

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université 08 mai 1945 Guelma
Faculté des Sciences et Sciences de l'Ingénierie
Département de Génie Mécanique



THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat
Spécialité : Génie Mécanique

Par

MOUASSA AHCENE

Thème

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'INFLUENCE DES DEFAUTS DE FORME ET
DE RUGOSITE DES SURFACES SUR LES PERFORMANCES DES CONTACTS
LUBRIFIES SEVERES**

Soutenue le

JURY

| | | |
|----------------|--------------|--|
| Président : | B. BEZZAZI | Pr. Université M'Hamed Bougara Boumerdès |
| Encadreur : | M. LAHMAR | Pr. Université 08 mai 1945 Guelma |
| Co-encadreur : | B. BOU-SAÏD | Maître de Conférences (HDR) INSA de Lyon |
| Examineurs : | A. HAIAHEM | Pr. Université Badji Mokhtar Annaba |
| | S. ELLAGOUNE | M. Conférences-A Université 08 mai 1945 Guelma |

2010

SOMMAIRE

Dédicaces

Avant-Propos

| | |
|--|-----|
| INTRODUCTION GENERALE | 4 |
| CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE | 12 |
| CHAPITRE II : EQUATIONS DE BASE DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE PAR FLUIDE NEWTONIEN | 36 |
| CHAPITRE III : HOMOGENEISATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS NEWTONIENNE. | 63 |
| CHAPITRE IV : FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME DE LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE PAR FLUIDE NON NEWTONIEN A COUPLE DE CONTRAINTE..... | 93 |
| CHAPITRE V : HOMOGENEISATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS NON NEWTONIENNE | 111 |
| CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES | 123 |
| REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES | 126 |
| ANNEXE A : | |
| ANALYSE DIMENSIONNELLE DES EQUATIONS DE MOUVEMENT D'UN FLUIDE POLAIRE | 131 |
| PRINCIPALES NOTATIONS UTILISEES | 133 |
| LISTE DES ILLUSTRATIONS | 135 |
| TABLE DES MATIERES | 139 |

Dédicaces

A ma tendre épouse Hadda HADJADJI.

A mes enfants ALA-EDDIN, MEDJEDA et AMIRA
pour leur patience et leur soutien.

A mes frères et sœurs

A la mémoire de mes parents Mohamed MOUASSA &
Hadda FERDI.

AVANT-PROPOS

Cette étude est le fruit d'une collaboration entre l'université de Guelma et le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) de l'I.N.S.A de Lyon.

Je tiens à remercier tout particulièrement le Professeur Mustapha LAHMAR mon directeur de thèse.

Que Monsieur le Docteur Benyebka BOU-SAÏD, Maître de Conférences (HDR) à l'INSA de Lyon trouve l'expression de toute ma gratitude d'avoir accepté d'être mon co-encadreur.

Que Monsieur Boudjemaa BEZAZI, Professeur à l'université de Boumerdès, trouve ici l'expression de toute ma gratitude de bien vouloir accepté de présider le jury de cette thèse.

Je suis extrêmement sensible à l'honneur que me fait Monsieur Amar HAIHAM, Professeur à l'université de Annaba, en acceptant d'examiner ce travail.

Il m'est particulièrement agréable de remercier Monsieur Salah ELLAGOUNE, Maître de Conférences-A à l'université de Guelma, d'avoir bien voulu s'intéresser à cette étude et d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Mes remerciements vont aussi à Messieurs le Professeur Mohamed NEMAMCHA Président de l'université de Guelma, le Professeur Mohamed ABDAOUI, le Docteur Mohamed Zine AISSAOUI pour leur encouragement.

Je remercie Messieurs Abdelouahab REZAIGUIA, Abderezak BEZAZI et Moussa BAHY pour leur aide et l'intérêt qu'ils ont manifestés pour cette étude.

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du Laboratoire de Mécanique & Structures (LMS) et du personnel du département de Génie Mécanique.

