

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université 8 mai 1945 Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



THESE
Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

Spécialité : **Génie Mécanique**

Par

BENSOUILAH Hamza

Thème

Etude Statique Et Dynamique Des Paliers A Feuilles Radiaux

Soutenue le 30 Septembre

JURY

Président :	S. GUENFOUD	Pr. Université 8 mai 1945 Guelma
Encadreur :	M. LAHMAR	Pr. Université 8 mai 1945 Guelma
Co-encadreur :	B. BOU-SAÏD	Maître de Conférences (HDR), INSA de Lyon
Examineurs :	A. HAIAHEM	Pr. Université Badji Mokhtar Annaba
	A. BOUCHOUCHA	Pr. Université Mentouri de Constantine

2012

Abstract

Nowadays, air foil bearings find widespread use in very high speed, lightly loaded oil-free rotating turbo-machinery such as compressors, micro-gas turbines because they have theoretically no speed limitations, and they are environmentally benign. In the design of such bearings, it is of cardinal importance to enhance their steady-state and dynamic performance characteristics for the safety operation, especially against the external dynamic excitations. Most of elasto-aerodynamic approaches under dynamic conditions proposed in the technical literature include only the steady-state pressure induced deformation of foils. This work presents a theoretical investigation on the effects of both steady-state and dynamic deformations of the foils on the dynamic performance characteristics and stability of a self-acting air foil journal bearing operating under small harmonic vibrations. To take into account the dynamic deformations of foils, the perturbation method is used for determining the gas-film stiffness and damping coefficients for given values of excitation frequency, compressibility number, and compliance factor of the bump foil. The rotordynamic coefficients serve as input data for the linear stability analysis of rotor-bearing system. The nonlinear stationary Reynolds' equation is solved by means of the Galerkin's finite element formulation while the finite differences method are used to solve the first order complex dynamic equations resulting from the perturbation of the transient compressible Reynolds' equation. As a first approximation, the corrugated sub-foil is modeled as a simple elastic foundation, i. e. the stiffness of a bump is uniformly distributed throughout the bearing surface. The analysis shows that the dynamic properties and stability of the compliant finite length journal bearing are significantly affected by the compliance of foils especially when the dynamic deformation of foils is considered in addition to the steady-state one by applying the principle of superposition.

Keywords :

Elasto-aerodynamic lubrication, Air foil bearing, steady-state deformation, Dynamic deformation, Stiffness and damping coefficients, Critical mass, Perturbation method, Elastic Winkler model, Fluid-structure interaction, Galerkin finite element method, Finite difference method.

Résumé

Les paliers aérodynamiques à feuilles utilisant l'air comme lubrifiant sont largement utilisés dans les machines tournantes modernes fonctionnant à très grande vitesse tels que les compresseurs, les micro-turbines, etc.

Dans le présent travail une étude théorique des paliers aérodynamiques est effectuée. Les performances statiques du palier ainsi que l'influence des déformations statiques et dynamiques des feuilles sur les coefficients dynamiques est mise en évidence. La résolution de l'équation de Reynolds qui est fortement non linéaire est effectuée par la méthode de substitution successive avec coefficient de relaxation. Dans le cas de la lubrification aérodynamique, la prise en considération des déformations dynamiques des feuilles nécessite le calcul simultané du champ de pression généré par le palier ainsi que la déformation à l'interface fluide–solide. Le modèle utilisé pour le calcul de l'élasticité des feuilles est celui développé par Heshmat. Le couplage fluide-solide est assuré à l'aide d'un processus itératif. La théorie linéaire est utilisée pour l'étude du comportement dynamique de palier proposé. Une étude paramétrique nous a permis de constater la dépendance des coefficients dynamique de la fréquence d'excitation relative. Les calculs ont montrés que la déformation dynamique des feuilles a une influence non négligeable sur les coefficients dynamiques de ce type de palier, et plus particulièrement à des excentricités élevées.

Mots clés :

Paliers aérodynamiques à feuilles, étude statique, coefficients dynamiques, déformation dynamique, méthode de substitution successive, interaction fluide–solide.

العنوان: دراسة ساكنة و ديناميكية للمحامل الأفقية ذات صفائح

إن المحامل الأفقية الهوائية تجد استعمالات عدة حيث تتوجب علينا سرعة جد مرتفعة هذه المحامل تستعمل في التوربينات مثل التوربينات الصغيرة و التوربينات الضاغطة للهواء لان هذه الأجهزة لها سرعة دوران غير محدودة و هي أيضا صديقة للبيئة.

لصنع هذه المحامل يتوجب علينا الأخذ بعين الاعتبار التصرف السكوني و الديناميكي من اجل السلامة في الاستعمال خاصة امام التوترات الخارجية.

معظم الدراسات السابقة تأخذ بعين الاعتبار فقط التشوهات السكونية للصفائح الناتجة عن مجال الضغط المولد من طرف المحامل الهوائية.

في هذه الرسالة تمت دراسة التشوهات الساكنة و الديناميكية للصفائح المشكلة للحامل الهوائي و ذلك باستعمال النظرية الخطية التي تعتمد على الحركة الضعيفة للعمود بداخل الحامل الهوائي والتي تسمح بتشكيل شريط هوائي بثمانية معاملات ديناميكية. معرفة هذه المعاملات يسمح بدراسة الاستقرار الديناميكي للحامل و كذا رد فعل الحامل إلى القوى الديناميكية الخارجية.

الدراسة وضحت تأثير بعض العوامل مثل معامل الانضغاط مرونة الصفائح التشوهات السكونية و التشوهات الديناميكية و ذلك على المعاملات الديناميكية الثمانية.

الكلمات المفتاح :

مرونة الصفائح

المعاملات الديناميكية

التشوهات الساكنة

التشوهات الديناميكية

طريقة العناصر المنتهية

طريقة نيوتن رافسون

الاستقرار الديناميكي

نموذج هشمة

تفاعل سائل صلب

AVANT-PROPOS

Cette étude est le fruit d'une collaboration entre l'université de Guelma et le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) de l'I.N.S.A de Lyon.

Je tiens à remercier tout particulièrement le Professeur Mustapha LAHMAR mon directeur de thèse.

Que Monsieur le Docteur Benyebka BOU-SAÏD, Maître de Conférences (HDR) à l'INSA de Lyon, trouve l'expression de toute ma gratitude d'avoir accepté d'être mon co-encadreur.

Que Monsieur : Salah GUENFOUD, Professeur à l'université de Guelma, trouve ici l'expression de toute ma gratitude de bien vouloir accepter de présider le jury de cette thèse.

Je suis extrêmement sensible à l'honneur que me fait Monsieur Amar HAI AHEM, Professeur à l'université de Annaba, en acceptant d'examiner ce travail.

Il m'est particulièrement agréable de remercier Monsieur Ali BOUCHOUCHA, Professeur à l'université de Constantine, d'avoir bien voulu s'intéresser à cette étude et d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Mes remerciements vont aussi à Messieurs le Professeur Mohamed NEMAMCHA Président de l'université de Guelma, le Professeur Mohamed ABDAOUI et le Docteur Mohamed Zine AI SSAOUI .

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du Laboratoire de Mécanique & Structures (LMS) et du personnel du département de Génie Mécanique.

Principales notations utilisées

Symboles latins :

$a_{\varepsilon\varepsilon}, a_{\varepsilon\phi}, a_{\phi\varepsilon}, a_{\phi\phi}$	coefficients de raideur, N/m
$A_{\varepsilon\varepsilon}, A_{\varepsilon\phi}, A_{\phi\varepsilon}, A_{\phi\phi}$	coefficients de raideur adimensionnés,, $A_{\varepsilon\varepsilon} = a_{\varepsilon\varepsilon} \frac{C}{P_a RL}$; etc.
$b_{\varepsilon\varepsilon}, b_{\varepsilon\phi}, b_{\phi\varepsilon}, b_{\phi\phi}$	coefficients d'amortissement, $N.s/m$
$B_{\varepsilon\varepsilon}, B_{\varepsilon\phi}, B_{\phi\varepsilon}, B_{\phi\phi}$	coefficients d'amortissement adimensionnés, $B_{\varepsilon\varepsilon} = b_{\varepsilon\varepsilon} \frac{C\omega}{P_a RL}$; etc.
C	jeu radial du palier, m
E	Module de Young des feuilles, Pa
e	excentricité du palier, m
e_0	excentricité relative statique, $e_0 = \mathbf{O}_b \mathbf{O}_{j0} $, m
$F_{\varepsilon_0}, F_{\phi_0}$	composantes de la force statique, N
h	épaisseur du film lubrifiant, m
\tilde{h}	épaisseur du film lubrifiant adimensionnelle, $\tilde{h} = \frac{h}{C}$
h_0	épaisseur statique du film lubrifiant, m
\tilde{h}_0	épaisseur statique du film adimensionnelle, $\tilde{h}_0 = \frac{h_0}{C}$
K_b	raideur des feuilles, N/m^3
L	longueur du palier, m
L_0	opérateur scalaire de compliance, $L_0 = 1/K_b$, m^3/N
M	masse du rotor du palier, kg
\tilde{M}	masse du rotor du palier adimensionnelle, $\tilde{M} = \frac{MC\omega^2}{p_a RL}$
M_c	masse critique, kg
\tilde{M}_c	masse critique adimensionnelle, $\tilde{M}_c = \frac{M_c C \omega^2}{p_a RL}$
N	vitesse de rotation de l'arbre, rpm

p pression aérodynamique dans le film lubrifiant, Pa

\tilde{p} pression aérodynamique adimensionnelle, $\tilde{p} = \frac{p}{p_a}$

p_a pression atmosphérique, Pa

p_0 pression aérodynamique statique, Pa

\tilde{p}_0 pression aérodynamique statique adimensionnelle, $\tilde{p}_0 = \frac{p_0}{p_a}$

\tilde{Q} amplitude complexe de la pression dynamique adimensionnelle,

$\tilde{Q}_\varepsilon, \tilde{Q}_\phi$ pressions dynamiques complexes adimensionnelles, $(\tilde{Q}_\varepsilon, \tilde{Q}_\phi) = \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \phi} \right)$

R rayon de l'arbre, m

\mathfrak{R} constante des gaz parfaits,

t temps, s

\tilde{t} temps adimensionnel, $\tilde{t} = \omega t$

t_b épaisseur des feuilles, m

\tilde{U} amplitude complexe de la déformation dynamique adimensionnelle,

U_0 déformation statique des feuilles, m

\tilde{U}_0 déformation statique adimensionnelle des feuilles, $\tilde{U}_0 = \frac{U_0}{C}$

$\tilde{U}_\varepsilon, \tilde{U}_\phi$ déformations dynamiques des feuilles adimensionnelles, $(\tilde{U}_\varepsilon, \tilde{U}_\phi) = \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \phi} \right)$

W_0 charge statique appliquée au palier, N

X, Y coordonnées du centre de l'arbre, m

\tilde{X}, \tilde{Y} coordonnées du centre de l'arbre adimensionnelles, $(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \frac{(X, Y)}{C}$

z coordonnée axiale du palier, m

\tilde{z} coordonnée axiale adimensionnelle, $\tilde{z} = \frac{z}{L}$

Symboles grecs :

α	facteur de compliance adimensionnel,
ε	excentricité relative, $\varepsilon = \frac{e}{C}$
ε_0	excentricité relative statique, $\varepsilon_0 = \frac{e_0}{C}$
ϕ	angle de calage du palier, <i>rad</i>
ϕ_0	angle de calage statique, <i>rad</i>
γ	fréquence d'excitation relative, $\gamma = \frac{\nu}{\omega}$
γ_c	fréquence d'excitation critique au seuil de stabilité, $\gamma_c = \frac{\nu_c}{\omega}$
Λ	nombre de compressibilité adimensionnel, $\Lambda = \frac{6\mu\omega}{p_a} \left(\frac{R}{C} \right)^2$
ρ	masse volumique du lubrifiant, (<i>kg/m³</i>)
μ	viscosité dynamique du lubrifiant, <i>Pa.s</i>
σ	coefficient de Poisson des feuilles,
ν	pulsation d'excitation, <i>rad/s</i>
θ	position angulaire, <i>rad</i>
ω	vitesse angulaire de l'arbre, $\omega = \frac{2\pi N}{60}$, <i>rad/s</i>

Symboles mathématiques :

$[\bullet]$	matrice carrée,
$\langle \bullet \rangle$	vecteur ligne,
$\{ \bullet \}$	vecteur colonne,
$(\bullet)^T$	transposé (\bullet)
$(\tilde{\bullet})$	quantité adimensionnelle,

Repères :

(O_b, X, Y, Z) système de coordonnées statique,

(x, y, z) système de coordonnées local,

(O_b, ε, ϕ) système de coordonnées lié,

Abréviations :

EF	Eléments finis
DF	Différences finies
Im()	Partie imaginaire de ()
Real()	Partie réelle de ()
TAD	Thermo-Aéro-Dynamique
ACM	Air-Cycle Machines
RHS	Right Hand Side

Sommaire

Introduction générale	1
<i>Chapitre I : Les paliers à gaz</i>	
I.1 Introduction	4
I.2.1 Paliers à alésage fixe (profil indéformable)	
5	
I.2.2 Les paliers à lobes discontinus	6
I.2.3 Paliers à patins oscillants	
10	
I.2.4. Paliers à profils déformables	12
I.2.4.1. Les paliers à patins rigides montés sur éléments déformables	
12	
I.2.4.2 Paliers à feuilles	15
a) La technologie Garrett	15
b) La technologie MITI	17
I.13. Conclusion	21
<i>Chapitre II : Etat de l'art</i>	
II.1 Introduction	22
II.2. Les mesures Rotor-dynamiques	
34	
II.3. Synthèse des publications	
36	
II.4. Conclusion	37
<i>Chapitre III : Théorie de la lubrification aérodynamique en régime laminaire</i>	
III.1 Introduction	39
III. 2. Les lois générales de la lubrification aérodynamique par un fluide newtonien et compressible	
40	
III.3. Equations de Navier – Stokes	40
III.4. application à un palier aérodynamique :	42
III.5. Dérivation de l'équation de Reynolds pour un fluide newtonien et compressible	44
III.6. Equation de Reynolds dans le cas d'un palier lisse	46
III.7. Equation géométrique du film aérodynamique	47
III.8. Performances statiques du palier	50
III. 8. 1. Composantes de la portance aérodynamique	50
III. 8.2. Angle de calage	50
II .9. Conclusion	50

Chapitre IV : Etude statique du palier aérodynamique à feuilles infiniment long (1-D)

IV.1 Introduction	51
IV.2. Discrétisation de l'équation de Reynolds compressible stationnaire	52
IV.3. Solution du problème d'interaction fluide-structure en régime isotherme	53
IV.3.1. Equation de Reynolds non linéaire en variables sans dimension	53
IV.4.2. Résolution du système d'équations non linéaires par la méthode itérative de Newton Raphson amortie	54
IV 5. L'algorithme de Newton-Raphson amorti	57
IV 6. Schéma général de résolution du problème d'interaction fluide-structure	58
IV.8. Résultats et interprétation	59
IV.8.1. Validation du programme de calcul	59
IV.8.4. Etude de l'effet de la compliance des feuilles sur la pression aérodynamique	60
IV.8.5. Etude de l'effet du nombre compressibilité	61
IV.8.6. Etude de l'effet de la compliance des feuilles sur l'angle de calage	61
IV.8.7. Etude de l'effet de la compliance des feuilles sur la portance aérodynamique	61
IV.3 Conclusion	69

Chapitre V : Etude statique et dynamique d'un palier à feuilles de longueur finie (2-D)

V.1 Introduction	70
V.2 Equation générale du film en régime stationnaire	71
V.3 Méthode de perturbation : calcul des coefficients dynamiques	71
V.3.1 Cas d'une excentricité imposée : Paramétrage (ϵ, ϕ)	71
V.3.2 Cas d'une charge imposée : Paramétrage (X, Y)	77
a) Méthode de Newton-Raphson	81
b) Méthode de Newton-Raphson amortie	84
V.4 Analyse de la stabilité dynamique d'un palier à film d'huile : Système en vibrations libres	86
V.5 Réponse dynamique d'un palier à film d'huile: Système en vibrations forcées	88
V.11. Critère de stabilité de Lund	91

V.12. Traitement numérique de l'équation de Reynolds dans le cas statique	
	93
V.13. Solution de l'équation de Reynolds d'ordre zéro	
	95
V.14. Approximation des formes intégrales par éléments finis	
	95
V.14.1. Principe de la méthode	
	95
V.15. Schéma de résolution du problème d'interaction fluide-structure	101
V.16. Méthode de résolution en régime dynamique	102
V.6 Résultats discussion	103
V.6.1 Validation	103
V.6.2 Effets des déformations élastiques sur les performances statiques et dynamiques du palier	104
V.6.3 Effets de la déformation dynamique sur les coefficients dynamiques et le paramètre de stabilité	105
Conclusion générale	114
Références	115

Introduction générale

Les concepteurs de turbomachines aérodynamiques ont depuis toujours été confrontés à de très fortes exigences de poids, dès lors, ces concepteurs se sont orientés vers l'augmentation de la puissance massique entraînant la diminution de la taille des machines et l'augmentation des vitesses de rotation. Dans les gammes des vitesses de rotation de rotors plus de 100000 révolutions par minutes, un guidage aérodynamique semble mieux adapté que des éléments technologiques classiques tels que les paliers de roulements et les paliers à film d'huile qui ne permettent plus de répondre à certaines exigences, **dont** entre autres, la durée de vie.

C'est ainsi que les paliers aérodynamiques ont reçu dans ces dernières décennies une attention considérable et trouve des applications de plus en plus nombreuses dans le cas où des vitesses élevées, de faibles charges et une grande précision sont nécessaires, les applications aérodynamiques concernent principalement des groupes auxiliaires de puissance (APU) et des machines de conditionnement d'air (ACM).

La lubrification à l'aide d'un gaz permet de limiter la puissance dissipée par frottement fluide, en effet la viscosité dynamique de l'air est environ 100 fois plus faible qu'une huile minérale peu visqueuse.

L'utilisation de palier aérodynamique présente ainsi un certain nombre d'avantages par rapport aux autres paliers :

- Le fluide lubrifiant est l'air ce qui permet de s'affranchir d'un circuit de lubrification.
- La faible viscosité de ce fluide permet de limiter la puissance dissipée qui devient essentiellement fonction de la vitesse de rotation.
- Le fluide n'est pas limité en température.

Cependant, la faible viscosité des gaz génère également des inconvénients. Ainsi, dans la conception d'un dispositif utilisant un palier ou une butée à gaz, un certain nombre de problèmes doivent être pris en compte :

- Faible capacité de charge des mécanismes : les pressions maximales rencontrées dans le film d'air sont plus faibles que celles des paliers à huile possédant les mêmes

caractéristiques géométriques, la faible viscosité de l'air est alors compensée, en partie, par des vitesses de rotation plus élevées.

- Problèmes technologiques liés à la fabrication : afin de conserver des charge portantes raisonnables, il est nécessaire de diminuer le jeu radial ce qui entraîne une qualité et une précision d'usinage très poussées, une stabilité dimensionnelle des matériaux utilisés (pour limiter les dilatations de nature centrifuge et thermique) ainsi qu'une bonne qualité de l'air.
- Problèmes d'instabilité de ces dispositifs que l'on peut regrouper en deux grandes familles :
 1. les vibrations dues à une perturbation extérieure (vitesse critique d'ensemble).
 2. les vibrations auto-entretenues (fouettement ou whirl).
- lors des phases d'arrêt-démarrage (atterrissage-décollage), il y a contact entre les surfaces en regard avant la création du film fluide d'où la nécessité d'utiliser un revêtement de surface, la durée de vie des paliers s'exprime alors en nombre d'arrêt-démarrage et non pas en heures d'utilisation comme pour le roulement par exemple.

L'étude résumée dans cette thèse représente une étape vers une meilleure connaissance théorique des caractéristiques statiques et dynamiques des paliers à feuilles fonctionnant en régime aérodynamique et lubrifiés par un fluide newtonien et compressible. Cette étude repose essentiellement sur l'application de la méthode de perturbation dans le cas d'un mouvement vibratoire de faible amplitude du rotor en vue de prendre en considération les déformations dynamiques des feuilles.

La thèse présentant ce travail comporte cinq chapitres :

Nous présenterons, dans le premier chapitre, une étude bibliographique dont le but d'avoir une vision générale sur les différents types de paliers ou supports utilisés pour le guidage en rotation des lignes d'arbre de machines tournantes, nous nous intéressons plus particulièrement aux paliers aérodynamiques à profil déformable et profil indéformable.

Le deuxième chapitre complète le premier chapitre en citant les travaux de recherche antérieurs effectués sur les paliers à gaz pour nous permettre de situer notre contribution par rapport à l'état de l'état.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation des équations générales décrivant la théorie de la lubrification aérodynamique issues des lois fondamentales de la mécanique des milieux continus.

Le quatrième chapitre est réservé à l'adimensionnement ainsi que la résolution numérique de l'équation de Reynolds compressible dérivée dans le chapitre précédent et écrite pour un palier long au moyen de l'approche unidimensionnelle (1-D) où le milieu fluide est discrétisé par la méthode des différences finies centrées. L'algorithme utilisé pour la résolution du système d'équations non linéaires résultant de la discrétisation de l'équation de Reynolds est celui de Newton-Raphson amorti.

Le cinquième chapitre est dévolu à l'écriture des équations différentielles résultant de la perturbation de l'équation de Reynolds transitoire (2-D) dans le cas d'un mouvement harmonique de faible amplitude du rotor au voisinage de la position d'équilibre. L'équation stationnaire (d'ordre zéro) est résolu par la MEF à l'aide d'un processus itératif avec un facteur de relaxation en vue d'assurer la convergence tandis que les équations dynamiques (d'ordre un) sont discrétisées par la méthode des différences finis centrées.

Ce traitement numérique des différentes équations de la lubrification élasto-aérodynamique sera suivi par une validation des résultats obtenus et une étude paramétrique en vue de mettre en évidence les effets de certains paramètres clés sur le comportement statique et dynamique du système.

Chapitre I

Les paliers à gaz

Chapitre I

Les paliers à gaz

I.1 Introduction

Nous allons présenter une étude bibliographique sur les principales avancées scientifiques et technologiques réalisées dans le domaine des paliers aérodynamiques radiaux depuis les années 60. C'est en effet à cette époque que l'utilisation des paliers aérodynamiques de première génération pour le guidage des arbres dans les machines tournantes a progressivement été mise en place.

Les paliers aérodynamiques se divisent en deux grandes familles :

- les paliers à géométrie indéformable,
- les paliers à géométrie déformable.

Les premiers paliers à gaz utilisés dans des systèmes mécaniques furent des paliers à géométrie indéformable.

I.2 Différentes technologies des paliers à gaz

La figure I.1 présente les différents types de paliers aérodynamiques actuellement utilisés dans le milieu industriel. L'étude des caractéristiques statiques et dynamiques de ces paliers doit néanmoins, dans le cas des paliers à alésage déformable, intégrer les déplacements des éléments qui le constituent. Une étude structurale est alors couplée avec l'étude aérodynamique.

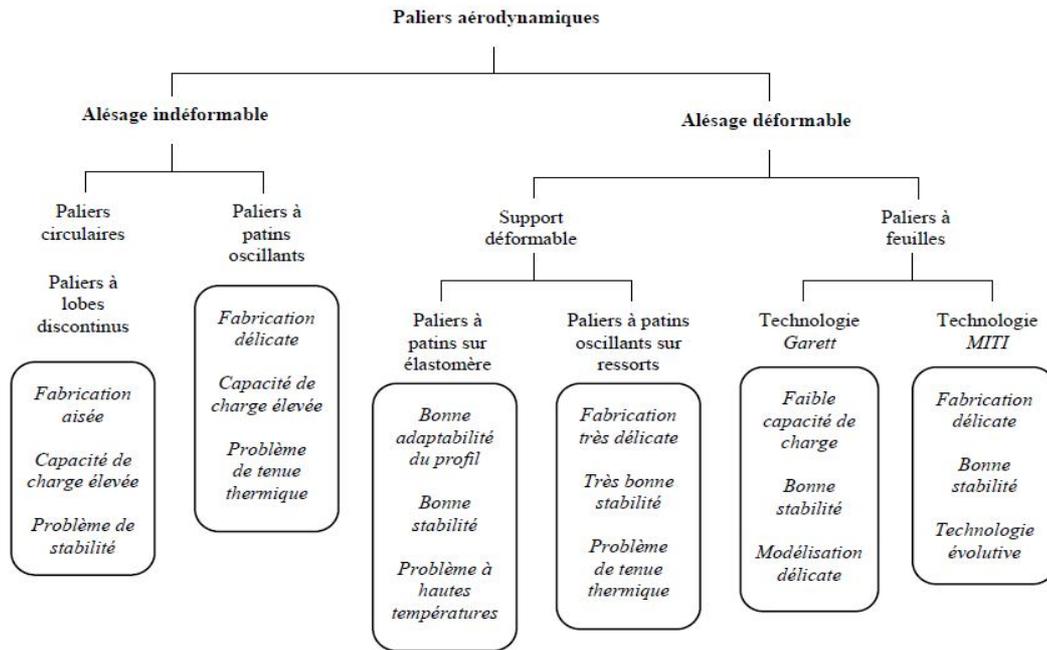


Figure I.1 – Les différents types d'architecture de paliers à air

I.2.1 Paliers à alésage fixe (profil indéformable)

Ce type de paliers est également connu sous le nom de paliers lisses. La géométrie est très simple puisque le coussinet du palier est constitué d'un alésage cylindrique, Figure I.2.

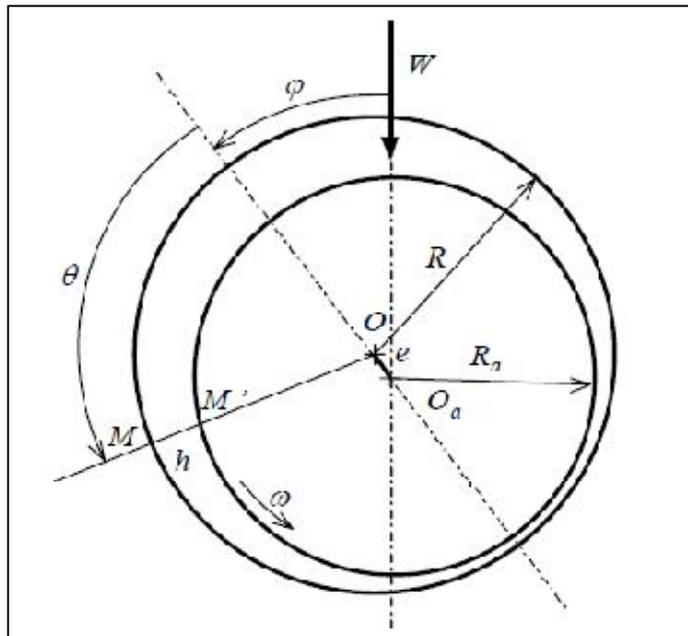


Figure I.2 : Définition de la géométrie d'un palier lisse

La particularité de fonctionnement des paliers à gaz est que les performances dépendent du nombre de compressibilité Λ , [1], représentatif notamment de la viscosité dynamique, de la vitesse de rotation, de la pression atmosphérique et du jeu radial.

$$\Lambda = \frac{6\mu\omega}{p_a} \left(\frac{R_a}{C_b} \right)^2$$

Les caractéristiques statiques de ces paliers sont intéressantes puisqu'ils sont capables de soutenir des charges élevées. En revanche, ils sont rarement employés car leur stabilité est médiocre comparativement aux exigences de fonctionnement des machines tournantes à grande vitesse, [1], [2].

En effet, pour obtenir de bonnes performances en termes de stabilité, il a été montré qu'il vaut mieux se placer à nombre de compressibilité élevé, [2]. Ceci entraîne des jeux radiaux très faibles et des contraintes de fabrication plus sévères ainsi que de meilleurs états de surfaces.

Il est donc difficile avec des profils circulaires indéformables de pouvoir concilier de bonnes caractéristiques statiques et dynamiques et des contraintes de fabrication acceptables. Cette difficulté est d'autant plus marquée qu'il faut lui associer les problèmes de dilatations thermique et centrifuge respectivement liés aux gradients de température et à la vitesse de rotation.

Il est donc souvent nécessaire de recourir, comme dans le cas des paliers hydrodynamiques, à d'autres profils géométriques.

I.2.2 Les paliers à lobes discontinus

Les paliers non cylindriques à lobes discontinus, à précharge géométrique, ont été développés pour remédier aux problèmes de stabilité des paliers lisses.

L'étude des caractéristiques statiques et dynamiques des paliers à lobes est analogue à celle des paliers lisses. Cependant, un grand nombre de paramètres intervient dans la définition géométrique du palier à lobes. La capacité de charge et la stabilité du palier ne dépendent plus seulement de l'excentricité relative du palier et du nombre de compressibilité, mais également du nombre de lobes, de leur amplitude, de la précharge géométrique relative et de l'asymétrie des lobes, Figure I.3.

Les courbes de stabilité de ce type de paliers sont élaborées à partir d'une approche linéaire du comportement dynamique du palier autour de sa position d'équilibre, [3], [1].

Elles montrent de façon générale que, pour les fortes charges, le palier est généralement toujours suffisamment stable et le choix des paramètres géométriques dépend alors de la capacité de charge souhaitée.

Dans le cas de faibles charges, la précharge géométrique est notamment adaptée pour obtenir le niveau de stabilité souhaité [2].

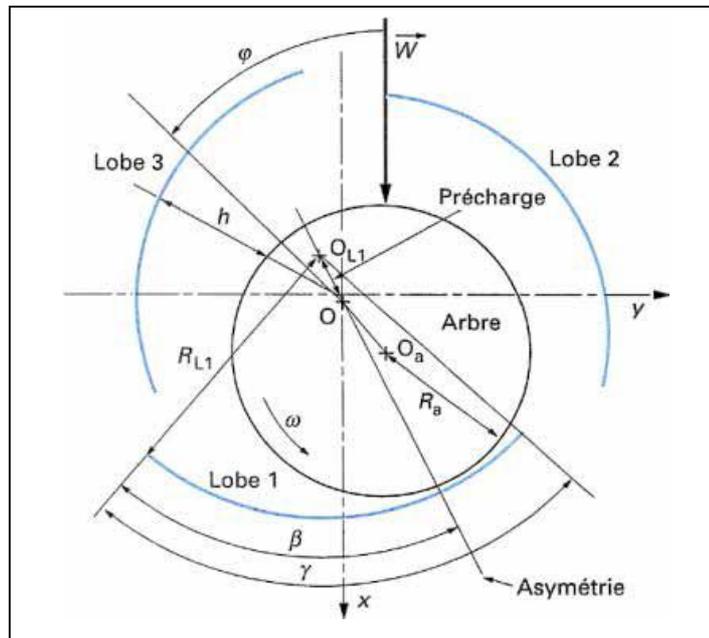


Figure I.3 : Schématisation d'un palier à 3 lobes discontinus asymétriques

L'introduction des paliers à lobes permet, en imposant une précharge relative sur chaque lobe, de résoudre une partie du problème de stabilité.

L'étude des caractéristiques statiques et dynamiques des paliers à lobes est analogue à celle des paliers lisses, cependant, un grand nombre de paramètres intervient dans la définition géométrique du palier.

La précharge relative permet d'augmenter l'excentricité réelle de l'arbre par rapport à chaque lobe, elle est caractérisée par la variable adimensionnelle $m = OO_{L1}/C$.

D'une autre part, l'asymétrie permet d'augmenter l'amplitude de la région convergente de chaque lobe, elle est définie par le rapport d'amplitude $b = \beta/\gamma$.

Le nombre de compressibilité A_L est alors défini à partir du jeu radial relatif aux lobes : $C_L = R_L - R_a$.

Dans le cas des paliers à gaz à alésage fixe, la particularité reste l'évolution de ces caractéristiques avec le nombre de compressibilité A_L (lorsque le nombre de compressibilité tend vers une valeur nulle, on retrouve les résultats des paliers hydrodynamiques).

Les courbes (figures I.4 à I.8) montrent que pour des chargements importants, le palier est en général stable et le choix des paramètres géométriques dépend de la capacité de charge souhaitée.

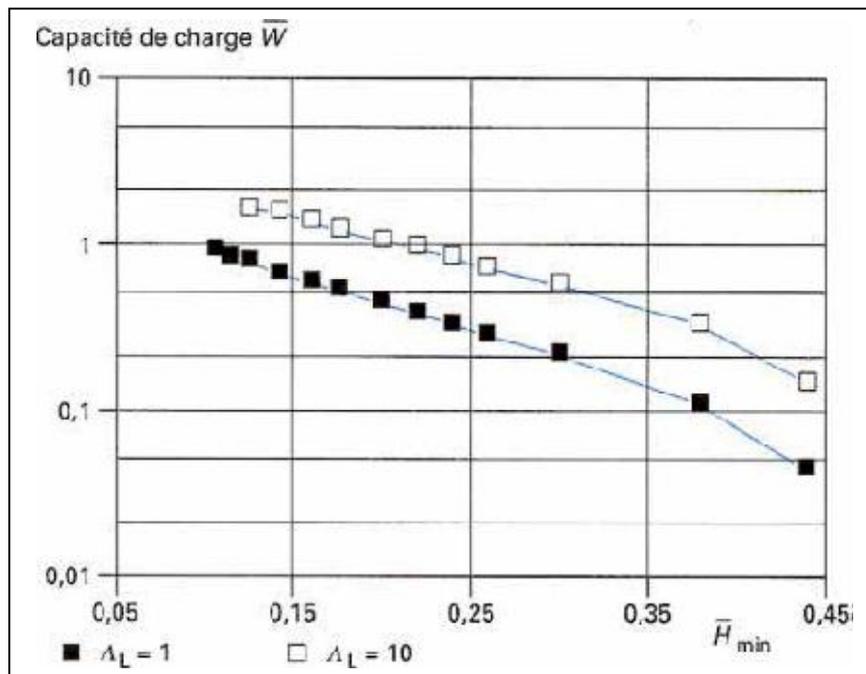


Figure I.4 Capacité de charge d'un palier à 3 lobes discontinus ($\gamma=100^\circ$; $L/D = 1$; $m = 0,5$)

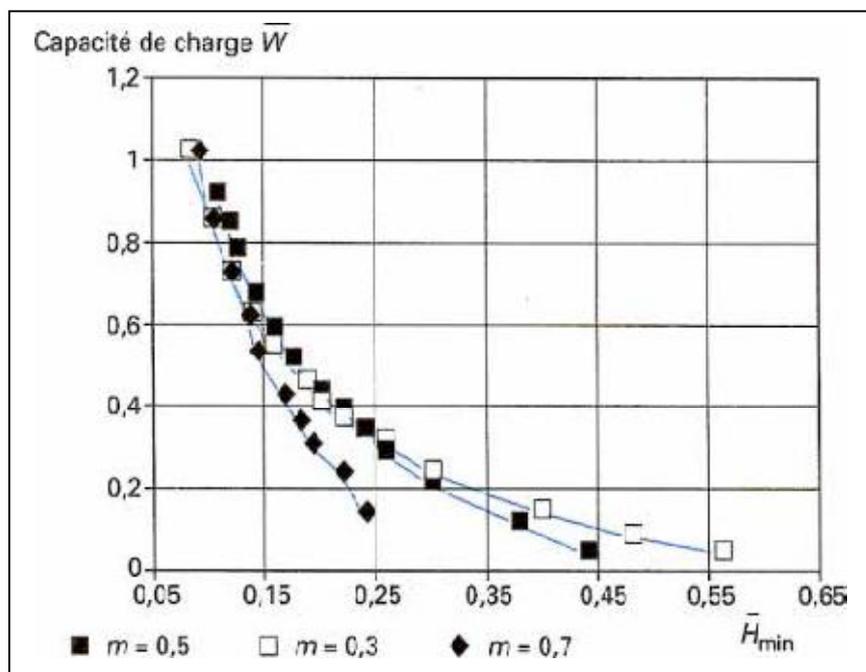


Figure I.5 – Capacité de charge en fonction de la hauteur minimale du film fluide pour un palier à 3 lobes symétriques ($\gamma= 100^\circ$; $L/D = 1$; $\Delta_L = 1$)

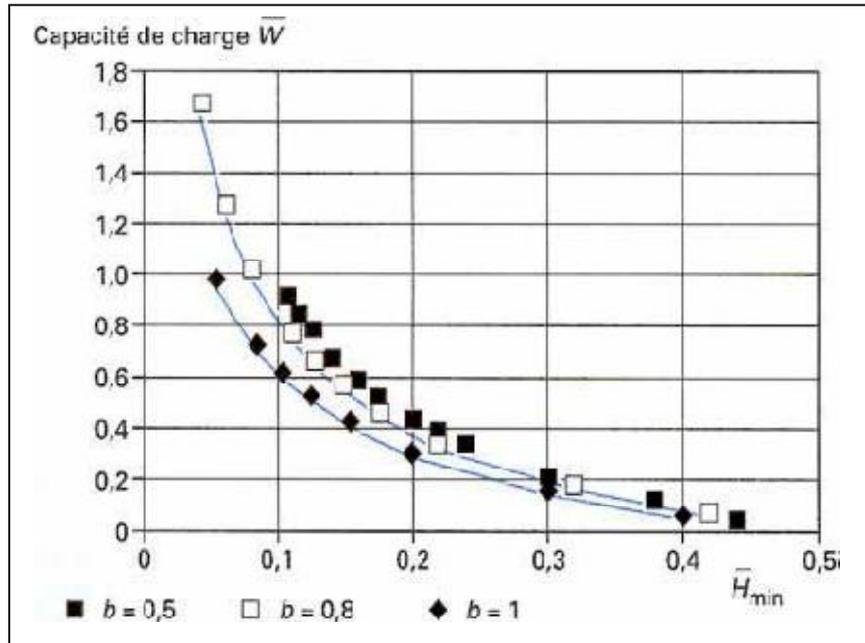


Figure I.6 Capacité de charge en fonction de la hauteur minimale du film fluide pour un palier à 3 lobes asymétriques

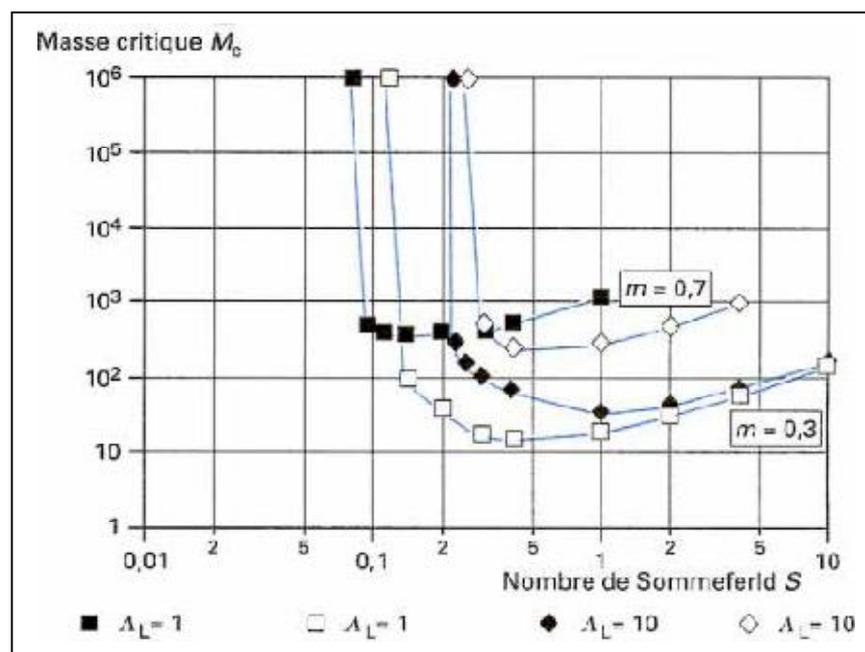


Figure I.7 Masse critique d'un palier à 3 lobes symétriques en fonction du nombre de Sommerfeld ($L/D = 1$; $m = 0,5$; $\Lambda_L = 1$; $\gamma = 100^\circ$)

Une précharge m telle que $0.5 < m < 0.7$ et un coefficient d'asymétrie b tel que $0.65 < b < 0.8$ donnent les portances les plus élevées dans le cas d'un palier à trois lobes. Dans le cas de faibles charges, la stabilité est comme nous l'avons vu précédemment moins bonne, d'où la

nécessité d'une précharge relativement élevée, la figure I.7 montre que l'influence du coefficient de précharge sur la valeur de la masse critique est très sensible.

D'autre part, on constate que la stabilité est optimale pour un coefficient d'asymétrie proche de 1 et un nombre de compressibilité A_L tel que $2 < A_L < 5$ (figure I.8).

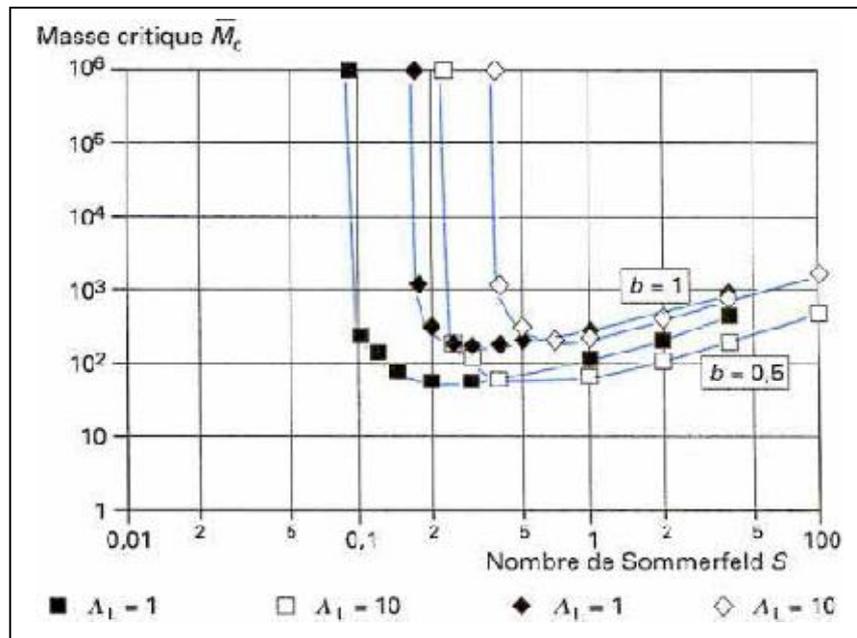


Figure I.8 Masse critique d'un palier à 3 lobes discontinus asymétriques en fonction du nombre de Sommerfeld S ($m = 0,5$; $\gamma = 100^\circ$; $L/D = 1$)

I.2.3 Paliers à patins oscillants

Les paliers à lobes discontinus possèdent des caractéristiques statiques et dynamiques plus intéressantes que celles des paliers lisses ; cependant, les valeurs géométriques qui optimisent ces caractéristiques dépendent des conditions de fonctionnement, ainsi, comme dans le cas des paliers hydrodynamiques, l'idée d'adapter la géométrie en fonctionnement conduit à l'étude des paliers à patins oscillants pour lesquels la position des patins évolue avec la position de l'arbre.

