculer le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{n \times n}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Résoudre le système différentiel $X' = AX$.
3. Calculer A^k ; $k \geq 1$.

Ex 02 (05pts). Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que

a. $0 \notin Sp(A) \Rightarrow A \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$

b. $A \sim B \Rightarrow \det(A) = \det(B)$

c. $\det(A) = \det(B) \nRightarrow A \sim B$

d. $A \sim B \Rightarrow Sp(A) = Sp(B)$

e. $Sp(A) = \{\lambda\} \Rightarrow e^A = e^\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(A - \lambda I_n)^k}{k!}$.

Remark. Try by yourself. Don't be *deceiver* !

Good Luck !

17. Ce micro-interrogation a été effectué par Dr. Dj. Bellaouar le 09 Janvier 2016 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.

4.18 Examen final d'Algèbre 3 (2016)

[18]

Ex 01 (4pts)**.** Résoudre le système de suites avec les relations de récurrence donné par

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n - y_n + 1 \\ y_{n+1} = -x_n + \alpha y_n + 2 \end{cases} ; \ (x_0, y_0) = (0, -1), \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ex 02 (4pts)**.** Expliquer comment résoudre un système différentiel $X' = AX$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex 03 (1pt)**.** Calculer les valeurs propres de la matrice

$$P_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex 04 (4.5pts)**.** (a) On considère la matrice d'ordre n suivante

$$K_n = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prouver que K_n est nilpotente, puis calculer l'exponentielle de K_n.

b. Soient N une matrice nilpotente d'indice n et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul tel que $N^{n-1}x \neq 0$. Montrer que la famille

$$B = \left\{Ix, Nx, N^2x, ..., N^{n-1}x\right\}$$

18. Cet exame final a été effectué par Dr. Dj. Bellaouar le 21 Janvier 2016 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.

est une base de $\mathbb{R}^n$.

c. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que

– $A \sim B \Rightarrow \det(A - \lambda I_n) = \det(B - \lambda I_n)$

– $\lambda \in Sp(A) \Rightarrow e^{\lambda} \in Sp\left(e^{A}\right)$

– $\det\left(e^{A}\right) = e^{tr(A)}$.

Ex 05 (1.5pts)**.**

(i) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \notin Sp(A)$. Prouver que

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \alpha I_n)^{-1} x = \frac{1}{\lambda - \alpha} x.$$

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Vérifier que

$$\lim_{k \to +\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \max_{\lambda_i \in Sp(A)} (|\lambda_i|) < 1.$$

Ex 06 (5pts)**.** En utilisant 2 méthodes, montrer le Théorème de **Cayley-Hamilton** sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Remark. Try by yourself. Don't be deceiver !

Good Luck !

4.19 Examen de rattrapage (2016)

[19]

Ex 01 (08pts). Soit la matrice

$$M_{a,b}=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a+b & 0 & 1-b \\ a+2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \; ; \; a,b\in\mathbb{R}$$

1. En utilisant le polynôme minimal de $M_{a,b}$, trouver les valeurs de a et b pour lesquelles $M_{a,b}$ soit diagonalisable.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+3}=2u_n+u_{n+1}-2u_{n+2} \\ u_0=-1,\, u_1=1 \text{ et } u_2=5 \end{cases}$$

Calculer A^n ; $n\in\mathbb{N}$, où $A=M_{0,0}$, puis en déduire le calcul de u_n en fonction de n.

Ex 02 (05pts).

a. Démontrer le Théorème de Cayler-Hamilton pour une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Soit $A\in\mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$. Posons

$$B=(Com(A))^t$$

et soit (λ,x) un élément propre de A. Montrer que $\left(\frac{\det(A)}{\lambda},x\right)$ est un élément propre de B. En déduire que $B\in\mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$.

Ex 03 (07pts).

a. Soit

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

19. Cet exmen de rattrapage a été effectué par Dr. Dj. Bellaouar, le 13 Juin 2016 à l'université 08 Mai 1945, Guelma.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $e^{\theta A}$.

b. Soit A une matrice carrée. Prouver que

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{e^{tA} - I}{t} = A.$$

c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A quelle condition nécessaire et suffisante la matrice $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ est-elle diagonalisable ?

d. On suppose connu le fait que $\cos \dfrac{2\pi}{5}$ est irrationnel. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$ vérifiant $A^5 = I_3$. Montrer que $A = I_3$. Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^5 = I_3$ et $A \neq I_3$.

Good Luck !

4.20 Solution (Examen final 2009)

Exercice 01. Soit la matrice

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1\\ -7 & 5 & -1\\ -6 & 6 & -2\end{pmatrix}$$

1. Calculons $P\in\mathbb{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP=T=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 1\\ 0 & 0 & \beta\end{pmatrix};\ \alpha,\beta \text{ à calculer.}$$

Polynôme caractéristique de A

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \begin{vmatrix} -3-x & 1 & -1\\ -7 & 5-x & -1\\ -6 & 6 & -2-x\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-x & 1 & -1\\ -2-x & 5-x & -1\\ 0 & 6 & -2-x\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} -2-x & 0 & -1\\ -2-x & 4-x & -1\\ 0 & 4-x & -2-x\end{vmatrix} = -(2+x)(4-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2-x\end{vmatrix}\\ &= (2+x)^2(4-x). \end{aligned}$$

Valeurs et vecteurs propres :

$$\begin{cases} \lambda_1=4,\ \text{v.p simple},\ E_{\lambda_1}=Vect\{(0,1,1)\}\\ \lambda_2=-2,\ \text{v.p double},\ E_{\lambda_2}=Vect\{(1,1,0)\}\end{cases}$$

La matrice A n'est pas diagonalisable. Soit $v_3=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$\{v_1,v_2,v_3\}\ \text{libre et}\ A\sim\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

i.e., $(A+2I)v_3=v_2$. Ce qui donne

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1\\ -7 & 7 & -1\\ -6 & 6 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

D'où $a = b$ et $c = -1$. Par exemple, il suffit de prendre $v_3 = (0, 0, -1)$.

Maintenant, posons

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = T. \end{aligned}$$

D'où $A \sim T$.

2. Calculons A^n : On écrit

$$T^n = D^n + nD^{n-1}X, \text{ où } D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $DX = XD$ et $X^2 = 0$. On obtient

$$\begin{aligned} T^n &= \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 4^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & -\frac{n}{2}(-2)^n \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par suite

$$A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{n}{2}(-2)^n + (-2)^n & -\frac{n}{2}(-2)^n & \frac{n}{2}(-2)^n \\ \frac{n}{2}(-2)^n + (-2)^n - 4^n & 4^n - \frac{n}{2}(-2)^n & \frac{n}{2}(-2)^n \\ (-2)^n - 4^n & 4^n - (-2)^n & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

3. Le calcul de A^{-1} en fonction de I_3, A et A^2. On a

$$p_A(x) = -x^3 + 12x + 16$$

Ce qui donne

$$A^{-1} = \frac{1}{16}\left(A^2 - 12I_3\right).$$

Exercice 02. Solution du système différentiel

$$X'(t) = A.X(t)$$

avec A est la matrice de l'exercice **01 :**

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ct+d)\,e^{-2t} \\ ae^{4t} + (ct+d)\,e^{-2t} \\ ae^{4t} - ce^{-2t} \end{pmatrix};\ a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

Exercice 03. Soit la matrice

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a+b & 0 & 1-b \\ a+2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\ ;\ a,b \in \mathbb{R}$$

1. La diagonalisation de la matrice $M_{a,b}$ est donnée dans l'Examen de Rattrapage 4.35, on a la conclusion suivante :

Conclusion.

$M_{a,b}$ est diagonalisable $\Leftrightarrow \{a \neq -2, -3 \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$ ou $a = -3$ et $b = 1$.

2. De même, le calcul de A^n ; $n \in \mathbb{N}$, où $A = M_{0,0}$, puis en déduire le calcul de u_n en fonction de n, où

$$\begin{cases} u_{n+3} = 2u_n + u_{n+1} - 2u_{n+2} \\ u_0 = -1,\ u_1 = 1 \text{ et } u_2 = 5. \end{cases}$$

Voir la solution de l'Examen de Rattrapage 4.35.

Exercice 04. Soit $f \in End(E)$, où $\dim E = n$ et $rg(f) = 2$. On suppose qu'il existe $u, v \in E - \{0\}$ t.q $f(u) = u$ et $f(v) = -v$. Montrons que f est diagonalisable. Tout d'abord, on a

$$\begin{cases} f(u) = u \\ f(v) = -v \end{cases} \tag{4.3}$$

Si $n = 2$, d'après (4.3), $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$ sont deux valeurs propres distinctes de f. Donc f est diagonalisable.

Si $n > 2$, or $\dim E = \dim Imf + \dim \ker f$, alors $\dim Imf = n - 2$; c'est-à-dire $\ker f$ admet une base de $(n-2)$ vecteurs propres associés à la valeur propre $\alpha = 0$;

$$\ker f = \{x \in E \ / f(x) = 0\}.$$

Comme u et v sont deux vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$, respectivement, f est donc diagonalisable.

Exercice supplémentaire (Facultatif, **1.5 pts).** Sans calculer, ni valeurs propres ni vecteurs propres, montrons que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 3x + y + 2z, 2x + 3y + z)$$

et soit $\mathcal{B}_0 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On voit que

$$A = \mathcal{M}_f(\mathcal{B}_0)$$

Posons $\mathcal{B} = \{(0,1,0), (1,0,0), (0,0,1)\} = \{e_2, e_1, e_3\} = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, on a

$$\begin{cases} f(e'_1) = f(0,1,0) = (2,1,3) = e'_1 + 2e'_2 + 3e'_3 \\ f(e'_2) = f(1,0,0) = (1,3,2) = 3e'_1 + e'_2 + 2e'_3 \\ f(e'_3) = f(0,0,1) = (3,2,1) = 2e'_1 + 3e'_2 + e'_3 \end{cases}$$

D'où

$$\mathcal{M}_f(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

Par suite, $A \sim B$.

4.21 Solution (Micro-interrogation 2012)

Exercice 01 (4pts). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrons que

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n, \text{ où } \lambda_i \in Sp(A).$$

Comme A est trigonalisable, il existe donc une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont des valeurs propres de A. Posons $P^{-1}AP = T$, i.e., $A = PTP^{-1}$. Donc

$$\det(A) = \det(T) = \prod_{\lambda \in Sp(A)} \lambda.$$

On en déduit que, $0 \notin Sp(A) \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existe.

Exercice 02 (4pts). Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x + y \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

La matrice du système proposé est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

c'est une matrice triangulaire inférieure possède une valeur propre d'ordre 3, $\lambda = 1$. Dans ce cas, la solution générale du système différentiel $X' = AX$ est

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{\lambda t}\left\{ I_3 + (A - \lambda I_3)\, t + \frac{1}{2}(A - \lambda I_3)^2 t^2 \right\} \\ &= e^{t}\left\{ I_3 + (A - I_3)\, t + \frac{1}{2}(A - I_3)^2 t^2 \right\}, \end{aligned}$$

où

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } (A - \lambda I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$X(t) = e^{At}.C = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ te^t & e^t & 0 \\ \frac{1}{2}t^2e^t + te^t & te^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ tc_1e^t + c_2e^t \\ c_1\left(t + \frac{1}{2}t^2\right)e^t + tc_2e^t + c_3e^t \end{pmatrix}.$$

Exercice 03 (4pts). Soit le système de suites (a_n), (b_n) :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \lambda a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = \lambda b_n \end{cases} ;\ a_0 = 0, b_0 = 1 \text{ et } \lambda \neq 0.$$

Sous la forme matricielle, on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}}_{U_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}}_{U_n} ;\ \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}}_{U_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne $U_n = A^{n-1}U_0$, où

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n + n \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & 2n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$U_n = \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} & 2n\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n\lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 04 (4pts). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable possède une valeur propre unique λ. En utilisant deux méthodes, montrons que $A = \lambda I_n$.

1$^{\text{ère}}$Méthode. Voir le Corollaire 2.2.6.

2$^{\text{ème}}$Méthode. Supposons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable possède une valeur propre unique λ et que $A \neq \lambda I_n$. De plus, on a $p_A(x) = (x-\lambda)^n$. Comme $A - \lambda I_n \neq 0$, alors $m_A(x) \neq x - \lambda$. D'où A n'est pas diagonalisable car la racine λ de m_A n'est pas simple. Une contradiction.

Exercice 05 (4pts). Étudier la diagonalisation de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};\ a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

D'après (4.4), on voit que $\lambda_1 = 1$ est une valeur propre double. De plus, on a

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ ;\ \begin{array}{c} x+ay+bz+ct = x \\ y+dz+et = y \\ 2z+ft = z \\ 3t = t \end{array} \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ ;\ \begin{array}{c} ay = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

On distingue deux cas.

Si $a \neq 0$, dans ce cas $y = 0$. Donc

$$E_1 = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ ;\ y = z = t = 0 \right\} = Vect\left\{ (1,0,0,0) \right\}.$$

Ce qui donne $\dim E_1 = 1$, donc A n'est pas diagonalisable.

Si $a = 0$, dans ce cas on a

$$E_1 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ z = t = 0\right\} = Vect\left\{(1,0,0,0), (0,1,0,0)\right\}.$$

Ce qui donne $\dim E_1 = 2$, donc A est diagonalisable.

4.22 Solution (Examen final 2012)

Exercice 1 (2pts). Soit la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R}.$$

Calculons l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles A_α soit diagonalisable.

On voit que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = \alpha$ et $\lambda_2 = 2$. On distingue deux cas :

a. Si $\alpha = 2$, dans ce cas $\lambda_1 = 2 = \lambda_2$ est une valeur propre d'ordre 3. Puisque

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 2I_3.$$

D'après le Corollaire 2.2.6, A n'est pas diagonalisable.

b. Si $\alpha \neq 2$, dans ce cas, $\lambda_1 = \alpha$ v.p simple et $\lambda_2 = 2$ v.p double.

Maintenant, calculons E_{λ_2} :

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \begin{array}{c} 2x + \alpha y + z = 2x \\ 2y = 2Y \\ \alpha z = 2z \end{array} \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \begin{array}{c} \alpha y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

On distingue deux cas :

b.1. Si $\alpha = 0$, on a

$$E_{\lambda_2} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, z = 0\right\}$$

Donc $\dim E_{\lambda_2} = 2 =$ l'ordre de λ_2. Par suite A est diagonalisable.

b.2. Si $\alpha \neq 0$, on a

$$E_{\lambda_2} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, \begin{array}{c} y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

D'où $\dim E_{\lambda_2} = 1 \neq$ l'ordre de λ_2. Par suite A n'est diagonalisable.

Exercice 2 (4pts). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice possède une seule valeur propre λ. Calculons e^{At}; $t \in \mathbb{R}$. En effet, d'après le Corollaire 3.4.1 l'expression de e^{At} est donnée par

$$e^{At} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} (A - \lambda I_n)^k \frac{t^k}{k!}.$$

Solution du système différentiel

$$\left\{\begin{array}{c} x' = x + y + z \\ y' = y + z \\ z' = z \end{array}\right. \tag{4.5}$$

On écrit (4.5) sous la forme matricielle suivante

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}$$

On voit que la matrice A possède une seule valeur propre $\lambda = 1$. Il vient d'après (3.5) que

$$e^{At} = e^t \left(I + t(A - I_3) + \frac{t^2}{2}(A - I_3)^2\right).$$

De plus, la solution générale de (4.5) est $X(t) = e^{At}.C$, où C est une constante.

Maintenant, calculons e^{At} :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^t \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & te^t & \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right) e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La solution du système (4.5) est

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix} e^t & te^t & \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right) e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 te^t + c_3 \left(te^t + \frac{1}{2}t^2 e^t\right) \\ c_2 e^t + c_3 te^t \\ c_3 e^t \end{pmatrix}; \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 3 (2pts).

– Trouver la relation entre les éléments propres de A et ceux de $P^{-1}AP$.

Soit (λ, x) un élément propre de A, i.e., $Ax = \lambda x$ avec $x \neq 0$. Ceci implique

$$p^{-1}AP\left(P^{-1}x\right) = \lambda\left(P^{-1}x\right).$$

Donc $(\lambda, P^{-1}x)$ est un élément propre de $P^{-1}AP$.

– Montrer que les matrices semblables ont le même polynôme caractéristique (utiliser deux méthodes).

1ère Méthode. Voir la deuxième partie du Théorème 2.1.1.

2ème Méthode. Soient A et B deux matrices semblables, i.e., il existe $P \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$. On écrit donc

$$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \lambda I_n - A \notin \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$$

Puisque $\lambda I_n - A = P(\lambda I_n - B)P^{-1}$; car $A \sim B$. On en déduit que

$$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \lambda I_n - A \notin \mathbb{GL}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \lambda I_n - B \notin \mathbb{GL}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \lambda \in Sp(B).$$

D'où $Sp(A) = Sp(B)$, et par conséquent $p_A(x) = p_B(x)$.

– Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable avec $Sp(A) = \{-1, 1\}$. Montrons que $A^{-1} = A$. En effet, il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$, où

$$D = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne $D^{-1} = D$. Par suite,

$$A^{-1} = \left(PDP^{-1}\right)^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

Exercice 4 (6pts).

Démonstration du théorème de Cayley-Hamilton : $\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $p_A(A) = 0$. Voir le Théorème 3.1.1.