Introduction générale

Étymologiquement, le mot *tribologie* (en anglais, *tribology*) est d'origine grecque (τριβος λογος) qui signifie science du frottement. C'est donc la science et la technologie de surfaces solides en contact. La tribologie est un domaine pluridisciplinaire qui comprend l'étude du frottement (*friction*), de l'usure (*wear*) et de la lubrification (*lubrication*) des pièces en contacts rencontrées dans les systèmes mécaniques ou biomécaniques tels que les roulements, les paliers, les butées, les garnitures mécaniques d'étanchéité, les engrenages, les prothèses de hanche, etc.

Un système mécanique est constitué d'un ensemble de pièces liées entre elles qui sont en mouvement les unes par rapport aux autres. Ces pièces sont séparées partiellement ou complètement par un film lubrifiant facilement cisailable afin d'éviter une usure trop rapide ou un risque de grippage.

Les pièces mécaniques manufacturées sont limitées par des surfaces qui ne sont jamais conformes à celles géométriquement idéales représentées sur les dessins de définition et de fabrication. En effet, elles présentent des défauts de nature géométrique et physico-chimique résultant du procédé de fabrication utilisé et du matériau constituant ces pièces.

Selon la normalisation française (NF E 05-515), les défauts ou les irrégularités géométriques de surface se classent conventionnellement sous six numéros d'ordre, à savoir:

1. Défauts de forme et de position qui sont imputables à un manque de rectitude, à une ovalisation ou à un manque de cylindricité. Leur amplitude varie de 2.5 à plus de 100 microns et leur période est de plusieurs ordres de grandeur plus grande que leur amplitude.

Défauts d'ondulation (défauts macroscopiques) possédant généralement un caractère périodique dû essentiellement à des vibrations de basses fréquences de la pièce et/ou de

l'outil générateur. La période de ces défauts est de quelques ordres de grandeur plus grande que leur amplitude, soit de 0,1 à 50 microns.

2. Stries, sillons qui sont des défauts périodiques ou pseudo-périodiques
3. Défauts localisés (échelle microscopique) : arrachement, marque d'outil, etc. : ce type de défaut a un caractère a périodique
4. Structure cristalline (échelle mésoscopique)
5. Réseau cristallin (échelle nanoscopique).

Les défauts des 3^{ème} et 4^{ème} ordres, qui sont intéressants du point de vue tribologique, sont désignés par le terme général de rugosités. Il convient de préciser que le profil d'une surface mesuré à l'aide d'un profilographe est le résultat de la superposition des défauts de forme, d'ondulation et de rugosité.

Les défauts géométriques qui sont des défauts de forme et de rugosité sont dus principalement aux vibrations relatives entre l'outil et la pièce usinées ainsi qu'à la rigidité de la machine outil.

Sur le plan industriel, l'étude de l'influence de ces défauts présents sur la surface des pièces en même temps que la rhéologie du lubrifiant sur le comportement des contacts lubrifiés est indispensable tant pour prévoir les conditions de fonctionnement que pour estimer la durée de vie des mécanismes. Ainsi, la détermination théorique des performances d'un contact lubrifié dépend entre autres, d'une caractérisation rigoureuse des surfaces formant le contact et d'une modélisation aussi fidèle que possible du comportement rhéologique du lubrifiant surtout lorsque les conditions de fonctionnement du contact sont sévères (charge et vitesse élevées).

A cette fin, le modèle mathématique établi par Osborne Reynolds en 1886 représenté par une équation aux dérivées partielles connue communément sous le nom de l'équation de Reynolds permet de prévoir le comportement des contacts lubrifiés [1]. La résolution de cette équation permet de déterminer le champ de pression dans un contact lubrifié et ainsi ses caractéristiques de fonctionnement, à savoir : la capacité de charge, le débit, la puissance dissipée, le nombre de frottement, etc.

La théorie de lubrification fondée par O. Reynolds est basée sur plusieurs hypothèses simplificatrices parmi lesquelles les surfaces sont supposées parfaitement lisses et le fluide s'écoulant entre ces surfaces possède un comportement newtonien ; c'est-à-dire les contraintes de cisaillement visqueuses sont proportionnelles aux gradients de vitesse de l'écoulement.