La figure I.9 donne une schématisation d'un palier à quatre patins oscillants, les principaux paramètres sont :

- le nombre de patins n ;
- le rayon de l'arbre R_a ;
- le rayon du cercle des pivots R_p ;
- l'amplitude angulaire de chaque patin β_p ;
- la largeur L ;

- le rayon de courbure des patins R_p ;
- le jeu d'usinage du patin $C_p = R_p - R_a$;
- la position du pivot sur chaque patin définie par le rapport α_p/β_p
(α_p inclinaison d'un patin ; β_p amplitude angulaire du patin) ;
- le coefficient de précharge géométrique $m = a / C_p$;
- le nombre de compressibilité Λ_p :

$$\Lambda_p = \frac{6\mu\omega}{\rho_a} \left(\frac{R_a}{C_p} \right)^2$$

Comme dans le cas des paliers hydrodynamiques, des études ont été menées afin de déterminer la position des pivots optimale pour un palier à patins oscillants (dans le cas d'un palier réversible, la position est centrée).

Les paliers à lobes discontinus possèdent des caractéristiques statiques et dynamiques plus intéressantes que celles des paliers lisses. Cependant, les valeurs géométriques qui optimisent ces caractéristiques dépendent des conditions de fonctionnement. Ainsi, comme dans le cas des paliers hydrodynamiques, l'idée d'adapter la géométrie en fonctionnement conduit à l'étude des paliers à patins oscillants pour lesquels la position des patins évolue avec la position de l'arbre.

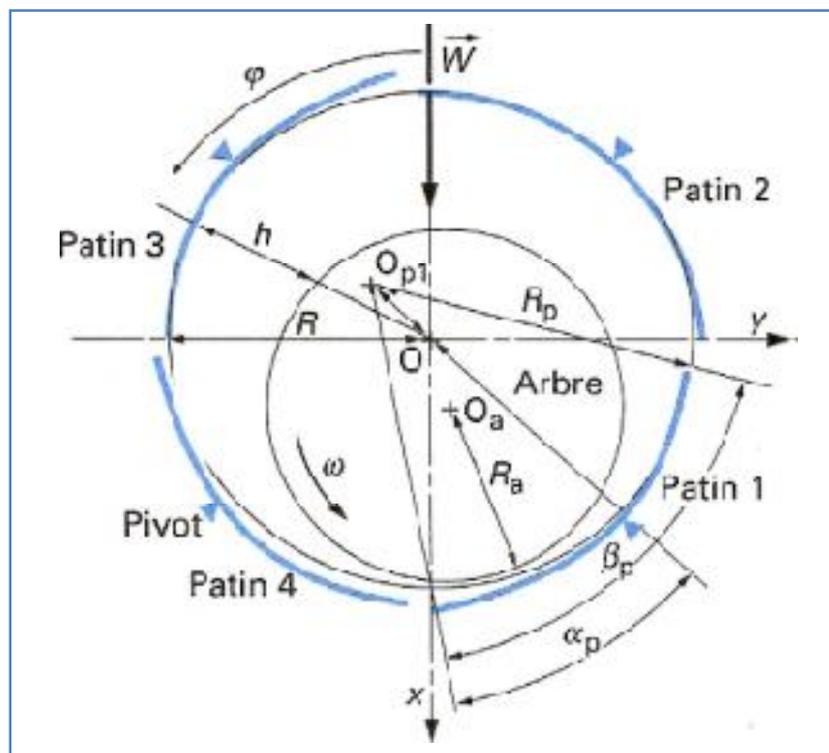


Figure I.9 Schématisation d'un palier à gaz à quatre patins oscillants

Des études ont été menées afin de déterminer la position optimale des pivots pour un palier à patins oscillants, [2].

Selon ces travaux, la position optimale évolue avec la précharge relative du palier et le nombre de compressibilité. Elle reste cependant toujours située entre les rapports 0.35 et 0.7.

Ce rapport a tendance à augmenter légèrement lorsque le nombre de compressibilité augmente. Bien entendu, si le fonctionnement doit s'effectuer dans les deux sens de rotation, la position du pivot est obligatoirement centrée.

Dans le cas de fortes charges, la stabilité tend vers l'infini comme pour les autres types de paliers présentés précédemment. Le choix du nombre de compressibilité est alors guidé par la valeur de la charge appliquée.

I.2.4. Paliers à profils déformables

Les paliers à alésage déformable sont moins sensibles aux endommagements causés par des particules étrangères du fait du jeu plus grand, mais aussi parce que la structure peut se déformer pour faciliter leur passage et leur évacuation du contact.

Deux grandes familles de paliers à profil déformable existent :

- les paliers à patins rigides montés sur des éléments déformables, [2], [4],
- les paliers à feuilles, constitués d'un fourreau et d'un ensemble de feuilles, [5], [6], [7].

Une des principales qualités que l'on accorde aux paliers à feuilles est de générer un champ de pression aérodynamique dans le film d'air avec un jeu radial plus grand que leurs homologues à profil rigide. Cette augmentation de jeu permet ainsi de réduire les contraintes de cisaillement dans le fluide et donc de limiter les pertes de puissance par dissipation thermique, [6].

I.2.4.1. Les paliers à patins rigides montés sur éléments déformables

La structure déformable du palier peut être constituée soit d'une ou plusieurs portées en élastomère, figure I.11, soit de ressorts montés sur des pivots. Dans ce dernier cas, leur géométrie est identique à celle définie au paragraphe précédent, figure I.10. Les ressorts permettent aux patins de se déplacer lorsque la charge devient trop importante ou lorsque les variations de température modifient sensiblement les caractéristiques géométriques de l'arbre.

L'étude statique et dynamique des paliers à patins montés sur ressorts est complexe. Les paramètres géométriques évoluent en fonctionnement, en particulier la précharge et l'excentricité. De plus, aux paramètres géométriques des paliers à patins oscillants, il convient d'ajouter la raideur des ressorts montés au droit de chaque pivot.

Les calculs présentés dans la littérature soulignent l'importance du choix des différents paramètres, en particulier la précharge géométrique relative et la raideur des ressorts, [2], [4], en effet, les études des paliers à alésage fixe montrent la nécessité d'une précharge en fonctionnement suffisante pour assurer une bonne stabilité du palier. Parallèlement, pour conserver de bonnes caractéristiques de portance, il faut éviter que le patin, lorsqu'il est fortement chargé, ne s'écrase d'une distance trop importante.

Le choix de la raideur des ressorts est donc essentiel. Cette raideur doit être suffisamment élevée pour conserver une précharge convenable en fonctionnement, par contre, sa valeur doit rester faible pour permettre la dilatation de l'arbre ou pour minimiser les défauts géométriques par exemple.

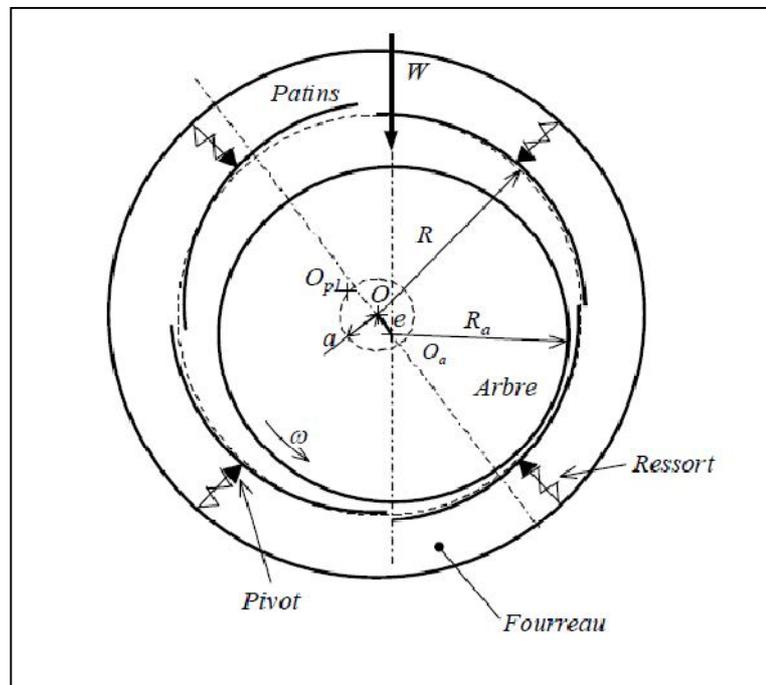


Figure I.10 : Schématisation d'un palier à quatre patins oscillants sur ressorts

Les résultats numériques montrent que, pour un palier à quatre patins oscillants, la raideur adimensionnelle des ressorts qui optimise la capacité de charge du palier doit être la plus élevée possible. Ainsi, le choix de la raideur dépend directement des conditions de fonctionnement, en particulier du coefficient de dilatation thermique et de l'élévation de température et bien entendu de la charge à soutenir.

Etant donné les jeux radiaux très faibles et les contraintes géométriques imposées pour permettre de conserver de bonnes caractéristiques (frottement très faible au niveau des pivots, grande rigidité et faible inertie des patins), la fabrication des paliers à patins oscillants montés sur ressorts s'avère difficile et délicate. Des études récentes se sont intéressées à une autre technologie de paliers à alésage expansible ce sont les paliers à feuilles.

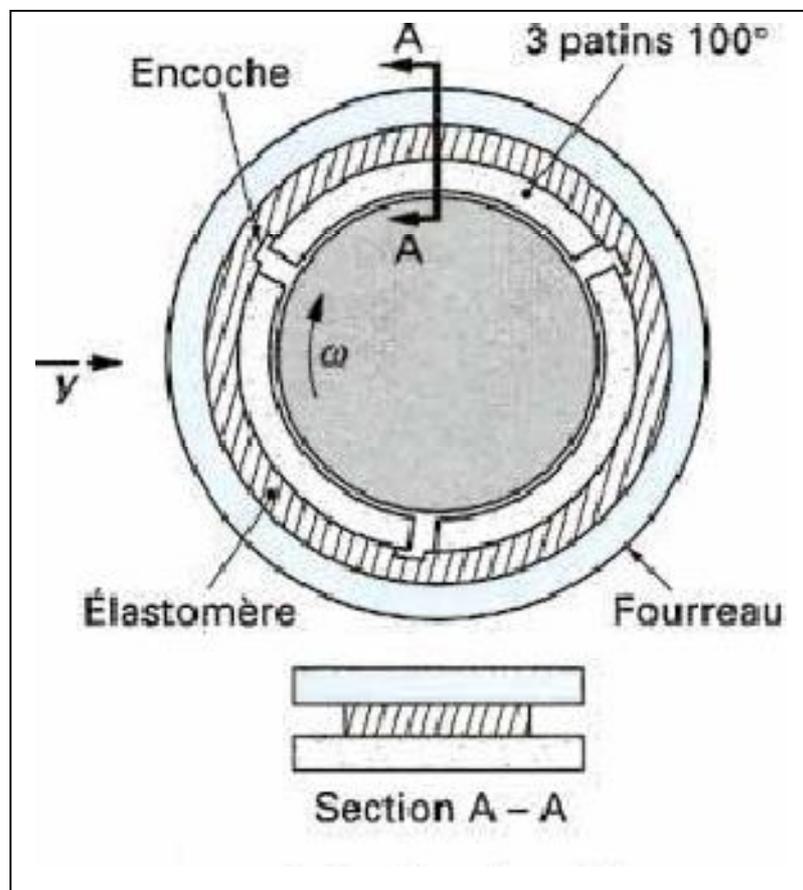


Figure I.11. Palier à trois patins sur élastomère

I.2.4.2 Paliers à feuilles

Étant donné les jeux radiaux très faibles et les contraintes géométriques imposées pour permettre de conserver de bonnes caractéristiques (frottement très faible au niveau des pivots, grande rigidité et inertie faible des patins), la fabrication des paliers à patins oscillants montés sur ressorts s'avère difficile et délicate ; des études récentes se sont intéressées à une autre technologie de palier à alésage expansible : les paliers à feuilles.

Le développement des paliers à feuilles a commencé au début des années 70 pour assurer le guidage de rotor de turbines à gaz, l'objectif étant de valider leur tenue thermomécanique à des températures proches de celles d'éjection des gaz.

Actuellement, les domaines d'application sont plus étendus mais concernent toujours le guidage des arbres tournant à des vitesses de rotation très élevées, supportant des charges modérées et soumis à des contraintes thermiques sévères.

On peut distinguer deux technologies de paliers à feuilles :

Dans la première technologie, brevetée par la société américaine *Garett*, le palier est constitué d'un fourreau sur lequel sont articulées huit ou dix feuilles enroulées les unes sur les autres, l'ensemble constituant un feillard déformable, figure I.12. L'ancrage de ces feuilles est assuré par l'intermédiaire d'une barrette soudée à l'extrémité de chaque feuille et logée dans une encoche sur le fourreau.

a) La technologie Garrett

Le palier est constitué d'un fourreau sur lequel sont articulées huit à douze feuilles enroulées les unes sur les autres. L'ensemble constitue un feillard déformable. L'ancrage de ces feuilles est assuré par l'intermédiaire d'une barrette soudée à l'extrémité de chaque feuille et logée dans une encoche sur le fourreau, figure I.13.

L'étude structurale permet dans un premier temps de déterminer la configuration de l'arbre au repos sur lequel les feuilles sont plaquées. Le calcul des efforts de serrage qu'exercent les feuilles permet notamment de calculer le couple de démarrage. Cette étape permet d'initialiser le processus itératif conduisant aux calculs des caractéristiques statiques.

Les modélisations proposées ne sont plus simples, [7], [8], car elles doivent tenir compte des frottements de Coulomb au niveau de : feuille – feuille, feuille – arbre et feuille – fourreau qui sont loin d'être négligeables.

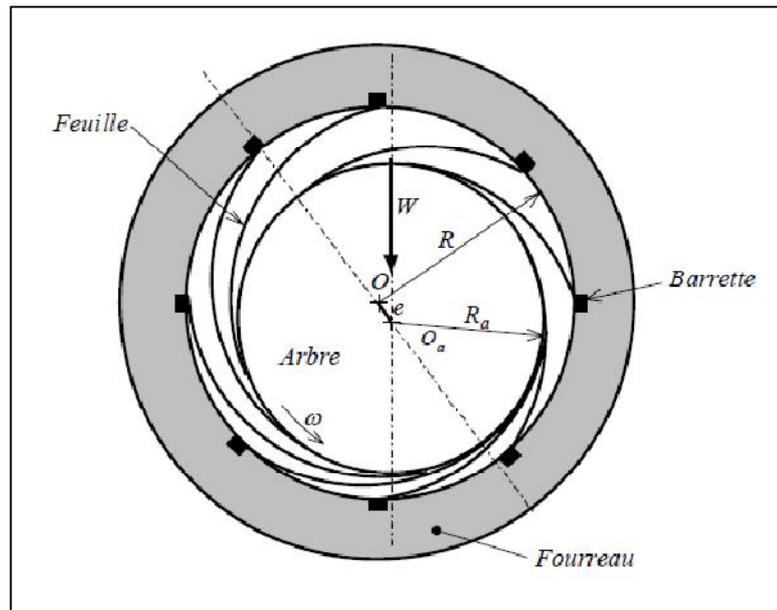


Figure I.12 : Schématisation d'un palier à feuilles Garrett

Bien que cette technologie soit appliquée industriellement dans des turbomachines aéronautiques, elle est maintenant le plus souvent écartée au profit de la technologie *MITI* plus performante et plus simple à modéliser.

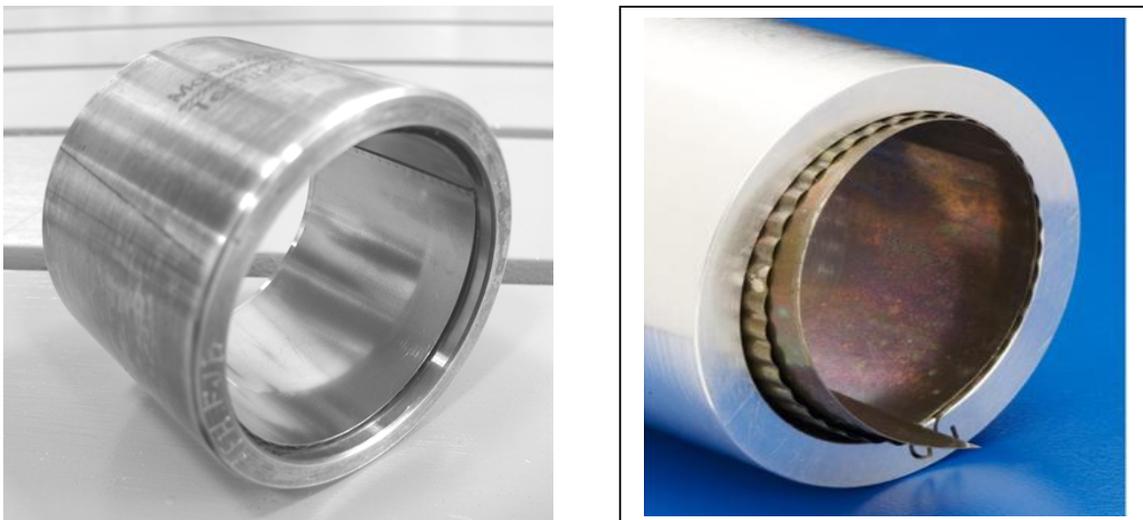


Figure I.13 – Palier à feuilles

b) La technologie MITI

La structure déformable du palier est constituée d'un empilage d'une feuille lisses et une autre feuille ondulées ou sous un autre nom raidisseurs, figure I.14. L'étude théorique de ce type de paliers à feuilles est beaucoup plus complexe que celle des paliers à ressorts dans la mesure où elle doit prendre en compte une analyse de mécanique des solides nécessaire pour déterminer la déformation du palier en fonctionnement.

Pourtant, les modèles proposés dans la référence [6], permettant de résoudre le problème structural sont généralement plus simples que ceux employés pour la technologie *Garett*.

En effet, les comparaisons des résultats des modèles à des travaux expérimentaux [5], notamment sur la capacité de charge, montrent que l'on peut s'affranchir, en première approximation, des frottements feuilles – raidisseurs et raidisseurs – fourreau dans la résolution du problème élasto – aérodynamique.

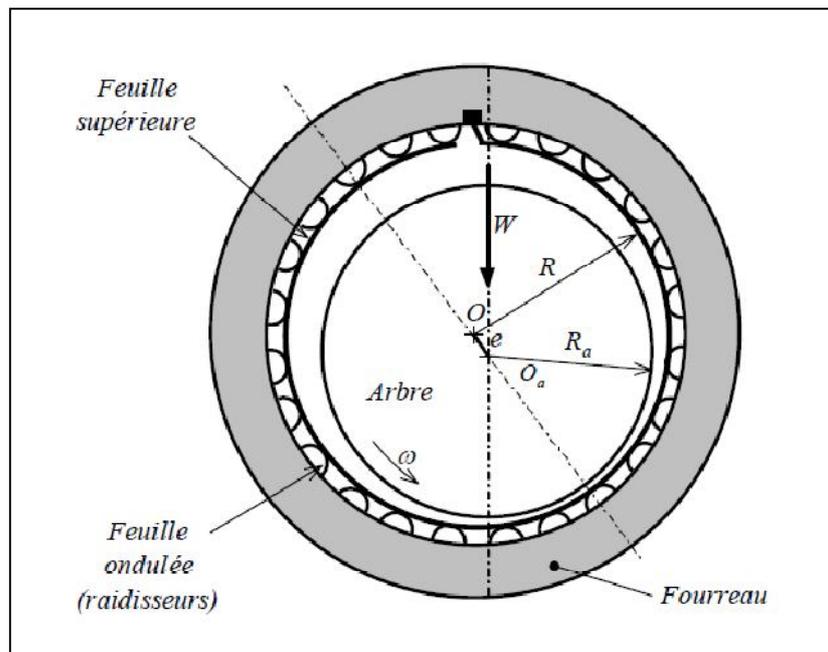


Figure I.14 : Schématisation d'un palier à feuilles MITI

Dans la deuxième technologie rencontrée, une ou plusieurs feuilles sont montées sur des éléments déformables pouvant être constitués soit de raidisseurs (technologie *MITI*), soit d'un empilage de plusieurs autres feuilles, soit d'une combinaison des deux, figure I.15.

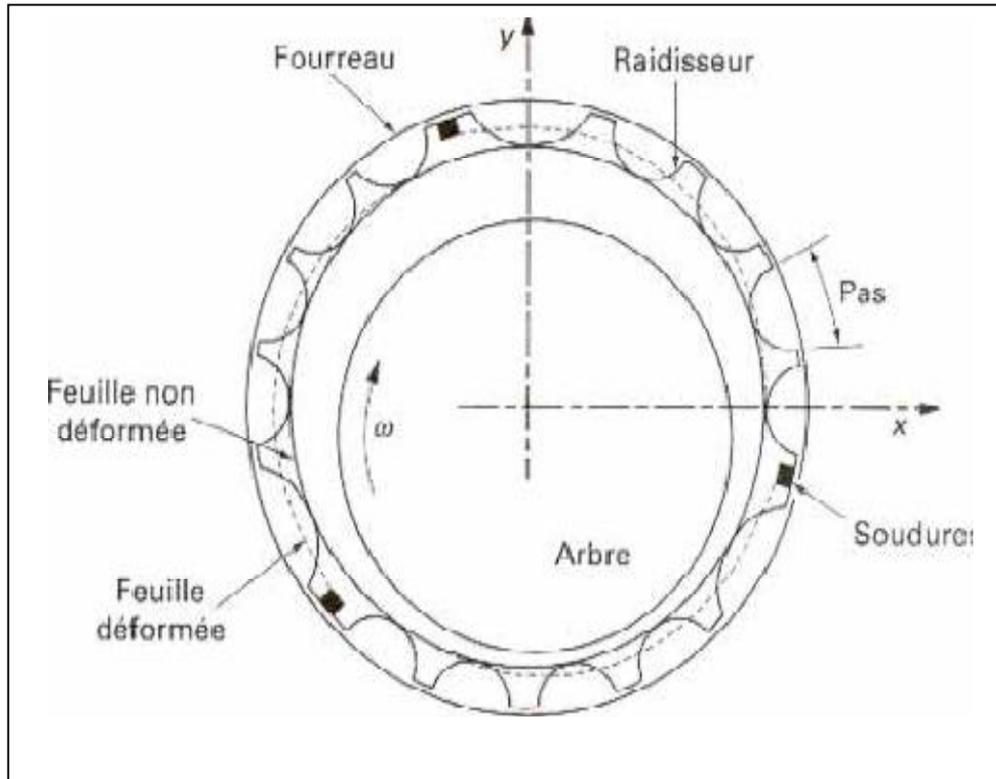


Figure I.15 – Paliers à 3 feuilles montées sur raidisseurs

L'étude théorique des paliers à feuilles est beaucoup plus complexe que celle des paliers à ressorts dans la mesure où elle doit intégrer une partie structure nécessaire pour déterminer la déformation du palier en fonctionnement alors, pour une configuration figée du feillard, l'étude de l'écoulement par résolution de l'équation de Reynolds est similaire à celle présentée au début.

En ce qui concerne le premier type de palier à feuilles [9], (technologie *Garrett*), l'étude structurale permet dans un premier temps de déterminer le couple de démarrage, l'arbre au repos étant en contact avec les feuilles.

Elle permet d'autre part d'initialiser le processus itératif conduisant aux calculs des caractéristiques statiques du palier [9].

Les modélisations proposées ne sont plus simples, car elles tiennent compte des frottements de Coulomb feuille-feuille, feuille-arbre et feuille-fourreau qui sont loin d'être négligeables.

En ce qui concerne le deuxième type de palier à feuilles [70], (technologie *MITI*), les modèles permettant de résoudre le problème structural sont généralement plus simples dans la mesure où l'on ne tient pas compte des frottements feuilles-raisseurs et raidisseurs-fourreau.

Les paliers utilisant la technologie de type *MITI* ont connu plusieurs variantes. En effet, le nombre de lobes, de feuilles supérieures et de feuilles de raidisseurs peut être adapté en fonction des performances souhaitées.

Le premier palier développé selon cette technologie était constitué d'un fourreau rigide sur lequel sont soudées une feuille ondulée (raisseurs) et une feuille supérieure s'étendant sur toute la circonférence du palier. Cet assemblage de feuilles assure à la fois le profil du palier ainsi que sa déformabilité, figure I.16.

La mise en œuvre propre de la fixation de la structure déformable du palier (feuillard) impose une variation de sa raideur structurale avec la position angulaire du point considéré, [10].

Les caractéristiques de ce type de paliers sont très proches de son homologue rigide (palier lisse) c'est à dire qu'il permet de soutenir des charges élevées, [11]. Par la suite, sont apparus les paliers à lobes, généralement trois secteurs.

De même que pour les paliers mono – lobe, la structure déformable a une raideur qui varie le long de la circonférence. Ce type de paliers présente de bonnes caractéristiques dynamiques.

Des études expérimentales, et particulièrement l'analyse des déplacements du rotor au niveau des paliers, a permis de mettre en évidence un sens de rotation privilégié, [5]. La meilleure stabilité est obtenue en choisissant un sens de rotation de la partie libre vers la partie fixe de la structure déformable.

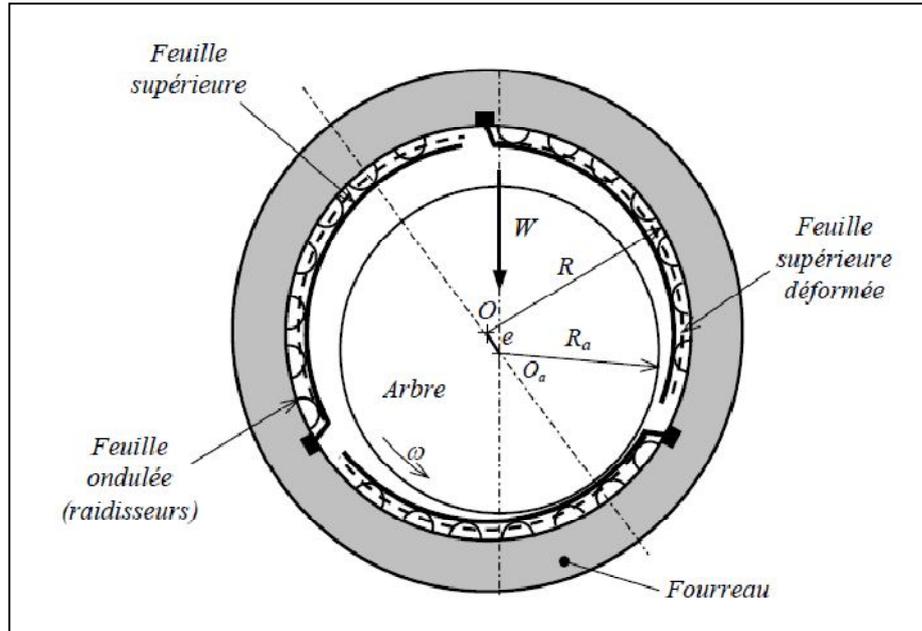


Figure I.16 : Schématisation d'un palier à feuilles MITI à trois lobes

Le niveau de stabilité de ces paliers lobés est généralement élevé même pour des charges modérées.

La plupart des études expérimentales présentées dans la littérature concernent des paliers contenus dans des mécanismes tournant à haute vitesse avec des températures élevées.

Dès lors, il est fréquent de retrouver les matériaux suivants :

- Inconel 713 LC,
- Inconel 718,
- Inconel X750.

Pour les revêtements, dans les applications à basse température on emploie très souvent le PTFE. Par contre, dès que les températures de fonctionnement augmentent, il faut avoir recours à des revêtements plus élaborés.

Dans les études sur des revêtements dits haute température, on retrouve principalement des travaux de la NASA. Parmi les solutions les plus performantes nous citerons des revêtements à base de chrome et d'argent (lubrifiant basse température) et de fluorure de barium ou de calcium (lubrifiant haute température), [12], [13], [14].

I.13. Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons présenté succinctement les différents types de paliers aérodynamiques rencontrés dans les systèmes mécaniques tournants.

Il ressort de cette étude que les paliers aérodynamiques à feuilles peuvent être utilisés dans des conditions de fonctionnement sévères (vitesses de rotation et température de fonctionnement élevées).

Il est toutefois intéressant de noter que dans la pratique les paliers aérodynamiques à feuilles sont plus utilisés que les paliers à profils indéformables car les vitesses de rotation qu'on peut atteindre avec les paliers à feuilles sont nettement plus importantes.

Parmi les paliers aérodynamiques à feuilles présentés dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés plus particulièrement à l'étude du palier à feuilles ondulées, car celui-ci présente la géométrie la plus simple à réaliser et les performances les plus prometteuses.

Parmi les technologies employées avec succès, l'une d'elles se démarque par des résultats particulièrement intéressants et par une modélisation simple. Il s'agit de la technologie des paliers à empilage de feuilles de type *MITI*.

De nombreuses études numériques et expérimentales s'intéressent aux caractéristiques statiques et dynamiques de ce type de paliers. Ces travaux portent sur deux domaines séparés :

- la recherche approfondie sur les phénomènes tribologiques liés aux arrêts – démarrages, le frottement sec qui intervient pendant ces phases est la principale cause de détérioration des paliers. L'état des surfaces et les matériaux en contact ont une influence déterminante dans les phénomènes mis en jeu,
- le développement d'un modèle théorique permettant une simulation précise des performances élasto – aérodynamique du palier.

Nous nous focaliserons ici principalement sur le second axe de recherche et nous présenterons seulement quelques éléments issus de la littérature pour ce qui concerne les phénomènes liés aux arrêts – démarrages.

Cette technologie permet, a priori, une étude structurelle très simple. La feuille supérieure assure la continuité du profil. La géométrie du coussinet et le comportement structural sont régis par les ressorts sur lesquels la feuille supérieure est appuyée.

Chapitre II

Etat de l'art

Chapitre II

Etat de l'art

II.1 Introduction

Nous présentons dans ce deuxième chapitre, une étude bibliographique sur les principaux travaux théoriques qui ont été effectués pour l'analyse théorique des paliers aérodynamiques.

Historiquement, Hirn en 1854 [15] fut le premier à proposer l'idée d'employer l'air et plus généralement les gaz comme lubrifiant, environ trente années avant la publication de la théorie de lubrification de Reynolds de la lubrification des films minces par la Société Royale de Londres [16].

Pendant les dernières décennies, un nombre considérable d'études théoriques et expérimentales ont été réalisées sur les performances des paliers aérodynamiques par plusieurs chercheurs.

En 1959, Ausman [17] a appliqué une méthode en développement asymptotique à des excentricités données pour obtenir une solution analytique d'un palier à patin plan pour différents rapports entre le diamètre et la longueur.

A une excentricité fixe, il a été montré que le nombre de compressibilité limite la capacité de charge, et réduit l'angle de calage de 90° à des faibles nombres de compressibilités jusqu'à la valeur 0° quand le nombre de compressibilité devient important. L'auteur a également donné l'effet du mésalignement qui a été numériquement calculé.

Les performances statiques d'un palier de longueur finie lubrifié par l'air a été numériquement calculé par Raimondi [18] en 1961 pour trois rapport de longueur au diamètre ($L/D=2, 1$ et $1/2$).

Les diagrammes de conception applicable pour une gamme de plusieurs nombres de compressibilité ont été établis pour des rapports d'excentricité relative s'étendant de 0.1 à 0.8.

Sternlicht [19] a obtenu les coefficients dynamiques en résolvant l'équation de Reynolds en régime stationnaire, pour des petites perturbations autour de la position d'équilibre. Les forces générées par le palier ont été calculées en régime perturbé et les

coefficients de raideur et d'amortissement sont déterminés par la méthode de différenciation numérique. Les termes croisés d'amortissement ont été négligés dans cette approche.

En 1963, Ausman [20] a résolu l'équation de Reynolds en régime instationnaire en assumant une linéarisation en (ph) et par suit enregistré le phénomène de fouettement de demi fréquence de rotation du palier à air, et cette méthode peut être employé pour l'analyse d'un palier aérodynamiques infiniment long.

En 1968, Lund [21, 22, 23] a beaucoup travaillé sur les performances dynamiques d'un palier aérodynamique. Il a résolu l'équation de Reynolds en régime instationnaire par la méthode de perturbation linéaire, il a obtenu quatre coefficients de raideur et quatre coefficients d'amortissement. L'auteur a proposé aussi le critère de stabilité dynamique des paliers lubrifiés par l'air.

Heshmat et autres [24] ont proposé une méthode pour calculer les coefficients dynamiques d'un palier aérodynamique à feuilles. Les équations d'équilibre ont été résolues pour des petites perturbations au voisinage de la position du point de fonctionnement. La différenciation numérique a été employée pour déterminer les coefficients de raideur directs et croisées, les coefficients d'amortissement n'ont pas été déterminés.

Peng et Carpino [25] ont développé la méthode de perturbation décrite par Lund [26] pour obtenir les huit coefficients dynamiques d'un palier aérodynamique avec un support élastique, on a assumé que le lubrifiant est un gaz parfait isotherme, et seulement les effets élastiques des feuilles ont été considérés. Une formulation en éléments finis a été employée pour résoudre l'équation de Reynolds en régime stationnaire et la méthode des différences finis a été utilisée pour résoudre les équations perturbées.

Les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement synchrones ont été tracés pour différentes valeur du nombre de compressibilité et le nombre de compliance.

Dans un autre travail, les mêmes auteurs [27] ont inclus l'effet du frottement de l'amortissement structural de Coulomb. Le frottement structural a été modélisé en tant qu'un amortissement visqueux équivalent, qui a été obtenue en calculant l'énergie dissipée pour un cycle d'excitation de l'arbre du palier.

Les auteurs ont conclu que l'introduction de l'amortissement structural augmente d'une manière significative les coefficients de raideur et d'amortissement

Récemment, Matta [28] et Matta et al. [29] ont développé un banc d'essai pour les paliers aérodynamiques fonctionnant à des vitesses supérieures à 60 000rpm pour différents chargement statique.

Les essais ont été réalisés sur les paliers aérodynamiques circulaires mais le banc d'essai développé peut être adapté pour d'autres types de palier à air. Les excitations dynamiques sont appliquées en utilisant deux dispositifs vibratoires ou bien un marteau d'excitation, les auteurs ont développé une méthode appropriée pour identifier les coefficients dynamiques liés à la fréquence appliquée. Les données expérimentales obtenus pour une gamme des vitesses de rotation et différent chargement statique ont été comparées aux résultats théoriques pour un palier aérodynamique d'un diamètre de 30mm, un rapport $L/D=1$ et une excentricité relative de $22\mu\text{m}$.

Les auteurs ont constaté que les coefficients croisés sont en bonne concordance et cela pour les deux cas mesurés et calculés. Cependant, les coefficients dynamiques directs mesurés sont en général légèrement plus grand que ceux calculés théoriquement.

Plus récemment, Paulsen et al. [30] ont proposé une modélisation mathématique détaillée dans le cas de la lubrification non isothermique pour un fluide compressible et cela pour trois types de palier aérodynamique, la capacité de charge, les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement ont été déterminés par la résolution de l'équation de Reynolds couplée avec l'équation d'énergie.

Après une bonne présentation bibliographique sur les paliers aérodynamiques en régime non isothermique, les auteurs ont observé que les différences enregistrées entre les coefficients dynamiques calculés en régime isotherme et en régime thermohydrodynamique étaient petites et presque constantes en fonction de la vitesse de rotation. Ils ont conclu que l'effet thermohydrodynamique dans les paliers aérodynamique doit être considéré dans le cas où le palier est fortement chargé.

Carpino et al. [31-32] ont proposé le modèle numérique le plus complet, en prenant en compte les discrétisation détaillée à la fois des effets de membrane et de courbure de la feuille supérieure, pour la feuille ondulée seuls les déformations élastiques ont été retenues.

Dans [31, 33] les auteurs ont construit un modèle éléments finis pour la description de l'épaisseur du film lubrifiant et de la structure des feuilles, le champ de pression est obtenu par un schéma numérique itératif faisant un couplage entre les deux modèles en éléments finis ; les termes qui représentent les courbures et la rigidité des feuilles dans le modèle éléments finis proposé ne sont pas couplés ce qui influe sur le déplacement global dû à la négligence des effets des courbures et d'élasticité plane des feuilles.

D'autres travaux [34, 32] présentent une formulation éléments finis complète qui prend en considération les effets des membranes, les contraintes dus aux courbures cylindriques des feuilles ondulées avec le moment, la tension, la courbure et les expressions de déformation, ce dernier modèle associe à la fois le champ de pression aérodynamique développé par l'écoulement du film lubrifiant et la déformation structural des feuilles supérieures et ondulées représentés par un seul modèle éléments finis, les prédictions montrent des formes irrégulières dans le tracé du champ de pression aérodynamique et l'épaisseur du film lubrifiant dues au détachement des feuilles dans la région de sortie du film lubrifiant aérodynamique. On note que dans les références [31-34] le modèle structural de la feuille ondulée est considéré comme une simple fondation élastique.

Dans la référence [32] la feuille ondulée est modélisée comme une fondation élastique continue qui prend en considération les déflexions radiales et circonférentielles des ondulations, mais ne montre pas l'effet de fléchissement de la feuille supérieure entre deux ondulations adjacentes, dans ce même modèle, une demi-ondulation symétrique est analysée tout en ignorant l'effet de courbure de la feuille ondulée. La dissipation d'énergie est calculée en utilisant le modèle d'atténuation visqueux équivalent pour des effets de frottement sec entre la feuille supérieure et la feuille ondulée d'une part, et d'autre part entre la feuille ondulée et le logement du palier.

Les effets de l'amplitude et de la fréquence d'excitation ainsi que le paramètre du frottement sec dans la prédiction des coefficients de raideur et d'amortissement sont étudiés à des faibles charges appliquées, selon les prédiction des auteurs, les coefficients

d'amortissements directes diminuent avec l'augmentation du coefficient du frottement sec parce qu'il y a un enfoncement des ondulations de la feuille inférieure contre le logement du palier, dans la référence [35] une constatation opposée aux résultats précédents, cependant, le phénomène physique n'est pas le même. (est différent)

Heshmat et al. [36] prévoient les performances statiques des butées aérodynamiques à feuilles, les auteurs ont utilisé un code commercial pour la modélisation de la structure des feuilles en éléments finis couplé avec le film aérodynamique obtenu par la méthode des différences finies, la feuille supérieure est considérée comme une plaque qui est supportée par la feuille ondulée qui est modélisée comme une simple fondation élastique.

La comparaison entre les valeurs obtenues de la capacité de charge statique et les valeurs réellement mesurées donnent une bonne concordance.

Dans un autre travail, les mêmes auteurs [37] prévoient les performances statiques d'un palier aérodynamique à feuille pour étudier la faisabilité (conception) d'un palier hybride magnétique à feuilles. Le modèle numérique dans [36] est amélioré en employant efficacement l'influence des coefficients de la matrice structural qui représente l'action combinée entre la feuille supérieure et la feuille ondulée.

Kim et San Andrés [38], ont proposé dans une autre comparaison des valeurs expérimentales limites avec celles obtenues par Ruscitto et al. [39] une validation des performances extrêmes des paliers aérodynamiques à feuilles a été obtenue par les auteurs en utilisant le modèle de fondation élastique simple de Heshmat.

Le modèle emploie une pression axiale moyenne permettant à l'arbre du palier de se déplacer au de là de sa position de jeu nominal quand le palier supporte des charges statiques importantes, les résultats montrent qu'un palier aérodynamique à feuilles lourdement chargé peut avoir une excentricité relative trois fois plus grande que son jeu radial nominal, l'épaisseur du film lubrifiant aérodynamique et l'angle de calage pour des charges statiques importantes sont en bonne concordance avec les valeurs du test expérimental pour les paliers aérodynamiques à feuilles dans le cas où l'excentricité relative est supérieure au jeu radial nominal, dans les régions faiblement chargés, il y a des anomalies (dis concordances) évidentes entre les prédictions (valeurs numériques) et les données expérimentales en raison de l'inexactitude de fabrication des bands d'essais des paliers aérodynamiques [40, 41], à des

conditions de chargement extrêmes, les calculs (les prédictions) montrent une raideur statique constante et qui ne change (indifférentes) pas avec la vitesse de rotation et aussi à des grandeurs (magnitude, amplitude) près (avoisinent) des valeurs fondamentales de la raideurs statique déterminée à des conditions constantes et à l'état statique (pas de vitesse de rotation).

Lee et al. Dans la référence [42] présente les effets de la raideur des bumps (ondulations) aux performances statiques et dynamiques des paliers aérodynamiques à feuille ; dans le modèle proposé, la feuille supérieure est considérée comme une poutre élastique et les ondulations de la feuilles inférieure sont représentées comme des ressorts qui ont des coefficients de raideurs constants, les résultats obtenus montrent qu'il faut déterminer une valeur optimale de la raideur des bump (ondulations) à des vitesses de rotations bien spécifiques pour avoir une capacité de charge maximale. Par ailleurs, à des vitesses de rotations importantes, la stabilité des paliers aérodynamiques est affectée par la raideur individuelle de chaque bump (ondulations).

Lee et al. [43] ont présenté une modélisation numérique donnant le comportement de la structure à feuille du palier, le modèle en éléments finis représente la feuille supérieure et la feuille ondulée est couplé (combiné) avec la pression aérodynamique générée par le palier pour obtenir (pour la prédiction) l'épaisseur minimale du film lubrifiant aérodynamique, l'angle de calage et les coefficients de force (la portante aérodynamique), les auteurs ont aussi utilisé les résultats expérimentaux pour identifier la valeur de la fréquence d'excitation qui n'affecte pas les coefficients dynamiques de raideurs et d'amortissements pour mesurer l'impact d'une charge appliquée et pour des vitesses de rotations et cela pour un test d'un palier à feuille aérodynamique flottant, les résultats montrent une concordance raisonnable des termes de coefficients de raideurs direct avec les résultats expérimentaux pour des vitesses de rotations variant de 15 à 25 k tr/min, tandis que (par contre) les coefficients d'amortissements obtenus expérimentalement diminuent avec l'augmentation de la vitesse de rotation.

Malheureusement, cette publication n'a pas fournit assez d'informations sur les caractéristiques du palier étudié (testé) c'est-à-dire la géométrie, le matériau des feuilles ... etc, et du point de vue des auteurs, mettre en œuvre (l'exécution) une méthode d'identification des paliers aérodynamiques à feuilles est non appropriée.

Les paliers aérodynamiques à feuilles ont une capacité de charge limite à des excentricités relatives bien supérieures au jeu radial nominal, dans la réalité le jeu radial nominal des paliers à feuilles est un concept vague (non bien défini).

Peng et Khonsari [44] ont présenté une analyse unique (originale) de la capacité de charge d'un palier aérodynamique à feuilles à des vitesses de rotations très élevées, les auteurs ont utilisé le jeu radial et la raideur des feuilles pour déterminer la charge portante, cependant, en pratique, le jeu radial adopté ne peut pas être appliqué en raison du design et de la fabrication imprécise des paliers à feuilles, c'est-à-dire on ne peut pas atteindre l'épaisseur du film lubrifiant calculé.