Est-ce-que la démonstration suivante du théorème de Cayley-Hamilton est vraie ?

$$p_A(x) = \det(A - xI) \Rightarrow p_A(A) = \det(A - AI) = \det(0) = 0.$$

Rép. Non, car $p_A(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ c'est une matrice, mais $\det(A - AI) = \det(\text{matrice nulle}) = 0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 (3pts). Calculons le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le calcul de $p_A(x)$:

$$\begin{aligned}
p_A(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & -4 & -4 \\ 8 & -11-x & -8 \\ -8 & 8 & 5-x \end{vmatrix} \quad \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \\ \downarrow & \downarrow \\ c_1 + c_2 & c_2 - c_3 \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} -3-x & 0 & -4 \\ -3-x & -3-x & -8 \\ 0 & 3+x & 5-x \end{vmatrix} \\
&= (3+x)^2 \begin{vmatrix} \overset{+}{-1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{-4} \\ -1 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 5-x \end{vmatrix} \\
&= (3+x)^2 \left(-\left(-5+x+8\right) - 4\left(-1\right)\right) \\
&= (3+x)^2 (1-x).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$m_A(x) = \begin{cases} (3+x)(1-x) \\ \text{ou} \\ (3+x)^2 (1-x) \end{cases}$$

Maintenant, calculons $(3I + A)(I - A)$:

$$(3I + A)(I - A) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 8 & -8 & -8 \\ -8 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -8 & 12 & 8 \\ 8 & -8 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où $m_A(x) = (3+x)(1-x)$. La matrice A est donc diagonalisable ; car les racines de $m_A(x)$ sont simples.

Exercice 6 (3pts). Soit le déterminant

$$D_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrons que $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$. En effet,

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{-1} & \overset{+}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1- & 2 & -1 & \dots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2D_{n-1} + \begin{vmatrix} \overset{+}{-1} & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \overset{-}{0} & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \overset{+}{0} & 1- & 2 & -1 & \dots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2D_{n-1} - D_{n-2}, \text{ où } n \geq 3. \end{aligned}$$

Notons que

$$D_1 = \det(2) = 2,\ D_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \text{ et } D_3 = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 4, \ ...$$

Le calcul de D_n en fonction de n, où

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}, \text{ où } n \geq 3. \tag{4.6}$$

On écrit (4.6) sous la forme matricielle suivante

$$\underbrace{\begin{pmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{pmatrix}}_{X_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} D_{n-1} \\ D_{n-2} \end{pmatrix}}_{X_{n-1}}, \text{ où } X_2 = \begin{pmatrix} D_2 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ceci implique

$$X_n = AX_{n-1} = A^2 X_{n-2} = ... = A^{n-2} X_2.$$

Maintenant, calculons A^{n-2} avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Polynôme caractéristique :

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ 1-x & -x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = (1-x)^2.$$

Donc $\lambda = 1$ est une v.p double de la matrice A. Puisque $A \neq \lambda I$, alors A n'est pas diagonalisable.

Vecteur propre qssocié :

$$E_\lambda = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad \begin{array}{c} 2x - y = x \\ x = y \end{array} \right\}$$

D'où $v_1 = (1,1)$.

Soit $v_2 = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur quelconque tel que $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Il suffit de prendre $v_2 = (1,0)$. Posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

Implique

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T
\end{aligned}$$

On voit que T est une matrice triangulaire supérieure avec $t_{11} = t_{22} = \lambda = 1$. Puisque $P^{-1}AP = T$, alors $A = PTP^{-1}$. D'où $A^n = PT^nP^{-1}$. Le calcul de T^n, où $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En effet, on peut factoriser T sous la forme de Dunford suivante

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_D + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_N,$$

avec $N^2 = 0$ et $DN = ND$. D'après la formule de Binôme, on a

$$\begin{aligned}
T^n &= (D+N)^n =_{i=0}^{n} C_n^i D^{n-i} N^i = D^n + nD^{n-1}N = I + nN \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
A^n &= PT^nP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & 1-n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}
X_n &= \begin{pmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-2} X_2 \\
&= \begin{pmatrix} n-1 & 2-n \\ n-2 & 3-n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $D_n = 3(n-1) + 2(2-n) = n+1$.

4.23 Solution (Exam de rattrapage 2012)

Exercice 1 (5+2pts).

a) Questions de cours

Résoudre le système différentiel linéaire homogène à coefficient constants

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

où a_{ij} sont des constantes complexes, et où les fonctions x_i sont des fonctions dérivables inconnues à valeurs complexes.

On écrit sous système sous la forme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} \tag{4.7}$$

La solution général de (4.7) est $X(t) = e^{At}.C$, où $C \in \mathbb{K}^n$. De plus, si A est diagonalisable, i.e., $\dim E_{\lambda_i} =$ l'ordre de λ_i, la solution de (4.7) est

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1} V_1 + c_2 e^{\lambda_2} V_2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n} V_n,$$

où $(\lambda_i, V_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont les éléments propres de la matrice A.

b) Résoudre le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Calculons $p_A(x)$:

$$
\begin{aligned}
p_A(x) &= \begin{vmatrix} -3-x & -6 & 7 \\ 1 & 1-x & -1 \\ -4 & -6 & 8-x \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} c_1 \\ \downarrow \\ c_1+c_3 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} 4-x & -6 & 7 \\ 0 & 1-x & -1 \\ 4-x & -6 & 8-x \end{vmatrix} = (4-x)\begin{vmatrix} 1 & -6 & 7 \\ 0 & 1-x & -1 \\ 1 & -6 & 8-x \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} l_1 \\ \downarrow \\ l_1-l_3 \end{matrix} \\
&= (4-x)\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1+x \\ 0 & 1-x & -1 \\ 1 & -6 & 8-x \end{vmatrix} \\
&= (4-x)(x-1)\begin{vmatrix} \overset{+}{0} & \overset{-}{0} & \overset{+}{1} \\ 0 & 1-x & -1 \\ 1 & -6 & 8-x \end{vmatrix} \\
&= (4-x)(x-1)(-1+x) = (4-x)(x-1)^2 .
\end{aligned}
$$

Calculons les éléments propres de la matrice A :

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \begin{array}{r} -3x-6y+7z = x \\ x+y-z = y \\ -4x-6y+8z = z \end{array} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x = z = 2y \right\} \\
&= Vect\left\{(2,1,2)\right\}. \text{ Donc } v_1 = (2,1,2).
\end{aligned}
$$

De même, on a

$$
\begin{aligned}
E_4 &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \begin{array}{r} -3x-6y+7z = 4x \\ x+y-z = 4y \\ -4x-6y+8z = 4z \end{array} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \begin{array}{c} x = z \\ y = 0 \end{array} \right\} \\
&= Vect\left\{(1,0,1)\right\}. \text{ Donc } v_2 = (1,0,1).
\end{aligned}
$$

La matrice A n'est pas diagonalisable ; car $\dim E_1 = 1 \neq$ l'ordre de la valeur propre double 1.

Maintenant, soit $v_3 = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul tel que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Par exemple, pour $v_3 = (0, 0, 1)$, la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible. De plus, on a

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et aussi, on a

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T. \end{aligned}$$

Nous avons $X'(t) = AX(t) = PTP^{-1}X(t)$. C'est-à-dire

$$X'(t) = PY'(t) \tag{4.8}$$

$$Y'(t) = TY(t) \tag{4.9}$$

$$Y(t) = P^{-1}X(t) \tag{4.10}$$

avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ et } Y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}.$$

L'équation (4.9) implique

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ y_1'(t) \\ z_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne
$$\begin{cases} z_1'(t) = z_1(t) \\ y_1'(t) = 4y_1(t) + 9z_1(t) \\ x_1'(t) = x_1(t) - z_1(t) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} z_1(t) &= ae^t \, ; \, a \in \mathbb{R} \\ y_1'(t) &= 4y_1(t) + 9ae^t && (4.11) \\ x_1'(t) &= x_1(t) - ae^t && (4.12) \end{aligned}$$

Solution de l'équation différentielle (4.11) :

On a

$$y_1'(t) = 4y_1(t) \Rightarrow y_1(t) = be^{4t}$$

En utilisant la méthode de variation des constantes, i.e., posons $y_1(t) = b(t)e^{4t}$. Ce qui donne

$$y_1'(t) = b'(t)e^{4t} + 4b(t)e^{4t} \tag{4.13}$$

D'après (4.11) et (4.13), on a

$$b'(t)e^{4t} + 4b(t)e^{4t} = 4y_1(t) + 9z_1(t)$$

D'où $b(t) = -3ae^{-3t} + c_1$. Donc la solution de l'équation (4.11) est

$$y_1(t) = \left(-3ae^{-3t} + c_1\right)e^{4t}$$

Solution de l'équation différentielle (4.12)

On a

$$x_1'(t) = x_1(t) \Rightarrow x_1(t) = ce^t.$$

De même, posons $x_1(t) = c(t)e^t$, ce qui donne

$$c'(t)e^t + c(t)e^t = c(t)e^t - ae^t.$$

D'où $c(t) = (-at + c_2)e^t$. Par suite

$$\begin{cases} x_1(t) = (-at + c_2)e^t \\ y_1(t) = (-3ae^{-3t} + c_1)e^{4t} \\ z_1(t) = ae^t \end{cases}$$

l'équation (4.10) implique $X(t) = PY(t)$, c'est-à-dire

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-at + c_2)e^t \\ (-3ae^{-3t} + c_1)e^{4t} \\ ae^t \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{cases} x(t) = 2c_2e^t + c_1e^{4t} - 3ae^t - 2ate^t \\ y(t) = c_2e^t - ate^t \\ z(t) = 2c_2e^t + c_1e^{4t} - 2ae^t - 2ate^t \end{cases}$$

Exercice 2 (3pts). Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{-\pi}{2} \end{pmatrix}$$

Calculons $\cos^2 A + \sin^2 A$.

Polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \begin{vmatrix} \frac{-\pi}{2} - x & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{-\pi}{2} - x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & \frac{\pi}{2} \\ -x & \frac{-\pi}{2} - x \end{vmatrix} \\ &= x \begin{vmatrix} -1 & \frac{\pi}{2} \\ -1 & \frac{-\pi}{2} - x \end{vmatrix} = x\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= x(x + \pi). \end{aligned}$$

Les v.p de A sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -\pi$. Dans ce cas, A est diagonalisable.

Vecteurs propres :

$$E_0 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \quad \begin{array}{l} \dfrac{-\pi}{2}x + \dfrac{\pi}{2}y = 0 \\ \dfrac{\pi}{2}x - \dfrac{\pi}{2}y = 0 \end{array} \right\}$$

D'où $v_1 = (1,1)$.

$$E_{-\pi} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \quad \begin{array}{l} \dfrac{-\pi}{2}x + \dfrac{\pi}{2}y = -\pi x \\ \dfrac{\pi}{2}x - \dfrac{\pi}{2}y = -\pi y \end{array} \right\}$$

D'où $v_1 = (-1,1)$.

Maintenant, posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix} \text{ avec } P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Puisque $A = PDP^{-1}$, alors $\cos A = P \cos DP^{-1}$ et $\sin A = P \sin DP^{-1}$.

Il vient

$$\cos A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\sin A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

$$\cos^2 A + \sin^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où $\cos^2 A + \sin^2 A = I_2$.

Exercice 3 (3pts). Montrons le résultat suivant : *Soit A une matrice diagonalisable, alors il existe une base $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de R^n formée par n vecteurs propres de A.* La démonstration de ce résultat est donnée dans la 2.2.1.

Exercice 4 (2+2pts). Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice complexe carrée d'ordre n telle que pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on ait

$$|a_{ij}| < \frac{1}{n}.$$

1. Montrons que la suite de matrices $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$B_m = I_n + A + A^2 + ... + A^m$$

est convergente.

en effet, on a

$$\|B_m\|_\infty = \left\| \sum_{k=0}^{m} A^k \right\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{m} \left\|A^k\right\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{m} \|A\|_\infty^k ,$$

où

$$\|A\|_\infty = |a_{i_0 1}| + |a_{i_0 2}| + ... + |a_{i_0 n}| < 1 \,;\, i_0 \in \overline{1, n}$$

Donc la suite $\alpha_m = \sum\limits_{k=0}^{m} \|A\|_\infty^k$ est convergente et par conséquent $\|B_m\|_\infty$ l'est aussi.

2. Montrons que $I_n - A$ est inversible d'inverse la matrice $\lim\limits_{m \to +\infty} (B_m)$.

Soit $\lambda \in Sp(A)$, il existe donc un vecteur non nul x tel que $Ax = \lambda x$. Donc

$$\|\lambda x\|_\infty = \|Ax\|_\infty \leq \|A\|_\infty . \|x\|_\infty$$

Ceci implique

$$|\lambda| \leq \|A\|_{\infty} < 1$$

On a montré que pour tout $\lambda \in Sp(A)$, $|\lambda| < 1$.

Maintenant, supposons par l'absurde que $I_n - A \notin \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$. Ce qui donne $0 \in Sp(I_n - A)$. Il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que $Ax = x$. D'où $1 \in Sp(A)$. Une contradiction.

Le calcul de $\lim\limits_{m \to +\infty} (B_m)$:

Puisque $\|A\|_{\infty} < 1 \, \|A\|_{\infty} < 1$, implique $A^m \to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$. D'autre part, on a

$$AB_m = A + A^2 + A^3 + ... + A^{m+1}$$

Autrement dit

$$B_m - AB_m = I - A^{m+1}$$

i.e.,

$$(I - A) B_m = I - A^{m+1}$$

Il vient

$$B_m = (I - A)^{-1} \left(I - A^{m+1}\right)$$

En passant à la limite lorsque $m \to +\infty$, on obtient

$$\lim_{m \to +\infty} (B_m) = (I - A)^{-1} \text{ ; car } A^{m+1} \to 0.$$

Exercice 5 (3pts). Voir la solution de l'Examen final 4.22.

4.24 Solution (Micro-interrogation 2013)

Exercice 1. Soit la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}=A.$$

D'où $A^n = A$ pour tout $n \geq 1$.

Par définition, on a

$$\begin{aligned} e^A &= I+\frac{A}{1!}+\frac{A^2}{2!}+...+\frac{A^n}{n!}+... \\ &= I+A\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}+...\right) \\ &= I+A\left(e-1\right). \end{aligned}$$

Solution du système $X' = BX$, où

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Les éléments propres de B sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1,\ v_1 = (2,1)^t \\ \lambda_1 = 4,\ v_2 = (-1,1)^t \end{cases}$$

D'où

$$X(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} ;\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$e^{At}A=\left(I+\frac{At}{1!}+\frac{A^2t^2}{2!}+...+\frac{A^nt^n}{n!}+...\right)A = Ae^{At}.$$

Donc
$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}\right) = -e^{-At} = -Ae^{-At}.$$
Si $A \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$, on a
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-At}dt &= \int_0^{+\infty} e^{-At}AA^{-1}dt \\ &= \left[-\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(e^{-At}\right)dt\right]A^{-1} \\ &= \left[-e^{-At}\right]_0^{+\infty} A^{-1} \\ &= A^{-1}.\end{aligned}$$

Exercice 3. Montrons que $e^{A+B} = e^A.e^B$. En effet, on a
$$\begin{aligned}e^{A+B} &= e^{P(D_A+D_B)}P^{-1} = Pe^{D_A+D_B}P^{-1} \\ &= Pe^{D_A}e^{D_B}P^{-1} \;\; (\text{car } e^{D_A+D_B} = e^{D_A}e^{D_B}) \\ &= Pe^{D_A}P^{-1}Pe^{D_B}P^{-1} \\ &= e^Ae^B.\end{aligned}$$

Exercice 4. On voit que
$$\begin{cases} \lambda_1 = 1, \text{ c'est une valeur propre simple,} \\ \lambda_2 = \alpha, \text{ c'est une valeur propre double } (\alpha \neq 1) \end{cases}$$
Dans ce cas on a
$$\begin{aligned}E_{\lambda_2} &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \begin{array}{c} \alpha x - \alpha y + z = \alpha x \\ \alpha y - \alpha z = \alpha y \\ z = \alpha z \end{array}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \begin{array}{c} z = 0 \\ \alpha y = 0 \end{array}\right\}.\end{aligned}$$
Donc pour $\alpha \notin \{0,1\}$, on a $\dim E_{\lambda_2} = 1$. Par suit A_α n'est pas diagonalisable et pour $\alpha = 0$, on a $\dim E_{\lambda_2} = 2$; i.e., A_0 est diagonalisable.

Pour le cas $\alpha = 1$, on a

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I.$$

Donc A_1 n'est pas diagonalisdable.

Exercice 5. Soit

$$A = \begin{pmatrix} I_3 & C \\ 0 & C \end{pmatrix};\ C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En utilisant la démonstration par récurrence, montrons que

$$A^k = \begin{pmatrix} I_3 & kC \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Pour $k = 1$, on a $A^1 = A$.
Supposons que $A^k = \begin{pmatrix} I_3 & kC \\ 0 & C \end{pmatrix}$, il vient

$$A^{k+1} = AA^k = \begin{pmatrix} I_3 & C \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_3 & kC \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_3 & kC + C^2 \\ 0 & C^2 \end{pmatrix},$$

où $C^2 = C$. D'où le résultat.

En particulier, on a

$$A^{300} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 100 & 100 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 100 & 100 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 100 & 100 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'indice $k = 2$. Montrons que $A(I + A)^m = A$, $\forall m \geq 0$.

Soit $m \geq 0$. D'après la formule de Binôme, on a

$$A(I+A)^m = A_{i=0}^{m} C_m^i A^i = A(I+mA) = A + mA^2 = A.$$

La démonstration se fait par récurrence sur m ; pour $m = 1$ on a

$$A(I+A)^1 = A + A^2 = A.$$

Supposons que $A(I+A)^m = A$, donc

$$A(I+A)^{m+1} = A(I+A)^m(I+A) = A(I+A) = A + A^2 = A.$$

D'où le résultat.