Dans la littérature technique, plusieurs investigateurs ont montré que de telles hypothèses sont peu réalistes surtout pour l'étude des contacts sévèrement chargés fonctionnant avec de faibles épaisseurs de film.

Les lubrifiants modernes qui se caractérisent par une composition chimique complexe telles que les huiles multigrades incorporent une large variété d'additifs ou dopes. Ils ont pour but essentiel d'améliorer les performances des huiles de base d'origine minérale obtenues à partir du raffinage du pétrole brut. Parmi ces additifs, nous trouvons les additifs améliorants de l'indice de viscosité V. I. (Viscosity Index Improvers) qui entrent à hauteur de 5 à 15% dans la composition chimique du lubrifiant.

Le V. I. caractérise la chute de viscosité du lubrifiant en fonction de la température par rapport à deux références de même viscosité à 100 °C ; une base naphthénique dont le VI est posé égal à 0 et une base paraffinique de VI égal ou supérieur à 100. Plus le VI est élevé meilleur est le comportement de la viscosité du lubrifiant vis-à-vis de la température.

La volonté des raffineurs dans les années 50 d'obtenir des lubrifiants, dont les VI soient supérieurs à 100, les a conduit à ajouter à leurs bases minérales des polymères de longues chaînes à poids moléculaires élevés. Ces additifs apportent aux huiles de base un effet épaississant à haute température. Parmi les différents types d'additifs de VI commercialisés, nous distinguons deux grandes familles :

- les polymères d'oléfines qui comportent : les polyisobutylènes, les copolymères éthylène-propylène ; les copolymères de styrène et d'oléfines ;
- les polyacrylates et les polyméthacrylates.

De part leur concentration élevée, les additifs de viscosité influent d'une manière significative sur le comportement rhéologique du lubrifiant. Ainsi, l'amélioration des performances en température obtenue grâce à l'apport des additifs de viscosité s'est

accompagné d'une modification du comportement rhéologique du lubrifiant. Une relation linéaire entre les taux de déformation et les contraintes ne suffit pas alors de décrire le lubrifiant. Son comportement est dénommé d'une manière générale non newtonien.

Les nombreux modèles proposés dans la littérature technique à la suite d'études théoriques et expérimentales mettent en évidence la diversité et la complexité du comportement rhéologique des fluides non newtoniens. Chacun de ces modèles dépend éventuellement de la composition chimique du fluide et des conditions de fonctionnement du mécanisme lubrifié par ce fluide. L'utilisation des modèles à comportement complexe est donc vivement conseillé pour calculer plus correctement les caractéristiques d'un contact lubrifié par des fluides particuliers tels que les huiles lubrifiantes additivées.

Dans la présente étude, nous avons retenu le modèle de V. K. Stokes [2] pour décrire l'écoulement des lubrifiants additivés dans le contact. Ce modèle, qui tient compte des effets des couples de contrainte dus à la présence des additifs dans le fluide lubrifiant, permet de caractériser le fluide à l'aide de deux constantes physiques qui sont la viscosité dynamique du lubrifiant (μ) et une deuxième caractéristique responsable du couple de contrainte dans le fluide (η). Il est intéressant de noter que le concept de couple de contrainte a été introduit pour la première fois en mécanique des milieux continus par Voigt et Cosserat au début du XX^{ème} siècle [3, 4].

Notons aussi que la prise en considération des couples de contrainte conduit à la perte de la symétrie du tenseur de contrainte dans le milieu fluide. A cause de sa simplicité relative, le modèle de fluide à couple de contrainte (en anglais, couple stress fluid) dit aussi fluide polaire a été largement utilisé dans les études de simulation effectuées récemment dans le domaine de la lubrification hydrostatique, hydrodynamique, thermo-hydrodynamique ou élasto-hydrodynamique.

