

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



Thèse de Doctorat

Présentée à l'Université 8 Mai 1945 – Guelma
Faculté des Sciences et de la technologie

Département de : **Génie Mécanique**
Spécialité : **Construction Mécanique**

Par : **BOUAKBA Mustapha**

**Sujet de Thèse : Etude du comportement mécanique des
matériaux cellulaires Voronoï.**

JURY

Président:	Pr. N. OUELA	Université 08 Mai 1945 de Guelma
Encadreur:	Pr. A. BEAZI	Université 08 Mai 1945 de Guelma
Examineur:	Pr. B. Bachir REDJEL	Université de Annaba
	Pr. Z. SEREIR	Université D'Oran
	Pr. B. NECIB	Université de Constantine

2012

REMERCIEMENTS

Un grand merci au Professeur Abderrezak BEZAZI, mon Directeur de thèse. Tu m'as fait confiance en me proposant ce sujet passionnant. Merci pour tes conseils et tes encouragements.

Je remercie les membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'examiner cette thèse et pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail :

Monsieur Nouredine OUELA, Professeur au département de Génie Mécanique, 08 Mai 1945 de Guelma, Président du jury.

Monsieur Bachir REDJEL, Professeur au département de Génie Mécanique, Université d'Annaba, Examineur.

Monsieur Zouaoui SEREIR, Professeur au département de Génie Maritime, Université d'Oran, Examineur.

Monsieur Brahim NECIB, Professeur au département de Génie Mécanique, Université de Constantine, Examineur.

Je tiens à remercier le Professeur Fabrizio SCARPA de l'université de Bristol d'avoir contribué à la réalisation des Voronoi à son laboratoire et pour tout ces conseils précieux.

Que toutes les personnes qui ont participé au bon déroulement de ce travail trouvent mes vifs remerciements.

Résumé :

Dans cette thèse, une nouvelle structure cellulaire Voronoï hexagonale est proposée, dont les topologies et les propriétés mécaniques sont diverses. Ces structures ont la particularité d'avoir un coefficient de Poisson pouvant devenir négatif (comportement auxétique) ce qui est aussi une nouveauté pour ces cellules Voronoï. Un modèle mathématique de ses structures est créé avec un nouveau algorithme programmé sur MATLAB, permettant la génération de ses structures. Une légère modification de ce modèle rend la cellule Voronoï proposée réentrante. Ces structures géométriques obtenues sont exportées vers ANSYS ou nous effectuons des simulations numériques des essais de traction, dont les résultats sont traités par la méthode d'homogénéisation pour obtenir des propriétés mécaniques équivalentes à celui d'un matériau isotrope (milieu continu classique). Les résultats obtenus montrent que la cellule Voronoï convexe proposée est plus rigide de 60 % par rapport à la cellule Voronoï classique connue dans la littérature avec des mécanismes de déformation de flexion et d'étirement des ligaments. Dans la partie expérimentale, ces nouvelles structures cellulaires sont fabriquées par la technique de prototypage (impression 3D). Ensuite, ces structures sont testées en traction monotone, les champs de déplacement et de déformation résultants sont extraits par un extensomètre à vidéo et ensuite traités par la technique de corrélation d'images en utilisant le logiciel **Istra 4D**. Les résultats obtenus expérimentalement sont en bonne concordance avec ceux obtenus numériquement.

Abstract

In this thesis, a new cellular structure Voronoï hexagonal is proposed, whose topologies and mechanical properties are varied. These structures have the possibility to be Auxetic (negative Poisson's ratio) what is also an innovation for these Voronoi cells. A mathematical model of its structures east creates with a new algorithm implementing it using MATLAB software, allowing the generation of its structures. A simple modification of this model returns the Voronoï cell proposed re-entrante. These geometrical structures obtained are exported to ANSYS were a digital simulations are carried out for tensile tests simulations, whose results are treated by homogenization method in order to obtain equivalent mechanical properties to that of an isotropic material. The results obtained show that the new Voronoï cell proposed is more rigid of 60% compared to the traditional one known in the literature with mechanisms of deformation of flexural and stretching of the ligaments. In the experimental part, these cellular structures are manufactured by the technique of prototyping (3D printer). Then, these structures are tested in monotonous tensile, the fields of displacement and strain resulting are extracted by a video extensometer and then treated by the images correlation technique using the **Istra 4D** software. The experimental results obtained are in good agreement with those obtained numerically by FE.

والخواص طبولوجيا الذي، هيكل سداسية Voronoi خلية جديدا ويقترح، الأطروحة هذه في سلبية تصبح أن يمكن بواسطة 1 نسبة وجود عن تتميز الهياكل هذه. مختلف الميكانيكية لهيكلها رياضي نموذج إنشاء يتم. Voronoi الخلايا لهذه جديد أيضا هو الذي (الحجم منمي سلوك) تعديل وهناك. هيكلها للجيل والسماح، MATLAB برنامج باستخدام، تنفيذها خوارزمية مع الهياكل هذه تصدير ويتم. Voronoi reentrant الخلية يجعل المقترح النموذج لهذا طفيف النتائج معالجة تتم، الشد للاختبار العددية المحاكاة نقوم أو ANSYS على حصلت الهندسية وسط) الخواص مادة من ذلك يعادل الميكانيكية الخواص على وللحص التجانس لطريقة وفقا مقارنة 60% هو المقترح خلية أن إلى تشير عليها حصل التي النتائج. (الكلاسيكية استمرار من وتمتد الانحناء تشوه آليات مع الأدب في المعروفة الكلاسيكية Voronoi الخلية تشديد مع 3D) النماذج تقنية بواسطة الخلوية الهياكل هذه ملفقة هي، التجريبي الجزء في. الارتباط الناتجة والتشويه التشريد من رتيب توتر مجالات في الهياكل هذه اختبار ويتم، ثم. (الطباعة باستخدام ارتباط تقنية صورة قبل من ذلك بعد ومعالجتها الفيديو التمديد من استخراج يتم باستخدام 4D Istra البرمجيات.

Tables de matières

Introduction générale	6
Chapitre I Généralité sur les matériaux cellulaires	8
I.1 Introduction	8
I.2 Propriétés Mécaniques	11
I.3 Déformations des nids d'abeilles	14
I.4. Déformation des mousses	19
I.5 Quelques propriétés et application	21
I.5.1 Propriétés électriques	22
I.5.2 Isolation thermique	23
I.5.3 Absorption acoustique	25
I.5.4 Emballages	26
I.6. Les structure nids d'abeilles Voronoï	28
I.6.1 <i>Diagramme de Voronoï : définitions et algorithmes</i>	28
I.6.2 <i>La cellule Voronoï obtenue par la technique de perturbation</i>	30
I.7. Les structures Auxétiques	31
I.7.1 <i>Les structures hexagonales ré-entrent</i>	34
I.7.2 <i>Les structure hexachiral</i>	35
I.8. Position du problème et techniques adoptées	36
I.9. Références	38
Homogénéisation analytique et numérique des nids d'abeilles	41
II.1. Introduction	41
II.2. Propriétés mécaniques de l'âme en nid d'abeille	41
II.3. Géométrie et notations	43
II.4. Modélisations Analytiques	44
II.4.1. <i>Modèle de Gibson et Ashby</i>	44
II.4.1.1. Propriétés dans le plan(x, y)	44

II.4.1.2. Propriétés hors du plan	47
II.5 Approche numérique	49
II.5.1 Le volume élémentaire représentatif V.E.R	49
II.5.2. Organigramme d'homogénéisation numérique	50
II.5.3. Conditions aux limites et méthodes de calcul par éléments finis	51
II.6. Résultats et discussion	54
II.6.1. Module d'élasticité E_1 et E_2	54
II.6.3. Module d'élasticité E_3	57
II.6.4. Modules de cisaillement G_{12}	58
II.7. Conclusion	63
II.8. Références	65

CHIPTRE III Propriétés mécaniques dans le plan des nouvelles cellules convexe et Auxétique (Voronoi) 66

III.1 Introduction	66
III.2. Construction de la nouvelle cellule hexagonale irrégulière	66
III.2.1 La topologie convexe	66
III.2.2 La topologie auxétique	71
III.3 Approche numérique	72
III.3.1 Conditions aux limites	73
III.3.1.1 Traction uni-axial	73
III.3.1.2 Test de cisaillement pur d'une structure cellulaire	75
III.4 Densité relative de la nouvelle cellule Voronoi proposée	76
III.5 Résultats et discussions	78
III.5.1 Topologie convexe	78
III.5.2 Topologie des nids d'abeilles réentrante proposée	82
III.5.3 Mécanismes de déformation	84
III.6 Effet de Forme (topologie)	85
III.7. Conclusion	89

III. Références	91
Chapitre IV Investigation expérimentale et validation numérique	93
IV.1. Introduction	93
IV.2. Technique expérimentale	93
IV.2.1 Préparation des échantillons	93
IV.2.2 Equipement expérimental	97
IV.2.3 Post traitement des images	97
IV.3. Investigation Numérique	98
IV.4. Résultats et discussion	99
IV.5 Conclusion	116
IV.6 Références	118
Conclusion et perspectives	120
Annexe I	121
Annexe II	127

Introduction générale

Les structures en nids d'abeille hexagonales sont très utilisées en raison de leurs multiples avantages dont le très bon rapport rigidité/poids, des mécanismes d'absorption de l'énergie utile pour l'emballage et la protection, ainsi qu'une grande résistance par rapport à leurs homologues pleins. Elles sont utilisées industriellement (panneaux, pylônes, matériaux de remplissage) mais sont aussi pour des structures de haute performances tels que les ailes d'avions civil et militaire. Ces structures sont aussi trouvées dans la nature sous la forme de matériaux cellulaires macro et micro (mousses, bois, os trabéculaires, membranes biologiques, ailes d'insecte, cactus etc). Le développement de nouveaux procédés de fabrication, liés au prototypage (découpage laser, impression 3D ...etc) permet d'obtenir des structures cellulaires avec des macrostructures quasi quelconques. La fin des années 1990 a vu le développement de techniques d'analyse des structures en nids d'abeille Voronoï ayant des propriétés peu communes. On s'attend à ce que ces nouveaux matériaux aient des comportements mécaniques peu habituels et des propriétés encore supérieures dans certains cas de chargement, tels que le coefficient de concentration de contrainte réduite, une tolérance aux perforations ou des capacités accrues d'absorption de chocs. L'étude mécanique des structures cellulaires Voronoï est en pleine croissance.

L'idée de départ de ce travail de thèse est de proposer une nouvelle structure cellulaire Voronoï hexagonale ayant différentes topologies et de propriétés mécaniques diverses. La méthode d'homogénéisation du comportement mécanique sur ces nouvelles structures cellulaires Voronoï est utilisée pour l'obtention d'un milieu continu classique équivalent avec les propriétés mécaniques associées (dans le domaine élastique) tels que le module élastique et coefficient de Poisson.

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous passons en revue l'état de l'art des matériaux cellulaires qui seront l'objet de nos simulations par la suite. Aussi, nous rappelons les caractéristiques générales des structures cellulaires.

Le deuxième chapitre est dédié à l'étude des structures cellulaires régulières (l'hexagone, carré et le triangle) en fonction de la densité relative en déduisant les propriétés équivalentes par l'homogénéisation numérique afin de comparer avec le modèle analytique de Gibson et Ashby.

L'objectif du troisième chapitre est de présenter la méthode que nous avons mise au point pour créer la nouvelle cellule Voronoï convexe et auxétique par des topologies diverses à celle de la littérature. Le comportement mécanique de la cellule irrégulière proposée est obtenu par l'homogénéisation numérique en utilisant le code de calcul des structures ANSYS, dont les ligaments de la cellule proposée sont considérés comme des poutres de Timochenko.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude expérimentale de la nouvelle cellule Voronoï proposée. Trois topologies ont été fabriquées par la technique de prototypage (impression 3D) et testées en traction à l'Université de Bristol UK. La technique de corrélation d'images permet d'identifier le comportement sous chargement quasi-statique. Enfin, les résultats expérimentaux sont présentés et sont confrontés aux résultats de la simulation numérique afin de déduire et d'interpréter les différentes tendances.

Chapitre I

Généralité sur les matériaux cellulaires

I.1 Introduction

Les solides cellulaires sont des matériaux dont la porosité excède typiquement 70 % du volume. On peut décrire de tels solides comme un assemblage de cellules vides, chacune étant entourée par des arêtes ou des parois solides. Leur importance résulte surtout de leur faible densité mais aussi d'autres propriétés physiques intéressantes. Les matériaux de ce type sont très répandus dans la nature : os, bois, liège, éponge. Généralement, leur fonction biologique requiert une résistance mécanique. Les matériaux cellulaires artificiels sont d'importance croissante et comprennent pratiquement toutes les catégories de matériaux, tels que les polymères, les céramiques, les métaux, les semi-conducteurs, et même les matériaux composites.

La très forte porosité de ces matériaux modifie leurs propriétés physiques de manière parfois inattendue, ce qui donne lieu à de nombreuses applications émergentes. Le but de ce chapitre est d'introduire quelques-unes de ces propriétés ainsi que les utilisations qui en résultent

Il est évident que certains paramètres physiques ne vont pas varier entre un matériau massif et son correspondant à structure cellulaire. Prenons par exemple la structure cristalline, le coefficient de dilatation thermique ou la température de fusion : ils sont totalement indépendants de la porosité. D'autres propriétés physiques, telles que la chaleur massique ou la constante diélectrique, sont des fonctions typiquement linéaires de la densité (tant que les effets de surface restent négligeables). Enfin, il existe certaines

propriétés qui ne dépendent pas seulement du volume total des pores, mais aussi du type de porosité, et de ce fait de la microarchitecture du solide cellulaire. De telles propriétés comprennent la résistance mécanique, la conductivité thermique et électrique par exemple.

La relation entre la porosité et les propriétés physiques a été discutée, entre autres, par [HIL-82], [CHA-91], [BON-08], en mettant l'accent sur les matériaux céramiques. La figure I.1 montre comment certaines propriétés physiques dépendent de la porosité P , définie comme le volume des pores relatif au volume total de l'échantillon. Cette dépendance est typiquement linéaire pour les faibles porosités, jusqu'à une valeur critique P_c de la porosité. Ceci est valable par exemple pour le module de Young ou la conductivité thermique. La figure I.2 indique la gamme des valeurs possibles pour quelques propriétés physiques des matériaux.

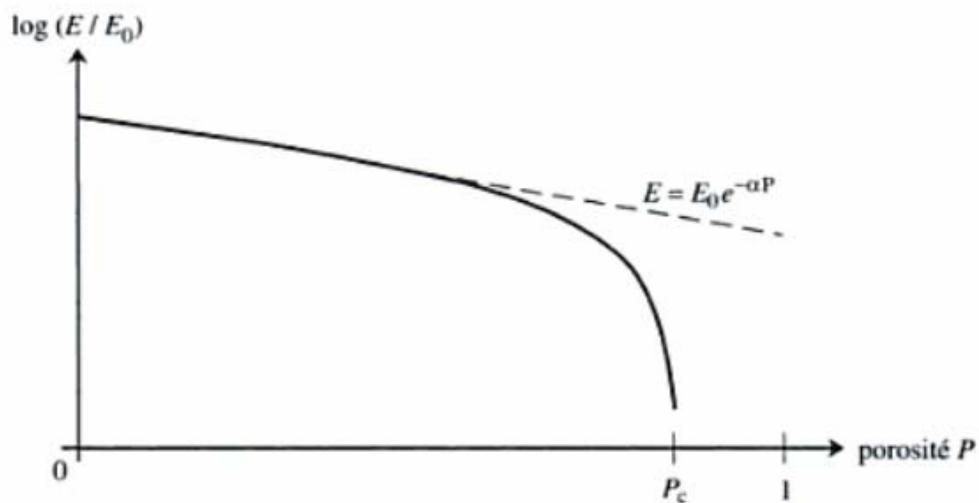


Figure I.1. Variation avec la porosité P d'une propriété physique (Module de Young) [JAN-01].

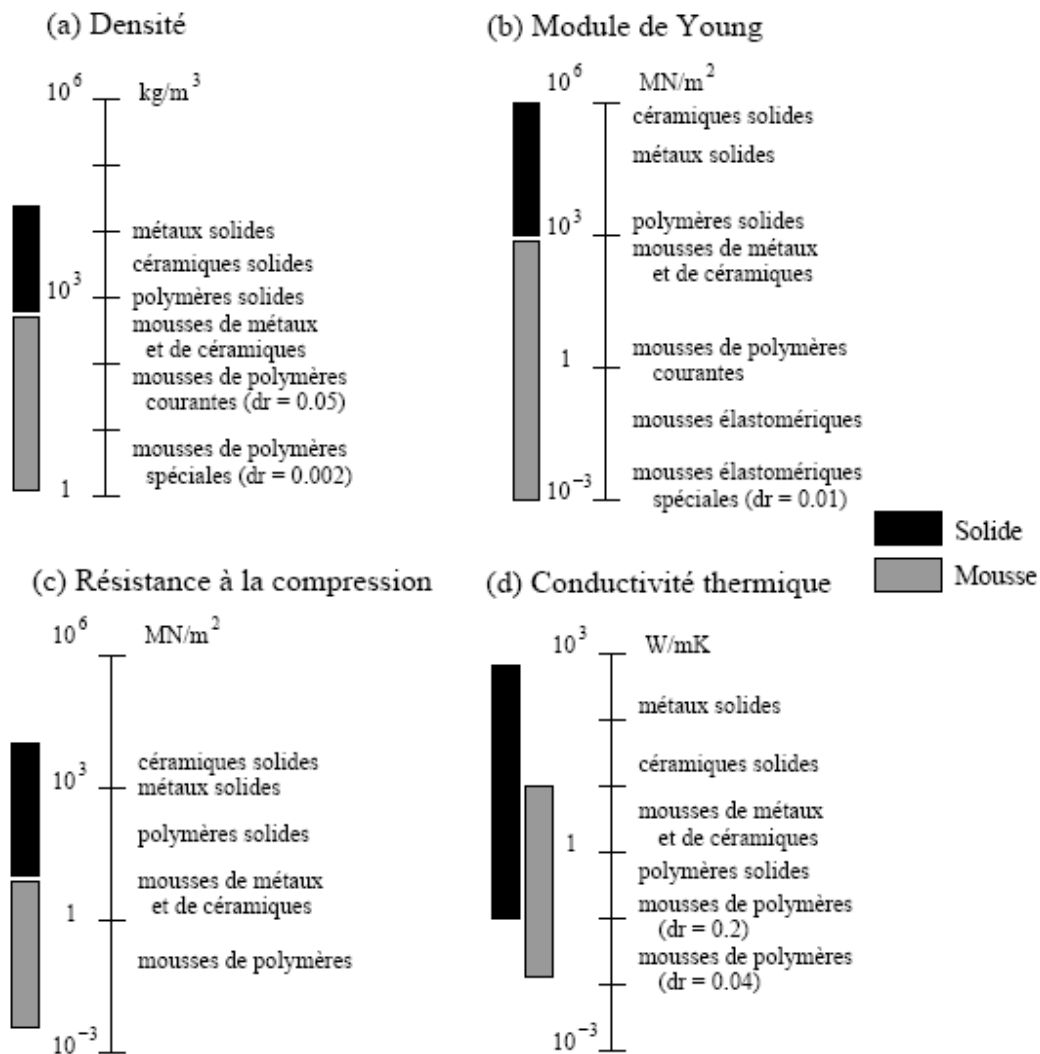


Figure I.2. Ordre de grandeur de quelques propriétés de matériaux cellulaires (mousse) et denses (BULK) à base de polymères, de métaux ou de céramiques (d'après [GIB-97]).

L'intervalle dans lequel ces propriétés peuvent varier est élargi de plusieurs ordres de grandeurs si l'on tient compte des matériaux cellulaires. Ceci est vrai par exemple pour la densité, la conductivité ou le module de Young. Enfin, le tableau I.1 décrit les types de matériaux obtenus par la dispersion de gaz, de liquide ou de solide entre eux. Ainsi, les matériaux cellulaires apparaissent comme étant le résultat de la dispersion de gaz dans un solide. La production de solides cellulaires peut passer par des intermédiaires de structure différente. Par exemple, un aérogel est obtenu par :

Suspension \longrightarrow gel \longrightarrow solide cellulaire.

Tableau I.1. Classification des dispersions de gaz, de liquide ou de solide entre eux.

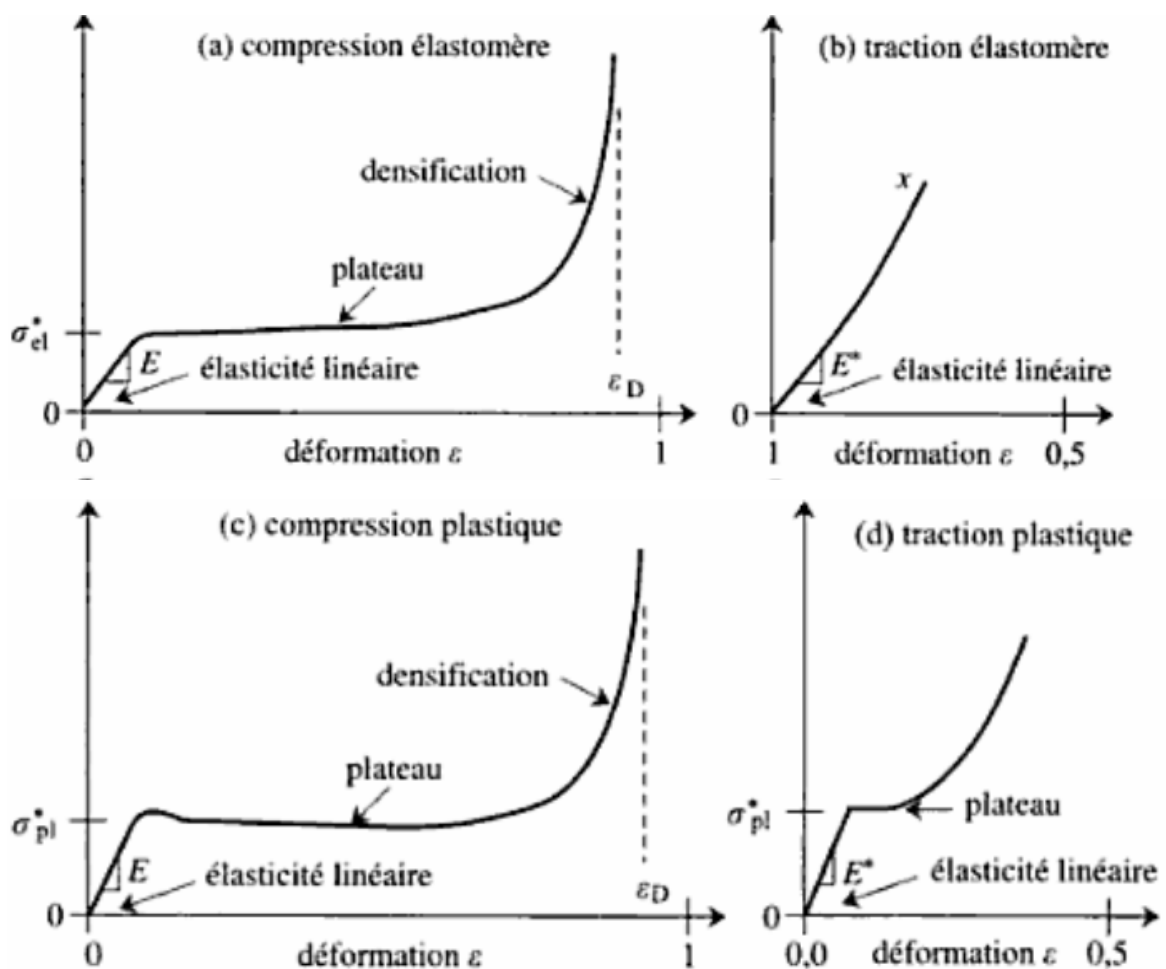
Exemple de structure lorsqu'un			Se trouve dispersé dans un
Gaz	Liquide	Solide	
Mélange gazeux	brume	fumée	gaz
écume	émulsion	suspension	liquide
Solide cellulaire	gel	Alliage ou composite	solide

I.2 Propriétés Mécaniques

La figure I.3 montre la résistance à la compression et à la traction d'un matériau cellulaire élastomère (caoutchouc, par exemple), d'un matériau cellulaire élastoplastique (métal) et d'un matériau cellulaire fragile (céramique). Lors d'une compression, le régime linéaire élastique est suivi pour tous ces matériaux d'un régime où la contrainte reste à peu près constante, menant à un dernier stade où elle montre en flèche. Chacun de ces régimes correspond à un mécanisme de déformation typique. Au départ, les parois de cellule subissent une flexion, ce qui donne un comportement élastique linéaire, à condition que le matériau de base lui-même ait un caractère élastique linéaire [GIB-97], [JAN-01]. Dès qu'une valeur critique est atteinte, les parois ou les arêtes commencent à s'effondrer. Dans le cas d'un matériau élastomère, les parois flambent de manière réversible [SCA-07]. Pour les matériaux élastoplastiques, les parois se replient et, pour les matériaux fragiles, on observe la rupture des parois cellulaires aux endroits où les contraintes sont maximales. Finalement, les parois cellulaires opposées se touchent ou bien les parois ou arêtes commencent à s'entasser. C'est cela qui provoque la montée finale des contraintes en compression.

La courbe de traction est assez différente du cas de la compression pour les trois types de matériaux. Seule la de déformation initiale, qui est définie principalement par le fléchissement des parois et arêtes, est similaire. Evidemment, le flambage ne joue aucun

rôle pour un matériau cellulaire élastomère sous tension. Au contraire, les parois et arêtes de la cellule se tournent vers l'axe de tension et la rendent plus rigide. Les matériaux cellulaires plastiques se comportent de la même manière sous traction et sous compression, par la formation de zones plastiques, mais la rupture se produit pour des extensions beaucoup plus faibles en traction [GIB-88]. La défaillance abrupte des matériaux cellulaires fragiles est observée à une valeur très inférieure à la résistance observée sous compression.



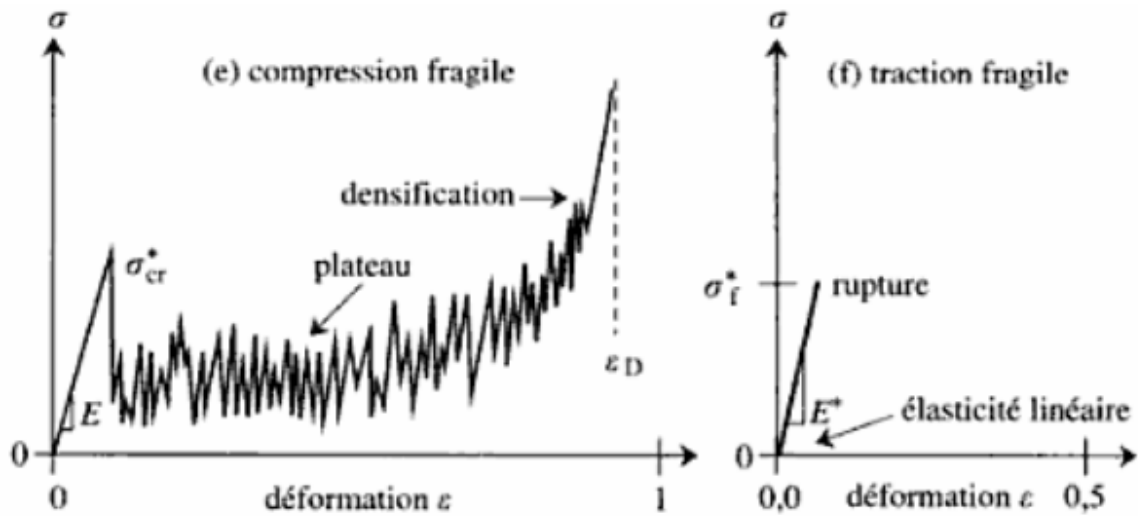


Figure I.3 Courbes de contrainte-déformation pour matériaux cellulaires : (a) et (b) matériaux cellulaires élastomères, (c) et (d) élastoplastiques et (e) et (f) élastiques fragiles [JAN-01].

De manière générale, le paramètre le plus important qui contrôle les propriétés mécaniques est la densité relative $(\rho/\rho_c) = 1-P$, c'est-à-dire la densité moyenne du matériau cellulaire ρ divisée par celle du même matériau sans pores ρ_c . Pour examiner les propriétés des matériaux cellulaires en détail, il est utile de diviser les différentes structures en trois groupes : nids d'abeilles, mousses à cellules ouvertes et mousses à cellule fermées, [CHE-95], [BIA-11]. Le nid d'abeilles est un arrangement régulier de cellules prismatiques hexagonales. Nous utilisons le terme nids d'abeilles dans un sens plus large pour décrire un arrangement en deux dimensions de polygones remplissant un plan. Des planches renforcées par une structure en nids d'abeilles (panneau sandwich) se trouvent dans nombreux domaines, du carton d'emballage jusqu'à l'aéronautique. Beaucoup de matériaux naturels, par exemple le bois, ont une structure en nids d'abeilles. Dans les mousses, les cellules sont polygonales et remplissent l'espace en trois dimensions. La matière peut être répartie sur les faces des cellules. La mousse est alors dite à cellules ouvertes dans le premier cas et à cellules fermées dans le second. Des exemples sont donnés dans la figure I.4. Il est intéressant de noter que les formes de

courbe contrainte-déformation sont identiques pour les trois types de structure, seules les valeurs absolues du module de Young, des le plateau de contraintes, σ_{pl}^* et σ_{cr}^* et la limite de rupture σ_f^* sont différentes. Dans chaque cas, on peut déduire des relations implicites entre ces paramètres mécaniques et la densité relative. D'autres paramètres caractérisant la structure sont de moindre importance.

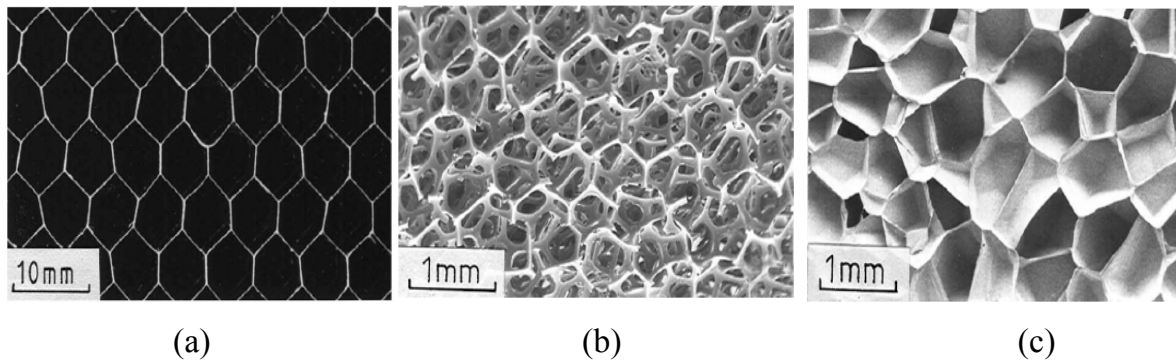


Figure I.4 : Exemples pour les trois types de solides cellulaires : (a) un arrangement en deux dimension de cellules prismatiques (nid d'abeilles hexagonal) ; (b) une mousse à cellules ouvertes [OLI-06]; (c) une mousse à cellules fermées [GIB-88].

I.3 Déformations des nids d'abeilles

Les structures en nids d'abeilles sont intéressants du point de vue de l'ingénierie, nous avons distingué deux cas : contraintes appliquées dans le plan et contraintes appliquées hors plan. La forme des courbes de traction et la même dans ces deux cas [GIB-97] mais il y a une grande différence entre les valeurs absolues de la rigidité et des contraintes-plateau. Afin d'évaluer dans quelque mesure on peut analyser le comportement des solides cellulaires, nous allons prendre en considération les propriétés élastiques pour une contrainte uni-axiale dans le plan d'un nid d'abeilles hexagonal.

On calcule d'abord le module de Young à partir du fléchissement des parois des cellules, come le montre la figure I.5. Il faut distinguer les deux cas contraints parallèles à l'axe x_1 et à x_2 . Les parois sont considèrent comme une poutre de longueur l , d'épaisseur uniforme t , de profondeur h , le moment M_l pour le fléchissement s'écrit

$$M_1 = \frac{1}{2} P l \sin\theta = \frac{Pl}{4} \quad \text{I.1}$$

Où

$$P = \sigma_1(l + l \sin\theta)b = \frac{3}{2} \sigma_1 l b \quad \text{I.2}$$

Et considérant que $\theta = 30^\circ$ dans les nids d'abeilles régulier. La théorie des poutres donne la flexion de la paroi

$$\delta = \frac{Pl^3}{24E_c I} \quad \text{(I.3)}$$

Où I est le d'inertie de la paroi cellulaire ($I = \frac{bt^3}{12}$) et E_c le module de Young du matériau de la paroi cellulaire. La composante de la flexion $\delta \sin\theta$ donne la de déformation dans la direction x_1

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta \sin\theta}{l \cos\theta} \quad \text{(I.4)}$$

Le module de Young du nids d'abeilles parallèle à x_1 , $E_1^* = \sigma_1/\varepsilon_1$, ce qui donne

$$\frac{E_1^*}{E_c} = \frac{4}{\sqrt{3}} (t/l)^3 \quad \text{(I.5)}$$

Le cas d'une contrainte dans la direction x_2 est illustré dans la figure 1.6. Les calculs du moment M_2 , de la flexion et du module de Young parallèle à x_2 , $E_2^* = \sigma_2/\varepsilon_2$, montrent que les deux modules sont égaux. Finalement, es considérations géométriques simples permettent d'écrire pour la densité relative d'un nid d'abeilles hexagonal :

$$\rho/\rho_c = \frac{2}{\sqrt{3}}(t/l) \quad \text{(I.6)}$$

Ce qui donne (tenant compte de (1.5))

$$\frac{E_1^*}{E_c} = \frac{E_2^*}{E_c} = \frac{3}{2} (\rho/\rho_c)^3 \quad \text{(I.7)}$$

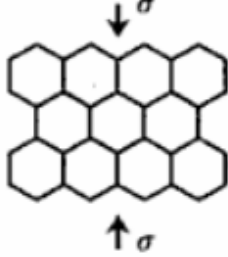
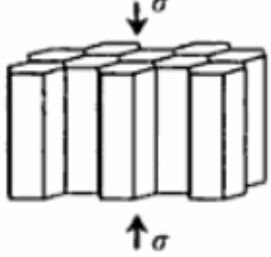
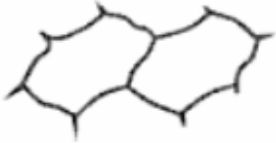

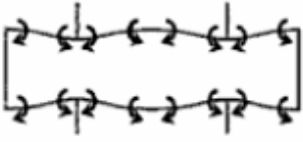
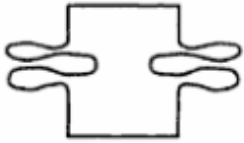
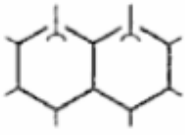
Le coefficient de Poisson pour des contraintes dans le plan $\nu_{12} = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = 1$, et le module de cisaillement peut être calculé par une procédure similaire à ce qui précède :

$$\frac{G_{12}}{E_s} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{t}{l}\right)^3 = \frac{3}{8} \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^3 \quad (\text{I.8})$$

Qui obéit à la relation $G = E/[2(1 + \nu)]$ pour les solides isotropes. Tout cela est correct pour une faible densité relative ($\frac{\rho}{\rho_c} \leq \frac{1}{4}$) et une déformation suffisamment petite pour que les changements de la géométrie soient négligeables.

Le plateau de la courbe contrainte-déformation sous compression peut être calculé de manière analogue. Les nids d'abeilles élastomère s'effondrent dès que la charge de la paroi cellulaire dépasse la charge de flambage d'Euler ; dans le cas d'un élastoplastique, il s'effondre lorsque le moment d'inflexion atteint le moment de plasticité complète, et pour les matériaux fragiles, lorsque les tensions à la surface de la paroi cellulaire dépassent la tension de rupture, σ_{fs} (souvent appelée module de rupture). Le tableau I.2 donne une liste des différents modes de rupture correspondant aux relations pour les contraintes-plateau.

Tableau I.2 Résumé des mécanismes de rupture de nids d'abeilles et équations correspondantes pour les valeurs caractéristiques des contraintes en fonction de la densité relative.

	 <p style="text-align: center;">↑ σ</p> <p style="text-align: center;">↓ σ</p> <p style="text-align: center;">Contraintes dans le plan</p>	 <p style="text-align: center;">↑ σ</p> <p style="text-align: center;">↓ σ</p> <p style="text-align: center;">Contraintes hors plan</p>
Flambage élastique	 $\frac{\sigma_{el}^*}{E_s} = c_{el} \left(\frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^3$	 $\frac{\sigma_{el}^*}{E_s} = c_{el3} \left(\frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^3$ $c_{el3} = 20 \cdot c_{el}$
Flambage plastique	 $\frac{\sigma_{pl}^*}{\sigma_{ys}} = c_{pl} \left(\frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^2$	 $\frac{\sigma_{pl}^*}{\sigma_{ys}} = c_{pl3} \left(\frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^{5/3}$
Rupture fragile	 $\frac{\sigma_{cr}^*}{\sigma_{fs}} = c_{cr} \left(\frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^2$	

Le terme « élastomère » ou « plastique » est à mettre en relation avec le comportement du matériau cellulaire et non avec celui de la paroi elle-même. Par

exemple, un nid d'abeilles d'un métal élastoplastique peut se comporter soit de manière plastique, soit comme un élastomère, ce que l'on voit bien dans le tableau I.2. A des densités très faibles, la contrainte de déformation élastique est plus petite que la contrainte de déformation plastique ; c'est pourquoi de tels nids d'abeilles ont le comportement d'un élastomère. A des densités plus fortes, la contrainte de déformation plastique est inférieure à celle pour le flambage élastique; par conséquent, ces nids d'abeilles vont montrer un comportement plastique. Le module de Young ainsi que σ_{el}^* , σ_{pl}^* et σ_{cr}^* pour des contraintes uni-axiales selon x_1 et x_2 sont identiques mais varient considérablement dans la direction x_3 . Le module de Young est alors beaucoup plus grand, $\frac{E^*}{E_c} = \rho/\rho_c$ [GIB-97]. Les contraintes de déformation obéissent à la même relation et, sous compression, sont beaucoup plus grandes que dans le cas des contraintes dans le plan. Les modes de défaillance correspondants et les contraintes de déformation sont donnés dans le tableau I.2 en fonction de la densité relative. Le résultat de cette analyse est que la densité relative est le paramètre le plus important d'une structure nid d'abeille hexagonal régulier. D'autres éléments de la structure comme l'épaisseur de la cellule ou la taille de celle-ci ont une influence négligeable sur les paramètres de la courbe contrainte-déformation [GIB-88, VAF-05].

Afin de démontrer que l'arrangement géométrique influence également ces propriétés, les modules de Young, pour une contrainte uni-axiale dans le plan, sont comparées dans la figure I.6 pour les structures régulières carrées, triangulaire ou hexagonal. Comme nous l'avons déjà mentionné, les nids d'abeilles hexagonal régulier à un comportement isotrope dans le plan, ainsi que la structure à cellules triangulaire, par contre la structure à cellules un comportement orthotrope dans le plan, ainsi que la structure à cellules triangulaires mais il semblerait que le nid d'abeilles triangulaire soit bien plus raide. En tenant compte du fait, pour un rapport fixe entre l'épaisseur et longueur de la paroi, la densité d'un nid d'abeilles triangulaires est trois fois plus grande que celle d'un nid d'abeilles hexagonal et, utilisant l'équation (I.7), on voit bien que le E^* du nid d'abeilles triangulaire est en réalité l'égerment plus petit. Un nid d'abeilles

composé de carrés présente, par contre un comportement extrêmement anisotrope, ce qui démontre bien l'influence de l'arrangement géométrique sur le comportement des matériaux cellulaires.

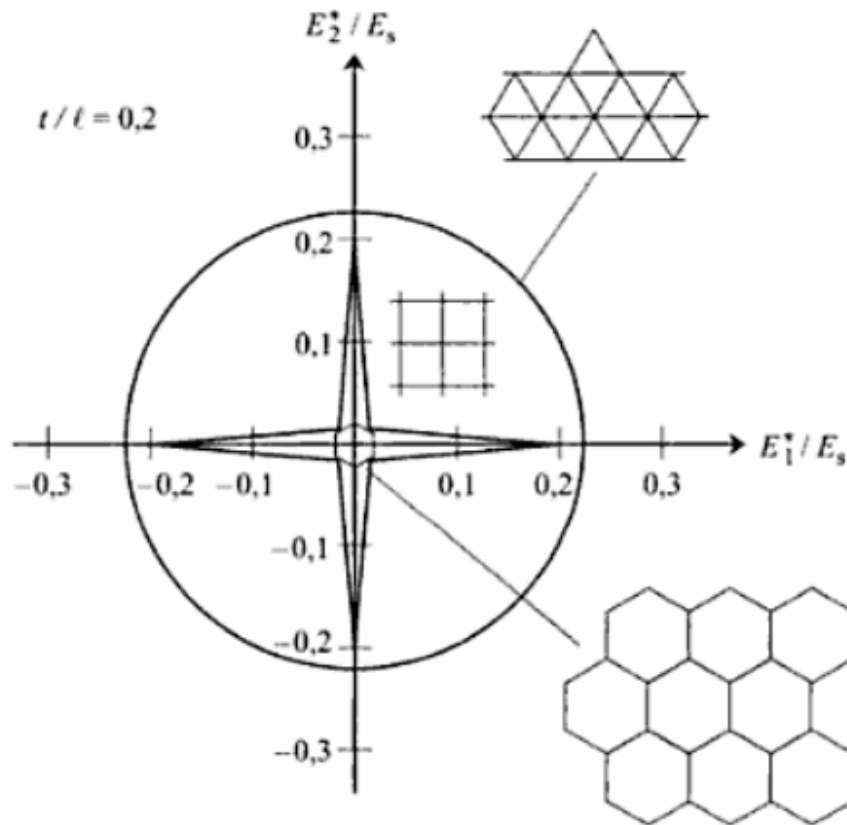


Figure I.5 : Un diagramme polaire montrant le module de Young en fonction de la direction des contraintes, pour les trois structures régulières hexagonales, triangulaires et carrées [JAN-01], [GIB-97].

I.4. Déformation des mousses

Comme illustre la figure I.3, la forme de la courbe de traction est similaire pour des mousses à cellules ouvertes et fermées, mais les valeurs absolues des paramètres E^* , σ_{el}^* , σ_{pl}^* , σ_{cr}^* sont différentes. Normalement, la forme des cellules dans les mousses réelles est très complexe [ZHU-97]. Pour modéliser le comportement de la déformation, on se sert de formés simplifiées, comme l'illustre le tableau I.3. Considérant les mousses à cellules ouvertes, le plus simple est un réseau de cubes avec des arêtes à section carrée. De telles

formes permettent une analyse simple des propriétés mécaniques. Le module de Young est calculé à partir de la déflexion linéaire élastique des poutres en appliquant la théorie standard : la contrainte d'effondrement élastique, σ_{el}^* , est donnée par le flambage élastique des arêtes des cellules, celle de l'effondrement plastique σ_{pl}^* , déterminée par la formation d'une zone plastique aux coins des cellules [CHA-97], [GIB-97], et pour les mousses fragiles la résistance σ_{cr}^* est atteinte quand la contrainte maximale dans les poutres dépasse le module de rupture σ_{fs}^* . Les relations entre les paramètres normalisés et la densité relative sont donnés dans le tableau I.3. Pour obtenir la dépendance des paramètres caractérisant la structure, il suffit de noter que

$$\frac{\rho}{\rho_c} = 3 \left(\frac{t}{l}\right)^2 \quad \text{I.9}$$

Où l est la taille de la cellule cubique et t l'épaisseur des arêtes. Une comparaison avec le comportement des nids d'abeilles montre que les mousses à cellules ouvertes ayant une même densité se situent entre les deux extrêmes, pour une contrainte dans le plan et une contrainte hors plan [GIB-97].

Le cas des mousses à cellules fermées est plus compliqué ; lorsque des mousses se forment à partir d'un liquide, l'énergie de surface peut favoriser un transport de matériau vers les arêtes des cellules, et il ne restera donc qu'une paroi fine. Le comportement de tels mousses est presque identique à celui des mousses à cellules ouvertes [OLI-06], [CAD-09], [WAR-97]. Cependant, il y a aussi des mousses à cellules fermées qui contiennent une quantité considérable de matière dans leurs parois. Ces mousses-ci sont bien plus rigides. Pour un modèle de mousses à cellules fermées, on peut diviser la matière en une fraction Φ qui se trouve dans les arêtes de la cellule, et une fraction restante $(1-\Phi)$ qui se trouve dans les parois de la cellule. Les paramètres mécaniques caractéristiques E^* , σ_{el}^* , σ_{pl}^* , σ_{cr}^* sont donnés par une somme de trois termes : les arêtes de la cellule, la paroi cellulaire et la compression du liquide ou du gaz de la cellule. Un résumé est donné dans le tableau 1.3. D'après ces équations, l'importance des parois cellulaires pour les propriétés mécaniques est évidente. On peut trouver plus de détails

concernant le comportement mécanique multiaxial, la résistance aux ruptures, fluage, etc., dans [GIB-97].

I.5 Quelques propriétés et application

Les propriétés spéciales des solides cellulaires ouvrent un grand nombre d'applications émergentes. C'est surtout grâce à leur basse densité qu'ils sont des matériaux structuraux utiles, lorsque le problème principal est le poids. Ceci valable aussi bien pour des mousses polymériques que pour les métaux et les céramiques. Une deuxième conséquence de la basse densité de ces matériaux est l'énorme diminution de la conductivité thermique et, dans le cas des métaux, électrique. Cela permet des applications dans le domaine de l'isolation thermique ou même en tant que matières non inflammables. Des objets de ce type produits à grande échelle sont par exemples des tasses de café faits en mousse polymérique. Les mousses métalliques à cellules ouvertes peuvent être utilisées pour améliorer les échanges thermiques à cause de leur grande surface interne. Il en résulte des applications pour la construction d'échangeurs de chaleur légers mais efficaces. La grande surface interne des mousses céramiques offre un excellent support pour catalyse des réactions chimiques. Les propriétés électromagnétiques des mousses métalliques peuvent en l'occurrence être utilisées pour construire des objets atténuant les ondes électromagnétiques. Par ailleurs, les ondes sonores sont elles aussi fortement absorbées par les mousses, ce qui rend évidemment possibles des applications dans le domaine de l'isolation acoustique.