Exemple. Pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On voit que A est nilpotente d'indice $k = 2$; car $A^2 = 0$. Donc pour tout $m \geq 0$, on a

$$A(I_2 + A)^m = A.$$

4.25 Solution (Exam final 2013)

Ex 01 (6pts) : Questions de cours.

(i) Démontrer le théorème suivant :

Toute matrice à coefficients complexes est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Voir le Théorème 3.8.2.

(ii) Définissez les notions suivantes :

(a) Sur le calcul de A^k ; $k \geq 0$. Ceci voir les deux Sections 2.2.1 et 3.8.1.

(b) Exponentielle de matrice, $cos(A)$,..., f(matrice). Voir la Section 2.4.

(c) Systèmes de suites avec les relations de récurrence. Voir la Section 2.5.

(d) Systèmes différentiels et matrices diagonalisables. Voir la Section 2.6.

(e) Systèmes différentiels et matrices non diagonalisables. Voir la Section 3.4.

(f) Polynôme minimal. Voir la Définition 3.2.1 et la Remarque 3.2.1.

Ex 02 (8pts) : **Partie I :**

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Supposons que les éléments propres de A sont :

$$\left(\lambda_1, (a,b)_{v_1}\right) \text{ et } \left(\lambda_2, (c,d)_{v_2}\right).$$

Posons

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}.$$

Montrons que

$$A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2, \text{ où } G_1, G_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

avec G_1, G_2 sont définies par

$$G_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & c' \end{pmatrix} \text{ et } G_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b' & d' \end{pmatrix}.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 &= \lambda_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c' & d' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 aa' + \lambda_2 cc' & a\lambda_1 b' + \lambda_2 cd' \\ \lambda_1 ba' + \lambda_2 dc' & \lambda_1 bb' + \lambda_2 dd' \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.14}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
A &= PDP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_2 c \\ \lambda_1 b & \lambda_2 d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 aa' + \lambda_2 cc' & a\lambda_1 b' + \lambda_2 cd' \\ \lambda_1 ba' + \lambda_2 dc' & \lambda_1 bb' + \lambda_2 dd' \end{pmatrix} \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Comparant (4.14) et (4.15) on voit que $A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2$.

Partie II. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Supposons que $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \,;\, k \leq n\}$.

(II.1) Vérifions que

$$\cos^2 A + \sin^2 A = I_n \qquad (4.16)$$

Puisque $A = PDP^{-1}$, alors

$$\begin{aligned}
\cos^2 A + \sin^2 A &= P\left(\cos^2 D + \sin^2 D\right) P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} \cos^2 \lambda_1 + \sin^2 \lambda_1 & & & \\ & \cos^2 \lambda_1 + \sin^2 \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \cos^2 \lambda_1 + \sin^2 \lambda_1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= I_n
\end{aligned}$$

(II.2) Pour toute fonction f définie aux points $(\lambda_i)_{1\leq i\leq k}$, montrons le résultat suivant :

$$f(A) = \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) G_i \,;\, G_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (1 \leq i \leq k).$$

D'après la partie (I), on a

$$A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + ... + \lambda_n G_n, \text{ où } G_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

On en déduit que pour toute fonction f définie aux points $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ on a

$$f(A) = \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) G_i \,;\, G_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (1 \leq i \leq k).$$

(II.3) En utilisant la formule (4.16), vérifions que

$$\sum_{i=1}^{k} G_i = I_n.$$

Posons $f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$, implique

$$I_n = \cos^2 A + \sin^2 A = \sum_{i=1}^{k} \left(\cos^2 \lambda_i + \sin^2 \lambda_i\right) G_i = \sum_{i=1}^{k} G_i$$

D'où $\sum\limits_{i=1}^{k} G_i = I_n$.

(II.4) Si $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$. Pour tout entier positif m, posons $f(x) = x^m$. Prouver que

$$\lim_{m\to+\infty} \left(\frac{A}{\lambda_1}\right)^m = G_1.$$

Tout d'abord, on a

$$A^m = \lambda_1^m G_1 + \lambda_2^m G_2 + ... + \lambda_k^m G_k$$

Ceci implique

$$\left(\frac{A}{\lambda_1}\right)^m = G_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m G_2 + ... + \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^m G_k$$

Par conséquent

$$\lim_{m\to+\infty}\left(\frac{A}{\lambda_1}\right)^m = G_1;\ \text{car } \frac{\lambda_2}{\lambda_1},...,\frac{\lambda_k}{\lambda_1} < 1$$

(II.5) Établir que

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{\|A^m\|^{\frac{1}{m}}}{|\lambda_1|} = 1.$$

Posons

$$v_m = \frac{\|A^m\|}{|\lambda_1|^m}$$

On a

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{\|A^m\|}{|\lambda_1|^m} = \left\|G_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m G_2 + ... + \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^m G_k\right\| \\ &\leq \|G_1\| + \|G_2\| + ... + \|G_k\| = v \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$v_m^{\frac{1}{m}} = \frac{\|A^m\|^{\frac{1}{m}}}{|\lambda_1|} \leq v^{\frac{1}{m}} \longrightarrow 1$$

Donc

$$\frac{\|A^m\|^{\frac{1}{m}}}{|\lambda_1|} \leq 1 \tag{4.17}$$

D'autre part, soit x un vecteur propre de A associé à λ_1, alors

$$A^m x = \lambda_1^m x$$

Il vient

$$\|\lambda_1^m x\| = |\lambda_1|^m \|x\| = \|A^m x\| \leq \|A^m\| \|x\|$$

D'où

$$|\lambda_1| \leq \|A^m\|^{\frac{1}{m}} \tag{4.18}$$

Combinant (4.17) et (4.18) on trouve

$$|\lambda_1| \leq \|A^m\|^{\frac{1}{m}} \leq |\lambda_1|$$

Finalement, on a

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{\|A^m\|^{\frac{1}{m}}}{|\lambda_1|} = 1.$$

Ex 03 (6pts) : (a) Trigonalisation de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Puis, calculons A^n, où $n \geq 0$. Voir l'Exercice 3.8.1.

(b) Soient $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En utilisant la définition de l'exponentielle de matrice et la formule de binôme. Montrons que

$$AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

En effet, puisque $AB = BA$, on a

$$\begin{aligned}
e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} C^{i_n} A^i B^{n-i} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{A^i B^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \\
&= \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{A^r}{r!} \frac{B^s}{s!} \\
&= \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{A^r}{r!} \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{B^s}{s!} \\
&= e^A e^B.
\end{aligned}$$

4.26 Solution (Examen de rattrapage 2013)

Ex 01 (7pts) :

1. Est-ce-que la démonstration suivante du théorème de Cayley-Hamilton est vraie ?

$$p_A(x) = \det(A - xI) \Rightarrow p_A(A) = \det(A - AI) = \det(0) = 0.$$

La réponse à cette question est donnée avec un détail dans la Remarque 3.1.1.

2. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculons l'inverse de la matrice A. D'après un calcul simple, $p_A(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, i.e., $p_A(A) = 0$, et ceci implique

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{-1}{8}\left(A^2 + 6A + 12I\right) \\ &= \frac{-1}{8}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \frac{6}{8}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \\ &\quad \frac{12}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -7 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $Sp(A) = \{\lambda\}$, l'expression de e^A suivante

$$e^A = e^\lambda \left[I_n + (A - \lambda I_n) + \frac{(A - \lambda I_n)^2}{2!} + \ldots + \frac{(A - \lambda I_n)^{n-1}}{(n-1)!} \right]$$

est prouvée dans le Corollaire 3.4.1.

4. De plus, la solution générale du système différentiel $X' = AX$ est semblable à celui de l'Exemple 3.4.2.

Ex 02 (6pts) : On définit la suite (u_n) par

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_1 = u_2 = 1 \end{cases} \tag{*}$$

Sous la forme matricielle suivante

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}}_{U_{n+2}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}}_{U_{n+1}} ; \ U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$U_{n+2} = A^n U_2 \quad \text{(notons que } U_1 \text{ n'existe pas)}$$

Le calcul de A^n :

D'après un calcul simple, on a

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \ v_1 = \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right) \\ \lambda_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \ v_2 = \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, 1\right) \end{cases}$$

Posons

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{10}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Finalement, on obtient

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n-1} U_2$$

D'où

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \; ; \; n \geq 1.$$

Ex 03 (7pts) : Si M et N des matrices carrées qui commutent (c'est-à-dire qui vérifient $MN = NM$). Prouver que

$$e^{M+N} = e^M e^N = e^N e^M$$

En déduire que

$$\left(e^M\right)^{-1} = e^{-M}.$$

Puisque M et $(-M)$ commutent, alors

$$I_n = e^0 = e^{M-M} = e^{M+(-M)} = e^M e^{-M} = e^{-M} e^M.$$

D'où

$$e^{-M} = \left(e^M\right)^{-1}.$$

Soient u et v des Endomorphismes d'un espace vectoriel E. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

Soit (λ, x) un élément propre de $u \circ v$. On écrit

$$\begin{aligned}
(\lambda, x) \text{ un élément propre de } u \circ v &\Leftrightarrow (u \circ v)(x) = \lambda x \\
&\Leftrightarrow (v \circ u)(v(x)) = \lambda v(x) \\
&\Leftrightarrow (\lambda, v(x)) \text{ est un élément propre de } v \circ u
\end{aligned}$$

Soit $p_n \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme de degré n. Démontrer que :

$$u\left[\ker p_n(u)\right] \subset \ker p_n(u).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} u(x) &\in u[\ker p_n(u)] \Rightarrow x \in \ker p_n(u) \\ &\Rightarrow p_n(u)(x) = 0 \\ &\Rightarrow u(p_n(u)(x)) = 0 \\ &\Rightarrow (u \circ p_n(u))(x) = 0. \end{aligned}$$

Puisque p_n est un polynôme, il vient $u \circ p_n(u) = p_n(u) \circ u$. D'où

$$\begin{aligned} (p_n(u) \circ u)(x) &= p_n(u)(u(x)) = 0 \\ &\Rightarrow u(x) \in \ker p_n(u). \end{aligned}$$

4.27 Solution (Micro-interrogation 2014)

Exercice 1 (2pts).

$i)$ Soit $\alpha \in \mathbb{R}-\{0\}$. Montrons que $B \sim \alpha I_n \Leftrightarrow B = \alpha I_n$.

$(\Rightarrow)$ Supposons que $B \sim \alpha I_n$, il existe donc une matrice P inversible telle que

$$\alpha I_n = PBP^{-1}.$$

Ceci implique $B = P^{-1}(\alpha I_n) P = \alpha I_n$.

$(\Leftarrow)$ Supposons que $B = \alpha I_n$. Puisque $B = I_n(\alpha I_n) I_n^{-1}$, implique $B \sim \alpha I_n$.

$ii)$ Vérifier que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \nsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B.$$

D'après un calcul simple, on trouve $\det(A) = 4 \neq \det(B) = -2$, donc $A \nsim B$.

Exercice 2 (5pts).

$a)$ Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'indice k, montrons que $Sp(N) = \{0\}$. En effet, soit (λ, x) un élément propre de N, ceci implique

$$0 = N^k x = \lambda^k x.$$

Comme $x \neq 0$, alors $\lambda^k = 0$. D'où $\lambda = 0$. Par conséquent $Sp(N) = \{0\}$.

$b)$ Montrons que $I - N \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $(I - N)x = 0$. D'où $Nx = x$ et par récurrence on trouve

$$0 = N^k x = N^{k-1} x.$$

Puisque $N^{k-1} \neq 0$, on a nécessairement $x = 0$.

Application. Soit la matrice $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Comme

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors N est nilpotente d'indice $k = 3$; car $N^2 \neq 0$ et $N^3 = 0$. De plus, le polynôme caractéristique de N est $p_N(x) = x^3$, donc $Sp(N) = \{0\}$. Maintenant, calculons $(I - N)$:

$$I - N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On voit que $I-N \in \mathbb{GL}_3(\mathbb{R})$; car $\det(I-N) \neq 0$.

Exercice 3 (3pts). Calculer le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2-x & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2-x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (2-x)^3(1-x).$$

Donc

$$m_A(x) = \begin{cases} (2-x)(1-x), \text{ ou} \\ (2-x)^2(1-x), \text{ ou} \\ (2-x)^3(1-x). \end{cases}$$

Comme $(2I-A)(I-A) \neq 0$ et $(2I-A)^2(I-A) = 0$, alors $m_A(x) = (2-x)^2(1-x)$.

Problème (10pts).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $B = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ A & A \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^k ; $k \geq 0$ (utiliser la démonstration par récurrence sur k).

Calculons B^k ; $k \geq 0$. On a

$$B^2 = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ A & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ A & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ 2A^2 & A^2 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$B^k = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ kA^k & A^k \end{pmatrix} ; k \geq 0. \tag{4.19}$$

2. Étudier la diagonalisation de la matrice

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix};\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Calculons le polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} p_{A_{\alpha,\beta}}(x) &= \begin{vmatrix} \alpha - x & \beta \\ \beta & \alpha - x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha + \beta - x & \beta \\ \alpha + \beta - x & \alpha - x \end{vmatrix} \\ &= (\alpha + \beta - x) \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 1 & \alpha - x \end{vmatrix} \\ &= (\alpha + \beta - x)(\alpha - \beta - x). \end{aligned}$$

Les v.p. sont $\lambda_1 = \alpha + \beta$ et $\lambda_2 = \alpha - \beta$.

Si $\alpha + \beta \neq \alpha - \beta$, alors $\beta \neq 0$. Donc la matrice $A_{\alpha,\beta}$ est diagonalisable.

Si $\alpha + \beta = \alpha - \beta$, i.e., $\beta = 0$, alors

$$A_{\alpha,0} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

qui est une matrice diagonalisable (voir le Corollaire 2.2.6, $A = \alpha I \Leftrightarrow A$ est diagonalisable).

3. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = \beta x + \alpha y \end{cases}$$

Nous avons

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}}_{A_{\alpha,\beta}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}$$

Calculons les vecteurs propres de la matrice $A_{\alpha,\beta}$:

$$E_{\lambda_1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \begin{array}{l} \alpha x + \beta y = (\alpha + \beta) x \\ \beta x + \alpha y = (\alpha + \beta) y \end{array} \right\}$$

Donc $v_1 = (1, 1)$.

$$E_{\lambda_2} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \begin{array}{l} \alpha x + \beta y = (\alpha - \beta) x \\ \beta x + \alpha y = (\alpha - \beta) y \end{array} \right\}$$

Donc $v_2 = (1, -1)$.

Maintenant, la solution générale du système différentiel $X' = AX$ est

$$X(t) = c_1 e^{(\alpha+\beta)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{(\alpha-\beta)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{(\alpha+\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-\beta)t} \\ y(t) = c_1 e^{(\alpha+\beta)t} - c_2 e^{(\alpha-\beta)t} \end{cases} ; \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Montrons que $A_{\alpha,\beta}$ est nilpotente $\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$. Tout d'abord, calculons $A^k_{\alpha,\beta}$. Posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix},$$

il vient

$$\begin{aligned} A^k_{\alpha,\beta} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)^k & 0 \\ 0 & (\alpha-\beta)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha-\beta)^k + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)^k & \frac{1}{2}(\alpha+\beta)^k - \frac{1}{2}(\alpha-\beta)^k \\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)^k - \frac{1}{2}(\alpha-\beta)^k & \frac{1}{2}(\alpha-\beta)^k + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} A^k_{\alpha,\beta} &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha-\beta)^k + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)^k = 0 \\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)^k - \frac{1}{2}(\alpha-\beta)^k = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha+\beta)^k = 0 \\ (\alpha-\beta)^k = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ \alpha-\beta = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0. \end{aligned}$$

5. Le calcul de $C^k_{\alpha,\beta}$; $k \geq 0$ avec

$$C_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} A_{\alpha,\beta} & 0 \\ A_{\alpha,\beta} & A_{\alpha,\beta} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

On conclut grâce à (4.19) que

$$C^k_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} A^k_{\alpha,\beta} & 0 \\ kA^k_{\alpha,\beta} & A^k_{\alpha,\beta} \end{pmatrix}.$$

4.28 Solution (Examen final 2014)

Exercice 1 (3pts).

Questions de cours.

(i) Définissez les notions suivantes : Matrice Trigonalisable, Matrice Nilpotente, Exponentielle de matrice, et Produit Scalaire. Voir les Définitions 3.8.1, 3.5.1, 2.3.1 et 1.7.1, respectivement.

(ii) Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. Calculons le polynôme minimal $m_D(x)$. Supposons que

$$Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k\}.$$

Comme A diagonalisable, alors les racines de $m_A(x)$ sont simples. D'où

$$m_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)...(x - \lambda_k).$$

Exercice 2 (3pts). Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Montrons que $A \sim B$.

Tout d'abord, calculons $p_A(x)$:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(1+x) & 2 \\ 1+x & 2-x \end{vmatrix} \\ &= (1+x)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = (1+x)(x-4). \end{aligned}$$

Les v.p de A sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 4$. La matrice A est diagopnalisable ; car ses valeurs propres sont simples. De même, la matrice B est triangulaire supérieure ses valeurs propres sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 4$, elle est donc diagonalisable. De plus, on a $Sp(A) = Sp(B)$. On en déduit qu'il existe deux matrices inversibles P et Q telles que

$$\begin{cases} A = PDP^{-1} \\ B = QDQ^{-1} \end{cases}, \text{ où } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Finalement, on obtient

$$A = PDP^{-1} = PQ^{-1}BQP^{-1} = PQ^{-1}B\left(PQ^{-1}\right)^{-1}.$$

Donc $A \sim B$.

Exercice 03 (7pts). Considérons la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le polynôme minimal de M ?