En régime isotherme, l'application des lois fondamentales de la mécanique des milieux continus de V. K. Stokes, à savoir les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment de la quantité de mouvement à l'étude des écoulements de films minces visqueux entre des parois lisses ou rugueuses permet de dériver une équation aux dérivées partielles linéaire de type elliptique appelée équation de Reynolds modifiée dont l'inconnue principale est la pression. Cette équation qui n'admet pas de solution analytique sera résolue numériquement à l'aide de la méthode des différences finies.

Dans les systèmes mécaniques lubrifiés en régime hydrodynamique ou élasto-hydrodynamique (EHD), l'épaisseur du film lubrifiant h est censée d'une part être plus grande que la hauteur des aspérités et d'autre part elle doit être très faible devant la longueur d'onde de la rugosité (rugosité de Reynolds); c'est-à-dire $h \ll \lambda$. Dans ces conditions, l'équation de Reynolds modifiée peut être appliquée pour décrire le comportement hydrodynamique des contacts rugueux.

Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour l'étude des effets des rugosités de surface sur les performances des contacts hydrodynamiques, à savoir : la méthode stochastique, la méthode déterministe et plus récemment la technique d'homogénéisation. Par comparaison aux modèles stochastiques, les modèles déterministes permettent de prendre en compte de manière plus réaliste la texture et la microtopographie des surfaces dans les études de simulation. Cependant, l'approche déterministe nécessite un espace mémoire important et de grands efforts de calcul car il faut raffiner au maximum le maillage pour pouvoir décrire les plus petites ondulations de la rugosité.

La méthode d'homogénéisation dite aussi méthode de moyennisation est une théorie mathématique qui inclut l'étude des équations aux dérivées partielles à coefficients à oscillation rapide [5]. Depuis quelques décennies, cette méthode a été utilisée avec succès pour le traitement des problèmes ayant trait, par exemple, à l'élasticité des milieux anisotropes tels que les matériaux composites [6, 7]. En revanche, cette méthode n'est pas fréquemment utilisée dans le domaine de la tribologie. Récemment, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'application du concept d'homogénéisation dans les études de simulation des problèmes de lubrification par fluides compressibles et incompressibles dont le comportement peut être newtonien ou non newtonien [8-16]. L'approche d'homogénéisation, basée sur un développement multi-échelle de la pression, consiste à réécrire le problème posé en deux autres :

- Un problème local (échelle microscopique) gouverné par 3 équations aux dérivées partielles du second ordre dont les inconnues sont les fonctions périodiques locales.
- Un problème global (échelle macroscopique) régi par une équation aux dérivées partielles dont l'inconnue est la pression homogénéisée supposée nulle sur la frontière du domaine global.

La difficulté majeure de cette technique réside dans le découplage des deux problèmes à partir du problème global. Les coefficients du problème homogénéisé dépendent de la solution locale et ne peuvent être calculés qu'après traitement du problème local.

Par comparaison à la méthode déterministe, la technique d'homogénéisation ne nécessite pas de maillages très fins pour prendre en compte l'effet de la rugosité car cette dernière est prise en compte pendant la résolution des problèmes locaux. Cependant, cette technique ne permet pas d'utiliser comme données les topographies de surfaces réelles mesurées suivant les 3 directions de l'espace.

A partir de la recherche bibliographique effectuée sur les différentes méthodes d'analyse, il ressort que la méthode d'homogénéisation s'avère être une alternative intéressante à la méthode déterministe spécifiquement dans le cas de rugosités périodiques car elle ne nécessite qu'une allocation mémoire réduite. De plus, elle présente des résultats plus réalistes comparés à ceux issus des approches stochastiques.

A travers cette étude, notre contribution sera de mettre en place un modèle numérique qui prend en considération les effets combinés de la rugosité de surface et de la rhéologie du lubrifiant sur les performances hydrodynamiques des contacts lubrifiés (pression, débit, capacité de charge, puissance dissipée ; nombre de frottement, ...) en utilisant une nouvelle technique de calcul dite technique d'homogénéisation que l'on développera plus loin dans cette thèse. Pour conserver le caractère stationnaire de l'équation de Reynolds classique ou modifiée, nous avons considéré que la surface fixe du contact est rugueuse tandis que la surface mobile est parfaitement lisse.