I.5.1 Propriétés électriques

La résistivité électrique R^* d'une mousse ou d'un nid d'abeilles fait avec un matériau conducteur de résistivité R_s , va clairement augmenter lorsque sa densité diminue [SEV 06]. Si l'on considère d'abord une mousse à cellules cubiques fermées de taille l et avec une épaisseur de paroi t , la densité relative sera de

$$\frac{\rho}{\rho_c} = 1 - \left(1 - \frac{t}{l}\right)^3 = \frac{3t}{l} \quad \text{I.10}$$

Si l'on imagine maintenant une coupe horizontale de cette structure, on voit que le courant peut être transporté par les parois dont la section relative est $1 - (1 - \frac{t}{l})^2$. Par conséquent, on peut écrire la conductivité (l'inverse de la résistivité) relative pour une mousse à cellules fermées

$$\frac{R_s}{R^*} = 1 - (1 - \frac{t}{l})^2 = \frac{2t}{l} = \frac{2}{3} \frac{\rho}{\rho_s} \quad \text{I.11}$$

Un raisonnement analogue donne la conductivité électrique (utilisant l'équation 15.9) pour une mousse à cellules ouvertes

$$\frac{R_s}{R^*} = (\frac{t}{l})^2 = \frac{1}{3} \frac{\rho}{\rho_s} \quad \text{I.12}$$

La résistivité électrique est donc inversement proportionnelle à la densité dans les deux cas, mais le coefficient est différent pour les mousses à cellules ouvertes et pour les mousses à cellules fermées. La résistivité ne dépend donc pas seulement de la densité mais aussi de la géométrie des pores. Ceci devient encore plus évident lorsqu'on calcule la résistivité d'une structure en nids d'abeilles qui s'avère anisotrope. En effet (en utilisant l'équation 1.6) on trouve pour la direction hors plan (c'est-à-dire parallèle à l'axe des tubes hexagonaux)

$$\frac{R_s}{R^*} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{t}{l}\right) = \frac{\rho}{\rho_s} \quad \text{I.13}$$

Et pour la conductivité dans le plan

$$\frac{R_s}{R^*} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{t}{l}\right) = \frac{1}{3} \frac{\rho}{\rho_s} \quad \text{I.14}$$

Les propriétés diélectriques des matériaux cellulaires, de certains types de mousses polymériques peuvent être intéressantes pour les applications liées à la transmission et l'absorption de micro-ondes. En effet, le constant diélectrique dépend de manière linéaire de la densité relative tout simplement parce que les espaces vides (ou remplis de gaz) ne contribuent pas aux propriétés diélectriques.

$$\varepsilon^* = 1 + (\varepsilon_s - 1)\rho/\rho_s \quad \text{(I.15)}$$

I.5.2 Isolation thermique

Une des applications les plus fréquentes des matériaux cellulaires est l'isolation thermique. Le coefficient de la conductivité thermique λ est défini pour une couche isolante mince :

$$q = \frac{\lambda \Delta T}{B} \quad (\text{I.16})$$

Où q est le flux d'énergie calorifique, B l'épaisseur de la couche isolante et ΔT la différence de température entre les deux cotes de la couche.

Pour comprendre la fonction de la porosité dans ce contexte, il faut d'abord considérer les trois modes de transport de la chaleur : la convection, la conduction et la radiation. Dans les mousses à cellules fermées que l'on utilise pour l'isolation thermique, la convection ne joue généralement aucun rôle. La conduction thermique est principalement due aux faces et arrêtes de la structure, mais le gaz enfermé dans les pores peut contribuer de façon non négligeable. On peut donc estimer que le coefficient de conduction thermique sera une fonction linéaire de la densité relative de la mousse, $\frac{\rho}{\rho_s}$. Pour estimer le transfert de chaleur par radiation, on peut partir de l'idée que l'énergie émise sur une face de la couche sera réabsorbée par l'autre. L'énergie émise est donnée par la loi de Stephan-Boltzmann, ce qui permet d'écrire le flux d'énergie :

$$Q = q_0 ((T + \Delta T)^4 - T^4) = 4q_0 T^3 \Delta T \quad (\text{I.17})$$

Où q_0 est une constante. mais comme les rayons infrarouges doivent aussi passer à travers les parois du matériau cellulaire, une partie sera absorbée, ce qui signifie que (I.7) doit être multipliée par un facteur de transmission de la forme $e^{-KB \frac{\rho}{\rho_s}}$, K étant une constante décrivant l'absorption dans les parois cellulaires.

Finalement, tenant compte de la conduction ainsi que du transport par radiation, on peut écrire le coefficient de transport thermique de la couche isolante :

$$\lambda^* = \lambda_s \frac{\rho}{\rho_s} + \lambda_g \frac{1-\rho}{\rho_s} + q_0 T^3 B e^{-KB \frac{\rho}{\rho_s}} \quad (\text{I.18})$$

Les deux premiers termes décrivent le transport par conduction, respectivement dans les parois et dans le gaz remplissant les cellules, et le troisième décrit le transport par radiation, λ_g est la conductivité du gaz dans les pores et λ_s correspond (par un raisonnement analogue à celui menant à la conductivité électrique d'une mousse à cellules fermées, équation (I.11) à 2/3 de la conductivité du matériau massif. Le coefficient λ^* (équation I.18) est tracé dans la figure 1.6 en fonction de la densité relative, pour quelques températures T et deux épaisseurs B d'une couche isolante, et cette contribution ne dépend ni de l'épaisseur de la couche, ni de la température (à condition que λ_s et λ_g ne varient pas trop avec la température).

Il est intéressant de noter que toutes ces courbes possèdent un minimum, ce qui signifie qu'il y a une densité optimale pour des applications d'isolation thermique. Pour une température de 300 K et une épaisseur de 2 mm (le cas d'une tasse de café), la densité relative optimale est de l'ordre 0,03 dans le cas de la figure 1.6. Pour une épaisseur de 3 cm (plutôt le cas d'une couche d'isolation pour un mur), ce minimum apparaît à une densité beaucoup plus faible. On peut en conclure, par exemple, que pour la fabrication de tasses de café on doit choisir une mousse avec une densité nettement plus élevée que pour isoler un mur.

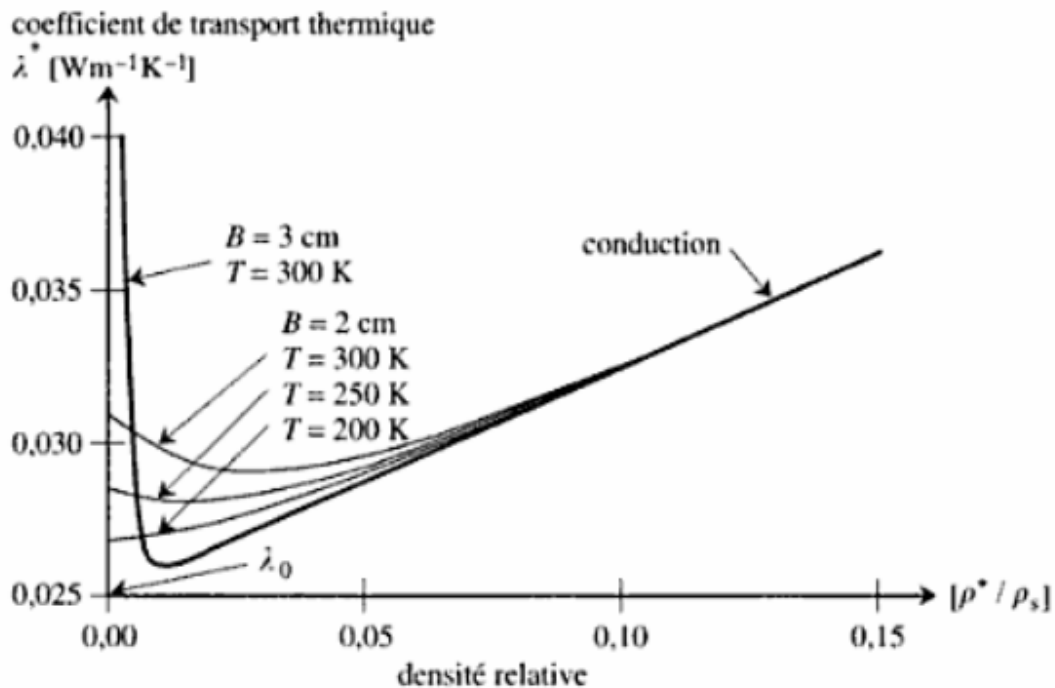


Figure I.6 : Coefficient de conductivité thermique calculé à partir de l'équation (I.18)

Finalement, la valeur minimale de λ^* dépend fortement de λ_g , c'est-à-dire du coefficient de conduction du gaz enfermé dans les pores. Pour améliorer la performance des mousses isolantes, on peut donc remplacer l'air par un gaz à faible λ_g , par exemple les chlorofluorocarbones (CFC). Malheureusement, ces gaz sont nuisibles à l'environnement (ils sont responsables de réactions chimiques détruisant l'ozone dans stratosphère) et doivent être remplacés par d'autres agents, tels que les hydrofluorocarbures (HFC).

I.5.3 Absorption acoustique

Les stratégies pour la réduction d'un bruit de fond dépendent largement de l'emplacement de la source acoustique. Si le bruit vient de l'extérieur d'une maison, par exemple d'une autoroute, il s'agit d'empêcher le son d'entrer dans la maison. L'isolation dans ce cas est d'autant meilleur que la densité du mur est élevée (par exemple un mur en béton), les matériaux cellulaires sont inutilisables pour cette tâche.

Lorsque le bruit est généré à l'intérieur de la pièce, il s'agit d'absorber l'onde sonore en transformant son énergie en chaleur. Les matériaux cellulaires absorbent particulièrement

bien les ondes sonores. L'une des raisons est qu'une vibration sonore est atténuée à la surface d'une structure à porosité ouverte à cause des effets de viscosité agissant sur l'aire vibrant à l'intérieur des pores. De plus, les vibrations sont fortement atténuées aussi par la matière molle elle-même (tels que les tissus ou les mousses de polymère).

Finalement, le bruit peut être transporté par le mur lui-même, par exemple à cause d'une source de vibration agissant directement sur le mur (comme des pas sur un plancher ou une vibration de tuyauterie). Ce genre de vibration peut bien être absorbé par les matériaux cellulaires (par exemple le liège) à cause du plateau dans la courbe contraintes-déformation en compression (Figure. I.4). En effet, ce plateau qui est dû au fléchissement des parois (réversible pour les élastomères comme le liège) permet d'absorber une large partie de l'énergie de déformation associée à l'onde acoustique [Erreur ! Source du renvoi introuvable.].

I.5.4 Emballages

Une autre application très fréquente des matériaux cellulaires est l'emballage de matériel fragile. Cette application est due à la capacité des mousses d'absorber de l'énergie en compression. Pour une description simplifiée, considérons une courbe contrainte-déformation comme celle de la figure I.7 (a) : la mousse se déforme manière élastique (module de Young E^*) jusqu'à la limite σ_{pl}^* . ensuite, la de déformation augmente pendant que les contraintes appliquées restent égales à σ_{pl}^* (plateau idéalisé de la figure 1.7a). Finalement, à partir de la de déformation ε_D , les cellules de la mousse se effondrées et la mousse se comporte comme le matériau massif dont sont faits les parois (module de Young E_s). L'énergie absorbée pour une déformation jusqu'à ε ,

$W = \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon') d\varepsilon'$, s'écrit

$$W(\varepsilon) = \left\{ \begin{array}{ll} E^* \frac{\varepsilon^2}{2} & \text{Pour } \varepsilon \leq \frac{\sigma_{pl}^*}{E^*} \\ \sigma_{pl}^* \frac{2\varepsilon - \sigma_{pl}^*/E^*}{2} = W_1(\varepsilon) & \text{Pour } \frac{\sigma_{pl}^*}{E^*} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_D \\ W_1 + E_s \frac{(\varepsilon - \varepsilon_D)^2}{2} & \text{Pour } \varepsilon_D \leq \varepsilon \end{array} \right. \quad (I.19)$$

La figure I.7b est obtenue en traçant W en fonction de σ (tenant compte de la relation entre σ et ε donnée par la figure I.7 (a)). il apparaît clairement sur ce graphe que la mousse absorbe une quantité d'énergie par unité de volume $W_D = W_I(\varepsilon_D)$. Dès que la contrainte de compression atteint σ_{pl}^* .

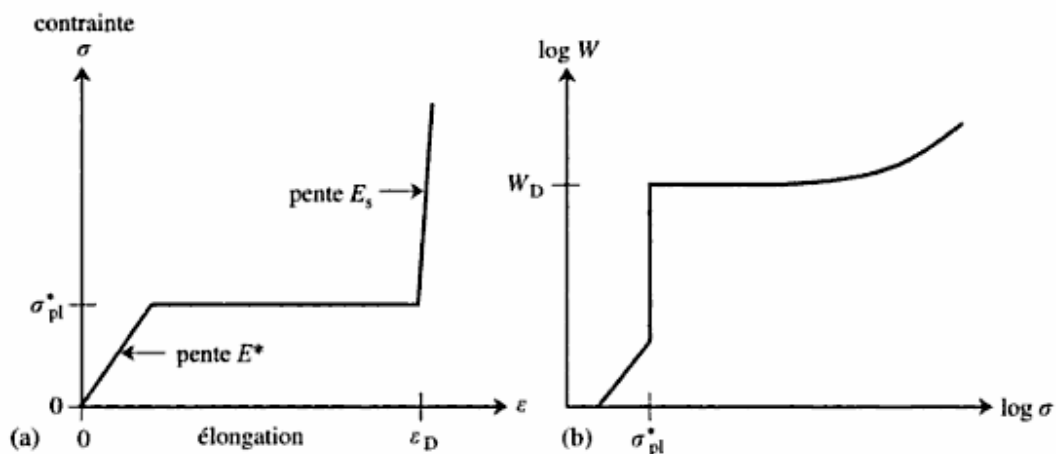


Figure 1.7 : (a) courbe schématique contrainte de déformation en compression pour une mousse ; (b) énergie absorbée par unité de volume, W , en fonction de la contrainte appliquée.

Une couche protectrice faite en mousses possède deux régimes de travail. Tant que les efforts de compression restent faibles, la couche a un module de Young de E^* , elle est donc relativement souple. Lors d'un impact, l'énergie absorbée est de l'ordre de W_D . Pour une couche protectrice d'épaisseur B et de surface A , cela signifie que l'emballage peut protéger d'un impact se produisant avec une vitesse inférieure à v_m , donnée par la relation :

$$W_D = \frac{mv_m^2}{2AB} \quad (\text{I.20})$$

m étant la masse de l'objet à protéger. La contrainte maximale subie par l'objet au moment de l'impact sera de l'ordre de σ_{pl}^* , indépendamment de la vitesse d'impact aussi

longtemps que celle-ci reste inférieure à v_m . Ainsi, la décélération maximale subie par l'objet sera

$$a_m = A \frac{\sigma_{pl}^*}{m} \quad \text{I.21}$$

Les deux paramètres W_D et σ_{pl}^* peuvent donc être utilisés pour optimiser la couche protectrice nécessaire. Par exemple, s'il s'agit de protéger la tête d'un conducteur automobile (de masse m et de surface A avec une couche protectrice d'épaisseur B) jusqu'à une vitesse du véhicule de v_m , il faudra une mousse avec W_D donné par la relation W_D . De plus, l'accélération a_m doit être inférieure à celle qu'une tête humaine peut supporter (environ 50 g), ce qui définit σ_{pl}^* par a_m . Dans de tels cas, il sera fréquent de construire des multicouches avec le matériau le plus mou à l'extérieur pour donner le maximum de confort.

I.6 Les structures nids d'abeilles Voronoï

I.6.1 Diagramme de Voronoï : définitions et algorithmes

Soit S un ensemble de n sites de l'espace euclidien en dimension d . Pour chaque site p de S , la cellule de Voronoï $V(p)$ de p est l'ensemble des points de l'espace qui sont plus proches de p que de tous les autres sites de S . Le diagramme de Voronoï de $V(S)$ est la décomposition de l'espace formée par les cellules de Voronoï des sites. Définition : La triangulation de Delaunay de S est le dual géométrique du diagramme de Voronoï de S : deux points de S sont reliés par une arête dans la triangulation de Delaunay si et seulement si leurs cellules sont adjacentes dans le diagramme de Voronoï de S .

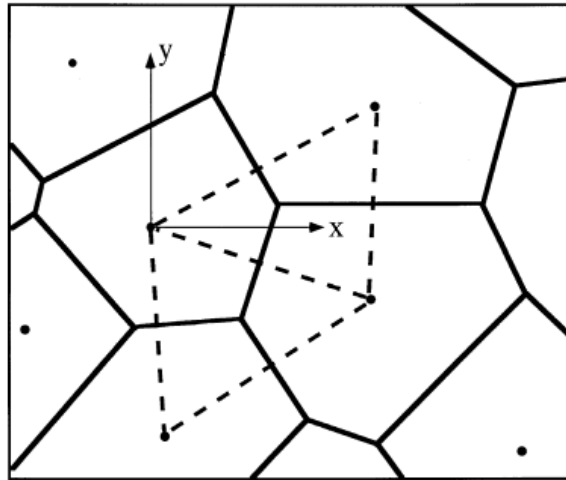


Figure I.8: Illustration de la définition d'un diagramme de Voronoï.

Les diagrammes de Voronoï sont des structures très utiles, rencontrées fréquemment car elles permettent de représenter des relations de distance entre objets et des phénomènes de croissance : il n'est pas étonnant de les voir utilisés pour modéliser des cristaux ou les grandes structures de l'univers, et de les trouver souvent dans la nature. À titre d'exemple la figure I.9 représente un pylône d'une aile de libellule prise par un microscope optique au labo LMS université de 08 Mai 45 Guelma, une roche de mère à une forme des cellules Voronoï et une micro structure de la fibre de Balsa. Les diagrammes de Voronoï sont aussi des structures de données permettant de résoudre de nombreux problèmes: recherche de plus proches voisins et planification de mouvements notamment. L'étude des diagrammes de Voronoï, de leurs propriétés mathématiques, de leur calcul et de leurs nombreuses variantes a été et reste un sujet d'importance majeure de la géométrie algorithmique. Les contributions du projet Prisme portent sur les aspects combinatoires *et* algorithmiques, l'extension à différentes métriques non euclidiennes et l'application aux problèmes de reconstruction de formes.

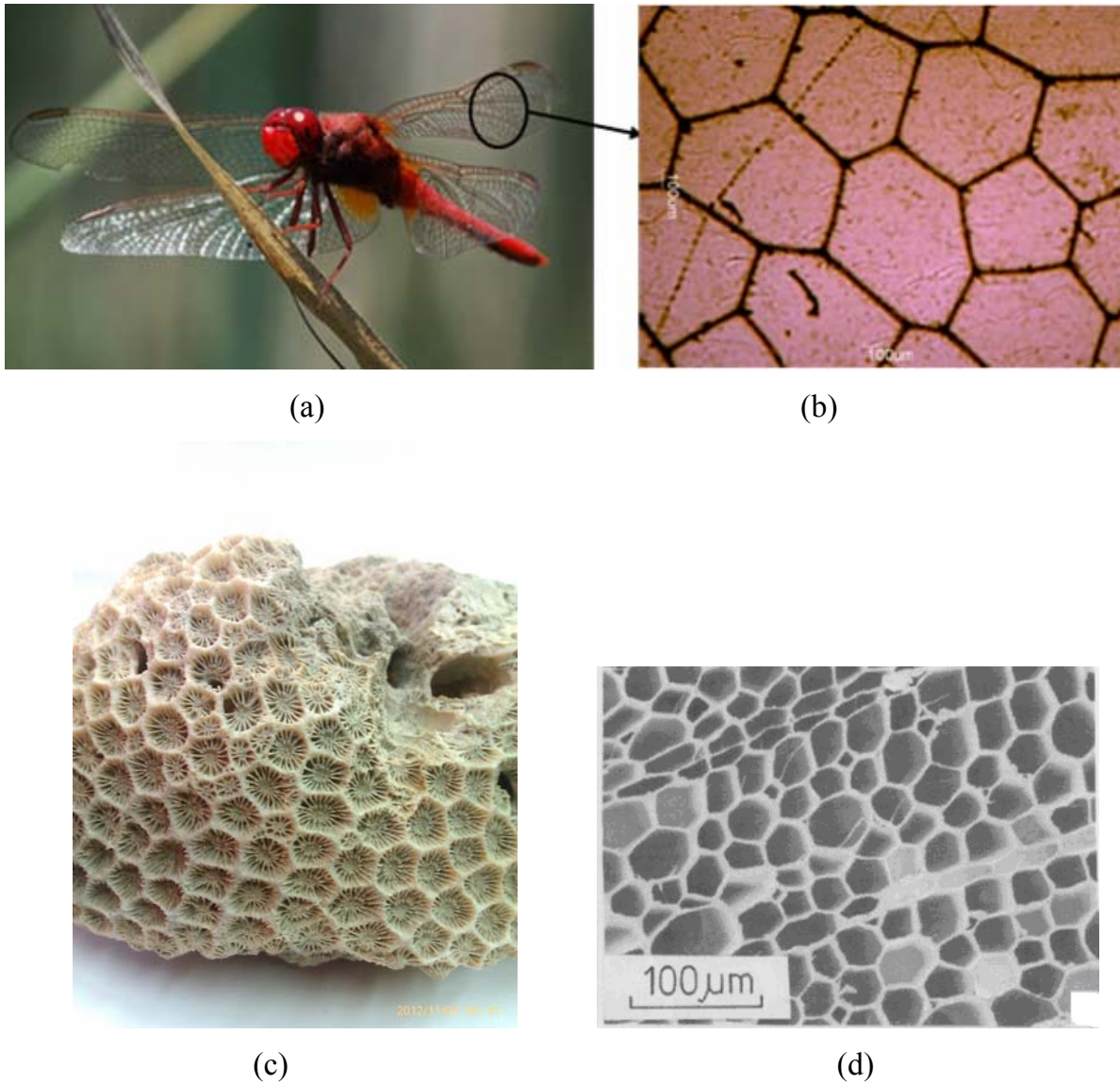


Figure I.9 : (a) libellule [WEB], (b) aile d'une libellule prise par un microscope optique au labo LMS ;(c) pierre d'un roche de mère, (d) une micro structure de la fibre de Balsa [GIB-97].

I.6.2 La cellule Voronoï obtenue par la technique de perturbation

la cellule Voronoï obtenue par la perturbation ou le déplacement des coordonnées (x_1, x_2) des coins d'une cellule hexagonale régulière dans le plan, vers les nouvelles coordonnées (x_1', x_2') est basé sur le polynôme suivant.

$$x_1' = x_1 + b \cos \theta,$$

$$x_2' = x_2 + b \sin \theta.$$

Le polynôme montre la relation entre les coordonnées finale (x_1' , x_2') et les coordonnées (x_1 , x_2) de la cellule hexagonale régulière ; où θ est l'angle de rotation des ligaments le choix de cet angle est fait hasard.

b est une valeur faite au hasard soit positif ou le négatif.

La figure I.10 montre le principe de perturbation des coins d'une cellule hexagonale régulière pour obtenir une cellule Voronoï [ZHU-01].

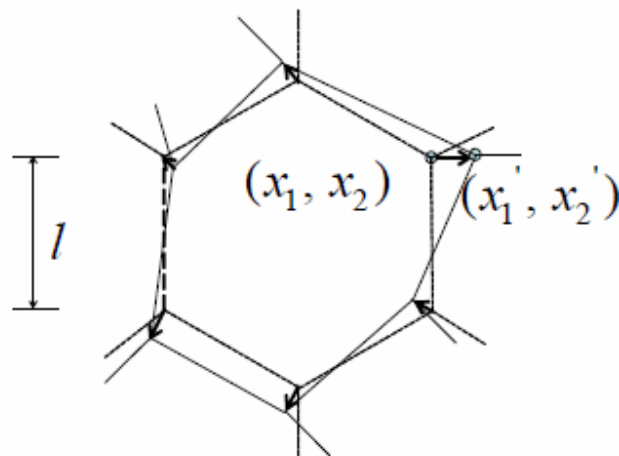


Figure I.10. Principe de perturbation

I.7 Les structure Auxétiques

La plupart des matériaux ont une contraction dans le sens transversal lors d'une élongation longitudinale. Ce taux de contraction appelé coefficient de Poisson est habituellement positif, d'environ 0.5 pour le caoutchouc, 0.3 pour les aciers communs, de 0.1 à 0.4 pour les matériaux cellulaires tels que les mousses et d'environ 0 pour le liège. Certain matériaux cellulaires, ont un coefficient de Poisson négatif. On qualifie ces matériaux d'auxétiques (du grec auxein, s'étendre). Les matériaux auxétiques sont connus depuis un certain temps, on peut remonter en termes de publication à l'article de [LAK-87a]; il a réussi à convertir une mousse de polyuréthane standard en mousse auxétique par

chauffage-compression et refroidissement sous compression. Bien qu'un certain nombre de mécanismes ait été avancé pour expliquer ce fonctionnement auxétique [BIA-10], [LAK-93], dans le cas des structures de poutraison connaît principalement deux mécanismes qui permettent cette propriété, le mécanisme ré-entrent et le mécanisme d'enroulement (voir la figure I.8). Dans le mécanisme ré-entrent, la déformation dans un sens provoque une flexion symétrique et opposée des poutres orientées dans le second sens tandis que dans le mécanisme d'enroulement, des poutres faisant fonction de ligaments retient entre elles des structures circulaires qui tournent sous l'effet d'une déformation et entraînent simultanément les autres ligaments [SCH-11]. Le mécanisme d'enroulement est lié à la géométrie chirale 2D des structures, c'est-à-dire que ces structures ne peuvent être superposées à leur image dans un miroir. [GRI-00] suggère d'expliquer et modéliser par un mécanisme similaire à l'enroulement ce qui se produit dans les mousses auxétiques, il appelle ce mécanisme 'rotation de liaisons rigides' (voir figure I.11).

Les propriétés attendues de ces matériaux auxétiques sont diverses. Un grand nombre de brevets ont été déposés montrant leur intérêt. On s'attend à ce que les matériaux à coefficient de Poisson négatif aient un pouvoir d'absorption d'énergie supérieur et une meilleure résistance à la rupture que leurs homologues standard, ce qui pourrait être utile pour des matériaux d'emballage ou des matériaux d'absorption de chocs. D'après [PRA-97], les matériaux auxétique devraient être difficiles à cisailier, mais faciles à déformer volumétriquement, en quelque sorte des anticautchoucs. Ces matériaux devraient entraîner des comportements mécaniques peu habituels lors d'une mise en forme par déformation ; une plaque épaisse que l'on fléchit aurait une déformation en forme de coque (et non en forme de selle de cheval comme la plupart des matériaux standard). On pense les utiliser également pour la fabrication de nouveaux actionneurs, prothèses et mousses ayant un pouvoir d'absorption acoustique supérieur [SCA ???], [SCA-03]. Bien qu'il ne s'agisse pas à proprement parler de structures, on commercialise à l'heure actuelle des fibres auxétiques qui gonflent lorsqu'on les met sous traction.

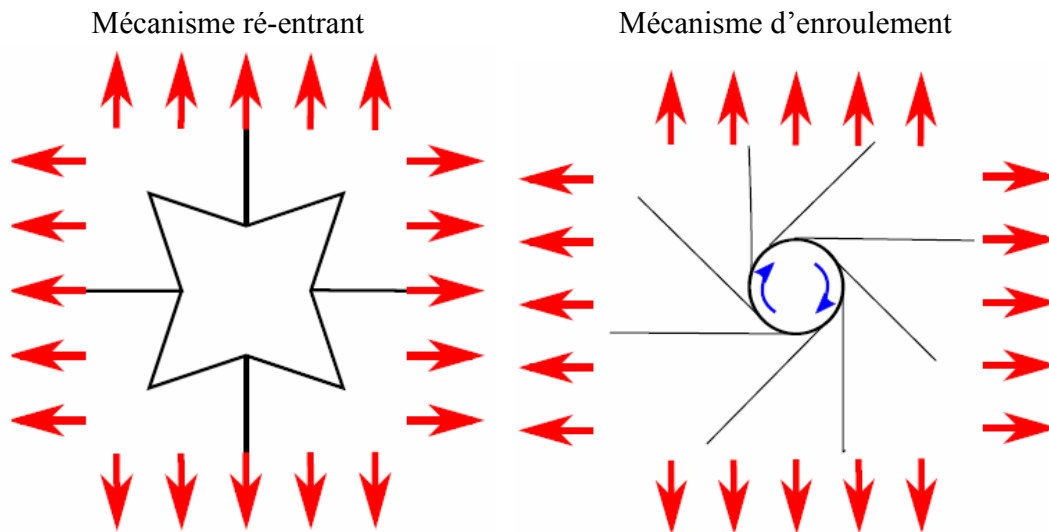


Figure I.11 deux géométries qui créent un mécanisme permettant d'obtenir un coefficient de poisson négatif.

Différentes études ont déjà été réalisées sur ces matériaux depuis [LAK-87b] ; on trouve dans [PRA-97] une étude théorique et expérimentale des structures hexachirales. Yang *et al* ont fait une étude par EF micro-polaire des structures hexagonales réentrantes [YAN-04]. Bezazi *et al* ont calculé les coefficients de Poisson et les modules de Young dans le plan d'un nouveau nid d'abeille centre symétrique ré-entrant par une étude EF et analytique [BEZ-05]. Blumenfeld a étudié les mécanismes de déformation des structures qu'il qualifie à la fois d'auxétiques et isostatiques ; il propose une formulation mathématique de ce comportement et différentes géométries possibles [BLU-05]. Gaspar *et al* ont fait des expérimentations sur des géométries de structures simples à obtenir à partir d'une structure diamant, que l'on pourrait qualifier de diamant chiral [GAS-05]. Scarpa *et al* ont étudié la résistance au flambement des structures hexachirales [SCA-07]. Gonella and Ruzzene ont obtenu les propriétés mécaniques des structures hexagonales ré-entrant par une technique d'homogénéisation basée sur des équations aux différences finies [RUZ-08]. Ils se sont intéressés particulièrement au problème du calcul de la vitesse de propagation d'une onde basse fréquence dans de telles structures auxétiques. Alderson *et al* [ALD-10] ont fait une étude à la fois expérimentale et par EF d'une série de structures

chiraux et d'autres appelés antichiraux. Les antichiraux sont des structures formées de structures chirales associées en paire opposée.

I.7.1 Les structures hexagonales ré-entrant

Les structures hexagonal ré-entrant est des structures auxétiques les plus connus et étudiés [GIB-97]. On parle de structures ré-entrant lorsque l'angle Tête des poutres b_2 et b_3 par rapport à l'horizontale est négatif figures I.12 (a) et b)

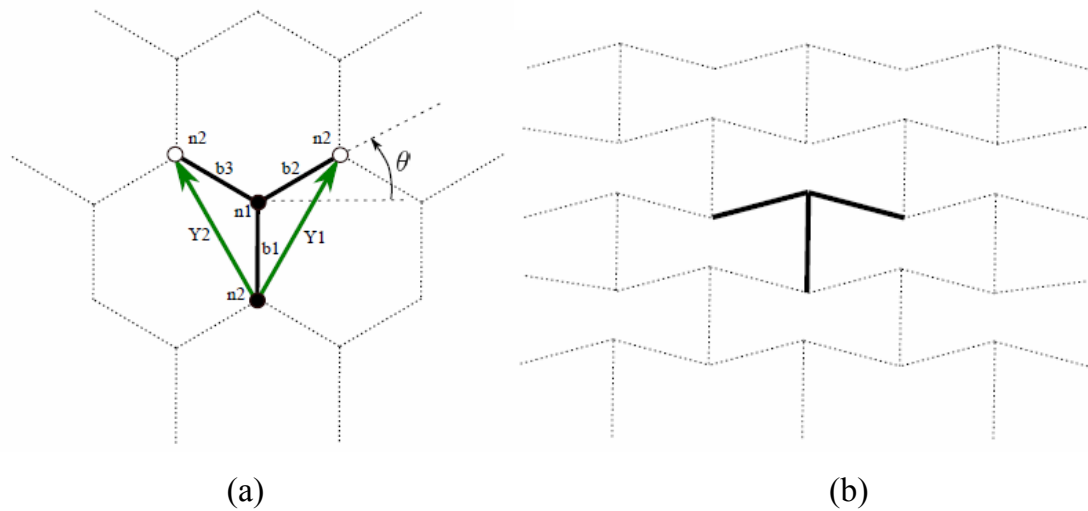


Figure I.12. Définition géométrique d'une structures hexagonale ré-entrant : (a) $\theta = 30^\circ$, structure auxétique (b) $\theta = -15^\circ$.

On peut constater sur la figure I.13 que le coefficient de Poisson peut prendre des valeurs négatives assez importantes.

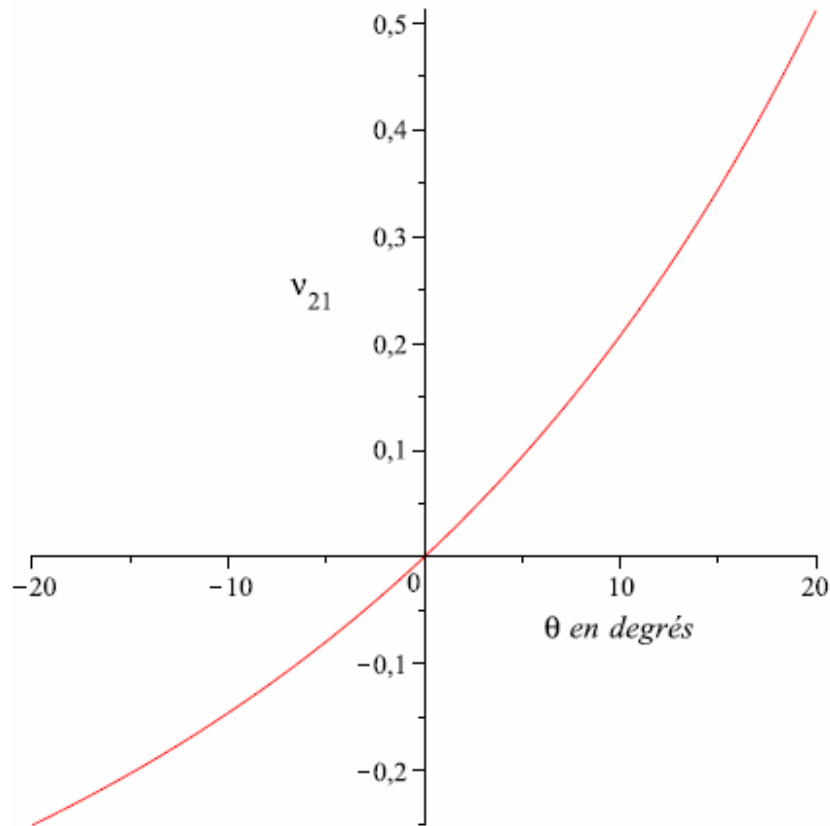


Figure I. 13 : Coefficient de poisson d'une structure hexagonale ré-entrent en fonction de θ d'après [GIB-97].

I.7.2 Les structure hexachiral

Les structures hexachiral ont fait l'objet de plusieurs travaux et articles associés [PRA-97]. Par exemple, dans [ALD-10] un certain nombre d'échantillons des structures à coefficients de poisson négatif ont été obtenus par prototypage rapide dans de la poudre de Nylon (Duraform), puis une comparaison des résultats est faite entre l'expérimentation sur ces échantillons et une analyse EF. Dans la structure hexachiral, le mécanisme qui permet l'obtention d'un coefficient de Poisson négatif est différent de la structure hexagonale ré-entrent ; c'est un mécanisme d'enroulement d'une sous-géométrie au sien de la cellule élémentaire qui produit un coefficient de poisson négatif. Cette structure est composé d'éléments circulaires de rayon identique r liés entre eux par des ligaments

étroits de longueur identique L . ces ligaments sont disposés tangentiellement aux éléments circulaires à 60° les uns des autres (figure I.14).

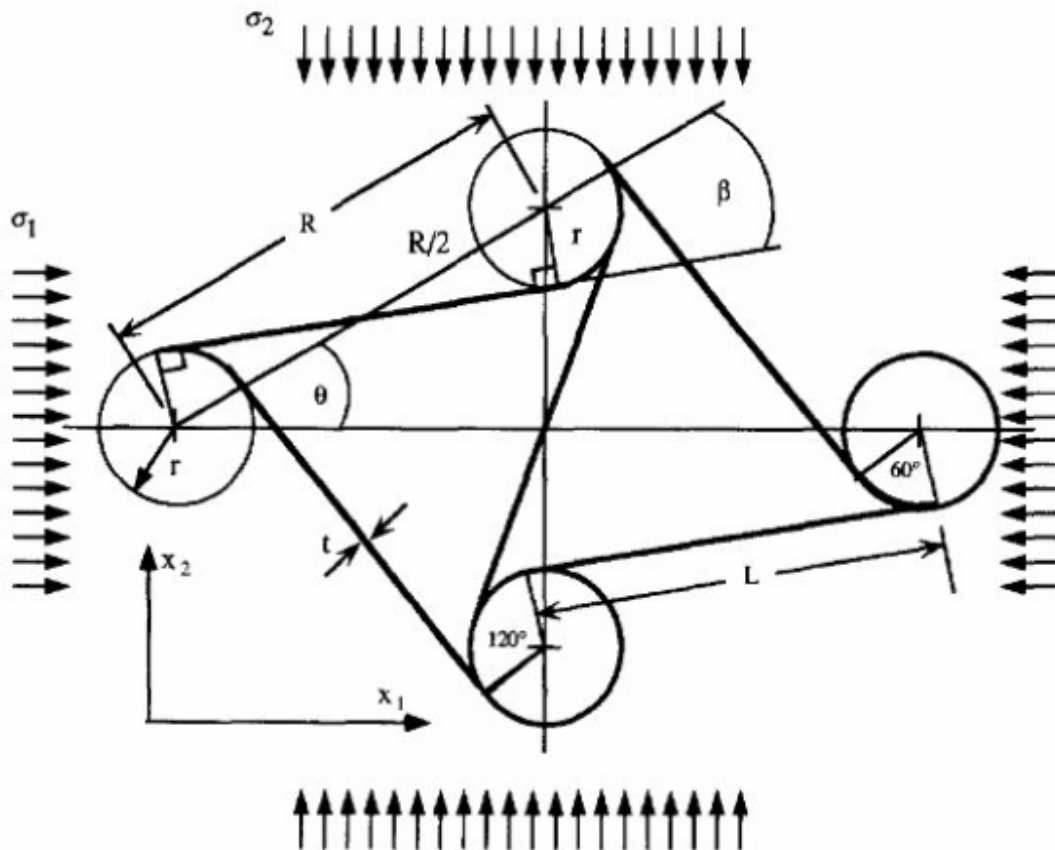


Figure I.14 Structure hexachiral [PRA-97].

I.8. Position du problème et techniques adoptées

Les matériaux cellulaires de type Voronoï ont attiré l'attention des chercheurs depuis de nombreuses années. Ces matériaux présentent des combinaisons intéressantes de propriétés et sont de plus en plus intégrés dans les produits manufacturés. En plus de leurs propriétés mécaniques spécifiques importantes, ils montrent en effet des propriétés supplémentaires d'absorption des vibrations, d'isolation thermique, qui leur permet de remplir plusieurs fonctions simultanément. Toutes ces propriétés varient beaucoup en fonction de l'architecture des matériaux cellulaires considérés, c'est à dire la morphologie.

Pour bien prédire ces propriétés, il est donc nécessaire d'analyser correctement cette architecture.

L'objectif générale de ce travail de thèse est obtenir une nouvelle cellule Voronoi de topologie et de propriétés mécaniques diverses, de façon à obtenir un milieu continu équivalent (homogénéisation).

L'homogénéisation du comportement mécanique d'une structure Voronoï peut se faire à l'aide de la méthode des éléments finis. Les outils de simulations numériques ont donc pour objectif de mieux comprendre, de modéliser et d'optimiser le comportement mécanique des matériaux cellulaires. Cette approche de modélisation multi-échelles, à la fois économique et précise permet de caractériser la nouvelle structure Voronoï et d'exploiter le potentiel mécanique de ces matériaux cellulaires dans le dimensionnement d'une structure.

I.9 Références

- [ALD-10] Elastic constants of 3-, 4- and 6-connected chiral and anti-chiral honeycombs subject to uniaxial in-plane loading
- [BEZ-05] A. Bezazi, F. Scarpa, and C. Remilat. A novel centresymmetric honeycomb. *Composite structure*, 71:356-364, 2005.
- [BIA-11] M. Bianchi, S. Frontoni, F. Scarpa, and C.W. Smith. Density change during the manufacturing process of pu-pe open cell auxetic foams. *Physica Status solidi (b)*, 248(1):30–38, 2011.
- [BIA-10] M. Bianchi, F. Scarpa, and C.W. Smith. Shape memory behaviour in auxetic foams: Mechanical properties. *Acta Materialia*, 58(3):858–865, 2010.
- [BON-08] Jean-Philippe Bonnet, Frederic Topin, and Lounes Tadrist. Flow laws in metal foams: Compressibility and pore size effects. *Transport in Porous Media*, 73:233–254, 2008. 10.1007/s11242-007-9169-5.
- [CAD-09] F. Cadamagnani, S. Frontoni, M. Bianchi, and F. Scarpa. Compressive uniaxial properties of auxetic open cell PU based foams. *Physica Status Solidi (b)*, 246(9):2118–2123, 2009.
- [CHA-97] N. Chan and K.E. Evans. Microscopic examination of the microstructure and deformation of conventional and auxetic foams. *Journal of Materials Science*, 32(21):5725–5736, 1997.
- [CHA-91] Yvan Champoux, Michael R. Stinson, and Gilles A. Daigle. Air-based system for the measurement of porosity. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 89(2):910–916, 1991.
- [CHE-95] C.P. Chen and R.S. Lakes. Analysis of the structure? property relations of foam materials. *Cellular Polymers*, 14:186–202, 1995.
- [JAN-01] Christain Janot ET Bernhard IIschner. *Matériaux émergents tome 19*. Press polytechniques et universitaires romandes, 2001.
- [GAS-05] N. Gaspar, C.W. Smith, E.A. Miller, G.T. Seidler, and K.E. Evans. Quantitative analysis of the microscale of auxetic foams. *Physica Status Solidi (b)*, 242(3):550–560, 2005.
- [GIB-88] LJ Gibson and MF Ashby. *Cellular solids: structure and properties*. Pergamon Press, Oxford, 1988.

- [GIB-97] L.J. Gibson and M.F. Ashby. *Cellular solids: structure and properties*. Cambridge Univ Pr, 1997.
- [GRI-00] J.N. Grima and K.E. Evans. Auxetic behavior from rotating squares. *Journal of Materials Science Letters*, 19(17):1563–1565, 2000.
- [HIL-82] N.C. Hilyard. *Mechanics of cellular plastics*. Macmillan Pub Co, 1982.
- [LAK-87a] R.S. Lakes. Foam structures with a negative Poisson's ratio. *Science*, 235:1038–1040, 1987.
- [LAK-87b] R.S. Lakes. Response: Negative Poisson's Ratio Materials. *Science (New York, NY)*, 238(4826):551, 1987.
- [LAK-93] R.S. Lakes. Design considerations for negative Poisson's ratio materials. *ASME Journal of Mechanical Design*, 115:696–700, 1993.
- [OLI-06] F.A. Costa Oliveira, S. Dias, M. Fátima Vaz, and J. Cruz Fernandes. Behaviour of open-cell cordierite foams under compression. *Journal of the European Ceramic Society*, 26(1-2):179 – 186, 2006.
- [PRA-97] D. Prall and R.S. Lakes. Properties of a chiral honeycomb with a Poisson's ratio of -1 . *International Journal of Mechanical Sciences*, 39(3):305–314, 1997.
- [SCA-07] F. Scarpa, S. Blain, T. Lew, D. Perrott, M. Ruzzene, and J.R. Yates. Elastic buckling of hexagonal chiral cell honeycombs. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 38(2):280–289, 2007.
- [SCA-03] F.L. Scarpa, F. Dallochio, and M. Ruzzene. Identification of acoustic properties of auxetic foams. 5052:468, 2003.
- [SCA-10] F. Scarpa, J.A. Giacomini, A. Bezazi, and W.A. Bullough. Dynamic behavior and damping capacity of auxetic foam pads. *Smart Structures and Materials: Damping and Isolation*.
- [SCH-11] J. Schwerdtfeger, F. Schury, M. Stingl, F. Wein, R. F. Singer, and C. Korner. Mechanical characterisation of a periodic auxetic structure produced by sebm. *Physica Status Solidi (b)*, 2011.
- [VAF-05] K. Vafai. *Handbook of porous media*. CRC, 2005.
- [WAR-97] W. E. Warren and A. M. Kraynik. Linear elastic behavior of a low-density kelvin foam with open cells. *Journal of Applied Mechanics*, 64(4):787–794, 1997.

[WEB] www.google/libellule/tif.com

[YAN-04] W. Yang, Z.-M. Li, W. Shi, B.-H. Xie, and M.-B. Yang. Review on auxetic materials. *Journal of Materials Science*, 39:3269–3279, 2004.

[ZHU-97] H. Zhu, J.F. Knott, and N.J. Mills. Analysis of the elastic properties of open-cell foams with tetrakaidecahedral cells. *Journal of the Mechanics and Physics of the Solids*, 45:319–343, 1997.

[ZHU-01] H. X. Zhu, J. R. Hobdell, and A. H. Windle. Effects of cell irregularity on the elastic properties of 2D Voronoi honeycombs. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49:857–890, 2001.

Chapitre II

Homogénéisation analytique et numérique des nids d'abeilles

II.1. Introduction

La méthode d'homogénéisation consiste à remplacer un matériau réel non homogène par un matériau fictif homogène avec des propriétés macroscopiques équivalentes [BUA-03, LAS-10, JAM-08]. Les procédures d'homogénéisation peuvent être appliquées pour déterminer une large gamme de propriétés physiques qui peuvent être mécaniques, électriques, acoustiques, thermiques et autres. Pour que l'homogénéisation soit possible, il faut pouvoir définir un volume élémentaire représentatif (*V.E.R.*) du matériau. Le résultat de l'homogénéisation, sur ce volume, sera le comportement du matériau homogène équivalent [ARB-09].

Le *V.E.R.* doit répondre à plusieurs conditions:

- être suffisamment grand par rapport à la taille des hétérogénéités pour être représentatif du matériau et être statistiquement équivalent d'une zone à l'autre ;
- être suffisamment petit par rapport aux dimensions de la structure considérée pour qu'il puisse être considéré comme étant sollicité par une contrainte uniforme ou soumis à une déformation uniforme.

Dans cette étude, on se propose de caractériser le comportement mécanique en fonction de la densité relative des matériaux cellulaires régulière tels que des nids d'abeille de forme hexagonale, carrée et le triangulaire. Le but de ce chapitre est de déterminer les constantes élastiques des structures cellulaires régulières par la méthode d'homogénéisation analytique et numérique.

II.2. Propriétés mécaniques de l'âme en nid d'abeille

Le nid d'abeille étant assimilable à un matériau orthotrope, sa matrice de rigidité ou de souplesse est caractérisée par neuf termes indépendants [ZHU-11]. Dans le cas orthotrope, la loi de comportement de Hooke peut être décrite par:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (\text{II.1})$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{II.2})$$

Dans cette matrice:

- E_1, E_2, E_3 sont les modules d'élasticité longitudinaux ;
- G_{23}, G_{13}, G_{12} sont les modules de cisaillement ;
- $\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{23}, \nu_{32}, \nu_{13}, \nu_{31}$ sont les coefficients de Poisson.

La symétrie de la loi de comportement permet d'écrire:

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1} ; \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1} ; \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2} \quad (\text{II.3})$$

La détermination de ces caractéristiques mécaniques peut être effectuée grâce à deux méthodes différentes:

- La modélisation analytique ;
- L'approche numérique.

En comparant les résultats obtenus à partir de ces deux méthodes, on peut approximer les constantes de l'ingénieur des structures en nids d'abeilles régulières étudiées dans ce chapitre.

II.3. Géométrie et notations :

Nous détaillerons maintenant les notations et préciserons les caractéristiques géométriques nécessaires aux modélisations des structures régulières en nids d'abeilles.