Pour des raisons mécaniques, les paliers aérodynamiques à feuilles sont préchargés, c'est-à-dire, le diamètre de l'arbre est largement plus grand que celui de la feuille supérieure du palier, la précharge assure ainsi le contact statique (aucune vitesse de rotation) avec des pressions uniformément appliquées par la structure à feuilles sur l'arbre du palier.

Radil et al [45] ont trouvé une très importante corrélation donnant la relation entre la capacité de charge et le jeu radial des paliers aérodynamiques à feuilles. Dans des conditions opérationnelles, les dimensions du palier augmentent avec l'augmentation de la température et des forces centrifuges, aggravant par la suite les effets d'avoir un nouveau palier avec des nouvelles dimensions (le jeu radial).

Kim et San Andrés [46] ont approfondi l'analyse présentée en [44], en ajoutant l'effet d'un assemblage préchargé, et donnent des formules analytiques qui estiment la capacité de charge, l'épaisseur minimale du film lubrifiant et les coefficients de raideurs à des vitesses de rotations élevées en utilisant la théorie d'un palier infiniment long.

La structure fondamentale élastique (feuille ondulée) détermine la capacité de charge limite d'un palier aérodynamique à feuilles, avec la limitation de l'excentricité relative et la déformation structural ainsi une évaluation précise de l'épaisseur du film lubrifiant minimum est trouvée (obtenue) avant d'exécuter des calculs avec un modèle numérique complexe, même pour les cas de grandes charges portantes qui ont comme conséquence une excentricité relative du palier qui dépasse le jeu radial nominal

Une précharge initiale au montage (surface entre l'arbre et les feuilles) augmentent la raideur statique du palier aérodynamique à feuilles à des vitesses nulles ou bien à des vitesses très grandes (tendent vers l'infini).

La prédiction de l'épaisseur du film et de l'élasticité des feuilles produisent une mesure exacte de la raideur structurale et de la déformation élastique à des conditions de contact entre l'arbre et les feuilles à des vitesses de rotations nulles.

Un environnement thermique adéquat est nécessaire pour l'implémentation des paliers aérodynamiques à feuilles dans des applications où la température est très élevée, par exemple les turbines à gaz [47].

L'écoulement d'un fluide de refroidissement aux parties latérales du palier aérodynamique à feuilles aide à maintenir une capacité de charge constante avec une bonne résistance aux effets thermiques [33].

Salehi et al. [39] ont étudié les performances statiques d'un palier aérodynamique à feuilles avec une variation de température en résolvant à la fois l'équation de Reynolds et l'équation de transport d'énergie dans le film lubrifiant on utilisant le modèle de fondation élastique simple [48], l'équation de l'énergie est simplifiée par l'approximation d'un écoulement de Couette [49] en négligeant le travail effectué par la pression, ce qui donne un découplage efficace du travail avec l'équation de Reynolds, ainsi cette analyse calcule seulement la distribution circumférentielle de la température au plan moyen du palier, la distribution axiale de la température diminue linéairement à travers les deux extrémités du palier.

Les travaux expérimentaux ont permis d'estimer la distribution de la température de l'écoulement du fluide lubrifiant qui passe à travers le palier aérodynamique à feuilles par la mesure de la température à l'entrée et à la sortie du fluide en utilisant des thermocouples installés à la face extérieure de la feuille supérieure, les mesures montrent que la température dans la direction de la charge statique est plus grande que dans la direction opposée d'un palier aérodynamique à feuilles avec une augmentation de la température avec l'augmentation de la vitesse de rotation et de la charge statique appliquées.

La comparaison des résultats obtenus numériquement de la distribution de la température avec celles obtenus expérimentalement montrent une concordance d'environ 20%.

Peng et Khonsori [50] ont présenté un modèle thermo-aérodynamique (TAD) pour estimer les performances statiques d'un palier aérodynamique à feuilles, dans le modèle présenté, la structure des feuilles est présentée par le modèle élastique simple de Heshmat et l'équation de Reynolds et résolue simultanément avec l'équation de transport de l'énergie pour la prédiction de la pression aérodynamique et de la distribution de la température, ils ont donné un coefficient de convection thermique basé sur le régime du fluide lubrifiant, les calculs montrant une distribution presque uniforme de la température au long de la direction axiale du palier aérodynamique à feuilles avec une augmentation de la capacité de charge due à l'augmentation de la viscosité de l'air qui augmente avec l'augmentation de la température.

La comparaison des résultats de la température obtenus numériquement et expérimentalement sont excellentes [39], cependant, Radil et Zeszotek [51] ont trouvé que la capacité de charge diminue de 30 % avec l'augmentation de la température allant de 25°C jusqu'à 650°C, de cela les auteurs ont conclu que les propriétés mécaniques de la structure à feuilles dépendent de la température (augmentation des dimensions due à l'augmentation de la température) ce qui nécessite une bonne compréhension de ce phénomène pour obtenir des prévisions fiables.

Les modèles numériques du film lubrifiant changent significativement avec la vitesse de rotation, ce qui n'est pas le cas des coefficients de raideur de la structure à feuilles du palier aérodynamique, typiquement, des vitesses de rotations très grandes de l'arbre du palier à feuilles conduisent à une relation difficile entre le film lubrifiant et la structure des feuilles.

Ainsi, les caractéristiques de raideur d'un palier aérodynamique à feuilles dépendent essentiellement de la nature de la structure des feuilles.

Les coefficients de raideurs direct d'un palier aérodynamique à feuilles sont les plus importants puisqu'ils ont une grande influence pour la détermination de la vitesse critique du rotor d'un palier aérodynamique à feuilles et par conséquent la carte de stabilité opérationnelle. On note que la raideur de la structure des bumps ne produit pas des termes croisés qui engendrent une instabilité du rotor du palier aérodynamique à feuilles.

L'amortissement dans le palier aérodynamique à feuilles est plus difficile à déterminer à cause de l'amortissement par friction dû principalement aux courbes hystérésis du matériau et à l'effet du frottement sec entre les feuilles qui n'est pas bien clairement défini théoriquement et expérimentalement. En raison du faible amortissement du film lubrifiant à des vitesses de rotations opérationnelles, l'amortissement de la structure à feuilles devient important.

Ku et Heshmat [52, 53] ont présenté un modèle théorique pour prédire les coefficients de raideur et d'amortissement synchrones de la structure à feuilles des paliers aérodynamique à feuilles.

Les coefficients de raideur sont calculés à partir de la méthode de perturbation de l'arbre du palier autour de sa position d'équilibre statique, et les coefficients d'amortissement visqueux équivalent sont déterminés par les courbes hystérésis bouclées du mouvement du centre de l'arbre.

Les forces transmises au bumps voisins sont calculés en utilisant les équations de l'équilibre statique des forces et du moment d'un seul bumps.

Les équations gouvernantes pour la détermination de la déflexion radiale et tangentielle de la poutre (structure) élastique courbée donnent la flèche (déflexion) d'un seule bump utilisant les équations qui présentent le moment de flexion et l'effort tranchant, les conditions aux limites utilisées pour le calcul sont les bumps sont chargés au centre supérieur, allant du premier bump jusqu'au dernier bump.

Un schéma numérique itératif est utilisé pour déterminer les forces du palier aérodynamique à feuille à des charges imposées, employant les valeurs de la flèche tangentielle des déflexions des bumps.

Après que l'arbre se rend à sa position d'équilibre statique, la perturbation de l'arbre au voisinage de son centre d'équilibre donne les coefficients de raideur et d'amortissement de la feuille ondulée d'un palier aérodynamique à feuilles, les résultats montrent que les coefficients de raideurs et d'amortissements sont fortement non linéaires et anisotropique, les coefficients dynamiques augmentent avec l'augmentation de l'excentricité é statique, la diminution de l'amplitude de perturbation et de la fréquence d'excitation.

Les coefficients directs d'amortissements augmentent avec l'augmentation du coefficient de friction, mais ils atteignent leurs valeurs asymptotiques quand le coefficient de frottement approche d'une valeur optimale. Le rapport entre les coefficients directs d'amortissement et coefficients directs de raideurs adimensionnelles est de 0.25 à 0.3 qui donnent un facteur de perte structural, c'est-à-dire, un taux effectif entre l'amortissement et la raideur de 0.25 à 0.3.

Ku et Heshmat [41] effectuent une recherche expérimentale sur la déflexion des bumps des paliers aérodynamiques à feuilles, un système optique d'enregistrement pour plusieurs conditions opérationnelles est utilisé pour vérifier le modèle théorique [54], la configuration des bumps, le profil de la charge, la déformation des feuilles ondulées sont étudiés, les observations montrent que la déflexion horizontale du segment qui relie entre les bumps est négligeable devant la déflexion (la déformation) des bumps qui sont en contact linéaire avec la feuille supérieure, une série de tests de déflexion dû à la charge appliquée utilisant la système optique d'enregistrement montrent une séparation des bumps de la partie inférieure de la feuille avant l'application de la charge à cause de la non linéarité des boucles hystérésis aux régions faiblement chargées, et aussi l'amortissement de Coulomb dû aux ondulations de la feuille inférieure est plus importante dans les régions faiblement chargées que dans les zones lourdement chargées.

Une comparaison des résultats expérimentaux des couches des bumps avec et sans déformation de surface montrent l'existence de forces de frictions entre les surfaces en contacts et une force interactive locale entre les bumps dus à la raideur locale qui dépend de l'amplitude et de la charge appliquée.

Heshmat et Ku [55] étudient par des travaux expérimentaux, les caractéristiques dynamiques de la structure de la feuille ondulée des paliers aérodynamiques à feuilles, les auteurs ont employé deux dispositifs vibratoires pour imposer les forces dynamiques agissant sur la structure ondulée installée dans le foyer du palier aérodynamique à feuilles.

Les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement équivalents de la structure sont calculés pour plusieurs valeurs de la fréquence d'excitation, un autre travail donne une comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux utilisant le modèle décrit en référence [52-54], les deux résultats montrent que les coefficients directs de raideur et

d'amortissement diminuent avec l'augmentation de l'amplitude dynamique de vibration produite par l'excitation de fréquence vibratoire provoque une diminution des coefficients direct d'amortissement et une augmentation des coefficients de raideur, aussi, cet article démontre que la structure de la feuille ondulée des paliers aérodynamiques à feuilles engendre la création des caractéristiques non linéaires, les résultats sont évident pour le cas d'un modèle qui emploie le coefficient du frottement sec c'est-à-dire C est proportionnel à γ/ω .

Salehi et al. [56] ont développé un modèle semi-empirique d'un seul degré de liberté pour estimer la force de friction équivalente entre un bump et la surface de la feuille supérieure, la comparaison entre les deux types de résultats à savoir la technique d'évaluation des résultats appliqués hystérésis et le modèle semi-empirique d'un seul degré de liberté, montrent une bonne cohérence entre les coefficients d'amortissements équivalents, la variation des coefficients d'amortissement et du coefficient dynamique de friction dépendent des trois facteurs : la fréquence de vibration, l'amplitude du mouvement et la charge statique appliquée, ces paramètres sont testés pour des valeurs de 50Hz à 140Hz, 2.54 μ m à 12.7 μ m et 45N à 135N, respectivement, les deux méthodes (hystérésis et le modèle d'un seul degré de liberté) montrent que les coefficients d'amortissements diminuent dramatiquement jusqu'à 200Hz (la bande de fréquence de résonance structurale), après cette valeur l'amortissement diminue à un pas plus lent, les coefficients d'amortissement chutent exponentiellement avec l'augmentation de l'amplitude de vibration et augmente proportionnellement avec la charge statique.

L'essai opérationnels des turbines à gaz à des vitesses de rotations très élevées avec un grand mésalignement de l'arbre à la température allant de 25°C jusqu'à 538°C sous les conditions de friction et la phase de vaporisation du lubrifiant confirment l'efficacité des paliers aérodynamique à feuilles dans le domaine des turbines à gaz et aussi les machines qui tournent à des vitesses de rotations très élevées.

Rubion et San Andrés [57] donnent le tracé de la charge statique en fonction des déflexions des paliers aérodynamiques à feuilles pour trois différents diamètres de l'arbre, c'est-à-dire, différents degrés de préchargement, pour étudier les effets mécaniques à l'interface entre l'arbre et la structure à feuille du palier aérodynamique à feuilles, les valeurs du test expérimental montrent une déflexion (déformation) nonlinéaire des feuilles du palier aérodynamique et aussi une augmentation de la précharge développe une grande raideur

structural, le modèle proposé des paliers aérodynamique à feuilles considère les bumps comme un assemblage de ressort linéaire, dans ce modèle la feuille supérieure est négligée parce que sa déformation dans la direction axiale est constante, et par conséquent les forces et les moments de flexion de la feuille supérieure sont négligées [38], ce modèle est en bonne concordance avec les résultats expérimentaux de la raideur structurale.

Rubio et San Andrés [58] effectuent des tests de vibratoires (de secousse) pour déterminer la raideur structurale et les coefficients d'amortissement visqueux équivalent des palier aérodynamique à feuilles, l'énergie de dissipation qui se produise durant un cycle d'excitation avec une seule fréquence définie les paramètres structuraux d'un palier aérodynamique à feuilles en utilisant la méthode d'identification par impédance mécanique, les résultats montrent une diminution de la raideur et une augmentation du coefficient d'amortissement visqueux équivalent des feuilles avec l'augmentation de l'amplitude de la charge dynamique appliquée, le coefficient de frottement sec augmente avec l'augmentation de l'amplitude de la charge allant de 0.05 jusqu'à 0.2.

II.2. Les mesures Rotor-dynamiques :

Les paliers aérodynamiques à feuilles se distinguent des paliers aérodynamique à profil rigide de leurs vitesse opérationnelle très élevée, de leurs caractéristiques de stabilité et l'endurance à des températures très élevées utilisant des lubrifiants solides (ou déformables).

Heshmat et al. [59] ont testé deux types des paliers aérodynamiques à feuilles de la deuxième génération [60], à savoir, un palier mono-lobe et à trois lobes, les dimensions du palier aérodynamique étudié sont 35mm de diamètre et 44mm de longueur, le premier palier est formé d'une seule feuille supérieure et de deux feuilles inférieure ondulées, le deuxième palier est formé de trois feuilles supérieure reposant chacune sur deux feuilles inférieures ondulées, pour bien montrer les caractéristiques du frottement, un robage des surfaces de la feuille supérieure ondulée est mis en étude.

La surface inférieure de la feuille supérieure et la surface supérieure de la feuille ondulée sont enrobées d'une couche en cuivre d'épaisseur de 3.8 μ m, les courbes qui relient la déformation des feuilles en fonction de la charge portante dans le cas du palier aérodynamique à feuilles à trois lobes montrent que la raideur des feuilles est plus grande dans l'extrémité soudée et devient faible dans l'extrémité libre.

Cette variation dans la raideur des feuilles d'un palier aérodynamique à feuilles à trois lobes provient de la variation du préchargement le long des lobes, une soudaine augmentation dans la taille globale de l'orbite du rotor détermine la vitesse de rotation opérationnelle maximale pour un palier aérodynamique à feuilles mono lobe et à trois lobes, les résultats montrent que le palier aérodynamique à feuilles à trois lobes est plus stable et peut atteindre des vitesses de rotations très importante dans le cas ou le rotor tourne de l'extrémité libre de la feuille vers l'extrémité soudée, le palier aérodynamique mono feuille qui est revêtue en cuivre peut atteindre une vitesse allant jusqu'à 120000rpm et une capacité de charge statique de 533.8N ou bien une charge spécifique de 352KPa à une vitesse de 68000rpm, démontrant de cela que le revêtement des feuilles supérieure et inférieure ondulée améliore les performances des paliers aérodynamique à feuilles.

Heshmat [61] à introduit un palier mono feuille avec plusieurs feuilles inférieure ondulées, ce palier est réglable dans la direction radiale et circonférentielle, le gradient de raideur développé assure une augmentation de la pression aérodynamique quand la vitesse de rotation du rotor augmente la pression aérodynamique augmente et pousse les feuilles vers l'extérieur et engendre un film lubrifiant convergent.

Les expériences montrent qu'un palier multi stage de 35mm de diamètre et de 31mm de longueur, peut supporter une capacité de charge de 728N, Heshmat à démontrer que le palier aérodynamique à feuille peut atteindre une capacité de charge de $4.61 \cdot 10^6$ dN à une vitesse maximale de 132Krpm, quoique les mesures de vibration montrent large amplitude synchrone de fréquence d'excitation en relation avec lé fréquence naturelle du rotor rigide. Cependant, malgré la fréquence d'excitation sub synchrone, le rotor atteint un cycle opérationnel limite de stabilité.

Heshmat [59] a démontré les caractéristiques critiques en mode de flexion d'un rotor flexible supporté par un palier aérodynamique à feuilles.

Les caractéristiques critiques en mode de flexion pour un palier aérodynamique à feuilles rassembles les performances efficaces à savoir le lubrifiant qui est en dépendance dans la nature avec des vitesse de rotations très élevées, l'auteur utilise trois types de palier aérodynamique à feuilles différents l'un à l'autres, le premier est un palier avec une seule feuille ondulée non revêtue, le deuxième est un palier avec plusieurs feuilles ondulées non

revêtues, le troisième est un palier aérodynamique avec plusieurs feuilles ondulées revêtus d'une couche en cuivre de 2.5 μ m, la raideur structural d'un palier aérodynamique à feuilles ondulées est plus grande d'un palier simple.

Lee et autres [60, 61] ont introduit la viscoélasticité de la feuilles ondulée, pour bien comprendre l'effet de l'amortissement d'un palier aérodynamique à feuilles, les tests structurales utilisent

II.3. Synthèse des publications

Nous avons regroupé dans un tableau les différents ensembles rotor-palier testés, les conditions de fonctionnement ainsi que les performances observées.

Machine	Rotor	Fonctionnement	Palier	Performances
Prototype Arbre libre-turb. (HESHMAT 1994), [62]	m=1.545 kg L=211 mm D=35 mm	Pression :101.4 kPa 25% d'humidité Revêtement propylene glycol methyl ether aceta Jeu radial : 33-47 μ m	L=31 mm D=35 mm EpFeuille=0.127mm EpBump=0.076 mm Pas Bump=3.17 mm H Bump=0.5 mm Inconel X-750	727.8 N / palier à 59.700 tr/min
				20 μ m à 21.000 tr/min 27 μ m à 80.000 tr/min
Prototype Arbre libre-turb. (HESHMAT 2000), [63]	m=3.94 kg L=540 mm D=36.5 mm	Déplacement limité à 230 μ m	Feuille + 1 à 2 séries de bumps, Revêtement Cu, Pas de dimension	20 μ m à 32.700 tr/min
Prototype Arbre libre-turb. (HESHMAT 1982),[64]	m=1.6 kg L=211 mm D=35 mm	Pression : 102.5 kPa 25% d'humidité Revêtement des feuilles en cuivre, Jeu radial : 51-76 μ m	L=43.7 mm D=35 mm EpFeuille=0.129mm EpBump=0.084mm Pas Bump=3.17mm H Bump=0.5 mm Inconel X-750	534 N / palier à 68.000 tr/min 25 μ m à 114.000 tr/min
Turbocompresseur (Miti, 1999), [65]	?	?	LxD=25x35 mm	↘ coeff. frott. Avec cycles de start-stop.
			LxD=75x100 mm	2310 N / palier à 22.000 tr/min
Turbocompresseur (HOWARD, 1999), [66]	m~ 1.36 kg L= 96.8 mm D _e =25.4mm D _i = 19mm	Température~350°C	L= 25.4 mm, D= 25.4 mm, Jeu radial : 48 μ m, Souplesse : $\alpha=1$	Vitesse : 20.000 à 117.000 tr/min, Raideur : 1.75.10 ⁴ à 2.1.10 ⁶ N/m, Amortissement : >315 Ns/m pour stabilité à 117.000 tr/min,

Machine	Rotor	Fonctionnement	Palier	Performances
Turbocompresseur (HOWARD, 1999), [66]	m~ 1.95 kg L= 128 mm D _e = 38 mm D _i = 33 mm	Température~350°C	L= 38 mm, D= 38 mm, Jeu radial : 74 μm, Souplesse : α=1	Vitesse : 20.000 à 117.000 tr/min, Raideur : 1.75.10 ⁴ à 3.15.10 ⁶ N/m, Amortissement : >482 Ns/m pour stabilité à 117.000 tr/min,
Prototype (SALEHI, HESMAT, 2000), [67]	?	Q _{air} : 0.85m ³ /min ΔT=32.2°C	L=101.6 mm D=76.2 mm	396 N / palier à 20.000 tr/min
		Q _{air} : 1.13m ³ /min ΔT=35°C	L=101.6 mm D=76.2 mm	760 N / palier à 25.000 tr/min
		Q _{air} : 1.33m ³ /min ΔT=44.4°C	L=101.6 mm D=76.2 mm	1005 N / palier à 30.000 tr/min
		Q _{air} : 0.14m ³ /min ΔT=155°C	L=31 mm D=35 mm	698 N /palier à 60.000 tr/min

La lecture de ce tableau permet de comparer les résultats obtenus pour un même mécanisme. En effet, les caractéristiques du prototype de masse m=1.545 kg sont très proches de celui de 1.6 kg. La principale différence entre ces deux montages provient des paliers. On remarque que, pour un diamètre donné, lorsque la longueur diminue la charge admissible augmente (de 534 N à 68.000 tr/min à 727.8 N à 59.700 tr/min), par contre aucune information sur d'éventuels changements de la géométrie des bumps n'est disponible.

II.4. Conclusion

Les nombreuses études effectuées sur le comportement statique et dynamiques des paliers aérodynamiques, dont on a donné un bref aperçu, ont mis en évidence la nécessité d'utiliser des profils déformables dans la lubrification aérodynamique des paliers soumis à des conditions de fonctionnements sévères.

En outre, les déformations élastiques de surface du palier dues au champ de pression aérodynamique dans le film lubrifiant doit être considéré afin de mieux prédire les performances statiques et dynamiques des paliers à air.

Dans le présent travail, on s'intéresse à l'étude du comportement statique et dynamique linéaire d'un palie à feuilles compliant (déformable) lubrifié par un gaz qui est l'air en régime isotherme.

A la fin une étude paramétrique complète, permettra de mettre en évidence l'influence des déformations des feuilles sur les performances statiques du palier (la portance aérodynamique, l'angle de calage, le champ de pression et l'épaisseur du film lubrifiant), et la dynamique linéaire (coefficients dynamiques, masse critique et fréquence de fouettement) d'un palier compliant en utilisant le modèle développé par Heshmat.

Chapitre III

Théorie de la lubrification aérodynamique en régime laminaire

Chapitre III

Théorie de la lubrification aérodynamique en régime laminaire

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter les équations de base de la lubrification aérodynamique par un fluide newtonien et compressible. Pour cela, nous rappelons les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus, à savoir la loi de conservation de la masse, la loi de conservation de la quantité de mouvement et la loi constitutive des gaz parfaits. L'utilisation de l'hypothèse d'un écoulement en film mince permettra de simplifier sensiblement les équations de mouvement du fluide.

Pour ce type d'écoulement, le comportement du film fluide peut être décrit par une équation aux dérivées partielles de deuxième ordre appelée équation de Reynolds, la résolution de celle-ci dans le cas de la lubrification aérodynamique permettra de déterminer le champ de pression dans le film lubrifiant, ce dernier servira pour le calcul des performances aérodynamiques du contact lubrifié.

La connaissance du champ de pression qui existe à l'intérieur du fluide permet de déterminer la portance d'un écoulement en film mince ainsi que les forces de frottement exercées par le fluide qui est l'air sur les parois du contact. Ceci conduit à la résolution simultanée de deux équations :

- une équation aérodynamique qui définit le comportement du fluide qui peut être une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre appelée équation de Reynolds, soit une fonctionnelle qui est la forme variationnelle de l'équation de Reynolds. La solution doit satisfaire à ces deux équations ainsi que les conditions aux limites liées à l'écoulement du lubrifiant et à l'environnement dans lequel fonctionne le système lubrifié.
- une équation géométrique qui définit l'épaisseur du film :
si le champ de pression dans le film reste faible pour que la déformation élastique soit négligeable devant l'épaisseur du film, l'équation géométrique est uniquement fonction des coordonnées de l'espace et du temps.

III. 2 Les lois générales de la lubrification aérodynamique par un fluide newtonien et compressible

Les équations générales de la lubrification aérodynamique permettent, compte tenu des conditions géométriques et cinématiques, de déterminer les caractéristiques de l'écoulement de l'air en film mince et particulièrement sa portance aérodynamique.

Elles sont déduites à partir des équations de la mécanique des milieux continus, appliquées à des fluides newtoniens et compressibles.

Quand la température est supposée constante en tout point du milieu fluide; c'est à dire lorsque le régime d'écoulement est isotherme, l'équation de l'énergie fournie par la thermodynamique n'est plus à prendre en compte.

Dans le cas d'un fluide newtonien et compressible les équations générales sont les suivantes:

- Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad , i = 1, 2, 3 \quad \text{(III-1)}$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{(III-2)}$$

- Loi de comportement rhéologique pour un fluide compressible et newtonien :

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda D_{kk}) \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad \text{(III-3)}$$

$i, j = 1, 2, 3$ où $D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ est le tenseur des taux de déformation.

III.3 Equations de Navier - Stokes

En reportant l'équation du comportement rhéologique (III-3) dans l'équation de la dynamique (III-2), on obtient les équations de Navier - Stokes:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{(III-4)}$$

Dans ces équations :

x_i, t : variables d'espace et de temps ;

u_i : composante de la vitesse d'écoulement ;

f_i : forces massiques extérieures ;

ρ : masse volumique du fluide ;

σ_{ij} : tenseur des contraintes ;

p : pression dans le fluide ;

λ, μ : constantes de Navier du fluide.

δ_{ij} : symbole de Kronecker $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

$i, j = 1, 2, 3$ avec $\frac{D(\bullet)}{Dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + u_j \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_j}$ (dérivée totale ou particulaire)

Les équations de Navier - Stokes (III-4) et de conservation de la masse ou de continuité (III-1) permettent, après application des conditions limites de déterminer la répartition de pression dans le fluide visqueux étudié.

Pour un écoulement en film mince ($\frac{h}{L} \ll 1$) (Fig. III-1), les équations (III-4) se simplifient sensiblement et deviennent [2] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \end{array} \right. \quad \text{(III-5.a)}$$

Ou encore en faisant un changement de variables pour passer de la notation indicielle à la notation classique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad \text{(III-5.b)}$$

avec $(x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$ et $(u, v, w) \equiv (u_1, u_2, u_3)$

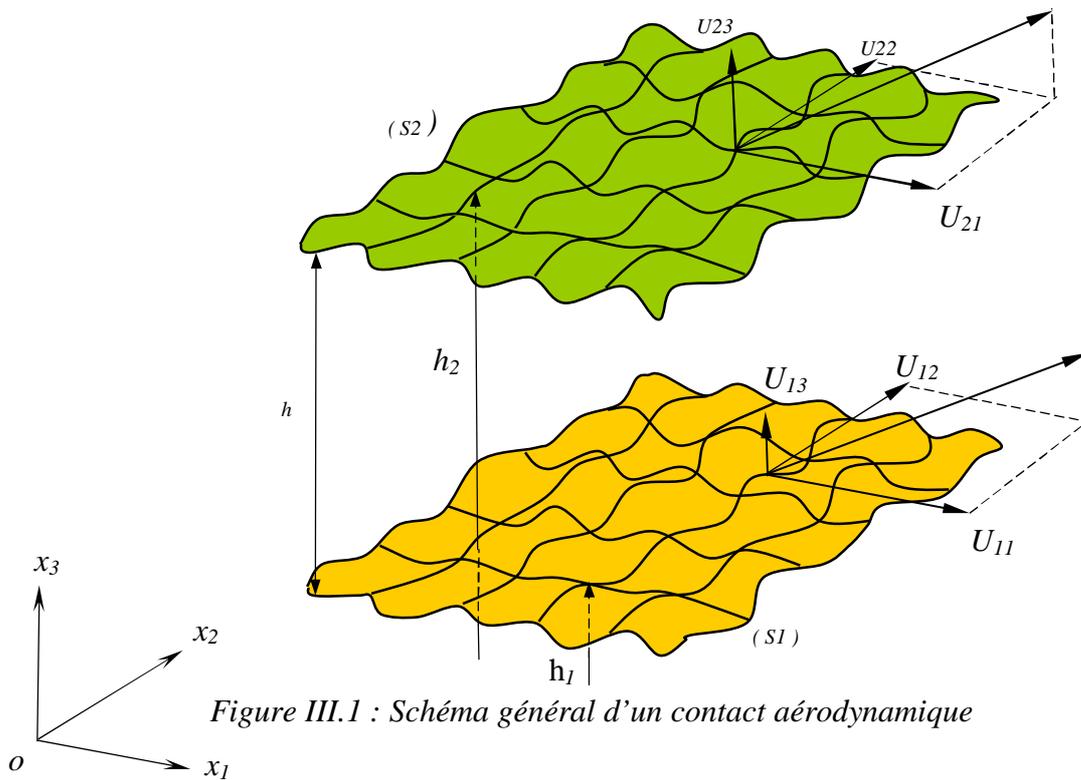


Figure III.1 : Schéma général d'un contact aérodynamique

III.4 Application à un palier aérodynamique :

Dans le cadre de la lubrification des paliers aérodynamiques, certaines hypothèses simplificatrices sont adoptées.

Ces hypothèses peuvent se répartir en trois groupes :

- Hypothèses liées à la géométrie du palier;
- Hypothèses liées au fluide;
- Hypothèses générales indépendantes du milieu fluide.

a) Hypothèses liées à la géométrie du palier :

Dans un palier aérodynamique à feuilles, Fig. III.2, l'épaisseur du film lubrifiant h est très petite par rapport aux autres dimensions du palier (longueur et diamètre), on est en régime de lubrification par film mince visqueux.

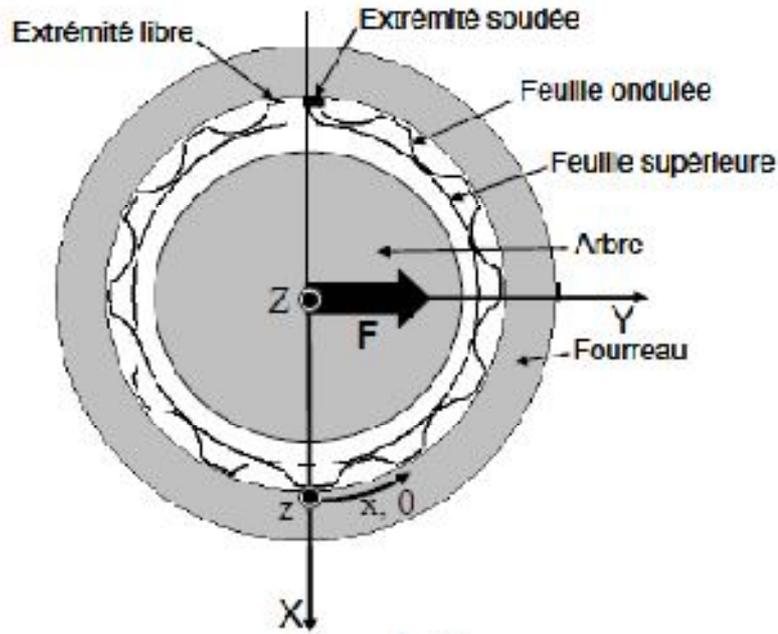


Figure III.2 : Schématisation d'un palier aérodynamique à feuille

b) Hypothèses liées au fluide lubrifiant :

Le fluide est assimilable à un gaz parfait et l'écoulement est isotherme, c'est-à-dire $T=cste$, la viscosité du fluide ne varie pas suivant l'épaisseur du contact.

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = 0$$

c) Hypothèses générales :

- Les forces massiques et les couples de volume sont négligés;
- L'écoulement est laminaire et les forces d'inertie ne sont pas prises en considération;
- Il n'y a pas de glissement au niveau du contact fluide-parois, cette hypothèse permet d'écrire les conditions de non glissement des particules de fluide au niveau des parois qui servent comme conditions aux limites sur les vitesses lors de l'intégration des équations (III-5);
- Les surfaces de l'arbre et du coussinet sont supposées lisses (non rugueuses et non poreuse).

III.5 Dérivation de l'équation de Reynolds pour un fluide newtonien et compressible :

Nous avons utilisé jusqu'ici les notations x_i pour les variables d'espace et U_i pour les composantes de la vitesse d'écoulement du fluide, il sera plus pratique d'utiliser les nouvelles notations (x, y, z) et (u, v, w) pour les mêmes éléments.

Pour un écoulement permanent ($\partial/\partial t = 0$) plan (x-y) figure (III-3), l'équation de continuité et les équations de mouvement du fluide se réduisent à:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (\text{III-6})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{III-7})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{III-8})$$

Les conditions aux limites sur la vitesse sont:

$$y=0 \text{ (surface du coussinet): } u = U_1, v = V_1 = 0, w = W_1 \quad (\text{III-9})$$

$$y=h \text{ (surface de l'arbre): } u = U_2, v = V_2 = \frac{Dh(x,z,t)}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{dh}{dx} + W_2 \frac{dh}{dz}$$

$$\text{et } w = W_2$$

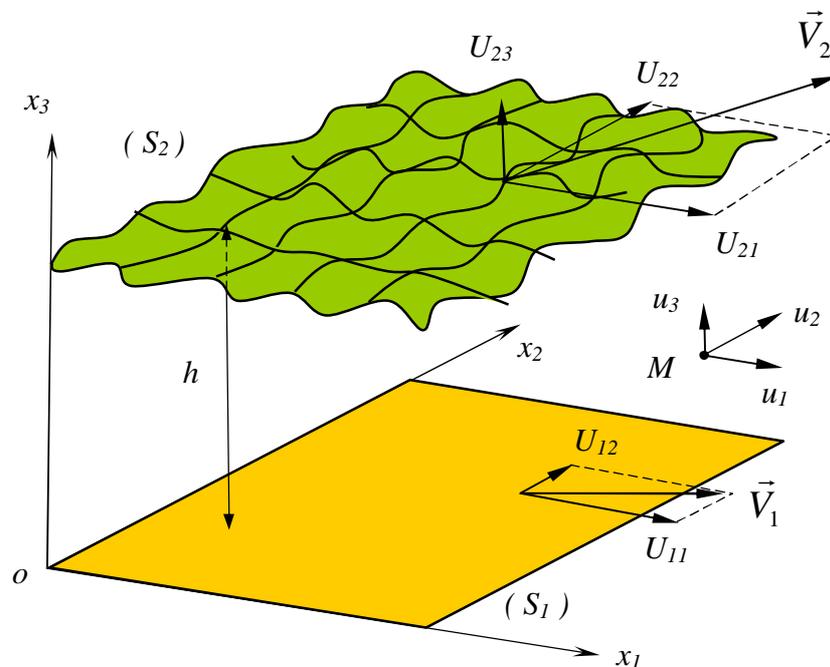


Figure III.3 : Schéma du contact aérodynamique selon la théorie de Reynolds (palier développé)

Après deux intégrations par rapport à y des équations (III-7) et (III-8), on obtient l'expression de la composante de la vitesse suivant la direction x :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial p}{\partial x} \int \frac{y}{\mu} dy + A(x, z) \int \frac{dy}{\mu} + C(x, z) \\ w = \frac{\partial p}{\partial z} \int \frac{y}{\mu} dy + B(x, z) \int \frac{dy}{\mu} + D(x, z) \end{cases} \quad (\text{III-10})$$

Si par hypothèse, la viscosité est indépendante de y , $\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = 0$, l'expression des composantes de la vitesse devient :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + \frac{A}{\mu} y + C \\ w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + \frac{B}{\mu} y + D \end{cases} \quad (\text{III-11})$$

En utilisant les conditions aux limites (III-9) les deux composantes de la vitesse d'écoulement s'expriment :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - yh) + \frac{y}{h} U_2 + U_1 \left(1 - \frac{y}{h}\right) \\ w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - yh) + \frac{y}{h} W_2 + W_1 \left(1 - \frac{y}{h}\right) \end{cases} \quad (\text{III-12})$$

Les premiers termes des deux équations (III-12), représentent l'écoulement de Hagen-Poiseuille (dû au gradient de pression) et les seconds termes représentent l'écoulement de Couette (dû au déplacement des parois).

L'équation de Reynolds est obtenue en introduisant l'équation (III-12) dans l'équation de continuité (III-6) et en intégrant à travers l'épaisseur du film :

$$\int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dy + \int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dy + \int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dy = 0$$

L'intégration de cette équation à travers l'épaisseur du film donne :

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (\text{III-13})$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} I_1 = \int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dy \\ I_2 = \int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dy = [\rho v]_0^h = \rho V_2 \\ I_3 = \int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dy \end{cases}$$

Le calcul des intégrales I_1 et I_2 seffectue à l'aide du théorème de Leibnitz :

$$\int_{h_1(x,z,t)}^{h_2(x,z,t)} \frac{\partial F(x,y,z,t)}{\partial x_i} dy = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{h_1}^{h_2} F(x,y,z,t) dy - F(x, h_2, z, t) \frac{\partial h_2}{\partial x_i} + F(x, h_1, z, t) \frac{\partial h_1}{\partial x_i} \quad i = 1,2,3 \quad (\text{III-14})$$

III.6. Equation de Reynolds dans le cas d'un palier lisse

Les paliers lisse sont fréquemment utilisés, les plus simples sont constitués d'un arbre en acier traité dans un alésage en deux feuilles supérieure et ondulée en présence d'un film lubrifiant. On les rencontre dans les compresseurs, les turbo-machines, les alternateurs, les réducteurs,...etc.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h}{2\mu} (U_1 + U_2) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h}{2\mu} (W_1 + W_2) \right) + \rho \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (\text{III-15})$$

Dans un palier où l'arbre est muni d'un mouvement de rotation dans un alésage fixe, le jeu radial C étant très petit devant R du coussinet (ou l'arbre). On peut négliger, la courbure du film et développer le palier suivant sa direction circonférentielle. Dans ces conditions, la surface du coussinet est confondue avec le plan (O,x,z) du référentiel. Si les axes de l'arbre et du coussinet sont parallèles, la surface de l'arbre est présentée par une surface telle que $y=h(x)$.

Dans le cas d'un palier, l'équation de Reynolds (III-15) se simplifie sensiblement et prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6U_2 \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + 12 \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (\text{III-16})$$

Soit en remplaçant x par $R\theta$, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{6U_2}{R} \frac{\partial(\rho h)}{\partial \theta} \quad (\text{III-17})$$

avec : $U_2 = \omega R$

L'air étant assimilé à un gaz parfait dont l'équation d'état est :

$$p = \rho \mathfrak{R} T \quad (\text{III-18})$$

où \mathfrak{R} est la constante des gaz parfaits.

Compte tenu de l'équation d'état (III-18), l'équation de Reynolds compressible s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(p h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(p h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu\omega R^2 \frac{\partial(p h)}{\partial \theta} + 12\mu R^2 \frac{\partial(p h)}{\partial t} \quad (\text{III-19})$$

Les conditions aux limites nécessaires au calcul du champ de pression sont :

$$\begin{cases} p(\theta = 0, z) = p_a \\ p(\theta = 2\pi, z) = p_a \end{cases}, \quad \begin{cases} p\left(\theta, z = -\frac{L}{2}\right) = p_a \\ p\left(\theta, z = +\frac{L}{2}\right) = p_a \end{cases}$$

Sous la forme (III-19), l'équation de REYNOLDS est fortement non linéaire, sa résolution ne peut pas être effectuée analytiquement, pour cela, nous avons recours aux méthodes numériques tels que la méthode des différences finies ou des éléments finis.

III.7 Equation géométrique du film aérodynamique :

Dans ce paragraphe, nous donnons l'expression de l'épaisseur du film lubrifiant dans le cas de palier rigide et compliant.

En première approximation, la compliance des feuilles ondulées peut être calculée en utilisant le modèle de Heshmat [3,4] figure (III 4) :

$$K = \frac{2s}{E} \left(\frac{1}{t_b} \right)^3 (1 - \nu^2) \quad (\text{III-20})$$

Où E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau constituant les feuilles.

Dans le cas d'un palier aligné, l'épaisseur du film aérodynamique est alors calculée par la relation suivante:

$$h = C + e \cos\theta + K(p - p_a) \quad (\text{III-21})$$

Où :

e : est l'excentration tel que $e = |\overrightarrow{O_c O_a}|$

C : est le jeu radial du palier, $C = R_c - R_a$

θ : la coordonnée circonférentielle mesurée à partir de la ligne des centres,

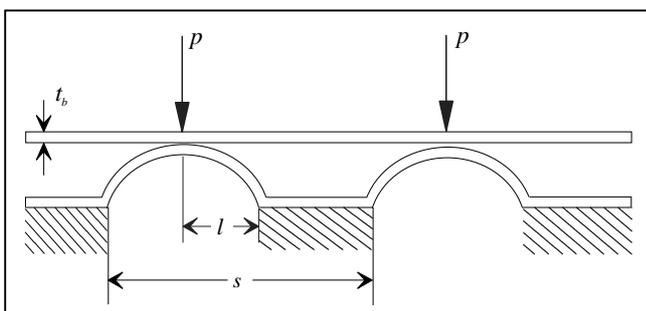
Sous forme adimensionnelle l'équation (III-21) devient,

$$\tilde{h} = 1 + \varepsilon \cos\theta + \alpha (\tilde{p} - 1) \quad (\text{III-22})$$

Où $\varepsilon = \frac{e}{c}$ l'excentricité relative de fonctionnement variant de 0 à 1, et α étant le nombre de compliance adimensionné défini par la relation suivante :

$$\alpha = \frac{2p_a s}{EC} \left(\frac{1}{t_b}\right)^3 (1 - \nu^2) \quad (\text{III-23})$$

Les tableaux 1 et 2, rassemblent respectivement les différentes caractéristiques géométriques du palier à feuilles et les caractéristiques physiques du lubrifiant qui est l'air nécessaires au calcul.