Le polynôme caractéristique de M est $p_M(x) = (x-1)^2(x-2)$. Puisque

$$(M - I)(M - 2I) = 0, \tag{4.20}$$

alors

$$m_M(x) = (x-1)(x-2).$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels α_n et β_n tels que l'on ait

$$M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3$$

En utilisant la démonstration par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on a

$$M^1 = M = M + 0.I_3 = \alpha_1 M + \beta_1 I_3, \text{ où } \alpha_1 = 1 \text{ et } \beta_1 = 0.$$

Maintenant, supposons que $M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3$ avec $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$. Donc

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M.M^n = M\left(\alpha_n M + \beta_n I_3\right) \\ &= \alpha_n M^2 + \beta_n M. \end{aligned}$$

D'après (4.20), on a

$$M^2 = 3M - 2I_3$$

Ceci implique

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= \alpha_n \left(3M - 2I_3\right) + \beta_n M \\ &= \left(3\alpha_n + \beta_n\right) M - 2\alpha_n I_3 \qquad (4.21) \\ &= \alpha_{n+1} M + \beta_{n+1} I_3, \qquad (4.22) \end{aligned}$$

où $\alpha_{n+1} = 3\alpha_n + \beta_n$ et $\beta_{n+1} = -2\alpha_n$ sont des nombres réels.

3. Le calcul de α_n et β_n en fonction de n, puis la forme explicite de M^n pour tout entier n.

D'après (4.21) et (4.22), on obtient

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = 3\alpha_n + \beta_n \\ \beta_{n+1} = -2\alpha_n, \ \alpha_1 = 1 \text{ et } \beta_1 = 0 \end{cases}$$

Sous la forme matricielle, on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix}}_{U_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}}_{U_n}$$

Ce qui donne $U_n = A^{n-1} U_1$. De plus, d'après le calcul, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2 - 2^n \end{pmatrix} ; \, n \geq 0$$

C'est-à-dire $\alpha_n = 2^n - 1$ et $\beta_n = 2 - 2^n$; $n \geq 0$. Finalement, on obtient

$$M^n = \left(2^n - 1\right) M + \left(2 - 2^n\right) I_3 \ ; \ n \geq 0.$$

Exercice 4 (7pts). Soit

$$A_{\alpha,\beta}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix};\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

a. Étudier la diagonalisation de la matrice $A_{\alpha,\beta}$.

Voir micro-interrogation 2014. Nous avons

- $p_{A_{\alpha,\beta}}(x)=(\alpha+\beta-x)(\alpha-\beta-x)$
- Les v.p sont $\lambda_1=\alpha+\beta$, $\lambda_2=\alpha-\beta$
- Si $\beta\neq 0$, alors $\lambda_1\neq\lambda_2$ et ceci implique A est diagonalisable
- Si $\beta=0$, alors la matrice $A_{\alpha,0}=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ est digonalisable.

b. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'=\alpha x+\beta y\\ y'=\beta x+\alpha y\end{cases}$$

$$X(t)=c_1e^{(\alpha+\beta)t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{(\alpha-\beta)t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix};\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

Pour $\beta=0$, on a

$$X(t)=e^{At}.C=\begin{pmatrix}e^{\alpha t} & 0\\ 0 & e^{\alpha t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1e^{\alpha t}\\ c_2e^{\alpha t}\end{pmatrix};\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

c. Montrons que $\lim\limits_{k\to+\infty}A_{\alpha,\beta}^k=0\Leftrightarrow\alpha\in\,]-1,1[$ et $\beta\in\,]-1-\alpha,1-\alpha[$.

Voir la solution de la micro-interrogation 4.27, on a

$$A_{\alpha,\beta}^k=\begin{pmatrix}\frac{(\alpha+\beta)^k+(\alpha-\beta)^k}{2} & \frac{(\alpha+\beta)^k-(\alpha-\beta)^k}{2}\\ \frac{(\alpha+\beta)^k-(\alpha-\beta)^k}{2} & \frac{(\alpha+\beta)^k+(\alpha-\beta)^k}{2}\end{pmatrix}$$

Puisque $A_{\alpha,\beta}^k=PD^kP^{-1}$, alors

$$\lim_{k\to+\infty}A_{\alpha,\beta}^k=0\Leftrightarrow\lim_{k\to+\infty}D^k=0,$$

où $D = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 \\ 0 & \alpha-\beta \end{pmatrix}$. Ce qui donne

$$\lim_{k\to+\infty} D^k = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} |\alpha+\beta| < 1 \\ \text{et} \\ |\alpha-\beta| < 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \alpha \in \left]-1,1\right[\text{ et } \beta \in \left]-1-\alpha, 1-\alpha\right[.$$

d. Supposons que $|\alpha| >> |\beta|$, calculons $\lim_{(\alpha,\beta)\to(-\infty,-\infty)} e^{A_{\alpha,\beta}}$

Nous avons

$$\begin{aligned} e^{A_{\alpha,\beta}} &= Pe^D P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\alpha+\beta} & 0 \\ 0 & e^{\alpha-\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{\alpha}e^{\beta} + \frac{1}{2}\frac{e^{\alpha}}{e^{\beta}} & \frac{1}{2}e^{\alpha}e^{\beta} - \frac{1}{2}\frac{e^{\alpha}}{e^{\beta}} \\ \frac{1}{2}e^{\alpha}e^{\beta} - \frac{1}{2}\frac{e^{\alpha}}{e^{\beta}} & \frac{1}{2}e^{\alpha}e^{\beta} + \frac{1}{2}\frac{e^{\alpha}}{e^{\beta}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De plus, on a $\lim_{(\alpha,\beta)\to(-\infty,-\infty)} e^{\alpha}e^{\beta} = 0$. Comme $|\alpha| >> |\beta|$, alors $\lim_{(\alpha,\beta)\to(-\infty,-\infty)} \frac{e^{\alpha}}{e^{\beta}} = 0$. On en déduit que

$$\lim_{(\alpha,\beta)\to(-\infty,-\infty)} e^{A_{\alpha,\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

e. Résoudre le système de suites

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = \alpha x_n + \beta y_n + 1 \\ y_{n+1} = \beta x_n + \alpha y_n + 2 \end{array} \right. ; \; x_0 = 1, \; y_0 = 0.$$

Sous la forme matricielle, on obtient

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}}_{U_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}}_{A_{\alpha,\beta}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}}_{U_n} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{C}$$

D'où

$$\begin{aligned} U_n &= A_{\alpha,\beta}U_{n-1} + C \\ &= A_{\alpha,\beta}^2 U_{n-2} + \left(A_{\alpha,\beta} + I\right) C \\ &= ... \\ &= A_{\alpha,\beta}^n U_0 + \left(A_{\alpha,\beta}^{n-1} + A_{\alpha,\beta}^{n-2} + ... + A_{\alpha,\beta} + I\right) C \end{aligned}$$

Le calcul de $A_{\alpha,\beta}^{n-1} + A_{\alpha,\beta}^{n-2} + ... + A_{\alpha,\beta} + I$:

On écrit

$$\begin{aligned} A_{\alpha,\beta}^{n} &= \frac{(\alpha+\beta)^n}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(\alpha-\beta)^n}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)^n}{2}U + \frac{(\alpha-\beta)^n}{2}V, \text{ où } U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} I + A_{\alpha,\beta} + ... + A_{\alpha,\beta}^{n-1} &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(\alpha+\beta)^i U + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(\alpha-\beta)^i V \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1-(\alpha+\beta)^n}{1-\alpha-\beta}\right)U + \frac{1}{2}\left(\frac{1-(\alpha-\beta)^n}{1-\alpha+\beta}\right)V \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1-(\alpha+\beta)^n}{1-\alpha-\beta}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \\ &\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1-(\alpha-\beta)^n}{1-\alpha+\beta}\right)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A_{\alpha,\beta}^{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(I + A_{\alpha,\beta} + ... + A_{\alpha,\beta}^{n-1}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4.29 Solution (Examen de rattrrapage 2014)

Exercice 01

(a) Déterminer les réels a, b, c et d pour que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & b & d \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable.

On distingue deux cas

– Si $a \neq 1$, i.e., $\lambda_1 = 1$ est une v.p double. Dans ce cas

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\ \begin{array}{c} x + by + dz = x \\ y + cz = y \\ az = z \end{array} \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\ \begin{array}{c} by = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Si $b \neq 0$, implique $y = 0$. Donc

$$E_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\ \begin{array}{c} x:\ \text{quelconque} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

D'où $\dim E_{\lambda_1} = 1$, ce qui donne A n'est pas diagonalisable.

Si $b = 0$, on a

$$E_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\ z = 0 \right\}$$

D'où $\dim E_{\lambda_1} = 2$, ce qui donne A est diagonalisable.

– Si $a = 1$, i.e., $\lambda = 1$ est une v.p d'ordre 3. Dans ce cas, on a

$$A \text{ diagonalisable } \Leftrightarrow A = \lambda I \Leftrightarrow b = c = d = 0.$$

(b) On considère la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \alpha \end{pmatrix} \; ; \; \alpha \in \mathbb{R}$$

En utilisant deux méthodes, montrons que A_n est diagonalisable.

1^{ière}Méthode.

On a

$$A_n = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & \alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{B_n}$$

On peut facilement prouver que les matrices

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; ...$$

sont diagonalisables, i.e., on peut écrire $B_n = PD'P^{-1}$, où D' est diagonale et P inversible. Ce qui donne

$$\begin{aligned} A_n &= \alpha I_n + B_n = \alpha I_n + PD'P^{-1} \\ &= P\left(\alpha I_n + D'\right) P^{-1}. \end{aligned}$$

D'où A_n est diagonalisable.

2$^{\grave{e}me}$**Méthode.** Notons que A_n est symétrique. En vue de [9], pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (où $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétrique à n lignes et n colonnes à coeffients dans $\mathbb{R}$) on a

1. $Sp(A) \subset \mathbb{R}$,
2. A est diagonalisable,
3. Il existe une base orthogonale formée par n vecteurs propres de A.

Exercice 02

(i) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \notin Sp(A)$. Montrons que

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \alpha I_n)^{-1} x = \frac{1}{\lambda - \alpha} x.$$

Soit (λ, x) un élément propre de A,on a

$$\begin{aligned} (A-\alpha I_n)\,x &= (\lambda-\alpha)\,x \\ &\Leftrightarrow (A-\alpha I_n)^{-1}x = \frac{1}{\lambda-\alpha}x. \end{aligned}$$

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrons que $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in Sp(A^*)$, où $A^* = \left(\overline{A}\right)^t = \overline{A^t}$. Notons que $\overline{\det(A)} = \det(A^*)$.

On écrit

$$\begin{aligned} \lambda &\in Sp(A) \Leftrightarrow 0 = \det(A-\lambda I) \\ &\Leftrightarrow 0 = \overline{\det(A-\lambda I)} \\ &\Leftrightarrow 0 = \det((A-\lambda I)^*) \\ &\Leftrightarrow 0 = \det\left(A^* - \overline{\lambda} I\right) \\ &\Leftrightarrow \overline{\lambda} \in Sp(A^*). \end{aligned}$$

(iii) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Vérifions que

$$\lim_{k\to+\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \max_{\lambda_i \in Sp(A)} (|\lambda_i|) < 1.$$

De plus, si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ sont des valeurs propres de A avec $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_k|$, $\lambda_1 \neq 0$. Montrons que

$$|\lambda_1| = \lim_{m\to+\infty} \|A^m\|^{\frac{1}{m}}.$$

Voir la solution de l'Examen 4.34.

Exercice 03. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix} \; ; \; \alpha+\beta \neq 0.$$

Les éléments propres de A sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0,\ v_2 = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}, 1\right) \\ \lambda_2 = -\alpha - \beta,\ v_1 = (-1, 1) \end{cases}$$

Puisque $\alpha + \beta \neq 0$, alors $\lambda_1 \neq \lambda_2$. D'où A est diagonalisable.

Montrons que

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} G_1 + e^{\lambda_2 t} G_2, \text{ où } \lambda_1, \lambda_2 \in Sp\,(A) \text{ et } G_1, G_2 \in \mathcal{M}_2\,(\mathbb{R})\,.$$

D'après ce qui précède, on peut écrire A sous la forme : $A = PDP^{-1}$, où

$$P = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{\beta}{\alpha} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

Ceci implique

$$\begin{aligned}
e^{At} &= \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{\beta}{\alpha} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-(\alpha+\beta)t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta + \dfrac{\alpha}{e^{(\alpha+\beta)t}} & \beta - \dfrac{\beta}{e^{(\alpha+\beta)t}} \\ \alpha - \dfrac{\alpha}{e^{(\alpha+\beta)t}} & \alpha + \dfrac{\beta}{e^{(\alpha+\beta)t}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\alpha+\beta} \left\{ e^{0.t} \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} + e^{-(\alpha+\beta)t} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix} \right\} \\
&= e^{\lambda_1 t} G_1 + e^{\lambda_2 t} G_2,
\end{aligned}$$

où

$$G_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} & \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \\ \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} & \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{pmatrix} \text{ et } G_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} & \dfrac{-\beta}{\alpha+\beta} \\ \dfrac{-\alpha}{\alpha+\beta} & \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$$

De plus, on voit que $G_1 + G_2 = I_2$.

Solution générale du système différentiel $X' = AX$:

$$X(t) = c_1 e^{0.t} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 04. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & e^t - e^{-t} \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}.$$

L'écriture de la matrice A sous la forme : $A = PDP^t$ avec D diagonale et P orthogonale. Tout d'abord, les éléments propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = e^t,\ v_1 = (1, e^t) \\ \lambda_2 = -e^{-t},\ v_2 = (-e^t, 1) \end{cases}$$

De plus, on a

$$\|v_1\|_2 = \|v_2\|_2 = \sqrt{1 + e^{2t}} = c$$

D'où

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & \frac{-e^t}{c} \\ \frac{e^t}{c} & \frac{1}{c} \end{pmatrix}_P \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & -e^t \end{pmatrix}_D \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & \frac{e^t}{c} \\ \frac{-e^t}{c} & \frac{1}{c} \end{pmatrix}_{P^t}$$

Notons que P est orthogonale, car $PP^t = P^tP = I_2$.

4.30 Solution (Micro-interrogatio 2015)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, montrons que

$$A \text{ diagonalisable} \Rightarrow A = 0.$$

Puisque A diagonalisable, il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$. De plus, si A est nilpotente il existe un entier k (non nul) tel que $A^k = 0$. D'où $D^k = 0$, et par conséquent $A = 0$.

On voit que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est non nulle et nilpotente d'indice $k = 2$; car

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc A n'est pas diagonalisable.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que

$$A \sim 2A \Rightarrow A \text{ est nilpotente.}$$

Comme $A \sim 2A$, alors $Sp(A) = Sp(2A)$. Donc pour toute $\lambda \in Sp(A)$, $\lambda = 2\lambda$. D'où $\lambda = 0$, et par conséquent $p_A(x) = x^n$. D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, on a $A^n = 0$. Donc A est nilpotente.

3. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{-\pi}{2} \end{pmatrix}$$

Calculons $\cos^2 A$ et $\sin^2 A$. Voir la solution de l'examen de Rattrapage 4.23.

4. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } (\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathbb{R}.$$

Déterminons $p_A(x)$. D'après un calcul simple, on trouve

$$\begin{aligned}
A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} \Rightarrow p_{A_2}(x) = x^2 + a_1 x + a_0 \\
A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow p_{A_3}(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\
A_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow p_{A_4}(x) = x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.
\end{aligned}$$

Dans le cas général, on en déduit que

$$p_A(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

5. Soit $A \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$. Posons

$$\widetilde{A} = (Com(A))^t.$$

Soit (λ, x) un élément propre de A. Montrons que $\left(\frac{\det(A)}{\lambda}, x\right)$ est un élément propre de $\widetilde{A}$. En effet, de (3.1) on a

$$(Com(A))^t x = \det(A) A^{-1} x$$

En utilisant le Corollaire 1.5.2, on trouve

$$(Com(A))^t x = \frac{\det(A)}{\lambda} x.$$

D'où le résultat.
Comme les valeurs propres de $\widetilde{A}$ sont de la forme $\frac{\det(A)}{\lambda} \neq 0$ (grâce au fait que A est inversible), alors $\widetilde{A} \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$.

4.31 Solution (Examen final 2015)

Exercice 01 (2pts). Calculons le polynôme caractéristique et le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix};\ a,b \in \mathbb{R},\ M_2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix};\ a,b,c \in \mathbb{R}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix};\ a \in \mathbb{R}.$$

En effet,

$$p_{M_1}(x) = \begin{cases} (a-x)(b-x)\ ;\ a \neq b \\ (a-x)^2\ ;\ a = b \end{cases}$$

Comme $M_1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, alors $m_{M_1}(x) = p_{M_1}(x)$. De même, on a $m_{M_2}(x) = p_{M_2}(x)$.

Finalement, on a

$$p_{M_3}(x) = (a-x)^n = m_{M_3}(x).$$

Exercice 02 (8pts).

Partie I. Définissez les notions suivantes :

– Norme et espace vectoriel normé. Voir la Définition 1.6.1.

– Produit scalaire. Voir la Définition 1.7.1.

Partie II.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale, si et seulement, si

$$A^t A = AA^t = I_n.$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Montrons que que $\det(A) = \pm 1$. Voir le Corollaire 1.10.1.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est orthogonale

(ii) $\forall\, x \in \mathbb{R}^n : \|Ax\| = \|x\|$

(iii) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$

La démonstration est donnée dans le Théorème 1.10.1.

3. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout θ réel, montrons que

$$e^{\theta A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Tout d'abord, le polynôme caractéristique est $p_A(x) = 1 + x^2$. Ses éléments propres sont

$$\lambda_1 = -i,\ v_1 = (-i, 1) \text{ et } \lambda_2 = i,\ v_2 = (i, 1).$$

La matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, i.e., $A = PDP^{-1}$, où

$$P = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned} e^{\theta A} &= \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\theta i} & 0 \\ 0 & e^{\theta i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{\theta i}+e^{-\theta i}}{2} & -\frac{e^{\theta i}-e^{-\theta i}}{2} \\ \frac{e^{\theta i}-e^{-\theta i}}{2} & \frac{e^{\theta i}+e^{-\theta i}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que A et $e^{\theta A}$ sont orthogonaux.

Exercice 03 (7pts).

1,2,3. **Voir exercice 3, examen 2014.**

4. Résoudre le système différentiel

$$X' = M.X.$$

Les éléments propres de M sont

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = (1,1,0) \\ v_2 = (-1,0,1) \end{cases}, \lambda_2 = 2 \Rightarrow v_3 = (1,1,1)$$

Comme la matrice M est diagonalisable, alors

$$X(t) = c_1 e^t v_1 + c_2 e^t v_2 + c_3 e^{2t} v_3,$$

de sorte que

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^t - c_2 e^t + c_3 e^{2t} \\ y(t) = c_1 e^t + c_3 e^{2t} \\ z(t) = c_2 e^t + c_3 e^{2t} \end{cases} ; \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 04 (3pts). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que

a. $\det(A) = 0 \Rightarrow 0$ est une valeur propre de A.

D'après la Proposition 2.2.2, on a

$$\det(A) = 0 \Rightarrow \prod_{\lambda \in Sp(A)} \lambda = 0 \Rightarrow 0 \ \in Sp(A).$$

b. $A^2 = A \overset{?}{\Rightarrow} A$ est diagonalisable.

Puisque $A^2 = A$, implique $A(A - I) = 0$. Ce qui donne, $m_A(x) = x(x-1)$. Donc A est diagonalisable ; car les racines de $m_A(x)$ sont simples.

c. Si $m_A(x) = (x-a)(x-b)$; $a \neq b$, montrons que A^n s'écrit en fonction de A et I. Voir le Corollaire 3.2.1.

4.32 Solution (Examen de rattrapage 2015)

Exercice 01. Montrons le théorème de Cayley-Hamilton pour une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1^{ière} méthode. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Puisque

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = x^2 - (a+d)x + ad - cb.$$

D'après un calcul simple, on obtient

$$\begin{aligned} p_A(A) &= A^2 - (a+d)A + (ad-cb)I_2 \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-cb)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & d^2+bc \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a^2-da & -ab-bd \\ -ac-cd & -d^2-ad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où $p_A(A) = 0$.

2ème **méthode**. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En utilisant le Lemme 3.1.1 (pour $n = 2$), on a

$$A\,(Com\,(A))^t = \det(A)\, I_2 \tag{4.23}$$

Posons

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } B = A - xI_2$$

En remplaçant A par B, l'égalité (4.26) implique

$$(A - xI_2)\,(Com\,(A - xI_2))^t = p_A(x)\, I_2,$$

où

$$A - xI_2 = \begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned}(Com\,(A - xI_2))^t &= \begin{pmatrix} d-x & -b \\ -c & a-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= B_0 + xB_1, \text{ où } B_0, B_1 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\end{aligned}$$

On en déduit que

$$(A - xI_2)(B_0 + xB_1) = p_A(x)\, I_2. \tag{4.24}$$

Notons que $p_A(x) = x^2 + c_1x + c_0$ avec $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. De (4.24), on a

$$(A - xI_2)(B_0 + xB_1) = x^2I_2 + c_1I_2 + c_0I_2.$$

D'où

$$\begin{cases} AB_0 = c_0I_2 \\ AB_1 - B_0 = c_1I_2 \\ -B_1 = I_2 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} p_A(A) &= c_0 I_2 + c_1 A + A^2 = AB_0 + \left(A^2 B_1 - AB_0\right) - A^2 B_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 02. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, montrons que A est trigonalisable. Voir la démonstration du Théoème 3.8.2 en posant $n = 3$.

Exercice 03. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda AB + A + B = 0.$$

Montrons que A et B commutent.
Si $\lambda = 0$, c'est évident. Sinon, on écrit $(\lambda A + I_n)(\lambda B + I_n) = I_n$ donc $(\lambda A + I_n)$ est inversible et son inverse est $(\lambda B + I_n)$. Comme toute matrice permute avec son inverse, on obtient $AB = BA$.

Exercice 04.

Considérons la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Polynôme minimal de A,
2. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels α_n et β_n tels que

$$A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculons α_n et β_n en fonction de n. Ces trois questions sont trouvées dans la Micro-interrogation 3.8.2.

4. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{ij} = -1$ pour $i \neq j$, 0 pour $i = j$. Dans ce cas, prouver que A est diagonalisable.

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{A_2}(x) = (x-1)(x+1), \\
A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{A_3}(x) = (x-1)(x+2), \\
A_4 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{A_4}(x) = (x-1)(x+3).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m_A(x) = (x-1)(x+n-1). \quad (4.25)$$

Dans (4.25) les racines de $m_A(x)$ sont simples, A est donc diagonalisable.

4.33 Solution (Micro-interrogation 2016)

<u>Ex 01</u> (05pts).

1. Calculons le polynôme minimal de la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{n \times n}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

D'après un calcul simple pour les matrices

$$A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \ldots$$

On en déduit que $m_{A_n}(x) = (x-\lambda)^n$.

2. Solution général du système différentiel $X' = A_n X$. En effet, pour $n = 3$, on a

$$X' = A_3 X \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \lambda x + y \\ y' = \lambda y + z \\ z' = \lambda z \end{cases}$$

D'où $z = c_3 e^{\lambda t},\ y = (c_3 t + c_2) e^{\lambda t}$ et $x = \left(\frac{c_3}{2} t^2 + c_2 t + c_1\right) e^{\lambda t};\ c_i \in \mathbb{R}$ pour $i = \overline{1,3}$

Dans le cas général, la solution est

$$\begin{cases} x_n = c_n e^{\lambda t} \\ x_{n-1} = (c_n t + c_{n-1}) e^{\lambda t} \\ x_{n-1} = \left(\frac{c_n}{2} t^2 + c_{n-1} t + c_{n-2}\right) e^{\lambda t} \\ \vdots \\ x_2 = \left(\frac{c_n}{(n-2)!} t^{n-2} + \frac{c_{n-1}}{(n-3)!} t^{n-3} + \ldots + c_3 t + c_2\right) e^{\lambda t} \\ x_1 = \left(\frac{c_n}{(n-1)!} t^{n-1} + \frac{c_{n-1}}{(n-2)!} t^{n-2} + \ldots + c_2 t + c_1\right) e^{\lambda t} \end{cases} ;\ c_i \in \mathbb{R}, \text{ pour } i = \overline{1,n}$$

3. Le calculer A^k ; $k \geq 1$.

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & C_k^2 \lambda^{k-2} & C_k^3 \lambda^{k-3} & \ldots & C_k^k \lambda^{k-n+1} \\ & \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & C_k^2 \lambda^{k-2} & \ldots & C_k^{k-1} \lambda^{k-n+2} \\ & & \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & \ldots & C_k^{k-2} \lambda^{k-n+3} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} \\ & & & & & \lambda^k \end{pmatrix} ; k \geq 1.$$

<u>**Ex 02**</u> (05pts). Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que

a. $0 \notin Sp(A) \Rightarrow A \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$, voir le Corollaire 3.8.1.

b. $A \sim B \Rightarrow \det(A) = \det(B)$, voir le Corollaire 2.1.1.

c. $\det(A) = \det(B) \nRightarrow A \sim B$, voir la Remarque 2.1.1.

d. $A \sim B \Rightarrow Sp(A) = Sp(B)$, voir 2.1.2.

e. $Sp(A) = \{\lambda\} \Rightarrow e^A = e^\lambda \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(A - \lambda I_n)^k}{k!}$, voir le Corollaire 3.4.1.

4.34 Solution (Examen final 2016)

Ex 01 (4pts)**.** Soit le système de suites avec les relations de récurrence,

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n - y_n + 1 \\ y_{n+1} = -x_n + \alpha y_n + 2 \end{cases} ;\ (x_0, y_0) = (0, -1),\ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4.26}$$

On écrit le système de suites (4.26) comme suit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}}_{U_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}}_{U_n} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{C},$$

c'est-à-dire $U_n = AU_{n-1} + C$. Il vient

$$U_n = A^n U_0 + \left(A^{n-1} + A^{n-2} + ... + A + I_2\right) C, \text{ où } U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, calculons A^n ; $n \geq 0$:

Les éléments propres de A sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha - 1,\ v_1 = (1, 1) \\ \lambda_2 = \alpha + 1,\ v_2 = (-1, 1) \end{cases}$$

La matrice A est donc diagonalisable. Ainsi on écrit

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha-1)^n & 0 \\ 0 & (\alpha+1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{(\alpha+1)^n + (\alpha-1)^n}{2} & \dfrac{-(\alpha+1)^n + (\alpha-1)^n}{2} \\ \dfrac{-(\alpha+1)^n + (\alpha-1)^n}{2} & \dfrac{(\alpha+1)^n + (\alpha-1)^n}{2} \end{pmatrix} ;\ n \geq 0. \end{aligned}$$

Calculons $A^{n-1}+A^{n-2}+...+A+I_2$. En effet, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} A^i &= \begin{pmatrix} \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1}(\alpha+1)^i+\sum\limits_{i=0}^{n-1}(\alpha-1)^i}{2} & \frac{-\sum\limits_{i=0}^{n-1}(\alpha+1)^i+\sum\limits_{i=0}^{n-1}(\alpha-1)^i}{2} \\ \frac{-\sum\limits_{i=0}^{n-1}(\alpha+1)^i+\sum\limits_{i=0}^{n-1}(\alpha-1)^i}{2} & \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1}(\alpha+1)^i+\sum\limits_{i=0}^{n-1}(\alpha-1)^i}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(\alpha+1)^n-1}{2\alpha}+\frac{(\alpha-1)^n-1}{\alpha-2} & -\frac{(\alpha+1)^n-1}{2\alpha}+\frac{(\alpha-1)^n-1}{\alpha-2} \\ -\frac{(\alpha+1)^n-1}{2\alpha}+\frac{(\alpha-1)^n-1}{\alpha-2} & \frac{(\alpha+1)^n-1}{2\alpha}+\frac{(\alpha-1)^n-1}{\alpha-2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Il vient

$$U_n = A^n U_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^i C.$$

D'après un calcul simple, on trouve

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{2\alpha}+3\frac{(\alpha-1)^n}{\alpha-2}-\frac{3}{\alpha-2}-\frac{1}{2}(\alpha-1)^n+\frac{1}{2}(\alpha+1)^n-\frac{1}{2\alpha}(\alpha-1)^n \\ y_n = 3\frac{(\alpha-1)^n}{\alpha-2}-\frac{1}{2\alpha}-\frac{3}{\alpha-2}-\frac{1}{2}(\alpha-1)^n-\frac{1}{2}(\alpha+1)^n+\frac{1}{2\alpha}(\alpha+1)^n \end{cases}$$

Ex 02 (4pts)**.** Expliquer comment résoudre un système différentiel $X' = AX$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Considérons un système différentiel $X' = AX$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il y a deux cas

1. Si A diagonalisable, i.e., il existe une base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $Av_i = \lambda_i v_i$, pour $i = 1, 2, ..., n$. La solution général est donnée par
$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} v_i \quad \text{ou } X(t) = e^{At}.C = Pe^{Dt}P^{-1}C.$$
2. Si A n'est pas diagonalisable. Dans ce cas, A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (on peut écrire A sous la forme : $A = PTP^{-1}$ avec T est

triangulaire supérieure). La solution général du système $X' = AX$ est $X(t) = PY(t)$, où

$$\left\{ \begin{array}{c} Y(t) = P^{-1}X(t) \\ Y'(t) = TY(t) \\ X'(t) = PY'(t) \end{array} \right. ;$$

car $X' = PTP^{-1}X$.

Ex 03 (1pt)**.** Soit la matrice

$$P_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Les valeurs propres de P_n sont

$$\left\{1, \omega, \omega^2, ..., \omega^{n-1}\right\}, \text{ où } \omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} \text{ avec } i^2 = -1.$$

Ex 04 (4.5pts)**.** (a) On considère la matrice d'ordre n suivante

$$K_n = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

La matrice K_n est nilpotente d'indice n ; car $K_n^{n-1} \neq 0$ et $K_n^n = 0$. Donc

$$e^{K_n} = I_n + \frac{K_n}{1!} + \frac{K_n^2}{2!} + ... + \frac{K_n^{n-1}}{(n-1)!}.$$

b. Soient N une matrice nilpotente d'indice n et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul tel que $N^{n-1}x \neq 0$. Montrons que la famille

$$B = \left\{Ix, Nx, N^2x, ..., N^{n-1}x\right\}$$

est une base de $\mathbb{R}^n$. Voir le Théorème 3.5.1.

c. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $A \sim B \Rightarrow \det(A - \lambda I_n) = \det(B - \lambda I_n)$. En effet, si $A \sim B$, il existe donc une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. D'où

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_n) &= \det\left(PBP^{-1} - \lambda I_n\right) \\
&= \det\left(PBP^{-1} - \lambda PP^{-1}\right) \\
&= \det\left[P(B - \lambda I_n)P^{-1}\right] \\
&= \det(B - \lambda I_n).
\end{aligned}$$

– Montrons que

$$\lambda \in Sp(A) \Rightarrow e^{\lambda} \in Sp\left(e^{A}\right). \tag{4.27}$$

Voir le Corollaire 2.3.2.

– Montrons que $\det\left(e^{A}\right) = e^{Tr(A)}$. Puisque $\det(A) = \prod \lambda$, où $\lambda \in Sp(A)$, d'après (4.27), on a

$$\det\left(e^{A}\right) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = e^{Tr(A)}.$$

Ex 05 (1.5pts)**.**

(i) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \notin Sp(A)$. Montrons que

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \alpha I_n)^{-1} x = \frac{1}{\lambda - \alpha} x.$$

Voir la solution de l'examen final 4.29.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Vérifions que

$$\lim_{k \to +\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \max_{\lambda_i \in Sp(A)} (|\lambda_i|) < 1.$$

Comme A diagonalisable, il existe donc une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$. Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty} A^k &= 0 \Leftrightarrow P \lim_{k\to+\infty} D^k P^{-1} = 0 \\
&\Leftrightarrow P \lim_{k\to+\infty} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} = 0 \\
&\Leftrightarrow P \begin{pmatrix} \lim_{k\to+\infty} \lambda_1^k & & & \\ & \lim_{k\to+\infty} \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lim_{k\to+\infty} \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} = 0 \\
&\Leftrightarrow |\lambda_i| < 1, \text{ pour } i = 1, 2, ..., n \\
&\Leftrightarrow \max_{\lambda_i \in Sp(A)} (|\lambda_i|) < 1.
\end{aligned}$$

Ex 06 (5pts)**.** En utilisant 2 méthodes, montrons le Théorème de Cayley-Hamilton sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1$^{\text{ière}}$Méthode. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$**.** C'est-àdire

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Tout d'abord, calculons $p_A(x)$, puis, en ermplaçant x par A, on trouve $p_A(A) = 0$.

2$^{\text{ème}}$Méthode. Voir la démonstration du Théorème 3.1.1, il suffit de prendre $n = 3$. On peut aussi voir la solution d'examen de Rattrapage 4.32; c'est le même cas seulement pour $n = 2$.

4.35 Solution (Examen de ratrapage 2016)

Ex 01 (08pts). Soit la matrice

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a+b & 0 & 1-b \\ a+2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \; ; \; a,b \in \mathbb{R}$$

1. En utilisant le polynôme minimal de $M_{a,b}$, calculons les valeurs de a et b pour lesquelles $M_{a,b}$ soit diagonalisable.

Calculons le polynôme caractéristique de $M_{a,b}$.

$$\begin{aligned}
p_{M_{a,b}}(x) &= \begin{vmatrix} a-x & 1 & 0 \\ a+b & -x & 1-b \\ a+2 & 1 & -2-x \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c} c_1 \\ \downarrow \\ c_1+c_2+c_3 \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} a+1-x & 1 & 0 \\ a+1-x & -x & 1-b \\ a+1-x & 1 & -2-x \end{vmatrix} = (a+1-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -x & 1-b \\ 1 & 1 & -2-x \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c} c_1 \\ \downarrow \\ c_1-c_2 \end{array} \\
&= (a+1-x) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1+x & -x & 1-b \\ 0 & 1 & -2-x \end{vmatrix} \\
&= (a+1-x)(1+x) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -x & 1-b \\ 0 & 1 & -2-x \end{vmatrix} \\
&= (a+1-x)(1+x)(2+x).
\end{aligned}$$

La matrice $M_{a,b}$ est diagonalisable $\Leftrightarrow$ les racines de $m_{M_{a,b}}(x)$ sont simples.

$$\Leftrightarrow a+1 \notin \{-1,-2\}$$

On distingue deux cas :

Si $a \notin \{-1,-2\}$ et $b \in \mathbb{R}$, A possède 3 valeurs propres distinctes, elle donc diagonalisable.

Si $a = -2$ ou -3, on a

$$\text{A est diagonalisable } \Leftrightarrow m_{M_{a,b}}(x) = (x+1)(x+2).$$

Pour $a = -2$, on a

$$\begin{aligned} m_{M_{-2,b}}(M_{-2,b}) &= (M_{-2,b} + I)(M_{-2,b} + 2I) \\ &= \begin{pmatrix} b-2 & 1 & 1-b \\ b-2 & 1 & 1-b \\ b-2 & 1 & 1-b \end{pmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

Pour $a = -3$, on a

$$m_{M_{-3,b}}(M_{-3,b}) = \begin{pmatrix} b-2 & 0 & 1-b \\ b-2 & 0 & 1-b \\ b-2 & 0 & 1-b \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow b = 1.$$

On en déduit que $m_{M_{a,b}}(x) = (x+1)(x+2)$ pour $a = -3$ et $b = 1$. Dans ce cas, A est diagonalisable.