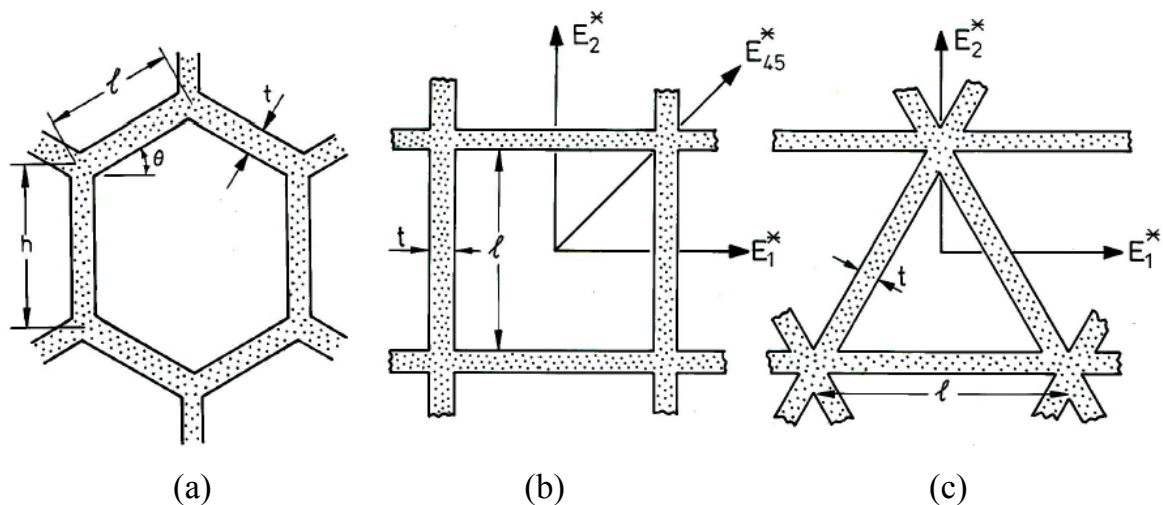


Figure II.1. Géométrie d'un nid d'abeille.
(a) structure hexagonale, (b) structure carré, (c) structure triangulaire.

Tableau II.1. Principaux Paramètres géométriques pour des structures cellulaires régulières.

Paramètres	Définition
θ	Angle de la cellule
h	Longueur de la paroi centrale
l	Longueur de la paroi inclinée
t	Epaisseur des parois
b	Hauteur du nid d'abeilles

II.4. Modélisations Analytiques

II.4.1. Modèle de Gibson et Ashby

Le modèle de Gibson et Ashby s'appuie sur les équations de l'élasticité pour déterminer les principaux modules et les coefficients du nid d'abeille hexagonal en fonction des paramètres géométriques [GIB-97].

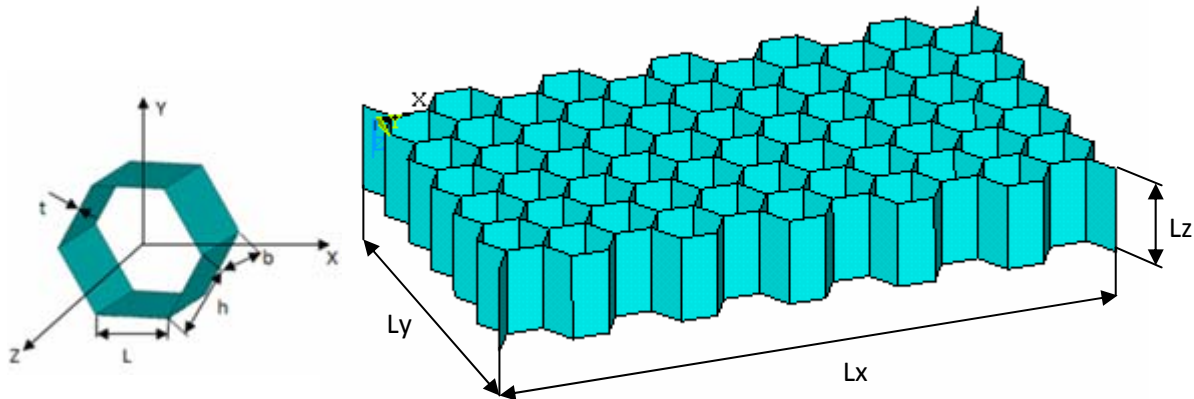


Figure II.2. Vue en perspective d'un nid d'abeilles hexagonal.

II.4.1.1. Propriétés dans le plan (x, y)

L'hypothèse introduite par Gibson et Ashby [GIB-97], est que les déplacements sont uniquement dus à la flexion élastique des parois des cellules. Les effets de compression et de traction sont négligeables. Les caractéristiques qui rentrent en jeu dans le plan sont: les modules d'élasticités E_1 et E_2 , de cisaillement G_{12} et les coefficients de Poisson ν_{12} et ν_{21} .

a) Modules E_1 et E_2

Les modules d'élasticité E_1 et E_2 sont calculés en exerçant respectivement une pression suivant x et suivant y . On induit ainsi un effort P suivant les axes x et y , donc des moments de flexion M . On considère le ligament comme une poutre de longueur l , d'épaisseur t , de profondeur b . L'étude de la poutre (Figure. II.3) permet d'obtenir l'équation du moment de flexion M comme suite:

$$M = \frac{Pl \sin \theta}{2} \quad (\text{II.4})$$

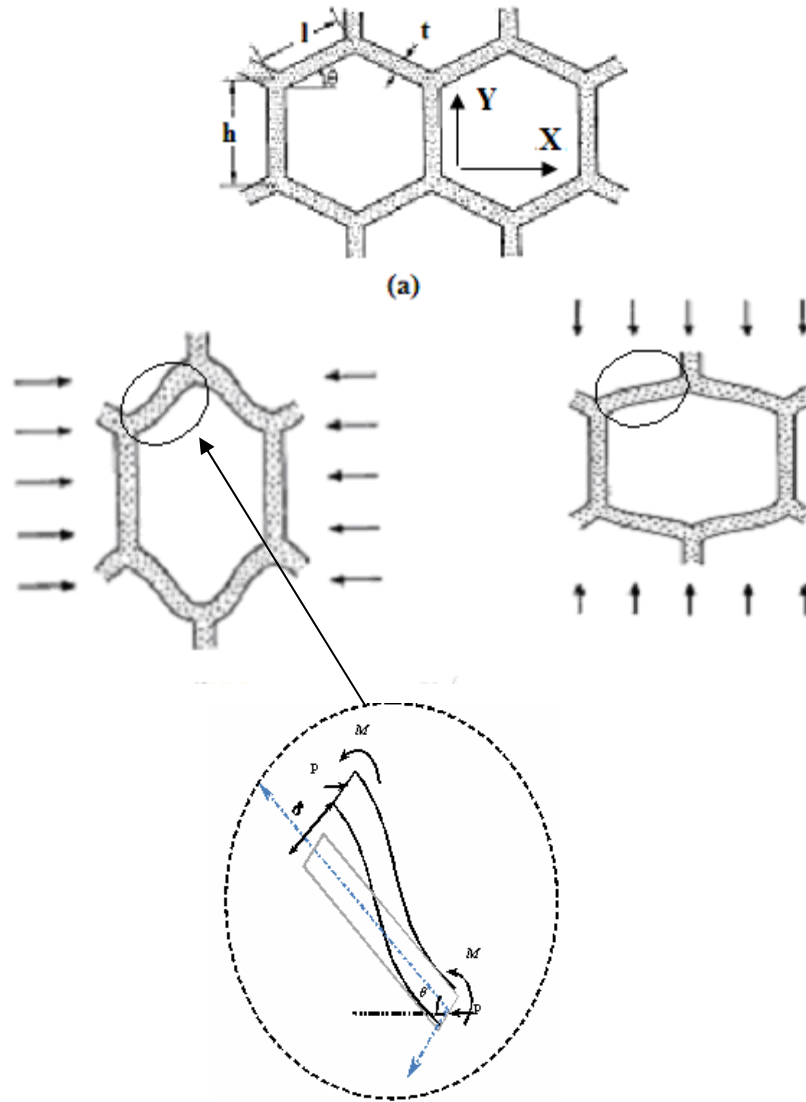


Figure II.3. Déformation des cellules sous une charge dirigée selon x et selon y d'après [GIB-97].

L'effort P peut être déterminé de l'équation (II.2) comme suit :

$$P = \sigma_1 (h + l \sin \theta) b \quad (\text{II.5})$$

Le module d'Young E_1 est défini en utilisant les relations suivantes:

$$E_1 = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} \quad (\text{II.6})$$

Avec:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta l_{x1}}{l_{x1}} = \frac{\delta \sin \theta}{l \cos \theta} \quad (\text{II.7})$$

$$\text{Où} \quad \delta = \frac{Pl^3 \sin \theta}{12E_s l} \quad (\text{II.8})$$

$$\text{La déformation } \varepsilon_{11} \text{ s'écrit :} \quad \varepsilon_{11} = \frac{Pl^3 \sin \theta}{12E_s l \cos \theta} \quad (\text{II.9})$$

$$\text{Avec :} \quad I = \frac{bt^3}{12} \quad (\text{II.10})$$

Le module d'Young E_1 s'écrit alors:

$$E_1 = E_s \left(\frac{t}{l}\right)^3 \frac{\cos \theta}{(h/l + \sin \theta) \sin^2 \theta} \quad (\text{II.11})$$

Et d'une manière similaire que la précédemment on obtient le module de Young E_2 :

$$E_2 = E_s \left(\frac{t}{l}\right)^3 \frac{(h/l + \sin \theta)}{\cos^3 \theta} \quad (\text{II.12})$$

Les coefficients de Poisson sont calculés comme suit:

$$\nu_{12} = \frac{-\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\cos^2 \theta}{(h/l + \sin \theta) \sin \theta} \quad (\text{II.13})$$

$$\nu_{21} = \frac{-\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} = \frac{(h/l + \sin \theta) \sin \theta}{\cos^2 \theta} \quad (\text{II.14})$$

b) Module de cisaillement G_{12} dans le plan (x, y)

Le module de cisaillement dans le plan est calculé à partir du schéma de la figure. II.4. Les points A , B et C n'ont aucun mouvement relatif quand on exerce un état de cisaillement sur le nid d'abeille.

Vu la symétrie, la déviation u_s est uniquement due à la flexion et à la rotation de la paroi (rotation d'angle φ) autour du point B . La déviation globale U est de la forme:

$$U = \frac{1}{2} \varphi h + \frac{F(h/2)^2}{3E_s l} \quad (\text{II.15})$$

La somme des moments au point B est nulle, on en déduit le moment au niveau des ligaments AB et BC .

$$M = \frac{Fh}{4} \quad (\text{II.16})$$

Ensuite on peut déduire l'angle $\varphi = \tan(\varphi) = \frac{\delta}{l}$

avec
$$\delta = \frac{Ml^2}{6E_s I} \tag{II.17}$$

On introduisant l'expression de l'angle ϕ dans l'expression de U , on obtient:

$$U = \frac{Fh^2}{48E_s I} (1 + 2h) \tag{II.18}$$

La relation du comportement en cisaillement s'écrit:

$$G_{12} = \frac{\tau}{\gamma} \tag{II.19}$$

Avec
$$\tau = \frac{F}{2lb\cos\theta} \tag{II.20}$$

et :
$$\gamma = \frac{2U}{h+lsin\theta} \tag{II.21}$$

Ceci nous donne pour G_{12} :

$$G_{12} = E_s \left(\frac{t}{l}\right)^3 \frac{(h/l + \sin\theta)}{(h/l)^2 (1 + 2h/l) \cos\theta} \tag{II.22}$$

Les propriétés dans le plan jouent un rôle important dans les caractéristiques mécaniques des âmes en nids d'abeilles pour des applications aux plaques sandwiches.

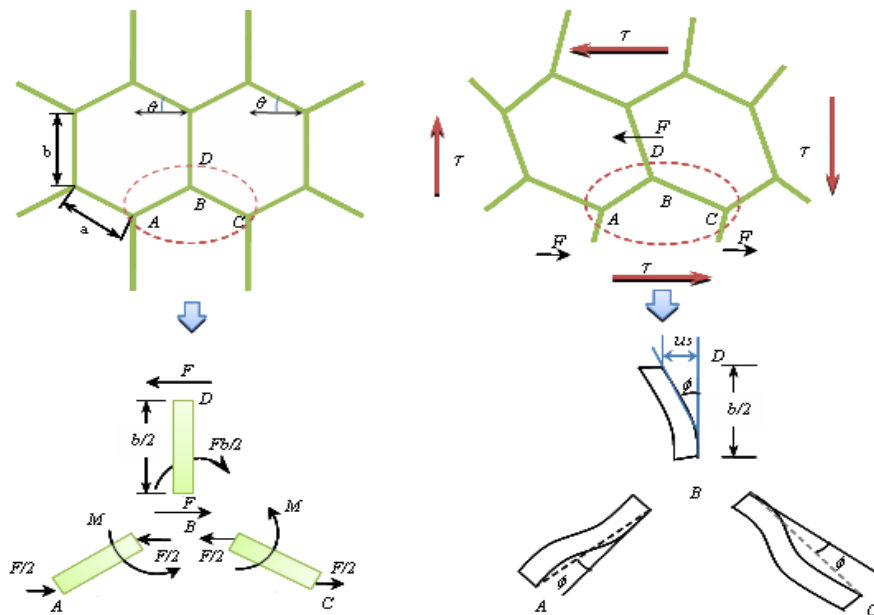


Figure II.4. Déformation en flexion et rotation des parois [HAR-08].

Pour les faibles densités relatives les modules de Young adimensionnel dans le plan pour les structures à cellules hexagonal, carrées et triangulaires peut être écrite comme suite :

Pour la cellule hexagonale [GIB-97].

$$E = E_s \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{t}{l}\right)^3 \quad (\text{II.23})$$

Pour la cellule carrée [GIB-97].

$$E = E_s \left(\frac{t}{l}\right) \quad (\text{II.24})$$

Pour la cellule triangulaire [CHR-95]

$$E = E_s \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{t}{l}\right) \quad (\text{II.25})$$

II.4.1.2. Propriétés hors plan

Les propriétés concernées sont les suivantes: E_3 , G_{13} , G_{23} et les coefficients de Poisson ν_{13} et ν_{23} sont nécessaires pour décrire les déformations hors plan.

a) Module d'élasticité E_3

Le module E_3 est calculé en multipliant le module E_s du matériau de base de la cellule par le rapport de la section de la cellule sur la surface totale de l'hexagone.

$$E_3 = E_s \frac{\text{section de la cellule}}{2 \text{ surface hexagone}}$$

$$E_3 = E_s \left(\frac{t}{l}\right) \frac{(h/l+2)}{2(h/l+\sin\theta)\cos\theta} \quad (\text{II.26})$$

Les coefficients de Poisson ν_{13} et ν_{23} sont supposés égaux au coefficient ν_s du matériau constituant le nid d'abeille.

$$\nu_{31} = \nu_{32} = \nu_s \quad (\text{II.27})$$

La relation de réciprocité permet d'obtenir les 2 autres coefficients de Poisson:

$$\nu_{13} = \frac{E_1}{E_3} \nu_{31} \quad (\text{II.28})$$

$$\nu_{23} = \frac{E_2}{E_3} \nu_{32} \quad (\text{II.29})$$

b) Modules de cisaillement transverses

Le comportement du nid d'abeille en cisaillement transverse dépend des deux modules G_{13} et G_{23} . La structure répétitive des nids d'abeilles a été exploitée pour estimer ces modules en fonction de la géométrie de l'alvéole. Il faut noter que lorsque

les faces inférieure et supérieure du nid d'abeille sont soumises à un déplacement relatif suivant une direction quelconque perpendiculaire à z , le champ de cisaillement est généralement hétérogène au sein de la paroi [ARB-09, HAR-08].

En utilisant les théorèmes de l'énergie, des bornes pour le module de cisaillement transverse sont proposées. La direction y constitue un cas particulier important pour lequel le cisaillement est nul dans les parois centrales et constant dans les parois inclinées. Dans ce cas, les bornes sont identiques et égales à la valeur du module dans le plan (y, z) . En revanche, les bornes sont bien distinctes dans le plan (x, z) . Les méthodes énergétiques permettent de trouver des bornes supérieure et inférieure.

La borne supérieure se calcule en utilisant le théorème du travail maximal. Ce théorème indique que l'énergie de déformation, calculée à partir d'un champ de déplacement virtuel compatible avec les conditions aux limites, est supérieure à l'énergie utilisée par le champ de déplacement réel.

II.5. Approche numériques

L'objectif est la détermination des constantes élastiques par une méthode d'homogénéisation numérique appliquée à l'échelle d'un volume élémentaire représentatif du nid d'abeille afin de comparer les résultats numériques avec ceux obtenus analytiquement.

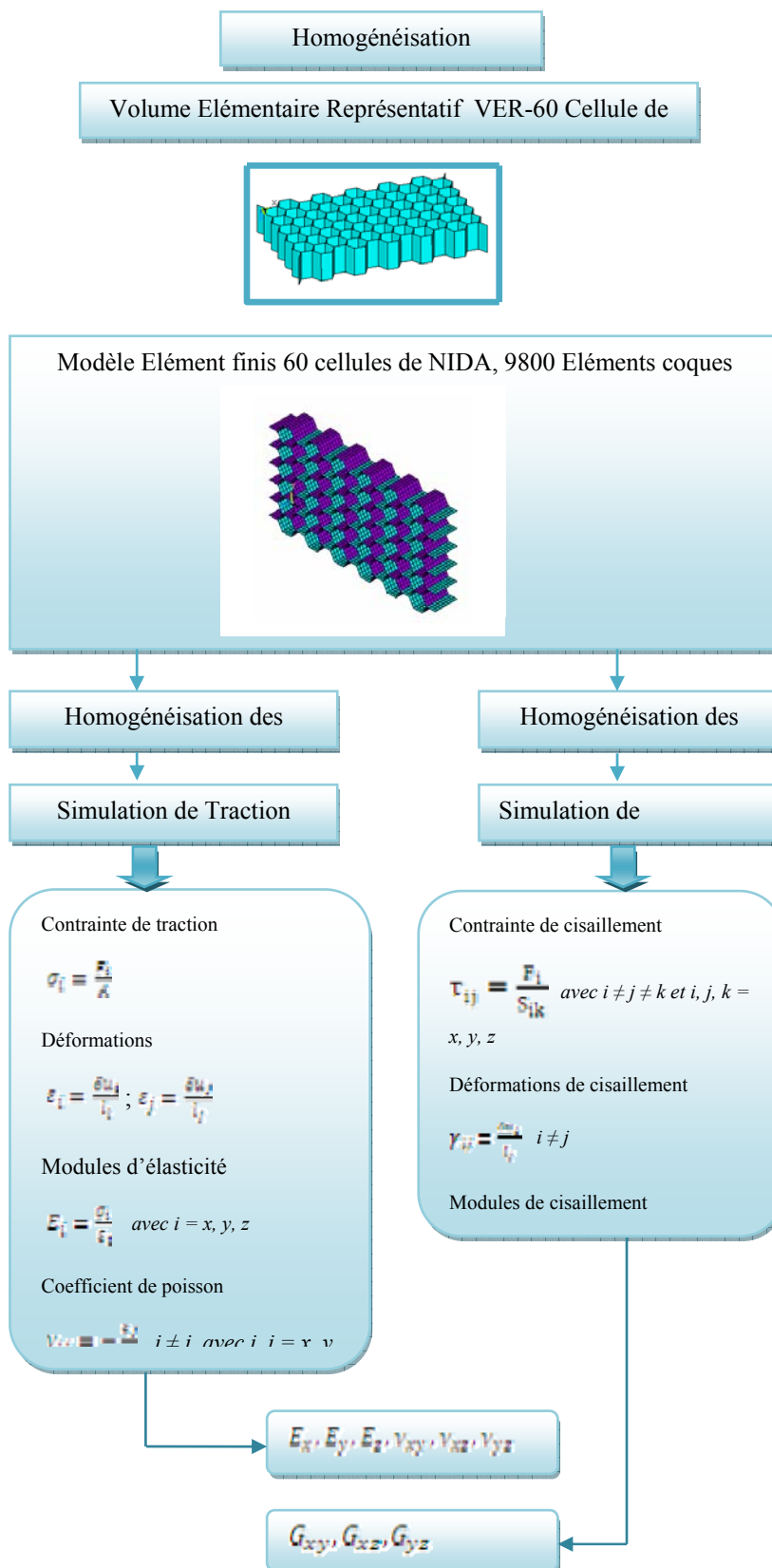
Neuf simulations sont nécessaires pour déterminer les neuf constantes: Trois simulations en traction simple, chacune permettra de calculer un module d'élasticité et deux coefficients de Poisson. Six simulations de cisaillement: Une pour chaque module de cisaillement. Il est important de bien définir les propriétés mécaniques d'un nid d'abeille liées à ses caractéristiques géométriques [YAN-03].

II.5.1. Volume élémentaire représentatif (V.E.R)

Le V.E.R est nécessaire pour des raisons de temps de calcul et de puissance de calcul disponible, de réduire les modèles et donc d'utiliser les symétries du modèle. Dans le cas des structures en nids d'abeille régulières, le nombre de modèles pouvant être créés est très grand (abondant). Le choix des modèles retenus est guidé par les études et les simulations effectuées sur le nid d'abeille hexagonal par de nombreuses

équipes de recherche [CHE-11, BUA-03, HAR-08]. Le choix du *V.E.R* est dicté par le souci de comparaison et de vérification de nos résultats. Si on se réfère aux notations de la figure II.1, les caractéristiques géométriques des structures à cellule hexagonale, carré et triangulaires sont les suivantes: $l = h = 5$ à $7,5$ mm avec un pas de $0,5$ mm, $t = 0,075$ mm et $b = 8,8$ mm. Le matériau de base des cellules est l'aluminium avec les caractéristiques mécaniques $E_s = 70$ GPa, $G_s = 26,9$ GPa, $\nu = 0,34$.

II.5.2 Organigramme d'homogénéisation numérique



II.5.3 Conditions aux limites et méthodes de calcul par éléments finis

Le modèle de simulation des nida hexagonale, carrée et triangulaire (figure II.5), effectuées sur le code de calcul des structures ANSYS, prend en compte 60 cellules maillées avec des éléments SHELL63 à 4 nœuds et 6 degrés de liberté par nœud. Le maillage choisi permet de ne pas alourdir le calcul tout en gardant une bonne précision sur les résultats. Chaque ligament contient 40 éléments, 10 suivant la hauteur et 4 suivant la longueur [CHE-11, BUA-03, ABB-09, HAR-08].

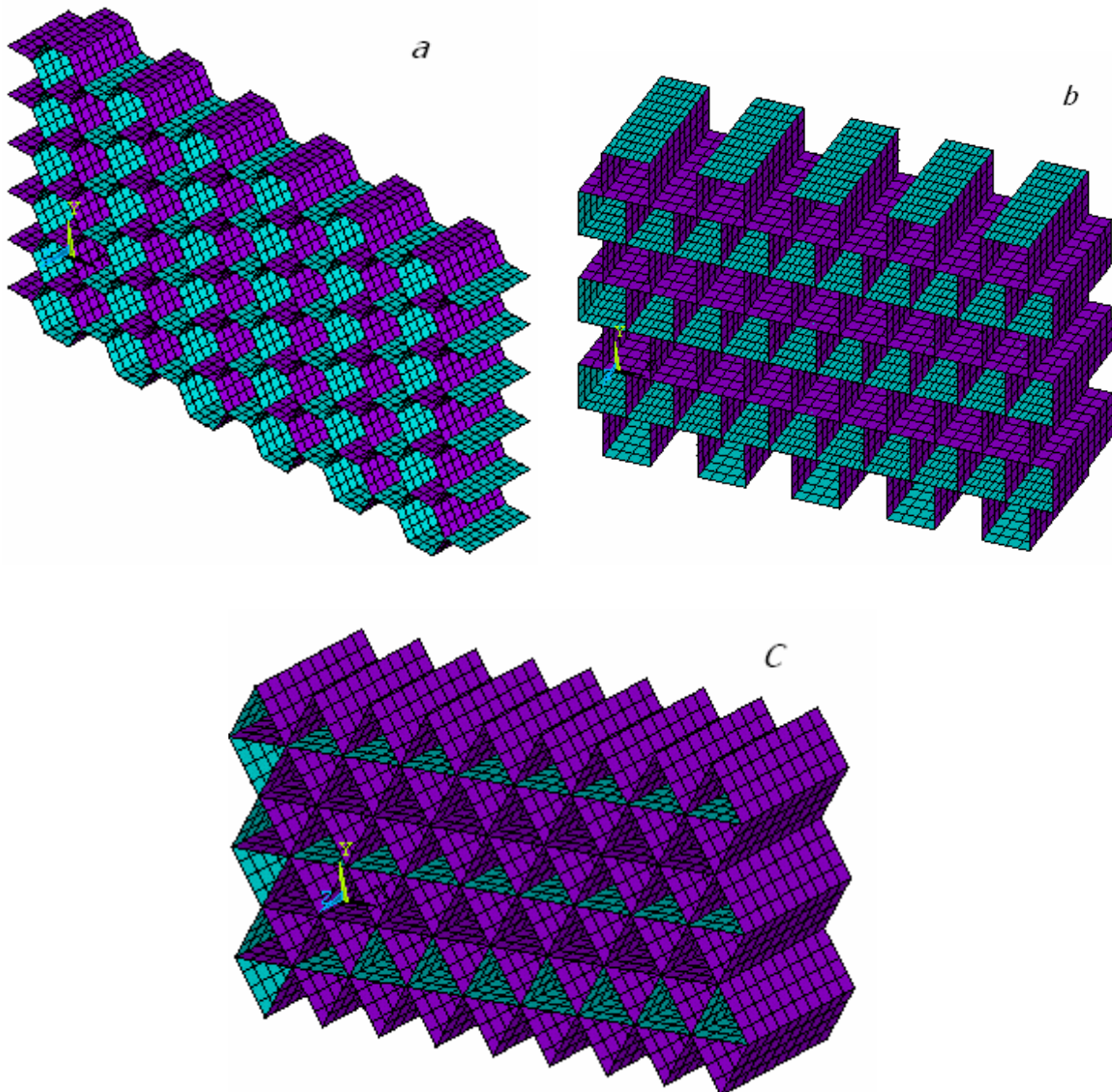


Figure II.5. V.E.R Pour les trois structures cellules régulières.
(a) hexagonale, (b) carrée, (c) triangulaire.

Pour calculer les différents modules, un déplacement est imposé sur une face du $V.E.R$ dans une direction donnée. Les symétries sont prises en compte au niveau des conditions aux limites.

- La simulation d'une sollicitation de traction suivant une direction i ($i = x, y, z$) permet de déterminer les trois modules de d'élasticité E_1, E_2 et E_3 et les six coefficients de Poisson ($\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{13}, \nu_{31}, \nu_{23}$ et ν_{32}).
- La simulation des sollicitations en cisaillement suivant les plans (x, y) , (y, z) et (x, z) (deux simulations par plan) permet de déterminer les six modules de cisaillement $G_{12}, G_{21}, G_{23}, G_{32}, G_{13}, G_{31}$
- Cette méthode basée sur les efforts aux liaisons à partir d'un déplacement imposé permet par l'utilisation des lois de comportement de déduire les constants élastiques.

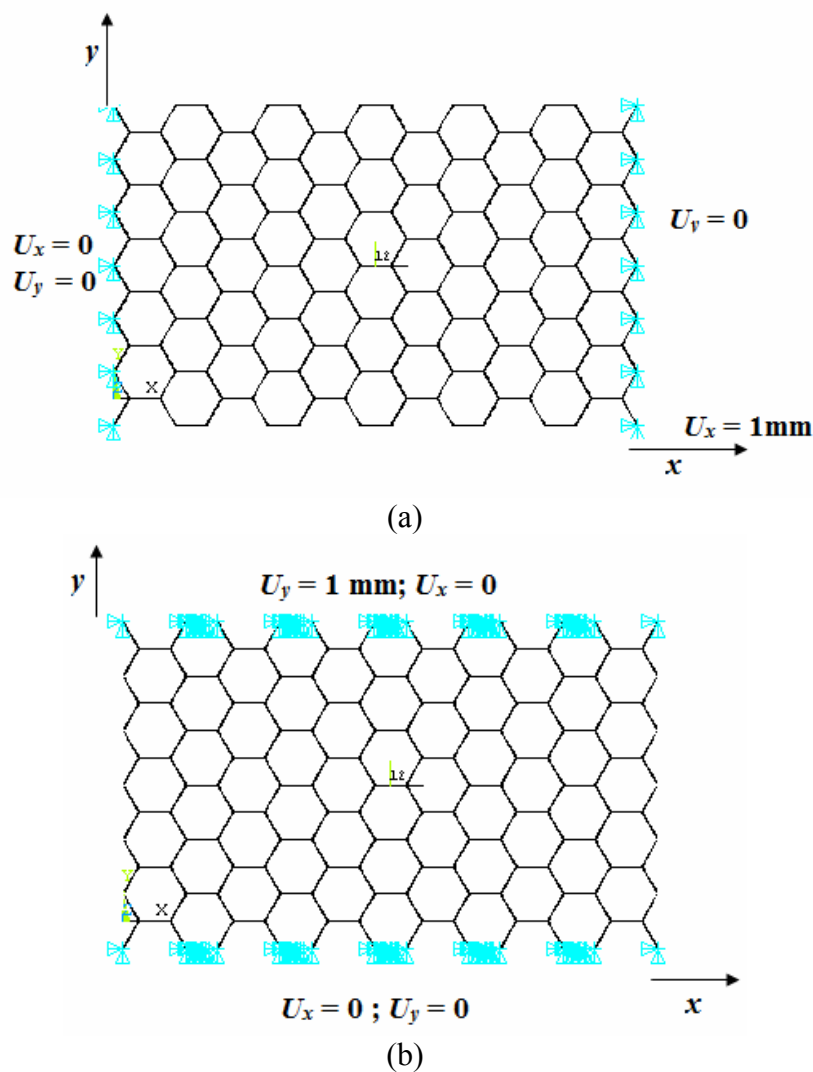


Figure II.6. Conditions aux limites pour une simulation de traction dans le plan (x, y) .
(a) selon l'axe x , (b) selon l'axe y .

Trois simulations en traction permettent de déterminer les modules d'élasticité et les coefficients de Poisson.

Dans le cas d'une traction uni-axiale, les modules d'élasticité sont pour $i = x, y, z$:

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \quad (\text{II.33})$$

Où la contrainte de traction est déduite à partir des efforts de liaisons:

$$\sigma_i = \frac{F_i}{S} \quad (\text{II.34})$$

F_i est la force des réactions des nœuds du *V.E.R.* suivant la direction i (déduite à partir de la variation du déplacement δu_i imposé). S est la surface perpendiculaire au déplacement imposé δu_i . Les déformations, sont [BUA-03, ABB-09]:

$$\varepsilon_i = \frac{\delta u_i}{l_i} \quad (\text{II.35})$$

$$\varepsilon_j = \frac{\delta u_j}{l_j} \quad i \neq j, \text{ et } i, j = x, y, z \quad s \quad (\text{II.36})$$

δu_i est le déplacement (imposé) dans la direction i et l_i la longueur avant la déformation du *V.E.R.* dans la même direction de chargement.

δu_j est obtenu par calcul de déplacement des nœuds de l'extrémité du *V.E.R.* dans la direction j (transversale) et l_j la longueur avant la déformation du *V.E.R.*

Les coefficients de Poisson sont déterminés par la relation suivante:

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \quad i \neq j \text{ et } i, j = x, y, z \quad (\text{II.37})$$

II.6.3.3 Calcul des modules de cisaillements G_{ij} :

De même, la détermination des modules de cisaillements G_{ij} nécessite l'utilisation des lois de comportement élastique. Les simulations de cisaillement sont indispensables à la détermination de G_{ij} , en bloquant les déplacements d'une face et en appliquant un cisaillement sur la face opposée (Figure II.7). La loi de comportement dans le cas d'une sollicitation de cisaillement est [CHE-11, ABB-09] :

$$G_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}} \quad i \neq j \text{ et } i, j = x, y, z \quad (\text{II.38})$$

Pour la contrainte de cisaillement:

$$\tau_{ij} = \frac{F_i}{S_{ijk}} \quad i \neq j \neq k \text{ et } i, j, k = x, y, z \quad (\text{II.39})$$

Et la déformation de cisaillement :

$$\gamma_{ij} = \tan \gamma_{ij} = \frac{\delta u_i}{l_i} \quad i \neq j \quad (\text{II.40})$$

F_i est la réaction des forces aux noeuds.

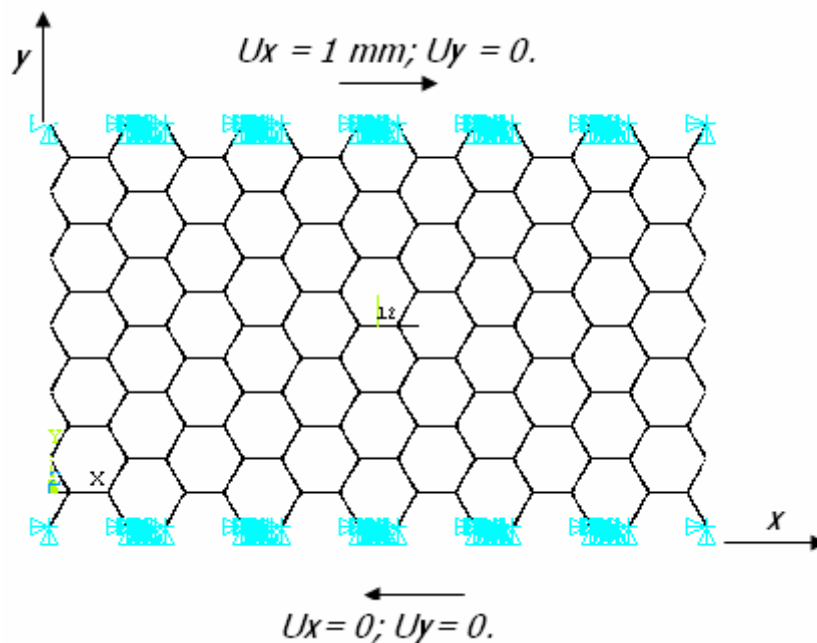


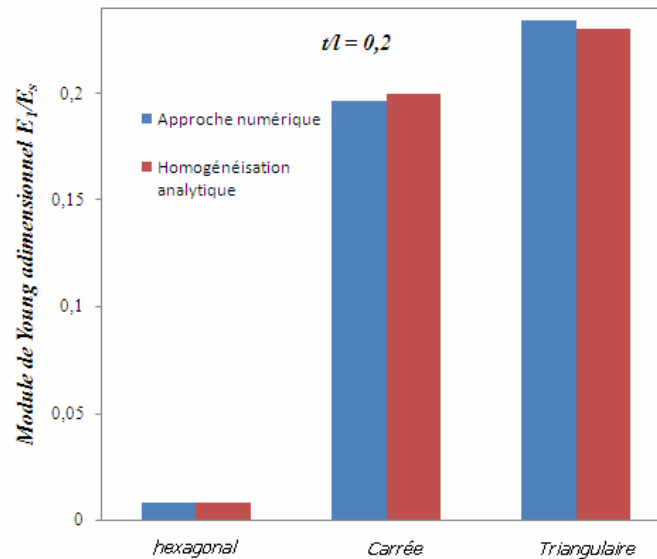
Figure II.7. Principe de test de cisaillement.

II.6. Résultats et discussion

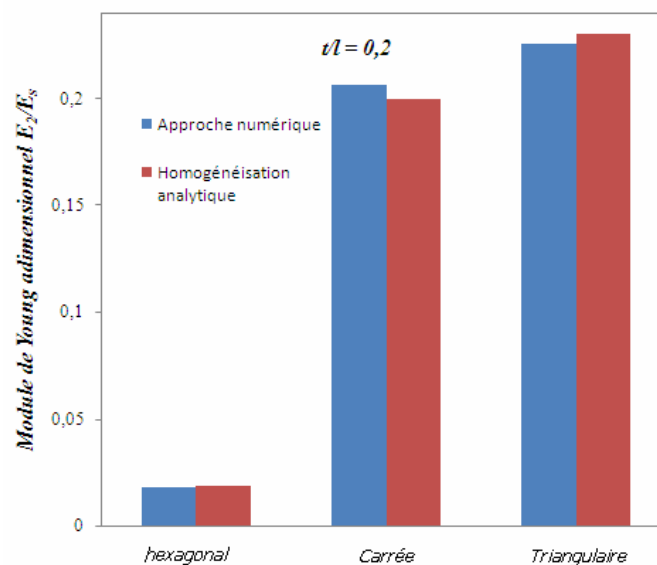
II.6.1. Module d'élasticité E_1 et E_2

La figure II.8 montre l'influence de l'arrangement géométrique sur les propriétés mécaniques, pour un rapport fixe entre l'épaisseur et longueur de la paroi ($t/l = 0,2$) pour les trois structures régulières carrées, triangulaire ou hexagonale. Sur la figure II.8 la structure à cellules triangulaires est plus raide par 12,5 fois comparons avec une structure à cellules hexagonale. Pour un rapport fixe entre l'épaisseur et la longueur de la paroi, la densité d'un nid d'abeilles triangulaires est trois fois plus grande que celle d'un nid d'abeilles hexagonal. Ce qui démontre bien l'influence de

l'arrangement géométrique sur le comportement des matériaux cellulaires. Les résultats pour les deux modules sont calculés par la méthode d'homogénéisation numérique et analytique. L'écart type entre les deux méthodes est de l'ordre 0,00063, 0,0068 et de 0,0049 respectivement pour une structure à cellules hexagonale, triangulaire et carrée. Ces faibles écarts types démontrent bien la bonne concordance entre les résultats obtenus par la simulation numérique et l'homogénéisation analytique.



(a)



(b)

Figure II.8. Module de Young pour les trois structures régulières pour un rapport fixe entre l'épaisseur et la longueur de la paroi ($t/l = 0,2$). (a) E_1/E_s , (b) E_2/E_s .

La figure II.9 représente la distribution du champ de contrainte σ_x en Pa dans les parois d'un V.E.R simulé en traction pure.

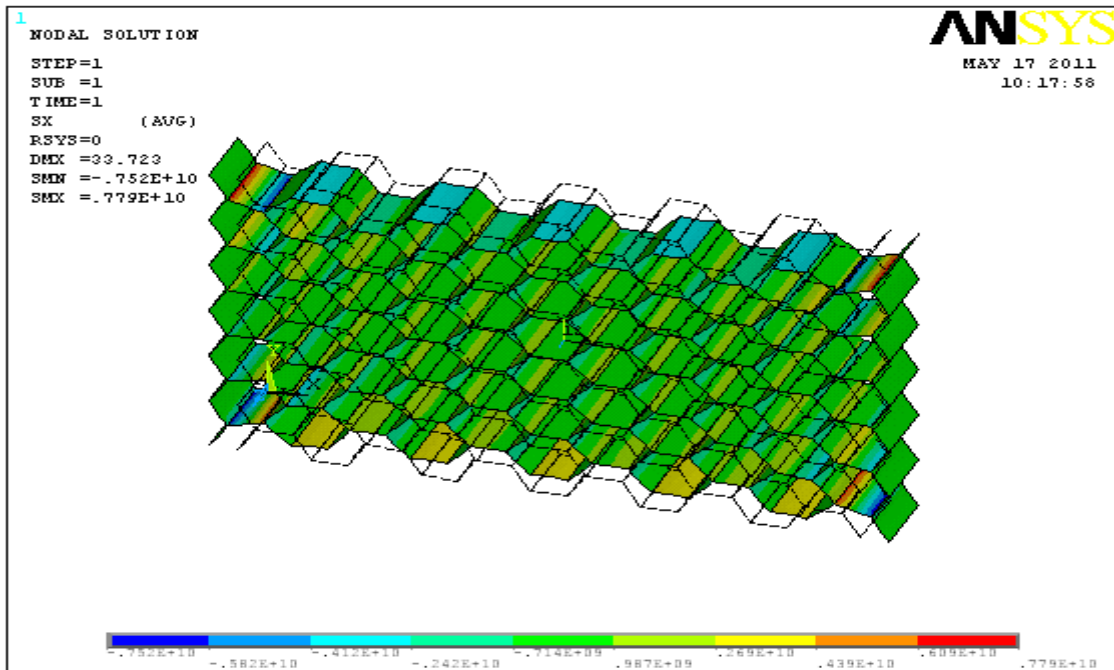


Figure II.9. Distribution du champ de contrainte dans le V.E.R d'une structure à cellules hexagonales (chargement suivant l'axe x).

Le champ de contrainte σ_y pour un nid d'abeille hexagonal sollicité en traction est représenté sur la figure II.10, où l'axe de chargement est y.

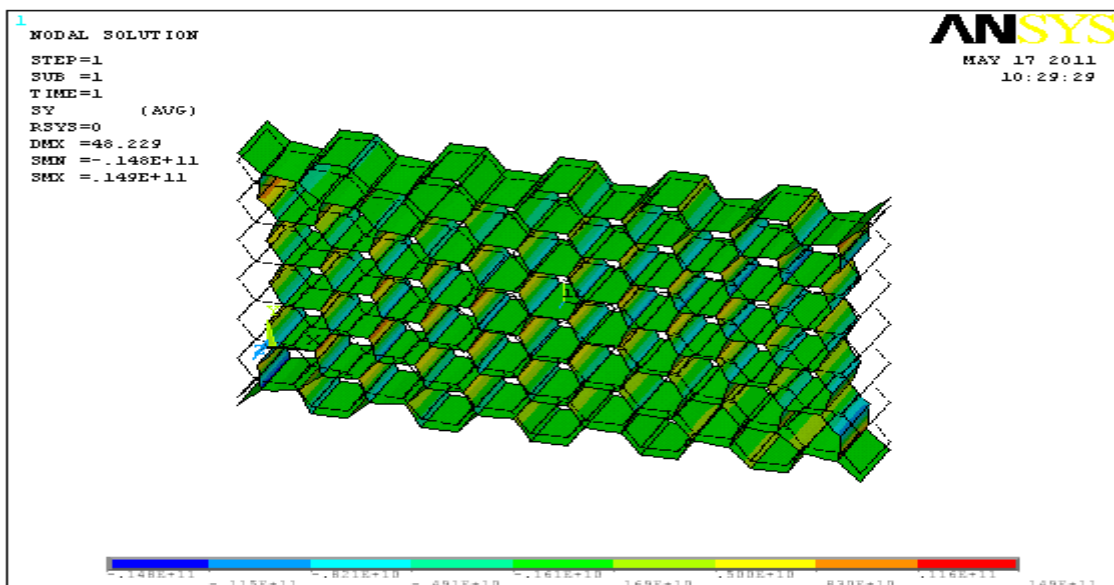


Figure II.10. État de la contrainte σ_y dans le V.E.R d'une structure à cellules hexagonale (l'axe de chargement est y).

II.6.3. Calcul du module d'élasticité E_3

Pour calculer le Module de Young hors plan on peut utiliser la même méthodologie de calcul (conditions aux limites et formulation). Un déplacement suivant l'axe z de 1 mm a été imposé sur la face supérieure, et aussi tous les déplacements sont bloqués au niveau de la face inférieure (Figure II.11).

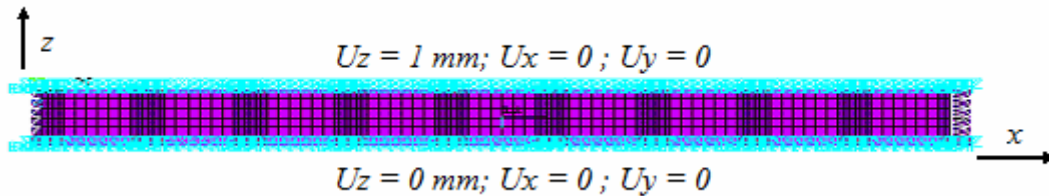


Figure II.11 Conditions aux limites pour une traction suivant la direction z

Le calcul du module de Young hors plan se fait par l'intermédiaire de la relation suivante :

$$E_3 = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_z} \quad (\text{II.40})$$

Le champ de contrainte σ_z est représenté dans la figure II.12.

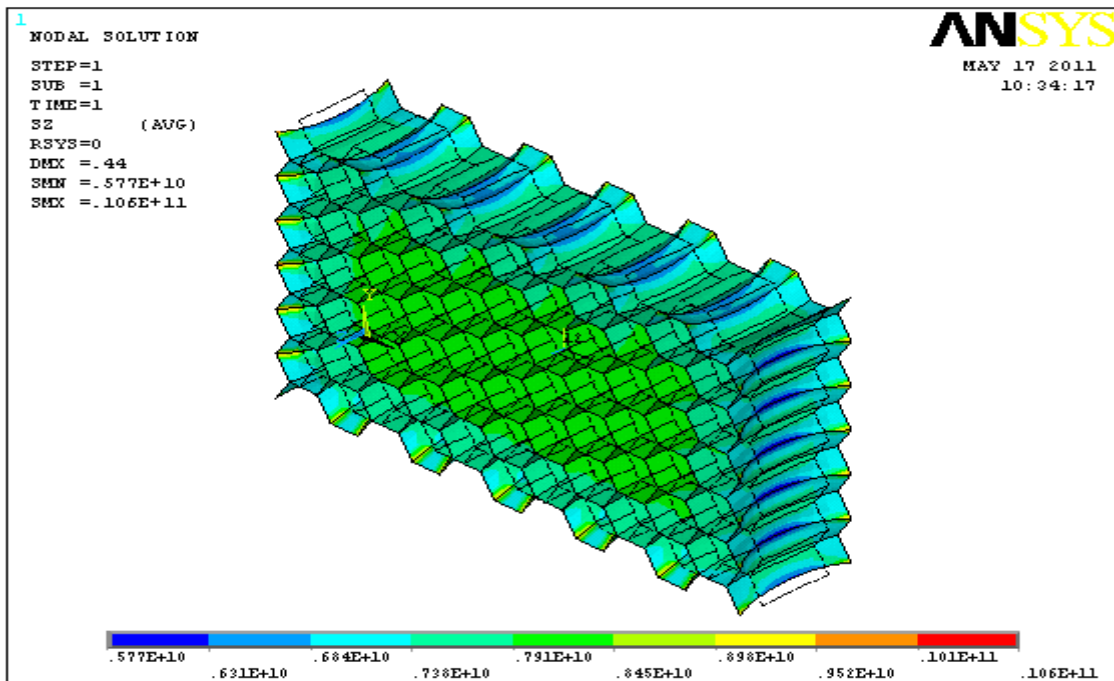


Figure II.12. État de la contrainte dans le V.E.R d'une structure à cellules hexagonales (chargement suivant l'axe z).

II.6.4 Modules de cisaillement G_{12}

La détermination des modules de cisaillement G_{12} est effectuée en imposant un déplacement dans un plan (x, y) . La méthode de détermination des modules consiste à bloquer en translation la face inférieure et on applique un déplacement à la face supérieure du *V.E.R* (Fig. II.7).

La figure II.13 représente l'état de contrainte de cisaillement τ_{xy} dans le *V.E.R*.