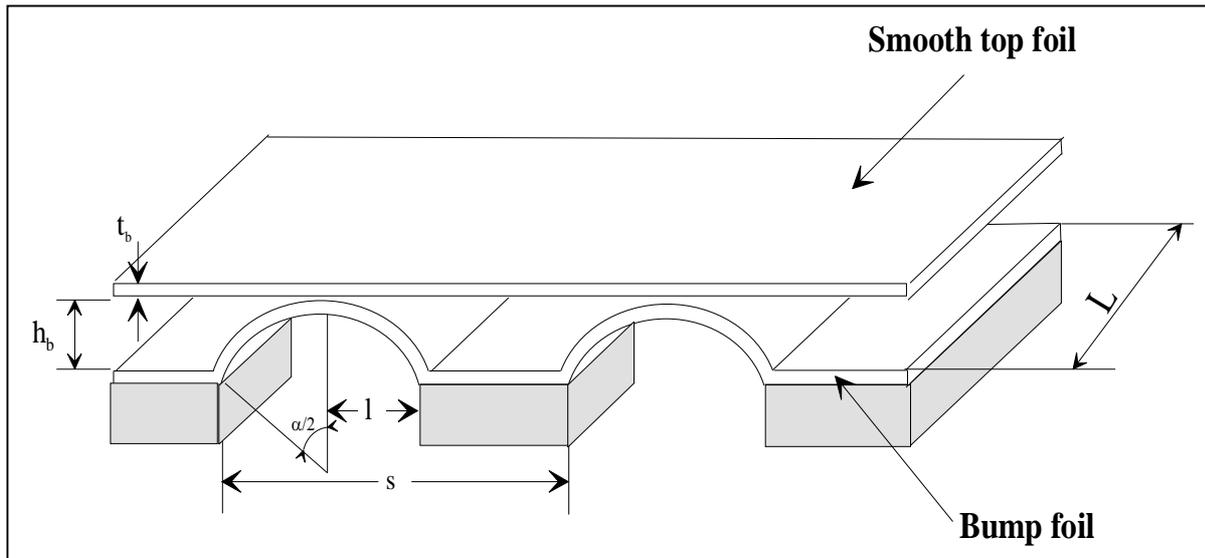


Figure III.4 : Support compliant d'un palier à feuilles

Tableau 1: Caractéristiques géométriques du palier à feuilles

Paramètre	Symbole	Unité	Valeur
Jeu radial	C	m	50×10^{-6}
Rayon du palier	R	m	19.05×10^{-3}
Epaisseur des feuilles	t_b	m	0.1016×10^{-3}
Longueur des bumps	$2l$	m	3.556×10^{-3}
Pas des bumps	S	m	4.572×10^{-3}
Module de Young des feuilles	E	Pa	200×10^9
Coefficient de Poisson des feuilles	ν		0.31

Tableau 2: Caractéristiques physiques du fluide lubrifiant (air)

Paramètre	Symbole	Unité	Valeur
Pression atmosphérique	P_a	Pa	1.013×10^5
Viscosité de l'air	μ	$Pa.s$	184.6×10^{-7}
Masse volumique de l'air	ρ	kg/m^3	1.1614

III.8. Performances statiques du palier :

III. 8.1. Composantes de la portance aérodynamique :

Les composantes de la portance aérodynamique dans le repère (ε, \emptyset) sont obtenues par l'intégration du champ de pression aérodynamique après résolution de l'équation (III-19) sur la surface de l'arbre:

$$F_{\varepsilon} = R \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p \cos \theta d\theta dz \quad (\text{III-24})$$

$$F_{\Phi} = R \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p \sin \theta d\theta dz$$

III. 8.2. Angle de calage :

L'angle de calage du palier est calculé par la relation suivante:

$$\Phi = \arctg \left(-\frac{F_{\Phi}}{F_{\varepsilon}} \right) \quad \text{tel que : } 0 < \Phi < \frac{\pi}{2} \quad (\text{III-25})$$

II .9. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les lois fondamentales des milieux continus écrites pour un fluide newtonien et compressible.

L'utilisation des hypothèses liées à la géométrie du palier, hypothèses liées au fluide, hypothèses générales indépendantes des milieux fluides permettra de simplifier sensiblement les équations de mouvement du fluide.

La dérivation de l'équation de Reynolds à partir des équations de mouvement et de continuité a nécessité l'emploi de plusieurs hypothèses simplificatrices.

Le modèle élastique des feuilles qui choisi est celui développé par Heshmat [32], la simplicité de ce modèle nous permet de calculer avec une précision suffisante la déformation radiale des feuilles dues à la pression aérodynamique.

Chapitre IV

Etude statique du palier aérodynamique à feuilles infiniment long (1-D)

Chapitre IV

Etude statique du palier aérodynamique à feuilles infiniment long (1-D)

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre, le cas du palier aérodynamique circulaire infiniment long est étudié en régime de fonctionnement stationnaire, figure IV.1. Cette étude a pour objectif principal de présenter et de valider la modélisation statique et dynamique du film fluide compressible. Il s'agit d'une étape importante pour pouvoir aborder l'étude du palier à feuilles avec un niveau de connaissances satisfaisant. On s'intéressera donc tout d'abord à la modélisation statique du palier rigide, puis on différenciera l'étude dynamique linéaire (valable pour de faibles déplacements de l'arbre) de l'étude dynamique non linéaire (pouvant prendre en compte des déplacements importants).

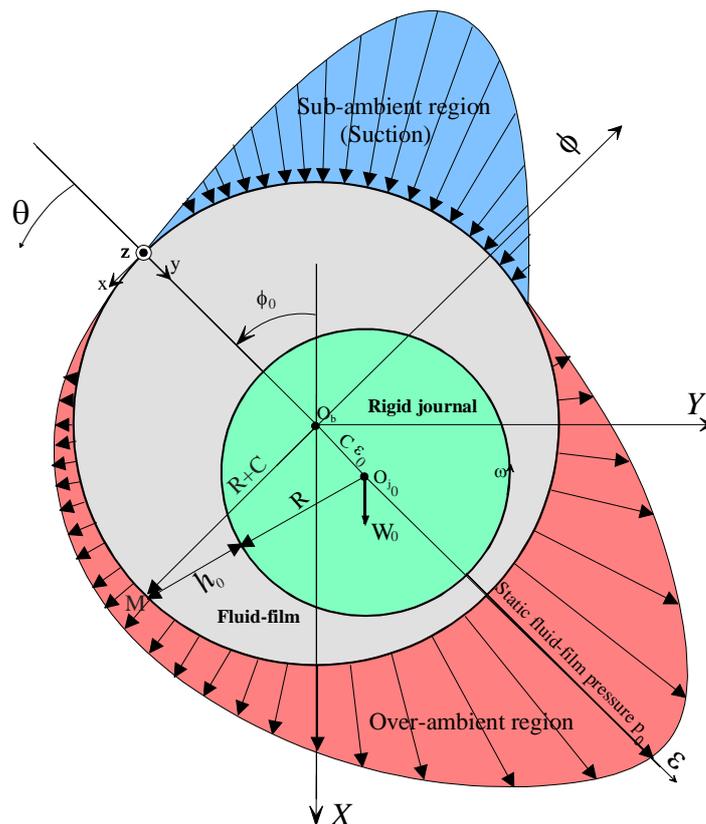


Figure IV.1 Géométrie du palier aérodynamique rigide

L'équation de Reynolds (II.15) est une équation différentielle partielle (EDP) du second ordre de type elliptique. à caractère non linéaire dont l'inconnue est la pression p

En outre, les géométries souvent complexes des paliers ainsi que les conditions aux limites ne permettent pas toujours d'envisager une solution analytique à cette équation.

Pour ce type de paliers, les méthodes actuelles utilisées sont pour la plupart des méthodes numérique telles que les différences finies (MDF), les éléments finis (MEF) ou les volumes finis (MVF).

La méthode de discrétisation présentée dans ce chapitre est celle des différences finies unidimensionnelles centrées.

IV.2. Discrétisation de l'équation de Reynolds compressible stationnaire :

La méthode des différences finies est utilisée dans le cas du palier infiniment long où l'écoulement du fluide est unidimensionnel et s'effectue la discrétisation circonférentielle du palier.

Dans cette méthode simple à mettre en œuvre pour des géométries de film et d'alimentation régulières, le domaine est discrétisé en rectangle élémentaire appelés mailles

La pression aux nœuds du maillage est l'inconnue nodale, les dérivées partielles de la pression sont évaluées en un point du maillage (nœud) en fonction des valeurs de la pression aux points environnants.

Dans un palier, les rayons de l'arbre et du coussinet étant voisins, la courbure du film est négligeable, le palier est alors développé suivant sa direction circonférentielle on est ainsi ramené à un problème unidimensionnelle (1D), la figure (III-1) représente la discrétisation du palier par la méthode des différences finies (1D).[7]

Le palier étant infiniment long c'est-à-dire $L/D \rightarrow \infty$, dans ces conditions, le domaine de discrétisation de l'équation de Reynolds se réduit à $(0, 2\pi)$

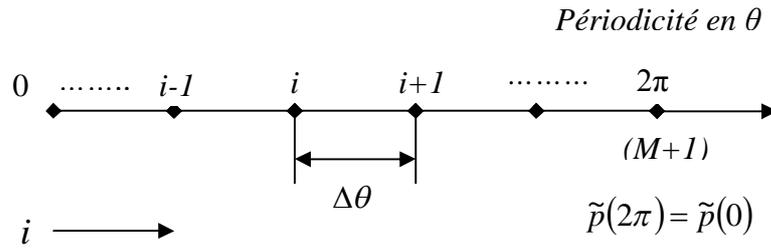


Figure IV.2 : Maillage du film lubrifiant par la méthode des différences finies centrées

IV.3. Solution du problème d'interaction fluide-structure en régime isotherme

IV.3.1. Equation de Reynolds non linéaire en variables sans dimension

Pour le traitement numérique, il convient d'écrire l'équation de Reynolds en variables adimensionnées.

Si on pose :

$$\theta = \frac{x}{R_a}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{p_a}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{C}, \quad (IV-1)$$

L'équation de Reynolds (II-15) après adimensionnement s'écrit :

$$\frac{d}{d\theta} \left(\tilde{p} \tilde{h}^3 \frac{d\tilde{p}}{d\theta} \right) = \Lambda \frac{d}{d\theta} (\tilde{p} \tilde{h}) \quad (IV-2)$$

Les conditions aux limites nécessaires au calcul du champ de pression sont :

$$\tilde{p}(\theta = 0) = \tilde{p}(\theta = 2\pi) = 1$$

Il faut tenir compte du nombre de compressibilité adimensionnel Λ , il dépend de la viscosité dynamique du gaz μ , de la vitesse de rotation de l'arbre ω , du jeu radial C et de la pression atmosphérique p_a son expression est la suivante :

$$\Lambda = \frac{6\mu\omega}{p_a} \left(\frac{R_a}{C} \right)^2 \quad (IV-3)$$

IV.4.2. Résolution du système d'équations non linéaires par la méthode itérative de Newton Raphson amortie

Les méthodes de résolution des systèmes non linéaires sont nombreuses . Nous ne présentons que la méthode de *Newton-Raphson* qui est la plus importante et la plus utilisée en pratique.

Dans cette section, nous examinons les systèmes non linéaires et nous montrons comment les résoudre à l'aide d'une suite de problème linéaire, auxquels on peut appliquer diverses techniques de résolution comme la décomposition *LU*.

L'équation (III-2) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f(\tilde{p}) = \frac{d}{d\theta} \left(\tilde{p} \tilde{h}^3 \frac{d\tilde{p}}{d\theta} \right) - \Lambda \frac{d}{d\theta} (\tilde{p} \tilde{h}) = 0 \quad (IV-5)$$

Le développement de l'équation (IV-5) donne :

$$f(\tilde{p}) = \tilde{h}^3 \frac{d\tilde{p}}{d\theta} \frac{d\tilde{p}}{d\theta} + 3\tilde{p}\tilde{h}^2 \frac{d\tilde{h}}{d\theta} \frac{d\tilde{p}}{d\theta} + \tilde{p}\tilde{h}^3 \frac{d^2\tilde{p}}{d\theta^2} - \Lambda\tilde{p} \frac{d\tilde{h}}{d\theta} - \Lambda\tilde{h} \frac{d\tilde{p}}{d\theta} = 0, \quad (IV-6)$$

La discrétisation de l'équation (III-6) par la méthode des différences finies centrées donne :

$$f(\tilde{p}_i) = \tilde{h}_i^3 \frac{(\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_{i-1}))(\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_{i-1})}{2\Delta\theta \quad 2\Delta\theta} + 3\tilde{p}_i \tilde{h}_i^2 \frac{(\tilde{h}_{i+1} - \tilde{h}_{i-1}))(\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_{i-1})}{2\Delta\theta \quad 2\Delta\theta} + \tilde{p}_i \tilde{h}_i^3 \frac{(\tilde{p}_{i+1} - 2\tilde{p}_i + \tilde{p}_{i-1}))}{\Delta\theta^2} - \Lambda\tilde{p}_i \frac{(\tilde{h}_{i+1} - \tilde{h}_{i-1})}{2\Delta\theta} - \Lambda\tilde{h}_i \frac{(\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_{i-1})}{2\Delta\theta} = 0, \quad (IV-7)$$

Où l'indice i varie comme suit :

$$i=0, M-1$$

$$\text{avec } \tilde{h}_i = 1 + \varepsilon \cos \theta_i + \alpha(1 - \tilde{p}_i)$$

α est le coefficient de la matrice de compliance.

L'équation (III-7) est de la forme :

$$f_i(\tilde{p}_{i-1}, \tilde{p}_i, \tilde{p}_{i+1}) = 0 \quad (IV-8)$$

Le problème consiste à trouver le ou les vecteurs $\mathbf{P} = \langle \tilde{p}_1 : \tilde{p}_2 : \tilde{p}_3 : \dots : \tilde{p}_n \rangle$ vérifiant les n équations non linéaires suivantes :

$$\begin{cases} f_1(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \dots, \tilde{p}_n) = 0 \\ f_2(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \dots, \tilde{p}_n) = 0 \\ f_3(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \dots, \tilde{p}_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \dots, \tilde{p}_n) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV-9})$$

Où les f_i sont des fonctions de n variables $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \dots, \tilde{p}_n$ que nous supposons différentiables.

Le problème (III-9) apparaît comme une généralisation au cas n -dimensionnel du problème $f(\tilde{p}) = 0$.

De même qu'une équation non linéaire $f(\tilde{p}) = 0$ peut posséder plusieurs racines, le système (III-9) peut posséder plusieurs solutions.

L'application de cette méthode à un système de deux équations non linéaires est suffisante pour illustrer le cas général.

Considérons donc le système :

$$\begin{cases} f_1(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = 0 \\ f_2(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV-10})$$

Soit $(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)})$, une approximation initiale ou un estimé initial de la solution,

Le but de ce qui suit est de déterminer une correction $(\delta\tilde{p}_1^{(0)}, \delta\tilde{p}_2^{(0)})$ à $(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)})$ de telle sorte que :

$$\begin{cases} f_1(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = f_1(\tilde{p}_1^{(0)} + \delta\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)} + \delta\tilde{p}_2^{(0)}) = 0 \\ f_2(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = f_2(\tilde{p}_1^{(0)} + \delta\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)} + \delta\tilde{p}_2^{(0)}) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV-11})$$

Pour déterminer $(\delta\tilde{p}_1^{(0)}, \delta\tilde{p}_2^{(0)})$, il suffit maintenant de faire un développement en séries de Taylor de f_1 et f_2 au point $(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)})$ tel que :

$$0 = f_1(\tilde{p}_1^{(0)} + \delta\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)} + \delta\tilde{p}_2^{(0)}) = f_1(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)}) + \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_1}(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)})\delta\tilde{p}_1^{(0)} + \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_2}(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)})\delta\tilde{p}_2^{(0)} +$$

termes d'ordre ≥ 2

$$0 = f_2(\tilde{p}_1^{(0)} + \delta\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)} + \delta\tilde{p}_2^{(0)}) = f_2(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)}) + \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_1}(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)})\delta\tilde{p}_1^{(0)} + \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_2}(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)})\delta\tilde{p}_2^{(0)} +$$

termes d'ordre ≥ 2

Pour déterminer $(\delta\tilde{p}_1^{(0)}, \delta\tilde{p}_2^{(0)})$, il suffit de négliger les termes d'ordre supérieur et d'écrire :

$$-\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_{(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_2} \end{bmatrix}_{(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)})} \begin{Bmatrix} \delta\tilde{p}_1^{(0)} \\ \delta\tilde{p}_2^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-12})$$

Il convient de remarquer que lorsqu'on néglige les termes d'ordre supérieur, la solution $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ devient une approximation qui sera prise comme nouveau point de départ $(\tilde{p}_1^{(1)}, \tilde{p}_2^{(1)})$ de la prochaine approximation tel que :

$$\begin{cases} \tilde{p}_1^{(1)} = \tilde{p}_1^{(0)} + \delta\tilde{p}_1^{(0)} \\ \tilde{p}_2^{(1)} = \tilde{p}_2^{(0)} + \delta\tilde{p}_2^{(0)} \end{cases} \quad (\text{IV-13})$$

Ainsi, on trouve la formule de récurrence de *Newton-Raphson* pour deux inconnues :

$$-\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_{(\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_2} \end{bmatrix}_{(\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)})} \begin{Bmatrix} \delta\tilde{p}_1^{(k)} \\ \delta\tilde{p}_2^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-14})$$

$$\begin{cases} \tilde{p}_1^{(k+1)} \\ \tilde{p}_2^{(k+1)} \end{cases} = \begin{cases} \tilde{p}_1^{(k)} \\ \tilde{p}_2^{(k)} \end{cases} + \begin{cases} \delta\tilde{p}_1^{(k)} \\ \delta\tilde{p}_2^{(k)} \end{cases} ; \quad k=0, 1, 2, \dots, k_{\max}$$

Où encore

$$\begin{cases} \tilde{p}_1^{(k+1)} \\ \tilde{p}_2^{(k+1)} \end{cases} = \begin{cases} \tilde{p}_1^{(k)} \\ \tilde{p}_2^{(k)} \end{cases} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial p_2} \end{bmatrix}_{(\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)})} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_{(\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)})} \quad (\text{IV-15})$$

Qui peut s'écrire aussi :

$$\begin{cases} \tilde{p}_1^{(k+1)} \\ \tilde{p}_2^{(k+1)} \end{cases} = \begin{cases} \tilde{p}_1^{(k)} \\ \tilde{p}_2^{(k)} \end{cases} - \frac{1}{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_2} \end{pmatrix}_{(\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)})}} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_2} & -\frac{\partial f_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial p_1} \end{bmatrix}_{(\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)})} \begin{Bmatrix} f_1(\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)}) \\ f_2(\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)}) \end{Bmatrix}$$

De manière plus générale (système de n équation), on pose :

$$\sum_{j=1}^n E_{ij}^{(k)} \delta \tilde{p}_j^{(k)} = -f_i^{(k)} \quad (\text{IV-16})$$

Où : $E_{ij}^{(k)} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial \tilde{p}_j} \right|_{P^{(k)}}$ sont les composantes de la matrice Jacobienne tel que :

$$E(P^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_1}(P^{(k)}) & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_2}(P^{(k)}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_n}(P^{(k)}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_1}(P^{(k)}) & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_2}(P^{(k)}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_n}(P^{(k)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \tilde{p}_1}(P^{(k)}) & \frac{\partial f_n}{\partial \tilde{p}_2}(P^{(k)}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \tilde{p}_n}(P^{(k)}) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-17})$$

$$P^{(k)} = \langle \tilde{p}_1^{(k)} ; \tilde{p}_2^{(k)} ; \dots ; \tilde{p}_n^{(k)} \rangle$$

et :

$$f(P^{(k)}) = \begin{Bmatrix} f_1(P^{(k)}) \\ f_2(P^{(k)}) \\ \vdots \\ f_n(P^{(k)}) \end{Bmatrix} ; \quad \delta P^{(k)} = \begin{Bmatrix} \delta \tilde{p}_1 \\ \delta \tilde{p}_2 \\ \vdots \\ \delta \tilde{p}_n \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-18})$$

Il est important de souligner que si l'estimé initial n'est pas très proche de la solution la méthode ne converge pas, dans notre cas, l'estimé initial est égale à 1, c'est-à-dire la pression initial égale à la pression atmosphérique p_a .

IV 5. L'algorithme de Newton-Raphson amorti

Le processus général de résolution du problème d'interaction fluide-structure est résumé comme suit:

L'algorithme de *Newton-Raphson* amorti s'écrit :

$$\tilde{p}_i^{(k+1)} = \tilde{p}_i^{(k)} + \lambda^{(k)} \delta \tilde{p}_i^{(k)} \quad (\text{IV-19})$$

où $\lambda^{(k)}$ est le coefficient de relaxation

$\lambda^{(k)} = 1$: méthode classique de *Newton*

$\lambda^{(k)} < 1$: méthode de *Newton* dite amortie

IV 6. Schéma général de résolution du problème d'interaction fluide-structure

1. Etant donné ε un critère d'arrêt
2. Etant donné k_{\max} le nombre maximal d'itération
3. Etant donné $p^{(0)} = \langle p_1^{(0)}; p_2^{(0)}; \dots; p_n^{(0)} \rangle$ une approximation initiale de la solution du système
- 4 Calcul de la matrice jacobienne E_{ij} par différence finis décentrés
- 5 Résoudre le système linéaire par la méthode d'élimination de *Gauss* avec pivotation partielle après décomposition de la matrice du système en un produit de deux matrices triangulaires inférieure et supérieure

$$\sum_{j=1}^{M-1} E_{ij} \delta \tilde{p}_j = -f_i$$

$$6. \text{ Calculer } \tilde{p}_i^{(k+1)} = \tilde{p}_i^{(k)} + \lambda \delta \tilde{p}_i^{(k)}$$

$$7. \text{ Si } \frac{|\tilde{p}_i^{(k+1)} - \tilde{p}_i^{(k)}|}{|\tilde{p}_i^{(k+1)}|} < \varepsilon \text{ et } |f_i^{(k+1)}| < \varepsilon$$

- Convergence atteinte
- Arrêt

$$8 \text{ Si on pose } k \leftarrow k + 1$$

9 Retour à l'étape 4 pour une autre itération

Il existe une variante de la méthode de *Newton* qui évite le calcul des n^2 dérivées et qui ne nécessite que les n fonctions $f_1(P)$. La méthode de *Newton* modifiée consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences centrées ou décentrées. Soit :

- Approximation du second ordre par différences centrées $o(\delta^2)$:

$$E_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_1}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n) \approx \frac{f_1(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{j-1}, \tilde{p}_j + \delta, \dots, \tilde{p}_n) - f_1(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{j-1}, \tilde{p}_j - \delta, \dots, \tilde{p}_n)}{\delta} \quad (\text{IV-4a})$$

- Approximation du premier ordre par différences décentrées $o(\delta)$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_1} \approx \frac{f_1(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{j-1}, \tilde{p}_j + \delta, \dots, \tilde{p}_n) - f_1(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{j-1}, \tilde{p}_j - \delta, \dots, \tilde{p}_n)}{\delta} \quad (\text{IV-4b})$$

Cette approximation introduit une petite erreur dans le calcul de la matrice Jacobienne, mais généralement la convergence est quant même très rapide.

Dans ces deux approximations, la valeur de δ est 10^{-4} .

L'étude du comportement statique du palier aérodynamique a conduit à l'écriture de programmes de calcul en langage MS Fortran et Matlab.

Ces programmes permettent de déterminer le champ de pression aérodynamique dans le palier, la géométrie du film fluide, l'angle de calage et la portance aérodynamique.

Les données des programmes sont :

- Le nombre de compressibilité sans dimension Λ ,
- Le nombre de compliance sans dimension α ,
- La valeur du facteur de relaxation,
- L'excentricité relative ε .

L'étude de l'influence du nombre de compressibilité Λ et de l'excentricité relative ε sur le comportement statique du palier aérodynamique sera envisagée dans ce chapitre.

IV.8. Résultats et interprétation :

IV.8.1. Validation du programme de calcul :

Nous avons comparé la pression aérodynamique adimensionnée générée dans le palier et ce pour différentes valeurs du nombre de compressibilité afin de valider notre programme de calcul, le tracé de la pression aérodynamique est en bonne concordance avec les résultats obtenus par Constantinescu [8].

Les figures (IV.1a) et (IV.1b) représentent les variations circonférentielles du champ de pression aérodynamique adimensionné pour une excentricité relative de fonctionnement $\varepsilon=0.50$ et différentes valeurs du nombre de compressibilité Λ (0.125, 0.780, 1.332, 2.358, 5.004 et 20.0) et cela pour un palier infiniment long, on observe que la pression aérodynamique maximale augmente avec Λ ou la vitesse de rotation.

La validation du programme a été aussi faite en comparant les valeurs de la portance du film d'air avec celles publiées par Constantinescu [8] pour différentes valeurs de Λ et ε . Nous remarquons également une bonne concordance entre les deux résultats (fig. IV-2).

IV.8.3. Etude de l'effet de la compliance des feuilles sur la géométrie du film

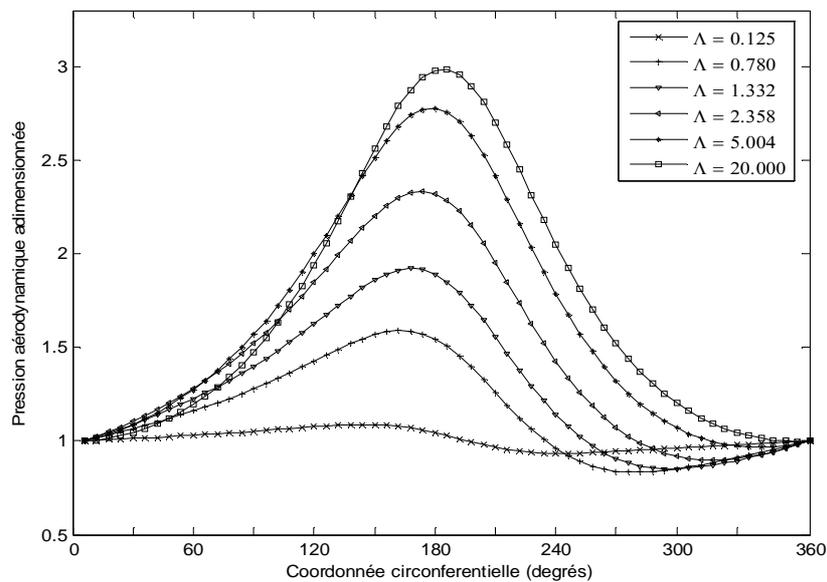
Les figures (IV.3a) et (IV.3b) représentent l'évolution circonférentielle de l'épaisseur du film aérodynamique adimensionnée pour les deux cas compliant ($\alpha=0.5$) et indéformable ($\alpha=0.0$) pour une excentricité relative de fonctionnement $\varepsilon=0.1$ et $\varepsilon=0.9$ respectivement est cela pour un nombre de compressibilité $\Lambda=1.0$.

Les résultats obtenus montrent que les valeurs de l'épaisseur du film aérodynamiques adimensionnée dans le cas d'un palier indéformable sont toujours inférieure à celles d'un palier compliant pour les deux valeurs de l'excentricité relative $\varepsilon=0.1$ et $\varepsilon=0.9$.

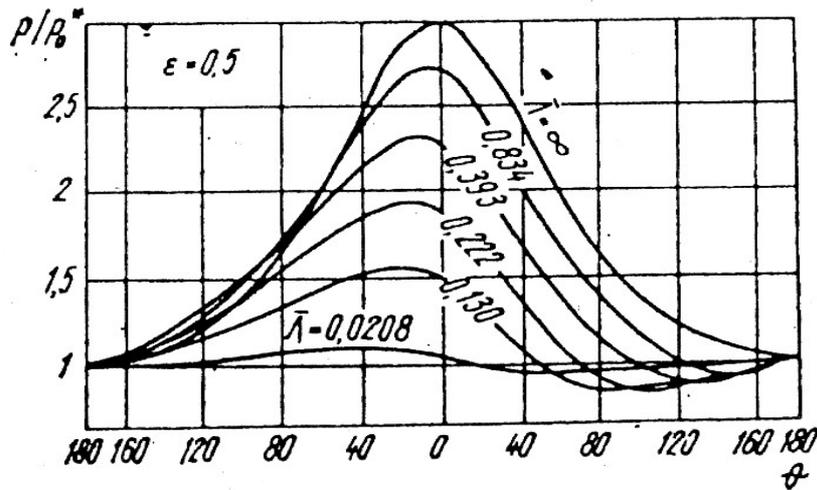
IV.8.4. Etude de l'effet de la compliance des feuilles sur la pression aérodynamique

Les figures (IV.4a) et (IV.4b) représentent l'évolution circonférentielle de la pression aérodynamique adimensionnée pour les deux cas compliant ($\alpha=0.5$) et indéformable ($\alpha=0.0$) pour une excentricité relative de fonctionnement $\varepsilon=0.1$ et $\varepsilon=0.9$ respectivement est cela pour un nombre de compressibilité $\Lambda = 1.0$.

Contrairement aux résultats du film lubrifiant, le champ de la pression aérodynamique dans le cas d'un palier indéformable est supérieur à celui d'un palier compliant pour les deux valeurs de l'excentricité relative $\varepsilon=0.1$ et $\varepsilon=0.9$, c'est à dire le cas d'un palier faiblement et fortement chargé.



a) Présente étude



b) Référence [8]

Figure IV.3 : Validation du profil de la pression aérodynamique pour une excentricité relative de fonctionnement $\varepsilon=0.5$

IV.8.5. Etude de l'effet du nombre compressibilité

L'effet du nombre de compressibilité sur le champ de pression aérodynamique a été mis en étude, les résultats obtenus sont présentés sur les figures (IV.5a) et (IV.5b) pour le cas d'un palier compliant.

La pression prend des valeurs plus importantes dans le cas du nombre de compressibilité $\Lambda=1.0$ (vitesses de rotations élevées) comparés à celles où le nombre de compressibilité $\Lambda=0.5$ (vitesses de rotations faibles) cet aspect reste le même pour les deux valeurs de l'excentricité relative de fonctionnement $\varepsilon=0.1$ et $\varepsilon=0.9$ et une compliance $\alpha=0.5$.

IV.8.6. Etude de l'effet de la compliance des feuilles sur l'angle de calage

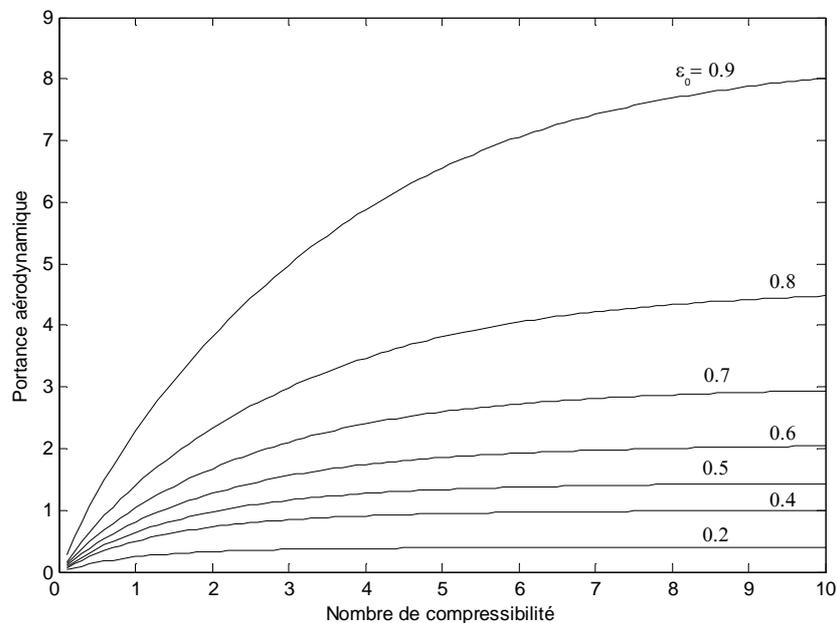
Un autre paramètre important dans notre étude est l'angle de calage, la variation de l'angle de calage en fonction de l'excentricité relative pour deux valeurs de Λ (1.0 et 0.5), est présentée sur les figures (IV.6a) et (IV.6b), on remarque clairement que les valeurs de l'angle de calage sont supérieures dans le cas d'un palier compliant comparés au palier indéformable pour les deux valeurs de Λ .

IV.8.7. Etude de l'effet de la compliance des feuilles sur la portance aérodynamique

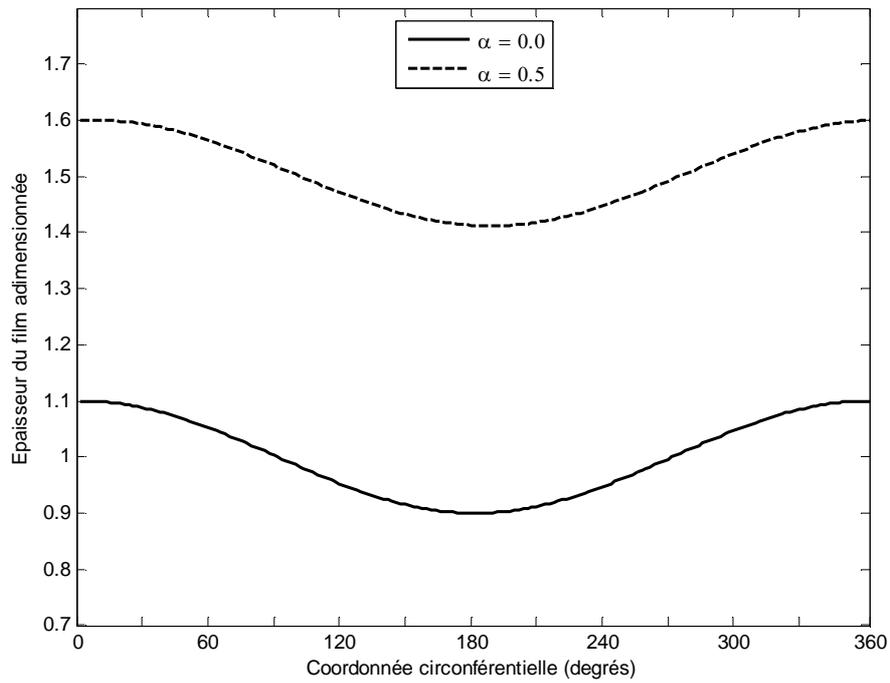
Les figures (IV.7a) et (IV.7b), représentent la variation de la portance aérodynamique adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique pour un nombre de compressibilité $\Lambda=1$ et $\Lambda=0.5$ respectivement.

Une augmentation de la portance aérodynamique adimensionnée avec l'excentricité relative, cette augmentation est plus significative dans le cas des paliers à profil rigide (indéformable), on remarque aussi que l'écart devient plus important à forte excentricité, c'est-à-dire lorsque le palier est lourdement chargé.

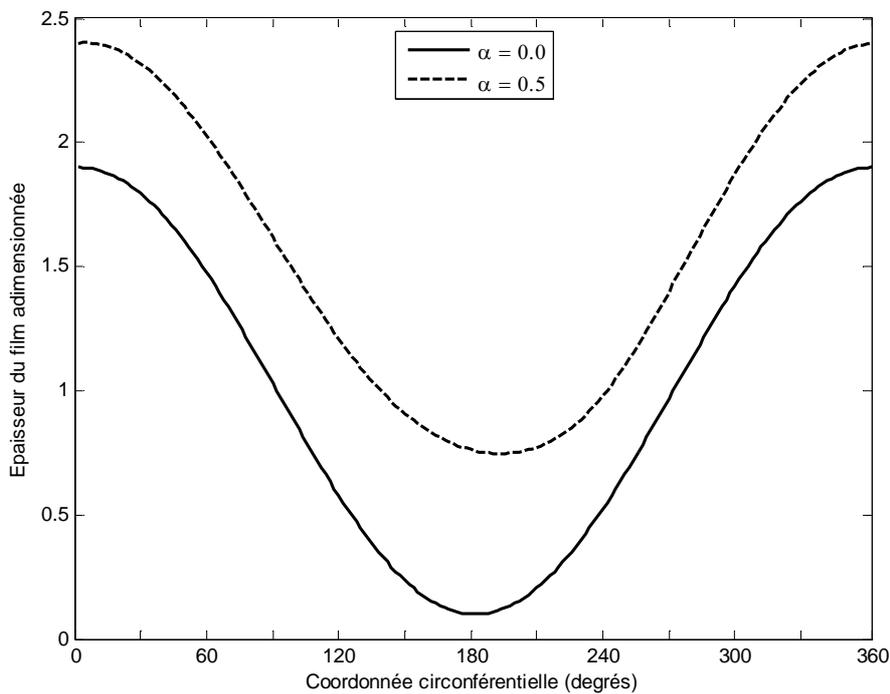
L'évolution de la portance aérodynamique adimensionnée en fonction du nombre de compressibilité pour une excentricité relative $\varepsilon=0.1$ et $\varepsilon=0.5$ est illustrée dans les figures (IV.8a) et (IV.8b) respectivement, les valeurs de Λ variés entre 0.1 jusqu'à 6.0, les paliers à profil indéformable ont une portance aérodynamique plus élevée à celle des paliers compliant.



a) Présente étude

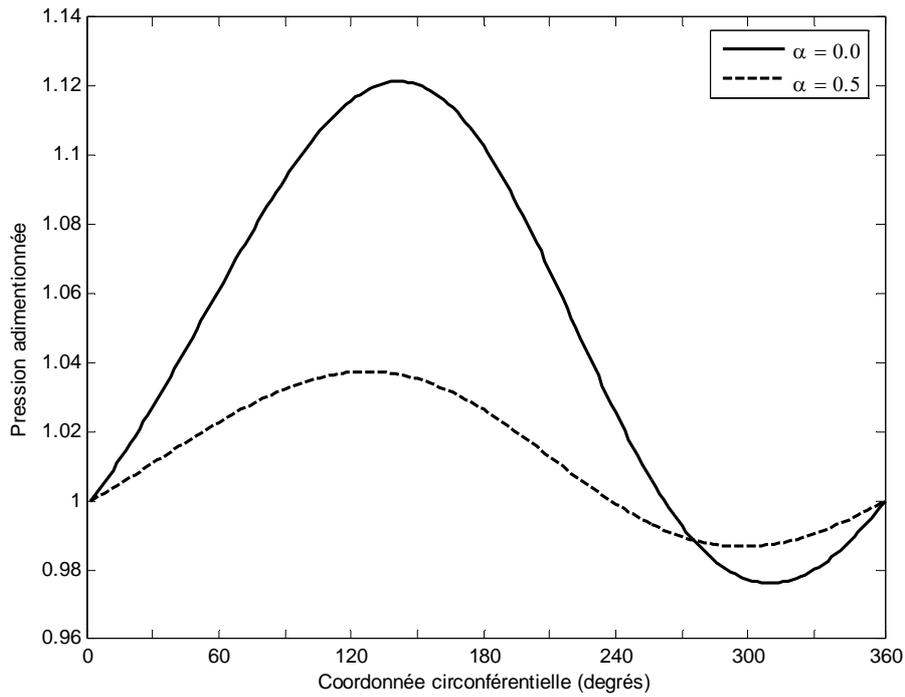


a) $\varepsilon=0.1, \Lambda=0.5$

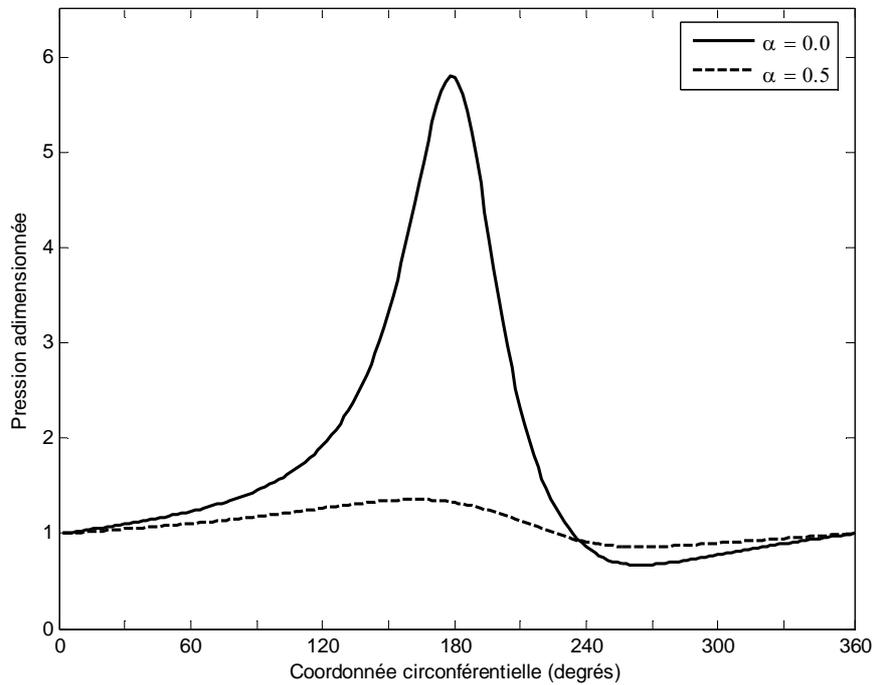


b) $\varepsilon=0.9, \Lambda=0.5$

Figure IV.3 géométrie du film aérodynamique calculées pour un palier rigide ($\alpha=0.0$) et un palier compliant ($\alpha=0.5$) fonctionnement à $\varepsilon=0.1$ et $\varepsilon=0.9$

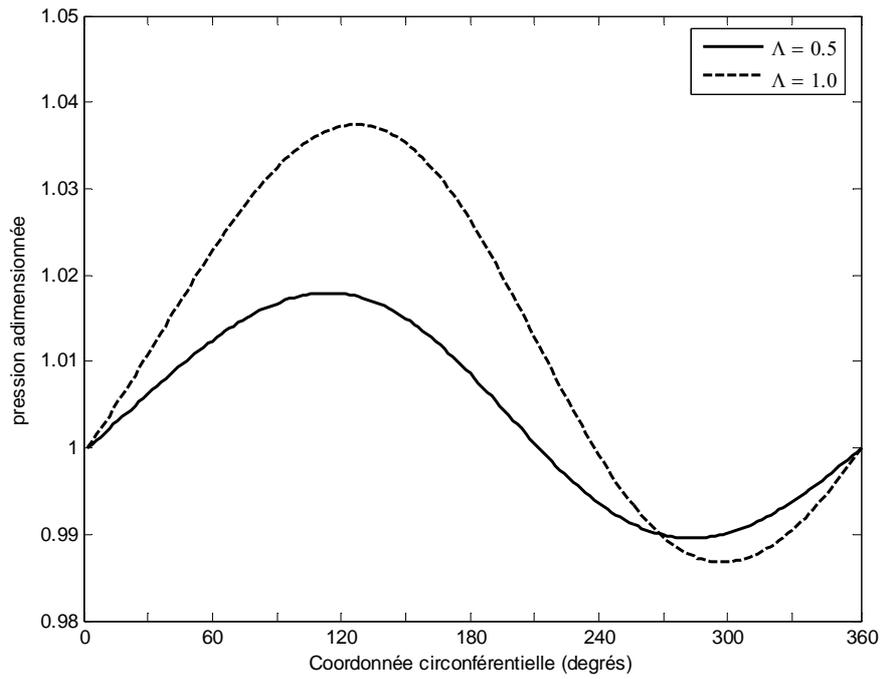


a) $\varepsilon=0.1$ et $\Lambda=0.5$

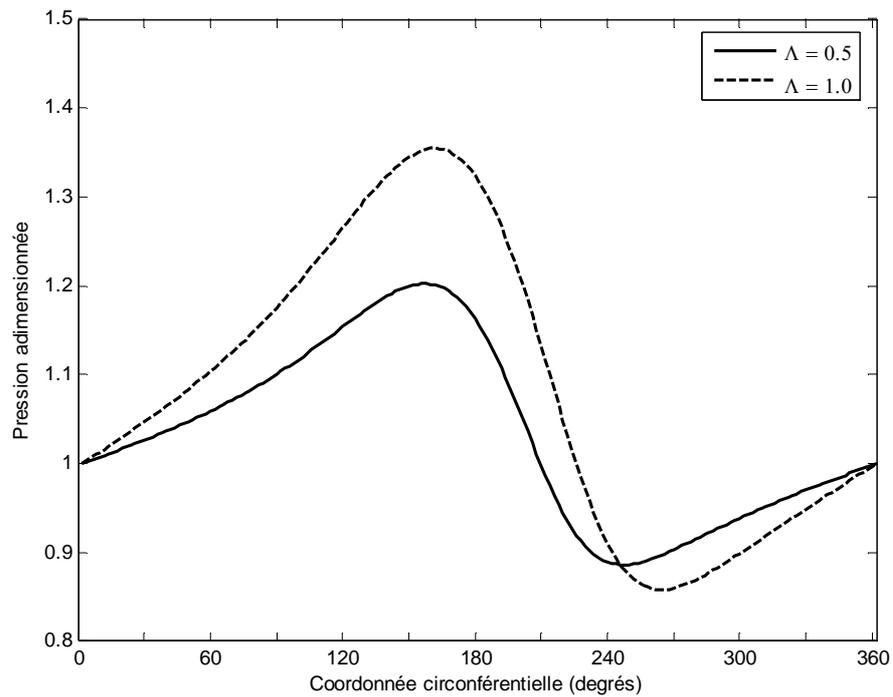


b) $\varepsilon=0.9$ et $\Lambda=0.5$

Figure IV 4 Profil de pression aérodynamique calculés pour un palier rigide et un palier compliant pour deux valeurs de l'excentricité.