Conclusion.

$M_{a,b}$ est diagonalisable $\Leftrightarrow \{a \neq -2, -3 \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$ ou $a = -3$ et $b = 1$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+3} = 2u_n + u_{n+1} - 2u_{n+2}, \\ u_0 = -1,\ u_1 = 1 \text{ et } u_2 = 5. \end{cases}$$

Calculons A^n ; $n \in \mathbb{N}$, où $A = M_{0,0}$. On a

1. $p_A(x) = (1-x)(1+x)(2+x)$
2. $\lambda_1 = -2$, $E_{\lambda_1} = Vect\{(1,-2,4)\}$, $\lambda_2 = -1$, $E_{\lambda_2} = Vect\{(1,-1,1)\}$ et $\lambda_1 = 1$, $E_{\lambda_3} = Vect\{(1,1,1)\}$

3. L'expression de $A^n = PD^nP^{-1}$ est donnée par

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n - \frac{1}{3}(-2)^n + \frac{1}{3} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n & \frac{1}{3}(-2)^n - \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3}(-2)^n - (-1)^n + \frac{1}{3} & \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(-1)^n - \frac{2}{3}(-2)^n + \frac{1}{6} \\ (-1)^n - \frac{4}{3}(-2)^n + \frac{1}{3} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n & \frac{4}{3}(-2)^n - \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le calcul de u_n en fonction de n. On a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix}}_{X_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}}_{X_n}, \text{ où } X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Comme $X_n = A^nX_0$, d'après le calcul on a

$$u_n = 2(-2)^n - 4(-1)^n + 1, \text{ où } n \geq 0.$$

<u>Ex 02</u> (05pts).

a. Montrons le Théorème de Cayler-Hamilton pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, voir la démonstration du Théorème 3.1.1.

b. Soit $A \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$. Posons

$$B = (Com(A))^t$$

et soit (λ, x) un élément propre de A. Montrons que $\left(\frac{\det(A)}{\lambda}, x\right)$ est un élément propre de B. Puis, on en déduit que $B \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$. Ceci voir la solution de la micro-interrogation 4.30.

<u>Ex 03</u> (07pts).

a. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, calculons $e^{\theta A}$. On a

1. $p_A(x) = x^2 + 1.$

2. $Sp(A) = \{-i, i\}.$

3. La matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

4. $E_i = Vect\{(1,i)\}$ et $E_{-i} = Vect\{(1,-i)\}$.

Maintenant, posons

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

Comme $A = PDP^{-1}$, alors

$$\begin{aligned} e^{\theta A} &= Pe^{\theta D}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\theta i} & 0 \\ 0 & e^{-\theta i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} & -\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2} \\ \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2} & \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Montrons que que

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{e^{tA} - I}{t} = A.$$

(voir la Proposition 2.3.2).

c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ soit diagonalisable. En effet, une démonstration par récurrence immédiate montre que

$$\forall\ k \in \mathbb{N} : B^k = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ kA^k & A^k \end{pmatrix}.$$

Par linéairité, on a donc

$$\forall\ P \in \mathbb{K}[X]\,,\ P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ AP'(A) & P(A) \end{pmatrix}.$$

Supposons maintenant la matrice B diagonalisable. Il existe un polynôme annulateur de B qui est scindé et n'a que des racines simples. Or,

$$P(B) = 0 \Leftrightarrow P(A) = AP'(A) = 0.$$

Comme P est scindé et n'a que des racines simples, les polynomes P et P' sont premiers entre eux. D'après le Théorème de Bezout, il existe donc deux polynomes U et V tels que $UP + VP' = 1$. D'où $XVP + XVP' = X$, puis

$$A = AU(A)\,P(A) + V(A)\,AP'(A) = 0.$$

La réciproque est évidente. En conclusion, B est diagonalisable si, et seulement si, A (donc B) est nulle.
d. On suppose connu le fait que $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ est irrationnel. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$ vérifiant $A^5 = I_3$. Montrons que $A = I_3$.

On voit que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ (polynôme annulateur $x^5 - 1$). Supposons $A \neq I_3$. Les racines de p_A sont $1, \lambda, \overline{\lambda}$ avec $\lambda = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ ou $\lambda = e^{\frac{4\pi i}{5}}$. D'où $1 + \lambda + \overline{\lambda} = Tr(A) \in \mathbb{Q}$. On a donc $\cos\dfrac{2\pi}{5} \in \mathbb{Q}$ (absurde) ou $\cos\dfrac{4\pi}{5} \in \mathbb{Q}$ (également absurde car alors $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \cos\dfrac{8\pi}{5} = 2\cos^2\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) - 1 \in \mathbb{Q}$).

La matrice suivante A est réelle, vérifie $A^5 = I_3$ et $A \neq I_3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{2\pi}{5} & -\sin\frac{2\pi}{5} \\ 0 & \sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}.$$

4.36 Problèmes sans Solutions

Ex 01. Soit $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$, α valeur propre de f. Montrer que

$$f(V_\alpha) \subset V_\alpha,$$

i.e., V_α est stable par f avec V_α est le sous-espace propre associé à α.

Ex 02. Trouver les valeurs et vecteurs propres de f, où

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ p \quad &\mapsto \quad p'. \end{aligned}$$

Ex 03. Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et α, β valeurs propres de A.

$i)$ Si $\alpha \neq \beta$, montrer que

$$A^n = \alpha^n A_1 + \beta^n A_2, \text{ où } A_1, A_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Dans ce cas, calculer $A_1 + A_2$, et en déduire A_1 et A_2.

$ii)$ Si $\alpha = \beta$, montrer que

$$A^n = \alpha^n I + n\alpha^{n-1}(A - \alpha I).$$

Ex 04. Soient E un espace vectoriel et $f \in End(E)$ avec

$$f^2 + f + id_E = 0.$$

1. Montrer que f n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, puis calculer ses valeurs propres possibles.

Ex 05. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

$a)$ Trouver une relation entre le polynôme caractéristique de A et celui de A^{-1}.

$b)$ En déduire que si λ est valeur propre de A alors $\dfrac{1}{\lambda}$ est valeur propre de A^{-1} avec le même ordre de multiplicité.

Ex 06.

$a)$ Soit $D : p \to p'$ l'opérateur de dérivation sur $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer les valeurs propres de D et les sous-espaces propres associés. L'endomorphisme D est-il diagonalisable ?

$b)$ Soit $E = C^{\infty}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $d(f) = f'$ pour $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Montrer que d est un endomorphisme de E. Déterminer les valeurs propres de d et les sous-espaces propres correspondants.

Ex 07. Soit $f, g \in End(E)$ t.q $g \circ f = f \circ g$ et $\dim E = n$. Soient α une valeur propre de f, et V_α le sous-espace propre associé à α, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $g(V_\alpha) \subset V_\alpha$
2. F stable par $f \Rightarrow g(F)$ stable par f
3. $\ker f$ et Imf stables par g
4. Si $\dim V_\alpha = 1$, alors $u \in V_\alpha \Rightarrow u$ vecteur propre de g

5. Si f admet n valeurs propres distincts, montrer que f et g ont les mêmes vecteurs propres et f et g diagonalisables dans la même base.

Ex 08. Soit lmatrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

et $N = A - I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.

1. Calculer N^2 et N^3. En d´eduire N^n pour n entier, $n \geq 3$.
2. En d´eduire une formule exprimant A^n en fonction de I, N et N^2 pour n entier naturel.
3. Déterminer des nombres a, b et c tels que la matrice $B = aI + bN + cN^2$ vérifie : $AB = I$. En déduire la matrice A^{-1}(inverse de A) en fonction de I, N et N^2.
4. Calculer A^{-n} pour n entier positif. En déduire A^k pour k entier relatif quelconque.

Ex 09. Prouver que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

n'est diagonalisable ni sur $\mathbb{R}$, ni sur $\mathbb{C}$.

Ex 10. Calculer les valeurs propres, puis determiner les sous-espaces propres des matrices suivates

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 0 & 2a & 8 \\ 0 & 0 & 3a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

Ex 11. Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ex 12. Soit p_A le polynome caracteristique de A. Dire dans quel cas, on peut décider de la digonalisation ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

$$\begin{aligned} p_A(x) &= x(x-1)(x+1), \ p_A(x) = x\left(4-x^2\right), \ p_A(x) = x^2(3-x) \\ p_A(x) &= -x^3+1, p_A(x) = \left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right), \ p_A(x) = -x^3. \end{aligned}$$

Ex 13. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que $A \sim B$ (i.e., il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$).

Ex 14. Étudier la diagonalisation de la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ k \in \mathbb{R}.$$

Ex 15. Trouver les valeurs et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a+b & 0 & 1-b \\ 2+a & 1 & -2 \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R}$$

Étudier la diagonalisation selon a et b.

Ex 16. Soit la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

– Montrer que A possède deux valeurs propres distincts λ_1 et λ_2.

– Trouver les vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2.

– En posant

$$E_{\lambda_1} = Vect\{(u_x, u_y)\} \text{ et } E_{\lambda_2} = Vect\{(v_x, v_y)\}$$

et soit

$$P = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}$$

Calculer P^{-1}

Vérifier que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

– Calculer A^n ; $n \in \mathbb{N}$

– Calculer e^A ; où $e^A = Pe^D P^{-1}$ et $e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$.

– Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = 3x + 2y + t \end{cases}$$

Ex 17. Soit A une matrice carrée, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On rappelle que la trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux et que $Tr(BAB^{-1}) = Tr\,(A)$.

Démontrer que $\det\left(e^A\right) = e^{Tr(A)}$ dans les cas suivants :

1. A diagonalisable.
2. A triangulaire supérieure ayant une diagonale de zéros.
3. A trigonalisable.
4. A quelconque.

Ex 18. Soit A une matrice symétrique réelle à n lignes et n colonnes telle qu'il existe un entier k vérifiant $A^k = I_n$. Montrer que

$$A^2 = I_n.$$

Ex 19. Soit A une matrice 5×5 réelle dont le polynôme caractéristique est

$$p_A(x) = (x+1)^2 (x-2)^3 .$$

1. Quelles sont les valeurs propres de A ?
2. A est-elle diagonalisable ?
3. On suppose de plus que les sous-espaces propres sont de dimension 2. Que conclure ?

Ex 20. Étudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

Étudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

Étudier le rang, l'image, le noyau, les sous-espaces propres, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Peut-on diagonaliser cette matrice ?

Ex 21. Étudier la diagonalisation des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \dots & \beta & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta & \beta & \dots & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \dots & \beta & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Ex 22. Dans chacun des cas suivants, déterminer si la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable. Si oui, trouver une base de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres de A et calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

· $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

· $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

· $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

· $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ex 23. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $A^2 = A+2I$. En déduire l'expression de A^{-1} en fonction de A et I.
2. En utilisant la démonstration par récurrence sur n. Prouver que

$$A^n = a_n A + b_n I,$$

où

$$a_n, b_n \in \mathbb{N} \text{ tels que } \begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases} ; \ n \geq 0. \tag{4.28}$$

3. Écrire le système (4.28) sous la forme matricielle.
4. Calculer a_n et b_n en fonction de n. Puis, en déduire l'expression de A^n.
5. Calculer le polynôme minimal de la matrice A. Qu'en déduire ?
6. Résoudre le système différentiel, $X' = AX$.

Ex 24. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démontrer que

$$A^n = \frac{3^n - 1}{2} + \frac{3 - 3^n}{2} I_2;\ n \geq 0.$$

Bibliographie

[1] J. Chevallet, *Algèbre III, 296 exercices corrigés*. Conseils et précis de cours, Vuibert supérieur, Paris, 1998.

[2] T. Denton and A. Waldron, *Linear Algebra in Twenty Five Lectures*, Edited by Katrina Glaeser, Rohit Thomas & Travis Scrimshaw, 2012.

[3] D. Ferrand, *Suites récurrentes*, IRMAR, Université de Rennes, 1988.

[4] J. Hefferon, *Linear Algebra*, Third edition, *http ://joshua.smcvt.edu/linearalgebra.*

[5] B. Kolman and D. Hill, *Introductory Linear Algebra*, An Applied First Course, Pearson 2001.

[6] D. Lay, *Linear Algebra and its applications*, University of Maryland, Addison Wesley Publishing Company, 1994.

[7] G. Lefort, *Exercices d'algèbre, analyse et probabilités, Tome II, 2e année : 1er cycle M.P.*, Dunod. Paris, 1969.

[8] G. Letec, *Cours d'algèbre linéaire, 1 année d'université*, IREM de Lyon, 2002.

[9] G. Letec, *Cours d'algèbre linéaire, 2 ème année d'université*. Laboratoire de Statistique et Probabilités, Université Paul Sabatier, 31062, Toulouse, France, 2002.

[10] G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, Fourth Edition, Thomson, USA, 2006.

[11] A. Tchoudjem, *Algèbre-III Réduction des endomorphismes*, Université Lyon I, 2011.

[12] M.J. Tobias, *Matrices in Engineering Problems*, Washington University, St. Louis MC M. Claypool Publishers, 2011.

[13] A. yger, *Cours MIAS 301 (algèbre)*, ellipses, 2004.

Appendix

Polynôme Caractéristique
Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice carrée

Ex 01 : ***a)*** Trouver le polynôme caractéristique de la matrice

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rép : $p_A(x) = x^2(3-x)$

b) En déduire le polynôme caractéristique de la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

Ex 02 : Vérifier que

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \; p_A(x) = (x-3)^3$$

Ex 03 : Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que

$$p_{rA}(x) = r^n p_A\left(\frac{x}{r}\right) \;\; ; r \neq 0$$

Ex 04 : (i) Soient A et B deux matrices telles que :

$$A^2 = B^2 = (AB)^2 = I_n$$

Démontrer que $AB = BA$.

(ii) Soient $A,\ B \in M_n(\mathbb{R})$. Supposons que A est inversible. Montrer que

$$p_{AB}(\lambda) = p_{BA}(\lambda)$$

Ex 05 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Rép : $\begin{cases} \lambda_1 = 4, v_1 = (2,3)^t \\ \lambda_2 = -1, v_2 = (1,-1)^t \end{cases}$

Ex 06 : Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes

$$1)\ A=\begin{pmatrix}1&2\\0&5\end{pmatrix}$$

$\boxed{Rép}$: $\begin{cases}\lambda_1=1\Longrightarrow E_{\lambda_1}=\{(1,0)\}\\ \lambda_1=5\Longrightarrow E_{\lambda_2}=\{(1,2)\}\end{cases}$

$$2)\ A=\begin{pmatrix}2&6\\0&2\end{pmatrix}$$

$\lambda=2(\text{valeur propre d'rdre }2)\Longrightarrow E_\lambda=\{(1,0)\}$

$$3)\ A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&-5\end{pmatrix}$$

$\boxed{Rép}$: $\begin{cases}\lambda_1=1\Longrightarrow E_{\lambda_1}=\{(1,0,0)\}\\ \lambda_2=2\Longrightarrow E_{\lambda_2}=\{(2,1,0)\}\\ \lambda_3=-5\Longrightarrow E_{\lambda_2}=\{(5,6,-14)\}\end{cases}$

$$4)\quad A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$

$\boxed{Rép}$: $\begin{cases}\lambda_1=1\Longrightarrow E_{\lambda_1}=\{(-1,1,1)\}\\ \lambda_2=2\text{ (valeur propre d'ordre }2)\\ \Longrightarrow E_{\lambda_2}=\{(0,1,0),(0,0,1)\}\end{cases}$

$$5)\quad A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\boxed{Rép}$: $\begin{cases}\lambda=0\text{ (valeur propre d'ordre }3)\\ \Longrightarrow E_\lambda=\{(1,0,0),(0,1,-1)\}\end{cases}$

$$6)\quad A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&3&2\end{pmatrix}$$

$\boxed{Rép}$:

$\lambda=2\text{ (valeur propre d'ordre }3)\Longrightarrow E_\lambda=\{(0,0,1)\}$

$$7)\quad A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$\boxed{Rép}$:

$\begin{cases}\lambda_1=0\Longrightarrow E_{\lambda_1}=\{(-1,1,0)\}\\ \lambda_2=2\text{ (valeur propre d'ordre }2)\Longrightarrow E_{\lambda_2}=\{(0,0,1),(1,1,0)\}\end{cases}$

$$8)\quad A=\begin{pmatrix}a&2&3\\0&2a&8\\0&0&3a\end{pmatrix},a\in\mathbb{R}$$

$\boxed{Rép}$:

$\begin{cases}\lambda_1=a\Longrightarrow E_{\lambda_1}=\{(1,0,0)\}\\ \lambda_2=2a\Longrightarrow E_{\lambda_2}=\left\{\left(\frac{2}{a},1,0\right)\right\}\\ \lambda_3=3a\Longrightarrow E_{\lambda_2}=\left\{\left(\frac{1}{2a^2}(3a+16),\frac{8}{a},1\right)\right\}\end{cases}$

Matrices semblables, Matrices diagonalisables

Ex 01 : *(a)* Énoncer la définition de deux matrices semblables $A,\ B \in M_n(\mathbb{R})$ (Dans ce cas, on note $A \sim B$).
(b) Prouver que : $A - \lambda I_n \sim B \Rightarrow A \sim \lambda I_n + B$.
(c) Soit A et B deux matrices semblables; *i.e*

$$A = PBP^{-1}$$

et soit (λ,x) un élément propre de A. Montrer que $(\lambda,P^{-1}x)$ est un élément propre de B.
(d) Soit $f_r(x) = a_0 + a_1x + ... + a_rx^r$ un polynôme de degré r. Si $B = P^{-1}AP$. Prouver que

$$f_r(B) = P^{-1}f_r(A)P$$

Ex 02 : En utilisant deux méthodes. Prouver que les matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

Ex 03 : Montrer que (**Voir Exponentielle de matrice)**

$$A \sim B \Longrightarrow e^A \sim e^B$$

Ex 04 : On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice A est semblable avec la matrice B.
Trouver une matrice C telle que

$$A = C.B.C^{-1}$$

Ex 05 : Soit A une matrice diagonalisable possède une valeur propre unique λ. Démontrer que $A = \lambda I$

Ex 06 : Étudier la diagonalisation de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} ; a \neq 0, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

Ex 07 :
Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable avec $sp(A) = \{-1,1\}$. Prouver que $A^{-1} = A$.