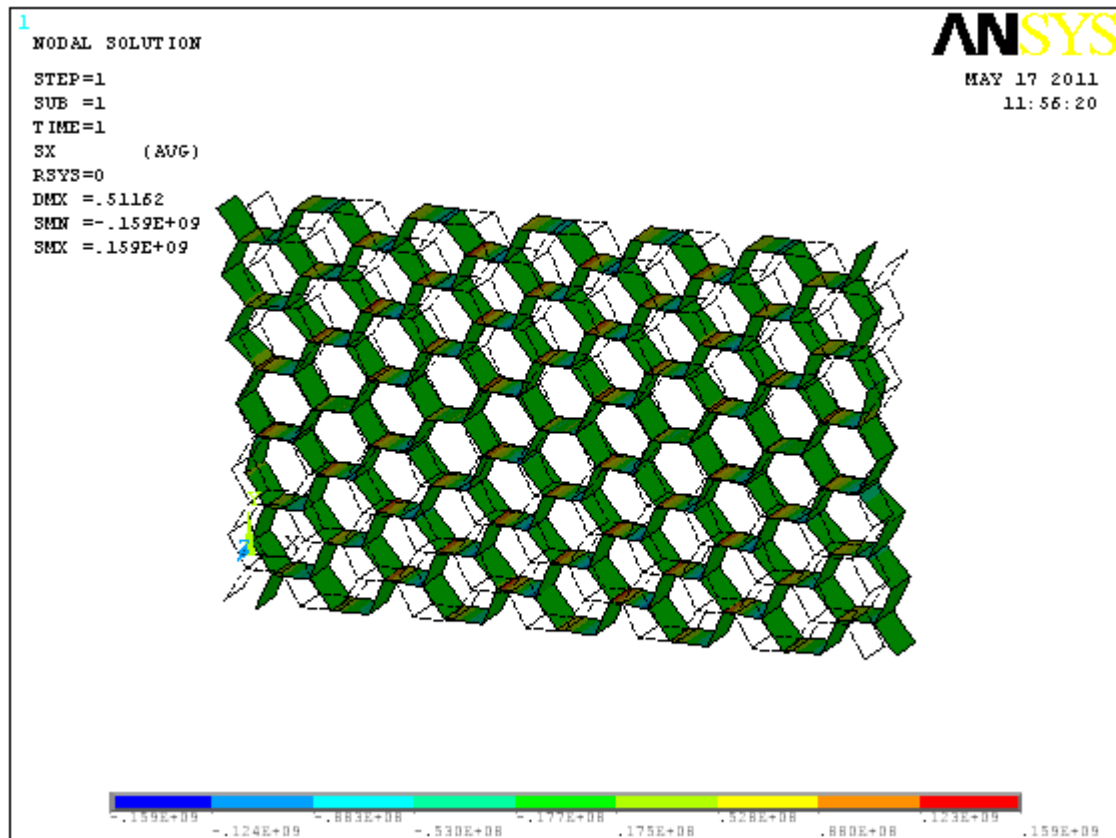


Figure II.14. État de la contrainte de cisaillement dans le *V.E.R* d'une structure à cellules hexagonales.

Les figures II.15, II.16 et II.17 représentent respectivement l'évolution des modules de Young sans dimension E_1 , E_2 et E_3 en fonction de la densité relative par la méthode analytique de Gibson et Ashby, comparé à ceux obtenus par l'approche numérique du présent travail. Les résultats obtenus par ANSYS montrent une bonne concordance avec les résultats analytique. L'évolution des modules de Young E_1 , E_2 , en fonction de la densité relative est du type puissance alors que celle de E_3 est de type linéaire. Les évolutions des modules E_1 , E_2 , et E_3 pour les cellules régulières peuvent être déterminé par les formules:

$$E_1 = E_2 = 1.5 E_s \rho^3 \quad (\text{II.41})$$

$$E_3 = E_s \rho^{*2} \tag{II.42}$$

Où $\rho^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{t}{l}\right)$ (II.43)

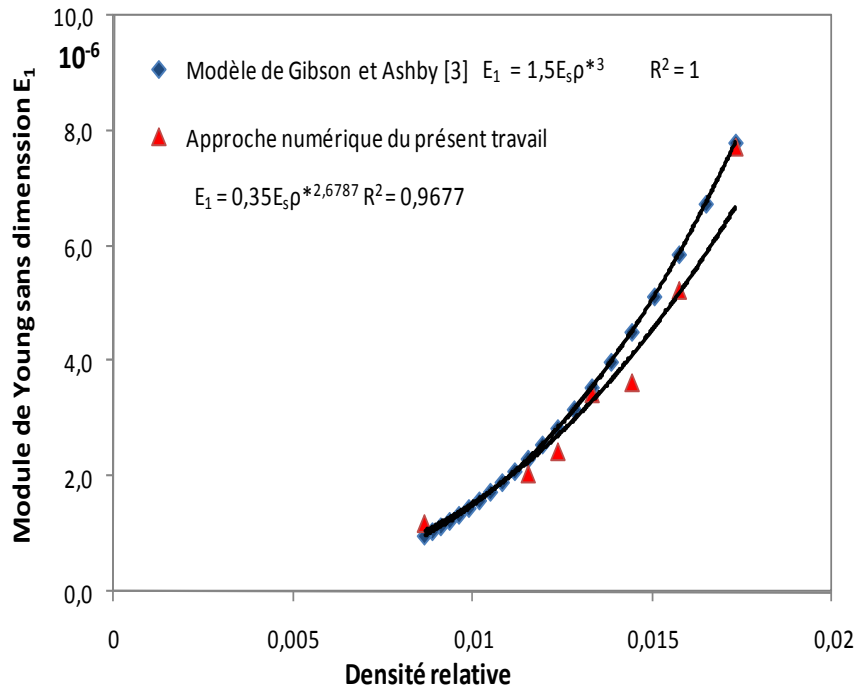


Figure II.15. Évolution du module de Young E_1 en fonction de la densité relative.

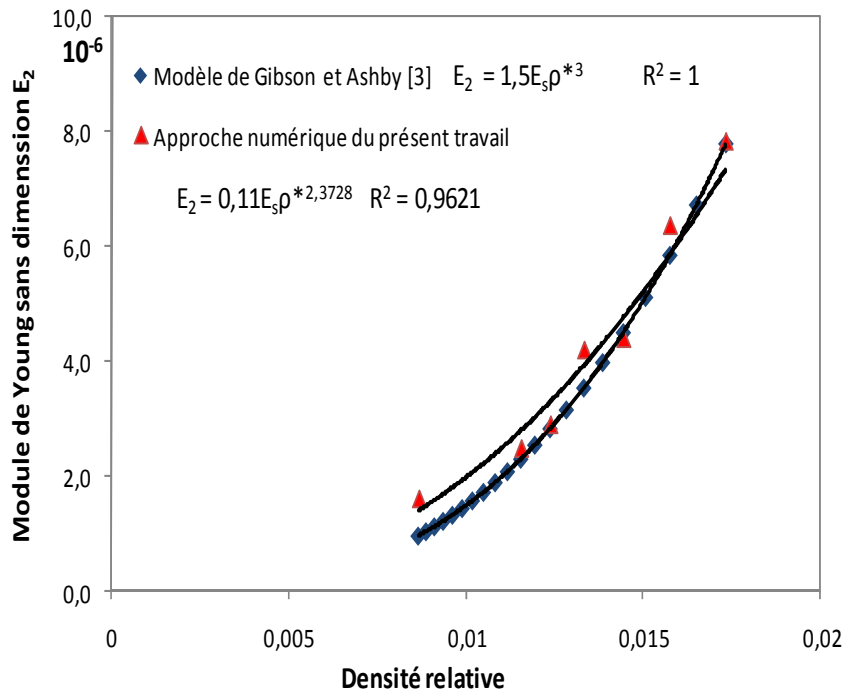


Figure II.16 Évolution du module de Young adimensionnel E_2 en fonction de la densité relative.

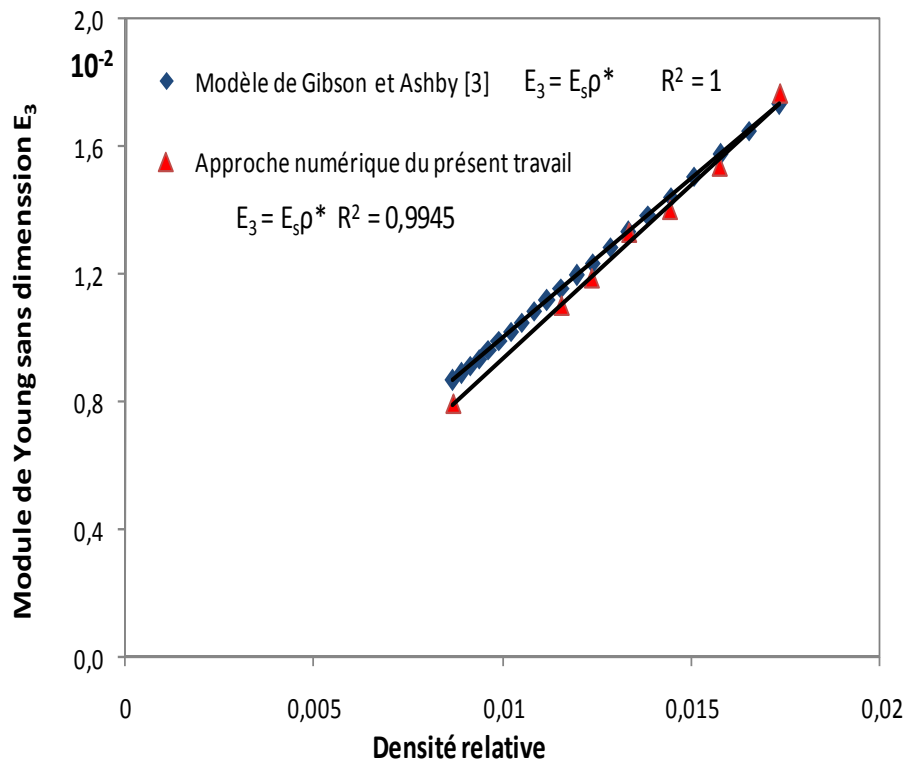


Figure II.17. Évolution du module de Young E_3 en fonction de la densité relative.

L'évolution du module de cisaillement G_{12} en fonction de la densité relative est représentée dans la figure II.19. Les résultats de l'approche numérique obtenus par le code de calcul des structures ANSYS montrent une bonne concordance avec la modélisation analytique. L'évolution de module de cisaillement G_{12} pour les cellules régulières sans dimension s'effectue selon la formule:

$$G_{12} = 0.375 E_s \rho^{*3} \quad (\text{II.44})$$

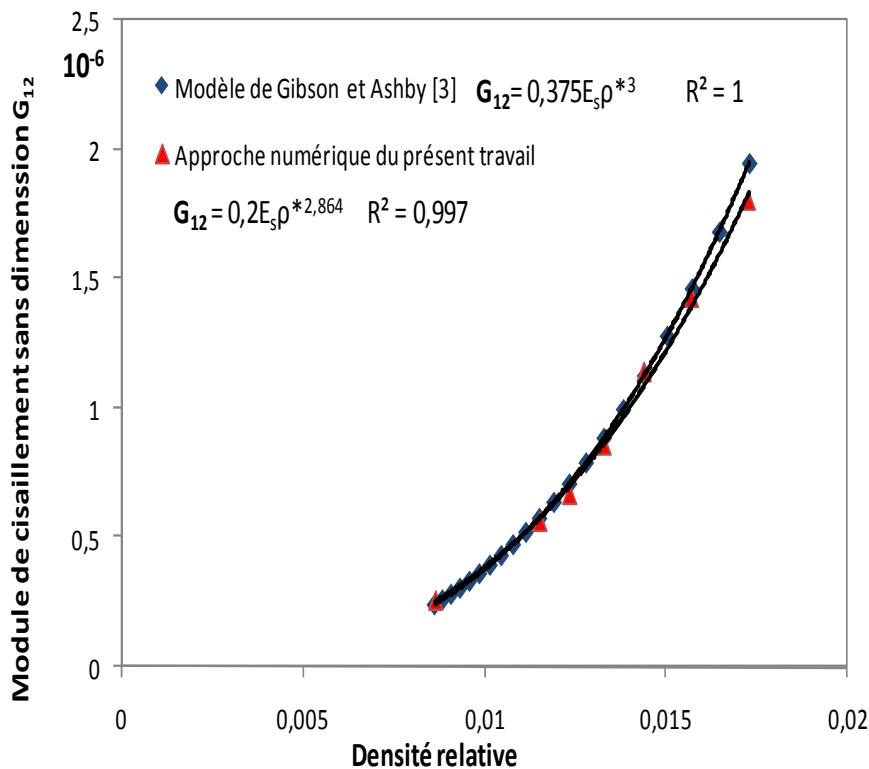
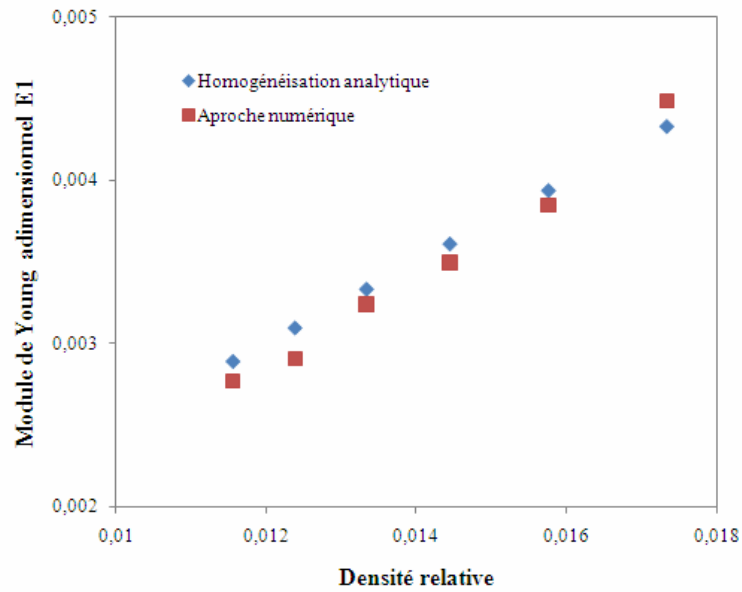


Figure II.18. Évolution du module de cisaillement G_{12} en fonction de la densité relative.

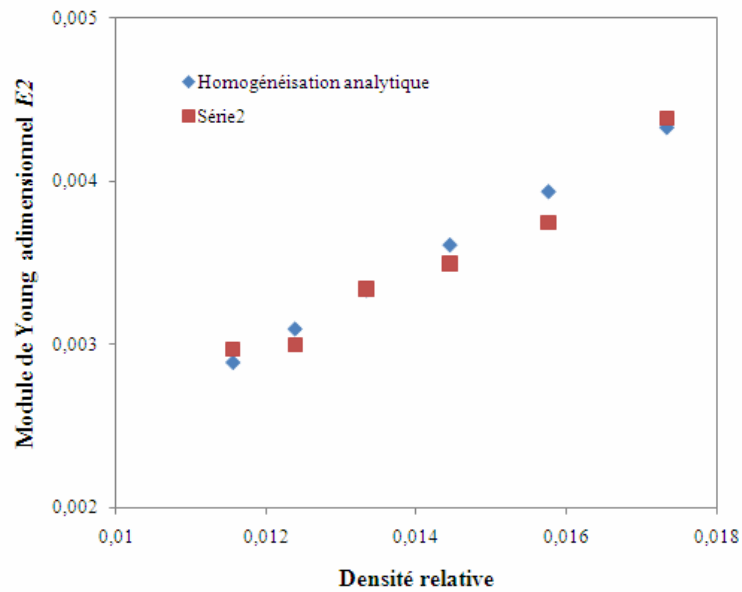
De la même manière les figures II.19 et II.20 représentent le comportement des modules de Young adimensionnel en fonction de la densité relative dans le plan pour des structures à cellules carrées et triangulaires respectivement. Les résultats obtenus pour les mêmes rapports de densité relative, les deux méthodes d'homogénéisations analytique et numérique montrent que la structure à cellules triangulaire présente un module plus élevé. Rappelons que la densité d'une structure à cellules triangulaires est trois fois plus grande comparativement à une structure à cellules hexagonale, pratiquement si on utilise la même densité relative on aura une taille du ligament divisé par trois pour la cellule triangulaire cela conduit à avoir des poutres (ligament) plus raide. Le tableau II.2 suivant illustre les formules pour les densités relatives de chaque type de structure.

Tableau II.2. Les principales formulations pour les trois structures à cellules régulières.

Structure à cellules	Densité relative	Module de Young adimensionnel E/E_s
hexagonale	$\rho_H = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{t}{l}\right)$	$E_1 = 1.5 E_s \rho_H^3$
carrée	$\rho_C = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{t}{l}\right)$	$E_1 = E_s \rho_C/4$
triangulaire	$\rho_T = \frac{6}{\sqrt{3}} \left(\frac{t}{l}\right)$	$E_1 = E_s \rho_T/3$

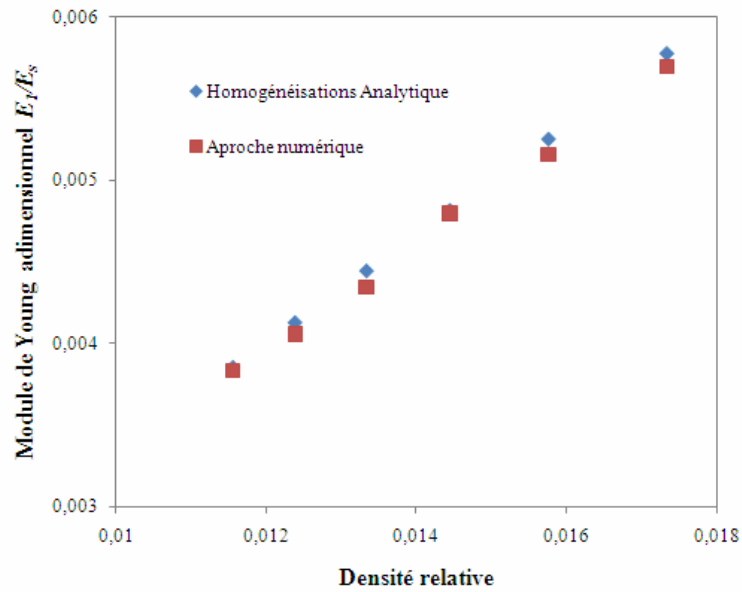


(a)

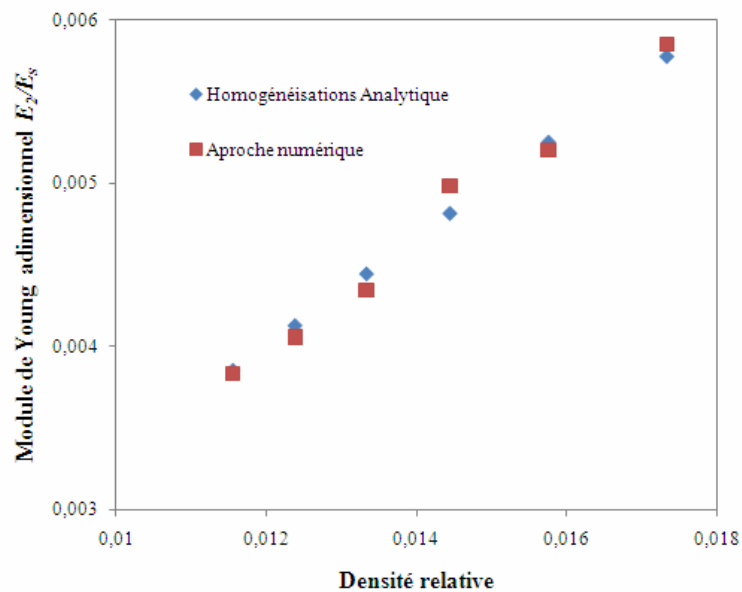


(b)

Figure II.19. Évolution du module de Young adimensionnel en fonction de la densité relative pour une structure à cellules carrées. (a) E_1/E_s , (b) E_2/E_s .



(a)



(b)

Figure II.20. Évolution du module de Young adimensionnel en fonction de la densité relative pour une structure à cellules triangulaires. (a) E_1/E_s , (b) E_2/E_s .

II.7. Conclusion

Dans ce chapitre est montré les différentes méthodes de calcul d'homogénéisation analytique et numérique des nids d'abeille ayant la forme hexagonale, carrée et triangulaire. Les résultats obtenus par les deux méthodes analytique et numérique sont

en bonne concordance pour les différents modules d'élasticité et de cisaillements ainsi que des différents coefficients de Poisson. De plus, les principales conclusions de ce chapitre sont les suivants :

- Les structures à cellules triangulaires montrent un module adimensionnel plus élevé jusqu'à un rapport de 12,5 fois comparé à celui obtenu pour des structures à cellules hexagonales avec un rapport fixe entre la taille du ligament et l'épaisseur de la paroi ;
- Pour un rapport fixe entre l'épaisseur et la longueur de la paroi, la densité d'un nid d'abeilles triangulaires est trois fois plus grande que celle d'un nid d'abeilles hexagonales.
- Le choix de la structure à cellules hexagonales pour les applications aux panneaux sandwichs est guidé par sa forte porosité et aussi le rapport le plus élevé entre la densité relative et le module adimensionnel. A titre d'exemple pour ($t/l = 0,2$) le module adimensionnel d'un nid d'abeille hexagonal est égale à $E/E_s = 0,0178$ avec une densité relative égale à 0,23 ceci donne un rapport égale à 12,95. Par contre la structure à cellules triangulaire pour $t/l = 0,2$ donne un module adimensionnel égale à $E/E_s = 0,226$ avec une densité relative de 0,69 ceci conduit à un rapport égale à 3.
- La bonne concordance montre les résultats analytique et numérique conduit à pouvoir employer cette dernière pour la détermination des propriétés élastiques d'une structure à cellules irrégulières qui va être présenté dans le chapitre III.

II.8. Références

- [ABB-09] Ahmed Abbadi, Y. Koutsawa, A. Carmasol, S. Belouettar, Z. Azari: Experimental and numerical characterization of honeycomb sandwich composite panels; *J Simulation Modelling Practice and Theory* x x x (2009) x x x –x x x .
- [ARB-09] Jamal Edine, Arbaoui. Etude Comparative et Caractérisation Mécanique Des Structure Sandwiches Multicouches. Thèse de Doctorat de l'université de PAUL VERLAINE – METZ. 2009.
- [BUA-03] Natacha Buannic, Patrice Cartraud, Tanguy Quesnel: Homogenization of corrugated core sandwich panels, *J Composite Structures* V: 59 ;(2003) pp: 299–312.
- [CHE-11] D.H. Chen, L. Yang: Analysis of equivalent elastic modulus of asymmetrical honeycomb, *J Composite Structures* V:93 (2011); pp:767–773.
- [JAM-08] X . James Ren, Vadim V. Silberschmidt; Numerical modelling of low-density cellular materials; *J Computational Materials Science* V: 43 (2008) pp: 65–74.
- [HAR-08] El-haddi Harkati. Analyse du comportement et l'endommagement des matériaux composites stratifiés et sandwiches. Thèse de Doctorat de l'université de Guelma. 2008.
- [LAS 10] B. Lascoup, Z. Aboura, K. Khellil, M. Benzeggagh: Homogenization of the core layer in stitched sandwich structures; *JComposites Science and Technology* V:70 (2010); pp:350–355.
- [YAN-03] D.U. Yang, S. Lee, F.Y. Huang: Geometric effects on micropolar elastic honeycomb structure with negative Poisson's ratio using the finite element method; *J Finite Elements in Analysis and Design*; V: 39 (2003); pp: 187–205.
- [ZHU-11] H.X . Zhu, C.Y. Chen b: Combined effects of relative density and material distribution on the mechanical properties of metallic honeycombs, *J Mechanics of Materials* V: 43 (2011); pp: 276–286.

Chapitre III

Propriétés mécaniques dans le plan des nouvelles cellules convexe et Auxétique (Voronoi)

III.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter la méthode développée pour la mise au point de la géométrie et la création de nouvelles cellules Voronoi convexe et auxétique ayant des topologies diverses que celle rencontrée dans la littérature. Le comportement mécanique de la cellule irrégulière proposée est obtenu par la technique d'homogénéisation numérique en utilisant le code de calcul de structures ANSYS, dont les ligaments de la cellule proposée sont considérés comme des poutres de Timochenko. Ce contenu de ce chapitre a fait l'objet d'une publication internationale [BOU-12].

III.2. Construction de la nouvelle cellule hexagonale

III.2.1 Topologie convexe

La cellule nids d'abeilles irrégulière (Voronoi) connue dans la littérature est basée sur la soustraction des segments perpendiculaires à la base de chaque triangle formé par les trois points adjacents dans un champ de points placés d'une façon aléatoire dans le plan (x, y) présenté dans la figure III.1a et utilisé par plusieurs auteurs tel que [GIB-97], [SIL-95]. Généralement ces points indiquent les centres des cellules Voronoi, alors que la nouvelle cellule Voronoi proposée dans ce travail est basée sur l'utilisation des centres des triangles (Figure III.1b). Les coordonnées des coins de la nouvelle cellule sont déterminées par le modèle mathématique présenté dans ce travail. Dans le but d'implémenter ce modèle nous avons fait les hypothèses simplificatrices suivantes:

- 1- Les points sont placés de façon aléatoire dans le plan (x, y) .

2- Chaque ligne de ces points doit être parallèle à un axe similaire dans le plan quelconque x_1, y_1 (Figure III.1b).

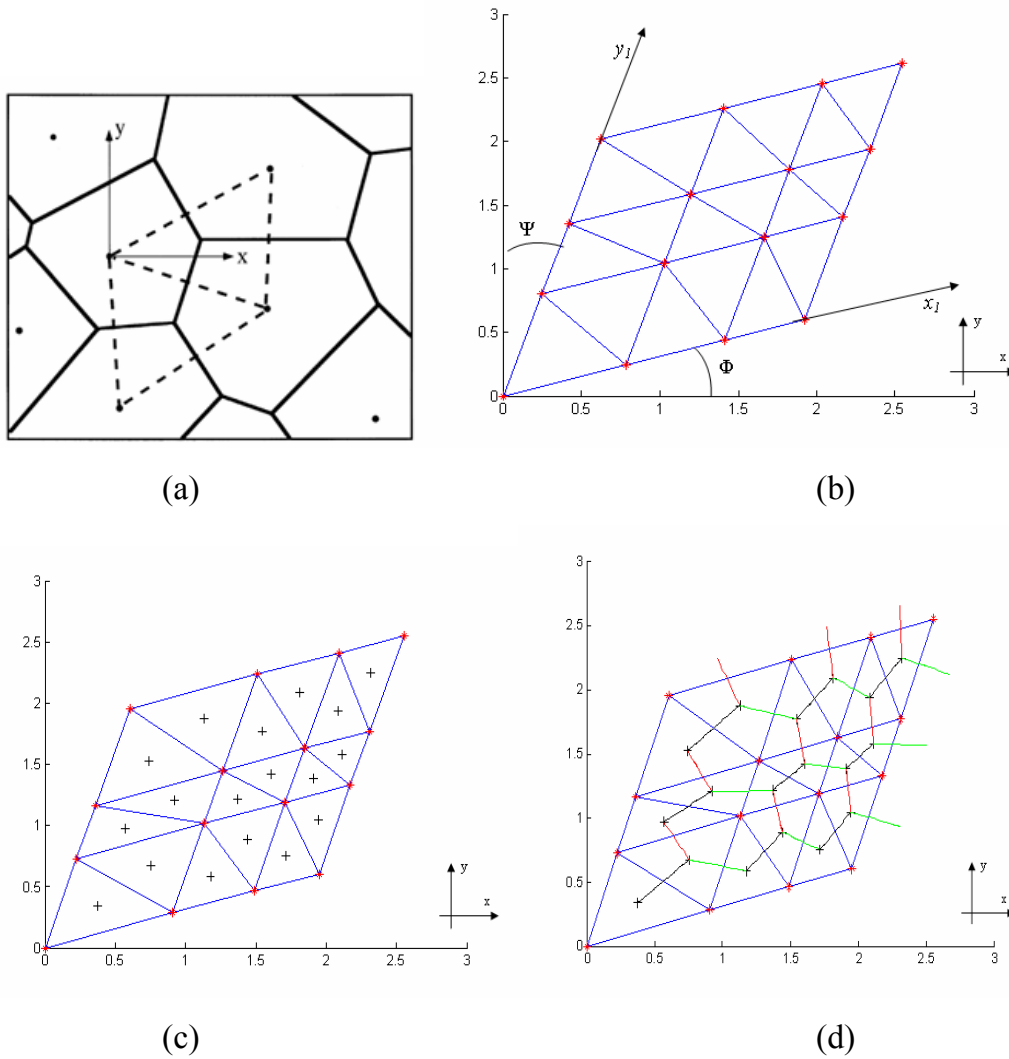


Figure III.1. a) Diagramme Voronoi utilisé pour construire la cellule Voronoi classique [SIL-95], b) triangulation de Delaunay, (c) Coordonnées des coins de la nouvelle cellule irrégulière Voronoi dans le plan xy , d) Diagramme de la nouvelle cellule présentée dans ce travail.

Dans la triangulation de Delaunay les deux triangles voisins construisent un losange, du point de vue matriciel ce losange correspond a une case (i, j) .

Le modèle mathématique ci dessous calcule les centres de deux triangles voisins de la même case (i, j) figure III.1c. Ces centres formeront les sommets de l'hexagone qui matérialise la cellule proposée.

$$x_{\Delta\text{inf}}(i, j) = \frac{d(i, j) - b(i, j)}{a(i, j) - c(i, j)}$$

$$y_{\Delta\text{inf}}(i, j) = a(i, j)x_{\Delta\text{inf}}(i, j) + b(i, j)$$

III .1

$$x_{\Delta\text{sup}}(i, j) = \frac{h(i, j) - f(i, j)}{e(i, j) - g(i, j)}$$

$$y_{\Delta\text{sup}}(i, j) = e(i, j)x_{\Delta\text{sup}}(i, j) + h(i, j)$$

Où : $x_{\Delta\text{inf}}$, $y_{\Delta\text{inf}}$ et $x_{\Delta\text{sup}}$ et $y_{\Delta\text{sup}}$ représentent respectivement les coordonnées du centre du triangle inférieur et supérieur dans le plan (x,y) pour la même case (i,j) .

Les matrices $a(i, j)$, $b(i, j)$, $c(i, j)$, $d(i, j)$, $e(i, j)$, $f(i, j)$, $h(i, j)$, et $g(i, j)$ sont calculées comme suit :

$$a(i, j) = \frac{(x_i - x_{i+1}) \sin \Phi + 1/2(y_{j+1} - y_j) \cos \Psi}{(x_i - x_{i+1}) \cos \Phi + 1/2(y_{j+1} - y_j) \sin \Psi}$$

$$b(i, j) = x_{i+1} \sin \Phi + y_j \cos \Psi - a(i, j)(x_{i+1} \cos \Phi + y_j \sin \Psi)$$

$$c(i, j) = \frac{1/2(x_{i+1} - x_i) \sin \Phi + (y_j - y_{j+1}) \cos \Psi}{1/2(x_{i+1} - x_i) \cos \Phi + (y_j - y_{j+1}) \sin \Psi}$$

$$d(i, j) = x_i \sin \Phi + y_{j+1} \cos \Psi - c(i, j)(x_i \cos \Phi + y_{j+1} \sin \Psi)$$

$$e(i, j) = \frac{1/2(x_i - x_{i+1}) \sin \Phi + (y_{j+1} - y_j) \cos \Psi}{1/2(x_i - x_{i+1}) \cos \Phi + (y_{j+1} - y_j) \sin \Psi} \quad \text{III.2}$$

$$f(i, j) = x_{i+1} \sin \Phi + y_j \cos \Psi - e(i, j)(x_{i+1} \cos \Phi + y_j \sin \Psi)$$

$$g(i, j) = \frac{(x_{i+1} - x_i) \sin \Phi + 1/2(y_j - y_{j+1}) \cos \Psi}{(x_{i+1} - x_i) \cos \Phi + 1/2(y_j - y_{j+1}) \sin \Psi}$$

$$h(i, j) = x_i \sin \Phi + y_{j+1} \cos \Psi - g(i, j)(x_i \cos \Phi + y_{j+1} \sin \Psi)$$

Le diagramme de la nouvelle cellule est conçu selon la séquence suivante :

- Le centre de triangle inférieur de la case (i, j) est raccordé avec le centre de triangle supérieur de la même case (i, j) ;
- Le centre de triangle supérieur de la case (i, j) est raccordé avec le centre de triangle inférieur de la case $(i, j+1)$.
- Le centre de triangle supérieur de la case (i, j) est raccordé avec le centre de triangle inférieur de la case $(i+1, j)$ comme le montre la figure III.1d.

La figure III.2 montre clairement que la nouvelle cellule est différente par rapport à la cellule Voronoi classique, sachant que les deux diagrammes utilisent le même champ des points.

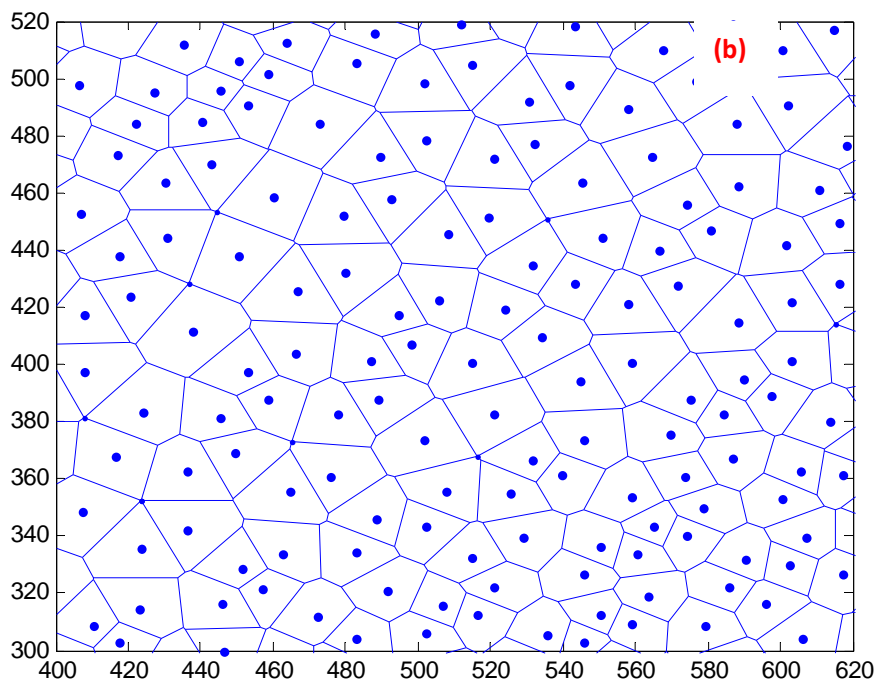
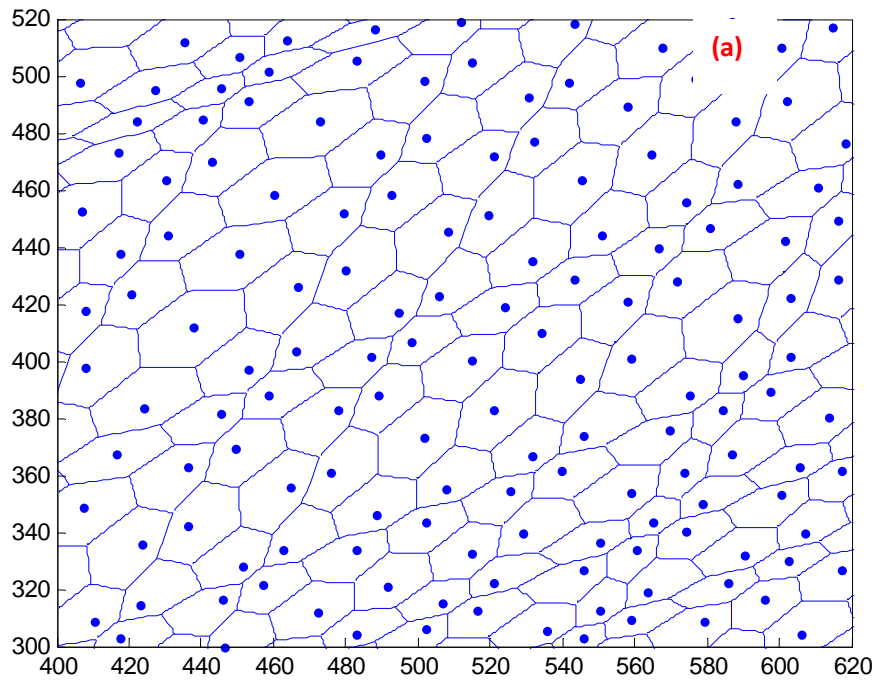


Figure III.2. (a) Cellules obtenues par le diagramme du présent travail, (b) Cellules obtenues par le diagramme de Voronoï classique.

III.2.2 Topologie Auxétique (a coefficient de Poisson négatif)

J justifie Il est possible de créer des cellules réentrante Voronoï irréguliers (Figure III.3), qui pourrait fournir un coefficient de Poisson négatif (comportement auxétique) [BOU-12]. Dans ce cas, la première partie de l'équation III.2 doit être transformé en:

$$a(i, j) = \frac{(x_i - x_{i+1})\sin\phi + k(y_{j+1} - y_j)\cos\psi}{(x_i - x_{i+1})\cos\phi + k(y_{j+1} - y_j)\sin\psi} \quad \text{III.3}$$

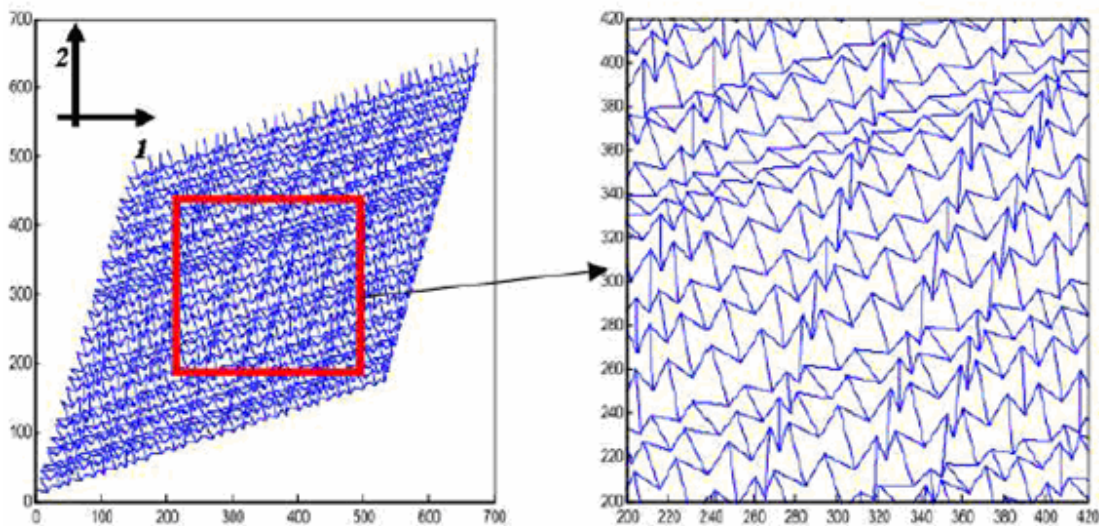


Figure III.3. Structures cellulaires réentrante Voronoï irrégulières proposées.

La quantité de $a(i; j)$ est dépendante du facteur k , où ce facteur est utilisé pour modifier la position du centre de gravité du triangle inférieur dans le diagramme proposé. Pratiquement pour k compris entre 0,5 et 0,8 les structures cellulaires Voronoï générées n'ont pas vraiment un comportement auxétique (Figure III.4), alors que pour $k = 1$ les structures cellulaires réentrante Voronoï irrégulières générées ayant généralement un coefficient de Poisson négative d'environ -0,3. Pour que les ligaments de la cellule Voronoï réentrante restent sans contact géométrique la valeur maximale du facteur k doit être au maximum égale à 1,110, Cette valeur limite de k est utilisée tout long des

simulations effectuées. Il a été démontré qu'un coefficient de k égal à 1,115 conduit à un contact géométrique entre les ligaments (Figure III.4).

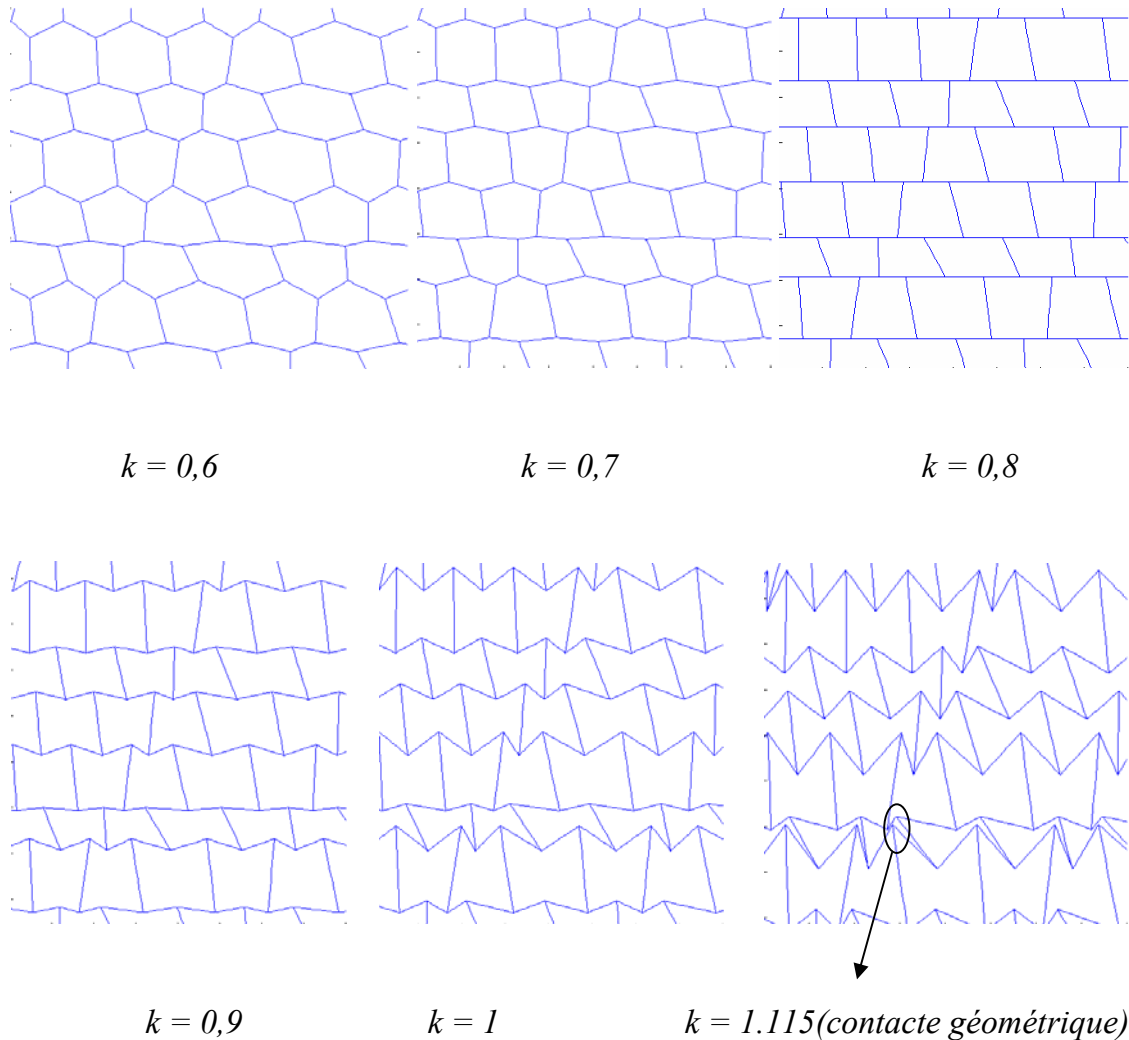


Figure III.4. Variation des formes cellulaires en fonction de k .

III.3 Approche numérique

Les structures nids d'abeilles Voronoi proposées sont générées par MATLAB, puis exporté vers le code de calcul des structures ANSYS. Chaque ligament est considéré comme une poutre de Timoshenko, la totalité de la structure est maillée en 2D par l'élément BEAM3 d'une section rectangulaire et une épaisseur uniforme $t = 1$ mm, cet

élément possède trois degrés de liberté : deux degrés de translation selon les axes x et y , et une rotation dans le plan autour de l'axe z . L'étude de la convergence permet de diviser en cinq éléments les ligaments de chaque cellule.

Dans le plan de base de la structure, trois simulations à deux dimensions ont été nécessaires pour déterminer les cinq constantes élastiques [ZHU-97, LI-05] et qui sont :

- Deux simulations de traction simple, permettant chacune de calculer un module d'élasticité et un coefficient de Poisson (E_1 , E_2 , ν_{12} et ν_{21});
- Une simulation de cisaillement dans le plan (x, y) afin de déterminer le module de cisaillement (G_{12}).

III.3.1 Conditions aux limites

III.3.1.1 Traction uni-axial

Nous avons accompli des simulations de tractions uni-axiales pour les nouvelles cellules Voronoi proposée. La figure III.5 montre les conditions aux limites pour un essai de traction uni-axial dans la direction x d'une structure cellulaire irrégulière Voronoi proposée. Les conditions aux limites utilisées pour les simulations de tractions uni-axiales sont similaires à celle utilisé par Silva *et al* et Scarpa *et al* [SIL-95, SCA-00]. Les contraintes de traction σ_x et σ_y sont obtenues par la sommation des contraintes dans chaque nœud. Le module de Young sans dimension dans le plan est calculé par la loi de Hooke :

$$E_{i,j}^* = \frac{E_{i,j}}{E_c} = \frac{\sigma_{i,j}}{\varepsilon_{i,j}} \frac{1}{E_c} \quad \text{III.4}$$

Où : E_x/E_c et E_y/E_c sont les modules de Young adimensionnel dans le plan selon les directions x et y respectivement.

E_c représente le module de Young du matériau de base des cellules.

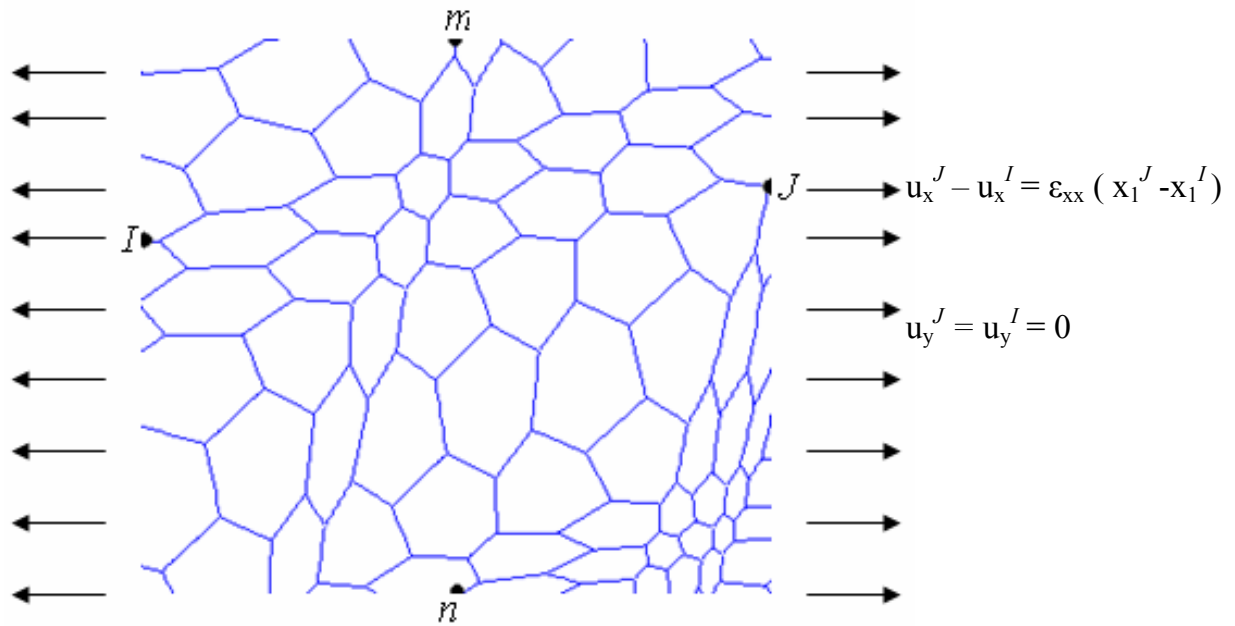


Figure III.5. Conditions aux limites d'une simulation de traction uni-axiale effectuée sur une nouvelle cellule Voronoï proposée.