L'étude paramétrique envisagée dans cette thèse permettra de mettre en évidence les effets combinés des différentes formes de rugosités (longitudinales, transversales et anisotropes) ayant la même rugosité RMS (Root Mean Square), et de la rhéologie du lubrifiant sur le comportement hydrodynamique du patin incliné de Mitchell. Les effets de la rhéologie ou des couples de contrainte sur le comportement du patin seront étudiés en définissant le paramètre de couple de contrainte $\left(\ell = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}\right)$ qui représente physiquement la longueur de la chaîne moléculaire des additifs incorporés à l'huile de base.

Dans le premier chapitre, nous présentons une étude bibliographique sur la caractérisation et la modélisation des surfaces technologiques (engineering surfaces). La seconde partie de ce chapitre est dévolue à la description des différentes méthodes d'analyse proposées dans la littérature technique pour l'étude des contacts lubrifiés dont les surfaces sont rugueuses.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons les équations fondamentales de la mécanique des milieux continus pour des fluides newtoniens et nous présentons ensuite les différentes formes que peut prendre l'équation de la mécanique des films minces visqueux qui va être utilisée au cours de notre étude pour déterminer les caractéristiques d'écoulement de films minces entre parois mobiles. L'intégration de l'équation de la mécanique des films minces visqueux permet de calculer la répartition de la pression qui existe en tout point du fluide. Un certain nombre de caractéristiques telles que la portance hydrodynamique, le débit de fuite, la force de frottement et la puissance dissipée dans le contact s'en déduisent aisément.

Le troisième chapitre comprend deux parties : la première partie est consacrée à l'application du processus d'homogénéisation à l'équation de Reynolds newtonienne. Nous supposons, par hypothèse, que la surface stationnaire du contact est rugueuse tandis que la surface mobile est parfaitement lisse. Cette hypothèse nous permettra d'utiliser l'équation de Reynolds newtonienne dérivée dans le chapitre précédent sans la prise en considération du terme transitoire figurant dans le second membre de l'équation. Pour pouvoir appliquer cette technique, nous supposerons d'autre part que la distribution des rugosités est périodique sur toute la surface du contact. La seconde partie est réservée à la validation de la technique d'homogénéisation au travers une comparaison des résultats obtenus à partir de cette technique avec ceux issus de l'application de la méthode déterministe classique dans le cas du patin incliné de Mitchell.

Le quatrième chapitre est dévolu d'une part à la présentation des équations fondamentales de la mécanique des milieux continus de V. K. Stokes et d'autre part à la dérivation de l'équation de Reynolds modifiée qui permet de décrire le comportement d'un fluide polaire ou à couple de contrainte. De nouvelles expressions permettant de calculer les

performances hydrodynamiques du contact utilisant un fluide polaire comme lubrifiant seront également établies dans ce chapitre.

Dans le cinquième et dernier chapitre, le processus d'homogénéisation sera appliqué avec plus de détails à l'équation de Reynolds modifiée. Le traitement numérique des équations aux dérivées partielles résultant de l'application du processus d'homogénéisation sera exposé de façon explicite. Ce chapitre se terminera par une étude paramétrique afin de déterminer les paramètres influençant les caractéristiques d'un contact lubrifié en conditions dites sévères.

Enfin, une conclusion générale sera présentée pour rappeler l'essentiel des résultats obtenus ainsi que l'intérêt de notre contribution vis-à-vis de l'état de l'art. Des prolongements possibles de la présente étude seront dégagés.