Ex 08 : Soient A et B deux matrices diagonalisables avec $P^{-1}AP = D_1$ et $P^{-1}BP = D_2$ pour une matrice inversible P. Prouver que

$$AB = BA$$

Ex 09 : ***a)*** Étudier la diagonalisation de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R}$$

Rép : A est diago $\Longleftrightarrow a = 0$

b) Soit la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Trouver l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles A_α est diagonalisable

---

Ex 10 : Vérifier que les matrices de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; c \neq 0$$

ne sont pas diagonalisables.

Ex 11 : On considère la matrice

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \; , a \in \mathbb{R}$$

Trouver les valeurs propres de $A(a)$.

Trouver les paramètres a de $\mathbb{R}$, pour lesquels la matrice $A(a)$ soit diagonalisable et effectuer dans ce cas la diagonalisation.

Ex 12 : Soit

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{P}_3[x] \longrightarrow \mathbb{P}_3[x] \\ p & \longmapsto & f(p) = 3xp - (x^2 - 1)\,p' \end{array}$$

On note par $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ la base canonique de $\mathbb{P}_3[x]$. Calculer $M_f(B)$

f est-elle diagonalisable ? si oui, effectuer la diagonalisation.

Université 08 Mai 45 Guelma Par l'enseignant : Bellaouar Djamel
Département de Mathématiques
Algèbre 3 Série N 03 2012 - 2016

Exponentielle de matrice, $cos(A)$, $sin(A)$, log(matrice)

Sur le calcul de A puissance k (A^k)

Ex 01 : Définissez la notion suivante « *Exponentielle de matrice* »
Calculer $\mathbf{e}^{0=\text{matrice nulle}}$
Soient $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Prouver que

$$e^{\lambda I_n} A = e^{\lambda} A$$

Ex 02 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est diagonalisable.
En déduire $exp(A)$.

Ex 03 : Montrer le théorème suivant : *Théorème* : *Soit* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, *la série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

est absolument convergente. (*donc convergente*).

Ex 04 : Soit A une matrice carrée. Prouver que

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{xA} - I}{x} = A.$$

Ex 05 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A.
En déduire que A est diagonalisable.
Calculer $exp(A)$.

Ex 06 : On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que

$$e^{A+B} \neq e^{A}.e^{B} \neq e^{B}.e^{A}$$

<u>Ex 07</u> : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer *logA*. *i.e*, trouver une matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A = e^B$.

<u>Ex 08</u> : Soit *A* une matrice **diagonalisable**; *i.e A* = *PDP*⁻¹ , prouver que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} A^k = P.\lim_{k \longrightarrow \infty} D^k.P^{-1}$$

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Calculer $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} A^k$.

Rép :

$$\begin{aligned} \lim_{k \longrightarrow \infty} A^k &= P.\lim_{k \longrightarrow \infty} D^k.P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \lim_{k \longrightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

<u>Ex 09</u> : Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout entier *k*, Calculer A^k.

Rép :

$$rép : \begin{cases} \lambda_1 = 1 \Longrightarrow E_{\lambda_1} = \{(-1, 2)\} \\ \lambda_2 = 2 \Longrightarrow E_{\lambda_2} = \{(-1, 1)\} \end{cases}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^{k+1} - 1 & 2^k - 1 \\ 2 - 2^{k+1} & 2 - 2^k \end{pmatrix}; k \in \mathbb{N}$$

<u>Ex 10</u> : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^n; n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 9^n & 0 & 0 \\ 4^n - 9^n & 4^n & 0 \\ 1 - 9^n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Systèmes de suites avec les relations de récurrence
Systèmes différentiels et matrices diagonalisables
Théorème de Cayley-Hamilton.
Systèmes différentiels et matrices non diagonalisables

Ex 01 : Résoudre le système de suites avec les relations de récurrence suivante

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - y_n \\ y_{n+1} = -x_n + 3y_n \end{cases} ; \ (x_0, y_0) = (1, 2)$$

Rép :

$$\begin{cases} x_n = 2^{n-1}(3 - 2^n) \\ y_n = 2^{n-1}(3 + 2^n) \end{cases} ; n \geq 0$$

Ex 02 : Soit le déterminant

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrer que $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$. Calculer D_n en fonction de *n*.

Ex 03 : Soit la suite (x_n) définie par :

$$x_{n+2} = \frac{2}{\dfrac{1}{x_n} + \dfrac{1}{x_{n+1}}} ; x_0 \ , \ x_1 > 0$$

Calculer

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n$$

Ex 04 : Résoudre le système différentiel :

$$X' = AX \ ; \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Rép :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1, \ v_1 = (-1, 1, 1) \\ \lambda_2 = 2, \ v_2 = (0, 1, 0) \ \text{et} \ v_3 = (0, 0, 1) \end{cases}$$

Résoudre le système différentiel :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X(t)$$

Rép :

$$\begin{aligned} X(t) &= c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} - c_2 - c_3 \\ c_1 e^{3t} + c_2 \\ c_1 e^{3t} + c_3 \end{pmatrix}, c_i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ex 05 : En utilisant le théorème de **Cayley-Hamilton**. Calculer l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ex 06 : Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$p_A(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1} x^{n-1} + c_n x^n \;;\; c_0 \neq 0$$

Prouver que

$$A^{-1} = \frac{-1}{c_0} \sum_{k=1}^{n} c_k A^{k-1}$$

Ex 07 : Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice possède une seule valeur propre λ. Prouver que.

$$e^{tA} = e^{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} (A - \lambda I_n)^k \frac{t^k}{k!}.$$

Résoudre le système différentiel

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Résoudre le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

Soient $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non diagonalisable et λ, λ, μ les valeurs propres de A avec $\lambda \neq \mu$. Montrer que :

$$e^{tA} = e^{\lambda t}(I + t(A - \lambda I)) + \frac{e^{\mu t} - e^{\lambda t}}{(\mu - \lambda)^2}(A - \lambda I)^2 - \frac{t e^{\lambda t}}{\mu - \lambda}(A - \lambda I)^2.$$

Résoudre le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

Polynôme minimal, Matrices Trigonalisables

Ex 01 : Calculer le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que les matrices de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; c \neq 0$$

ne sont pas diagonalisables.

Ex 02 : Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes

$$a) \; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b) \; A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \; c) \; \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex 03 : Si $m_A(x) = (x-a)(x-b)$. Alors, A^n s'écrit en fonction de A et I ?

Ex 04 : Calculer le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & \lambda & \\ & & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \; ; \lambda \in \mathbb{R}$$

A est-elle diagonalisable ?.

Ex 05 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \; ; \; a, b \in \mathbb{R}$$

Montrer que A est diagonalisable.

Ex 06 : Prouver que la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\dots&1\\1&1&\dots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\dots&1\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{R})$$

Est diagonalisable.

<u>Ex 07</u> : Trigonaliser la matrice

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&4\end{pmatrix}\qquad p_A(x)=(x-3)^2$$

Calculer A^n.

<u>Ex 08</u> : Trigonaliser la matrice

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\10&-5&7\\4&-2&2\end{pmatrix}\qquad p_A(x)=\begin{vmatrix}x-2&-1&2\\10&x+5&7\\4&-2&x-2\end{vmatrix}=x^2(x+1)$$

Calculer A^n.

<u>Ex 09</u> : Trigonaliser la matrice

$$A=\begin{pmatrix}7&-6&-2\\2&0&-1\\2&-3&2\end{pmatrix}\ ;\ p_A(x)=(x-3)^3$$

Puis, calculer A^n.

<u>Ex 10</u> : On considère la matrice :

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

1) Vérifier que $A^2 = A + 2I$. En déduire l'expression de A^{-1} en fonction de A et I.

2) En utilisant la démonstration par récurrence sur n. Prouver que

$$A^n=a_n.A+b_n.I$$

où

$$\left\{a_n,\ b_n\in\mathbb{N}\text{ et }\left\{\begin{array}{c}a_{n+1}=a_n+b_n\\b_{n+1}=2a_n\end{array}\right.\right.\ ;n\geq 0\ \dots\dots(S)$$

3) Écrire le système (S) sous la forme matricielle.

4) Calculer a_n et b_n en fonction de n. Puis, en déduire A^n.

5) Calculer le polynôme minimal de la matrice A. Qu'en déduire ?

6) Résoudre le système différentiel :

$$X'=A.X$$

Remarque 1. Comprendre la question = $1/(2-\varepsilon)$ de la réponse, où $\varepsilon \simeq 0$ positif.

Remarque 2. Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exemples en TD, l'enseignant choisira les exemples qu'il veut traiter, il appartient à l'étudiant le soin de faire le reste.

Bellaouar Djamel

GOOD LUCK !

---

1) Polynôme Caractéristique d'une matrice carrée

Ex 01 : Trouver les polynômes caractéristiques

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 13 & -12 & -6 \\ 6 & -5 & -3 \\ 18 & -18 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$p_{A_1}(x) = (3-x)^2(9-x)$

$p_{A_2}(x) = (1-x)^2(-2-x)$

$p_{A_3}(x) = -(1+x)(2-x)^2$

$p_{A_4}(x) = (3-x)^2(5-x)$

Ex 02 : Trouver le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

rép : $p_A(x) = (3-x)^3(7-x)$

Ex 03 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$$

Vérifier que le polynôme caractéristique est donné par :

$$p_A(x) = x^2 - trace(A)\,x + \det(A)$$

Ex 04 : Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que le polynôme caractéristique est donné par :

$$\boxed{p_M(x) = x^4 - 1}$$

Ex 05 : Prouver que

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; p_A(x) = (x-2)(x-4)^2$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a+b & 0 & 1-b \\ a+2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \; p_A(x) = -(a-x+1)\left(x^2+3x+2\right)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; p_A(x) = (x-1)(x-2)^3$$

Ex 06 : Soit le déterminant de Vendermonde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

Montrer que $\Delta = (b-a)(c-a)(c-b)$. Généraliser ?.

Ex 07 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que

$$p_A(x) = (x-1)(x-3)(x+1)$$

Ex 08 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{pmatrix}$$

Prouver que

$$p_A(x) = (x+3)^2(x-1)$$

Ex 09 : Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix}$$

Rép $\Delta = x^{n-1}; n \in \mathbb{N}^*$

Ex 10 : Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Vérifier que

$$(com\,(A - xI_n))^t = B_0 + xB_1 + ... + x^{n-1}B_{n-1}\ ; B_i \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

----

2) Sur l'inverse d'une matrice *A*

Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, si $det(A) \neq 0$, alors, A^{-1} existe, de plus

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(Com\,(A))^t$$

Ex 11 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Prouver que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ \frac{8}{3} & -\frac{8}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Ex 12 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $A^3 = 5I$, puis, En déduire la formule de A^{-1}.

Ex 13 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Prouver que $(I - A)^3 = 0$.

b) En déduire l'expression de A^{-1} en fonction de I, A et A^2

c) Calculer A^{-1} par deux méthodes.

Ex 14 : Soit la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & & & \\ & 1 & -\alpha & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -\alpha \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} \\ 0 & 1 & \alpha & \dots & \alpha^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex 15 : Soit B une matrice antisymétrique, montrer que la matrice $A = I - B$ est inversible.
Rappel : (A est inversible) $\Leftrightarrow$ ($Ax = 0 \Rightarrow x = 0$).

Ex 16 : Prouver que $\forall\ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$:

$$A.\left(com\left(A\right)\right)^t = \det\left(A\right).I_n$$

---

3) Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice carrée Valeurs propres, vecteurs propres d'un Endomorphisme

---

Ex 17 : Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice :

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 7,\ E_{\lambda_1} = \{(1,1,1,1)\} \\ \lambda_2 = 3,\ E_{\lambda_2} = \{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\} \end{cases}$$

---

4) Matrices semblables

Ex 18 : *a*) Montrer que

$$A \sim B \Longrightarrow p_A\left(x\right) = p_B\left(x\right)$$

i.e les matrices semblables ont le même polynôme caractéristique donc les mêmes valeurs propres. Vérifier que la réciproque de ce théorème est fausse.

b) Prouver aue ' *Deux matrices semblables A et B ont même déterminant*'.

c) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Prouver que $A \nsim B$.

<u>Ex 19</u> : Montrer le Théorème suivant :

Théorème : Soient A et B deux matrices semblables *i.e*

$$A = P.B.P^{-1}$$

alors, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = PB^kP^{-1}$$

Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $T_p(A) = P^{-1}AP$, Prouver que :

$$\begin{aligned}
1)\ T_P(I_n) &= I_n,\ T_P(A+B) = T_P(A) + T_P(B) \\
2)\ T_P(AB) &= T_P(A).T_P(B),\ T_P(rA) = rT_P(A) \\
3)\ T_P(A^k) &= (T_P(A))^k,\ T_P(A^{-1}) = \frac{1}{T_P(A)} \\
4)\ T_P(e^A) &= e^{T_P(A)},\ T_Q(T_P(A)) = T_{PQ}(A)
\end{aligned}$$

<u>Ex 20</u> : Montrer le théorème suivant :

Théorème : La relation "∼ similarité " est une relation d'équivalence.

<u>Ex 21</u> : On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $A \nsim B$; *i.e* A et B ne sont pas semblables.

---

5) Matrices diagonalisables
Diagonalisation d'une matrice

<u>Ex 22</u> : Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\boxed{A \text{ est diagonalosable } \Longleftrightarrow A^t \text{ est diagonalisable}}$$

<u>Ex 23</u> : Soit A une matrice diagonalisable. Supposons que pour toute valeur propre λ de A on a $\lambda^2 = 2\lambda$. Prouver que

$$A^2 = 2A$$

Soit A une matrice diagonalisable, Montrer que

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n = \prod_{\lambda_i \in Sp(A)} \lambda_i$$

<u>Ex 24</u> : Soit $A = P.DP^{-1}$ une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont données par la matrice

$$D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$$

Calculer $f(A)$ Pour toute fonction $f(x)$ définie aux points $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$.

Vérifier que

$$\begin{cases} A^k = PD^kP^{-1} \; ; \; f(x) = x^k \\ \sqrt{A} = P\sqrt{D}P^{-1} \; ; \; f(x) = \sqrt{x} \\ \cos A = P(\cos D)P^{-1} \; ; \; f(x) = \cos x \\ e^A = Pe^DP^{-1}, \; \log A = P(\log D)P^{-1} \quad ; \; f(x) = e^x \\ .... \end{cases}$$

<u>Ex 25</u> : Déterminer le réel a pour que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

Soit diagonalisable.

<u>Ex 26</u> : Étudier la diagonalisation des matrices suivantes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Rép : A_1) Oui, A_2) Non

<u>Ex 27</u> : Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est **diagonalizable**

<u>Rép</u> : *Il y a trois valeurs propres distinctes : 0, 2 et 4*

<u>Ex 28</u> : Vérifier que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable. **Rép** : *sp*(*A*) = 1,2,3

Ex 29 : Soit *f* un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel *E*. Montrer que

$$E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$$

Ex 30 : Soit *f* un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel réel vérifiant $f^k = id_E$ pour un certain entier naturel *k*. Montrer que :

$$f^2 = id_E$$

Soit *M* une matrice carrée complexe vérifiant $M^k = I$ pour un certain entier naturel *k*. Montrer que *M* est diagonalisable.

Ex 31 : Montrer que

$$\begin{pmatrix} -13 & -8 & -4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 24 & 16 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ex 32 : Étudier la **diagonalisabilité** de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$Rép\ p_A(x) = x(1-x)(x-4)$

Ex 33 : Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres, puis, En déduire que la matrice *M* est **diagonalisable** dans $\mathbb{C}$.

---

6) Exponentielle de matrice, *cos*(*A*), *sin*(*A*), *log*(*matrice*)

Ex 34 : Si (λ,*x*) est un élément propre de *A*, alors (*exp*(λ),*x*) est un élément propre de *exp*(*A*).
Soit

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculer B^2, B^3. En déduire e^B .