La déformation transversale ϵ_{yy} homogène est obtenue par le calcul du déplacement des nœuds m et n suivant la relation III.5.

$$\epsilon_{yy} = \frac{(U_y^m - U_y^n)}{L_y} \quad \text{III.5}$$

La déformation dans le sens de traction est calculée par l'équation III.6 :

$$\epsilon_{xx} = \frac{(U_x^J - U_x^I)}{L_x} \quad \text{III.6}$$

L_x et L_y sont respectivement la longueur et la largeur de la structure cellulaire Voronoï proposée.

Les coefficients de Poisson ν_{yx} et ν_{xy} deviennent :

$$V_{yx} = \frac{-\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{-(U_y^m - U_y^n)L_x}{(U_x^j - U_x^l)L_y}$$

III.7

$$V_{xy} = \frac{-\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{yy}} = \frac{-(U_x^j - U_x^l)L_y}{(U_y^m - U_y^n)L_x}$$

Les rotations des ligaments dans le plan sont nulles.

III.3.1.2 Cisaillement pur d'une structure cellulaire

Le module de cisaillement dans le plan a été calculé à l'aide d'un chargement bi-axial appliqué à la fois au coté supérieur et au coté droit de la structure cellulaire Voronoï comme le montre la figure III.6 [BOU-12] ; où u_x et u_y représentent respectivement un chargement de compression selon l'axe x et y .

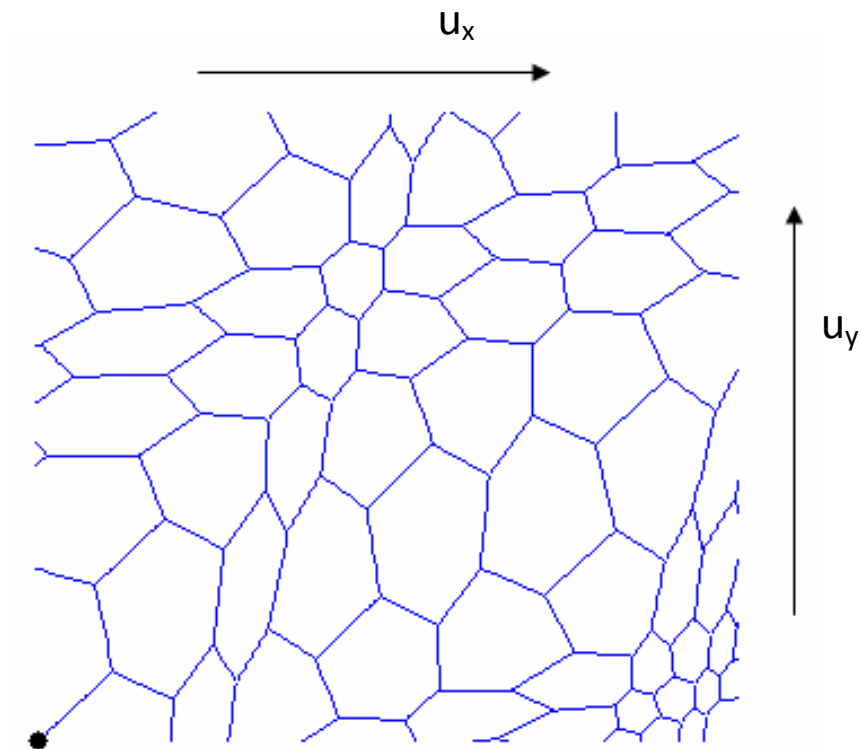


Figure III.6. Principe de la simulation du test de cisaillement par un chargement bi-axial.

Les réactions des forces F_x et F_y sont utilisées pour extraire le module de cisaillement par la relation suivante :

$$G_{12} = \frac{\frac{F_x}{L_y} - \frac{F_y}{L_x}}{2b(\varepsilon_x - \varepsilon_y)} \quad \text{III.9}$$

Où : L_x et L_y sont les dimensions de la structure simulé selon l'axe x et y respectivement, b est l'hauteur de la cellule selon l'axe z .

Il est important de signaler que les simulations de traction et de cisaillement sont effectuées cinq fois sur des structures ayant la même densité relative afin de présenter dans nos résultats les dispersions (aro-barre). Le matériau de base des cellules Voronoi (l'aluminium) est considéré comme un matériau ayant un comportement linéaire élastique isotrope.

III.4 Densité relative de la nouvelle cellule Voronoi proposée

De manière générale, le paramètre le plus important qui contrôle les propriétés mécaniques est la densité relative (ρ/ρ_c), où ρ désigne la densité moyenne de la structure cellulaire et ρ_c densité sans pores c'est-à-dire matériau de base des cellules. La densité relative de la nouvelle cellule Voronoi est considérée comme étant la somme suivante [BOU-12]:

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \sum_i t \frac{l_i}{L_x L_y} \quad \text{III.10}$$

Où l_i : est la taille du ligament pour chaque cellule irrégulière.

La relation III.10 a été aussi utilisée par [FAZ-02] dans le cas d'une cellule Voronoi classique.

L'allure du comportement de la densité relative (ρ/ρ_c) en fonction du nombre de cellules (N_c), présenté dans la figure III.7, peut être d'écrite par le polynôme d'ordre 2 suivant : $(\frac{\rho}{\rho_c} = -4.5310^{-6}N_c^2 + 0.0015N_c + 0.024)$ avec un coefficient de corrélation $R^2 = 0,91$. Le nombre de cellules (N_c) dans un volume élémentaire représentatif d'une structure cellulaire est fortement influencé par les angles ϕ et ψ , représentant les cosinus directeurs des axes x_l et y_l du plan quelconque avec le système de coordonnées cartésiennes, de la manière suivante : $N_c = -335.7\phi + 266$ Pour $\phi = \psi$

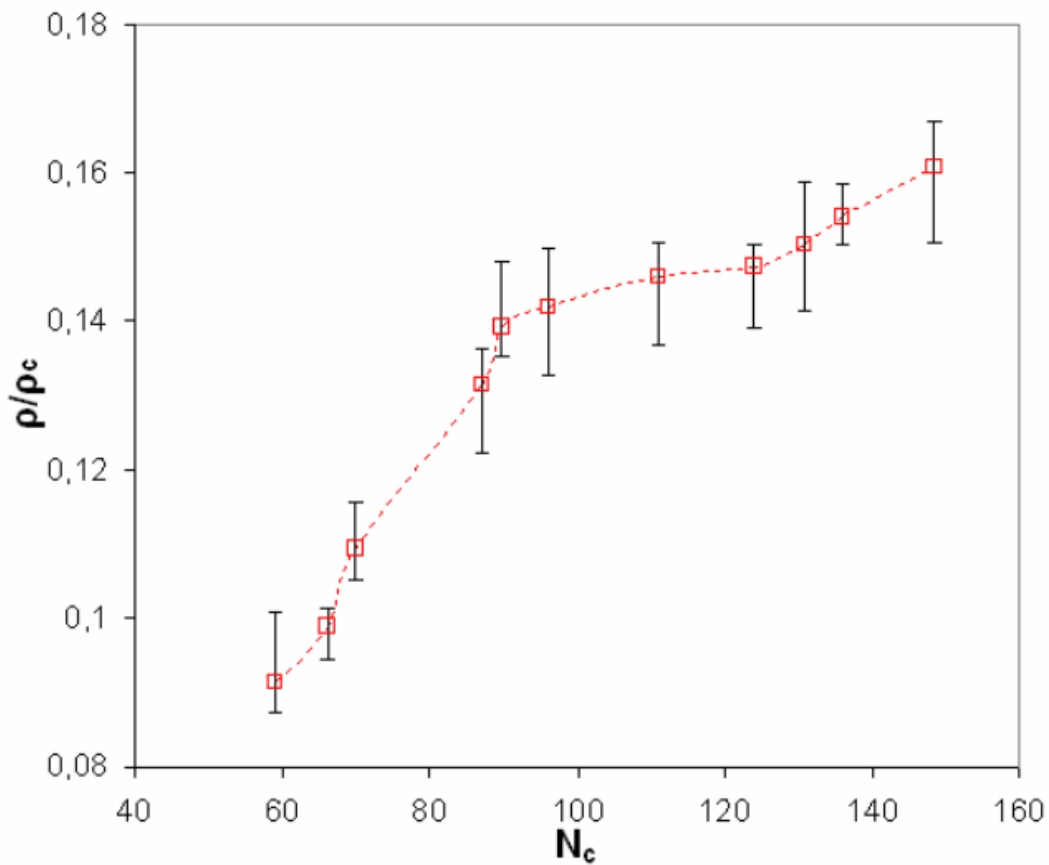


Figure III.7. Variation de la densité relative (ρ/ρ_c) en fonction du nombre des cellules (N_c) dans la totalité de la structure.

III.5 Résultats et discussions

III.5.1 Topologie convexe

La figure III.8 montre la variation des modules adimensionnels E_1/E_c et E_2/E_c en fonction de la densité relative ayant des tendances d'une loi exponentielle ce qui est en bon accord avec le modèle général de la cellule régulière classique qu'on trouve dans la littérature [GIB-97]. Ces modules varient selon les équations suivantes : $\frac{E_1}{E_c} = C_1 \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^{2,4}$ et $\frac{E_2}{E_c} = C_2 \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^{2,64}$, avec $C_1 = 2,4$ et $C_2 = 2,64$ avec un coefficient de corrélation $R^2 = 0,94$ pour les deux courbes (Figure III.8). Ces formules sont valables pour une densité relative comprise entre $0,10 < \rho/\rho_c < 0,16$. L'écart type moyen pour le module non dimensionnel $E_1/E_c = 0,00055$ tandis que pour le module de Young $E_2/E_c = 0,009$. C'est important de noter que Fazekas *et al* [FAZ-02] ont identifié des valeurs de C_1 et de C_2 s'étendant entre 2,55 et 2,75 pour les intervalles semblables de densité relative $0,05 < \rho/\rho_c < 0,3$.

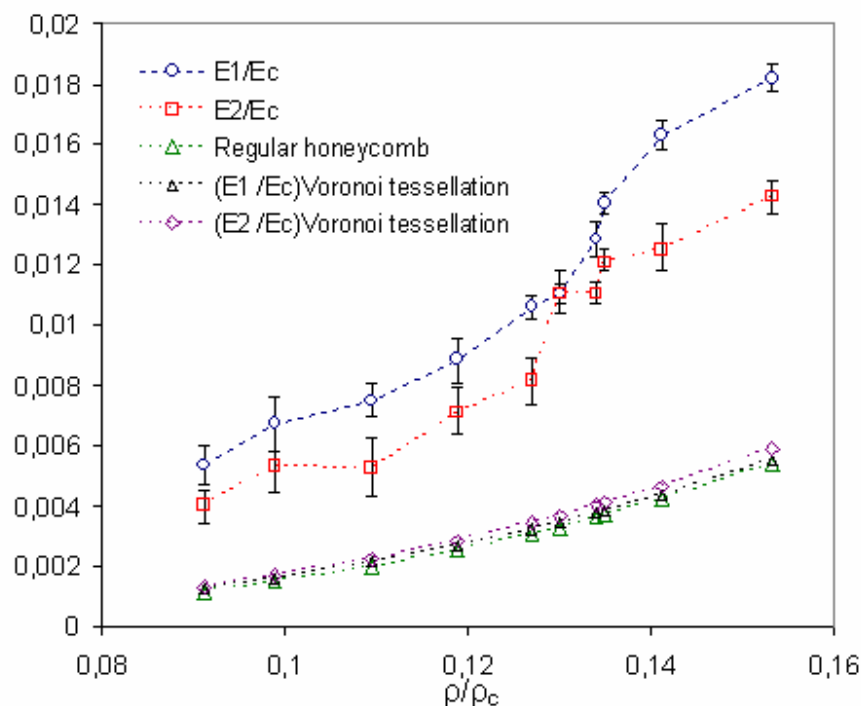


Figure III.8. Evolution du Module de Young sans dimension E_1/E_c et E_2/E_c en fonction de la densité relative pour la configuration convexe.

La configuration convexe décrite dans cette thèse montre une raideur plus élevée par rapport à la configuration hexagonale régulière ayant une relation de puissance en fonction de la densité relative $\frac{E}{E_c} = 1,5(\rho/\rho_c)^3$ [GIB-97].

Le coefficient du Poisson ν_{12} de la nouvelle cellule proposée présente une faible variation en fonction de la densité relative, avec une valeur moyenne égale à 0,55 (figure III. 9). Alors que le coefficient du Poisson ν_{21} dans le plan présente une légère diminution avec l'augmentation de ρ/ρ_c . Par exemple pour ρ/ρ_c égale à 0,09 la valeur moyenne du ν_{21} est égale à 1,11, et pour une densité relative élevée ρ/ρ_c égale à 0,156 le coefficient de Poisson prend une valeur moyenne égale à 0,92. Dans le plan d'un nid d'abeille hexagonale régulier les deux coefficients du Poisson sont égaux à 1 ($\nu_{12} = \nu_{21} = 1$), ceci est dû à la déformation des ligaments en flexion seulement [GIB-97]. Alors que les valeurs inférieures à 1 peuvent être prévues en considérant la déformation axiale, transversale et de cisaillement des ligaments [SCA-00]. La cellule irrégulière Voronoi classique montre dans le plan des coefficients du Poisson $\nu_{12} = \nu_{21} = 0,99$ pour une densité relative égale à 0,1 [ZHU-01].

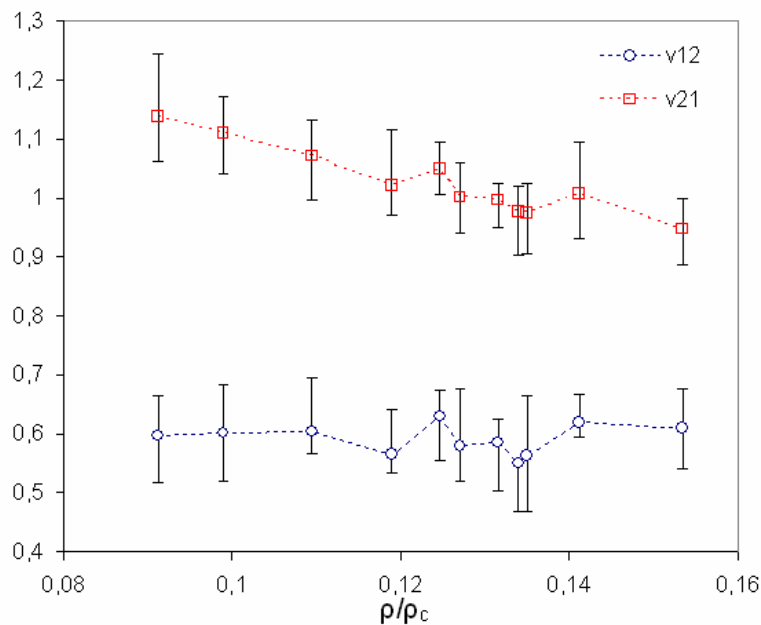


Figure III.9. Variations des coefficients du Poisson dans le plan de la nouvelle cellule Voronoi irrégulière proposée.

Le module de cisaillement adimensionnel, G_{12}/E_c montre une tendance similaire à celui du nid d'abeilles hexagonale à coté régulier [GIB-97] ou Voronoï classique [ZHU-97, LI-05] $\frac{G_{12}}{E_c} = 0,354(\rho/\rho_c)^{2,89}$. La nouvelle cellule Voronoï proposée représente un module de cisaillement adimensionnel ($\frac{G_{12}}{E_c} = 0,39(\rho/\rho_c)^{2,9}$) plus élevé par rapport à la cellule Voronoï irrégulière classique et aussi à la cellule hexagonale d'environ 10% (Figure III.10).

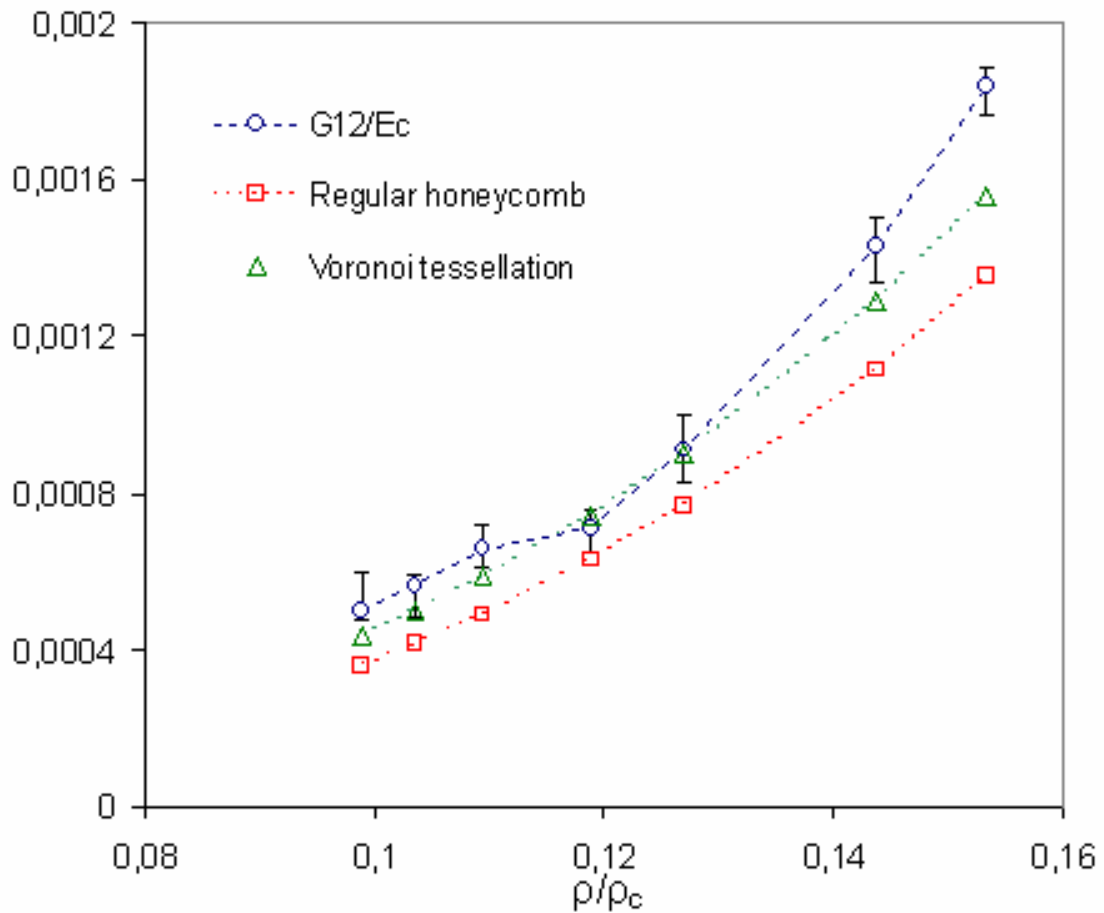


Figure III.10. Evolution du module de cisaillement adimensionnel G_{12}/E_c en fonction de la densité relative pour la nouvelle cellule Voronoï proposée, la cellule hexagonale à coté régulier et Voronoï classique.

III.5.2 Topologie des nids d'abeilles réentrantée proposée

La topologie réentrantée (auxétique) des nids d'abeilles irrégulière proposée montre une dépendance linéaire des modules dans le plan adimensionnels en fonction de la densité relative pour ρ/ρ_c comprise entre $0,10 < \rho/\rho_c < 0,24$ (Figure III.11). Le module de Young adimensionnel E_1/E_c est décrit par une relation de type linéaire

$$\frac{E_1}{E_c} = 0,058 \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right) - 0,003 \text{ avec un coefficient de corrélation } R^2 = 0,92. \text{ De la même}$$

manière le module de Young adimensionnel E_2/E_c se comporte comme E_1/E_c par une tendance linéaire E_2/E_c

$$\frac{E_2}{E_c} = 0,07 \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right) - 0,0047 \text{ avec un coefficient de corrélation } R^2 = 0,92. \text{ Les écarts}$$

types moyens de E_1/E_c et E_2/E_c sont de l'ordre de 0,007. Les résultats obtenus montrent que la cellule irrégulière auxétique proposée dans cette thèse est deux fois plus rigide par rapport à la nouvelle cellule Voronoï convexe proposée. Ces résultats sont importants car les configurations centrosymétriques de la cellule en nid d'abeilles auxétique présente un module de Young dans le plan plus élevé par rapport à la cellule nid d'abeilles hexagonale. D'ailleurs, les cellules centrosymétriques réentrantée régulières seulement le module de Young dans le plan E_1 montre cette élévation [SCA-00].

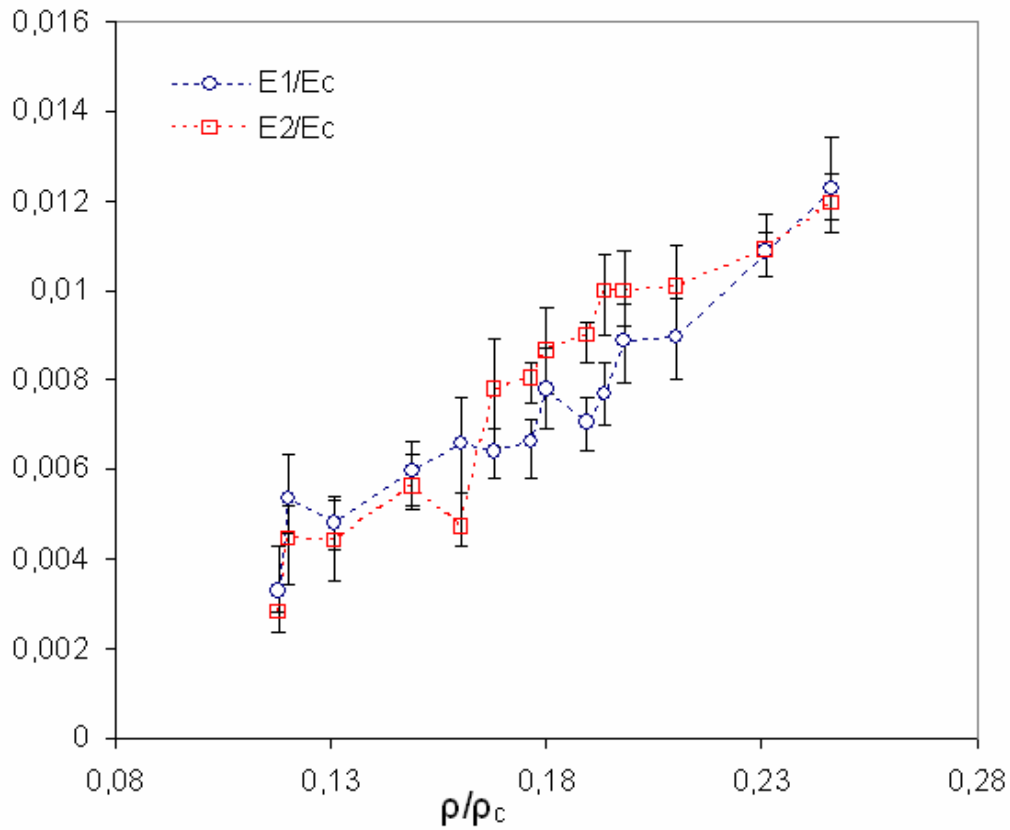


Figure III.11. Evolution du Module de Young sans dimension E_1/E_c et E_2/E_c en fonction de la densité relative pour la configuration réentrante.

La figure III.12 représente le module de cisaillement adimensionnel de la nouvelle cellule irrégulière réentrante proposée. Les résultats obtenus montrent que le module de cisaillement adimensionnel dans le plan en fonction de la densité relative a le même comportement que les modules de Young adimensionnel pour ce type de structures. La dépendance du module de cisaillement est aussi de type linéaire et peut être écrite comme suit : $\frac{G_{12}}{E_c} = 0,003 (\rho/\rho_c)$ avec un coefficient de corrélation $R^2 = 0,97$.

Ce genre de structures est sensiblement moins rigide en cisaillement. Par exemple pour ρ/ρ_c égale à 0,14, la topologie auxétique fournit un module adimensionnel de cisaillement plus faible par 3,5 fois par rapport à la topologie convexe étudiée dans cette thèse. Alors qu'elles représentent une rigidité inférieure de 2,4 et 2,6 fois par rapport à la

cellule Voronoï classique et la cellule régulière hexagonale respectivement. De plus, cette cellule auxétique proposée montre une rigidité plus élevée par rapport à la cellule de chirale pour les faibles densités relatives [SPA-12]. Par exemple pour une densité relative de 3,5 % le module de cisaillement de la nouvelle topologie auxétique Voronoï proposée est plus rigide de deux fois par rapport à une cellule type chirale créée par un rapport de $L/R = 0,2$; où L et R sont respectivement la taille du ligament et le rayon de la cellule. Cependant, pour la configuration chirale avec une topologie très mince ($L/R \rightarrow 1$) et avec le nid d'abeilles hexachiral montrant un module adimensionnel de cisaillement jusqu'à 78 fois plus haut [SPA-12].

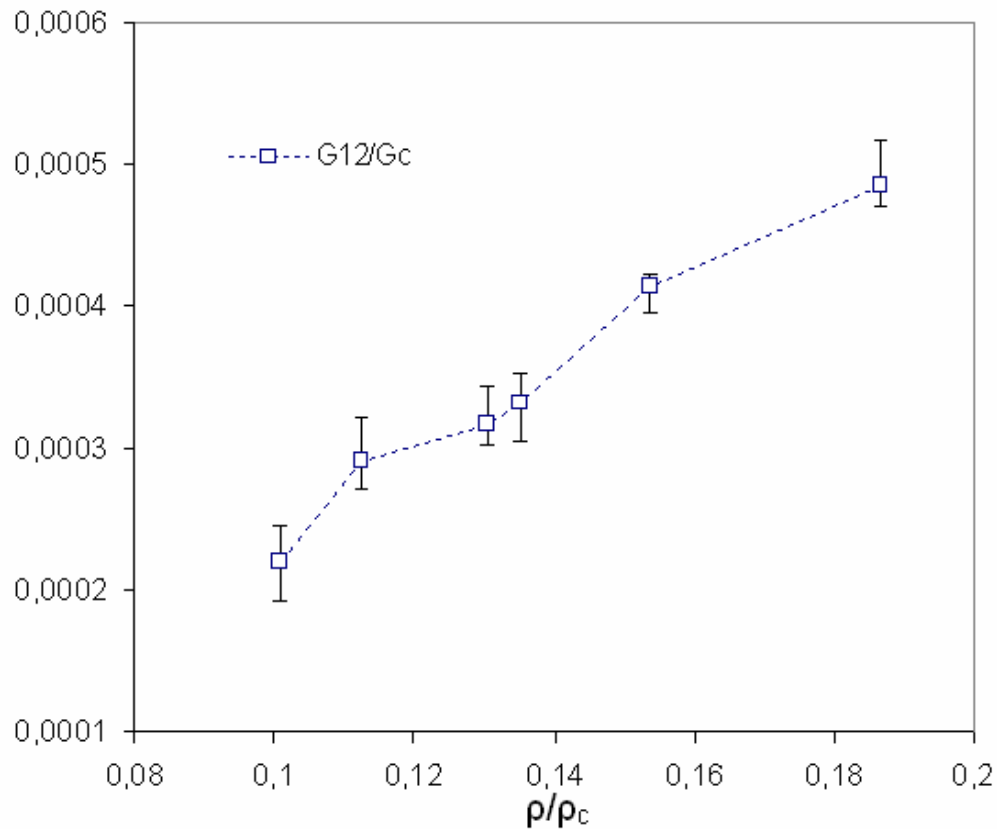


Figure III.12. Evolution du module de cisaillement adimensionnel G_{12}/E_c en fonction de la densité relative de la nouvelle cellule Voronoï auxétique proposée.

III.5.3 Mécanismes de déformation

Les structures cellulaires Voronoï convexe proposée montrent un mécanisme de déformation complexe quand la structure est chargée en traction monotone (Figure III.13). Les ligaments horizontaux se déforment par étirement, par contre les ligaments verticaux se déforment par la flexion. Si les ligaments se déforment en flexion pur on peut voir un exposant égale à trois comme le montre le modèle de Gibson et Ashby dans le cas d'une cellule hexagonale régulière $(\rho/\rho_c)^3$ [GIB-97]. Une similaire d'analyse effectuée par [FAZ-02] pour les cellules irrégulières Voronoï classique, les deux exposants 2,4 et 2,6 obtenus dans nos résultats correspondent aux modules d'élasticités dans le plan confirment l'existence d'une déformation complexe (étirement et flexion des ligaments simultanément).

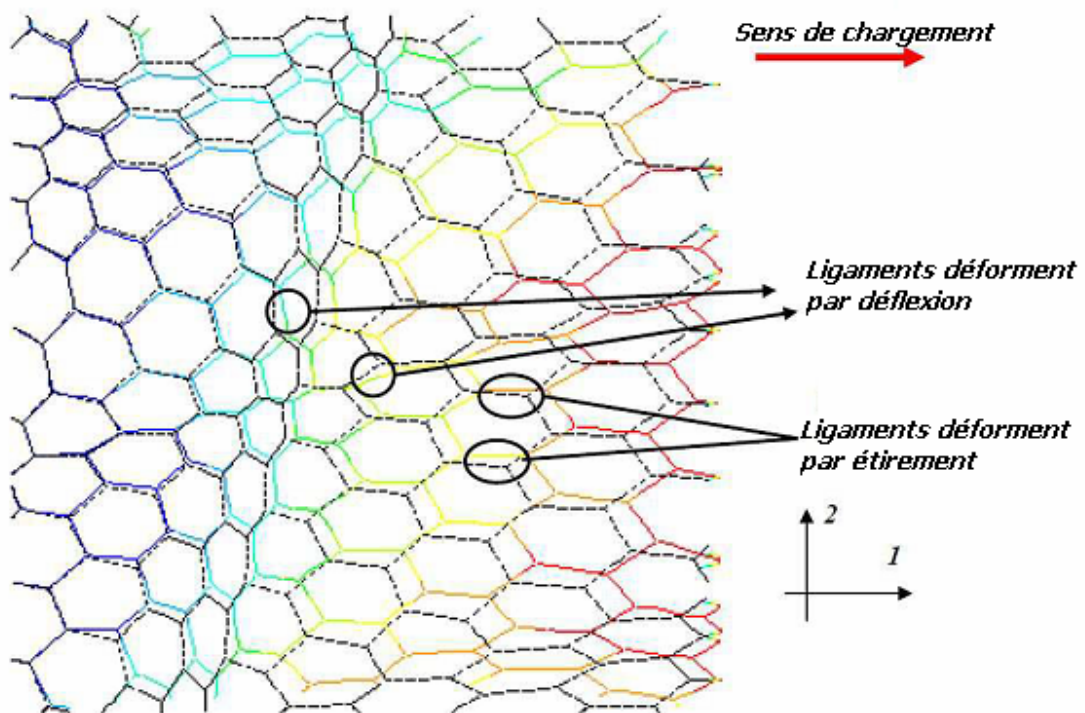


Figure III.12. Mécanismes de déformation de la nouvelle structure cellulaire Voronoï irrégulière chargé selon l'axe x.

III.6 Effet de forme (topologie)

La topologie, c'est un paramètre essentiel aussi et joue un rôle plus important que la densité relative [ZHU-01] car les nouvelles structures cellulaires proposées en une dépendance avec les deux cosinus directeurs des axes x_1 et y_1 du plan quelconque (Φ et ψ). Nous avons étudié l'influence de la forme des cellules sur les propriétés élastiques dans le plan (x, y) en jouant sur ces deux angles dans le modèle mathématique développé. La figure III.13 représente quelques exemples de structures générées par le même champ de points.

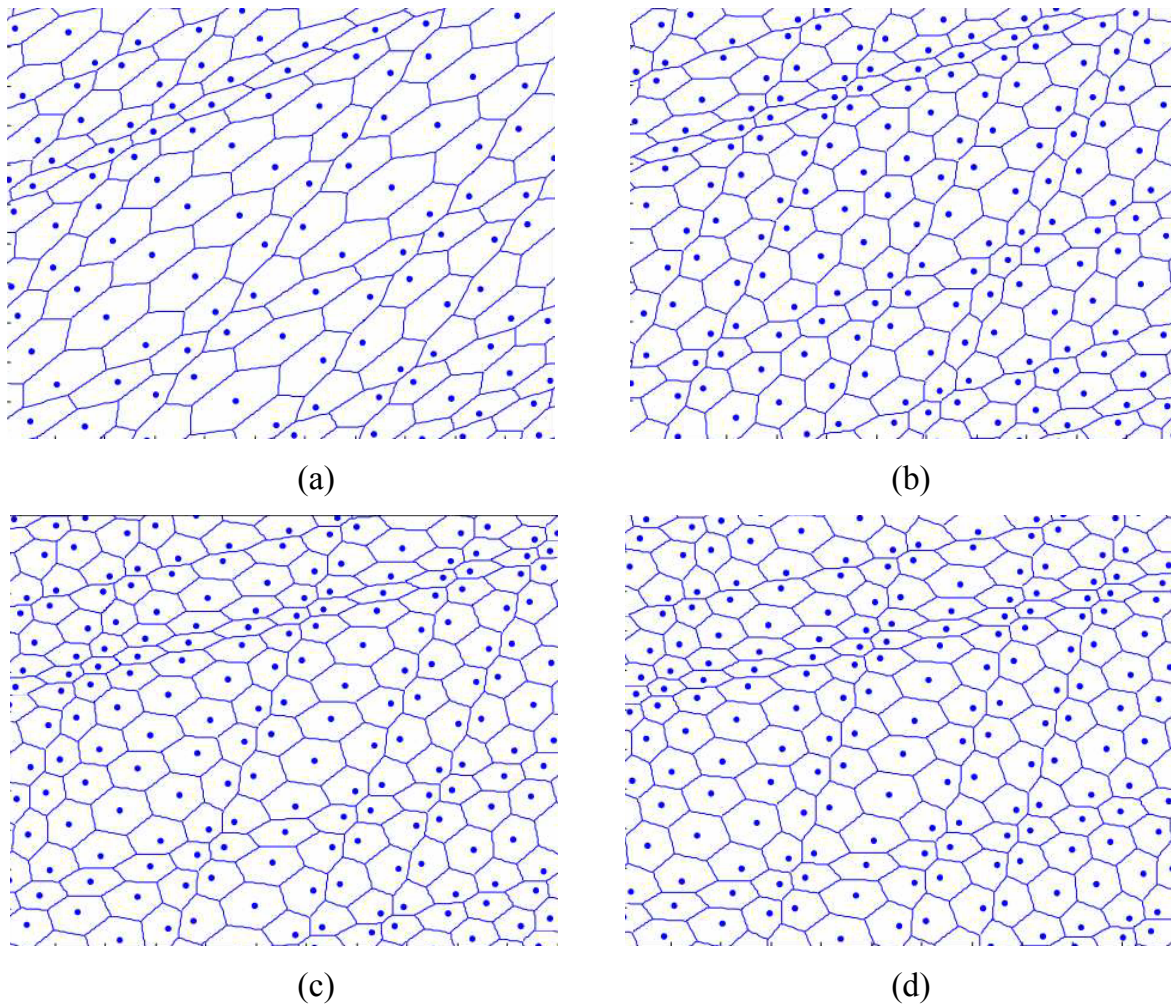


Figure III.13. L'influence de deux cosinus directeurs (Φ et ψ) des axes x_1 et y_1 du plan quelconque sur la forme des cellules proposée par l'utilisation d'un même champ de points : (a) $\Phi = \psi = \pi/6$, (b) $\Phi = \psi = \pi/8$, (c) $\Phi = \psi = \pi/10$, (d) $\Phi = \psi = \pi/12$.

Les mêmes propriétés mécaniques dans le plan étudiés dans le cas de l'effet de densité des cellules convexe et auxétique seront déterminées dans le cas de l'effet de forme. Nous considérons ici deux paramètres qui sont l'épaisseur des parois de la cellule et la densité relative dans le but d'avoir l'influence de la topologie sur les coefficients de Poisson ν_{12} et ν_{21} dans le plan. Les figures III.14a et 14b montrent l'influence de deux cosinus directeurs (Φ et ψ) des axes x_l et y_l du plan quelconque sur les modules de Young adimensionnels avec une épaisseur constante, et une densité relative constante ρ/ρ_c égale à 0,2. Pour les deux cas, les deux modules adimensionnels dans le plan sont fortement influencés par une dépendance décroissante similaire. L'allure des courbes des figures III.14a et III.14b nous permet d'écrire les deux modules adimensionnels en fonction de ψ et Φ sous une forme linéaire comme suit :

$$\frac{E_1}{E_c} = \frac{E_2}{E_c} = -0,036 \Phi + 0,031, \text{ (avec une épaisseur des parois des cellules constante)}$$

$$\frac{E_1}{E_c} = \frac{E_2}{E_c} = -0,04 \Phi + 0,032, \text{ (avec une densité relative constante).}$$

Le module de cisaillement adimensionnelle dans le plan G_{12}/E_c en fonction de deux cosinus directeurs Φ et ψ (Figure III.15), se comporte comme le module de cisaillement adimensionnelle G_{12}/E_s en fonction de la densité relative, par une évolution de puissance de la forme $\frac{G_{12}}{E_c} = 0,0061 \psi^{3,05}$ avec .

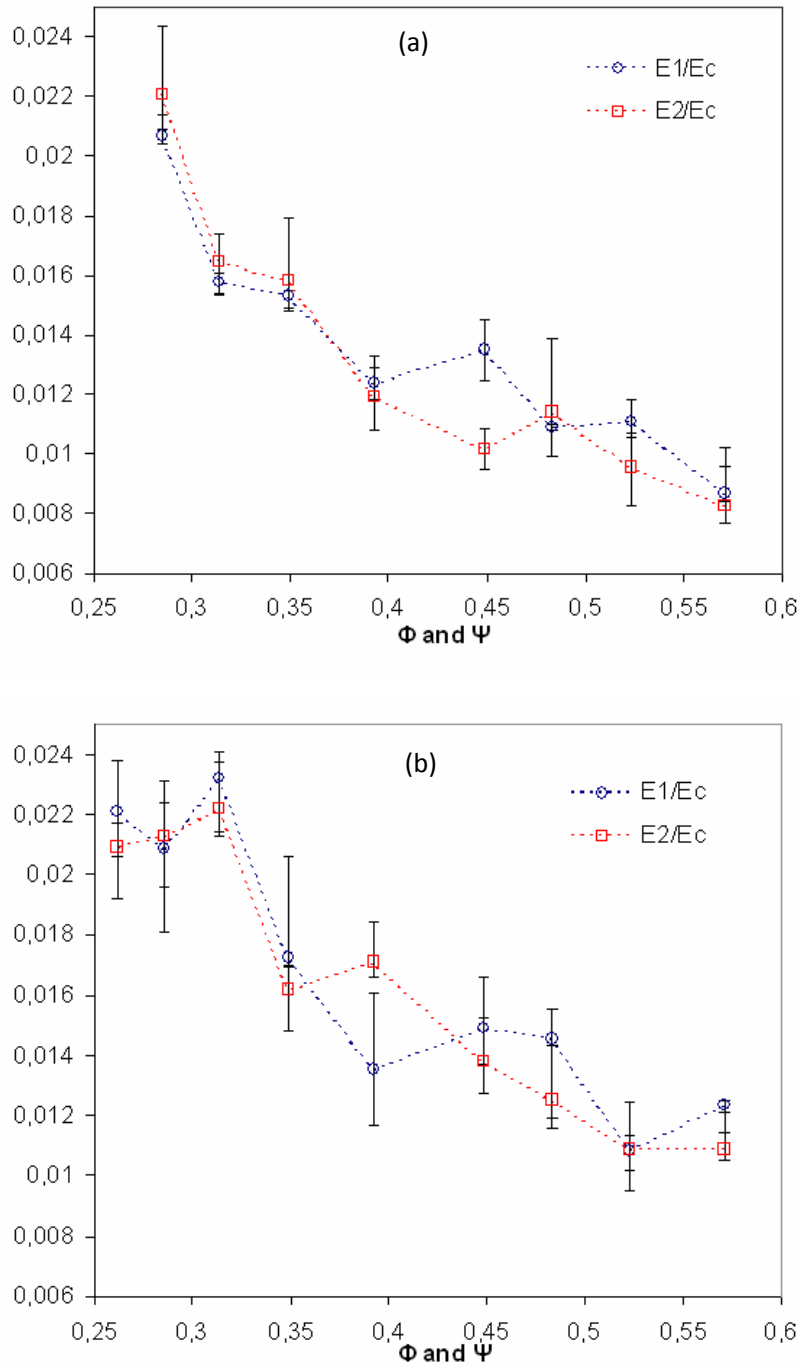


Figure III.14. Influence des deux cosinus directeurs (Φ et ψ) des axes $x_1 y_1$ du plan quelconque sur les modules adimensionnels E_1/E_c et E_2/E_c pour la nouvelle cellule convexe proposée : (a) épaisseur des parois des cellules constante, (b) densité relative ρ/ρ_c constante.

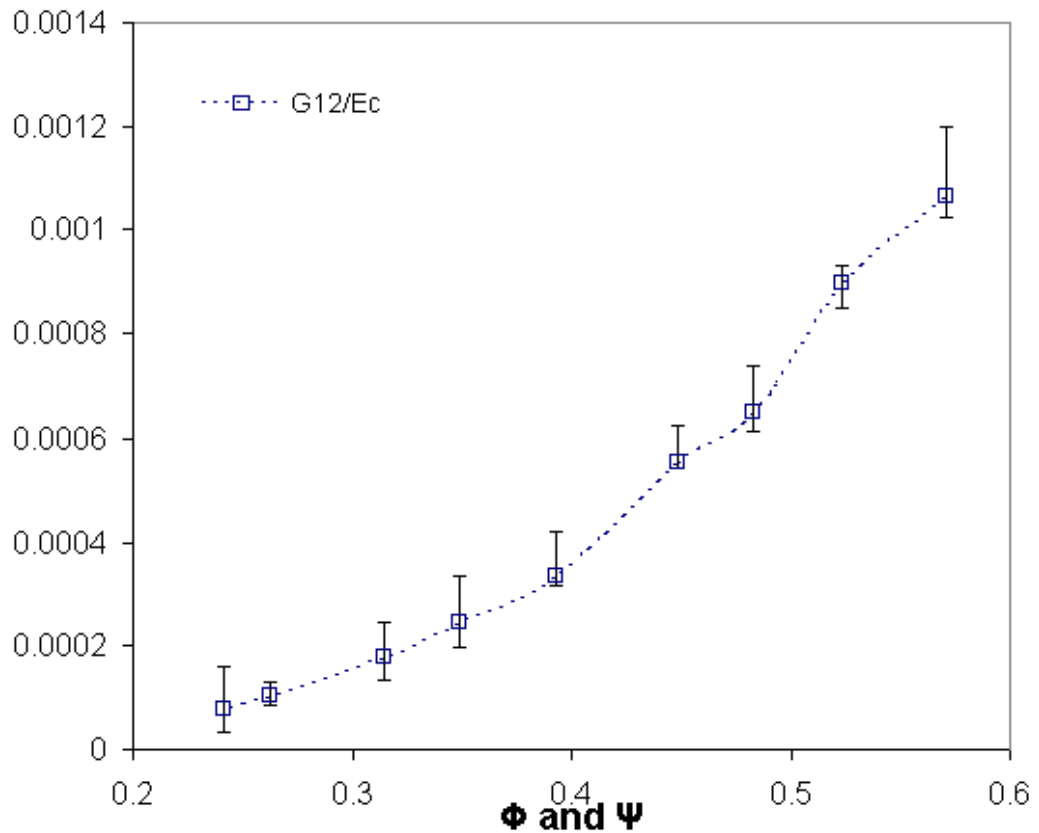


Figure III.15. Influence des deux cosinus directeurs (Φ et ψ) des axes x_1 et y_1 sur le module de cisaillement adimensionnel G_{12}/E_c avec une densité relative constante.

Les deux coefficients de Poisson ν_{12} et ν_{21} , de la nouvelle cellule Voronoï convexe proposée, diminue linéairement avec l'augmentation des deux cosinus directeurs (Φ et ψ). Pour les deux paramètres t et ρ/ρ_c les résultats obtenus montre que les coefficients de Poisson dans le plan dépendent uniquement de la forme des cellules (Figure III.16). Nous rappelons aussi que le nombre de cellules dans le volume élémentaire représentatif dépend aussi de ces deux cosinus directeurs.

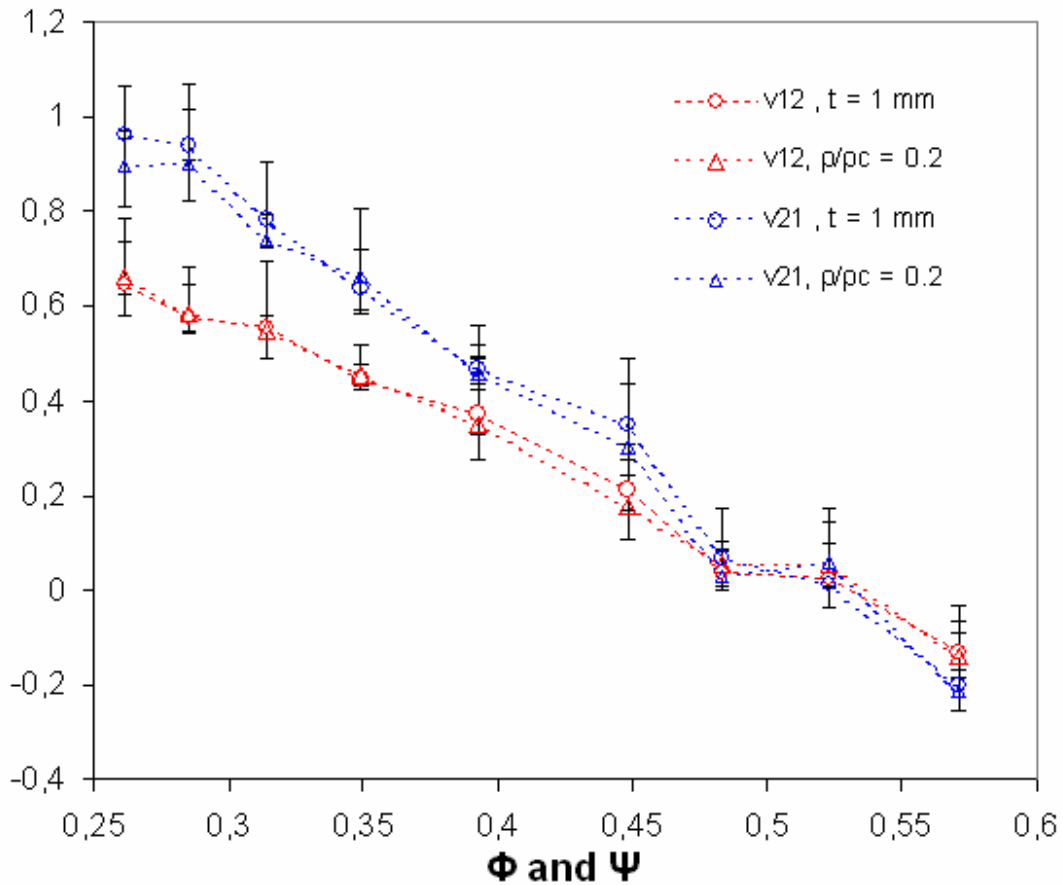


Figure III.16. Influence des deux cosinus directeurs sur les coefficients du Poisson v_{12} et v_{21} dans le plan.

III.7 Conclusion

Dans ce chapitre est proposé une nouvelle méthode originale de conception des nids d'abeille hexagonale a cotés irrégulier (Voronoi) type convexe ayant un coefficient de Poisson positif et Auxétique à coefficient de Poisson négatif. Les principales conclusions de ce chapitre sont comme suit :

- Les deux structures cellulaires Voronoï proposé dans ce travail, établit différent modules de rigidité et coefficients de Poisson dans le plan. La topologie convexe montre une rigidité plus élevée par rapport aux topologies hexagonale régulière et Voronoï classique.