CHAPITRE I

Etude bibliographique

I.1 Introduction

Nous présentons dans la première partie de ce chapitre, une étude bibliographique sur la caractérisation et la modélisation des surfaces technologiques (engineering surfaces). La seconde partie est dévolue à la description des différentes méthodes d'analyse proposées dans la littérature technique pour l'étude des contacts lubrifiés dont les surfaces sont rugueuses. Ces méthodes se classent en trois catégories, à savoir : la méthode stochastique, la méthode déterministe et la méthode dite d'homogénéisation.

I.2. Description des surfaces

L'étude des surfaces revêt de l'importance dans un grand nombre d'applications industrielles. Par exemple dans les procédés de fabrication par injection, le fini de surfaces du moule est un facteur important qui gouverne la qualité de la pièce. Dans certaines applications technologiques les qualités des surfaces doivent être meilleures pour garantir le bon fonctionnement du système (par exemple, le cas des pièces de frottement, d'étanchéité, de précision...). En effet, l'usure d'un joint dynamique ou d'une garniture mécanique est souvent fonction de l'état géométrique de la surface sur laquelle il vient se frotter.

En tribologie, la caractérisation, la métrologie et la simulation numérique des surfaces rugueuses constituent une étude préalable et indispensable avant d'effectuer une approche déterministe ou stochastique des contacts lubrifiés. Les techniques de caractérisation ont pour but de décrire la microtopographie des surfaces afin de mieux comprendre leurs propriétés fondamentales.

I.2.1. Etat structural des surfaces

En tribologie, une surface n'est pas une séparation sans épaisseur entre un corps solide et le milieu ambiant. Une surface possède également une épaisseur qui s'étend de l'extérieure

jusqu'à l'intérieur du solide (cœur de la pièce). La figure I.1 illustre ce concept d'une façon schématique.