Rép

$$\begin{aligned} e^B &= I+B+\frac{B^2}{2!}+0 \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \frac{13}{2} & \frac{9}{2} & \frac{21}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

<u>Ex 35</u> : Soit *A* une matrice carrée possède *n* valeurs propres distinctes. Posons

$$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Démontrer que

$$e^D=\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Soit la matrice *P* définie par

$$P=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \ ; \ Ax_i=\lambda_i x_i \ \forall 1\leq i\leq n$$

Prouver que $A.P = P.D$

En déduire que

$$\begin{cases} A^k=P.D^k.P^{-1}; k\in\mathbb{N} \\ A^{-1}=P.D^{-1}.P^{-1} \quad \text{et} \\ e^A=P.e^D.P^{-1} \end{cases}$$

<u>Ex 36</u> : Vérifier que $\forall\ A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall\ t\in\mathbb{R},$ on a :

$$A.e^{At}=e^{At}.A$$

On considère la matrice

$$A_\alpha(n)=\begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

Prouver que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left[A_\alpha(n)\right]^n=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

<u>Ex 37</u> : Si *M* est une matrice réelle d'ordre *n*, on note par *cosM* la partie réelle de e^{iM} et *sinM* sa partie imaginaire.
Montrer que *cosM* et *sinM* commutent et que

$$(\cos M)^2+(\sin M)^2=I_n$$

Soit θ un réel, calculer

$$\cos\begin{pmatrix}\theta & 1\\ 0 & \theta\end{pmatrix} \text{ et } \sin\begin{pmatrix}\theta & 1\\ 0 & \theta\end{pmatrix}$$

<u>Ex 38</u> : On considère les deux matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Calculer : e^A, e^B En déduire e^F où

$$F=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

<u>Ex 39</u> : Soit

$$A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$$

Calculer *exp(A)*.

<u>Ex 40</u> : Prouver que

$$\det\left(e^A\right)=e^{trace(A)}$$

---

7) Sur le calcul de A puissance k (A^k)

<u>Ex 41</u> : Soient les matrices suivantes dont les termes sont des nombres réels

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ et } T=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

a- Montrer que $T^3=0$
b- Montrer que $M=I+T$; *I* est la matrice unité d'ordre *3*

c- On en déduit alors la forme explicite de M^n pour tout entier *n*.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & c \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; c \neq 0$$

Calculer A^k.

Ex 42 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

En utilisant deux méthodes. Prouver que.

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} ; k \geq 1$$

Ex 43 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}. \text{ Calculer } A^k$$

Ex 44 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Prouver que

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 3^n & 1 - 3^n \\ 1 - 3^n & 1 + 3^n \end{pmatrix} \; ; n \geq 0$$

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démontrer que

$$A^n = \frac{3^n - 1}{2} A + \frac{3 - 3^n}{2} I_2 \; ; n \geq 0$$

Ex 45 : On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes u_0, v_0 et w_0 et les relations de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n - 2w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + 2v_n - 3w_n \end{cases}$$

Écrire ces relations sous la forme :

$$U_{n+1} = M.U_n$$
où *M* est une matrice que l'on déterminera, et U_n une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^3$
Calculer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n et de u_0, v_0 et w_0.

<u>Ex 46</u> : Montrer que les matrices strictement triangulaires sont nilpotentes.

8) Systèmes de suites avec les relations de récurrence

<u>Ex 47</u> : Soit le système de suites (x_n), (y_n) défini par

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n + c_1 \\ y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n + c_2 \end{array}\right. ;\ (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

Écrire (*S*) sous la forme matricielle $X_{n+1} = AX_n + B$.
Prouver que

$$X_n = A^n X_0 + \left(A^{n-1} + A^{n-2} + ... + A + I\right) B$$

Résoudre le système de suites avec les relations de récurrence suivante

$$\left\{\begin{array}{c} x_{n+1} = 2x_n - y_n - 1 \\ y_{n+1} = -x_n + 2y_n + 2 \end{array}\right. ;\ (x_0, y_0) = (0, -1)$$

Rép :

$$\left\{\begin{array}{l} x_n = \dfrac{2n - 3^n + 1}{4} \\ y_n = \dfrac{2n + 3^n - 5}{4} \end{array}\right. ;\ n \geq 0$$

<u>Ex 48</u> : Soit $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Si $(A - I_2)^{-1}$ existe, démontrer que

$$A^{n-1} + A^{n-2} + ... + A + I_2 = (A^n - I_2)(A - I_2)^{-1}$$

<u>Ex 49</u> : Soit la suite (x_n) définie par

$$(*)\quad x_{n+k} = a_0x_n + a_1x_{n+1} + ... + a_{k-1}x_{n+k-1}$$

Écrire (*) sous la forme matricielle

$$V_n = A^n V_0 \ ;\ A \in \mathbb{M}_k(\mathbb{R})$$

Montrer que

$$p_A(x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} - ... - a_1x - a_0$$

<u>Ex 50</u> : On définit la suite (u_n) par :

$$\left\{\begin{array}{c} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_1 = u_2 = 1 \end{array}\right. \quad ... (*)$$

Écrire (*) sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} ; M \in M_2(\mathbb{R})$$

Montrer que

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En déduire que

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}; n \in \mathbb{N}^*$$

9) Systèmes différentiels et matrices diagonalisables

Ex 51 : Donner la forme générale d'un système linéaire homogène d'équations différentielles du premier ordre.

Ex 52 : Supposons que *A* est diagonalisable. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \Longleftrightarrow u' = Au$$

Étudier la diagonalisabilité de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer A^k pour tout entier *k* .
Résoudre le système différentiel

$$X' = A.X$$

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = z(t) \\ z'(t) = w(t) \\ w'(t) = x(t) \end{cases}$$

---

10) Théorème de **Cayley-Hamilton**.

Ex 53 : Démontrer le théorème de Cayley-Hamilton suivante :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}) : p_A(A) = 0.$$

Est-ce-que la démonstration suivante du théorème de Cayley-Hamilton est vraie ?

$$p_A(x) = \det(A - xI) \Longrightarrow p_A(A) = \det(A - AI) = \det(0) = 0.$$

Ex 54 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}; a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$$

En utilisant le théorème de **Cayley-Hamilton**. Calculer l'inverse de la matrice *A*

rép : $p_A(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

Ex 55 : Trouver le polynôme caractéristique de la matrice

$$A=\begin{pmatrix}4&1&1&1\\1&4&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&4\end{pmatrix}$$

En déduire le polynôme minimal. rép : $p_A(x)=(3-x)^3(7-x)$, $m_A(x)=(3-x)(7-x)$

Prouver que la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\dots&1\\1&1&\dots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\dots&1\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{R})$$

Est diagonalisable.

---

11) Systèmes différentiels et matrices non diagonalisables

Le calcule de e^{tA} .

Ex 56 : Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases}x'=x+y+z\\y'=y+z\\z'=z\end{cases}$$

Ex 57 : Résoudre les systèmes différentiels

$$1)\quad\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ ;\ sp(A)=\{1,0,4\}$$

$$2)\quad\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-6&7\\1&1&-1\\-4&-6&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ ;\ sp(A)=\{1,1,4\}$$

$$3)\quad\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ sp(A)=\{1,1,1\}$$

12) Polynôme minimal

Ex 58 : Soit la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Calculer le polynôme minimal. Qu'en déduire ?

$$rép : m_A(x) = x(x-2)$$

Calculer le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Qu'en déduire ?.

<u>Ex 59</u> : Calculer le polynôme minimal des matrices suivantes

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ 2)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ 4)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

13) Matrices Trigonalisables

<u>Ex 60</u> : Théorème : Toute matrice à coefficients complexes est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$

Corollaire : Pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ on a :

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n = \prod_{\lambda_i \in Sp(A)} \lambda_i$$

Où $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ sont des valeurs propres de *A*.

<u>Ex 61</u> : Trigonaliser les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Ex 62</u> : Considérons la matrice *M* définie par

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Quel est le polynôme minimal de *M*.

Montrer que pour tout $n \in$ N, il existe deux réels α_n et β_n tels que l'on ait

$$M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3$$

Calculer α_n et β_n en fonction de *n*. On en déduit alors la forme explicite de M^n pour tout entier *n*.

<u>Ex 63</u> : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Trouver les valeurs propres de *A*, puis ses vecteurs propres
Trouver le polynôme minimal de *A* : $m_A(x)$, et étudier la diagonalisation de *A*
En utilisant le théorème de **Cayley-Hamilton**. Calculer A^{-1} en fonction de I_3, *A* et A^2
Trouver une matrice inversible *P* telle que :

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = B$$

Écrire *B* sous la forme $D + X$, où *D* diagonale et $X^2 = 0$, puis vérifier que : $DX = XD$.
En déduire le calcul de B^n en fonction de *n*

<u>Ex 64</u> : a) Montrer que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

En utilisant le théorème de **Cayley-Hamilton**. Donner l'expression de B^{-1} en fonction de *I*, *B* et B^2.

b) Soit la matrice :

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \quad ; a, b \in \mathbb{R}$$

- Déterminer les valeurs *a*, *b* pour lesquelles la matrice donnée soit diagonalisable.
- Pour $b = 0$, calculer le polynôme minimal. Qu'en déduire ?.
- Montrer que

$$M_{1,0} \sim \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = T$$

- Calculer T^n.

Indication : Écrire T sous la forme : $T = D + X$ où D est diagonale et X nilpotente $(i.e\ X^k = 0)$.

- Calculer $M_{1,0}^n$.

Remarque 1. Comprendre la question = 1/(2-ε) de la réponse, où ε≃0 positif.

Bellaouar Djamel

GOOD LUCK !

Université 08 Mai 45 Guelma
Département de Mathématiques
Algèbre 3 **Examen final** **2011 - 2012**

Ex 01 (2pts) : Soit la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Trouver l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles A_α est diagonalisable.

Ex 02 (4pts) : Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice possède une seule valeur propre λ. Calculer e^{At} .
Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = y + z \\ z' = z \end{cases}$$

Ex 03 (2pts)
(i) Trouver la relation entre les éléments propre de *A* et ceux de $P^{-1}AP$.
(ii) Montrer que les matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. (Utiliser 2 méthodes)
(iii) Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable avec *sp*(*A*) = {-*1*,*1*}. Prouver que $A^{-1} = A$.

Ex 04 (6pts)
Démontrer le théorème de Cayley-Hamilton suivante :

$$\forall\ A \in M_n(\mathbb{R}) : p_A(A) = 0.$$

Est-ce-que la démonstration suivante du théorème de Cayley-Hamilton est vraie ?

$$p_A(x) = \det(A - xI) \Longrightarrow p_A(A) = \det(A - AI) = \det(0) = 0.$$

Ex 05 (3pts) : Calculer le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Qu'on déduire ?

Ex 06 (3pts) : Soit le déterminant

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrer que $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$. Calculer D_n en fonction de *n*.

Good luck

Université 08 Mai 45 Guelma
Département de Mathématiques
Algèbre 3 *Examen de Rattrapage* *13 juin 2012*

Ex 01 (5+2 pts) : *a*) *Questions de cours*
Résoudre le système différentiel linéaire homogène à coefficient constants

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

où a_{ij} sont des constantes complexes, et où les fonctions x_i sont des fonctions dérivables inconnues à valeurs complexes.
b) Résoudre le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ex 02 (3 pts) : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{-\pi}{2} \end{pmatrix}$$

Calculer $\cos^2 A + \sin^2 A$.

Ex 03 (3 pts) : *Montrer le résultat suivant*
Soit A une matrice diagonalisable, alors il existe une base $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formée par n vecteurs propres de A.

Ex 04 (2+2 pts) : Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice complexe carrée d'ordré n telle que pour tous $1 \leq i,j \leq n$, on ait

$$|a_{ij}| < \frac{1}{n}$$

Montrer que la suite de matrices $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$B_m = I_n + A + A^2 + \dots + A^m \quad \text{converge.}$$

Montrer que $I_n - A$ est inversible d'inverse la matrice $\lim (B_m)$.

Ex 05 (3 pts) : Soit le déterminant

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrer que $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$. Calculer D_n en fonction de n.

Good luck

Université 08 Mai 45 Guelma
Département de Mathématiques

Algèbre III — Micro-interrogation — 10 janvier 2013 — 1 h +20mn

Ex 01 (5pts): Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2, puis, montrer que $e^A = I_3 + A(e-1)$.
Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

Ex 02 (3pts): Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Est-ce-que

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}\right) = -e^{-At}.A \text{ ou } -A.e^{-At}$$?

Si A est inversible, Montrer que

$$\int_0^{\infty} e^{-At} dt = A^{-1}$$

Ex 03 (2pts): Soient $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices diagonalisables. Supposons que $AB = BA$ et soit $P \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$ (*i.e* P inversible) telle que

$$\begin{cases} P^{-1}AP = D_A = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} \text{ et} \\ P^{-1}BP = D_B = diag\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n\} \end{cases}$$

Montrer que

$$e^{A+B} = e^A.e^B$$

Ex 04 (4pts): On considère la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & 1 \\ 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \alpha \in \mathbb{R}$$

Trouver l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles A_α est diagonalisable.

Ex 05 (3pts): Soit

$$A = \begin{pmatrix} I_3 & C \\ 0 & C \end{pmatrix}; C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Prouver que

$$A^k = \begin{pmatrix} I_3 & kC \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

En déduire le calcul de A^{300}.

Ex 06 (3pts): Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **nilpotente** d'indice $k = 2$; *i.e* $A^2 = 0$. En utilisant deux méthodes Montrer que pour tout entier m,

$$A(I + A)^m = A.$$

Good luck

Ex 01 (2pts): Donner pour chacune des matrices suivantes le polynôme caractéristique et le polynôme minimal. Ne faites pas de grands calculs.

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \ a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}.$$

Ex 02 (8pts): **I)** Définissez les notions suivantes :

1) *Norme et espace vectoriel normé.*
2) *Produit scalaire.*

II) Une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *orthogonale*, si et seulement, si

$$A^t A = A A^t = I_n$$

1) Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale, prouver que $det(A) = \pm 1$.

2) Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est orthogonale.

(ii) $\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \|Ax\| = \|x\|$

(iii) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n,\ \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$

3) On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout θ réel, prouver que

$$e^{\theta A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Qu'en déduire ?

Ex 03 (7pts):

Considérons la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Quel est le polynôme minimal de M.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels α_n et β_n tels que l'on ait

$$M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3$$

3) Calculer α_n et β_n en fonction de n. On en déduit alors la forme explicite de M^n pour tout entier n.

4) Résoudre le système différentiel :

$$X' = M.X$$

Ex 04 (3pts):

Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, Prouver que

a) Si $det(A) = 0 \Rightarrow 0$ est une valeur propre de A.

b) Si $A^2 = A \Rightarrow A$ est diagonalisable.

c) Si $m_A(x) = (x-a)(x-b)\,;\, a \neq b.$, alors, A^n s'écrit en fonction de A et I.

Good luck

Ex 01 (6pts) : Questions de cours
(i) Démontrer le théorème suivant :
Toute matrice à coefficients complexes est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.
(ii) Définissez les notions suivantes :

(a) Sur le calcul de A^k; $k \geq 0$.
(b) Exponentielle de matrice, cos(A),..., f(matrice).
(c) Systèmes de suites avec les relations de récurrence.
(d) Systèmes différentiels et matrices diagonalisables.
(e) Systèmes différentiels et matrices non diagonalisables.
(f) Polynôme minimal.

Ex 02 (8pts) : Partie I: Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice **diagonalisable**. Supposons que les éléments propres de A sont :

$$\left(\lambda_1, (a,b)_{v_1}\right) \text{ et } \left(\lambda_2, (c,d)_{v_2}\right)$$

Posons

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 \; ; G_1, G_2 \in M_2(\mathbb{R})$$

Avec G_1, G_2 sont définies par :

$$G_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & c' \end{pmatrix} \text{ et } G_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b' & d' \end{pmatrix}$$

Partie II : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice **diagonalisable**. Supposons que $sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \; ; k \leq n\}$.
(II.1) Vérifier que

$$\cos^2 A + \sin^2 A = I_n \qquad (*)$$

(II.2) Pour toute fonction f définie aux points $(\lambda_i)_{1\leq i\leq k}$. Montrer le résultat suivant

$$f(A) = \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) G_i \; ; (G_i)_{1\leq i\leq k} \in M_n(\mathbb{R}), \; k \leq n$$

(II.3) En utilisant la formule ($*$). Vérifier que :

$$\sum_{i=1}^{k} G_i = I_n$$

(II.4) Si $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_k|$. Pour tout entier positif m, posons $f(x) = x^m$, prouver que

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} \left(\frac{A}{\lambda_1}\right)^m = G_1.$$

(II.5) Établir que :

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} \frac{\|A^m\|^{\frac{1}{m}}}{|\lambda_1|} = 1.$$

Ex 03 (6pts) : (a) Trigonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n.
(b) En utilisant la définition de exponentielle (matrice) et la formule de binôme. Montrer que

Good luck

Université 08 Mai 45 Guelma

Algèbre 3 | Examen de Rattrapage | 2012 – 2013 | 2 h

Ex 01 (7pts) :

Est-ce-que la démonstration suivante du théorème de Cayley-Hamilton est vraie ?

$$p_A(x) = \det(A - xI) \Longrightarrow p_A(A) = \det(A - AI) = \det(0) = 0.$$

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En utilisant le théorème de **Cayley-Hamilton**. Calculer l'inverse de la matrice *A*.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que sp(*A*) = $\{\lambda\}$. Montrer que :

$$e^A = e^\lambda \left[I_n + (A - \lambda I_n) + \ldots + \frac{(A - \lambda I_n)^{n-1}}{(n-1)!} \right]$$

Résoudre le système différentiel :

$$X' = A.X$$

Ex 02 (6pts) : On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_1 = u_2 = 1 \end{cases} \ldots (*)$$

Écrire (*) sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = M. \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} ; M \in M_2(\mathbb{R})$$

Montrer que

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} ; n \in \mathbb{N}^*$$

Ex 03 (7pts) : Si *M* et *N* des matrices carrées qui commutent (C'est-à-dire qui vérifient *M.N* = *N.M*). Prouver que

$$e^{M+N} = e^M.e^N = e^N.e^M$$

En déduire que

$$\left(e^M\right)^{-1} = e^{-M}$$

Soient *u* et *v* des Endomorphismes d'un espace vectoriel *E*. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

Soit $p_n \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme de degré *n*. Démontrer que :

$$u\left[\ker p_n(u)\right] \subset \ker p_n(u)$$

Good luck