- Les deux coefficients de Poisson ν_{12} , et ν_{21} dans le plan de la topologie convexe proposé présentent une relation décroissante avec la forme des cellules obtenue par les deux cosinus directeurs. En d'autres termes ces deux coefficients de Poisson tendent à diminuer linéairement avec l'augmentation des deux cosinus directeurs (Φ et ψ).

- Les résultats obtenus montrent que la cellule irrégulière auxétique proposée dans ce travail de thèse est plus rigide de deux fois par rapport à la nouvelle cellule Voronoi convexe proposée.

- Les structures cellulaires Voronoi proposée montrent un mécanisme de déformation complexe (une combinaison entre la flexion et l'étirement des ligaments).

Références

- [FAZ-02] A. Fazekas, R. Dendievel, L. Salvo, and Y. Brechet. Effect of microstructural topology upon the stiffness and strength of 2D cellular structures. *International Journal of Mechanical Sciences*, 44:2047–2066, 2002.
- [GIB-97] L. J. Gibson and M. F. Ashby. *Cellular solids: structure and properties*. Cambridge Press, 2nd Edition edition, 1997.
- [LI-05] K. Li, X. L. Gao, and G. Subhash. Effects of cell shape and cell wall thickness variations on the elastic properties of two dimensional cellular solids. *International Journal of Solids and Structures*, 42:1777–1795, 2005.
- [SCA-03] F. Scarpa, G. Burriesci, F. C. Smith, and B. Chambers. Mechanical and electromagnetic behaviour of auxetic honeycomb structures. *The Aeronautical Journal*, 2774:175 – 183, 2003.
- [SCA-00] F. Scarpa, P. Panayiotou, and G. Tomlinson. Numerical and experimental uniaxial loading on in-plane auxetic honeycombs. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 35(5):383–388, 2000,
- [SIL-95] M. J. Silva, W. C. Hayes, and L. J. Gibson. The effects of non-periodic microstructure on the elastic properties of two-dimensional cellular solids. *International Journal of Mechanical Sciences*, 37(11):1161–1177, 1995.
- [SPA-12] Spadoni A. and M. Ruzzene. Elasto-static micropolar behavior of a chiral auxetic lattice. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60:156 – 171, 2012.
- [ZHU-01] H. X. Zhu, J. R. Hobdell, and A. H. Windle. Effects of cell irregularity on the elastic properties of 2D Voronoi honeycombs. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49:857–890, 2001.
- [ZHU-97] H. Zhu, J.F. Knott, and N.J. Mills. Analysis of the elastic properties of open-cell foams with tetrakaidecahedral cells. *Journal of the Mechanics and Physics of the Solids*, 45:319–343, 1997.

Chapitre IV

Investigation expérimentale et validation numérique

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre une étude expérimentale est réalisée dans le but de contrôler le comportement mécanique de diverses topologies, basées sur la nouvelle cellule produite par la technique de prototypage (impression 3D). L'analyse des résultats expérimentaux obtenus puis traités par la technique de corrélation d'images permet d'identifier les coefficients de Poisson ν_{12} et ν_{21} dans le plan pour les trois topologies fabriquées. Dans un second temps, ces résultats expérimentaux seront confrontés à ceux obtenus numériquement par éléments finis.

La corrélation d'images est une technique expérimentale utilisée en mécanique, en science des matériaux et en mécanique des fluides, afin de mesurer les champs des déplacements et d'en déduire celui des déformations [PAN-11, TAN-12, EIT-10]. Contrairement aux moyens de mesures traditionnels (extensiomètres à jauges de déformation) qui donnent des valeurs moyennées en un point, la corrélation d'images permet d'accéder à des champs de valeurs. Le développement rapide des appareils photos et des caméras CCD donne accès à une grande quantité d'informations. En effet, chaque pixel du capteur apporte une information codée sur un nombre de bits définis par la sensibilité du capteur (typiquement 8, 12 et 16 bits).

IV.2 Technique expérimentale

IV.2.1 Préparation des échantillons

Les structures en nids d'abeille Voronoï testées ont été fabriquées à l'université de Bristol à l'aide d'une machine de prototypage rapide via modélisation par dépôt de fil en

fusion déposant par couches successives un fil fondu d'ABS (FDM Fusion Deposition Molding). Les éprouvettes sont de forme carrée de dimension 130×130 mm, la hauteur des parois des cellules est de 3 mm, la taille minimale des ligaments des cellules est de 5 mm, et leur épaisseur est de 1 mm. Les figures IV.1 et IV.2 représentent les trois topologies fabriquées et testées. Les configurations Voronoï convexes ayant respectivement des coefficients de Poisson ν_{21} et ν_{12} maximale et minimal positif (Figure IV.1a et IV.1b), et une topologie à côté rentrant (Figure III.2) dont le coefficient de poisson est négatif (auxétique). Le matériau de base des éprouvettes est un polymère ABS-M30 utilisé pour créer des prototypes par la technique de fabrication numérique 3D. Les propriétés mécaniques de ce type de polymère sont regroupées dans le tableau IV.1.

Tableau IV1 Propriétés mécaniques du polymère ABS-M30 utilisé pour la fabrication des éprouvettes Voronoï testées [WEB].

Propriétés mécaniques	Norme utilisée pour le test	Valeur
Contrainte à la traction	ASTM D638	36 MPa
Module de Young en traction	ASTM D638	2,413 GPa
Déformation à la traction	ASTM D638	4 %
Contrainte à la flexion	ASTM D790	61 MPa
Module de Young en Flexion	ASTM D790	2,317 MPa

Les éprouvettes Voronoï fabriquées sont de couleur blanche jaunâtre puis elles sont peintes par une couleur grise mat pour une meilleure visualisation avec la caméra CCD. A titre d'exemple la figure IV.3 représente la configuration de la figure 1 à son état originale de fabrication.



(a)



(b)

Figure IV.1. Configuration Voronoï convexe a coefficient de Poisson positif; a) structure créer pour $\Phi = \pi/4$ et $\Psi = \pi/4$; b) structure créer pour $\Phi = 0$ et $\Psi = \pi/4$.



Figure IV.2. Configuration Voronoï auxétique a coefficient de Poisson négatif créé pour $\Phi = 0$ et $\Psi = \pi/4$.

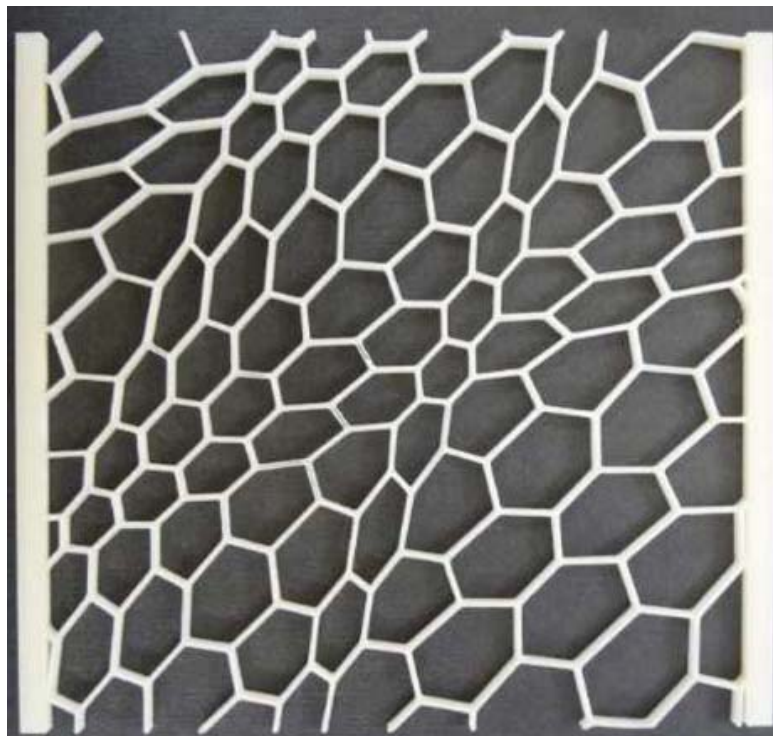


Figure IV.3 : éprouvette obtenue après le prototypage (clouer blanche).

IV.2.2 Equipement expérimental

Les essais de traction monotone ont été réalisés sur une machine de traction INSTRON de 5 kN (Figure IV.4), la vitesse d'essai est réglé à 2 mm/min, le suivi des déplacements par un extensomètre vidéo permet de calculer le coefficient de Poisson dans le plan en utilisant la technique de corrélation d'images ISTR 4D. Chaque type de structure est testé dans les directions x et y .

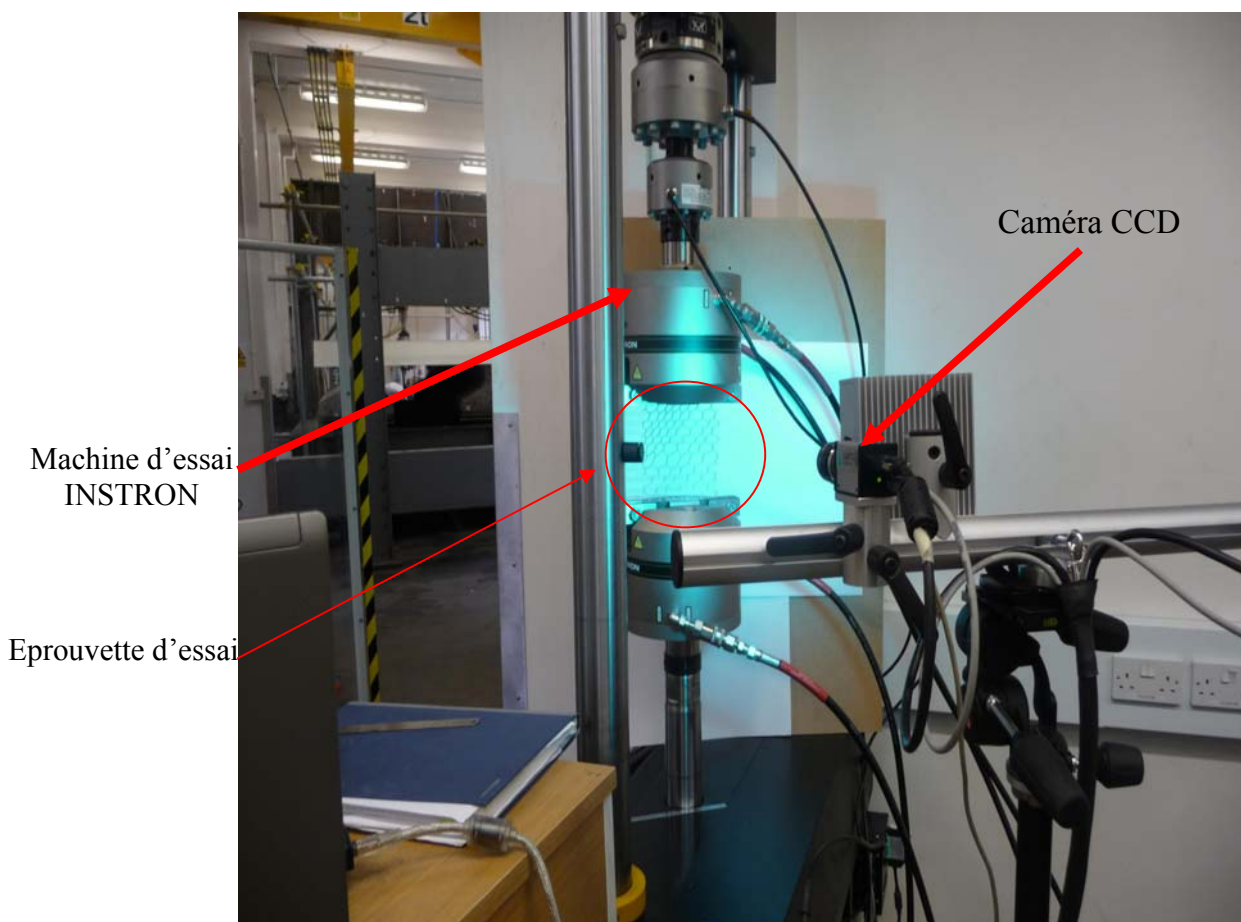


Figure IV.4. Equipement expérimental.

IV.2.3 Post traitement des images

La précision des mesures obtenues dépend en grande partie des paramètres et des algorithmes utilisés dans le logiciel de corrélation ISTR 4D. Dans le cas contraire, un

choix inadapté génère des erreurs de corrélation ou du bruit sur les mesures. Le nombre de ces variables (paramètres et algorithmes) est lié au logiciel utilisé. Dans la présente étude, l'option pour le logiciel ISTR4 4D nous donne le choix entre deux algorithmes de corrélation.

Choix de l'algorithme de corrélation

Le principe de corrélation est basé sur l'analyse des images enregistrées pendant l'essai. L'image enregistrée à un instant t_i est comparée à une image de référence et en déduire les transformations [BRY-12, KHA-12]. Les deux algorithmes disponibles permettent de choisir l'image de référence ; soit on se réfère à la première image (instant t_0) et ceci dans l'algorithme en utilisant la description lagrangienne absolue, soit on se réfère à l'image précédente (instant t_{i-1}) et nous seront dans l'algorithme utilisant la description lagrangienne relative [ZHO-12].

Dans cette recherche, nous avons opté pour l'algorithme qui utilise comme image de référence celle enregistrée à l'instant t_0 (Lagrangienne absolue). Cela permet d'utiliser une image de référence sans transformation et donc d'éviter de cumuler les éventuelles erreurs et bruit de mesure (contrairement à l'autre algorithme). Cependant, pour que ce choix reste avantageux, il est nécessaire que les transformations soient correctement discrétisées lors de l'essai. Sinon, il y aurait un risque de ne pas pouvoir corréler les images et donc de perdre (temporairement ou définitivement) des données sur la transformation. Le second algorithme étant moins sensible à ce phénomène à cause de la courte durée de la période de calcul des transformations.

IV.3 Investigation Numérique

Dans ce travail, tous les modèles numériques sont développés en utilisant le code commercial ANSYS v.10.0. La simulation des essais de traction dans le plan est réalisée en modélisant la totalité des trois structures développées (en 2D). Les structures sont maillées par l'élément de maillage PLAN82, cet élément à huit noeuds ayant six degrés de liberté chacun ; trois en translation et trois en rotation. L'analyse de la convergence de

la solution nous guide vers une taille optimale de l'élément de maillage valant $l/4$, où l désignant la taille du ligament de la cellule.

Deux simulations ont été effectuées sur chaque structure ; une simulation en traction selon la direction x et l'autre selon y , afin de déterminer les quatre coefficients de la matrice de rigidité de la structure E_1 , E_2 , ν_{21} , ν_{12} . On impose à la face gauche un déplacement de 1 mm, la face droite est encastree, déduisant ainsi E_1 et ν_{21} , ces conditions aux limites sont simulables à l'essai de traction monotone expérimentale. Le module de Young est calculé par la formule de Hooke $E_1 = \Sigma \sigma_i / \varepsilon_1$; où σ_i est la contrainte de traction dans chaque noeud correspondant, et ε_1 est la déformation élastique totale de la structure qui est égale à $\Delta L / L_x$, et le coefficient de poisson est calculé par la formule : $\nu_{21} = -\varepsilon_2 / \varepsilon_1$. Le matériau de base des éprouvettes est un polymère ABS-M30. Les résultats de l'homogénéisation numérique obtenue par ANSYS sont illustrés au tableau IV.2.

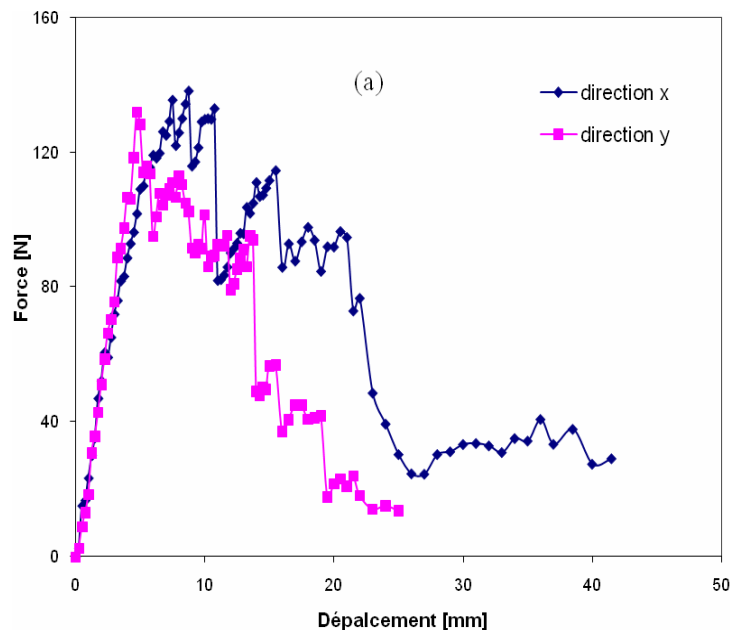
IV.4 Résultats et discussion

Une première analyse des courbes représentant la contrainte en fonction de la déformation (Figures IV.5, IV.6 et IV.7) permet de déterminer des grandeurs caractéristiques comme le module d'élasticité, la limite d'élasticité ou l'allongement à la rupture. Les déformations présentées ont été mesurées par la technique de corrélation d'images. Les trois topologies testées se comportent comme des matériaux cellulaires fragiles [GIB-97]. Le tableau IV.2 regroupe les Modules de Young E_1 et E_2 obtenus expérimentalement comparées avec les résultats obtenus par la méthode des éléments finis. Les résultats expérimentaux montrent que les structures cellulaires générées par les deux cosinus directeurs égaux (Figure IV.1) ayant un comportement isotrope pour les deux directions de chargement. Les structures créées par Φ égale à zéro se comporte comme un matériau orthotrope avec un module d'Young E_1 plus élevé par rapport aux autres configurations testées.

Tableau IV. 2 Comparaison des propriétés mécaniques des structures testées entre les résultats expérimentaux et les résultats d'homogénéisation numérique.

Type de structure	E ₁ [Mpa]			E ₂ [Mpa]		
	Expérimentale	EF (ANSYS)	Erreur [%]	Expérimentale	EF (ANSYS)	Erreur [%]
Convexe ($\Psi = \Phi$)	29,13	29,67	1,82	29,06	29,75	2,31
Convexe ($\Phi = 0$)	43,50	44,52	2,30	8,70	8,89	2,13
auxétique	36,30	37,55	3,32	4,70	4,90	4,08

Les erreurs enregistrées pour les deux méthodes, expérimentale et éléments finis (EF), sont comprises entre 1,82 et 4,08 %.



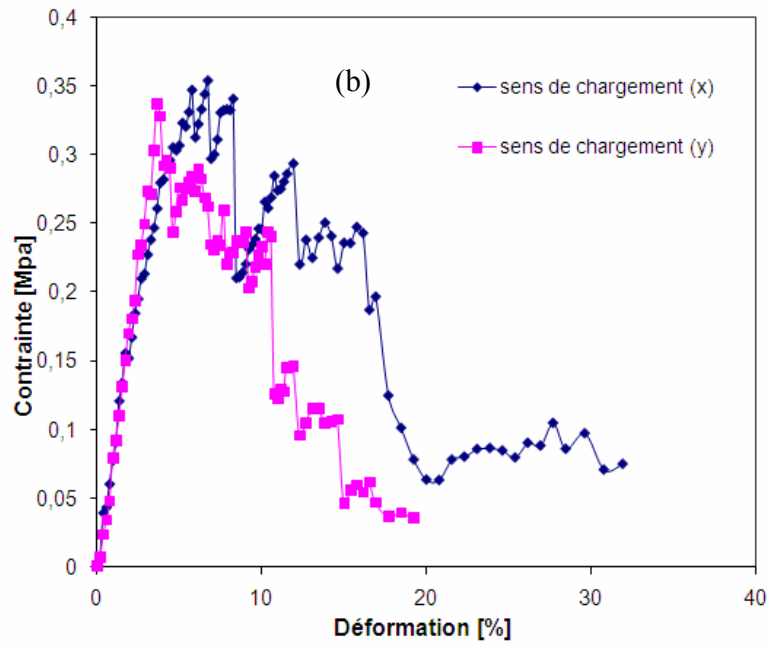


Figure IV.5 (a) Courbe force déplacement ; (b) courbe contrainte déformation pour le cas de la configuration de $\Phi = \pi/4$ et $\Psi = \pi/4$.

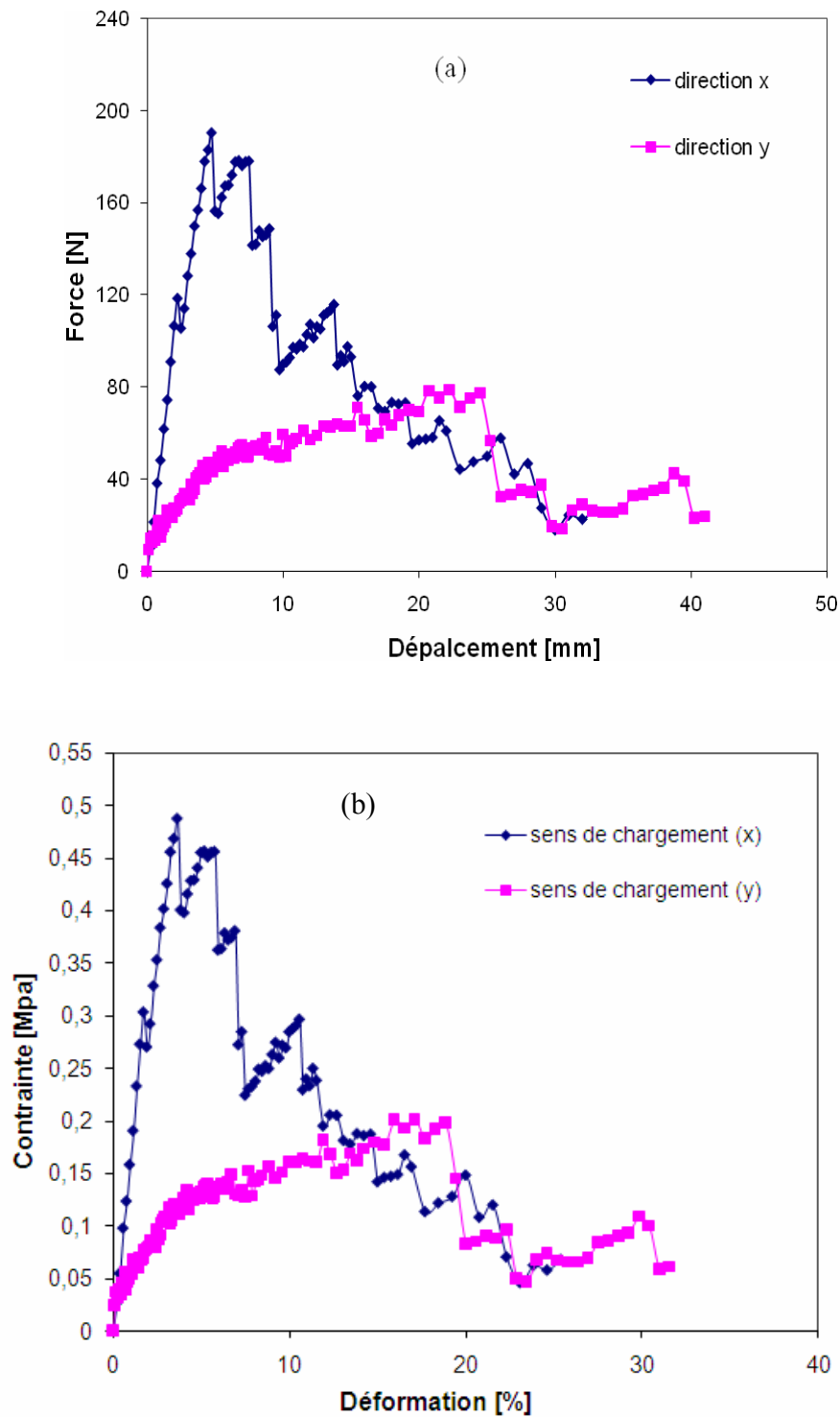


Figure IV.6. (a) courbe force déplacement, (b) Courbe contrainte déformation pour la configuration de $\Phi = 0$ et $\Psi = \pi/4$

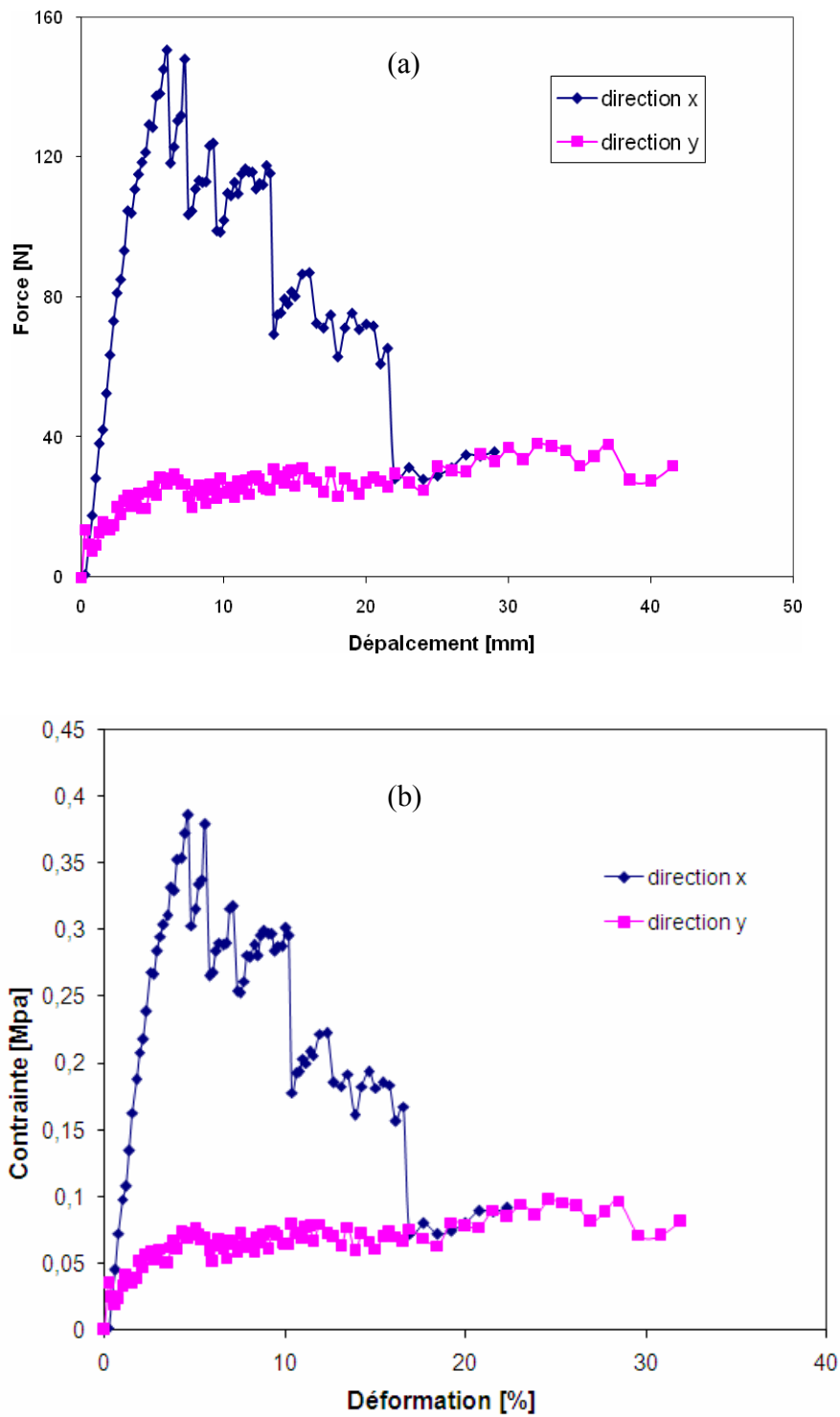


Figure IV.7. (a) courbe force déplacement pour la configuration Auxétique, (b) Courbe contrainte déformation pour la configuration Auxétique.

La topologie convexe (type 2) et auxétique (type 3) obtenues pour $\Phi = 0$ (Figure IV.8) présente une force maximale selon l'axe de chargement x et une force minimale selon l'axe y . Par contre dans le cas de la topologie obtenue par les deux cosinus directeurs (Φ et $\Psi = \pi/4$) égaux (type 1) les forces enregistrer sont maximale est pratiquement égaux pour les deux directions de chargement x et y montrant ainsi un comportement isotrope.

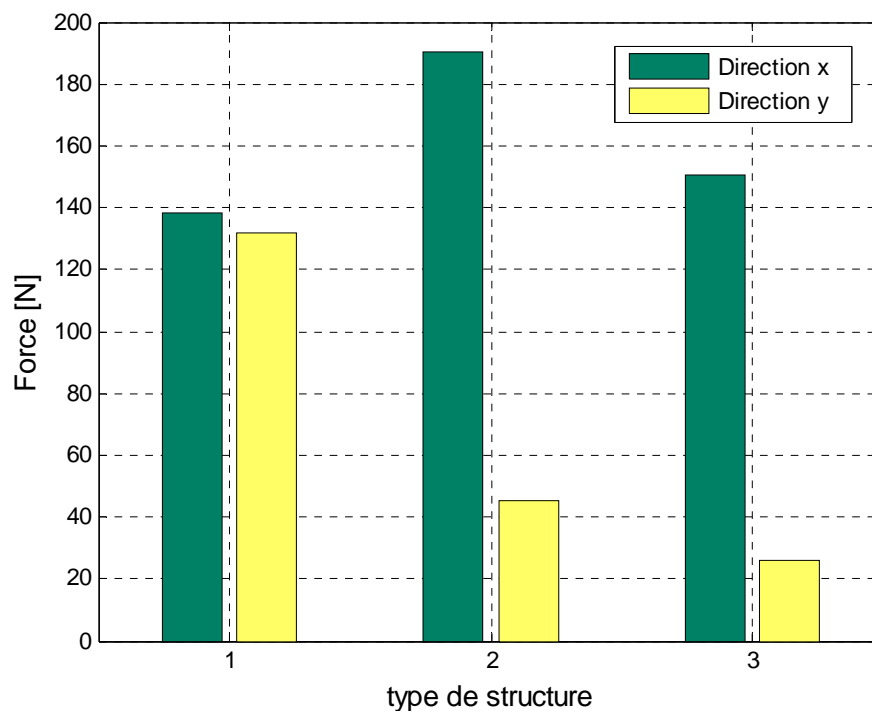


Figure IV.8. Force maximale pour chaque topologie testée.

Les champs des déplacements simulés et l'expérimental sont présentés sur la Figure IV.9 sont relativement similaires (en bonne concordance) ce qui permet de valider la procédure permettant d'imposer les déplacements expérimentaux comme conditions aux limites pour la simulation numérique. A chaque champ de déplacements est associé un champ de déformation et chaque image couvre donc un certain niveau de déformations.

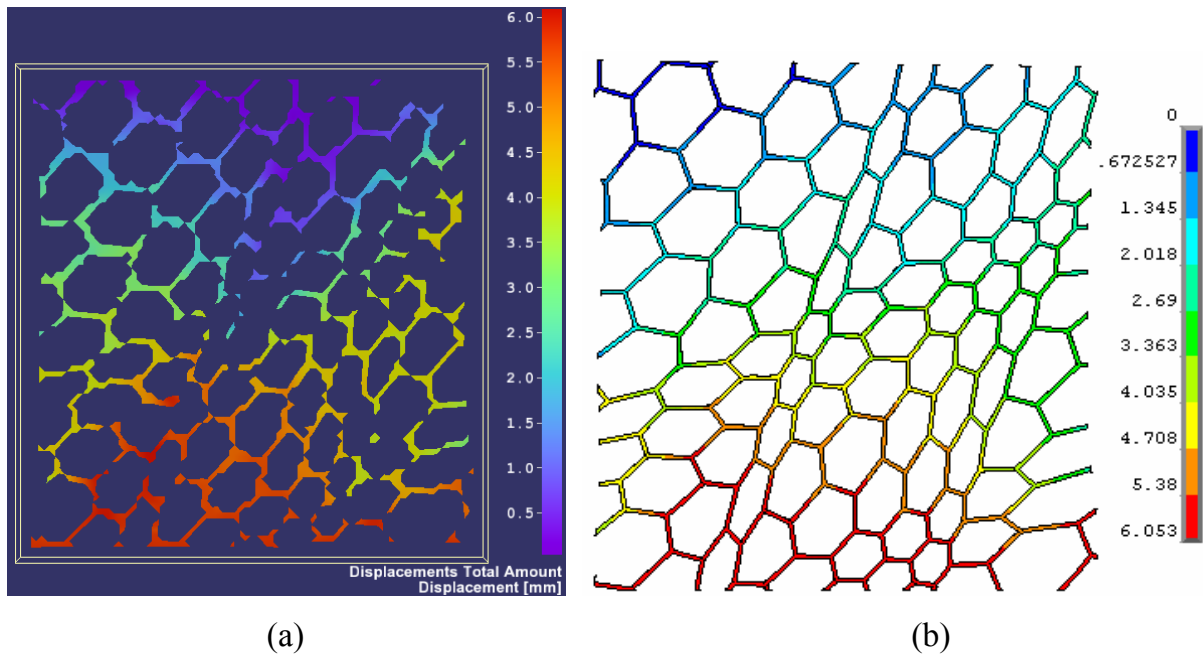
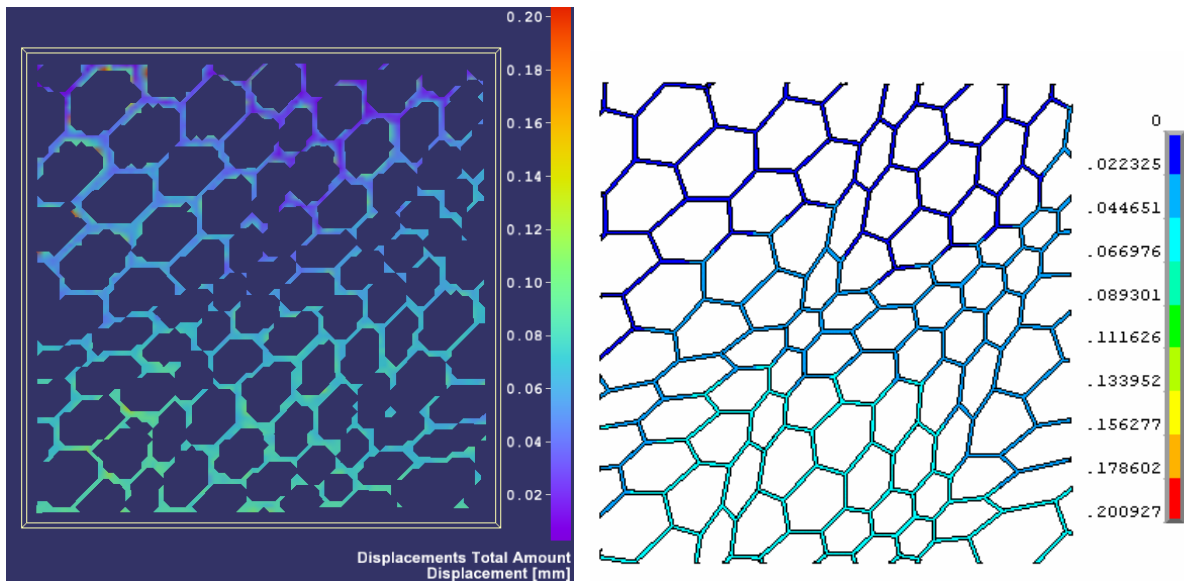


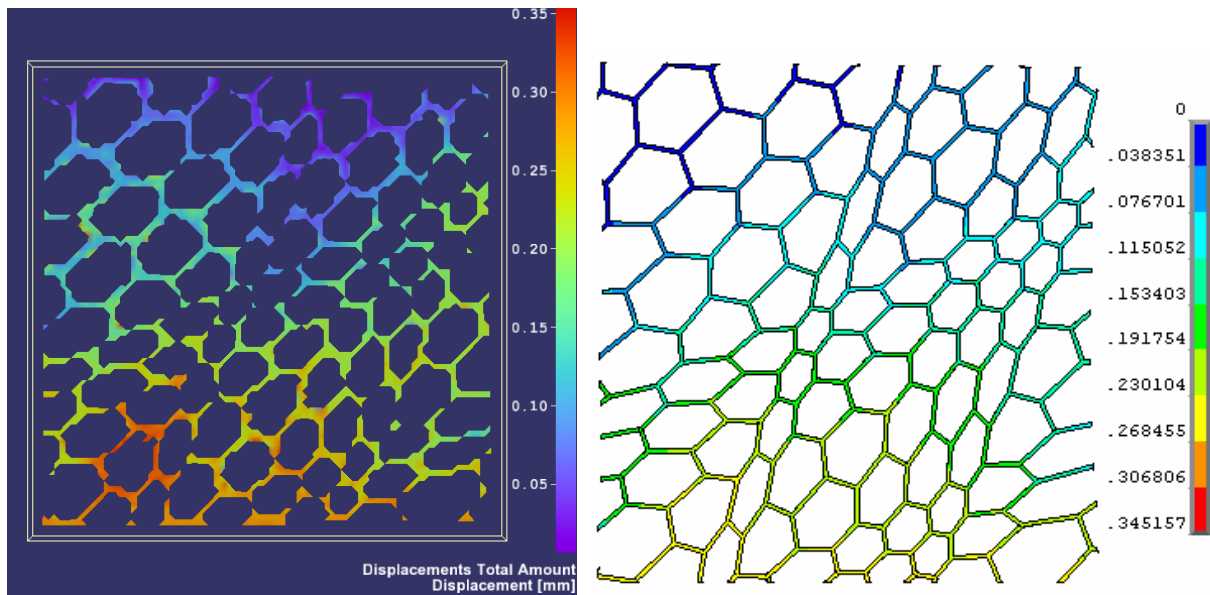
Figure IV.9. Cartographie des champs de déplacements total pour la structure générée pour $\Phi = \pi/4$ et $\Psi = \pi/4$:

(a) Résultats issus de la corrélation d'image, (b) Résultat issu du calcul EF (ANSYS).

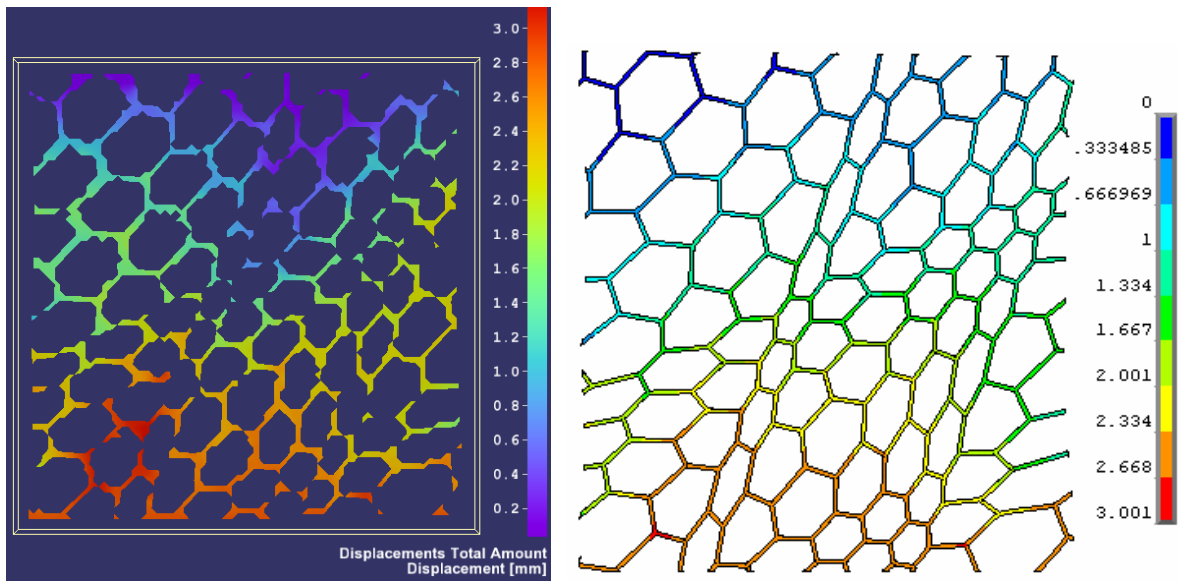
La Figure IV.10 présente la distribution de champ de déplacement total, lors d'un essai de traction simple pour différentes étapes de chargement (quatre déplacements donnés). Dont le cas où cette topologie est créée par les deux cosinus directeurs égaux à $\pi/4$. La corrélation d'images permet d'identifier les coefficients de Poisson dans le plan en utilisant les mêmes conditions aux limites citées à la figure III.5 (chapitre III). Pour déterminer les coefficients de Poisson ν_{12} , et ν_{21} par cette technique, il est nécessaire en premier temps d'identifier la position initiale de la structure étudiée [KER-12, RET-07, DAV-09]. La seconde étape est basée sur la détermination du déplacement transversal pour chaque étape (pour chaque image corrélée). Hursa *et al* [HUR-09] ont utilisé la même technique de corrélation d'image par le programme MATLAB dans le but de calculer le coefficient de Poisson dans le plan d'un matériau composite stratifié.



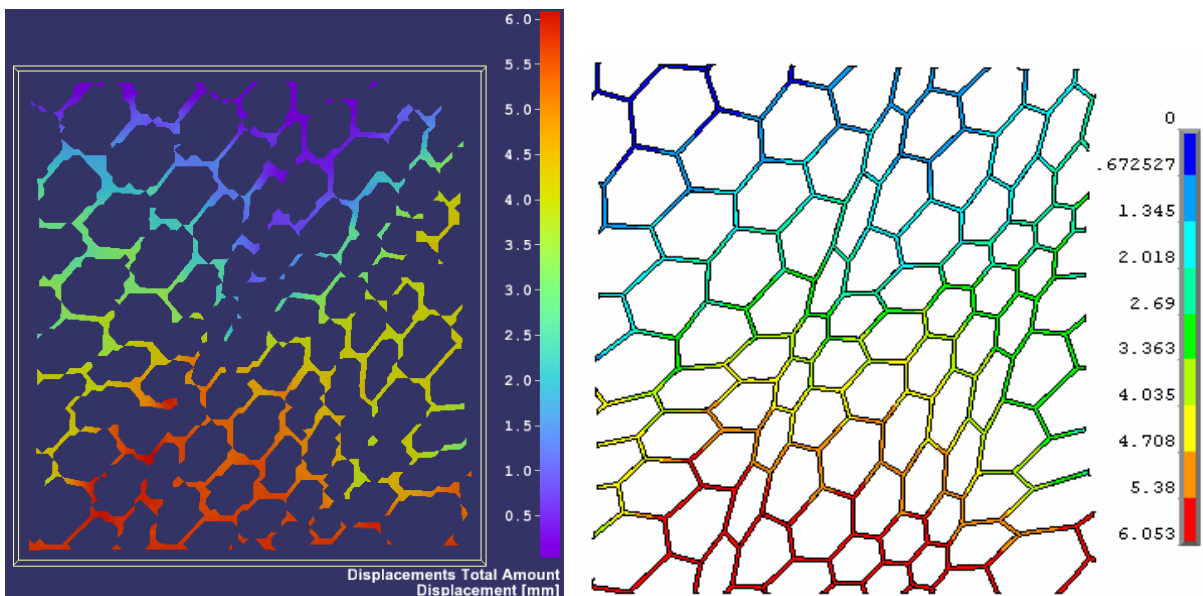
$$D_{\max} = 0,20 \text{ mm}$$



$$D_{\max} = 0,35 \text{ mm}$$



$D_{\max} = 3 \text{ mm}$

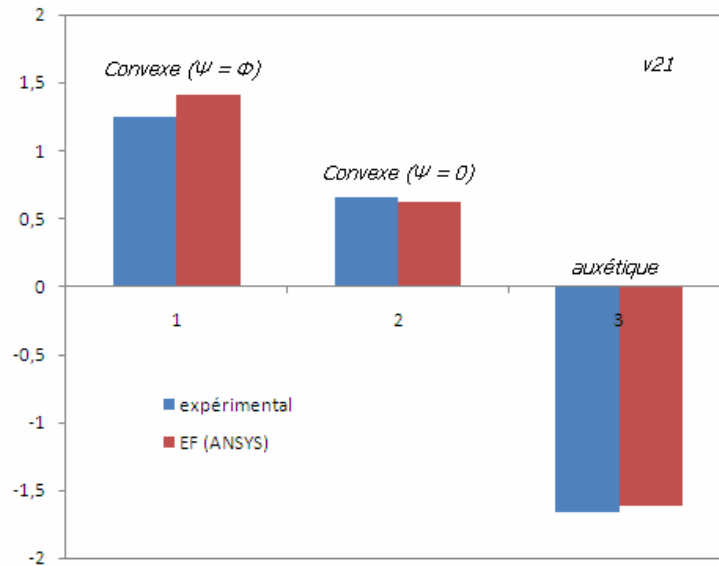


$D_{\max} = 6 \text{ mm}$

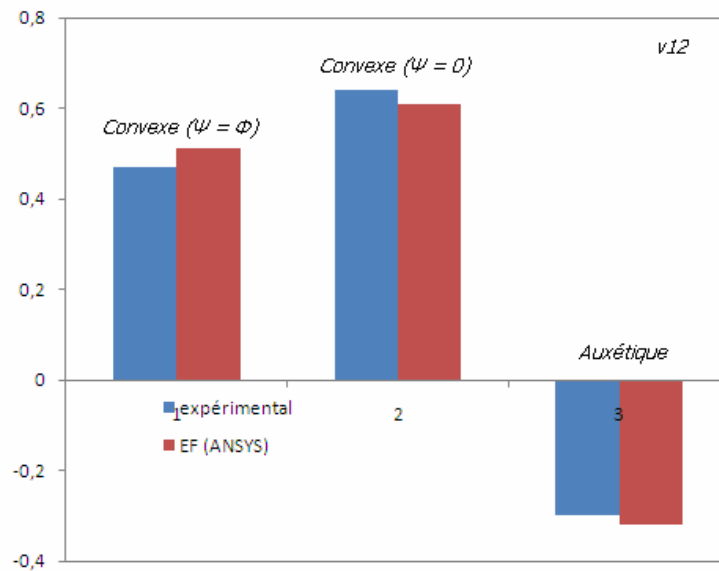
Figure IV. 10. Cartographie des champs de déplacements total pour la structure générée pour $\Phi = \pi/4$ et $\Psi = \pi/4$.

Les figures IV.11a et IV.11b montrent une étude comparative entre les résultats des coefficients de Poisson ν_{12} , et ν_{21} qui sont obtenues par la simulation effectuée sur

ANSYS et les résultats acquis par le logiciel de corrélation d'images ISTARA 4D pour les trois topologies étudiées.



(a)



(b)

Figure IV.11. Compression entre les résultats des coefficients de Poisson obtenus par ANSYS et la technique de corrélation d'images; (a) v_{21} , (b) v_{12}

Le tableau IV.3 représente une comparaison des résultats lors du test des structures cellulaire fabriquée par la FDM, pour les coefficients de Poisson ν_{21} , et ν_{12} entre les valeurs de corrélation d'images et la méthode des éléments finis. Les résultats obtenus de la topologie convexe créée pour $\Phi = 0$ montrent un comportement isotrope car les coefficients de Poisson sont pratiquement les mêmes de l'ordre de 0,65 dans les deux directions de chargement (suivant x et y). Alors que, pour les topologies convexe créée avec $\Psi = \Phi$ est sollicité suivant l'axe x , le coefficient de poisson ν_{21} est plus de deux fois et demi plus grand par rapport au coefficient ν_{12} obtenu pour une traction suivant l'axe y . De plus, la topologie auxétique montre un coefficient de Poisson ν_{21} plus élevé de cinq fois par rapport au ν_{12} montrant ainsi un comportement fortement orthotrope. Les résultats obtenus par éléments finis montrent des dispersions avec les résultats expérimentaux. Ces dispersions sont principalement dues : d'une part au glissement des bouts du nid d'abeille au niveau des mors et donc on n'obtient pas un encastrement parfait lors de l'expérimentation, alors que dans le calcul par EF ce problème n'existe pas.