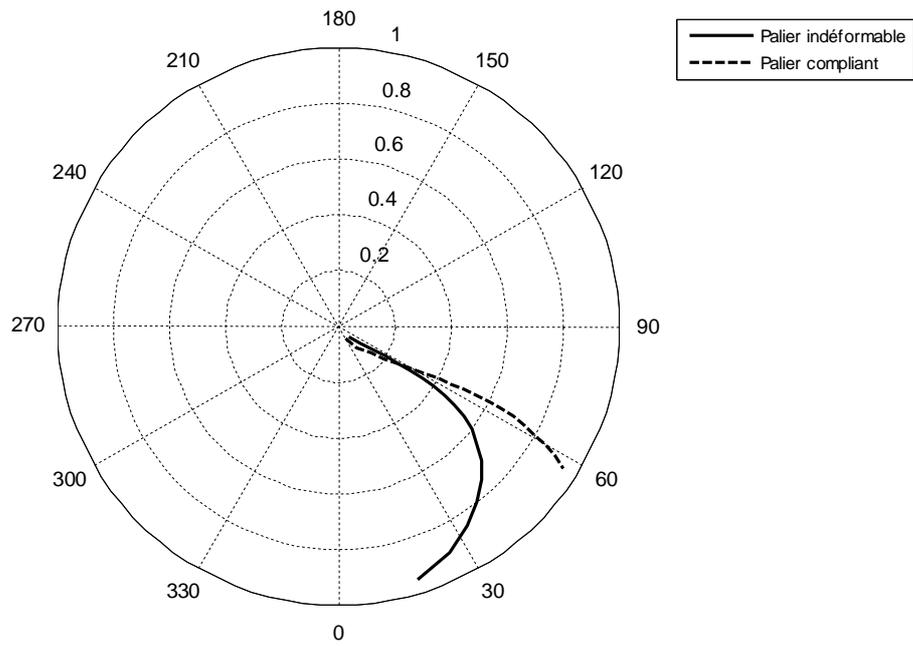


a) $\varepsilon=0.1$ et $\alpha=0.5$

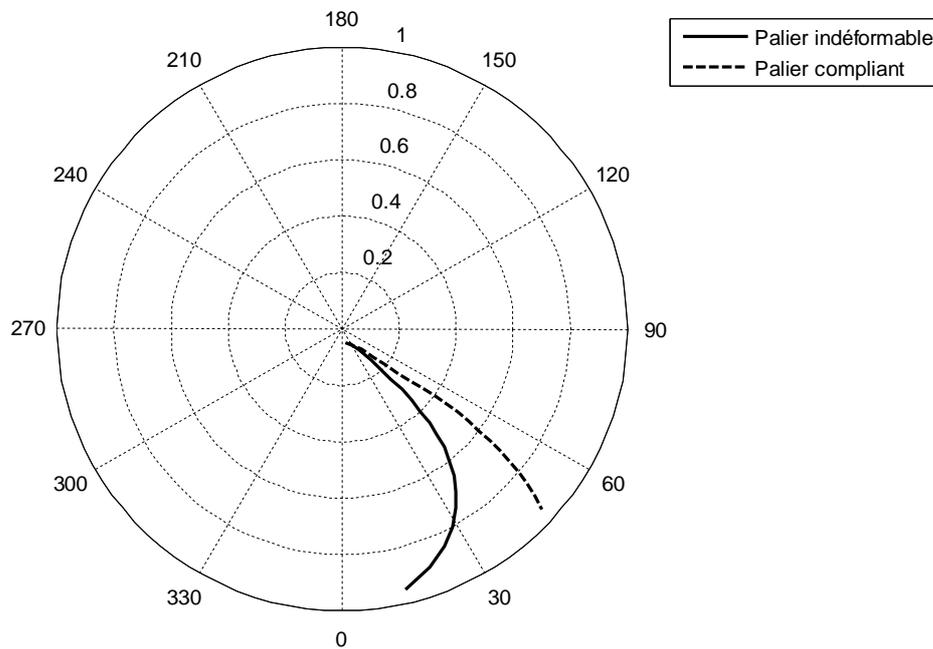


b) $\varepsilon=0.9$ et $\alpha=0.5$

Figure IV.5 : variation circonférentielle de la pression aérodynamique pour un palier compliant et deux valeurs de l'excentricité.

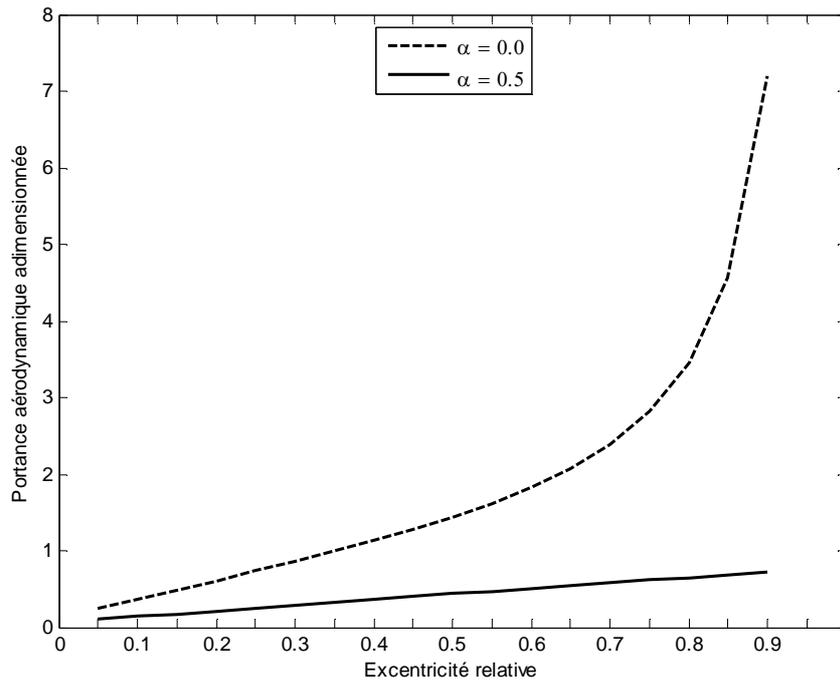


a) $\Lambda=0.5$

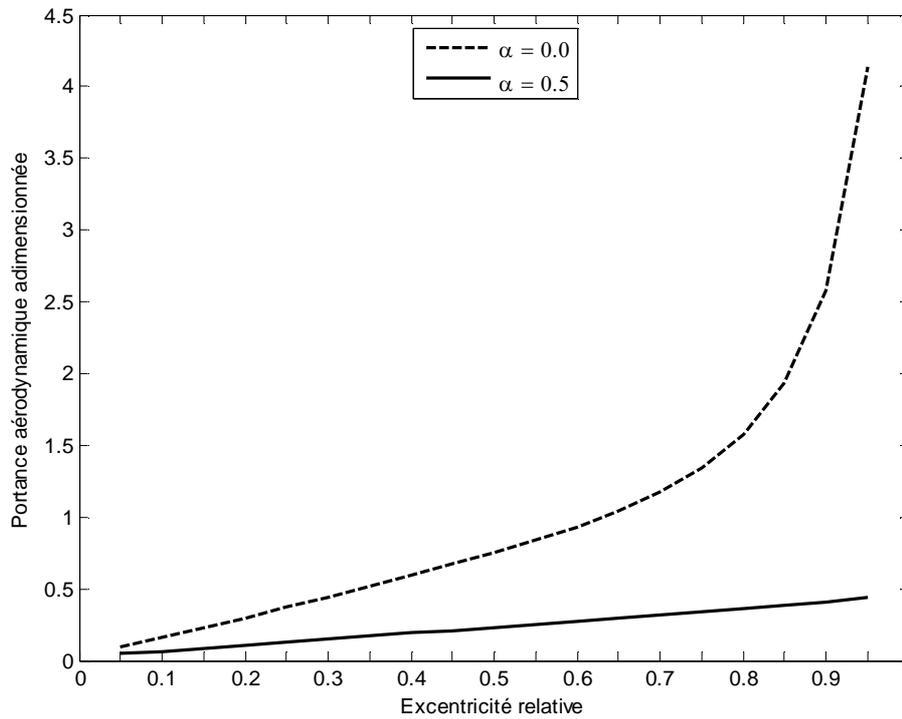


b) $\Lambda=1.0$

Figure IV.6 : Variation de l'angle de calage en fonction de l'excentricité relative pour deux valeurs du nombre de compressibilité

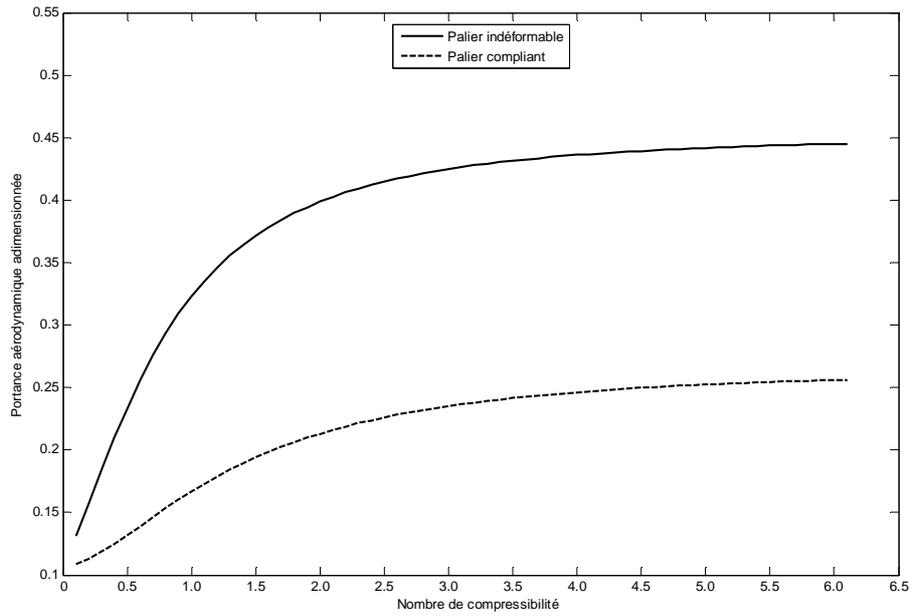


a) $\Lambda=1.0$

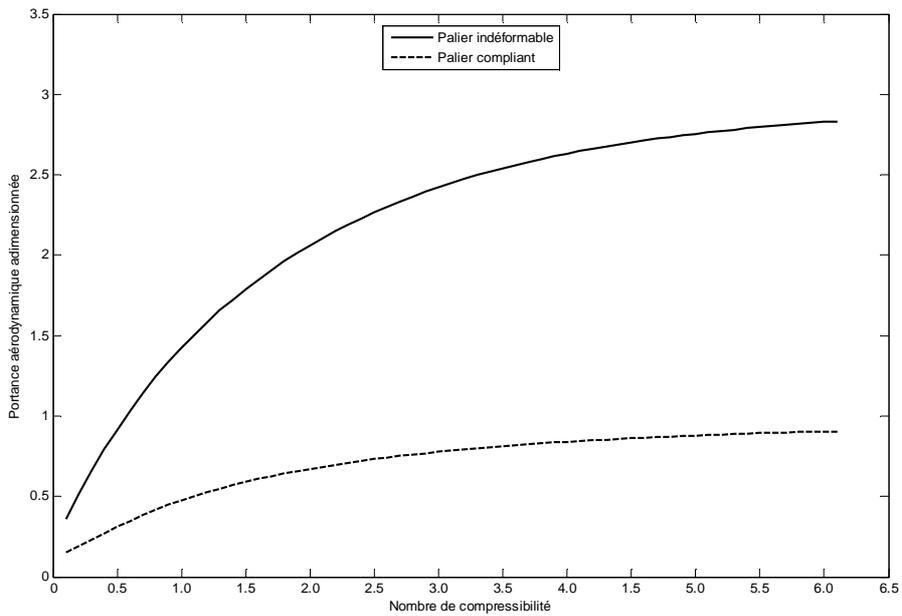


b) $\Lambda=0.5$

Figure IV.7 : Evolution de la portance aérodynamique adimensionnée en fonction de l'excentricité relative pour des paliers indéformable et compliant calculée pour $\Lambda=0.5$ et 1.0



a) $\epsilon=0.1$



b) $\epsilon=0.5$

Figure IV.8 : Evolution de la portance aérodynamique adimensionnée en fonction du nombre de compressibilité pour deux valeurs de l'excentricité relative

IV.3 Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre nous avons présenté une validation du programme de calcul développé par la comparaison du champ de pression et de la portance aérodynamique avec les résultats issus de la littérature.

La deuxième partie a été consacrée à l'étude paramétrique afin de mettre en évidence les effets des différents paramètres tels que, le nombre de compressibilité, le facteur de compliance et l'excentricité relative sur les performances statiques du palier aérodynamique, à savoir le champ de pression aérodynamique, la géométrie du film lubrifiant, la portance aérodynamique et l'angle de calage.

Chapitre V

*Etudes statique et
dynamique d'un
palier à feuilles
de longueur finie
(2-D)*

Chapitre V

Etudes statique et dynamique d'un palier à feuilles de longueur finie (2-D)

V.1 Introduction

Les problèmes d'interaction fluide-structure dans les paliers aérodynamiques ont fait l'objet de nombreuses études tant théoriques qu'expérimentales ces problèmes, qui sont fortement non linéaires, interviennent dès que les déformations des solides principalement l'alésage deviennent importantes de l'ordre de grandeur des épaisseurs du film lubrifiant

Le problème d'interaction fluide-structure dans un palier aérodynamique à feuilles en régime isotherme est gouverné par les équations de la lubrification et de l'élasticité linéaire ces équations permettent de calculer le champ de pression dans le fluide lubrifiant et déformations élastiques de la structure du palier.

Nous présentons dans ce chapitre une technique de résolution rapide et précise des problèmes d'interaction fluide-structure dans les paliers à feuilles. Une étude paramétrique est aussi envisagée afin de mettre en évidence les effets de l'élasticité des feuilles. Dans cette étude une attention particulière est portée aux déformations statique et dynamique à la fois.

La figure (V.1) montre une schématisation des déformations dans le palier aérodynamique dû à la pression générée par ce dernier.

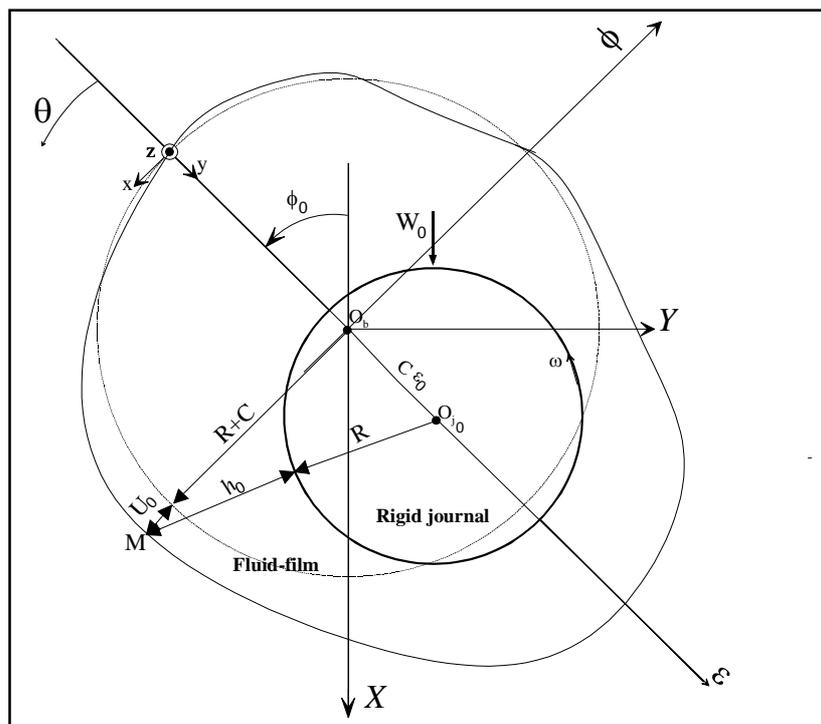


Figure V.1 Détails géométrique d'un palier aérodynamique compliant

V.2 Equation générale du film en régime stationnaire :

La figure V.1 montre schématiquement un palier aérodynamique compliant à la position d'équilibre statique avec la déformation élastique du palier, la représentation du palier rigide est défini par le rayon $(R + C)$. L'origine de la position statique X, Y, Z est localisée au centre du palier rigide (indéformable) O_b .

La coordonnée circonférentielle θ est mesurée à partir de la lignes des centres, l'axe de ε . L'arbre de rayon R est considéré comme rigide est animé d'une vitesse de rotation angulaire constante ω suivant l'axe Z. La position statique du centre géométrique du palier est défini par l'excentricité de fonctionnement statique $e_0 = C\varepsilon_0$ et de l'angle de calage statique ϕ_0 .

Le jeu radial du palier lorsque l'arbre et le coussinet sont coaxiaux dans le cas d'un palier rigide est défini par C, et l'épaisseur du film statique dans le cas de la déformation statique radiale seule de la feuille supérieure U_0 est représentée par h_0 .

La déformation statique des feuilles est obtenue en appliquant la règle des cosinus au triangle $(O_b - O_{j_0} - M)$.

$$(R + h_0)^2 = (R + C + U_0)^2 + e_0^2 + 2(R + C + U_0)e_0 \cos \theta \quad (V.1)$$

En développant cette équation, et en divisant par R^2 , et en négligeant les termes du second ordre des rapports h_0/R , C/R , e_0/R , and U_0/R on a alors :

$$h_0 = C(1 + \varepsilon_0 \cos \theta) + U_0 \quad (V.2)$$

V.3 Méthode de perturbation : calcul des coefficients dynamiques :

Le calcul des coefficients dynamiques peut s'effectuer soit dans le repère fixe (O_c, \vec{X}, \vec{Y}) dans le cas d'une charge statique imposée (problème inverse) ou intermédiaire $(O_c, \vec{\varepsilon}, \vec{\phi})$ lorsque l'excentricité de fonctionnement est imposée (problème direct) figure (V.1).

V.3.1 Cas d'une excentricité imposée : Paramétrage (ε, ϕ)

Dans le cas d'une excentricité imposée, il convient d'utiliser le paramétrage (ε, ϕ) pour calculer les coefficients dynamiques dans le repère intermédiaire. Un changement de base de rotation $(-\phi_0)$ permettra de les exprimer dans le repère fixe (O_c, \vec{X}, \vec{Y}) .

Lorsque le rotor est soumis à des vibrations harmoniques de faible amplitude de fréquence ν au voisinage de la position d'équilibre statique O_{a0} caractérisée par les coordonnées polaires (ε_0, ϕ_0) , l'excentricité relative et l'angle de calage instantanés peuvent être exprimés par :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 e^{i\gamma\tilde{t}} \text{ et } \phi = \phi_0 + \phi_1 e^{i\gamma\tilde{t}} ; \quad |\varepsilon_1| \ll \varepsilon_0, |\phi_1| \ll \phi_0 \text{ et } i = \sqrt{-1} \quad (\text{V.3})$$

Où $\gamma = \nu/\omega$ est la fréquence d'excitation relative, et ε_1 et ϕ_1 sont respectivement les amplitudes complexes de l'excentricité relative et de l'angle de calage.

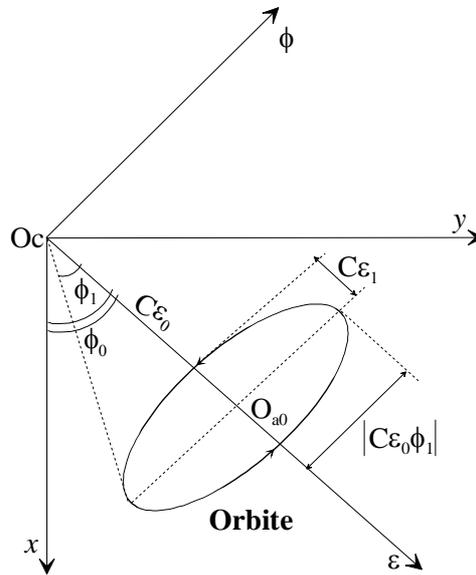


Figure V.2 Systèmes d'axes et notations

En appliquant le principe de superposition, l'épaisseur du film adimensionnée s'écrit pour un palier compliant comme suit:

$$\tilde{h} = \tilde{h}_0 + \tilde{h}_d + \tilde{U}_d \quad \left| \tilde{h}_d + \tilde{U}_d \right| \ll \tilde{h}_0 \quad (\text{V.4})$$

où $\tilde{h}_0 = \frac{h_0}{C}$ est l'épaisseur du film stationnaire incluant la déformation stationnaire de la couche élastique \tilde{U}_0 , $\tilde{h}_d = (\varepsilon_1 \cos\theta + \varepsilon_0\phi_1 \sin\theta)e^{i\gamma\tilde{t}}$ est la variation de l'épaisseur du film due au mouvement vibratoire du rotor, et $\tilde{U}_d = \tilde{U} e^{i\gamma\tilde{t}} = (\varepsilon_1 \tilde{U}_\varepsilon + \varepsilon_0\phi_1 \tilde{U}_\phi) e^{i\gamma\tilde{t}}$ est la déformation

dynamique du palier causée par les pressions dynamiques où $\tilde{U}_\varepsilon = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \varepsilon}$ et $\tilde{U}_\phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \phi}$, et

\tilde{U} est l'amplitude complexe.

Par conséquent, l'expression complète de l'épaisseur du film est :

$$\tilde{h} = \tilde{h}_0 + (\varepsilon_1 (\cos \theta + \tilde{U}_\varepsilon) + \varepsilon_0 \phi_1 (\sin \theta + \tilde{U}_\phi)) e^{i\gamma\tilde{t}} \quad (\text{V.5})$$

La pression instantanée sans dimension qui en résulte s'écrit :

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 + \tilde{Q} e^{i\gamma\tilde{t}} \quad |\tilde{Q}| \ll \tilde{p}_0 \quad (\text{V.6})$$

où $\tilde{p}_0 \geq 0$ est la pression stationnaire, et $\tilde{Q} = \varepsilon_1 \tilde{Q}_\varepsilon + \varepsilon_0 \phi_1 \tilde{Q}_\phi$ est la pression dynamique

complexe où $\tilde{Q}_\varepsilon = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \varepsilon}$ et $\tilde{Q}_\phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \phi}$.

L'utilisation du modèle de Heshmat permet de calculer avec une précision suffisante les déformations stationnaires et dynamiques, i. e.

Lorsque l'arbre est soumis à des vibrations harmoniques de faibles amplitudes avec une fréquence d'excitation relative ν au voisinage de la position d'équilibre statique définie par l'excentricité relative ε_0 et l'angle de calage statique ϕ_0 ,

L'excentricité relative et l'angle de calage instantanés peuvent être exprimés par :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon e^{i\gamma\tilde{t}} \text{ and } \phi = \phi_0 + \Delta \phi e^{i\gamma\tilde{t}} ; |\Delta \varepsilon| \ll \varepsilon_0, |\Delta \phi| \ll \phi_0 \text{ and } i = \sqrt{-1} \quad (\text{V.7})$$

Où : $\gamma = \nu / \omega$ est la fréquence d'excitation relative, $\Delta \varepsilon$ et $\Delta \phi$ sont respectivement les amplitudes de perturbation de l'excentricité de fonctionnement et de l'angle de calage, l'indice 0 signifie que les quantités géométriques et physiques sont interprétés en cas statique.

L'épaisseur du film lubrifiant adimensionnée peut être exprimée comme suit :

$$\tilde{h} = \tilde{h}_0 + \tilde{h}_d + \tilde{U}_d \quad (\text{V.8})$$

Où : $\tilde{h}_0 = \frac{h_0}{C}$ est l'épaisseur du film adimensionnée correspondant à la position d'équilibre

statique, en ajoutant la déformation dynamique des feuilles, $\tilde{h}_d = (\Delta \varepsilon \cos \theta + \varepsilon_0 \Delta \phi \sin \theta) e^{i\gamma\tilde{t}}$ qui signifie le changement dans l'épaisseur du film lubrifiant adimensionné dû au mouvement

dynamique de l'arbre, et $\tilde{U}_d = \tilde{U} e^{i\gamma\tilde{t}} = (\Delta\varepsilon\tilde{U}_\varepsilon + \varepsilon_0\Delta\phi\tilde{U}_\phi) e^{i\gamma\tilde{t}}$ est la déformation dynamique engendrée par les déformations dynamiques $\tilde{U}_\varepsilon = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial\varepsilon}$ et $\tilde{U}_\phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial\tilde{U}}{\partial\phi}$, avec \tilde{U} est l'amplitude de la déformation dynamique complexe.

Le mouvement du centre de l'arbre engendre une perturbation du champ de pression, ce mouvement étant de faible amplitude, la pression dans le film et l'épaisseur du film correspondant peuvent être exprimées en variables réduites comme, sous l'hypothèse des déformations linéaires, et si en ajoute les termes $\tilde{h}_d + \tilde{U}_d$ au \tilde{h}_0 ,

\tilde{h}_1 est l'amplitude du déplacement du centre de l'arbre dû à la vibration de ce dernier.

L'épaisseur du film adimensionnée instantanée prend la forme :

$$\tilde{h}(\theta, \tilde{z}, \tilde{t}) = \tilde{h}_0(\theta, \tilde{z}) + \tilde{h}_1(\theta, \tilde{z}) e^{i\gamma\tilde{t}} \quad (\text{V.9})$$

Avec $\tilde{h}_1 = \Delta\varepsilon(\cos\theta + \tilde{U}_\varepsilon) + \varepsilon_0\Delta\phi(\sin\theta + \tilde{U}_\phi)$ tel que $|\tilde{h}_1| \ll \tilde{h}_0$

Les termes $\Delta\varepsilon(\cos\theta + \tilde{U}_\varepsilon)$ et $\varepsilon_0\Delta\phi(\sin\theta + \tilde{U}_\phi)$ de l'équation (16), correspondent à la partie statique et dynamique respectivement.

La pression dans film adimensionnée instantanée est exprimée comme :

$$\tilde{p}(\theta, \tilde{z}, \tilde{t}) = \tilde{p}_0(\theta, \tilde{z}) + \tilde{Q}(\theta, \tilde{z}) e^{i\gamma\tilde{t}} ; \quad |\tilde{Q}| \ll \tilde{p}_0 \quad (\text{V.10})$$

Avec \tilde{p}_0 est la pression adimensionnée statique, et $\tilde{Q} = \Delta\varepsilon\tilde{Q}_\varepsilon + \varepsilon_0\Delta\phi\tilde{Q}_\phi$ est la pression dynamique complexe dans le film lubrifiant, avec $\tilde{Q}_\varepsilon = \frac{\partial\tilde{Q}}{\partial\varepsilon}$ et $\tilde{Q}_\phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial\tilde{Q}}{\partial\phi}$.

On note que en additionnant les déformations dynamiques \tilde{U}_ε et \tilde{U}_ϕ l'équation (V.9) donne plus de précision dans l'expression du film lubrifiant dans le cas où seuls les déformations statique interviennent.

Les déformations dynamiques sont calculées en utilisant le modèle d'élasticité de Heshmat :

$$\tilde{U}_\varepsilon = \alpha\tilde{Q}_\varepsilon \quad \text{et} \quad \tilde{U}_\phi = \alpha\tilde{Q}_\phi \quad (\text{V.11})$$

En remplaçant les équations (V.9) et (V.10) dans l'équation de Reynolds et en collectant les termes d'ordre zéro et un des termes $\Delta\varepsilon$ et $\varepsilon_0 \Delta\phi$, on obtient le système d'équations aux dérivées partielles en \tilde{p}_0 , \tilde{Q}_ε et \tilde{Q}_ϕ suivant :

Equations aux dérivées partielles d'ordre zéro:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{p}_0\tilde{h}_0^3\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\right)+\lambda\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left(\tilde{p}_0\tilde{h}_0^3\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\right)=\Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{p}_0\tilde{h}_0\right) \quad (\text{V.12})$$

Equations aux dérivées partielles d'ordre un:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{h}_0^3\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{Q}_\varepsilon}{\partial\theta}\right]+\lambda\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[\tilde{h}_0^3\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{Q}_\varepsilon}{\partial\tilde{z}}\right]+ \\ & \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{h}_0^3\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\tilde{Q}_\varepsilon\right]+\lambda\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[\tilde{h}_0^3\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\tilde{Q}_\varepsilon\right]+ \\ & 3\Lambda\frac{(\cos\theta+\tilde{U}_\varepsilon)}{\tilde{h}_0}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{p}_0\tilde{h}_0\right)+3\tilde{h}_0^3\tilde{p}_0\left[\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta+\tilde{U}_\varepsilon}{\tilde{h}_0}\right)+\lambda\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left(\frac{\cos\theta+\tilde{U}_\varepsilon}{\tilde{h}_0}\right)\right]= \\ & \Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{p}_0(\cos\theta+\tilde{U}_\varepsilon)+\tilde{h}_0\tilde{Q}_\varepsilon\right]+2\Lambda i\gamma\left[\tilde{p}_0(\cos\theta+\tilde{U}_\varepsilon)+\tilde{h}_0\tilde{Q}_\varepsilon\right] \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

et,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{h}_0^3\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{Q}_\phi}{\partial\theta}\right]+\lambda\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[\tilde{h}_0^3\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{Q}_\phi}{\partial\tilde{z}}\right]+ \\ & \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{h}_0^3\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\tilde{Q}_\phi\right]+\lambda\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[\tilde{h}_0^3\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\tilde{Q}_\phi\right]+ \\ & 3\Lambda\frac{(\sin\theta+\tilde{U}_\phi)}{\tilde{h}_0}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{p}_0\tilde{h}_0\right)+3\tilde{h}_0^3\tilde{p}_0\left[\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\theta+\tilde{U}_\phi}{\tilde{h}_0}\right)+\lambda\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left(\frac{\sin\theta+\tilde{U}_\phi}{\tilde{h}_0}\right)\right]= \\ & \Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{p}_0(\sin\theta+\tilde{U}_\phi)+\tilde{h}_0\tilde{Q}_\phi\right]+2\Lambda i\gamma\left[\tilde{p}_0(\sin\theta+\tilde{U}_\phi)+\tilde{h}_0\tilde{Q}_\phi\right] \end{aligned} \quad (\text{V.14})$$

Pour le traitement numérique, il convient d'écrire les équations (V.13) et (V.14) comme suit:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \frac{\partial \tilde{Q}_\varepsilon}{\partial \theta} \right] + \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \frac{\partial \tilde{Q}_\varepsilon}{\partial \tilde{z}} \right] + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \left[\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\tilde{Q}_\varepsilon}{\tilde{p}_0} \right) + \lambda \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\tilde{Q}_\varepsilon}{\tilde{p}_0} \right) \right] + \\ & \Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\tilde{p}_0 \tilde{h}_0 \right) \left[\frac{\tilde{Q}_\varepsilon}{\tilde{p}_0} + 3 \frac{\tilde{h}_\varepsilon}{\tilde{h}_0} \right] + 3 \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \left[\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\tilde{h}_\varepsilon}{\tilde{h}_0} \right) + \lambda \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\tilde{h}_\varepsilon}{\tilde{h}_0} \right) \right] = \end{aligned} \quad (\text{V.15})$$

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\tilde{p}_0 \tilde{h}_0 \left(\frac{\tilde{h}_\varepsilon}{\tilde{h}_0} + \frac{\tilde{Q}_\varepsilon}{\tilde{p}_0} \right) \right] + 2 \Lambda i \gamma \tilde{p}_0 \tilde{h}_0 \left(\frac{\tilde{h}_\varepsilon}{\tilde{h}_0} + \frac{\tilde{Q}_\varepsilon}{\tilde{p}_0} \right)$$

avec $\tilde{h}_\varepsilon = \cos \theta + \tilde{U}_\varepsilon$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \frac{\partial \tilde{Q}_\phi}{\partial \theta} \right] + \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \frac{\partial \tilde{Q}_\phi}{\partial \tilde{z}} \right] + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \left[\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\tilde{Q}_\phi}{\tilde{p}_0} \right) + \lambda \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\tilde{Q}_\phi}{\tilde{p}_0} \right) \right] + \\ & \Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\tilde{p}_0 \tilde{h}_0 \right) \left[\frac{\tilde{Q}_\phi}{\tilde{p}_0} + 3 \frac{\tilde{h}_\phi}{\tilde{h}_0} \right] + 3 \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \left[\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\tilde{h}_\phi}{\tilde{h}_0} \right) + \lambda \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\tilde{h}_\phi}{\tilde{h}_0} \right) \right] = \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\tilde{p}_0 \tilde{h}_0 \left(\frac{\tilde{h}_\phi}{\tilde{h}_0} + \frac{\tilde{Q}_\phi}{\tilde{p}_0} \right) \right] + 2 \Lambda i \gamma \tilde{p}_0 \tilde{h}_0 \left(\frac{\tilde{h}_\phi}{\tilde{h}_0} + \frac{\tilde{Q}_\phi}{\tilde{p}_0} \right)$$

avec $\tilde{h}_\phi = \sin \theta + \tilde{U}_\phi$

L'application de la technique de perturbation de premier ordre, qui est une méthode de superposition, transforme l'équation de Reynolds compressible et transitoire (III.19) en trois équations aux dérivées partielles.

On note aussi que l'équation (V.12) est non linéaire et les équations (V.13) et (V.14) sont linéaires en \tilde{Q}_ε et \tilde{Q}_ϕ respectivement, et leurs résolutions est obtenue une fois que l'épaisseur du film \tilde{h}_0 et la pression \tilde{p}_0 sont obtenues des équations (V.9) et (V.10) dans le cas statique.

Pour utiliser la technique de perturbation, on fait les transformations sur les conditions aux limites suivantes :

$$\tilde{p}_0 = 1 \quad \text{at} \quad \tilde{z} = \pm 1/2 \quad (\text{V.17a})$$

$$\tilde{p}_0(\theta = 0, \tilde{z}) = \tilde{p}_0(\theta = 2\pi, \tilde{z}) = 1 \quad (\text{V.17b})$$

$$\tilde{p}_0(\theta = \theta_2, \tilde{z}) = 1, \text{ et } \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta}(\theta = \theta_2, \tilde{z}) = 0 \quad (\text{V.17c})$$

et

$$\tilde{Q}_\varepsilon = \tilde{Q}_\phi = 0 \quad \text{at} \quad \tilde{z} = \pm \frac{1}{2} \quad (\text{V.18a})$$

$$\tilde{Q}_\varepsilon(\theta = 0, \tilde{z}) = \tilde{Q}_\varepsilon(\theta = 2\pi, \tilde{z}) = 0 \quad (\text{V.18b})$$

$$\tilde{Q}_\phi(\theta = 0, \tilde{z}) = \tilde{Q}_\phi(\theta = 2\pi, \tilde{z}) = 0 \quad (\text{V.18c})$$

On assume que les vibrations engendrées par les perturbations de l'arbre n'affectent pas la zone pressurisée du palier. Les équations dynamiques du premier ordre sont résolues dans la région où $p_0 > p_a$ ou bien $\tilde{p}_0 > 1$. Dans les calculs on doit mettre les pressions sous atmosphérique c'est-à-dire $\tilde{p}_0 < 1$ calculées à partir de l'équation (V.12) sont considérées égales à la pression ambiante, c'est-à-dire à 1 en valeur adimensionnées.

V.3.2 Cas d'une charge imposée : Paramétrage (X, Y)

Dans le cas d'une charge statique imposée, le calcul des coefficients dynamiques s'effectue directement dans le repère fixe (X, Y) lié à la charge.