Tableau IV. 3 résultats du coefficient de Poisson dans le palan pour les trois topologies étudiées.

Type de structure	ν_{21}			ν_{12}		
	Expérimentale	EF (ANSYS) PLAN82	EF (ANSYS) PLAN42	Expérimentale	E F (ANSYS) PLAN82	EF (ANSYS) PLAN42
Convexe ($\Psi = \Phi$)	1,25	1,41	1,61	0,47	0,51	0,55
Convexe ($\Phi = 0$)	0,65	0,62	0,66	0,64	0,61	0,58
auxétique	-1,66	-1,62	-1,58	-0,3	-0,32	-0,38

Dans figure IV.12 est présenté une étude comparative entre les résultats des coefficients de Poisson pour les trois topologies étudiées obtenus par la technique de corrélation d'images (résultats expérimentaux) et ceux obtenus par EF (simulation numérique) en utilisant les deux éléments de maillage PLAN82 et PLAN42.

Pratiquement l'élément PLAN82 présente une rigidité plus élevée par rapport à l'élément PLAN42, ce qui justifie la dispersion entre les deux éléments de maillage. A titre d'exemple pour une configuration convexe avec $\Phi = 0$ l'écart type est de l'ordre de 0,2 ce qui conduit donc à une dispersion de 12,42 %. A cet effet nous adaptons les résultats obtenus par l'élément PLAN82.

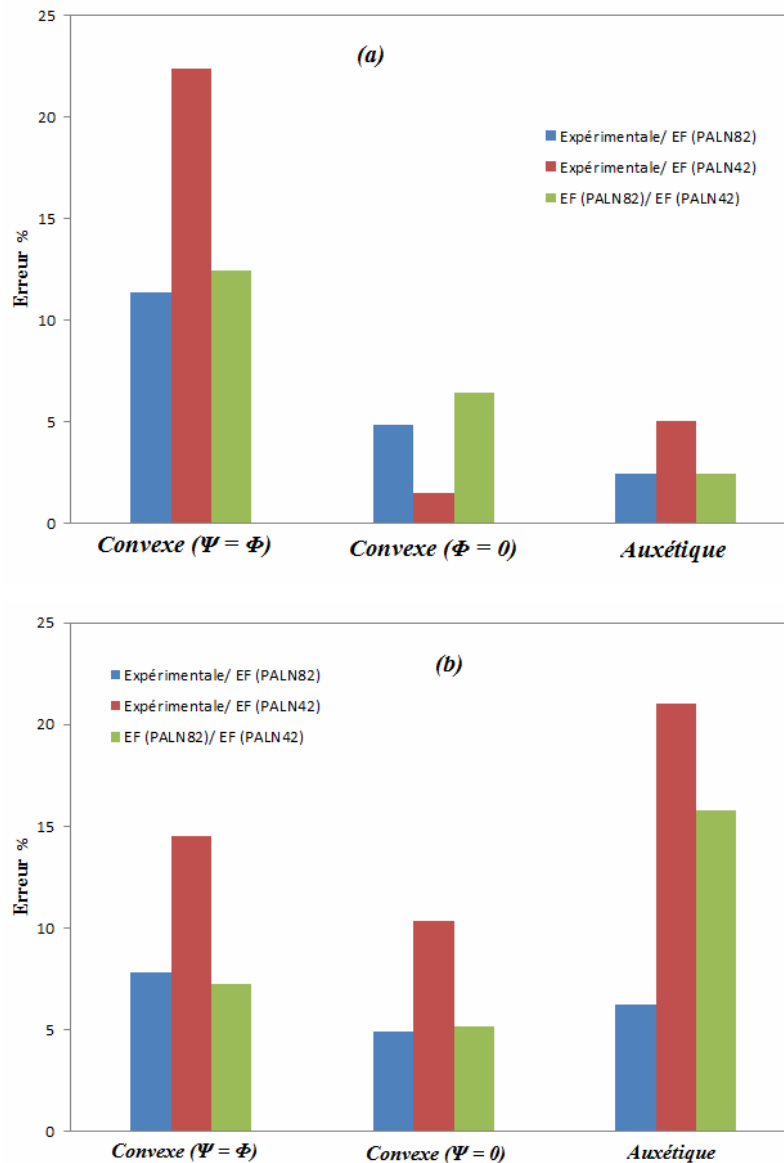


Figure IV.12. Dispersion entre les résultats expérimentaux et les résultats par EF.

Les dispersions enregistrées dans les histogrammes figure IV.11 sont pratiquement liées aux glissements des éprouvettes lors de l'essai de traction (mauvais encastrement) comme le montre la figure IV.13 suivante.

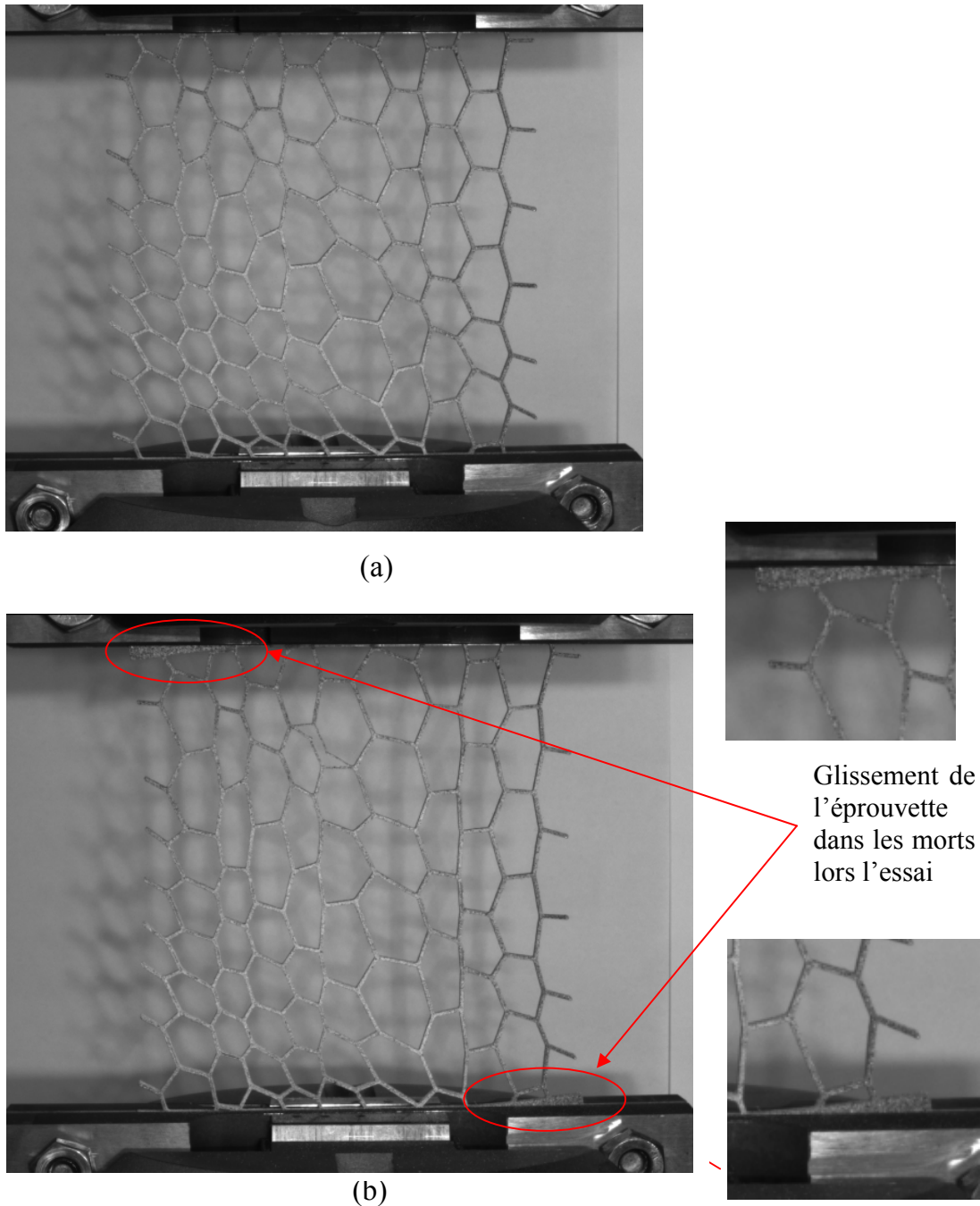
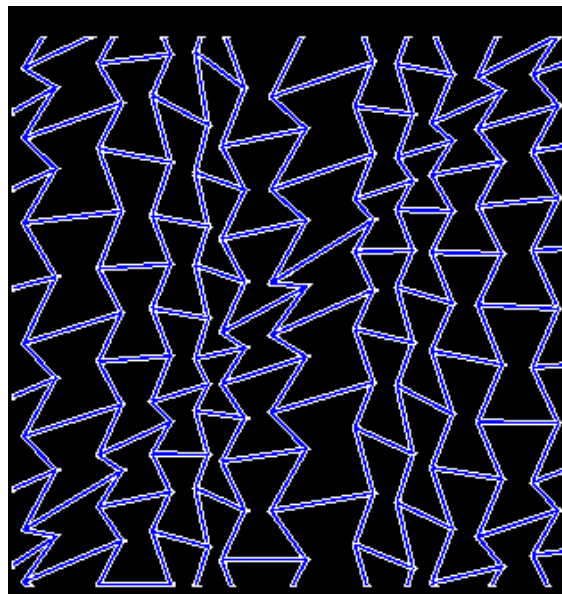
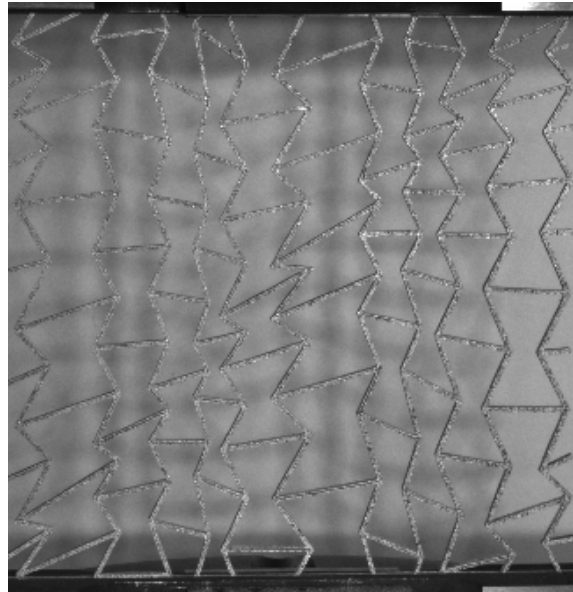
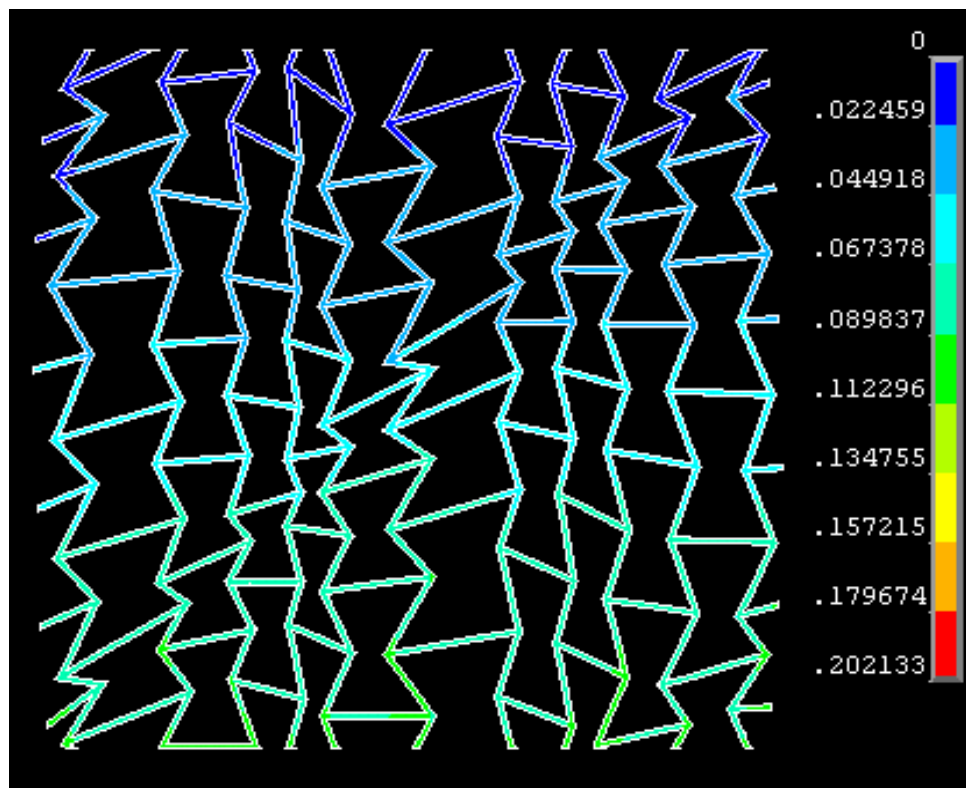
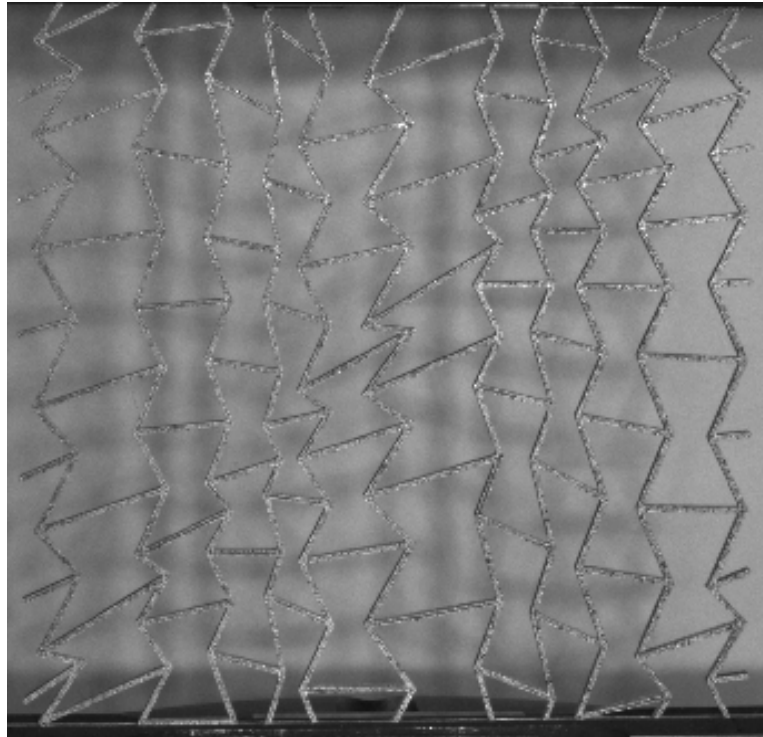


Figure IV.13. Glissements des éprouvettes lors de l'essai de traction.
(a) position initiale. (b) traction à un déplacement de 3,4 mm.

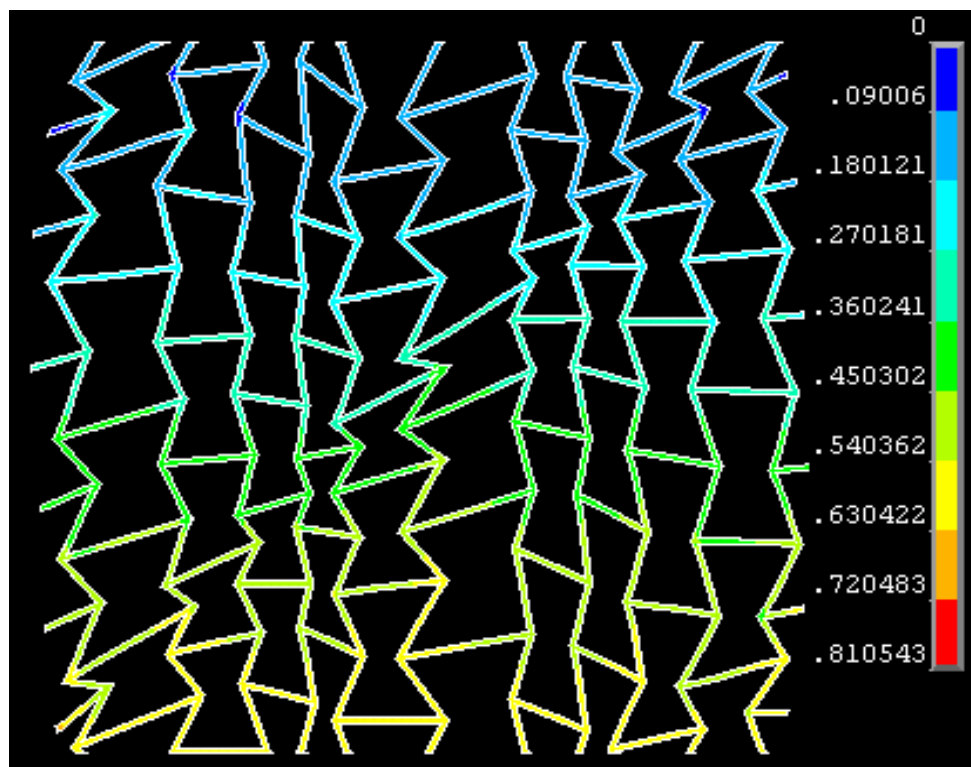
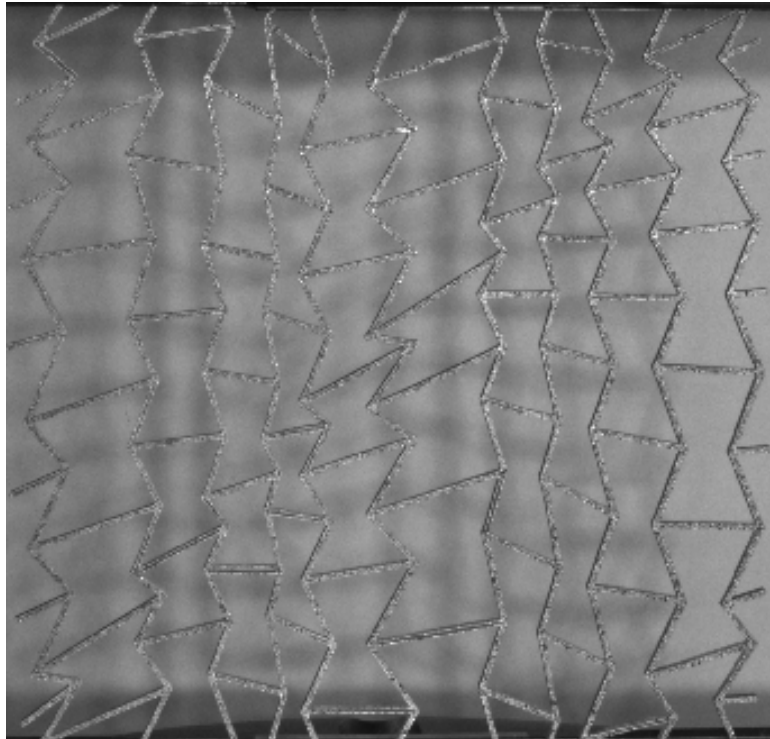
La figure IV.14 représente un état de gonflement de la topologie auxétique lors d'un essai de traction. Le déplacement $D_{\max} = 0$ montre la position initiale où le déplacement est nul. Avec l'augmentation du déplacement (D_{\max}) on obtient le gonflement de la structure, pour la topologie auxétique, aussi bien expérimentalement que par simulation EF. Les clichés expérimentaux sont en bonne concordance avec ceux obtenus par EF.



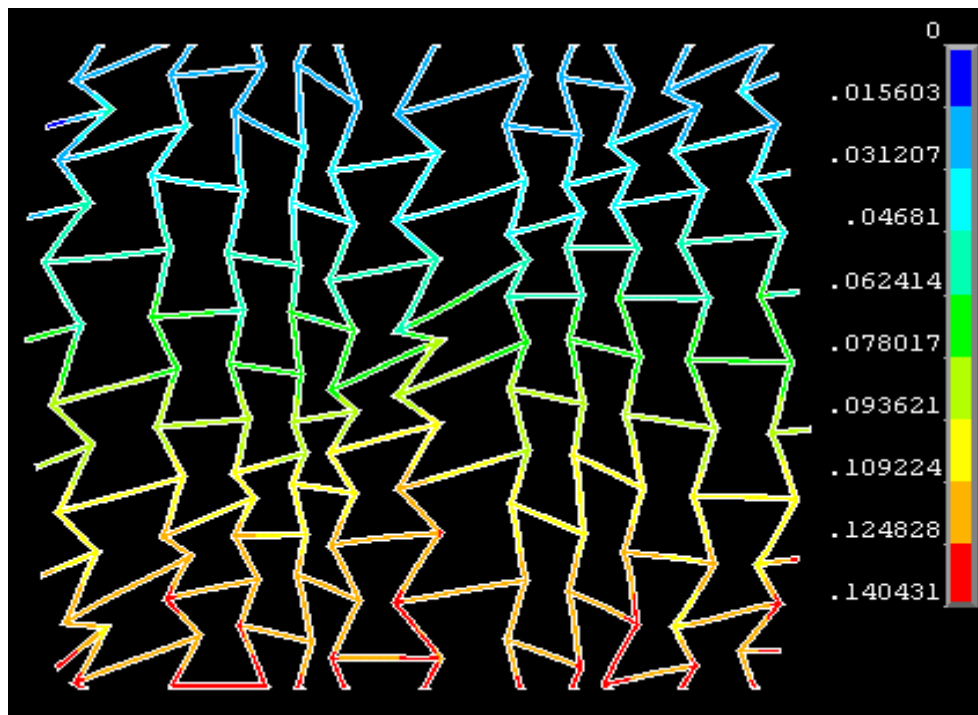
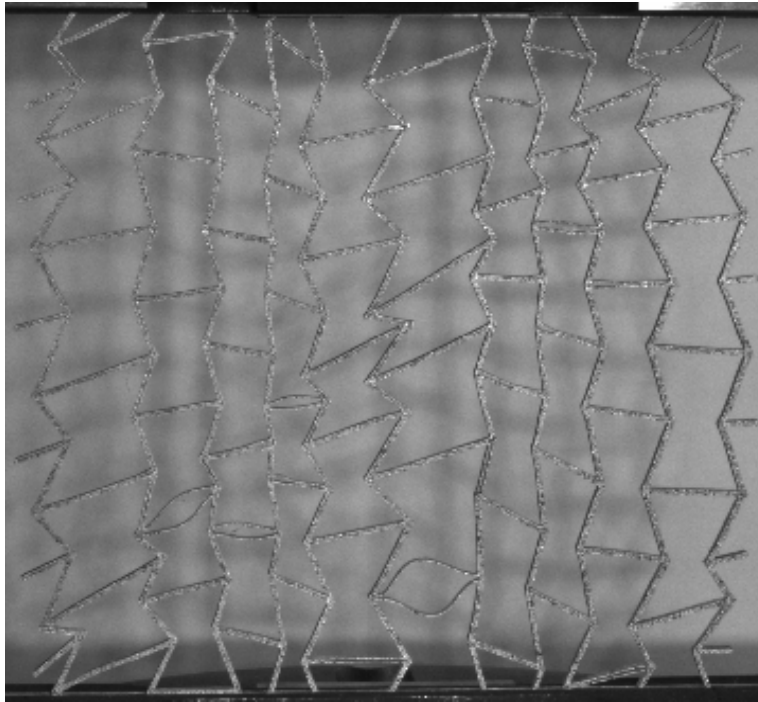
$D_{\max} = 0$ mm.



$D_{\max} = 0,20 \text{ mm.}$



$D_{\max} = 0,80 \text{ mm.}$



$$D_{\max} = 1,40 \text{ mm}$$

Figure IV.14. Cliché de gonflement de la structure auxétique, dont le cas où le chargement est selon l'axe Y

IV.5 Conclusion

- Les techniques de prototypage (impression 3D) et de corrélation d'images permettent de connaître le comportement mécanique en traction monotone de ce type de structures cellulaires Voronoï.

- La topologie convexe créée par les deux cosinus directeur égaux se comporte dans le plan comme un matériau quasi-isotrope, et la topologie auxétique et la topologie convexe créée pour $\Psi = 0$ se comporte dans le plan comme un matériau orthotrope.

- Les deux topologies, convexe et auxétique créée par $\Psi = 0$ montrent selon la direction de chargement une force maximale (suivant l'axe x) et une force minimale (suivant l'axe y). Par contre la topologie convexe créée par les deux directeur cosinus égaux ($\Phi = \pi/4$ et $\Psi = \pi/4$) représente pratiquement les mêmes forces à la rupture pour les deux axes de chargements (x et y).

- Le scénario de l'évolution des champs de déplacement obtenu par la technique de corrélation d'images est en bonne concordance avec ceux obtenu par la méthode des éléments finis.

- les résultats des coefficients de Poisson calculé par la méthode EF pour la topologie convexe créée par $\Psi = \Phi$ conduit à l'utilisation de l'élément de maillage PLAN82 car il est plus raide que PLAN42 et donne des résultats plus proche que ceux obtenus expérimentalement avec une différence égale à 11,34% et 9,27% pour ν_{12} , et ν_{21} respectivement.

- Les dispersions obtenues (expérimentalement et par EF) dans les résultats des coefficients de Poisson sont liées au glissement des éprouvettes au niveau des bords (mauvais encastrement) lors des essais de tractions notamment pour des déplacements importants.

Références

- [BRY-12] Tomasz Brynk, Rafal M. Molak, Mirosława Janiszewska, and Zbigniew Pakiela. Digital image correlation measurements as a tool of composites deformation description. *Computational Materials Science*, (0):–, 2012.
- [DAV-09] S. Dave, X. Song, F. Hofmann, K. Dragnevski, and A.M. Korsunsky. Digital image correlation and finite element analysis of inter- and intra-granular deformation. *Procedia Engineering*, 1(1):197 – 200, 2009.
- [EIT-10] Ulrich Eitner, Marc Köntges, and Rolf Brendel. Use of digital image correlation technique to determine thermomechanical deformations in photovoltaic laminates: Measurements and accuracy. *Solar Energy Materials and Solar Cells*, 94(8):1346 – 1351, 2010.
- [GIB-97] L.J. Gibson and M.F. Ashby. *Cellular solids: structure and properties*. Cambridge Univ Pr, 1997.
- [HUR-09] T. Rolich A. Hursa and S. Ercegovic Razic. Determining pseudo poisson's ratio of woven fabric with a digital image correlation method. *Textile Research Journal*, 79:1588–1598, 2009.
- [KER-12] Johannes Kerl, Tassanai Parittotokkaporn, Luca Frasson, Matthew Oldfield, Ferdinando Rodriguez y Baena, and Frank Beyrau. Tissue deformation analysis using a laser based digital image correlation technique. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 6(0):159 – 165, 2012.
- [KHA-12] M.K. Khan, T. Baig, and S. Mirza. Experimental investigation of in-plane and out-of-plane crushing of aluminum honeycomb. *Materials Science and Engineering: A*, 539(0):135 – 142, 2012.
- [PAN-12] Bing Pan and Kai Li. A fast digital image correlation method for deformation measurement. *Optics and Lasers in Engineering*, 49(7):841 – 847, 2011.

[RET-07] Julien Réthoré, Stéphane Roux, and François Hild. From pictures to extended finite elements: extended digital image correlation (x-dic). *Comptes Rendus Mécanique*, 335(3):131 – 137, 2007.

[TAN-12] Zhengzong Tang, Jin Liang, Zhenzhong Xiao, and Cheng Guo. Large deformation measurement scheme for 3d digital image correlation method. *Optics and Lasers in Engineering*, 50(2):122 – 130, 2012.

[WEB] www.stratasys.com

[ZHA-12] Jia qing Zhao, Pan Zeng, Li ping Lei, and Yuan Ma. Initial guess by improved population-based intelligent algorithms for large inter-frame deformation measurement using digital image correlation. *Optics and Lasers in Engineering*, 50(3):473 – 490, 2012.

Conclusion général et perspective

Ce travail de thèse a pour objet de proposer une nouvelle cellule irrégulière Voronoi. La méthode d'homogénéisation numérique a été appliquée pour déterminer leurs propriétés mécaniques équivalentes d'un milieu continu (module de Young, coefficient de Poisson). Notre contribution porte sur deux points :

Premièrement un modèle mathématique a été développé pour générer la nouvelle cellule convexe et aussi rendre ces structures auxétique.

En seconde étape la méthode des éléments finis a été utilisée pour étudier le comportement mécanique en fonction de la densité relative de la nouvelle cellule. Les résultats obtenus montrent que la cellule étudiée, se comporte comme la cellule Voronoi classique et aussi comme la cellule hexagonale en fonction de la densité relative. Le plus important ici c'est le coefficient de Poisson. Ce dernier est égal à 1 pour une topologie hexagonale régulière, par contre dans le cas de la cellule proposée les topologies convexe peuvent présenter des coefficients de Poisson négatifs. Si possible de créer des cellules auxétiques irrégulières ayant des coefficients de Poisson dans le plan compris entre -0,2 et -1,2.

Le mécanisme de déformation de la nouvelle cellule, est un mécanisme complexe entre la flexion et l'étirement simultanément des ligaments.

Notre cellule montre une rigidité plus élevée d'environ 60 % et 54 % pour les deux modules adimensionnels dans le plan par rapport à une topologie Voronoi classique.

Une dernière partie du travail a été consacrée à l'étude expérimentale de la nouvelle cellule Voronoi proposée. Les trois topologies fabriquées par la technique de prototypage (impression 3D) ont été testées en traction simple. Les résultats obtenus par la technique de la corrélation d'images, montrent pour chaque topologie un champ de déplacement différent. La configuration créée par les deux directeurs cosinus ($\Phi = \pi/4$ et $\Psi = \pi/4$) montre un comportement isotrope dans le plan. L'autre configuration convexe montre un comportement orthotrope dans le plan.

Références

- [ABB-09] Ahmed Abbadi, Y. Koutsawa, A. Carmasol, S. Belouettar, Z. Azari: Experimental and numerical characterization of honeycomb sandwich composite panels; *Simulation Modelling Practice and Theory* (2009) .
- [ALD-10] A. Alderson, K.L. Alderson, D. Attard, K.E. Evans, R. Gatt, J.N. Grima, W. Miller, N. Ravirala, C.W. Smith, and K. Zied. Elastic constants of 3-, 4- and 6-connected chiral and anti-chiral honeycombs subject to uniaxial in-plane loading. . *Composites Science and Technology*, 70(7):1042 – 1048, 2010.
- [ARB-09] Jamal Edine, Arbaoui. Etude Comparative et Caractérisation Mécanique Des Structure Sandwiches Multicouches. Thèse de Doctorat de l’université de PAUL VERLAINE – METZ. 2009.
- [BEZ-05] A. Bezazi, F. Scarpa, and C. Remilat. A novel centresymmetric honeycomb. *Composite structure*, 71:356-364, 2005.
- [BUA-03] N. Buannic, P. Cartraud, T. Quesnel: Homogenization of corrugated core sandwich panels, *J Composite Structures* 59 (2003) 299–312.
- [BIA-11] M. Bianchi, S. Frontoni, F. Scarpa, and C.W. Smith. Density change during the manufacturing process of pu-pe open cell auxetic foams. *Physica Status solidi (b)*, 248 (1):30–38, 2011.
- [BIA-10] M. Bianchi, F. Scarpa, and C.W. Smith. Shape memory behaviour in auxetic foams: Mechanical properties. *Acta Materialia*, 58(3):858–865, 2010.
- [BOU-12] M. Bouakba, A. Bezazi, and F. Scarpa. FE analysis of the in-plane mechanical properties of a novel Voronoi-type lattice with positive and negative Poisson’s ratio configurations. *International Journal of Solids and Structures* 49 (2012) 2450–2459.
- [BON-08] Jean-Philippe Bonnet, Frederic Topin, and Lounes Tadrist. Flow laws in metal foams: Compressibility and pore size effects. *Transport in Porous Media*, 73:233–254, 2008. 10.1007/s11242-007-9169-5.
- [BRY-12] Tomasz Brynk, Rafal M. Molak, Mirosława Janiszewska, and Zbigniew Pakiela. Digital image correlation measurements as a tool of composites deformation description. *Computational Materials Science*, (0):–, 2012.

- [CAD-09] F. Cadamagnani, S. Frontoni, M. Bianchi, and F. Scarpa. Compressive uniaxial properties of auxetic open cell PU based foams. *Physica Status Solidi (b)*, 246(9):2118–2123, 2009.
- [CHA-97] N. Chan and K.E. Evans. Microscopic examination of the microstructure and deformation of conventional and auxetic foams. *Journal of Materials Science*, 32(21):5725–5736, 1997.
- [CHA-91] Yvan Champoux, Michael R. Stinson, and Gilles A. Daigle. Air-based system for the measurement of porosity. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 89(2):910–916, 1991.
- [CHE-95] C.P. Chen and R.S. Lakes. Analysis of the structure property relations of foam materials. *Cellular Polymers*, 14:186–202, 1995.
- [CHE-11] D.H. Chen, L. Yang: Analysis of equivalent elastic modulus of asymmetrical honeycomb, *J Composite Structures* 93 (2011)767–773.
- [DAV-09] S. Dave, X. Song, F. Hofmann, K. Dragnevski, and A.M. Korsunsky. Digital image correlation and finite element analysis of inter- and intra-granular deformation. *Procedia Engineering*, 1(1):197 – 200, 2009.
- [EIT-10] Ulrich Eitner, Marc Köntges, and Rolf Brendel. Use of digital image correlation technique to determine thermomechanical deformations in photovoltaic laminates: Measurements and accuracy. *Solar Energy Materials and Solar Cells*, 94(8):1346 – 1351, 2010.
- [FAZ-02] A. Fazekas, R. Dendievel, L. Salvo, and Y. Brechet. Effect of microstructural topology upon the stiffness and strength of 2D cellular structures. *International Journal of Mechanical Sciences*, 44:2047–2066, 2002.
- [GAS-05] N. Gaspar, C.W. Smith, E.A. Miller, G.T. Seidler, and K.E. Evans. Quantitative analysis of the microscale of auxetic foams. *Physica Status Solidi (b)*, 242(3):550–560, 2005.
- [GIB-88] LJ Gibson and MF Ashby. *Cellular solids: structure and properties*. Pergamon Press, Oxford, 1988.
- [GIB-97] L.J. Gibson and M.F. Ashby. *Cellular solids: structure and properties*. Cambridge Univ Pr, 1997.
- [GRI-00] J.N. Grima and K.E. Evans. Auxetic behavior from rotating squares. *Journal of Materials Science Letters*, 19(17):1563–1565, 2000.
- [HAR-08] El-haddi Harkati. Analyse du comportement et l’endommagement des matériaux composites stratifiés et sandwiches. Thèse de Doctorat de l’université de Guelma. 2008.

- [HIL-82] N.C. Hilyard. *Mechanics of cellular plastics*. Macmillan Pub Co, 1982.
- [HUR-09] T. Rolich A. Hursa and S. Ercegovic Razic. Determining pseudo poisson's ratio of woven fabric with a digital image correlation method. *Textile Research Journal*, 79:1588–1598, 2009.
- [JAN-01] Christain Janot ET Bernhard IIschner. *Matériaux émergents tome 19*. Press polytechniques et universitaires romandes, 2001.
- [JAM-08] X . James Ren, Vadim V. Silberschmidt; Numerical modelling of low-density cellular materials; *J Computational Materials Science* 43 (2008) 65–74.
- [KER-12] Johannes Kerl, Tassanai Parittotokkaporn, Luca Frasson, Matthew Oldfield, Ferdinando Rodriguez y Baena, and Frank Beyrau. Tissue deformation analysis using a laser based digital image correlation technique. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 6(0):159 – 165, 2012.
- [KHA-12] M.K. Khan, T. Baig, and S. Mirza. Experimental investigation of in-plane and out-of-plane crushing of aluminum honeycomb. *Materials Science and Engineering: A*, 539(0):135 – 142, 2012.
- [LAK-87a] R.S. Lakes. Foam structures with a negative Poisson's ratio. *Science*, 235:1038–1040, 1987.
- [LAK-87b] R.S. Lakes. Response: Negative Poisson's Ratio Materials. *Science (New York, NY)*, 238(4826):551, 1987.
- [LAK-93] R.S. Lakes. Design considerations for negative Poisson's ratio materials. *ASME Journal of Mechanical Design*, 115:696–700, 1993.
- [LAS 10] B. Lascoup, Z. Aboura, K. Khellil, M. Benzeggagh: Homogenization of the core layer in stitched sandwich structures. *Composites Science and Technology* 70 (2010)350–355.
- [LI-05] K. Li, X. L. Gao, and G. Subhash. Effects of cell shape and cell wall thickness variations on the elastic properties of two dimensional cellular solids. *International Journal of Solids and Structures*, 42:1777–1795, 2005.
- [OLI-06] F.A. Costa Oliveira, S. Dias, M. Fátima Vaz, and J. Cruz Fernandes. Behaviour of open-cell cordierite foams under compression. *Journal of the European Ceramic Society*, 26(1-2):179 – 186, 2006.
- [PAN-12] Bing Pan and Kai Li. A fast digital image correlation method for deformation measurement. *Optics and Lasers in Engineering*, 49(7):841 – 847, 2011.

- [PRA-97] D. Prall and R.S. Lakes. Properties of a chiral honeycomb with a Poisson's ratio of -1 . *International Journal of Mechanical Sciences*, 39(3):305–314, 1997.
- [RET-07] Julien Réthoré, Stéphane Roux, and François Hild. From pictures to extended finite elements: extended digital image correlation (x-dic). *Comptes Rendus Mécanique*, 335(3):131 – 137, 2007.
- [SCA-07] F. Scarpa, S. Blain, T. Lew, D. Perrott, M. Ruzzene, and J.R. Yates. Elastic buckling of hexagonal chiral cell honeycombs. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 38(2):280–289, 2007.
- [SCA-00] F. Scarpa, P. Panayiotou, and G. Tomlinson. Numerical and experimental uniaxial loading on in-plane auxetic honeycombs. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 35(5):383–388, 2000.
- [SCA-03a] F.L. Scarpa, F. Dallochio, and M. Ruzzene. Identification of acoustic properties of auxetic foams. 5052:468, 2003.
- [SCA-03b] F. Scarpa, G. Burriesci, F. C. Smith, and B. Chambers. Mechanical and electromagnetic behaviour of auxetic honeycomb structures. *The Aeronautical Journal*, 2774:175 – 183, 2003.
- [SCA-10] F. Scarpa, J.A. Giacomini, A. Bezazi, and W.A. Bullough. Dynamic behavior and damping capacity of auxetic foam pads. *Smart Structures and Materials: Damping and Isolation*.
- [SCH-11] J. Schwerdtfeger, F. Schury, M. Stingl, F. Wein, R. F. Singer, and C. Korner. Mechanical characterisation of a periodic auxetic structure produced by sebm. *Physica Status Solidi (b)*, 2011.
- [SIL-95] M. J. Silva, W. C. Hayes, and L. J. Gibson. The effects of non-periodic microstructure on the elastic properties of two-dimensional cellular solids. *International Journal of Mechanical Sciences*, 37(11):1161–1177, 1995.
- [SPA-12] Spadoni A. and M. Ruzzene. Elasto-static micropolar behavior of a chiral auxetic lattice. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60:156 – 171, 2012.
- [TAN-12] Zhengzong Tang, Jin Liang, Zhenzhong Xiao, and Cheng Guo. Large deformation measurement scheme for 3d digital image correlation method. *Optics and Lasers in Engineering*, 50(2):122 – 130, 2012.
- [VAF-05] K. Vafai. *Handbook of porous media*. CRC, 2005.
- [WAR-97] W. E. Warren and A. M. Kraynik. Linear elastic behavior of a low-density kelvin foam with open cells. *Journal of Applied Mechanics*, 64(4):787–794, 1997.

- [WEB-1] www.google/libellule/tif.com
- [WEB-4] www.stratasys.com
- [YAN-04] W. Yang, Z.-M. Li, W. Shi, B.-H. Xie, and M.-B. Yang. Review on auxetic materials. *Journal of Materials Science*, 39:3269–3279, 2004.
- [YAN-03] D.U. Yang, S. Lee, F.Y. Huang: Geometric effects on micropolar elastic honeycomb structure with negative Poisson’s ratio using the finite element method; *J Finite Elements in Analysis and Design*. 39 (2003)187–205.
- [ZHA-12] Jia qing Zhao, Pan Zeng, Li ping Lei, and Yuan Ma. Initial guess by improved population-based intelligent algorithms for large inter-frame deformation measurement using digital image correlation. *Optics and Lasers in Engineering*, 50(3):473 – 490, 2012.
- [ZHU-97] H. Zhu, J.F. Knott, and N.J. Mills. Analysis of the elastic properties of open-cell foams with tetrakaidecahedral cells. *Journal of the Mechanics and Physics of the Solids*, 45:319–343, 1997.
- [ZHU-01] H. X. Zhu, J. R. Hobdell, and A. H. Windle. Effects of cell irregularity on the elastic properties of 2D Voronoi honeycombs. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49:857–890, 2001.
- [ZHU-11] H.X . Zhu, C.Y. Chen b: Combined effects of relative density and material distribution on the mechanical properties of metallic honeycombs. *Mechanics of Materials* 43 (2011). 276–286.

Annexe I

Champ de déformation obtenu par la corrélation d'image

Les déformations représentées dans cet Annexe sont obtenus par le logiciel Istra 4D. Dont l'axe de chargement est y pour les trois topologies étudiées.

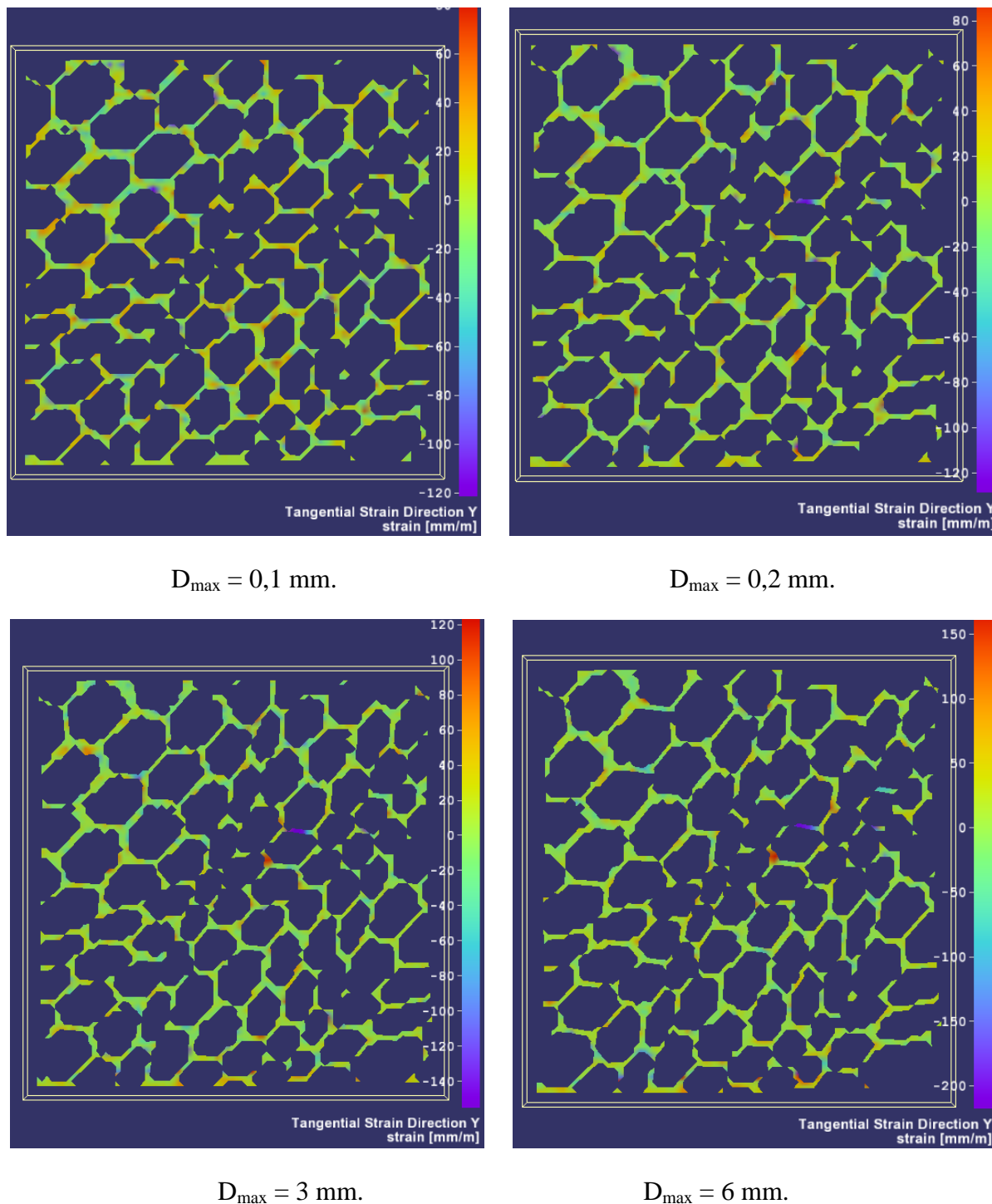
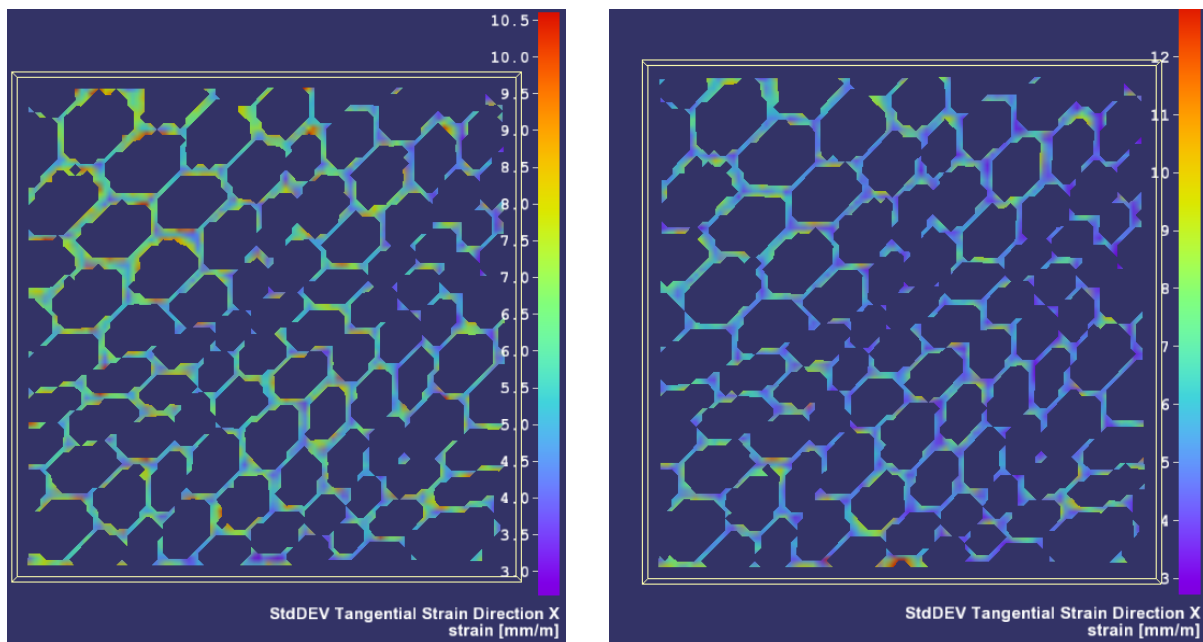


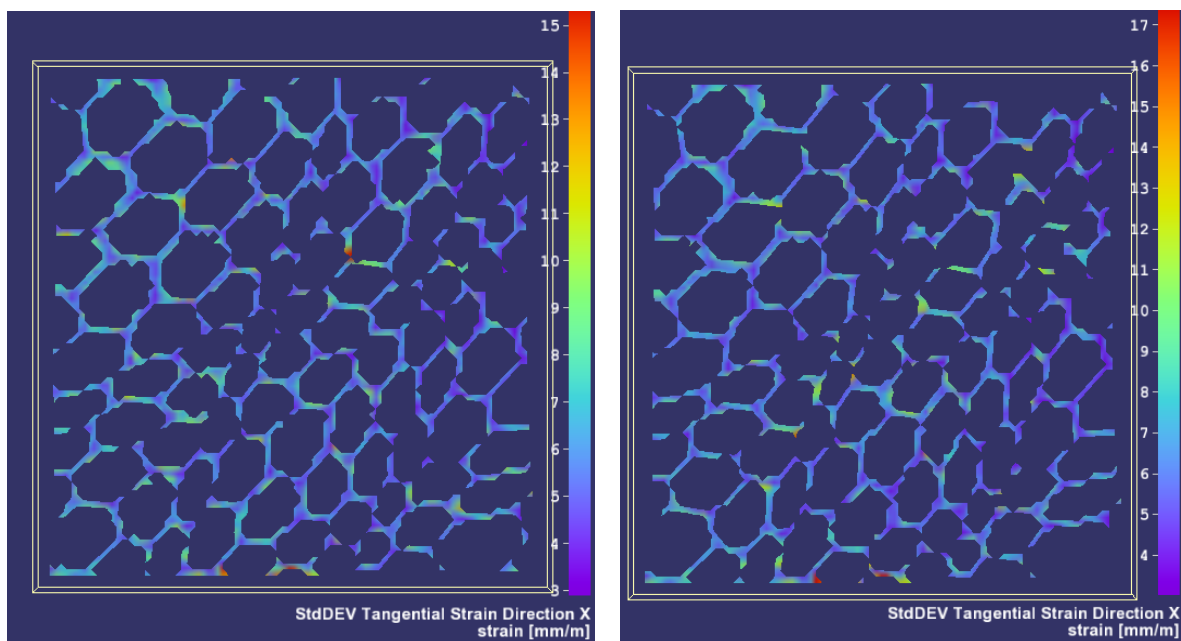
Figure 1. Evolution de la déformation ϵ_y la topologie convexe créée pour $\Phi = \pi/4$ et $\Psi = \pi/4$

Pour les mêmes champs de déplacement totaux la figure 2 affiche la déformation ε_x



$D_{\max} = 0,1 \text{ mm.}$

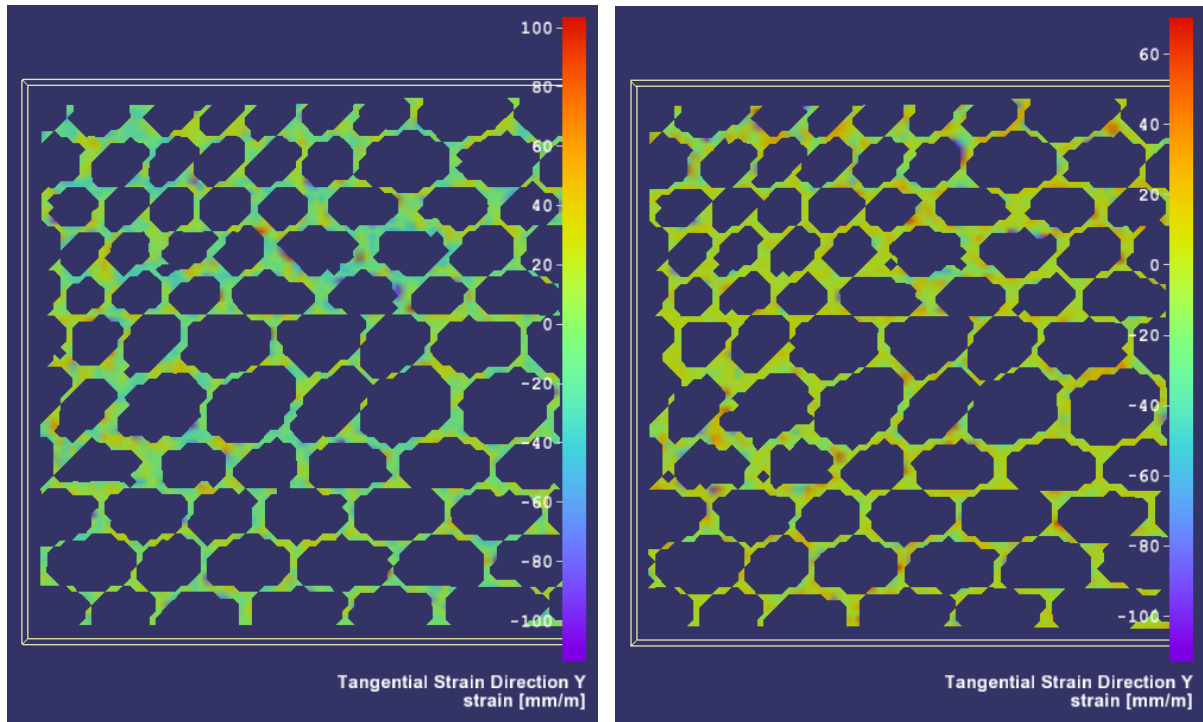
$D_{\max} = 0,2 \text{ mm.}$



$D_{\max} = 3 \text{ mm.}$

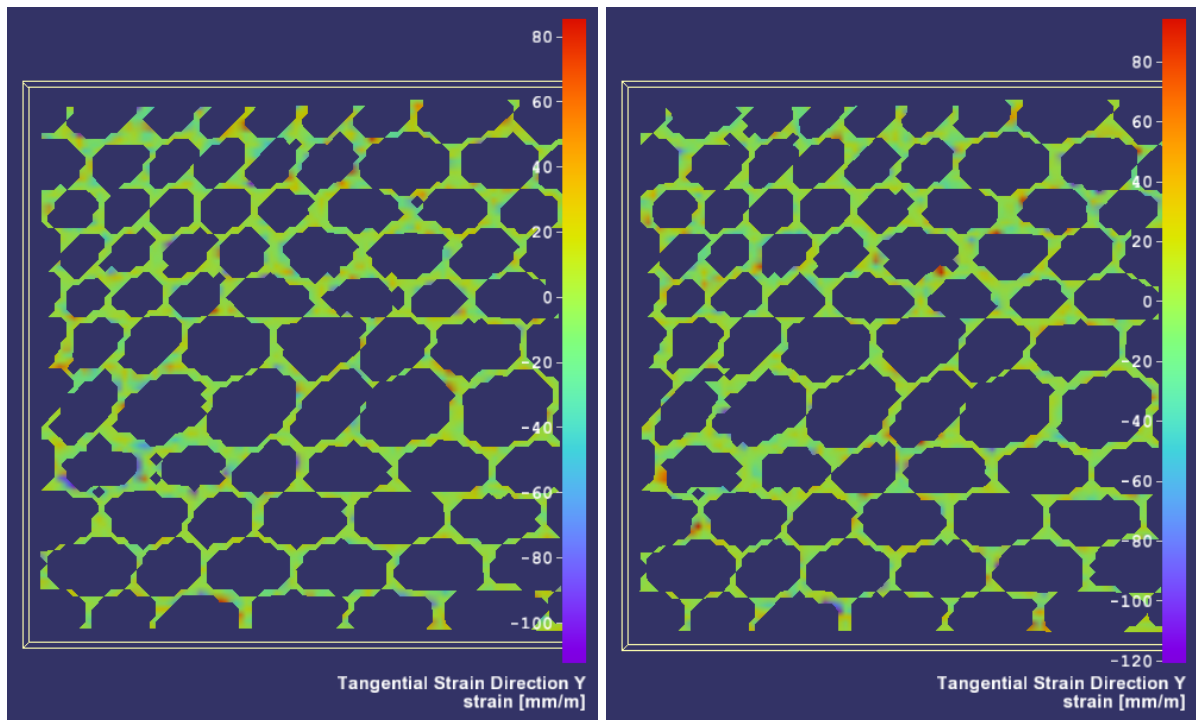
$D_{\max} = 6 \text{ mm.}$

Figure 2. Evolution de la déformation ε_x la topologie convexe créée pour $\Phi = \pi/4$ et $\Psi = \pi/4$



$D_{\max} = 0,1 \text{ mm.}$

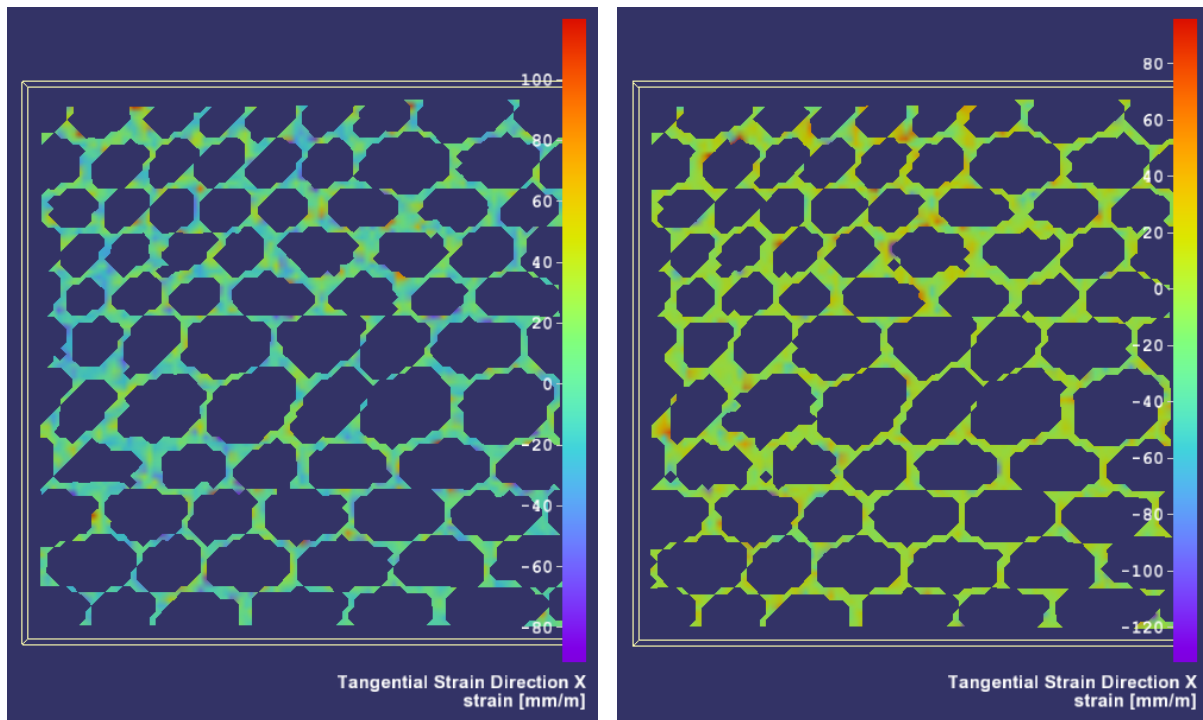
$D_{\max} = 1 \text{ mm.}$



$D_{\max} = 3,2 \text{ mm.}$

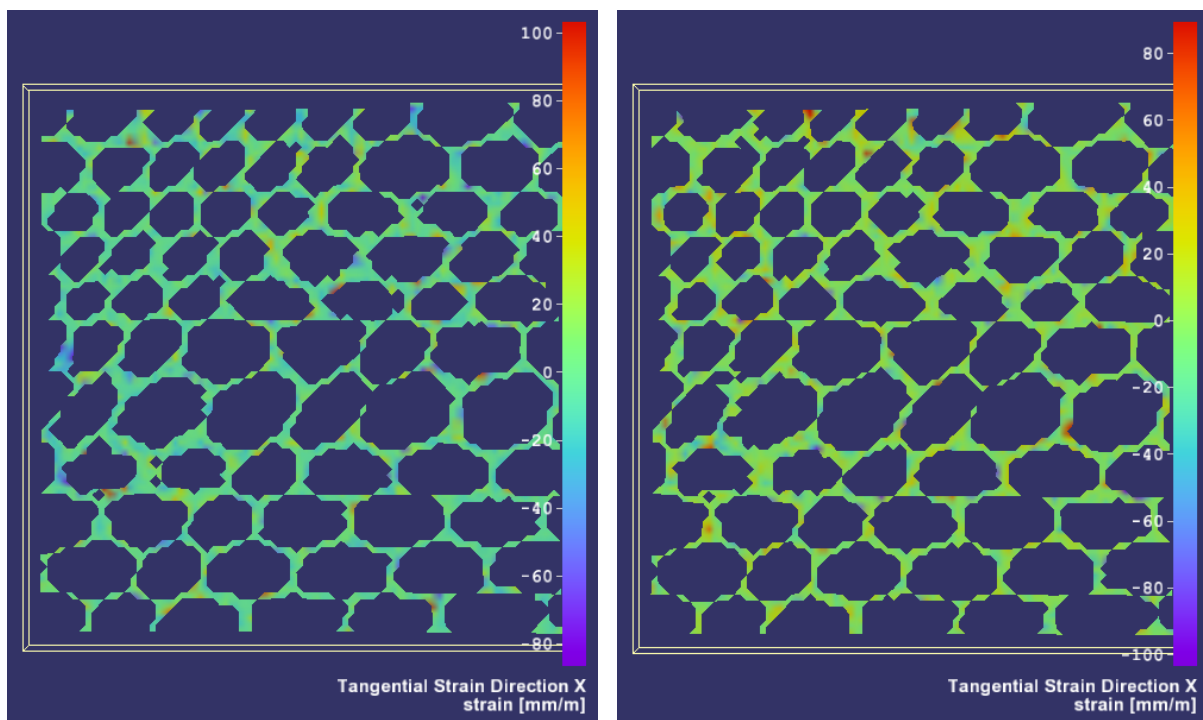
$D_{\max} = 7,6 \text{ mm.}$

Figure 3. Evolution de la déformation ε_y la topologie convexe créée pour $\Phi = \pi/4$ et $\Psi = 0$



$D_{\max} = 0,1 \text{ mm.}$

$D_{\max} = 1 \text{ mm.}$



$D_{\max} = 3,2 \text{ mm.}$

$D_{\max} = 7,6 \text{ mm.}$

Figure 4. Evolution de la déformation ε_x la topologie convexe créée pour $\Phi = \pi/4$ et $\Psi = 0$

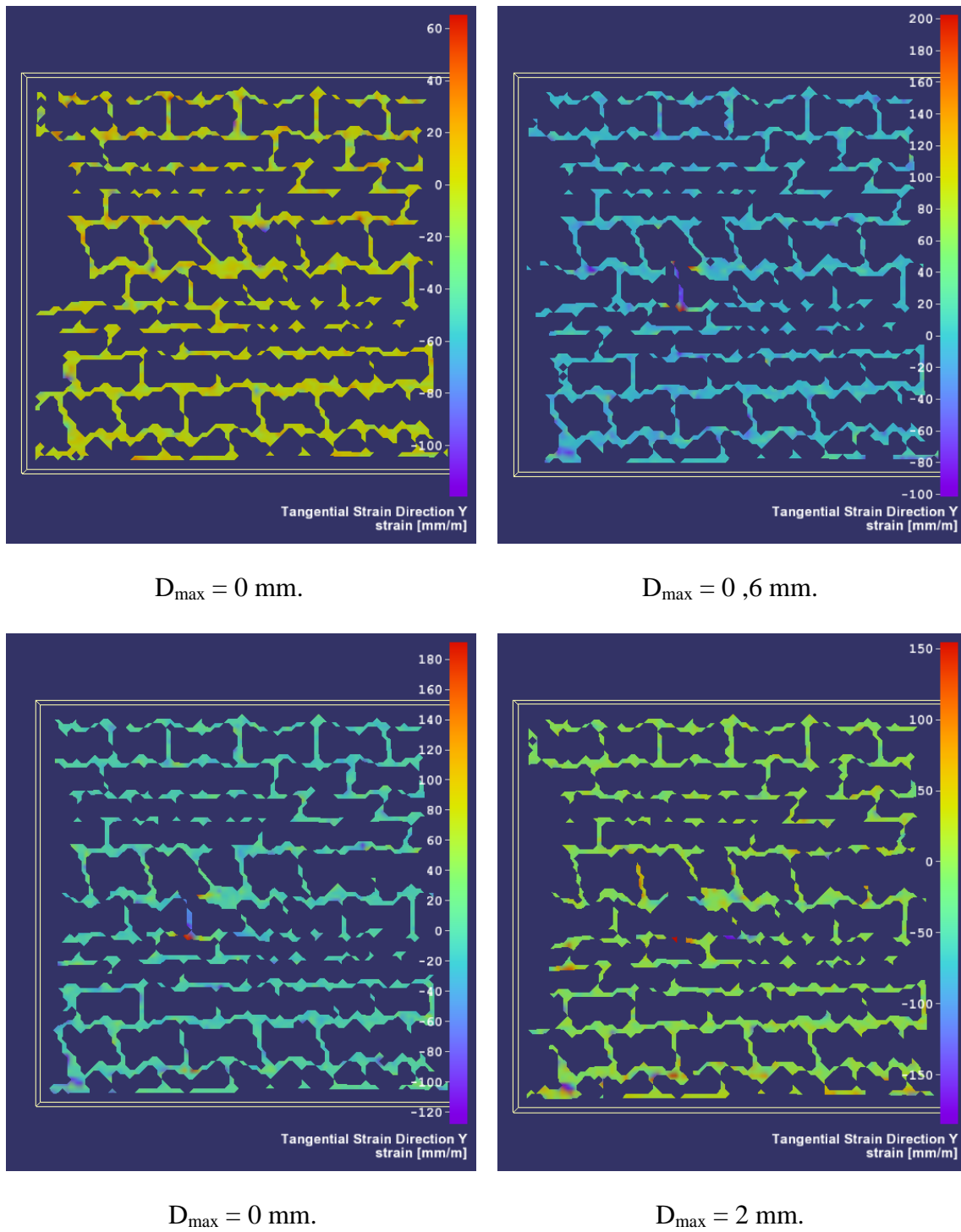
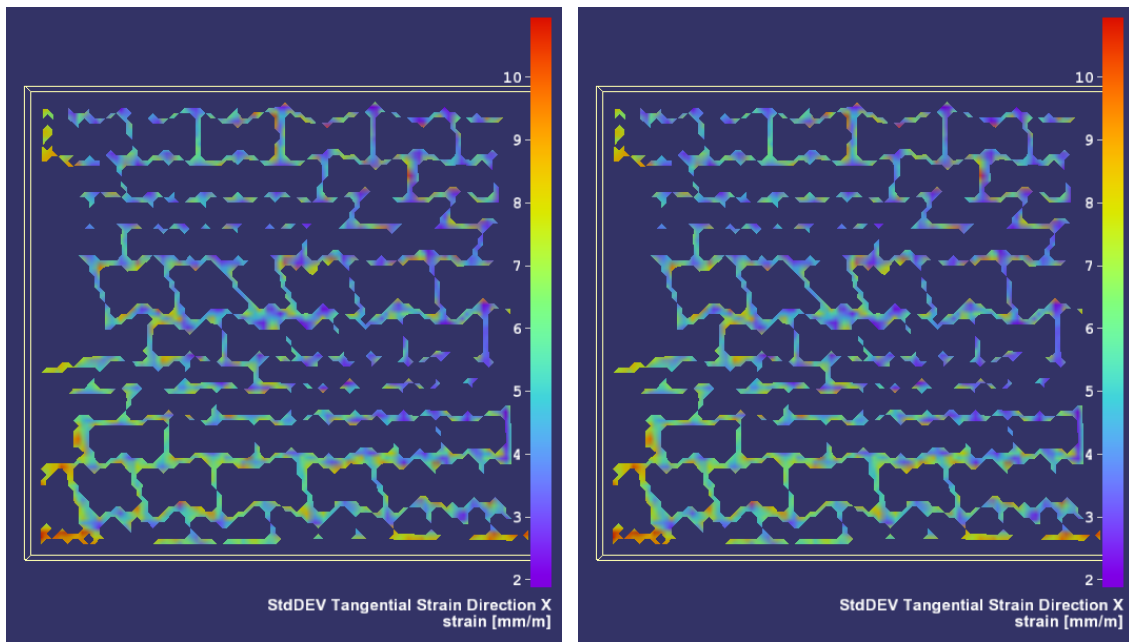
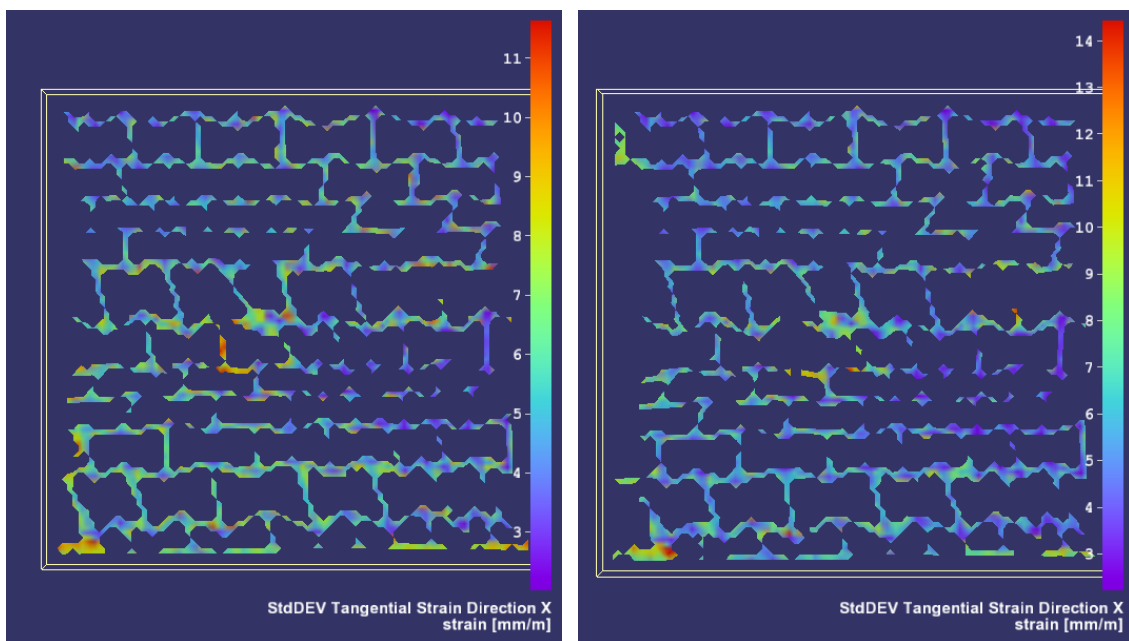


Figure 5. Evolution de la déformation ε_y , dont le cas où la topologie est auxétique



$D_{\max} = 0,2 \text{ mm}$.

$D_{\max} = 0,5 \text{ mm}$.



$D_{\max} = 0,8 \text{ mm}$.

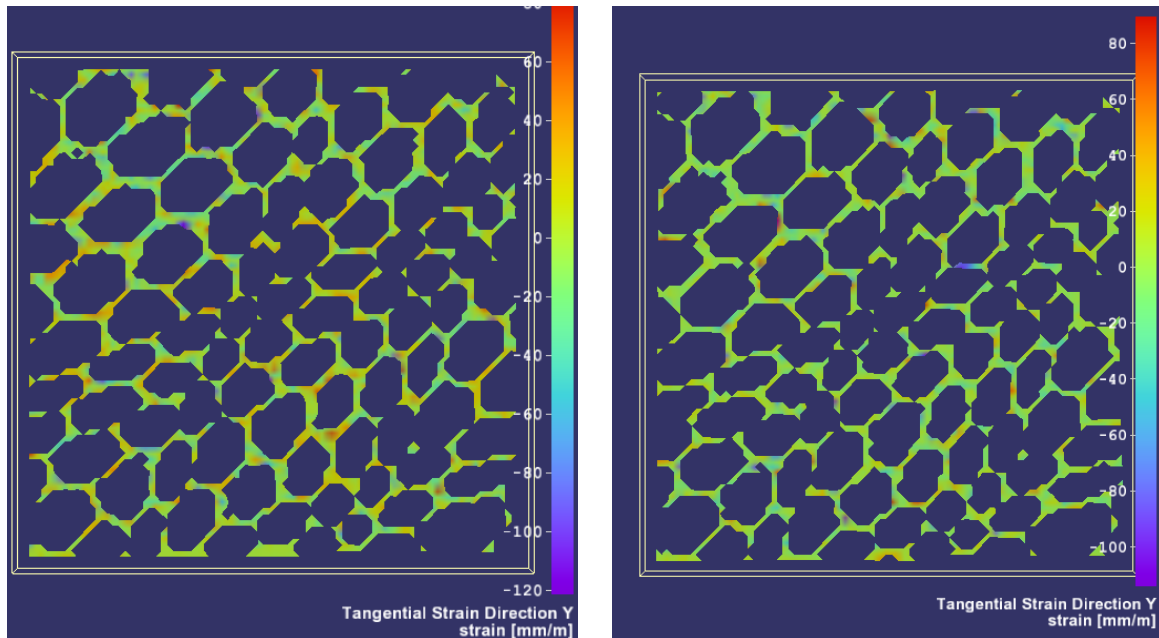
$D_{\max} = 1,5 \text{ mm}$.

Figure 6. Evolution de la déformation ϵ_x dont le cas où la topologie est auxétique

Annexe II

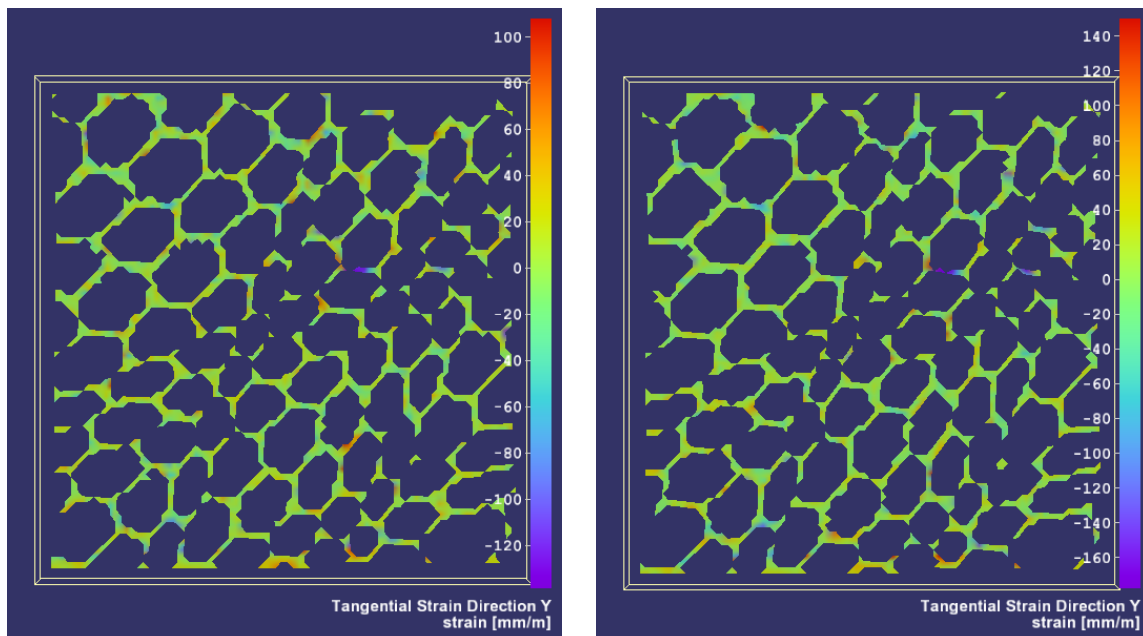
Champ de déformation obtenu par la corrélation d'image

Les déformations représentées dans cet Annexe sont obtenues par le logiciel Istra 4D. Dont l'axe de chargement est x .



$D_{\max} = 0,1 \text{ mm}$

$D_{\max} = 1 \text{ mm}$



$D_{\max} = 4 \text{ mm}$

$D_{\max} = 6 \text{ mm}$

Figure 1. Evolution de la déformation ε_y la topologie convexe créée pour $\Phi = \pi/4$ et $\Psi = \pi/4$

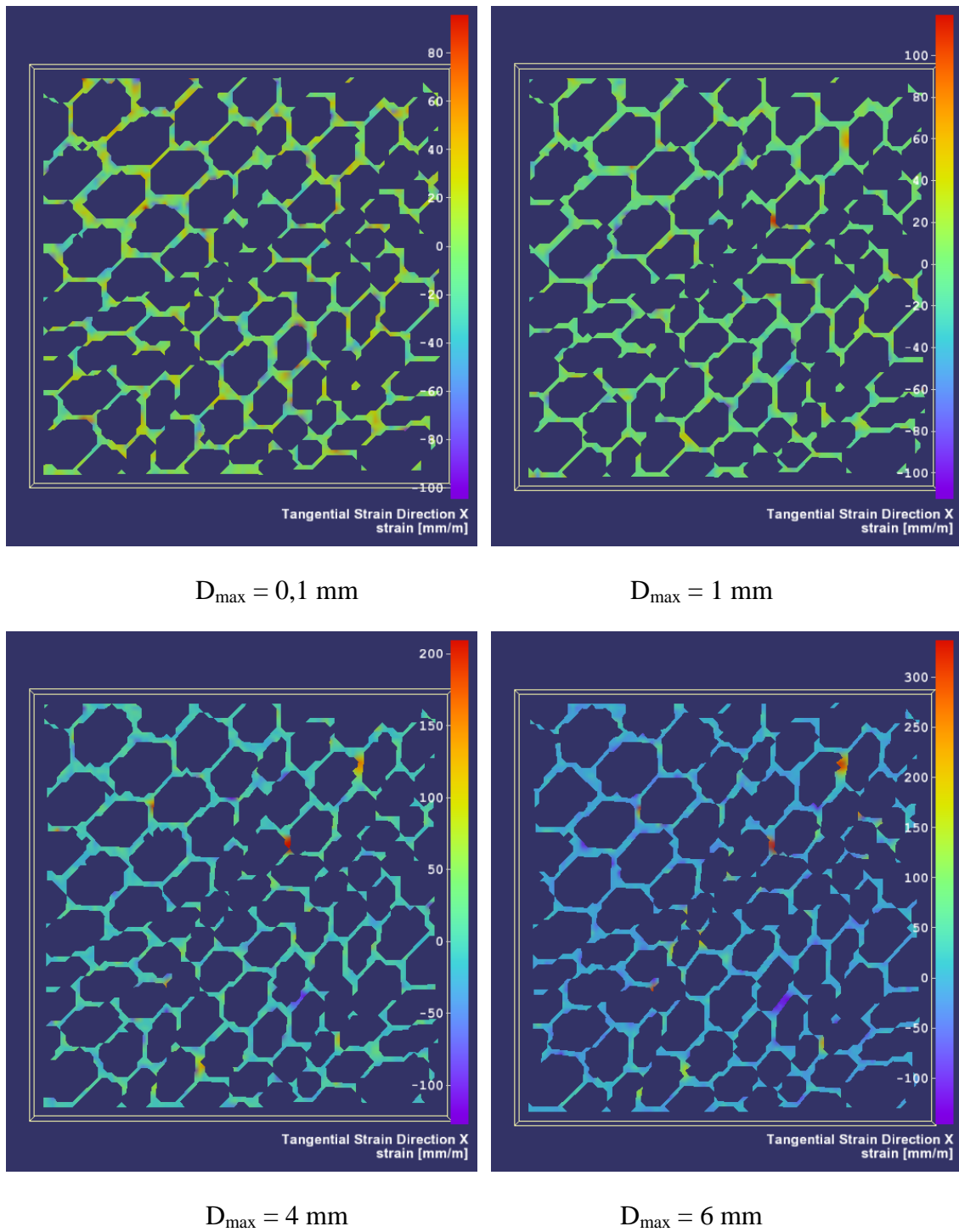


Figure 2. Evolution de la déformation ε_x la topologie convexe créée pour $\Phi = \pi/4$ et $\Psi = \pi/4$

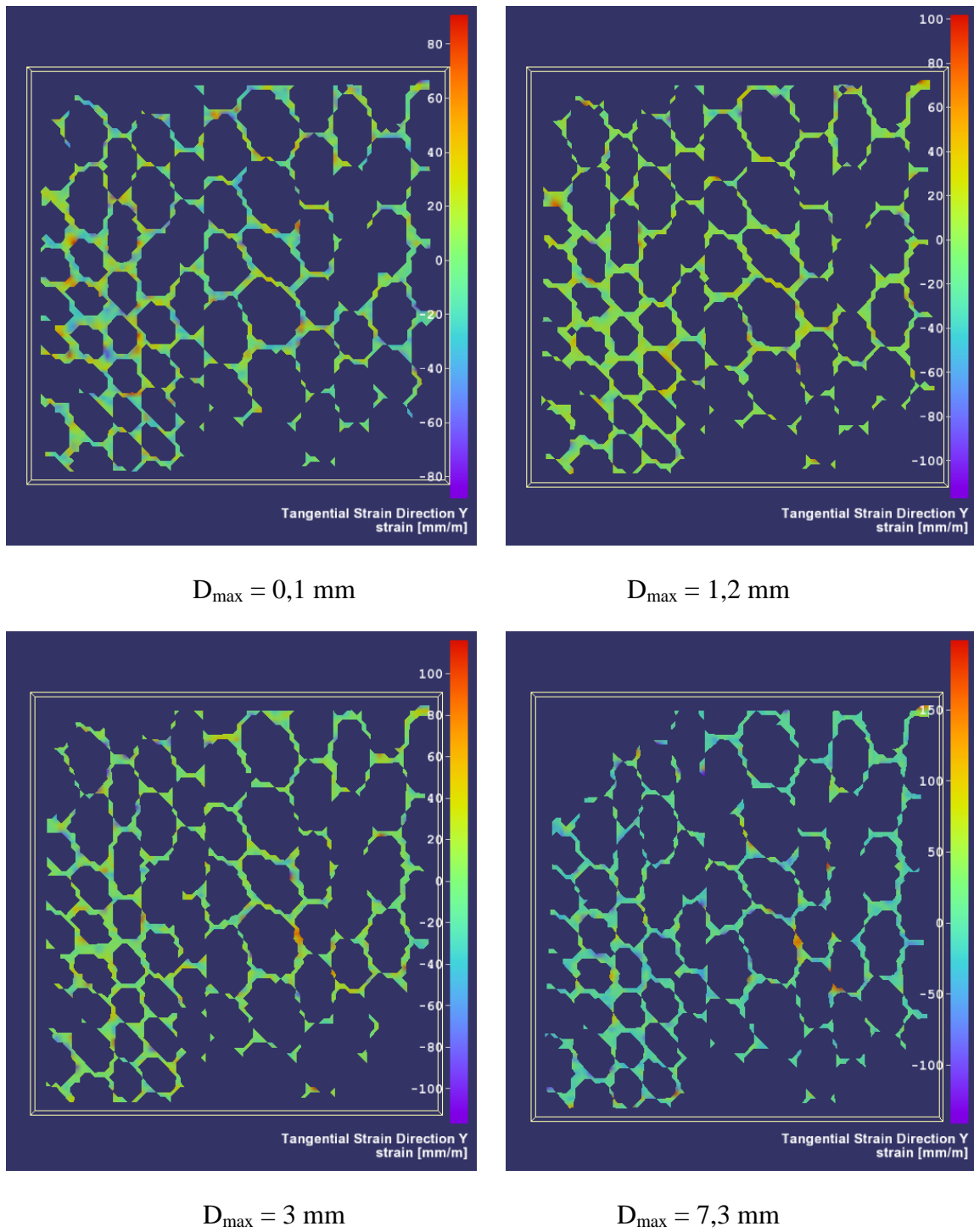


Figure 3. Evolution de la déformation ε_y la topologie convexe créée pour $\Phi = \pi/4$ et $\Psi = 0$

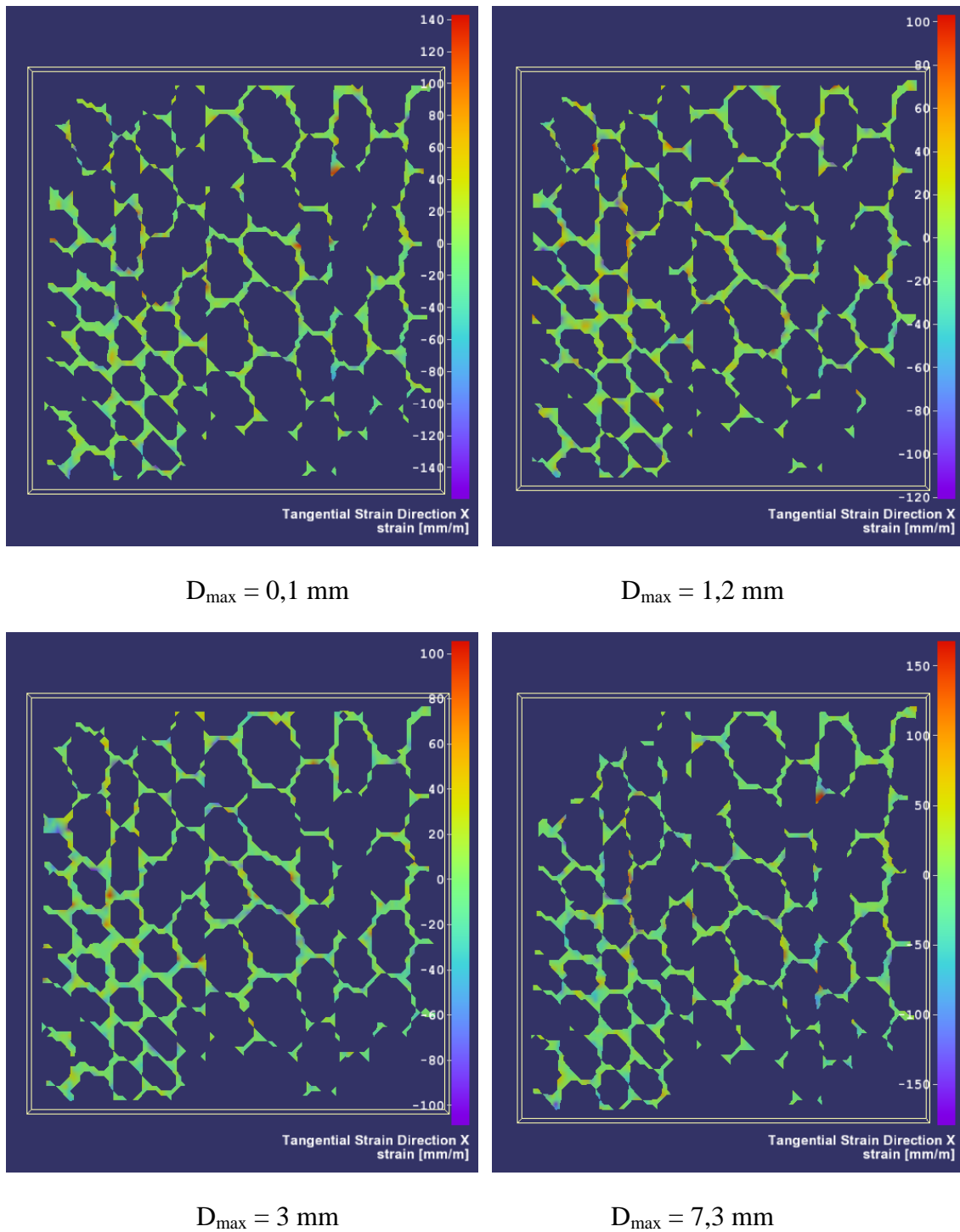


Figure 4. Evolution de la déformation ε_x la topologie convexe créée pour $\Phi = \pi/4$ et $\Psi = 0$

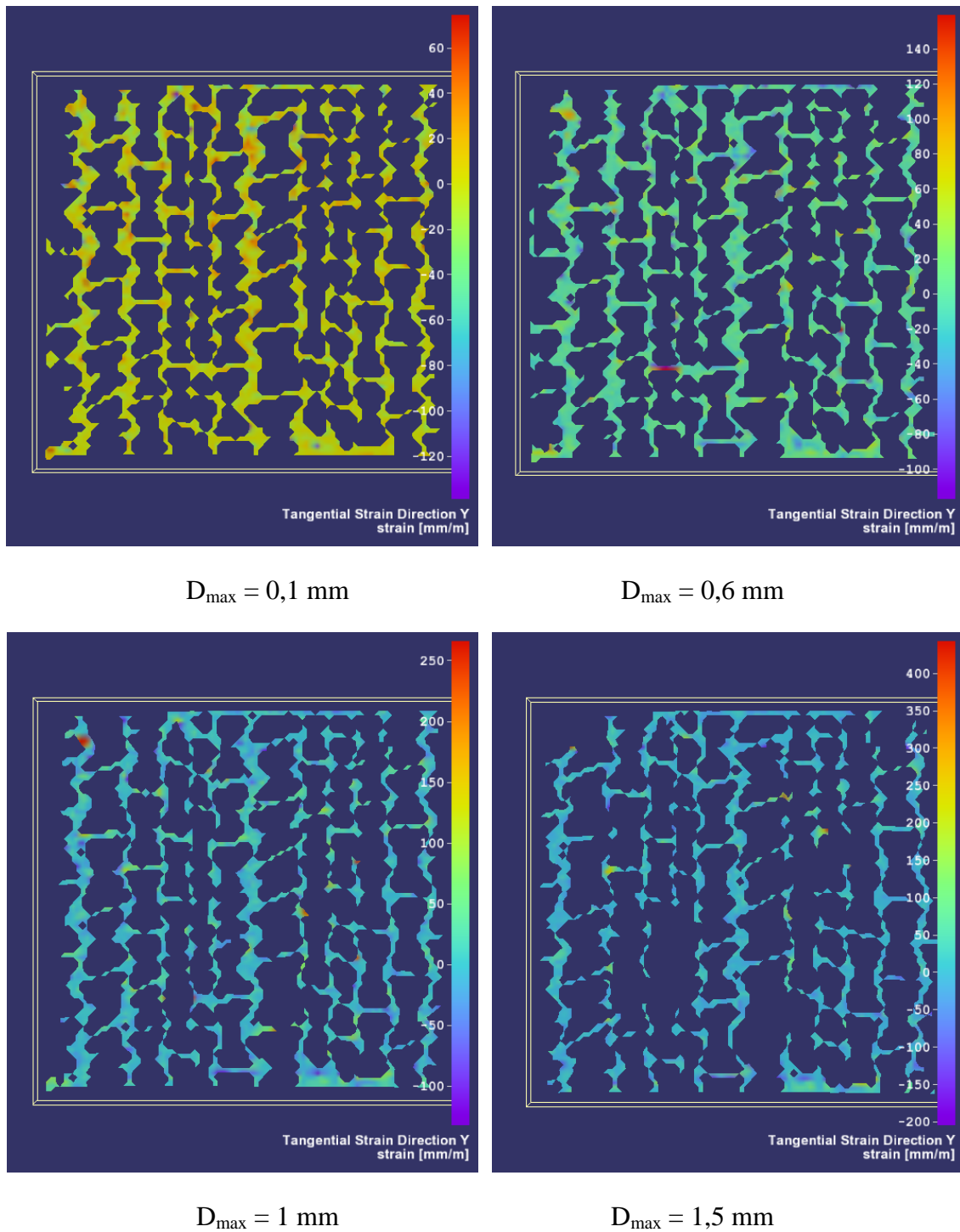


Figure 5. Evolution de la déformation ε_y la topologie auxétique créée pour $\Phi = \pi/4$ et $\Psi = 0$

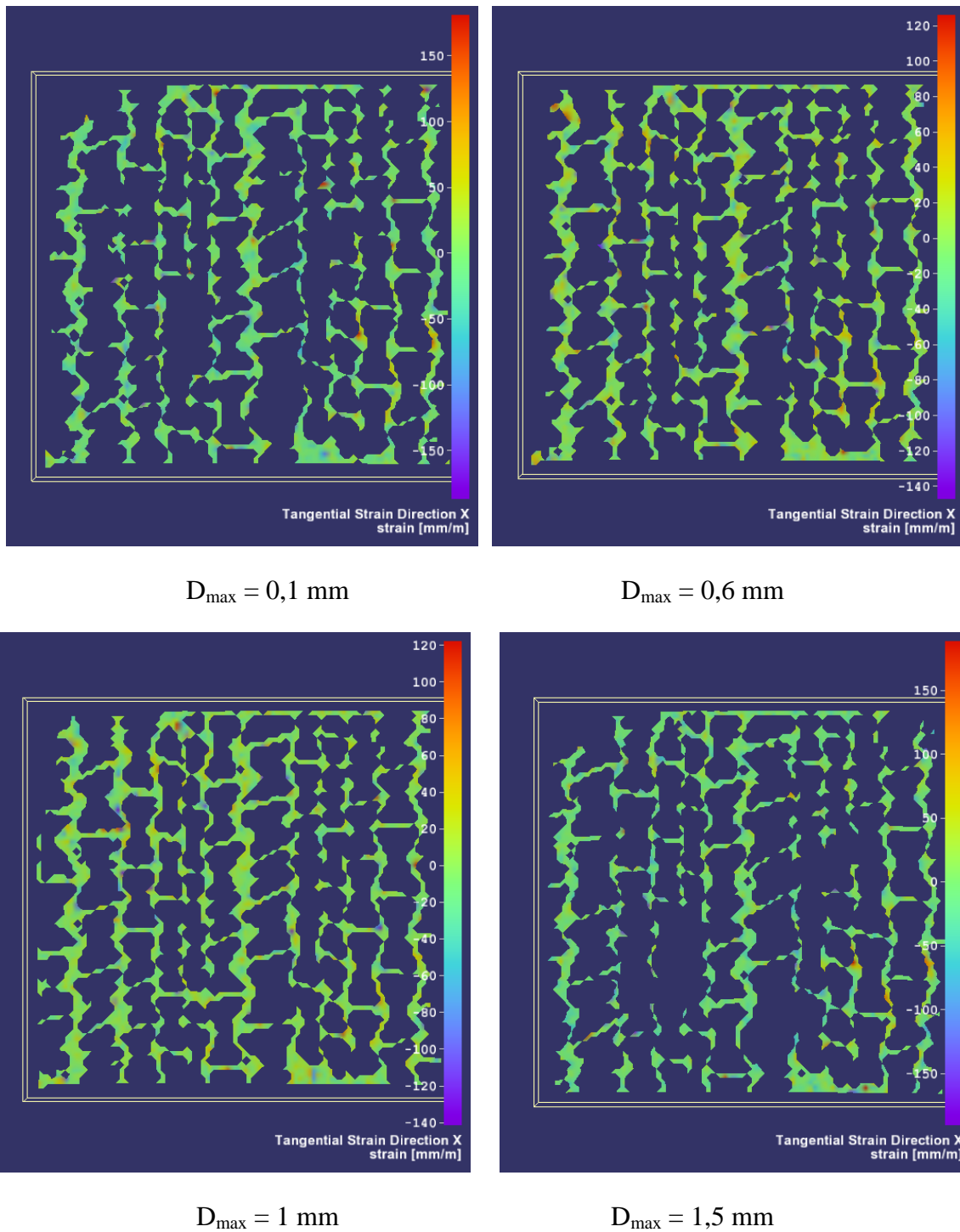


Figure 5. Evolution de la déformation ε_y la topologie auxétique créée pour $\Phi = \pi/4$ et $\Psi = 0$