En régime stationnaire, le centre de l'arbre (rotor) occupe une position d'équilibre caractérisée par ses coordonnées X_0 et Y_0 . L'épaisseur du film correspondant à cette position est :

$$\tilde{h}_0 = 1 + \tilde{X}_0 \cos \theta + \tilde{Y}_0 \sin \theta + \tilde{U}_0 \quad (\text{V.9})$$

Ou encore compte tenu de la relation (IV.15) :

$$\tilde{h}_0 = 1 + \tilde{X}_0 \cos \theta + \tilde{Y}_0 \sin \theta + \tilde{L}_0 \tilde{p}_0 \quad (\text{V.20})$$

En régime dynamique, le centre du rotor est décrit par les amplitudes X et Y mesurées à partir de la position d'équilibre statique. Dans ces conditions, l'épaisseur du film prend la forme suivante :

$$\tilde{h}(\theta, \tilde{z}, \tilde{t}) = 1 + \tilde{X}(\tilde{t}) \cos \theta + \tilde{Y}(\tilde{t}) \sin \theta + \tilde{U}(\theta, \tilde{z}, \tilde{t}) \quad (\text{V.21})$$

$$\text{Avec} \quad \tilde{X} = \tilde{X}_0 + \Delta \tilde{X} \quad ; \quad \tilde{Y} = \tilde{Y}_0 + \Delta \tilde{Y} \quad \text{et} \quad \tilde{U} = \tilde{U}_0 + \Delta \tilde{U}$$

L'expression de $\Delta \tilde{U}$ est déterminée à partir développement en série de Taylor de \tilde{U} limité au premier ordre au voisinage de la position d'équilibre statique, i.e.

$$\tilde{U} \approx \tilde{U}_0 + \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{X}} \right)_0 \Delta \tilde{X} + \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{Y}} \right)_0 \Delta \tilde{Y}}_{\Delta \tilde{U}} \quad \text{ou encore } \Delta \tilde{U} = \tilde{U}_x \Delta \tilde{X} + \tilde{U}_y \Delta \tilde{Y} ; \tilde{U}_x = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{X}}, \text{ etc.}$$

Soit par conséquent :

$$\tilde{h} = \tilde{h}_0 + \Delta \tilde{h} + \Delta \tilde{U} \quad (\text{V.22})$$

Avec $\Delta \tilde{h} = \Delta \tilde{X} \cos \theta + \Delta \tilde{Y} \sin \theta$

Si on suppose que le mouvement de l'arbre (rotor) est harmonique, on peut écrire :

$$\Delta \tilde{X} = \Delta \tilde{X}^* e^{i\gamma \tilde{t}} ; \Delta \tilde{Y} = \Delta \tilde{Y}^* e^{i\gamma \tilde{t}} ; \Delta \tilde{U} = \Delta \tilde{U}^* e^{i\gamma \tilde{t}}$$

Où $\Delta \tilde{X}^* ; \Delta \tilde{Y}^*$ et $\Delta \tilde{U}^* \in \mathbb{C}$

Il vient alors :

$$\Delta \tilde{U} = (\tilde{U}_x \Delta \tilde{X}^* + \tilde{U}_y \Delta \tilde{Y}^*) e^{i\gamma \tilde{t}} \quad \text{et} \quad \Delta \tilde{h} = (\Delta \tilde{X}^* \cos \theta + \Delta \tilde{Y}^* \sin \theta) e^{i\gamma \tilde{t}}$$

L'équation (IV.37) devient :

$$\tilde{h} = \tilde{h}_0 + \Delta \tilde{h}^* e^{i\gamma \tilde{t}} \quad \text{tel que} \quad \left| \frac{\Delta \tilde{h}^*}{\tilde{h}_0} \right| \ll 1 \quad (\text{V.23})$$

Avec $\Delta \tilde{h}^* = \Delta \tilde{X}^* (\cos \theta + \tilde{U}_x) + \Delta \tilde{Y}^* (\sin \theta + \tilde{U}_y)$

Le mouvement du centre de l'arbre engendre une perturbation du champ de pression, soit :

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 + \Delta \tilde{p} \quad (\text{V.24})$$

L'expression de $\Delta \tilde{p}$ est déterminée à partir du développement limité de la pression :

$$\tilde{p} \approx \tilde{p}_0 + \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{X}} \right)_0 \Delta \tilde{X} + \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{Y}} \right)_0 \Delta \tilde{Y} + \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{X}'} \right)_0 \Delta \tilde{X}' + \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{Y}'} \right)_0 \Delta \tilde{Y}'}_{\Delta \tilde{p}}$$

Le mouvement étant harmonique, on peut écrire :

$$\Delta \tilde{X} = \Delta \tilde{X}^* e^{i\gamma \tilde{t}} ; \Delta \tilde{Y} = \Delta \tilde{Y}^* e^{i\gamma \tilde{t}} ; \Delta \tilde{X}' = i\gamma \Delta \tilde{X}^* e^{i\gamma \tilde{t}} ; \Delta \tilde{Y}' = i\gamma \Delta \tilde{Y}^* e^{i\gamma \tilde{t}}$$

Soit :

$$\tilde{p} \approx \tilde{p}_0 + \Delta\tilde{p}^* e^{i\gamma\tilde{z}} \quad ; \quad \left| \frac{\Delta\tilde{p}^*}{\tilde{p}_0} \right| \ll 1 \quad (\text{V.25})$$

Avec

$$\Delta\tilde{p}^* = \tilde{p}_x \Delta\tilde{X}^* + \tilde{p}_y \Delta\tilde{Y}^* + i\gamma\tilde{p}_x \Delta\tilde{X}^* + i\gamma\tilde{p}_y \Delta\tilde{Y}^* \quad ; \quad \tilde{p}_x = \frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{X}}, \text{ etc.}$$

Le report des équations (V.23) et (V.24) dans l'équation de Reynolds transitoire (III.9) conduit à un système de cinq EDPs :

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \left(\tilde{p}_0 \tilde{h}_0^3 \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial\tilde{z}} \left(\tilde{p}_0 \tilde{h}_0^3 \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}} \right) = \Lambda \frac{\partial}{\partial\theta} (\tilde{p}_0 \tilde{h}_0) \quad (\text{V.26})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\theta} \left[3\tilde{h}_0^2 \tilde{p}_0 \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta} \cos\theta + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \frac{\partial\tilde{p}_x}{\partial\theta} + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_x \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta} + 3\tilde{h}_0^2 \tilde{p}_0 \tilde{U}_x \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta} \right] + \\ & \lambda \frac{\partial}{\partial\tilde{z}} \left[3\tilde{h}_0^2 \tilde{p}_0 \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}} \cos\theta + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \frac{\partial\tilde{p}_x}{\partial\tilde{z}} + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_x \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}} + 3\tilde{h}_0^2 \tilde{p}_0 \tilde{U}_x \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}} \right] = \\ & \Lambda \frac{\partial}{\partial\theta} [\tilde{p}_0 \cos\theta + \tilde{h}_0 \tilde{p}_x + \tilde{p}_0 \tilde{U}_x] + 2\Lambda i\gamma [\tilde{p}_0 \cos\theta + \tilde{h}_0 \tilde{p}_x + \tilde{p}_0 \tilde{U}_x + \tilde{h}_0 \tilde{p}_{x'}] \end{aligned} \quad (\text{V.27})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\theta} \left[3\tilde{h}_0^2 \tilde{p}_0 \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta} \sin\theta + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \frac{\partial\tilde{p}_y}{\partial\theta} + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_y \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta} + 3\tilde{h}_0^2 \tilde{p}_0 \tilde{U}_y \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta} \right] + \\ & \lambda \frac{\partial}{\partial\tilde{z}} \left[3\tilde{h}_0^2 \tilde{p}_0 \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}} \sin\theta + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \frac{\partial\tilde{p}_y}{\partial\tilde{z}} + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_y \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}} + 3\tilde{h}_0^2 \tilde{p}_0 \tilde{U}_y \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}} \right] = \\ & \Lambda \frac{\partial}{\partial\theta} [\tilde{p}_0 \sin\theta + \tilde{h}_0 \tilde{p}_y + \tilde{p}_0 \tilde{U}_y] + 2\Lambda i\gamma [\tilde{p}_0 \sin\theta + \tilde{h}_0 \tilde{p}_y + \tilde{p}_0 \tilde{U}_y + \tilde{h}_0 \tilde{p}_{y'}] \end{aligned} \quad (\text{V.28})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \frac{\partial\tilde{p}_{x'}}{\partial\theta} + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_{x'} \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta} \right] + \lambda \frac{\partial}{\partial\tilde{z}} \left[\tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \frac{\partial\tilde{p}_{x'}}{\partial\tilde{z}} + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_{x'} \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}} \right] = \\ & \Lambda \frac{\partial}{\partial\theta} [\tilde{h}_0 \tilde{p}_{x'}] + 2\Lambda i\gamma [\tilde{h}_0 \tilde{p}_{x'}] \end{aligned} \quad (\text{V.29})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \frac{\partial\tilde{p}_{y'}}{\partial\theta} + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_{y'} \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta} \right] + \lambda \frac{\partial}{\partial\tilde{z}} \left[\tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \frac{\partial\tilde{p}_{y'}}{\partial\tilde{z}} + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_{y'} \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}} \right] = \\ & \Lambda \frac{\partial}{\partial\theta} [\tilde{h}_0 \tilde{p}_{y'}] + 2\Lambda i\gamma [\tilde{h}_0 \tilde{p}_{y'}] \end{aligned} \quad (\text{V.30})$$

Si la déformation dynamique de la couche élastique est ignorée, les EDPs (V.27) à (V.30) se réduisent à :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \left[3\tilde{h}_0^2 \tilde{p}_0 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \cos \theta + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \frac{\partial \tilde{p}_x}{\partial \theta} + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_x \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right] + \\ & \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[3\tilde{h}_0^2 \tilde{p}_0 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \cos \theta + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \frac{\partial \tilde{p}_x}{\partial \tilde{z}} + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_x \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right] = \\ & \Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\tilde{p}_0 \cos \theta + \tilde{h}_0 \tilde{p}_x \right] + 2\Lambda i \gamma \left[\tilde{p}_0 \cos \theta + \tilde{h}_0 \tilde{p}_x + \tilde{h}_0 \tilde{p}_{x'} \right] \end{aligned} \quad (\text{V.31})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \left[3\tilde{h}_0^2 \tilde{p}_0 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \sin \theta + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \frac{\partial \tilde{p}_y}{\partial \theta} + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_y \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right] + \\ & \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[3\tilde{h}_0^2 \tilde{p}_0 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \sin \theta + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \frac{\partial \tilde{p}_y}{\partial \tilde{z}} + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_y \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right] = \\ & \Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\tilde{p}_0 \sin \theta + \tilde{h}_0 \tilde{p}_y \right] + 2\Lambda i \gamma \left[\tilde{p}_0 \sin \theta + \tilde{h}_0 \tilde{p}_y + \tilde{h}_0 \tilde{p}_{y'} \right] \end{aligned} \quad (\text{V.32})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \frac{\partial \tilde{p}_{x'}}{\partial \theta} + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_{x'} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right] + \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \frac{\partial \tilde{p}_{x'}}{\partial \tilde{z}} + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_{x'} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right] = \\ & \Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\tilde{h}_0 \tilde{p}_{x'} \right] + 2\Lambda i \gamma \left[\tilde{h}_0 \tilde{p}_{x'} \right] \end{aligned} \quad (\text{V.33})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \frac{\partial \tilde{p}_{y'}}{\partial \theta} + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_{y'} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right] + \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\tilde{h}_0^3 \tilde{p}_0 \frac{\partial \tilde{p}_{y'}}{\partial \tilde{z}} + \tilde{h}_0^3 \tilde{p}_{y'} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right] = \\ & \Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\tilde{h}_0 \tilde{p}_{y'} \right] + 2\Lambda i \gamma \left[\tilde{h}_0 \tilde{p}_{y'} \right] \end{aligned} \quad (\text{V.34})$$

La résolution des EDPs relatives aux perturbations permet de connaître les champs de pression dynamique $\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \tilde{p}_{x'}$ et $\tilde{p}_{y'}$ et d'en déduire les coefficients de raideur et d'amortissement du palier :

$$\begin{cases} A_{xx} \\ A_{yx} \end{cases} = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_x \begin{cases} \cos \theta \\ \sin \theta \end{cases} d\theta d\tilde{z}; \quad \begin{cases} A_{xy} \\ A_{yy} \end{cases} = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_y \begin{cases} \cos \theta \\ \sin \theta \end{cases} d\theta d\tilde{z} \quad (\text{V.35})$$

$$\begin{cases} B_{XX} \\ B_{YX} \end{cases} = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_{X'} \begin{cases} \cos \theta \\ \sin \theta \end{cases} d\theta d\tilde{z}; \quad \begin{cases} B_{XY} \\ B_{YY} \end{cases} = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_{Y'} \begin{cases} \cos \theta \\ \sin \theta \end{cases} d\theta d\tilde{z}$$

Les coordonnées de la position d'équilibre statique (X_0, Y_0) résultant de l'application de la charge statique $\mathbf{m}_0 = (W_{X_0}, W_{Y_0})$ sont déterminées à partir de la résolution des équations d'équilibre du rotor à l'aide de la méthode itérative de Newton-Raphson amortie. Dans le système de coordonnées (X, Y) , l'équilibre du rotor se traduit par les équations suivantes :

$$\tilde{W}_{X_0} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \cos \theta d\theta d\tilde{z} \quad (\text{V.36a})$$

$$\tilde{W}_{Y_0} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \sin \theta d\theta d\tilde{z} \quad (\text{V.36b})$$

Ou encore :

$$\tilde{W}_X(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{W}_{X_0} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \cos \theta d\theta d\tilde{z} = 0 \quad (\text{V.37a})$$

$$\tilde{W}_Y(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{W}_{Y_0} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \sin \theta d\theta d\tilde{z} = 0 \quad (\text{V.37b})$$

Où \tilde{W}_X et \tilde{W}_Y sont les composantes du vecteur résidu \mathbf{r} .

Le problème est bien entendu de trouver les valeurs adimensionnelles des coordonnées cartésiennes (\tilde{X}, \tilde{Y}) vérifiant simultanément les deux équations (V.37a) et (V.37b).

d) Méthode de Newton-Raphson

Soit $(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)$ la solution approchée ou l'estimé initial proche de la solution (\tilde{X}, \tilde{Y}) . Si les deux fonctions \tilde{W}_X et \tilde{W}_Y sont continues et continument différentiables, le développement en séries de Taylor des deux fonctions \tilde{W}_X et \tilde{W}_Y au point $(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)$ donne :

$$\tilde{W}_x(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{W}_x(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) + \left(\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{X}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{X}_0 + \left(\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{Y}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{Y}_0 + \text{termes d'ordre supérieur} \quad (\text{V.38a})$$

$$\tilde{W}_y(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{W}_y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) + \left(\frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{X}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{X}_0 + \left(\frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{Y}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{Y}_0 + \text{termes d'ordre supérieur} \quad (\text{V.38b})$$

avec $\delta \tilde{X}_0 = \tilde{X} - \tilde{X}_0$ et $\delta \tilde{Y}_0 = \tilde{Y} - \tilde{Y}_0$

Puisque (\tilde{X}, \tilde{Y}) est une solution du système d'équations non linéaires (IV.52), il en résulte :

$$0 = \tilde{W}_x(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) + \left(\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{X}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{X}_0 + \left(\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{Y}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{Y}_0 + \text{t.o.s} \quad (\text{V.39a})$$

$$0 = \tilde{W}_y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) + \left(\frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{X}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{X}_0 + \left(\frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{Y}} \right)_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \delta \tilde{Y}_0 + \text{t.o.s} \quad (\text{V.39b})$$

Soit sous forme matricielle :

$$-\begin{Bmatrix} \tilde{W}_x(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \\ \tilde{W}_y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{bmatrix}_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)} \begin{Bmatrix} \delta \tilde{X}_0 \\ \delta \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} + \text{t.o.s} \quad (\text{V.40})$$

En supposant l'existence de la matrice jacobienne inverse: $\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{bmatrix}_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)}^{-1}$, on a :

$$\begin{Bmatrix} \delta \tilde{X}_0 \\ \delta \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \tilde{X}_0 \\ \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{bmatrix}_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_x(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \\ \tilde{W}_y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \end{Bmatrix} + \text{t.o.s} \quad (\text{V.41})$$

ce qui donne pour la solution (\tilde{X}, \tilde{Y}) :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_0 \\ \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{bmatrix}_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_x(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \\ \tilde{W}_y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \end{Bmatrix} + \text{t.o.s} \quad (\text{V.42a})$$

Ou encore

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_0 \\ \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta\tilde{X}_0 \\ \delta\tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} \quad (\text{V.42b})$$

Lorsqu'on néglige les termes d'ordre supérieur (t.o.s), la solution (\tilde{X}, \tilde{Y}) devient une approximation qui sera prise comme nouveau point de départ $(\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1)$ de la prochaine approximation, soit :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{Y}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_0 \\ \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} - \left[\begin{array}{cc} \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{array} \right]_{(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \\ \tilde{W}_Y(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) \end{Bmatrix} \quad (\text{V.43})$$

Ainsi, on trouve la formule de récurrence de Newton-Raphson pour deux inconnues :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X}_{k+1} \\ \tilde{Y}_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_k \\ \tilde{Y}_k \end{Bmatrix} - \left[\begin{array}{cc} \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{array} \right]_{(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \\ \tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \end{Bmatrix} \quad (\text{V.44a})$$

$$k = 0, 1, 2, k_{\max}$$

ou encore :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X}_{k+1} \\ \tilde{Y}_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_k \\ \tilde{Y}_k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta\tilde{X}_k \\ \delta\tilde{Y}_k \end{Bmatrix} \quad (\text{V.44b})$$

Avec

$$\begin{Bmatrix} \delta\tilde{X}_k \\ \delta\tilde{Y}_k \end{Bmatrix} = - \left[\begin{array}{cc} \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}} \right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}} \right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}} \right) \end{array} \right]_{(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \\ \tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \end{Bmatrix}$$

L'inversion analytique de la matrice jacobéenne permet d'écrire :

$$\begin{cases} \delta\tilde{X}_k \\ \delta\tilde{Y}_k \end{cases} = - \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial\tilde{W}_Y}{\partial\tilde{Y}} & -\frac{\partial\tilde{W}_X}{\partial\tilde{Y}} \\ -\frac{\partial\tilde{W}_Y}{\partial\tilde{X}} & \frac{\partial\tilde{W}_X}{\partial\tilde{X}} \end{bmatrix}_{(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \\ \tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \end{Bmatrix}}{\begin{pmatrix} \frac{\partial\tilde{W}_X}{\partial\tilde{X}} & \frac{\partial\tilde{W}_Y}{\partial\tilde{Y}} - \frac{\partial\tilde{W}_X}{\partial\tilde{Y}} \frac{\partial\tilde{W}_Y}{\partial\tilde{X}} \end{pmatrix}_{(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}} \quad (\text{V.45})$$

$$k = 0, 1, 2, k_{\max}$$

Il est important de souligner que si l'estimé initial n'est pas très proche de la solution la méthode ne converge pas.

e) Méthode de Newton-Raphson amortie

L'algorithme de *Newton-Raphson* amorti qui converge plus vite que l'algorithme précédent s'écrit :

1. Etant donné ε_I , un critère d'arrêt
2. Etant donné k_{\max} , le nombre maximal d'itérations
3. Etant donné $(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)$, une approximation initiale de la solution du système (V.37)
4. Résoudre le problème EHD non linéaire en régime stationnaire gouverné par les équations couplées (V.31) et (V.34) par itérations : Calcul de \tilde{h}_0 et \tilde{p}_0
5. Calculer les composantes de la portance hydrodynamique :
$$\tilde{F}_{X0} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \cos\theta d\theta d\tilde{z} \text{ et } \tilde{F}_{Y0} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \sin\theta d\theta d\tilde{z}$$
6. Calculer les composantes du vecteur résidu : \tilde{W}_X et \tilde{W}_Y (Eqs V.37)
7. Evaluer les coefficients de la matrice jacobienne (dérivées partielles) par différentiation numérique :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\tilde{W}_X}{\partial\tilde{X}}\right)_k &\approx \frac{\tilde{W}_X(\tilde{X}_k + \delta, \tilde{Y}_k) - \tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}{\delta}, & \left(\frac{\partial\tilde{W}_X}{\partial\tilde{Y}}\right)_k &\approx \frac{\tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k + \delta) - \tilde{W}_X(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}{\delta}, \\ \left(\frac{\partial\tilde{W}_Y}{\partial\tilde{X}}\right)_k &\approx \frac{\tilde{W}_Y(\tilde{X}_k + \delta, \tilde{Y}_k) - \tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}{\delta}, & \left(\frac{\partial\tilde{W}_Y}{\partial\tilde{Y}}\right)_k &\approx \frac{\tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k + \delta) - \tilde{W}_Y(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)}{\delta} \end{aligned}$$

Cette approximation introduit une petite erreur dans le calcul des dérivées partielles de la matrice jacobienne, mais généralement la convergence est quand même très rapide. Dans cette approximation, la valeur de δ est 10^{-4} .

8. Calculer les corrections $(\delta\tilde{X}_k, \delta\tilde{Y}_k)$ en utilisant l'équation (V.45)

9. Calculer les nouvelles approximations du système non linéaire :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X}_{k+1} \\ \tilde{Y}_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_k \\ \tilde{Y}_k \end{Bmatrix} + \varpi^{(k)} \begin{Bmatrix} \delta\tilde{X}_k \\ \delta\tilde{Y}_k \end{Bmatrix}$$

où $\varpi^{(k)}$ est le coefficient de relaxation

$\varpi^{(k)} = 1$: méthode classique de *Newton*

$\varpi^{(k)} < 1$: méthode de *Newton* dite amortie

10. Si
$$\sqrt{\left\langle \begin{matrix} \tilde{W}_X^{(k+1)} & \tilde{W}_Y^{(k+1)} \end{matrix} \right\rangle \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X^{(k+1)} \\ \tilde{W}_Y^{(k+1)} \end{Bmatrix}} \leq \varepsilon_1 \text{ ou } |\tilde{W}_X^{(k+1)}| + |\tilde{W}_Y^{(k+1)}| \leq \varepsilon_1$$

ou encore
$$\sqrt{\left\langle \begin{matrix} \delta\tilde{X}_k & \delta\tilde{Y}_k \end{matrix} \right\rangle \begin{Bmatrix} \delta\tilde{X}_k \\ \delta\tilde{Y}_k \end{Bmatrix}} / \sqrt{\left\langle \begin{matrix} \tilde{X}_{k+1} & \tilde{Y}_{k+1} \end{matrix} \right\rangle \begin{Bmatrix} \tilde{X}_{k+1} \\ \tilde{Y}_{k+1} \end{Bmatrix}} \leq \varepsilon_1 \text{ et } k < k_{\max}$$

où $\varepsilon_1 = 10^{-6}$

- convergence atteinte : Les valeurs de $(\tilde{X}_{k+1}, \tilde{Y}_{k+1})$ correspondent aux coordonnées de la position d'équilibre statique qui en résulte de l'application de la charge statique \mathbf{W}_0 .
- calculer l'angle de calage statique du palier par : $\phi_0 = \tan^{-1}(\tilde{Y}_{k+1}/\tilde{X}_{k+1})$
- arrêt

11. Si le nombre maximal d'itérations k_{\max} est atteint :

- convergence non atteinte en k_{\max} itérations
- arrêt

12. Sinon, poser $k \leftarrow k + 1$

13. Retour à l'étape 4 pour une autre itération.

V.4 Analyse de la stabilité dynamique d'un palier à film d'huile : Système en vibrations libres

Les paliers à film d'huile constituent une source d'instabilité pour la ligne d'arbre qu'ils supportent due à la présence du film lubrifiant. Il est donc nécessaire d'étudier leur stabilité de fonctionnement. Différents critères de stabilité ont été proposés, le plus utilisé est celui de Routh-Hurwitz.

L'étude de la stabilité d'une position d'équilibre est effectuée dans le cas d'un rotor rigide symétrique de masse $2M$, et supporté horizontalement par deux paliers identiques dont la charge est $2W_0$. Chaque palier supporte la partie de masse M du rotor.

En vibrations libres, le système linéaire associé s'écrit :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{XX} & b_{XY} \\ b_{YX} & b_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{XX} & a_{XY} \\ a_{YX} & a_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{V.46})$$

Où $X(t)$ et $Y(t)$ sont les composantes instantanées du déplacement du centre de l'arbre à partir de sa position d'équilibre.

La solution de l'équation matricielle (IV.61) est de la forme :

$$\begin{cases} X = X^* e^{\lambda t} \\ Y = Y^* e^{\lambda t} \end{cases} \quad (\text{V.47})$$

Où $\lambda = \eta + i\nu$ est une valeur propre complexe $i = \sqrt{-1}$. Le signe du coefficient η (amortissement structural) permet de définir la stabilité du régime de fonctionnement du rotor ; c'est-à-dire :

$\eta < 0$, le régime est stable ;

$\eta > 0$, le régime est instable.

A la limite de la stabilité $\eta = 0$, le mouvement est purement harmonique $\lambda = i\nu$. Dans ces conditions, le report de X et Y dans les équations du mouvement conduit au système homogène :

$$\begin{bmatrix} a_{XX} - M\nu^2 + i\nu b_{XX} & a_{XY} + i\nu b_{XY} \\ a_{YX} + i\nu b_{YX} & a_{YY} - M\nu^2 + i\nu b_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X^* \\ Y^* \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{V.48})$$

qui admet une solution non triviale lorsque le déterminant est nul. L'annulation des parties réelles et imaginaires permet de déterminer la fréquence d'instabilité ν_c et la masse critique M_c au-delà de laquelle la position d'équilibre est instable.

Si l'on utilise les variables sans dimension suivantes :

$$A_{ij} = a_{ij} \frac{C}{W_0}, B_{ij} = b_{ij} \frac{C\omega}{W_0}, \tilde{M} = \frac{MC\omega^2}{W_0}, \gamma = \nu/\omega, (\tilde{X}, \tilde{Y}) = (X, Y)/C, (X', Y') = \frac{(\dot{X}, \dot{Y})}{C\omega}$$

$$(\tilde{X}''', \tilde{Y}''') = \frac{(\ddot{X}, \ddot{Y})}{C\omega^2}$$

le système précédent s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} A_{XX} - \tilde{M}\gamma^2 + i\gamma B_{XX} & A_{XY} + i\gamma B_{XY} \\ A_{YX} + i\gamma B_{YX} & A_{YY} - \tilde{M}\gamma^2 + i\gamma B_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}^* \\ \tilde{Y}^* \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{V.49})$$

L'annulation du déterminant conduit aux équations couplées :

$$\begin{cases} \tilde{M}_c \gamma_c^2 = \frac{A_{XX} B_{YY} + A_{YY} B_{XX} - A_{XY} B_{YX} - A_{YX} B_{XY}}{A_{XX} + B_{YY}} \\ \gamma_c^2 = \frac{(A_{XX} - \tilde{M}_c \gamma_c^2)(A_{YY} - \tilde{M}_c \gamma_c^2) - A_{YX} B_{XY}}{B_{XX} B_{YY} + B_{XY} B_{YX}} \end{cases} \quad \text{avec } \gamma_c = \frac{\nu_c}{\omega} \quad (\text{V.50})$$

- Si le coefficient $\gamma_c^2 < 0$, ceci entraîne que le palier est stable.
- Si le coefficient $\gamma_c^2 > 0$, alors nous pouvons calculer la masse critique \tilde{M}_c du rotor. Pour une masse \tilde{M} de l'arbre inférieure à la masse critique, le palier est stable.

A l'inverse, pour une masse de l'arbre $>$ à la masse critique, le palier est instable.

Il faut noter que la vitesse de rotation intervient dans le dimensionnement de la masse : la détermination d'une masse critique est donc équivalente à la détermination d'une vitesse

critique de rotation, soit : $\omega_c = \sqrt{\frac{\tilde{M}_c W_0}{M C}}$.

La courbe de variation de la masse critique adimensionnée \tilde{M}_c en fonction du nombre de

Sommerfeld $S = \frac{\mu\omega RL(\nu/c)^2}{\pi W_0}$ forme ce que l'on appelle la carte de stabilité du palier.

Remarque

Un palier ayant des termes directs de raideur et d'amortissement > 0 et des termes de couplage nul est infiniment stable. Cette situation peut être obtenue avec des paliers à géométrie variable tels que les paliers à patins oscillants.

V.5 Réponse dynamique d'un palier à film d'huile: Système en vibrations forcées

La trajectoire du centre de l'arbre (rotor) prédite par l'approche linéaire est toujours de forme elliptique pour un balourd de faible excentricité e_b . Celle-ci est obtenue à partir de la résolution du système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{XX} & b_{XY} \\ b_{YX} & b_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{XX} & a_{XY} \\ a_{YX} & a_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = me_b \omega^2 \begin{Bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{Bmatrix} \quad (\text{V.51a})$$

En variable sans dimension, l'équation (IV.65a) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{M} & 0 \\ 0 & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}'' \\ \tilde{Y}'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{XX} & B_{XY} \\ B_{YX} & B_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}' \\ \tilde{Y}' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{XX} & A_{XY} \\ A_{YX} & A_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \tilde{M} \varepsilon_b \begin{Bmatrix} \cos \tilde{t} \\ \sin \tilde{t} \end{Bmatrix} \quad (\text{V.52b})$$

Où : $\tilde{t} = \omega t$ et $\varepsilon_b = \frac{e_b}{C}$

Le vecteur solution du système d'équation (IV.65b) est de la forme :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{Y}_1 \end{Bmatrix} \cos \tilde{t} + \begin{Bmatrix} \tilde{X}_2 \\ \tilde{Y}_2 \end{Bmatrix} \sin \tilde{t} \quad (\text{V.53})$$

En remplaçant (IV.66) dans le système (IV.65b) et en identifiant les termes en $\cos \tilde{t}$ et $\sin \tilde{t}$, on aura :

$$\begin{bmatrix} (A_{XX} - \tilde{m}) & B_{XX} & A_{XY} & B_{XY} \\ -B_{XX} & (A_{XX} - \tilde{m}) & -B_{XY} & A_{XY} \\ A_{YX} & B_{YX} & (A_{YY} - \tilde{m}) & B_{YY} \\ -B_{YX} & A_{YX} & -B_{YY} & (A_{YY} - \tilde{m}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \end{Bmatrix} = \tilde{m} \varepsilon_b \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{V.54})$$

La solution du système (V.54) s'écrit :

$$\begin{cases} \tilde{X}_1 = \tilde{M}\varepsilon_b \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} \\ \tilde{X}_2 = -\tilde{M}\varepsilon_b \frac{BC - AD}{C^2 + D^2} \\ \tilde{Y}_1 = \tilde{M}\varepsilon_b \frac{EC + FD}{C^2 + D^2} \\ \tilde{Y}_2 = -\tilde{M}\varepsilon_b \frac{FC - ED}{C^2 + D^2} \end{cases} \quad (\text{V.55})$$

avec :

$$A = -\tilde{M} + A_{YY} - B_{XY}$$

$$B = A_{XY} + B_{YY}$$

$$C = \tilde{M}^2 - \tilde{M}(A_{XX} + A_{YY}) + A_{XX}A_{YY} - A_{XY}A_{YX} - (B_{XX}B_{YY} - B_{XY}B_{YX})$$

$$D = -\tilde{M}(B_{XX} + B_{YY}) + A_{XX}B_{YY} + A_{YY}B_{XX} - A_{XY}B_{YX} - A_{YX}B_{XY}$$

$$E = -A_{YX} + B_{XX}$$

$$F = \tilde{M} - A_{XX} - B_{YX}$$

Caractéristiques de la trajectoire du centre de l'arbre

La solution (V.55) du système (V.52b) correspond à une trajectoire de forme elliptique (figure V. 3) dont les caractéristiques sont les suivantes :

$a = \tilde{a}C$: demi-grand axe ;

$b = \tilde{b}C$: demi-petit axe ;

φ : angle de déphasage entre le vecteur balourd et le vecteur déplacement ;

δ : l'angle qui donne l'inclinaison du demi-grand axe par rapport à l'axe X .

Ainsi, dans le repère propre de l'ellipse (o_{a0}, X^*, Y^*), l'équation de l'ellipse s'écrit :

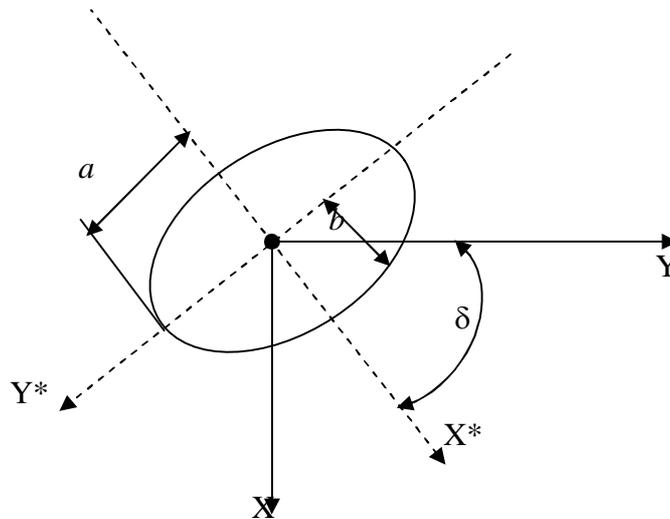


Figure V.3 Caractéristiques d'une trajectoire elliptique

$$\begin{cases} \tilde{X}^* = \tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \\ \tilde{Y}^* = \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \end{cases} \quad (\text{V.56})$$

$$\text{où : } (\tilde{X}^*, \tilde{Y}^*) = \frac{(X^*, Y^*)}{C}$$

Compte tenu de la relation (V.56), la projection sur (o_{a0}, X, Y) donne :

$$\begin{cases} \tilde{X} = \tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta \\ \tilde{Y} = -\tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta \end{cases} \quad (\text{V.57})$$

Les équations (IV.66) sont identiques aux équations (IV.70), ce qui permet d'écrire :

$$\begin{cases} \tilde{X}_1 \cos \tilde{t} + \tilde{X}_2 \sin \tilde{t} = \tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta \\ \tilde{Y}_1 \cos \tilde{t} + \tilde{Y}_2 \sin \tilde{t} = -\tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta \end{cases} \quad (\text{V.58})$$

Ce système d'équations étant vérifié quelque soit le temps \tilde{t} , il vient en identifiant les termes en $\cos \tilde{t}$ et $\sin \tilde{t}$:

$$\begin{cases} \tilde{X}_1 = \tilde{a} \cos \delta \cos \varphi + \tilde{b} \sin \delta \sin \varphi \\ \tilde{X}_2 = -\tilde{a} \cos \delta \sin \varphi + \tilde{b} \sin \delta \cos \varphi \\ \tilde{Y}_1 = -\tilde{a} \sin \delta \cos \varphi + \tilde{b} \cos \delta \sin \varphi \\ \tilde{Y}_2 = \tilde{a} \sin \delta \sin \varphi + \tilde{b} \cos \delta \cos \varphi \end{cases} \quad (\text{IV.72})$$

La résolution des équations (IV.72) permet de déterminer les caractéristiques de l'ellipse :

$$\begin{cases} \tilde{a} = \sqrt{\frac{(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 + \tilde{Y}_1^2 + \tilde{Y}_2^2)}{2}} + \sqrt{(\tilde{X}_1 \tilde{Y}_1 + \tilde{X}_2 \tilde{Y}_2)^2 + \frac{1}{4}(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 - \tilde{Y}_1^2 - \tilde{Y}_2^2)^2} \\ \tilde{b} = \sqrt{\frac{(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 + \tilde{Y}_1^2 + \tilde{Y}_2^2)}{2}} - \sqrt{(\tilde{X}_1 \tilde{Y}_1 + \tilde{X}_2 \tilde{Y}_2)^2 + \frac{1}{4}(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 - \tilde{Y}_1^2 - \tilde{Y}_2^2)^2} \\ \delta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{-2(\tilde{X}_1 \tilde{Y}_1 + \tilde{X}_2 \tilde{Y}_2)}{\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 - \tilde{Y}_1^2 - \tilde{Y}_2^2} \right) \\ \varphi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{-2(\tilde{X}_1 \tilde{X}_2 + \tilde{Y}_1 \tilde{Y}_2)}{\tilde{X}_1^2 - \tilde{X}_2^2 + \tilde{Y}_1^2 - \tilde{Y}_2^2} \right) \end{cases} \quad (\text{IV.73})$$

Coefficients de raideur et d'amortissement

La connaissance de la distribution des champs de pressions dynamiques complexes et à partir des équations (22) et (23) permet de déterminer les coefficients de raideur et d'amortissement sans dimension du film lubrifiant, dans le repère intermédiaire lié à la ligne des centres (O_c, ε, ϕ) sont obtenues par le calcul des intégrales suivantes :

$$Z_{\varepsilon\varepsilon} = -2 \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \tilde{Q}_\varepsilon \cos \theta d\tilde{z}d\theta ; Z_{\varepsilon\phi} = -2 \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \tilde{Q}_\phi \cos \theta d\tilde{z}d\theta \quad (26)$$

$$Z_{\phi\varepsilon} = -2 \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \tilde{Q}_\varepsilon \sin \theta d\tilde{z}d\theta ; Z_{\phi\phi} = -2 \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \tilde{Q}_\phi \sin \theta d\tilde{z}d\theta$$

Avec $Z_{\varepsilon\varepsilon} = A_{\varepsilon\varepsilon} + i\gamma B_{\varepsilon\varepsilon}$, etc. Sont les impédances complexes adimensionnées, $A_{\varepsilon\varepsilon} = \text{Real}(Z_{\varepsilon\varepsilon})$, et $B_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{1}{\gamma} \text{Im}(Z_{\varepsilon\varepsilon})$, etc. sont les coefficients de raideur et d'amortissement adimensionnés, respectivement.

Le premier indice de $A_{\alpha\beta}$, avec $(\alpha, \beta) = (\varepsilon, \phi)$, exprime la direction de la force appliquée par le palier, et le deuxième indice exprime la direction de déplacement de l'arbre du palier, pour $B_{\alpha\beta}$ le premier et le deuxième indices indiquent la composante de la force et la direction de la vitesse respectivement.

Le changement du système de coordonnées permet d'exprimer les coefficients de raideur et d'amortissement sans dimension dans le repère (O_c, X, Y) :

$$\begin{bmatrix} A_{XX} & A_{XY} \\ A_{YX} & A_{YY} \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} A_{\varepsilon\varepsilon} & A_{\varepsilon\phi} \\ A_{\phi\varepsilon} & A_{\phi\phi} \end{bmatrix} \mathbf{R} \quad (27)$$

Et de relations similaires pour les coefficients d'amortissement.

La matrice de rotation \mathbf{R} est définie par :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \phi_0 & \sin \phi_0 \\ -\sin \phi_0 & \cos \phi_0 \end{bmatrix}$$

ϕ_0 : est l'angle de calage statique

V.11. Critère de stabilité de Lund:

Pour un système en vibration libre, les équations du mouvement s'écrivent :

Où x et y sont les composantes, dans le repère fixe, du déplacement du centre de l'arbre à partir de la position d'équilibre statique O_{a0} .

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} \\ b_{yx} & b_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = 0 \quad (1)$$

En vibrations libres, les équations du mouvement de l'arbre suivant les directions x et y s'écrivent en variables sans dimension comme suit :

$$\begin{bmatrix} \bar{M} & 0 \\ 0 & \bar{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}'' \\ \bar{y}'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2)$$

Pour trouver la valeur limite du régime stable, Lund a proposé une approche du problème partant du principe que sur le seuil de stabilité, le mouvement doit être un mouvement orbital où on obtient un amortissement structural nul ($\eta = 0$) . il consiste à chercher la solution du système sous une forme purement harmonique, $\lambda = i\gamma$.

L'introduction de ce type de solution dans les équations (2) conduit au système homogène :

$$\begin{bmatrix} Z_{xx} - \bar{M}\gamma^2 & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} - \bar{M}\gamma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 0 \quad (3)$$

Pour trouver une solution non triviale, le déterminant de l'équation (3) doit être nul. Cette condition permet de déterminer une masse critique du système \tilde{M}_c et une fréquence de fouettement notée γ_c comme suit [12] :

$$\tilde{M}_c = \frac{A_{eq}}{\gamma_c^2} \quad (28)$$

$$\gamma_c^2 = \frac{(A_{xx} - A_{eq})(A_{yy} - A_{eq}) - A_{xy}A_{yx}}{B_{xx}B_{yy} - B_{xy}B_{yx}} \quad (29)$$

avec,

$$A_{eq} = \frac{A_{xx}B_{yy} + A_{yy}B_{xx} - A_{xy}B_{yx} - A_{yx}B_{xy}}{B_{xx} + B_{yy}},$$

La détermination de γ_c s'effectue d'une manière itérative à l'aide de la méthode des approximations successive Figure 5

La valeur estimé initialement de γ_c est 1 correspondant à une excitation synchrone ($\nu = \omega$).

Une valeur négative de γ_c^2 indique que le système est stable. D'autre part, si \tilde{M}_c est <0 pour un coefficient $\gamma_c^2 >0$, le palier est instable pour toute valeur de la masse du rotor.

V.12. Traitement numérique de l'équation de Reynolds dans le cas statique

Les équations (19, 22, 23) de zéro et du premier ordre sont numériquement résolues en utilisant les méthodes des éléments finis et des différences finies.

A cause de la symétrie axiale, les calculs sont effectués sur le demi palier qui est divisé en éléments rectangulaires $N_\theta \times N_z$ d'une surface égale à $\Delta\theta \times \Delta\tilde{z}$,

Avec $\Delta\theta = \frac{2\pi}{N_\theta}$ and $\Delta\tilde{z} = \frac{1/2}{N_z}$ sont les maillages du domaine dans la direction circonférentielle axiale respectivement. Figure 7 et 8.

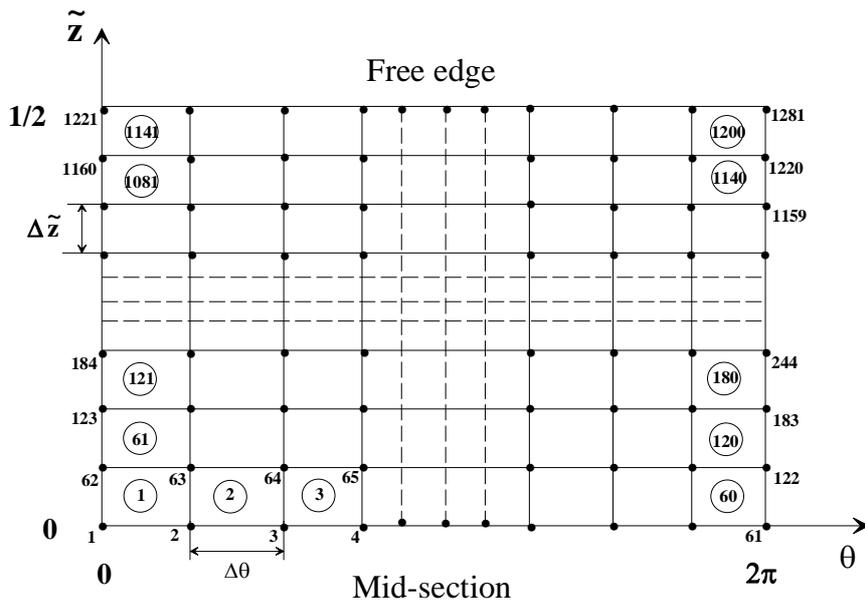


Figure V.7 Maillage en éléments finis pour la résolution de l'équation de Reynolds statique d'ordre zéro dans le demi palier

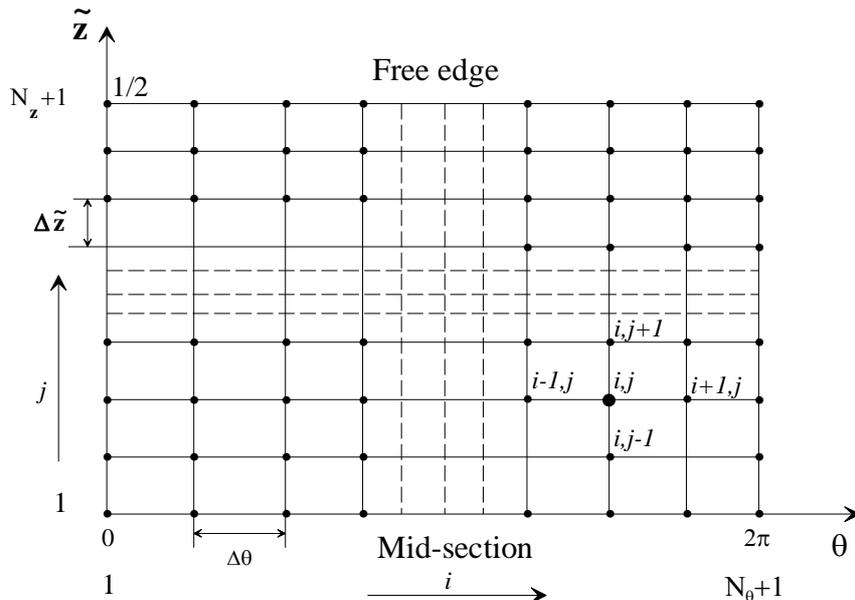


Figure V.8 Maillage en différences finies pour la résolution des équations dynamiques d'ordre un dans le demi palier

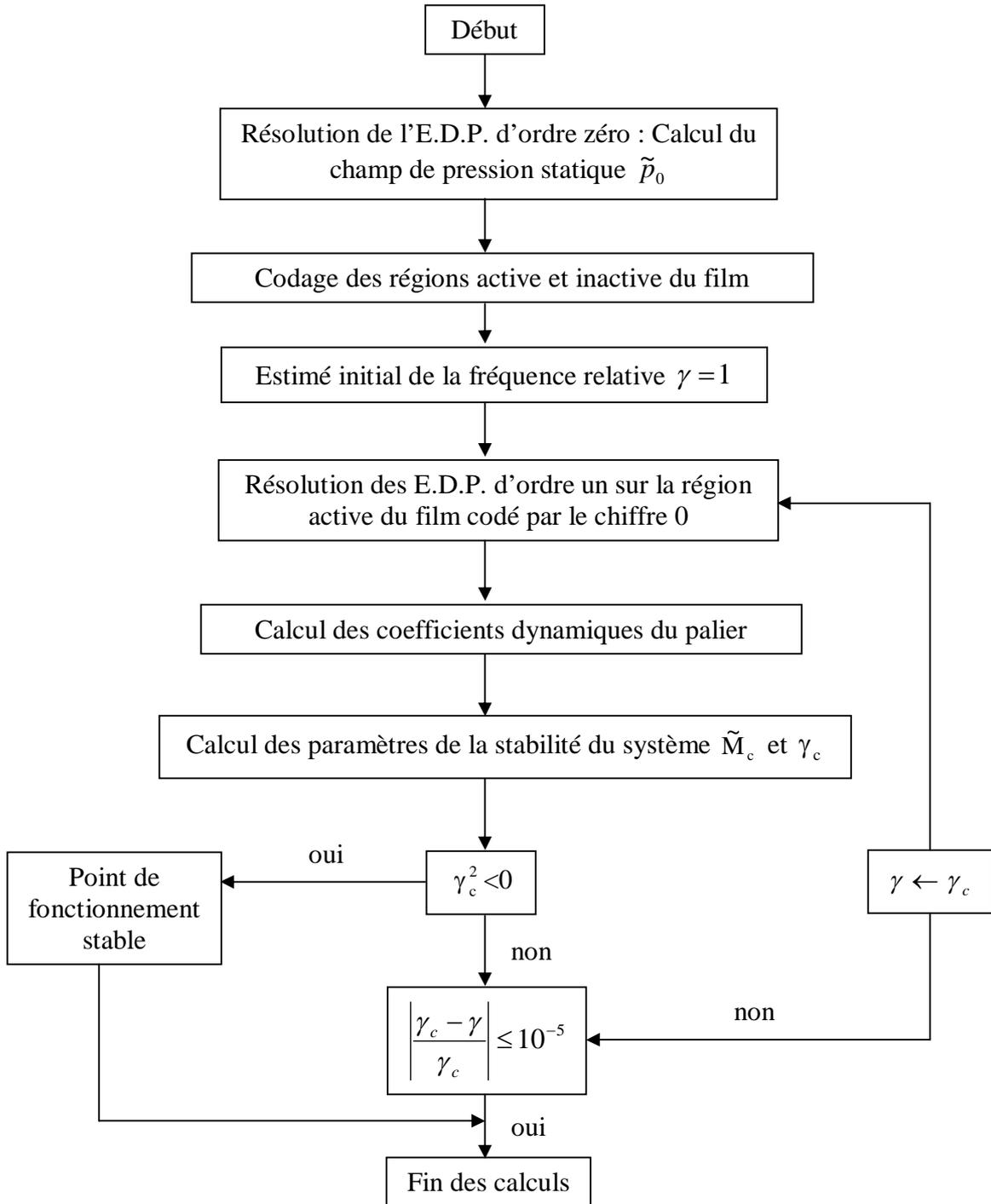


Figure V.9 Recherche des paramètres de stabilité par la méthode des approximations successives.

V.13. Solution de l'équation de Reynolds d'ordre zéro

L'équation de Reynolds qui est une équation, aux dérivées partielles, scalaire non linéaire du second ordre de type elliptique qui n'admet pas de solution analytique sauf pour des configurations simples.

Pour trouver une solution approchée, nous devons remplacer le problème continu, dont le nombre de degrés de liberté est infini par un système discret ayant un nombre fini de degrés de liberté et représenté par un système d'équations algébriques qui seront ensuite résolues par les méthodes numériques.

Cette tâche de discrétisation peut être remplie par la méthode des éléments finis. Cependant, cette dernière utilise une formulation intégrale (ou variationnelle) plutôt que des équations aux dérivées partielles. Cette formulation intégrale sera effectuée par la méthode de Galerkin, qui est l'une des approches des résidus pondérés, et qui constitue la meilleure technique pour obtenir des solutions approchées des équations différentielles linéaires et non linéaires, parce qu'offrant la procédure la plus générale pour dériver les équations élémentaires directement des équations différentielles et peuvent être appliquées à la plupart des problèmes pratiques des sciences de l'ingénieur.

Une fois la variable du domaine, qui est la distribution de la pression dans le fluide, connue nous pourrions calculer les performances statiques des paliers aérodynamiques intégration du champ de vitesses moyennes, la portance par intégration du champ de pression.

V.14. Approximation des formes intégrales par éléments finis

V.14.1. Principe de la méthode

La méthode des éléments finis est une technique qui remplace un problème continu au nombre de degrés de liberté infini par un problème discret dont le nombre de degrés de liberté est fini. Les étapes de base dans l'analyse du problème par éléments finis sont :

- (i) discrétisation du domaine (milieu fluide);
- (ii) approximation de la pression sur un élément;
- (iii) formation des matrices et vecteurs caractéristiques élémentaires;
- (iv) assemblage des matrices et vecteurs élémentaires pour obtenir le système global;
- (v) introduction des conditions aux limites essentielles sur la pression;
- (vi) calcul du champ de la pression en tout point du fluide.

La formulation de Galerkin nous permet d'écrire l'équation (19) en un résidu faible :

$$\tilde{W}(\tilde{p}_0) = \iint_{\tilde{D}} \delta \tilde{p}_0 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\tilde{p}_0 \tilde{h}_0^3 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\tilde{p}_0 \tilde{h}_0^3 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right) - \Lambda \frac{\partial (\tilde{p}_0 \tilde{h}_0)}{\partial \theta} \right) d\tilde{D} = 0 \quad (30)$$

Où $\delta \tilde{p}_0$ est la première variation de \tilde{p}_0 , $\tilde{D} = (0, 2\pi) \times (0, \frac{1}{2}) \subset R^2$ est le domaine de calcul (demi palier), et $d\tilde{D} = d\theta d\tilde{z}$.

En utilisant le théorème de Green (intégration par partie), la forme affaiblie de l'équation (30) prend une autre forme.

Comme résultat, la forme affaiblie diminue le degré de dérivées par rapport à \tilde{p}_0 et fait introduire deux types d'intégration.

$$\tilde{W}(\tilde{p}_0) = \iint_{\tilde{D}} \left(\tilde{p}_0 \tilde{h}_0^3 \left(\frac{\partial \delta \tilde{p}_0}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial \delta \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right) - \Lambda \tilde{p}_0 \tilde{h}_0 \frac{\partial \delta \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right) d\tilde{D} = 0 \quad (31)$$

L'élément isoparamétrique rectangulaire à 4 nœuds de cotés parallèles aux axes de référence est utilisé pour la discrétisation du domaine de calcul \tilde{D} sous forme

$$\tilde{D} = \bigcup_{e \geq 1} \tilde{D}^{(e)}, \text{ Figure. 7.}$$

Dans un domaine élémentaire $\tilde{D}^{(e)}$, on peut écrire l'équation (31) comme :

$$\tilde{W}^{(e)}(\tilde{p}_0^{(e)}) = \iint_{\tilde{D}^{(e)}} \left(\tilde{p}_0^{(e)} (\tilde{h}_0^{(e)})^3 \left(\frac{\partial \delta \tilde{p}_0^{(e)}}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{p}_0^{(e)}}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial \delta \tilde{p}_0^{(e)}}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial \tilde{p}_0^{(e)}}{\partial \tilde{z}} \right) - \Lambda \tilde{p}_0^{(e)} \tilde{h}_0^{(e)} \frac{\partial \delta \tilde{p}_0^{(e)}}{\partial \theta} \right) d\tilde{D} \quad (32)$$

$$\text{Avec : } \tilde{W} = \sum_{e \geq 1} \tilde{W}^{(e)} = 0.$$

Où:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_0^{(e)}(\theta, \tilde{z}) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\theta, \tilde{z}) \tilde{p}_{0_i}, \quad \delta \tilde{p}_0^{(e)}(\theta, \tilde{z}) = \sum_{i=1}^4 N_i(\theta, \tilde{z}) \delta \tilde{p}_{0_i}, \quad \tilde{h}_0^{(e)}(\theta, \tilde{z}) = \sum_{i=1}^4 N_i(\theta, \tilde{z}) \tilde{h}_{0_i}, \\ \frac{\partial \tilde{p}_0^{(e)}}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \tilde{p}_{0_i}, \text{ etc.} \end{aligned} \quad (33)$$

Dans l'équation (33), les N_i sont les fonctions de forme, p_{0_i} et h_{0_i} sont les valeurs nodales (degré de liberté) de la pression aérodynamique statique et du film lubrifiant statique dans un élément (e) respectivement.

Sous forme matricielle, l'équation (32) prend la forme de l'expression suivante :

$$\tilde{W}^{(e)}(\tilde{p}_0^{(e)}) = \langle \delta \tilde{p}_n \rangle \left[[k_e(\tilde{p}_0^{(e)})] \{ \tilde{p}_n \} - \{ f_e(\tilde{p}_0^{(e)}) \} \right] \quad (34)$$

Où $[k_e]$ et $\{ f_e \}$ sont des matrices élémentaires définies par :

$$k_{e_{ij}} = \iint_{\tilde{D}^{(e)}} \tilde{p}_0^{(e)}(\tilde{h}_0^{(e)})^3 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial N_j}{\partial \tilde{z}} \right) d\theta d\tilde{z},$$

$$\text{et } f_{e_i} = \iint_{\tilde{D}^{(e)}} \Lambda \tilde{p}_0^{(e)} \tilde{h}_0^{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} d\theta d\tilde{z} \quad (35)$$

On utilisant le concept de l'élément de référence (figure. 9), on transforme l'équation (35) à :

$$k_{e_{ij}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{p}_0^{(e)}(\xi, \eta) (\tilde{h}_0^{(e)}(\xi, \eta))^3 \left(j_{11}^2 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \lambda j_{22}^2 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) J_{11} J_{22} d\xi d\eta$$

et

$$f_{e_i} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Lambda \tilde{p}_0^{(e)}(\xi, \eta) \tilde{h}_0^{(e)}(\xi, \eta) j_{11} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} J_{11} J_{22} d\xi d\eta \quad (36)$$

Où J_{11} et J_{22} sont les coefficients de la matrice Jacobienne de la transformation géométrique :

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \text{ et } j_{11} = J_{11}^{-1} = \frac{1}{a} \text{ et } j_{22} = J_{22}^{-1} = \frac{1}{b}. \text{ Le produit } J_{11} J_{22} \text{ donne le}$$

déterminant de la matrice Jacobienne.

Sur l'élément de référence (figure. 9), la fonction de forme bilinéaire (polynôme de Lagrange) est exprimée comme :

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \quad ; \quad i=1, 2, 3, 4$$

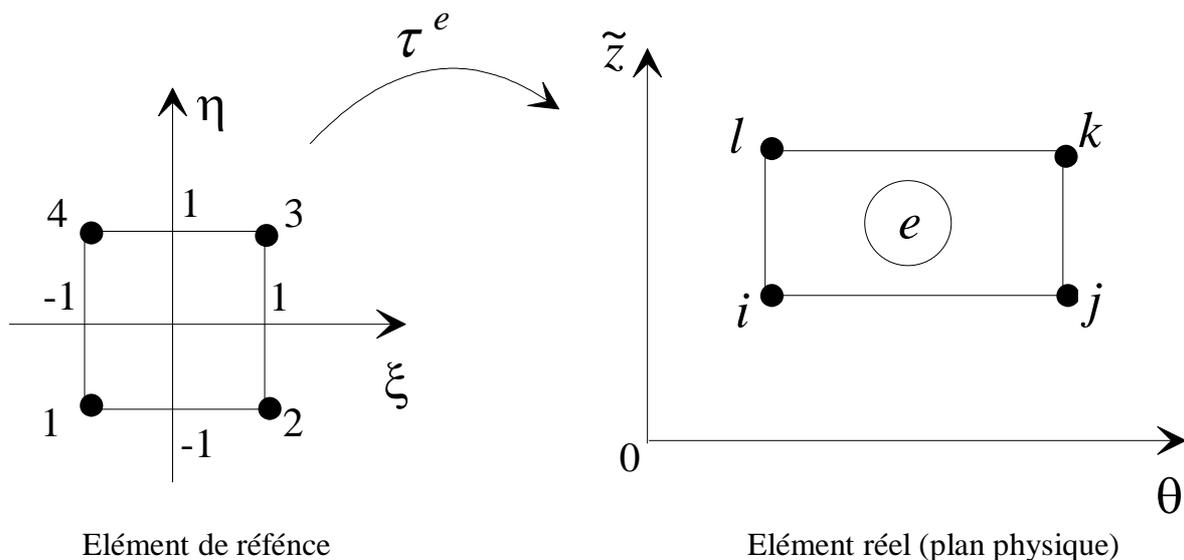


Figure 9 Transformation géométrique

Où ξ et η sont les coordonnées locales d'un élément de référence. Les relations entre les coordonnées locales (ξ, η) et les coordonnées globales (θ, \tilde{z}) satisfaisaient (figure. 10)

$$\xi = \frac{2}{a}(\theta - \theta_c), \quad \eta = \frac{2}{b}(\tilde{z} - \tilde{z}_c)$$

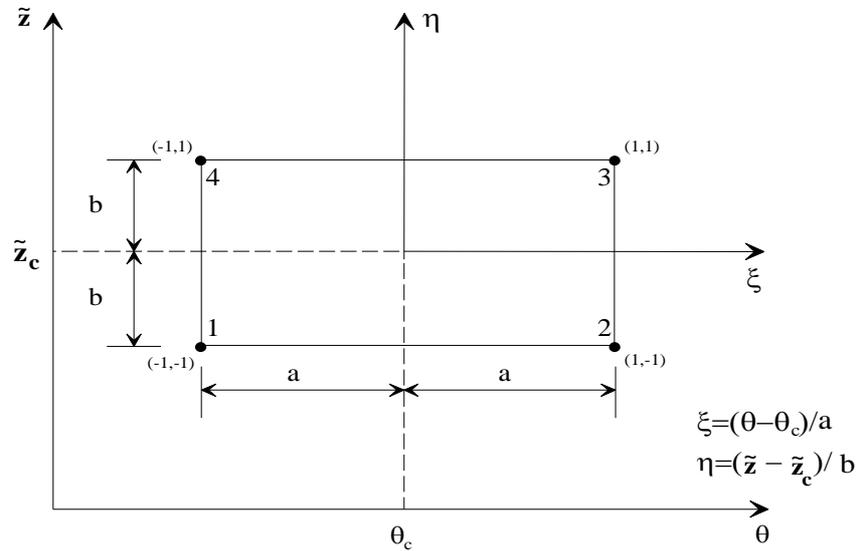


Figure 10 Un élément rectangulaire montrant la relation entre les coordonnées locales et globales

Où $a = \Delta\theta/2$ et $b = \Delta\tilde{z}/2$ sont la longueur et la largeur d'un élément $\tilde{D}^{(e)}$ dans le domaine physique, respectivement, et (θ_c, \tilde{z}_c) et le centre géométrique de l'élément.

La pression aérodynamique statique et l'épaisseur du film lubrifiant statique

Dans un élément de référence sont approchés par $\tilde{p}_0^{(e)}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) p_i$ et

$\tilde{h}_0^{(e)}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) h_i$, respectivement.

Les coefficients $k_{e_{ij}}$ et f_{e_i} sont numériquement évalués dans l'élément de référence en utilisant la quadrature de Gauss-Legendre avec 2×2 points d'intégration comme le montre la figure. 11.

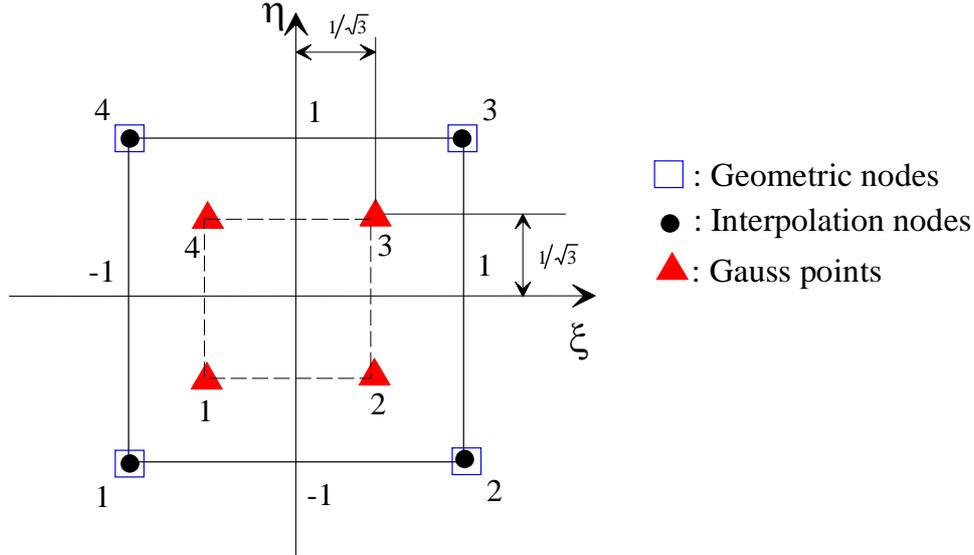


Figure 11 Représentation des points d'intégration de Gauss dans un élément de référence isoparamétrique

Après l'assemblage des matrices élémentaires, l'approximation par éléments finis nous ramène au système non linéaire suivant :

$$\tilde{W} = \langle \delta P_0 \rangle \left([K(P_0)] \{P_0\} - \{F(P_0)\} \right) = 0 \quad (37a)$$

$$\text{Ou : } [K(P_0)] \{P_0\} = \{F(P_0)\} \quad \forall \langle \delta P_0 \rangle \quad (37b)$$

Où $[K] = A_{e \geq 1} [k_e]$ est la matrice de fluidité globale, $\{P_0\}$ est le vecteur de pression nodal dans le domaine (D) , et $\{F\} = A_{e \geq 1} \{f_e\}$ est un vecteur global qui rassemble les termes d'entraînement et d'écrasement figurant dans le second membre de l'équation de Reynolds d'ordre zéro, équation (19).

$A_{e \geq 1}$: étant l'opérateur d'assemblage.

L'intégration du champ de pression aérodynamique statique sur le domaine d'un élément nous donne les composantes de la force adimensionnée :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{F}_{\varepsilon_0} \\ \tilde{F}_{\phi_0} \end{Bmatrix} = 2 \sum_{e \geq 1} \iint_{\tilde{D}^{(e)}} (\tilde{p}_0^{(e)} - 1) \begin{Bmatrix} \cos \theta^{(e)} \\ \sin \theta^{(e)} \end{Bmatrix} d\theta d\tilde{z} \quad (38a)$$

Ou :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{F}_{\varepsilon_0} \\ \tilde{F}_{\phi_0} \end{Bmatrix} = 2 \sum_{e \geq 1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\tilde{p}_0^{(e)} - 1) \begin{Bmatrix} \cos \theta^{(e)} \\ \sin \theta^{(e)} \end{Bmatrix} J_{11} J_{22} d\xi d\eta \quad (38b)$$

$$\text{avec } \theta^{(e)} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \theta_i,$$

L'élément choisit pour la résolution du problème aérodynamique est l'élément quadrilatéral à 4 nœuds (Q4), cet élément est isoparamétrique pour lequel les nœuds géométriques et les nœuds d'interpolation sont identiques. La figure () indique l'élément de référence correspondant.

Les composantes de la force (Eq. 38b) sont calculées par la quadrature de Gauss-Legendre avec 2×2 points d'intégration.

La capacité de charge et l'angle de calage statique sont déterminés en utilisant les relations suivantes :

$$\tilde{W}_0 = \left(\tilde{F}_{\varepsilon_0}^2 + \tilde{F}_{\phi_0}^2 \right)^{1/2} \quad (39)$$

$$\phi_0 = \text{Tan}^{-1} \left(- \frac{\tilde{F}_{\phi_0}}{\tilde{F}_{\varepsilon_0}} \right) \quad (40)$$

Solution des équations du premier ordre par la méthode des différences finies

En utilisant l'approximation par différences finies des dérivées partielle de la pression aérodynamique, les équations (22) et (23) deviennent :

$$\tilde{Q}_{\varepsilon_{ij}} = A_{ij} \tilde{Q}_{\varepsilon_{i+1,j}} + B_{ij} \tilde{Q}_{\varepsilon_{i-1,j}} + C_{ij} \tilde{Q}_{\varepsilon_{i,j+1}} + D_{ij} \tilde{Q}_{\varepsilon_{i,j-1}} - E_{ij} \quad (41)$$

$$\tilde{Q}_{\phi_{ij}} = A_{ij} \tilde{Q}_{\phi_{i+1,j}} + B_{ij} \tilde{Q}_{\phi_{i-1,j}} + C_{ij} \tilde{Q}_{\phi_{i,j+1}} + D_{ij} \tilde{Q}_{\phi_{i,j-1}} - E'_{ij} \quad (42)$$

L'application de l'algorithme de sur relaxation successive (SOR), les équations (41) et (42) prennent les formes suivantes :

$$\tilde{Q}_{\varepsilon_{ij}}^{(k+1)} = (1 - \Omega) \tilde{Q}_{\varepsilon_{ij}}^{(k)} + \Omega \left(A_{ij} \tilde{Q}_{\varepsilon_{i+1,j}}^{(k)} + B_{ij} \tilde{Q}_{\varepsilon_{i-1,j}}^{(k+1)} + C_{ij} \tilde{Q}_{\varepsilon_{i,j+1}}^{(k)} + D_{ij} \tilde{Q}_{\varepsilon_{i,j-1}}^{(k+1)} - E_{ij} \right) \quad (43)$$

$$\tilde{Q}_{\phi_{ij}}^{(k+1)} = (1 - \Omega) \tilde{Q}_{\phi_{ij}}^{(k)} + \Omega \left(A_{ij} \tilde{Q}_{\phi_{i+1,j}}^{(k)} + B_{ij} \tilde{Q}_{\phi_{i-1,j}}^{(k+1)} + C_{ij} \tilde{Q}_{\phi_{i,j+1}}^{(k)} + D_{ij} \tilde{Q}_{\phi_{i,j-1}}^{(k+1)} - E'_{ij} \right) \quad (44)$$

Où k et Ω sont le nombre d'itération et le facteur de sur relaxation qui varie entre 1 jusqu'à 2, respectivement.

Différents maillage ont été utilisés, on a adopté le maillage 91×51 Cette taille donne des résultats plus précis avec une vitesse rapide de convergence pour l'élément fini et les méthodes finies de différence.

V.15. Schéma de résolution du problème d'interaction fluide-structure :

Algorithme de la méthode de substitution successive :

Dans le cas d'un palier compliant lubrifié avec un fluide qui est l'air, l'équation de Reynolds d'ordre zéro () est discrétisée par la méthode des éléments finis dans un domaine 2 dimensions. Le système d'équations algébriques obtenu après discrétisation est résolu à l'aide d'un processus itératif.

La solution du problème élasto-aérodynamique en régime stationnaire qui est considérée comme un problème d'interaction fluide-structure fortement non linéaire est obtenue par la méthode de substitution successive, cette méthode consiste à construire une série de solutions $\{P_0^{(0)}\}, \{P_0^{(1)}\}, \dots, \{P_0^{(k-1)}\}, \{P_0^{(k)}\}$; $\{P_0^{(k)}\}$, avec le vecteur $\{P_0^{(k-1)}\}$ est calculé du vecteur de l'itération précédente en résolvant le système d'équation linéaire suivant :

$$[K(P_0^{(k-1)})]\{P_0^{(k)}\} = \{F(P_0^{(k-1)})\} ; k=1, 2, \dots, k_{max} \quad (45)$$

On peut écrire ce système sous la forme d'un résidu $\{R^{(k)}\}$:

$$\begin{aligned} \{R^{(k)}\} &= \{R(P_0^{(k-1)})\} = \{F(P_0^{(k-1)})\} - [K(P_0^{(k-1)})]\{P_0^{(k-1)}\} \\ [K(P_0^{(k-1)})]\{\Delta P_0^{(k)}\} &= \{R^{(k)}\} \\ \{P_0^{(k)}\} &= \{P_0^{(k-1)}\} + \Omega_0 \{\Delta P_0^{(k)}\} \end{aligned} \quad (46)$$

Avec Ω_0 est le facteur de relaxation qui assure et accélère la convergence du processus itératif.

L'algorithme de résolution est comme suit :

1. Lecture des données du problème $\varepsilon_0, R, L, C, t_b, s, l, E, \sigma, \omega, p_a, \mu$, facteur de relaxation Ω_0 , critère de convergence ε_p et le nombre maximal d'itération k_{max}
2. Initialisation du nombre d'itération $k=0$, la norme $\|n\|$ à 1 et le vecteur nodal global qui contient l'estimé initial de la pression statique $\{P_0^{(k)}\} = 1$.
3. Tant que $(\|n\| > \varepsilon_p)$ and $(k < k_{max})$, faire:
 - 3.1 Affecter $k \leftarrow k + 1$
 - 3.2 Calcul de l'épaisseur du film adimensionnée dans le cas indéformable à partir de l'équation () pour chaque élément en utilisant le maillage en éléments finis (figure)
 - 3.3 Initialisation de la matrice globale $[K]$ et $\{F\}$ à 0

3.4 Pour chaque élément, faire

3.4.1 Extraction du vecteur élémentaire $\{p_0^{(k-1)}\}$ du vecteur global $\{P_0^{(k-1)}\}$ au moyen de la table de connectivité

3.4.2 Calcul des matrices élémentaires $[k_e(p_0^{(k-1)})]$ et $\{f_e(p_0^{(k-1)})\}$ en utilisant la quadrature de Gauss-Legendre

3.4.3 Assemblage des $[k_e]$ en $[K]$, $\{f_e\}$ et en $\{F\}$

3.5 Construire les matrices réduites $[K_r]$ et $\{F_r\}$, en introduisant les conditions aux limites essentielles (24a) et (24b)

3.6 Résolution du système linéaire réduit $[K_r]\{P_r^{(k)}\} = \{F_r\}$ pour le vecteur de pression global réduit $\{P_0^{(k)}\}$ en utilisant la méthode de sur-relaxation successive (SOR) en prenant en considération les conditions aux limites (24c)

3.7 Construction du vecteur de pression global $\{P_0^{(k)}\}$ à partir de $\{P_r^{(k)}\}$ et les valeurs des conditions aux limites

3.8 Calculer $\{\Delta P_0^{(k)}\} = \{P_0^{(k)}\} - \{P_0^{(k-1)}\}$ et la norme relative minimisée $\{\Delta P_0^{(k)}\}$ c'est-à-dire

$$\|n\| = \frac{\sqrt{\langle \Delta P_0^{(k)} \rangle \{ \Delta P_0^{(k)} \}}}{\sqrt{\langle P_0^{(k)} \rangle \{ P_0^{(k)} \}}}$$

3.9 Actualisation du vecteur de pression global : $\{P_0^{(k)}\} = \{P_0^{(k-1)}\} + \Omega_0 \{\Delta P_0^{(k)}\}$

4. Fin de la boucle tant que

5. Calculer les forces d'équilibre statique et l'angle de calage statique à partir des équations (39) et (40)

6. Coder les nœuds dans lesquelles la pression est supérieure à la pression ambiante (figure 12 et 13). Cette étape est nécessaire pour la résolution des équations dynamique complexe du premier ordre, équation (22) et (23)

V.16. Méthode de résolution en régime dynamique :

Les calculs des performances dynamiques linéaires dues à de faibles amplitudes de perturbation sont effectués en supposant que la déformation de la structure (feuille supérieure et ondulée) dans des conditions dynamiques reste petite. La solution statique du problème d'interaction fluide-structure obtenue après la déformation élastique des feuilles est prise en

compte pour calculer les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement. Le processus de calcul du problème dynamique linéaire est décrit comme suit :

1. Donner une valeur initiale de la fréquence relative ($\gamma = 1$ correspondant à la fréquence d'excitation synchrone)
2. Résoudre les équations aux dérivées partielles d'ordre un (22) et (23) sur la grille des différences finies du film pour obtenir les pressions dynamiques complexes adimensionnées \tilde{Q}_ε et \tilde{Q}_ϕ (figure 8) par la méthode des sur-relaxations successive (SOR). Il convient de noter que les calculs sont effectués pour chaque nœud codé appartenant à la région pressurisée. Le critère d'arrêt du processus de calcul est :

$$\text{Max} \left(\left| \frac{\tilde{Q}_{\alpha_{ij}}^{(k+1)} - \tilde{Q}_{\alpha_{ij}}^{(k)}}{\tilde{Q}_{\alpha_{ij}}^{(k+1)}} \right| \right) \leq 10^{-5} \quad , \text{ avec le symbole } || \text{ signifie la magnitude de la}$$

quantité complexe $\frac{\tilde{Q}_{\alpha_{ij}}^{(k+1)} - \tilde{Q}_{\alpha_{ij}}^{(k)}}{\tilde{Q}_{\alpha_{ij}}^{(k+1)}}$ et $\alpha = (\varepsilon, \phi)$.

3. Calculer les impédances complexe dans le film à partir de l'équation (26)
 4. Calculer les paramètres de stabilité du système γ_c^2 à partir de l'équation (29) et tester son signe. Si γ_c^2 est positive alors calculer la masse critique à partir de l'équation (28), Et comparé la fréquence avec la fréquence d'excitation critique γ_c . Si le test $\left| \frac{\gamma - \gamma_c}{\gamma_c} \right| \leq 10^{-4}$ n'est pas satisfait, on pose $\gamma \leftarrow \gamma_c$ et retour à l'étape 2.
2. D'après le critère de stabilité de Lund, une valeur négative de γ_c^2 signifie que la position de fonctionnement définie en coordonnées polaires (ε_0, ϕ_0) est stable.

V.6 Résultats discussion :

Basé sur l'analyse décrite précédemment, deux codes de calculs ont été développés pour étudier les effets des déformations élastiques sur la structure à feuilles dans le cas statique et dynamique et cela pour étudier les performances du palier tel que la stabilité en utilisant la méthode de perturbation du premier ordre.

V.6.1 Validation :

Pour valider les programmes de calcul développés pour l'étude du comportement dynamique linéaire du palier et performances statiques et dynamiques tel que, l'angle de calage, la portance aérodynamique, la pression statique maximale.

Les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement sont calculés en prenant en compte les différentes conditions aux limites employés par Heshmat et al [10] et Peng et Carpino [11] pour une excentricité $\varepsilon_0=0.60, 0.75, \text{ et } 0.90$.

On note que le système d'axe en coordonnées cartésienne utilisé par Heshmat et al pour calculer les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement est différent de celui employé dans notre étude actuelle.

Pour rendre la comparaison plus simple, les quatre coefficients de raideur obtenus par Heshmat et al sont convertis au système d'axe adopté dans notre travail.

Les résultats obtenus par les programmes développés sont comparés avec les résultats publiés par Heshmat et al, et Peng et Carpino dans les tableaux 1, 2 et 3.

Comme on peut voir, les résultats sont en bonne concordance même à des grandes valeurs d'excentricité relative, cependant, les valeurs des coefficients dynamiques publiés en [10] et [11] sont pas en bonne concordance.

Une explication convaincante de cette désconcordance est donnée par Peng et al dans la référence [11].

V.6.2 Effets des déformations élastiques sur les performances statiques et dynamiques du palier :

Le tableau 4 montre les détails géométriques du palier et les conditions opérationnelles d'un simple problème étudié.

Les paramètres adimensionnels calculés à partir des valeurs numériques sont donnés par le tableau 1 comme suit : $\Lambda = 1.07, \alpha = 0.4, R/L = 0.5, C/R = 2 \times 10^{-3}$ qui sont le nombre de compressibilité, le facteur de compliance, le rapport entre la longueur et le rayon et le rapport entre le jeu radial et le rayon respectivement.

La figure 14 montre le profil de la pression aérodynamique statique et leurs contours correspondant dans le demi palier à des une valeur d'excentricité relative $\varepsilon_0=0.80$.

On observe que l'effet de l'élasticité des feuilles produit une propagation de la distribution de la pression dans la direction circonférentielle du palier avec une réduction importante du pic de pression qui produit par conséquence une diminution de la capacité de charge développée par le palier.

L'augmentation de l'épaisseur du film aérodynamique sur toute la surface du palier développé explique bien la diminution du champ de pression.

On observe sur la présentation du champ de pression en 3D la présence d'une zone de dépression, c'est-à-dire que la pression est inférieure à la pression ambiante dans la région divergente du palier et cela pour le cas rigide et compliant.

L'existence de la zone de dépression produit une aspiration de l'air nécessaire pour remplacer le débit de l'air perdu sur les extrémités libres du palier, comme il est illustré sur les figures 6 et 15.

Sur la figure 16, on compare les distributions des parties réelles et imaginaires des pressions dynamiques \tilde{Q}_ε et \tilde{Q}_ϕ calculés sur le demi palier dans le cas rigide et compliant pour une excentricité $\varepsilon_0=0.80$.

Comme c'est le cas sous les conditions de fonctionnement statiques, la déformation élastique des feuilles affecte aussi les maximums des pressions dynamiques complexes et cet effet est plus significatif quand la déformation dynamique des feuilles est prise en considération en plus de la déformation statique.

On note que des résultats similaires ont été observés pour les deux cas rigide et compliant pour un palier lubrifié par l'eau de mère [31].

V.6.3 Effets de la déformation dynamique sur les coefficients dynamiques et le paramètre de stabilité :

En général, les résultats illustrés ont été obtenus pour trois cas :

- Cas d'un palier à air rigide,
- Cas d'un palier à air compliant, prise en compte des déformations statiques seules,
- Cas d'un palier à air compliant, prise en compte des déformations statiques et dynamiques,

Sur la figure 17, les coefficients dynamiques pour un palier aérodynamique rigide ont été tracés en fonction de la fréquence d'excitation. La vitesse de rotation est de 38 krpm et l'excentricité statique est de 0.8 qui correspond à un palier lourdement chargé. Les résultats montrent que les coefficients dynamiques restent constant pour des grandes valeurs de la fréquence d'excitation, cependant, on observe une évolution non linéaire pour ces coefficients à des valeurs faibles de la fréquence d'excitation.

Le coefficient de raideur direct dans la direction de la charge appliquée a_{xx} est plus important et il augmente avec l'augmentation de la fréquence d'excitation γ .

Le coefficient de raideur dans la direction horizontale a_{YY} présente un même comportement en exception qu'il a une faible magnitude.

Les coefficients de raideurs croisées a_{XY}, a_{YX} et la raideur directe a_{YY} sont significativement faible en magnitude comparés au coefficient direct a_{XX} et cela sur la totalité des valeurs de la fréquence d'excitation mise en étude.

Les coefficients d'amortissements diminuent monotonement et convergent pour une même valeur avec l'augmentation de la fréquence d'excitation.

De plus, les valeurs des coefficients d'amortissement croisés b_{XY} et b_{YX} varient l'un de l'autre significativement.

On peut dire que la fréquence d'excitation affecte significativement les coefficients dynamiques des paliers aérodynamiques à feuilles, et tous les coefficients d'amortissement diminuent et tendent vers une valeur nulle pour des fréquences d'excitation tendent vers l'infinie $\gamma \rightarrow +\infty$. Sur les figures 18 et 19, les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement sont tracés en fonction de la fréquence d'excitation dans le cas d'un palier compliant avec une excentricité relative $\varepsilon_0 = 0.8$. On observe que la déformation élastique des feuilles affecte significativement les coefficients de raideur et d'amortissement qui sont en fonction de la fréquence dynamique, et cet effet est plus significatif quand la déformation dynamique est prise en considération avec la déformation statique. Comparé aux résultats obtenus pour le palier rigide, la prise en compte de la déformation dynamique des feuilles provoque une diminution importante des valeurs des coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement.

La carte de stabilité du palier est illustrée sur la figure 20 en utilisant le critère de stabilité de Lund [12] pour les deux cas rigide et déformable, on remarque une diminution de la limite d'instabilité dans le cas où l'effet de la déformation statique et dynamique sont prises en compte, on note que des résultats pareils ont été observés pour le cas d'un palier marin [31].

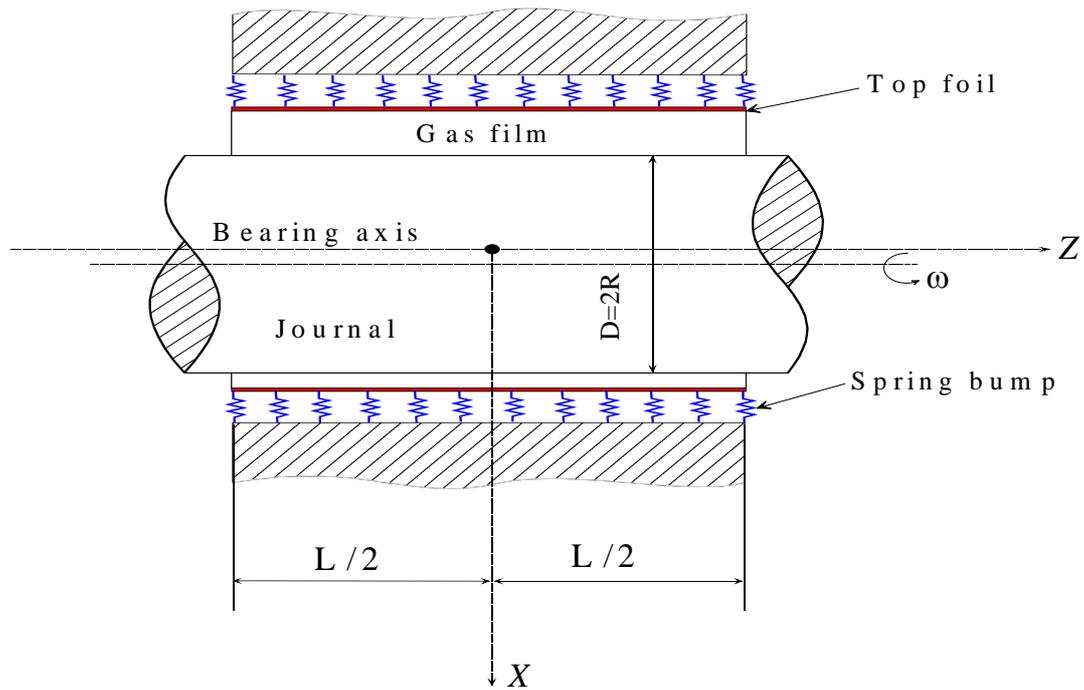


Figure V.4 Modèle de la structure à feuilles d'un palier aérodynamique

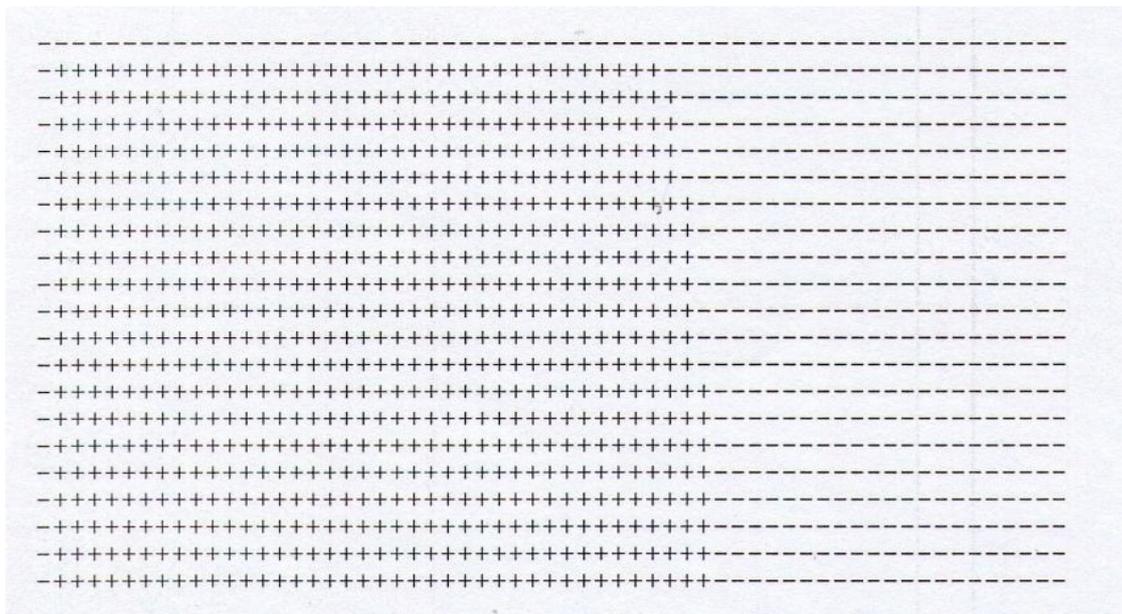


Figure V.5 Codage des régions actives et inactives du demi palier
 Définition du domaine d'intégration des équations différentielles d'ordre un.

Tableau 1 Comparaison des performances statique : angle de calage, portance aérodynamique et le pic de pression aérodynamique pour $L/D = \Lambda = 1$, $c/R = 8.64 \times 10^{-4}$

ε_0	α	ϕ_0 (degrees)	$\hat{W}_0 = W_0/P_a R^2 = L/R \tilde{W}_0$	$\tilde{p}_{0_{\max}} = p_{0_{\max}}/P_a$	Note
0.60	1.	33.1	0.576	1.253	(1)
		32.1	0.568	1.253	(2)
		34.0	0.567	-	(3)
0.75	1.	26.7	0.796	1.339	(1)
		27.7	0.778	-	(2)
		26.3	0.783	-	(3)
0.90	1.	21.6	1.052	1.431	(1)
		22.4	1.020	1.485	(2)
		21.4	1.028	-	(3)

Tableau 2 Comparaison des coefficients dynamiques dd raideurs adimensionnels, $L/D = \Lambda = 1.$, $c/R = 8.64 \times 10^{-4}$, and $\alpha = \gamma = 0$.

ε_0	$\hat{A}_{XX} = C_{a_{XX}}/P_a R^2 = L/R A_{XX}$	$\hat{A}_{XY} = C_{a_{XY}}/P_a R^2$	$\hat{A}_{YX} = C_{a_{YX}}/P_a R^2$	$\hat{A}_{YY} = C_{a_{YY}}/P_a R^2$	Note
0.60	3.304	2.398	0.131	1.975	(1)
	3.237	2.345	0.125	1.920	(2)
	4.174	0.775	0.225	1.049	(3)
0.75	9.208	4.185	1.345	3.365	(1)
	8.981	3.989	1.166	3.416	(2)
	10.424	1.715	1.405	2.397	(3)
0.90	46.957	10.383	6.395	7.261	(1)
	44.593	10.151	6.024	7.202	(2)
	45.572	5.451	6.192	6.384	(3)

Tableau 2 Comparaison des coefficients d'amortissements adimensionnels,
 $L/D = \Lambda = 1.$, $C/R = 8.64 \times 10^{-4}$, $\alpha = 0.$, and $\gamma = 1.$

ε_0	$\hat{B}_{XX} = C\omega b_{xx}/P_a R^2 = L/R B_{XX}$	$\hat{B}_{XY} = C\omega b_{xy}/P_a R^2$	$\hat{B}_{YX} = C\omega b_{yx}/P_a R^2$	$\hat{B}_{YY} = C\omega b_{yy}/P_a R^2$	Note
0.60	1.628	-0.715	0.452	0.616	(1)
	1.573	-0.722	0.272	0.604	(2)
0.75	2.097	-1.090	0.454	0.849	(1)
	2.322	-1.005	0.511	0.747	(2)
0.90	3.184	-1.828	0.202	0.968	(1)
	5.126	-1.585	0.846	0.955	(2)

(1) Présent travail

(2) Résultats publiés par la Réf. [10]

(3) Résultats publiés par la Réf. [11]

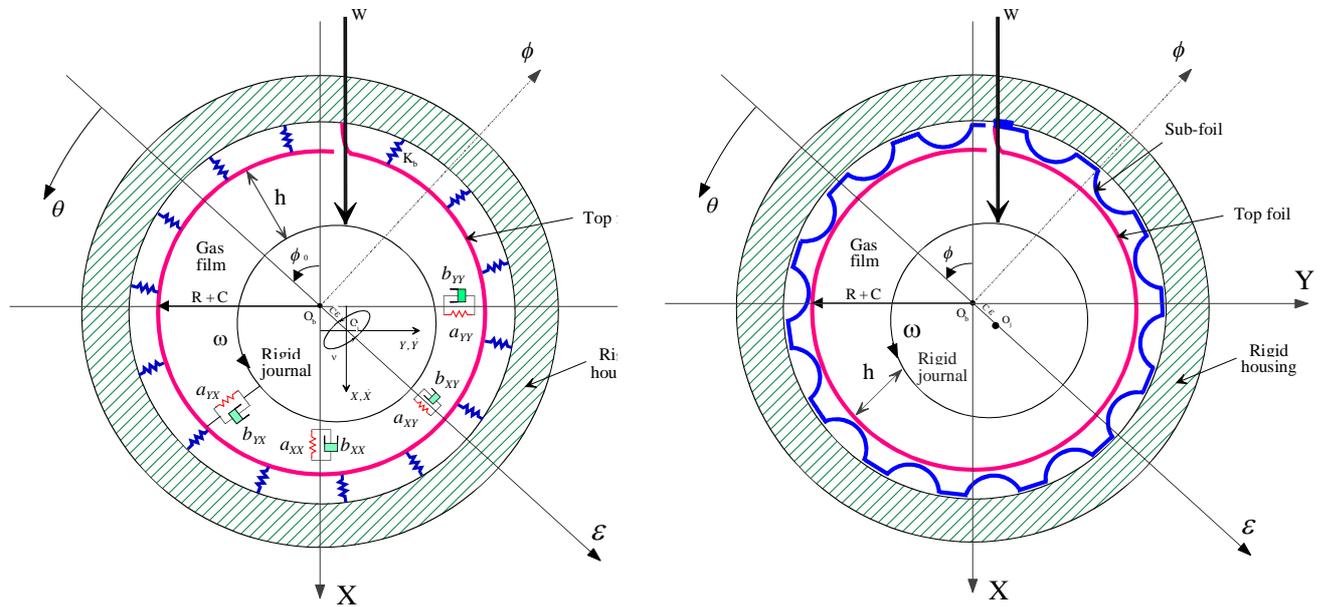


Figure V.6 Schéma explicatif d'un palier à feuilles montrant le système d'axe

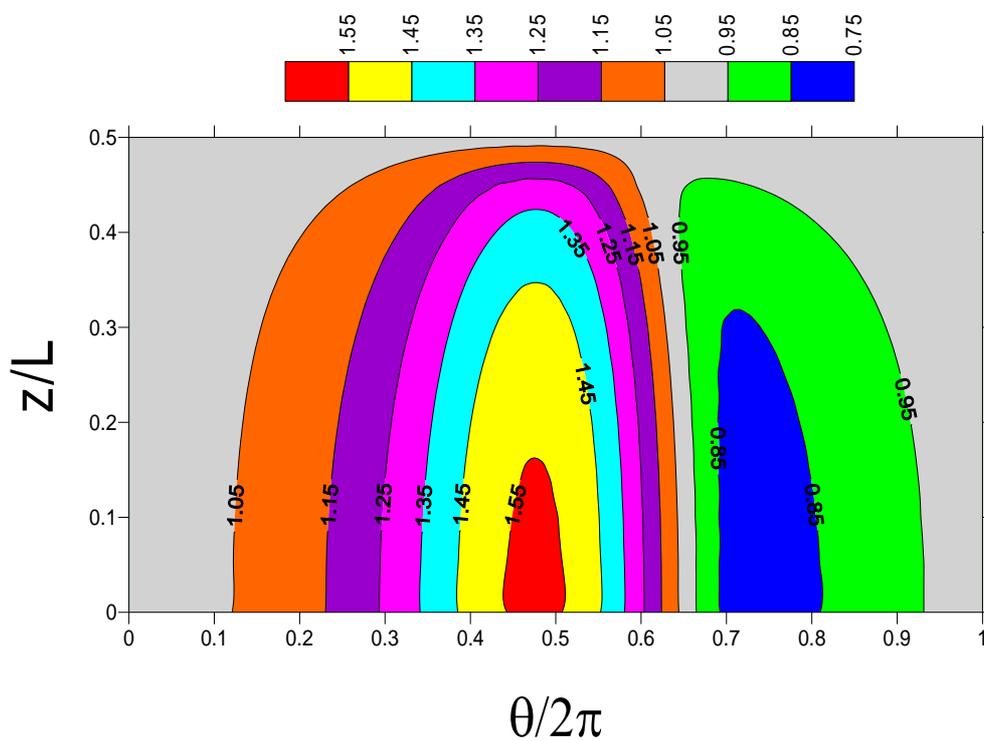
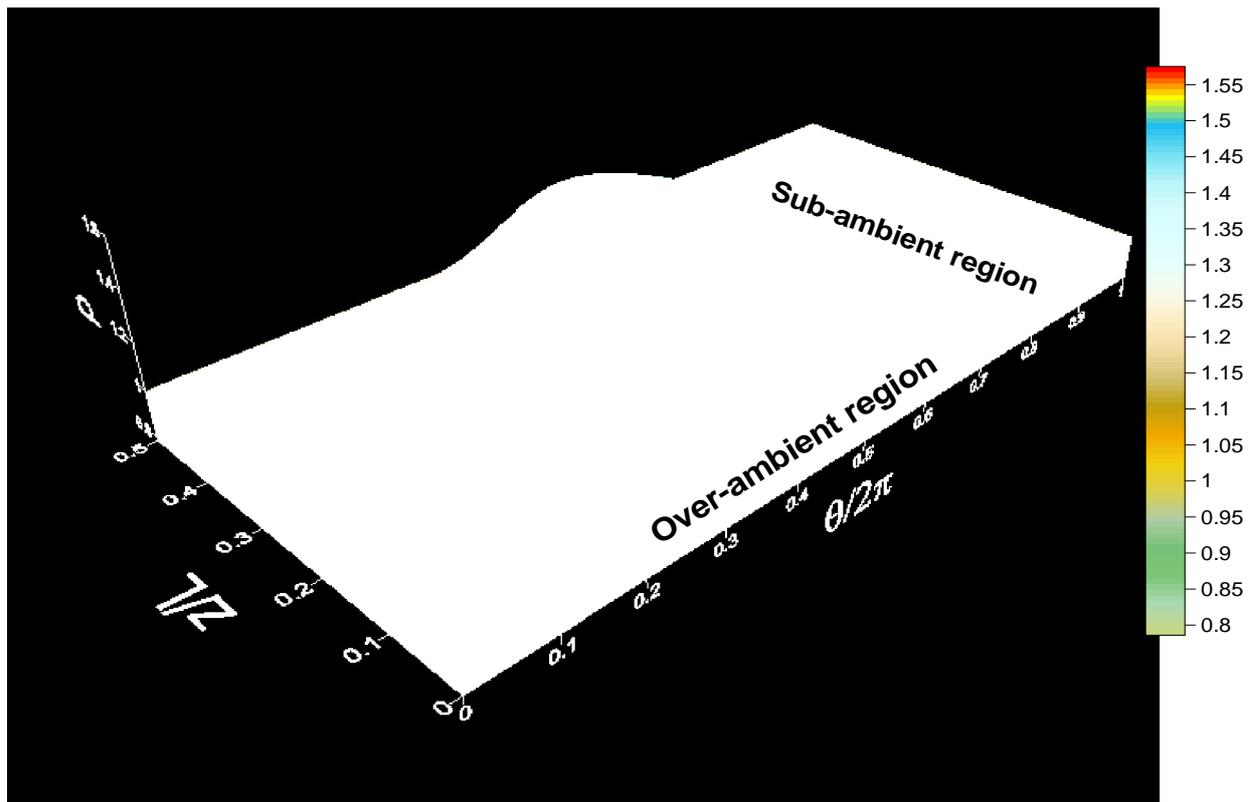


Figure V.7 Distribution de la pression aérodynamique pour un palier compliant, ($\varepsilon_0 = 0.80$, $\Lambda = 1.07$)

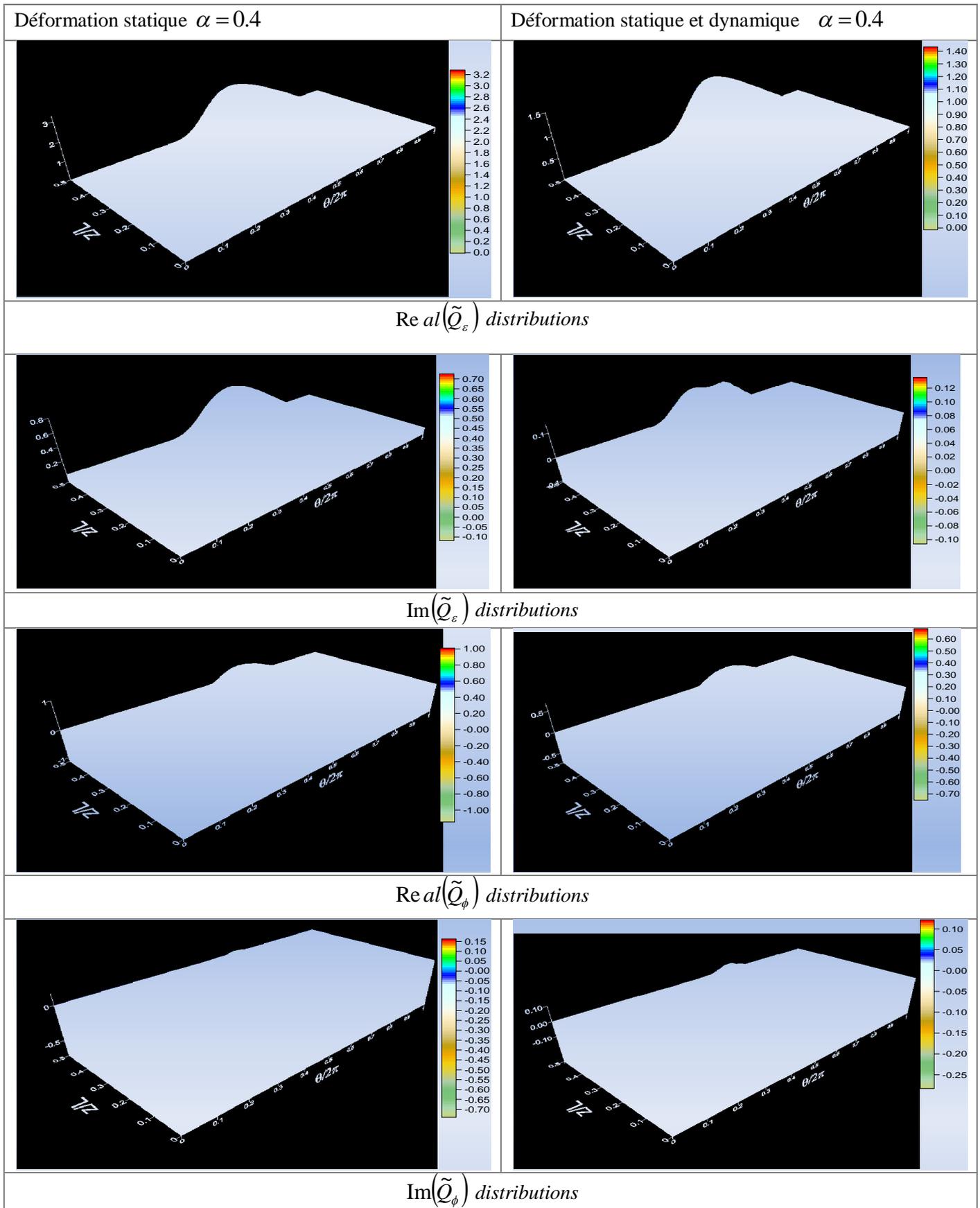


Figure V.8 Représentation 3D des parties réelles et imaginaires des pressions dynamiques calculées pour un palier compliant, $\varepsilon_0 = 0.80$, $\Lambda = 1.07$, et $\gamma = 1$.

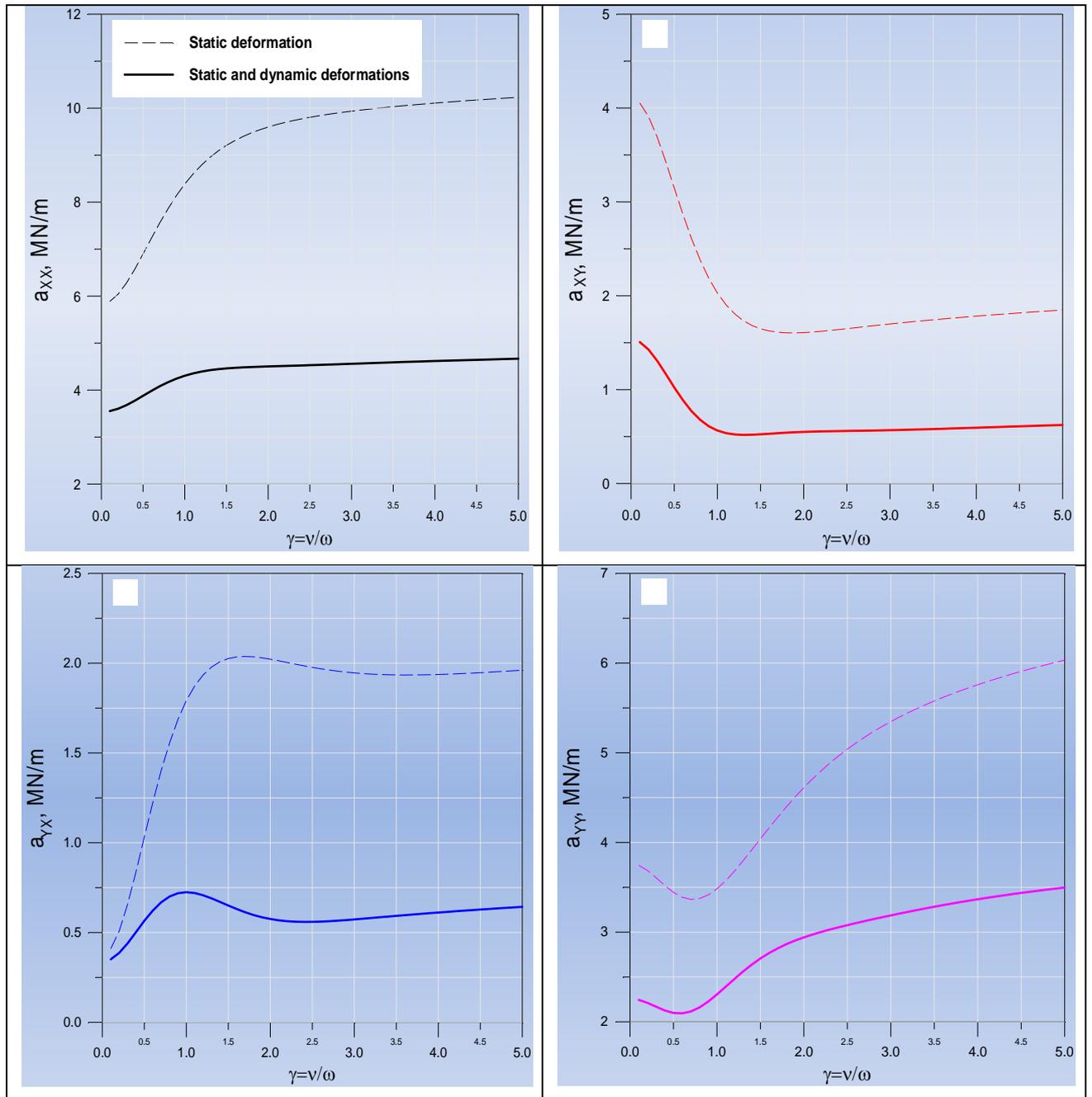


Figure V.9 Coefficients de raideurs pour un palier aérodynamique à feuilles en fonction de la fréquence d'excitation, $\varepsilon_0 = 0,80$, $\Lambda = 1.07$, et $\alpha = 0.4$

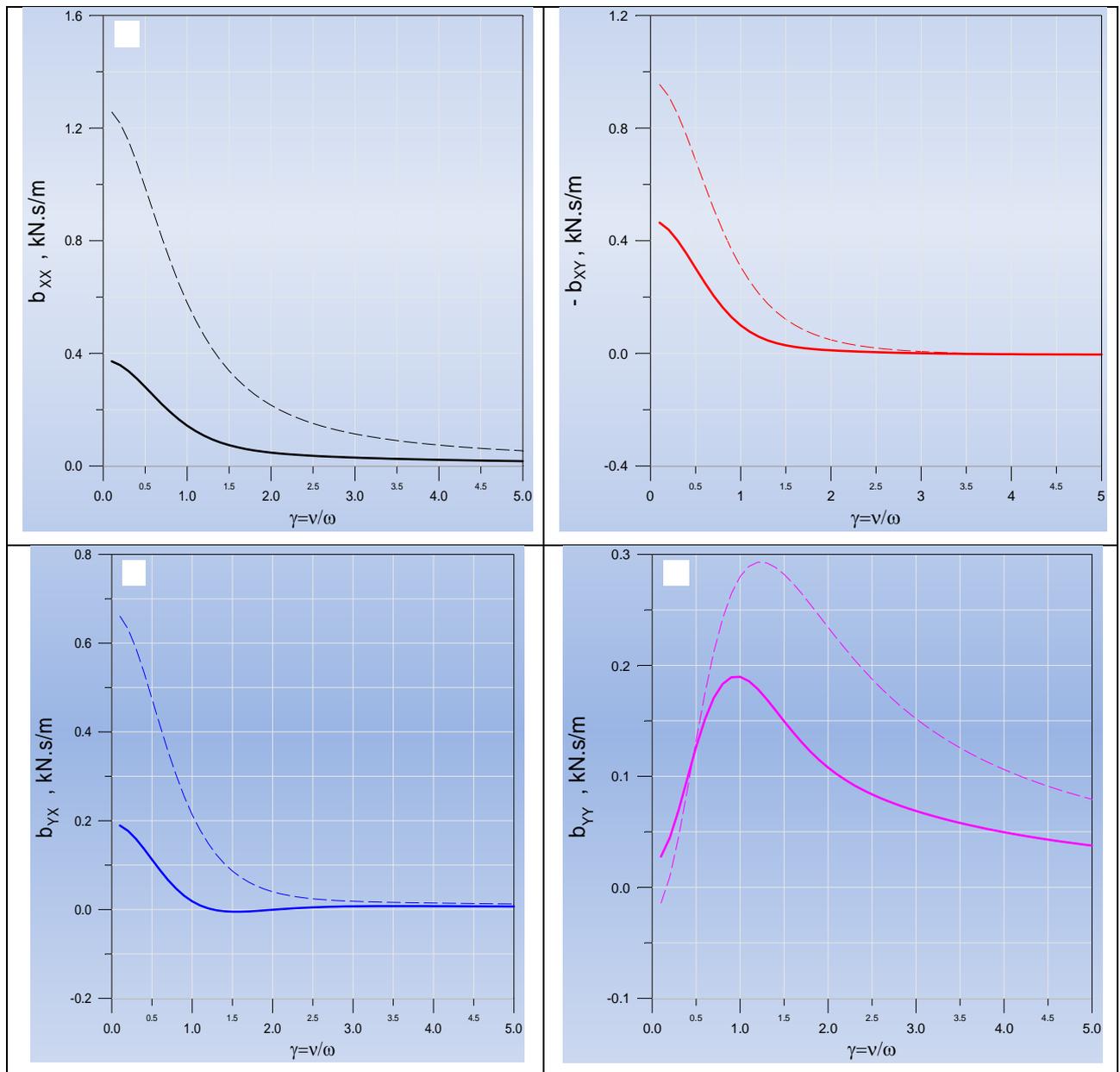
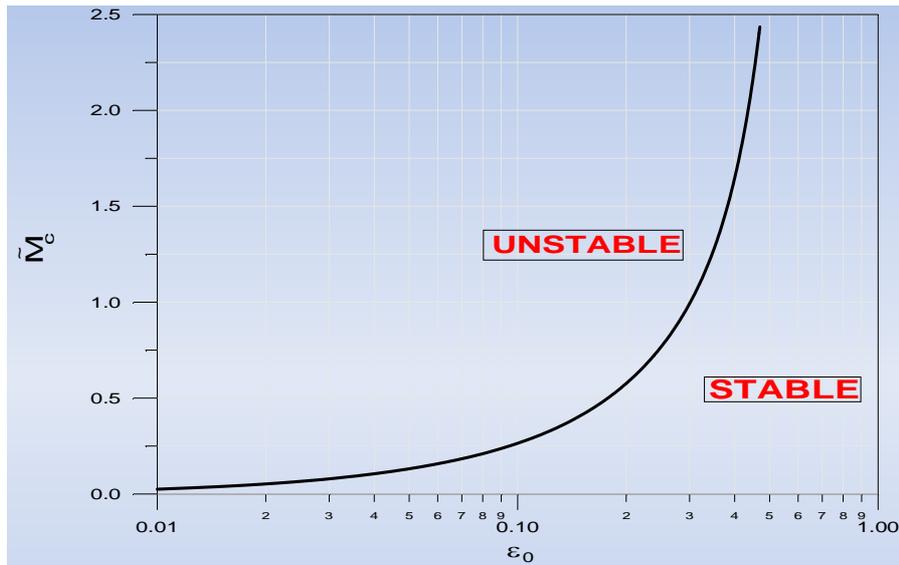
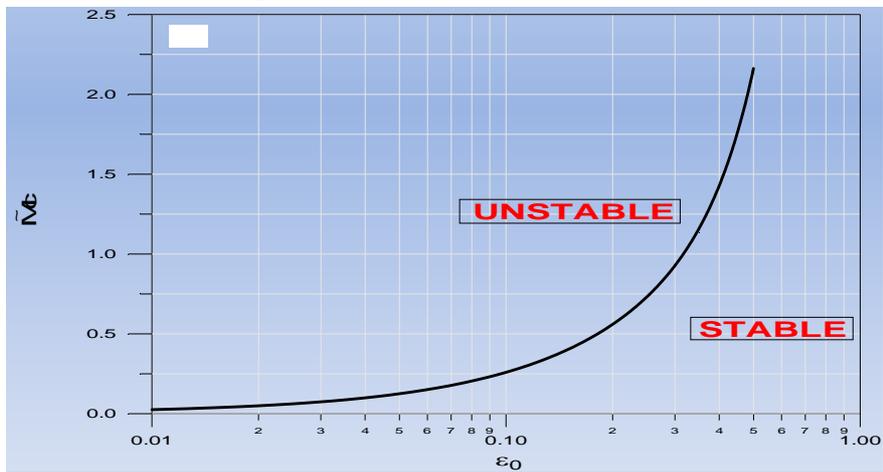


Figure V.10 Coefficients d'amortissements pour un palier aérodynamique à feuilles en fonction de la fréquence d'excitation, $\varepsilon_0 = 0,80$, $\Lambda = 1.07$, et $\alpha = 0.4$

Palier rigide ($\alpha = 0.0$), position de stabilité à $\varepsilon_0 \geq 0.50$



Déformation statique ($\alpha = 0.4$), Position de stabilité à $\epsilon_0 \geq 0.55$



Déformation statique et dynamique ($\alpha = 0.4$), position de stabilité à $\epsilon_0 \geq 0.38$

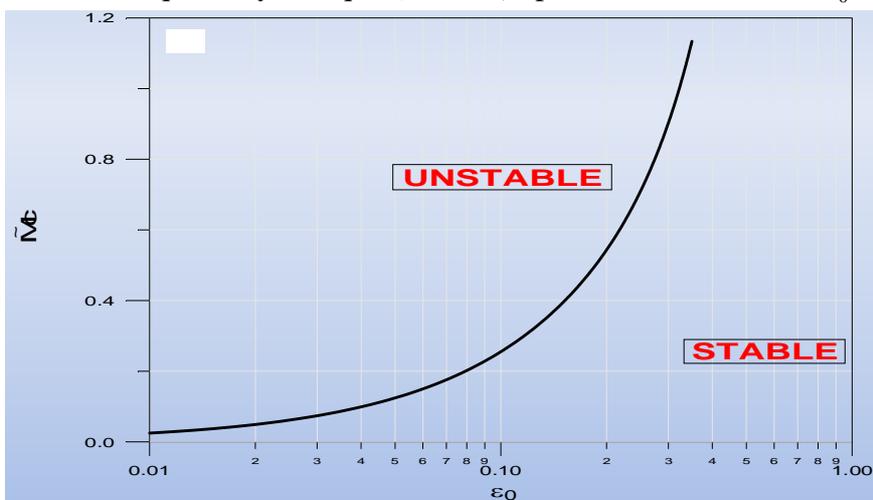


Figure V.11 Catre de stabilité pour un palier rigide et déformable.

Conclusion générale et perspectives

Nous nous sommes intéressés à l'étude des paliers aérodynamiques à feuilles à géométrie rigide et déformable (compliante) dont l'objectif était de développer des programmes de calcul et de simulation pour la prédiction du comportement statique de ces paliers.

Dans un premier temps nous avons choisi de travailler sur le comportement statique l'objectif était de trouver des profils de paliers particulièrement pour soutenir des charges élevées notre réflexion sur la définition des profils déformables initiaux a permis de mettre en place une méthodologie basée sur des profils rigides

Le traitement numérique du problème de lubrification aérodynamique a nécessité l'utilisation de l'algorithme de Newton- Raphson amorti pour trouver une solution au système d'équation algébrique résultant de la discrétisation de l'équation de Reynolds compressible fortement non linéaire .

Les résultats obtenus par le programme de calcul développé ont montré que la compliance des feuilles doit être prise en considération statique des paliers à gaz surtout lorsqu'ils fonctionnent à des excentricités très élevées (lourdement chargés). Il convient de souligner que l'élasticité des feuilles entraîne :

- Une diminution du pic de pression et la capacité de charge du palier
- Une augmentation de l'angle de calage et de l'épaisseur minimale du film

Les prolongements possibles de cette étude sont :

- Prise en considération des effets thermiques et de la turbulence.

Références

- [1] Hirn G., 1854, Sur les principaux phénomènes qui présentent les frottements médiats, Bulletins Société Industrielle de Mulhouse, 26, 188-277.
- [2] Reynolds O., 1886, On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil, Philosophical Transactions of the Royal Society, 177, 157-234.
- [3] Ausman J. S., 1959, Theory and design of self-acting gas-lubricated journal bearings including misalignment effect, Proceedings, First International Symposium on Gas-Lubricated Bearings, U. S. Government Printing Office, ACR-49, 161-192.
- [4] Raimondi A. A., 1961, A numerical solution for the gas-lubricated full journal bearing of finite length, ASLE Transactions, 4, 131-155.
- [5] Sternlicht B., 1959, Elastic and damping properties of cylindrical journal bearings, Journal of Basic Engineering, Trans. ASME, Vol. 81, 101-108.
- [6] Ausman J. S., 1963, Linearized ph stability theory for translatory half-speed whirl of long, self acting gas-lubricated journal bearings, ASME J. Basic Eng., 85, 4, 611-619.
- [7] Lund J. W., 1967, A theoretical analysis of whirl instability and pneumatic Hammer for a rigid rotor in pressurized gas journal bearings, ASME J. Lubrication Technology, 89, 2, 154-163.
- [8] Lund J. W., 1968, Calculation of stiffness and damping properties of gas bearings, ASME J. Lubrication Technology, 90, 793-803.
- [9] Lund J. W., 1976, Linear transient response of a flexible rotor supported in gas-lubricated bearings, ASME J. Lubrication Technology, 98, 1, 57-65.
- [10] Heshmat H., Walowit J. A., Pinkus O., 1983, Analysis of gas-lubricated compliant foil journal bearings, Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, Vol. 105, 647-655.
- [11] Peng J. P., Carpino M., 1993, Calculation of stiffness and damping coefficients for elastically supported gas foil bearings, Journal of Tribology, Trans. of the ASME, Vol. 115, 20-27.
- [12] Lund J. W., 1987, Review of the concept of dynamic coefficients for fluid film journal bearings, Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, Vol. 109, 37-41.
- [13] Peng J. P. , Carpino M., 1994, Coulomb friction damping effects in elastically supported gas foil bearings, STLE Tribology Transactions, Vol. 37, 1, 91-98.
- [14] Matta P., 2009, Analyse expérimentale des paliers aérodynamiques, Thèse de Doctorat, Poitiers University, France.

- [15] Matta P., Arghir M., Bonneau O., 2010, Experimental analysis of cylindrical air-bearing dynamic coefficients, *Tribology Transactions*, 53, 329-339.
- [16] Paulsen B. T., Morosi S., Santos I. F., 2011, Static, dynamic, and thermal properties of compressible fluid film journal bearings, *Tribology Transactions*, 54, 282-299.
- [17] Grau G., Iordanoff I., Bou-Said B., Berthier Y., 2004, An original definition of the profile of compliant foil journal gas bearings: Static and dynamic analysis, *Journal of Tribology Transactions*, Vol. 47, Issue 2, 248-256.
- [18] Yong-Bok Lee, Dong-Jin Park, Chang-Ho Kim, Keun Ryu, 2007, Rotordynamic characteristics of a micro-turbo generator supported by air foil bearings, *Journal of Micro-mechanics and Micro-engineering*, 17, 297-303.
- [19] Dong-Jin Park, Chang-Ho Kim, Gun-Hee Jang, Yong-Bok Lee, 2008, Theoretical considerations of static and dynamic characteristics of air foil thrust bearing with tilt and slip flow, *Tribology International*, 41, 282-295.
- [20] Heshmat H., Walowit J. A., Pinkus O., 1983, Analysis of gas-lubricated compliant thrust bearings, *Journal of Lubrication Technology, Transactions of the ASME*, Vol. 105, 638-646.
- [21] Peng Z. C., Khonsari M. M., 2004, Hydrodynamic analysis of compliant foil bearings with compressible air flow, *Journal of Tribology, Trans. of the ASME*, Vol. 126, 542-546.
- [22] Peng Z. C., Khonsari M. M., 2006, A Thermohydrodynamic analysis of foil journal bearings, *Journal of Tribology, Trans. of the ASME*, Vol. 128, 534-541.
- [23] Andrés L. S., Kim T. H., Analysis of gas foil bearings integrating FE top foil models, 2009, *Tribology International*, 42, 111-120.
- [24] Carpino M., Medvetz L. A., Peng J. P., Effects of membrane stresses in the prediction of foil bearing performance, 1994, *Tribology Transactions*, 37, 1, 43-50.
- [25] Carpino M., Talmage G., A fully coupled finite element formulation for elastically supported foil journal bearings, 2003, *Tribology Transactions*, 46, 4, 560-565.
- [26] Carpino M., Talmage G., Prediction of rotor dynamic coefficients in gas lubricated foil journal bearings with corrugated sub-foils, 2006, *Tribology Transactions*, 49, 3, 400-409.
- [27] Iordanoff I., 1999, Analysis of an aerodynamic compliant foil thrust bearing: Method for a rapid design, *ASME J. of Tribology*, 121, 816-822.
- [28] Grau G., Iordanoff I., Bou-Said B., Berthier Y., 2004, An original definition of the profile of compliant foil journal gas bearings: Static and dynamic analysis, *Tribology Transactions*, Vol. 47, Issue 2, 248-256.

- [29] Iordanoff I., Bou-Said B., Mezianne A., Berthier Y., 2008, Effect of internal friction in the dynamic behavior of aerodynamic foil bearings, *Tribology International*, 41, 387-395.
- [30] Jai M., 2001, Existence and uniqueness of solutions of the parabolic nonlinear compressible Reynolds lubrication equation, *Journal of nonlinear analysis*, Vol. 43, 5, 655-682.
- [31] Lahmar M., Ellagoune S., Bou-Said B., 2010, Elasto-hydrodynamic lubrication analysis of a compliant journal bearing considering static and dynamic deformations of the bearing-liner, *Tribology Transactions*, 53, 349-368.
- [4] D. F. LI, K. C. CHOY, P. E. ALLAIRE, « Stability and Transient Characteristics of Four Multilobe Journal Bearing Configurations », *Journal of Lubrication Technology*, juillet 1980, vol 102, pages 291-299.
- [5] P. E. ALLAIRE, D. F. LI, K. C. CHOY, « Transient Unbalance Response of Four Multilobe Journal Bearings », *Journal of Lubrication Technology*, juillet 1980, vol 102, pages 300-306.
- [6] M. ABDUL WAHED, « Comportement dynamique des paliers fluides. Etude linéaire et non linéaire », Thèse de docteur – ingénieur, Spécialité génie mécanique, INSA de Lyon, 1982.
- [7] M. ABDUL WAHED, D. NICOLAS, M. PASCAL, « Stability and Unbalance Response of Large Turbine Bearings », *Journal of Lubrication Technology*, janvier 1982, vol 104, pages 66-75.
- [8] H. HESHMAT, W. SHAPIRO, S. GRAY « Development of Foil Journal Bearings for High Load Capacity and High Speed Whirl Stability », *Journal of Tribology*, avril 1982, vol 104, pages 149-156.
- [10] H. HESHMAT, J. A. WALOWIT, O. PINKUS, « Analysis of Gas-Lubricated Foil Journal Bearings », *Journal of Lubrication Technology*, octobre 1983, vol 105, pages 647-655.
- [11] P. KLIT, J. W. LUND, « Calculation of the Dynamic Coefficients of a Journal Bearing, Using a Variational Approach », *Journal of Tribology*, juillet 1986, vol 108, pages 421-425.
- [13] O. BONNEAU, « Comportement statique et dynamique de ligne d'arbre montée sur paliers fluides : influence des caractéristiques des paliers », Thèse, Spécialité Génie Mécanique, Poitiers, Université de Poitiers, Février 1989.
- [14] J. FRENE, D. NICOLAS, D. BERTHE, M. GODET, « Lubrification hydrodynamique, paliers et butées », Paris : Edition Eyrolles, 1990.
- [15] P. STEPHAN, « Paliers à gaz à alésage expansible, comportement dynamique », Thèse, Spécialité Génie Mécanique, Toulouse, Université Paul Sabatier, Janvier 1991.
- [19] C.-P. ROGER KU, H. HESHMAT, « Compliant Foil Bearing Structural Stiffness Analysis, Part II : Experimental Investigation », *Journal of Tribology*, juillet 1993, vol 115, pages 364-369.

- [20] H. HESHMAT, C.-P. ROGER KU, « Structural Damping of Self-Acting Compliant Foil Journal Bearings », *Journal of Tribology*, janvier 1994, vol 116, pages 76-82.
- [21] J.-P. PENG, M. CARPINO, « Coulomb Friction Damping Effects in Elastically Supported Gas Foil Bearings », *Tribology Transactions*, 1994, vol 37, pages 91-98.
- [24] M. CARPINO, L. A. MEDVETZ, J.-P. PENG, « Effects of Membrane Stresses in the Prediction of Foil Bearing Performance », *Tribology Transactions*, 1994, vol 37, pages 43-50.
- [25] H. HESHMAT, « Advancements in the Performance of Aerodynamic Foil Journal Bearings : High Speed and Load Capability », *Journal of Tribology*, avril 1994, vol 116, pages 287-295.
- [26] C. A. HESHMAT, H. HESHMAT, « An Analysis of Gas-Lubricated, Multileaf Foil Journal Bearings With Backing Springs », *Journal of Tribology*, juillet 1995, vol 117, pages 437-443.
- [27] I. IORDANOFF, « Paliers axiaux aérodynamiques à structure à feuilles : analyse et optimisation », Thèse, Spécialité Génie Mécanique, Toulouse, Université Paul Sabatier, 1995.
- [30] M. J. BRAUN, F. K. CHOY, M. DZODZO, J. HSU, « Two-Dimensional Dynamic Simulation of a Continuous Foil Bearing », *Tribology International*, 1996, vol 29, pages 61-68.
- [31] C. DELLACORTE, J. A. LASKOWSKI, « Tribological Evaluation of PS300 : A New Chrome Oxide-Based Solid Lubricant Coating Sliding Against Al₂O₃ from 25° to 650°C », *Tribology Transactions*, 1997, vol 40, pages 163-167.
- [32] C. DELLACORTE, « A New Foil Air Bearing Test Rig for Use to 700°C and 70,000 rpm », *Tribology Transactions*, 1998, vol 41, pages 335-340.
- [34] S. A. HOWARD, « Preliminary Development of Characterization Methods for Compliant Air Bearings », *Tribology Transactions*, 1999, vol 42, pages 789-794.
- [35] C. DELLACORTE, J. A. FELLESTEIN, P. A. BENOY, « Evaluation of Advanced Solid Lubricant Coatings for Foil Air Bearings Operating at 25° and 500°C », *Tribology Transactions*, 1999, vol 42, pages 338-342.
- [43] S. A. HOWARD, C. DELLACORTE, M. J. VALCO, J. M. PRAHL, H. HESHMAT, « Dynamic Stiffness and Damping Characteristics of a High-Temperature Air Foil Journal Bearing », *Tribology Transactions*, 2001, vol 44, n°4, pages 657-663.
- [44] F. J. SURIANO, R. J. KEISER, F. G. WOESSNER, R. VALORI, « High-temperature (649°C/1200°F) Coatings for Gas-Lubricated Foil Bearings of the Navy's Advanced Auxiliary Power Unit Concepts », Document publié par Garret Turbine Engine Company et Naval Air Propulsion Center, 1979.
- [45] P. STEPHAN, I. IORDANOFF, « Butées et paliers aérodynamiques », *Techniques de l'Ingénieur, traité Génie Mécanique*, vol B5335, Paris, 1996.

[48] C. HERBELOT, « Comportement stationnaire ou dynamique de paliers aérodynamiques à feuilles », Thèse présentée à l'université Paul Sabatier de Toulouse, Spécialité génie mécanique, Janvier 1995.

[49] N. S. LEE, D. H. CHOI, Y. B. LEE, T. H. KIM, C. H. KIM, « The Influence of the Slip Flow on Steady – State Load Capacity, Stiffness and Damping Coefficients of Elastically Supported Gas Foil Bearings », Tribology Transactions, 2002, vol 45, pages 478-484

[68] STÉPHAN (P.). – Paliers à gaz à alésage expansible ; comportement dynamique. Thèse, Université Paul Sabatier, Toulouse (1991).

[70] HESHMAT (H.), SHAPIRO (W.) et GRAY (S.). – Development of foil journal bearing for high load capacity and high speed whirl stability. ASME, avril 1982.

[71] HUNGER (H.) et GLIENICKE (J.). – Berechnung der statischen und dynamischen Kennlinien aerodynamischer Federlager. Thèse de docteur ingénieur. Karlsruhe (1982).

[73] HERBELOT (C.). – Comportement stationnaire ou dynamique de paliers aérodynamiques à feuilles. Thèse, Université Paul Sabatier, Toulouse (1995).

[75] LUND (J.W.). – The influence of pad flexibility on the dynamic coefficients of a tilting pad journal bearing. ASME, vol. 109, janv. 1987.

[84] LICHT (L.), ANDERSON (W.J.) et DOROFF (S.W.). – Dynamic characteristics of a high-speed rotor with radial and axial foil-bearing supports. ASME, juil. 1981.

[85] FRENE (J.). – Butées et paliers hydrodynamiques. Techniques de l'Ingénieur, Génie mécanique, B 5 320, août 1995.

Annex A

Expressions des matrices résultant de la discrétisation des équations dynamiques d'ordre un :

$$A_{ij} = \frac{\tilde{h}_{0_{ij}}^3 \tilde{p}_{0_{ij}}}{\Delta\theta^2} + \frac{3\tilde{h}_{0_{ij}}^2 \left(\frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} \tilde{p}_{0_{ij}} + 2\tilde{h}_{0_{ij}}^3 \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} + 3\alpha \tilde{h}_{0_{ij}}^2 \tilde{p}_{0_{ij}} \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} - \Lambda (\alpha \tilde{p}_{0_{ij}} + \tilde{h}_{0_{ij}})}{2\Delta\theta} \frac{1}{F_{ij}}$$

$$B_{ij} = \frac{\tilde{h}_{0_{ij}}^3 \tilde{p}_{0_{ij}}}{\Delta\theta^2} - \frac{3\tilde{h}_{0_{ij}}^2 \left(\frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} \tilde{p}_{0_{ij}} + 2\tilde{h}_{0_{ij}}^3 \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} + 3\alpha \tilde{h}_{0_{ij}}^2 \tilde{p}_{0_{ij}} \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} - \Lambda (\alpha \tilde{p}_{0_{ij}} + \tilde{h}_{0_{ij}})}{2\Delta\theta} \frac{1}{F_{ij}}$$

$$C_{ij} = \frac{\lambda \tilde{h}_{0_{ij}}^3 \tilde{p}_{0_{ij}}}{\Delta\tilde{z}^2} + \frac{\lambda \left[3\tilde{h}_{0_{ij}}^2 \left(\frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{ij} \tilde{p}_0 + 2\tilde{h}_{0_{ij}}^3 \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{ij} + 3\alpha \tilde{h}_{0_{ij}}^2 \tilde{p}_0 \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{ij} \right]}{2\Delta\tilde{z}} \frac{1}{F_{ij}}$$

$$D_{ij} = \frac{\lambda \tilde{h}_{0_{ij}}^3 \tilde{p}_{0_{ij}}}{\Delta\tilde{z}^2} - \frac{\lambda \left[3\tilde{h}_{0_{ij}}^2 \left(\frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{ij} \tilde{p}_0 + 2\tilde{h}_{0_{ij}}^3 \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{ij} + 3\alpha \tilde{h}_{0_{ij}}^2 \tilde{p}_0 \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{ij} \right]}{2\Delta\tilde{z}} \frac{1}{F_{ij}}$$

$$E_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \Lambda \left[-\tilde{p}_{0_{ij}} \sin \theta_i + \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} \cos \theta_i \right] + 2\Lambda i \gamma \tilde{p}_{0_{ij}} \cos \theta_i - \Lambda \left[3 \frac{\tilde{p}_{0_{ij}}}{\tilde{h}_{0_{ij}}} \left(\frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} \cos \theta_i + 3 \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} \cos \theta_i \right] + \\ 3\tilde{h}_{0_{ij}}^2 \tilde{p}_{0_{ij}} \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} \sin \theta_i + 3\tilde{h}_{0_{ij}} \tilde{p}_{0_{ij}} \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} \left(\frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} \cos \theta_i + 3\lambda \tilde{h}_{0_{ij}} \tilde{p}_{0_{ij}} \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{ij} \left(\frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{ij} \cos \theta_i \end{array} \right\} / F_{ij}$$

$$E'_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \Lambda \left[\tilde{p}_{0_{ij}} \cos \theta_i + \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} \sin \theta_i \right] + 2\Lambda i \gamma \tilde{p}_{0_{ij}} \sin \theta_i - \Lambda \left[3 \frac{\tilde{p}_{0_{ij}}}{\tilde{h}_{0_{ij}}} \left(\frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} \sin \theta_i + 3 \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} \sin \theta_i \right] - \\ 3\tilde{h}_{0_{ij}}^2 \tilde{p}_{0_{ij}} \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} \cos \theta_i + 3\tilde{h}_{0_{ij}} \tilde{p}_{0_{ij}} \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} \left(\frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} \sin \theta_i + 3\lambda \tilde{h}_{0_{ij}} \tilde{p}_{0_{ij}} \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{ij} \left(\frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{ij} \sin \theta_i \end{array} \right\} / F_{ij}$$

avec

$$\begin{aligned}
F_{ij} = & \frac{2\tilde{h}_{0j}^3 \tilde{p}_{0j}}{\Delta\theta^2} + 2\lambda \frac{\tilde{h}_{0j}^3 \tilde{p}_{0j}}{\Delta\tilde{z}^2} + \frac{\tilde{h}_{0j}^3}{\tilde{p}_{0j}} \left[\left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} \right]^2 - \Lambda \left[\left(\frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} + 3\alpha \frac{\tilde{p}_{0j}}{\tilde{h}_{0j}} \left(\frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} + \frac{\tilde{h}_{0j}}{\tilde{p}_{0j}} \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} + 3\alpha \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} \right] + \\
& 3\alpha \tilde{h}_{0j} \tilde{p}_{0j} \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} \left(\frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} + \lambda \frac{\tilde{h}_{0j}^3}{\tilde{p}_{0j}} \left[\left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{ij} \right]^2 + 3\lambda \alpha \tilde{h}_{0j} \tilde{p}_{0j} \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{ij} \left(\frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{ij} + \\
& \Lambda \left[\alpha \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} + \left(\frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} \right] + 2\Lambda i \gamma (\alpha \tilde{p}_{0j} + \tilde{h}_{0j})
\end{aligned}$$

$$\text{et } \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)_{ij} \approx \frac{\tilde{p}_{0_{i+1,j}} - \tilde{p}_{0_{i-1,j}}}{2\Delta\theta}; \quad \left(\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right)_{ij} \approx \frac{\tilde{p}_{0_{i,j+1}} - \tilde{p}_{0_{i,j-1}}}{2\Delta\tilde{z}}$$