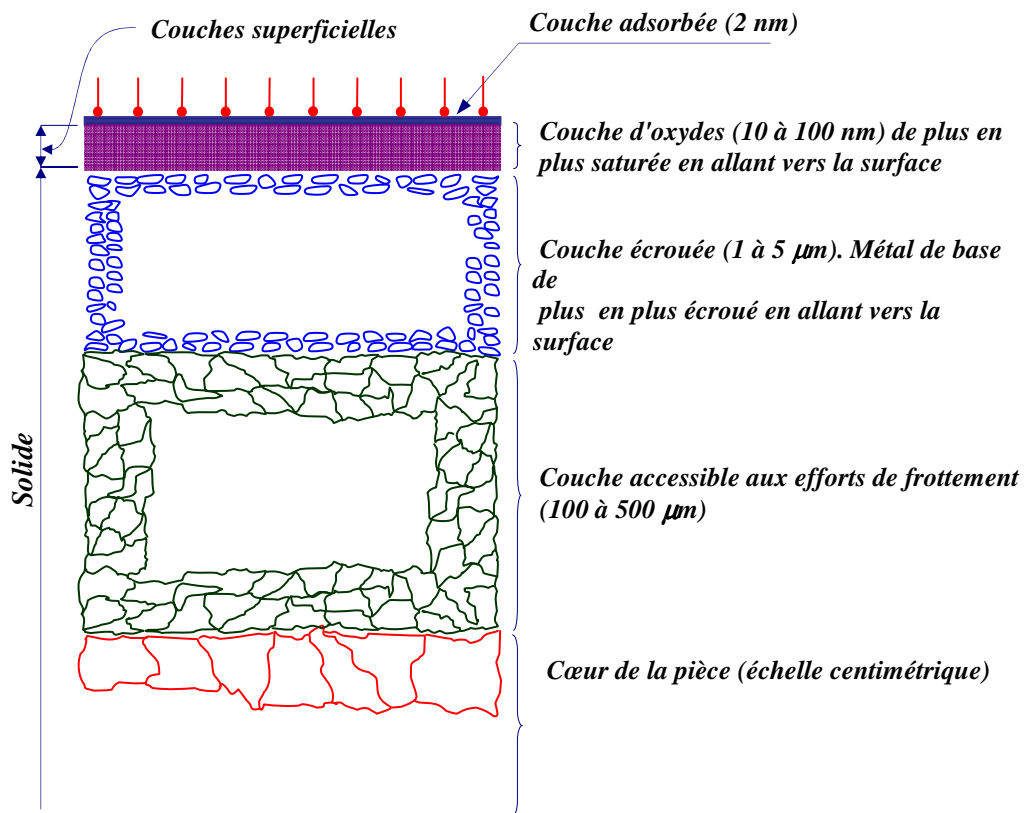


Fig. I.1 Composition schématique des couches superposées d'une surface

A l'extérieur du solide (interface surface-milieu ambiant), on retrouve inévitablement une couche d'oxydes sur le solide. Il est à noter que même des matériaux nobles comme l'or ou le platine forment une couche d'oxyde sur leur surface dans l'atmosphère. L'épaisseur et les propriétés mécaniques de la couche d'oxyde varient selon le matériau et le temps d'exposition à l'atmosphère. Cette couche, dont l'épaisseur s'échelonne entre 10 et 100 nanomètres, joue un rôle important dans le frottement et l'usure de la surface ; sans celle-ci, tous les matériaux se soudent les uns aux autres et les pièces en mouvement relatif grippent.

Sur la couche d'oxydes se trouve une couche adsorbée : oxygène, polluants atmosphériques, corps gras (lubrifiant gazeux ou liquide) et toutes sortes d'autres composants qui se trouvent dans l'environnement immédiat de la surface. La couche d'oxyde existe toujours, sauf dans le vide à température élevée (>1000 °C).

Le phénomène d'adsorption s'explique par la présence d'atomes de surface porteurs de valences non saturées créant un champ de forces au voisinage de la surface provoquant l'attraction et la fixation de molécules ambiantes. Suivant les caractéristiques des atomes en présence, ce phénomène entraîne :

- Une réaction chimique (oxydation) ;
- Une diffusion.

Il est utile de noter que l'adsorption n'est pas uniforme ; elle est plus intense sur les reliefs. Dans le solide, en partant des aspérités, on trouve une couche de matériau plus ou moins écrouie dont l'épaisseur varie de 1 à 5 microns. Le degré d'écrouissage et la profondeur de la couche écrouie (Beilby) dépendent du procédé d'obtention de la pièce brute (forgeage, étirage,...), des opérations d'usinage par enlèvement de copeaux ou par électro-érosion et des traitements thermiques.

Il convient de souligner que les procédés de finition par électro-érosion (Electro-Discharge Machining) ou par enlèvement chimique causent peu d'écrouissage et ont une influence sur une faible profondeur. En revanche, les procédés d'usinage par enlèvement de copeaux causent plus de perturbations sur une plus grande profondeur.

En dessous de la couche écrouie se trouve la couche accessible de 100 à 500 microns d'épaisseur qui n'est pas influencée par les procédés de formage, d'usinage ou les phénomènes chimiques. La structure cristalline de cette couche est intacte et elle est semblable au cœur de la pièce. Les défauts de la couche accessible jouent un rôle sur le phénomène de la friction qui sont principalement : les inclusions, les trous et porosités, les ségrégations et les contraintes résiduelles provenant des traitements thermiques et du moulage formant un champ de contraintes qui s'ajoute à celles provoquées par le frottement.

1.2.2 Etat géométrique des surfaces

Les pièces mécaniques manufacturées sont limitées par des surfaces qui ne sont jamais conformes à celles géométriquement idéales représentées sur les dessins de définition et de fabrication. En effet, elles présentent des défauts de nature géométriques et physico-chimiques résultant du procédé de fabrication utilisé et du matériau constituant ces pièces.

Les caractéristiques de l'état de surface d'une pièce peuvent intervenir de façon prépondérante sur son aptitude à remplir une fonction donnée. Le terme état de surface englobe à la fois :

- l'état géométrique de la surface défini par l'ensemble des écarts géométriques de la pièce réalisée en fabrication par rapport à celle géométriquement idéale;
- l'état physico-chimique défini par les diverses caractéristiques de la couche superficielle : structure et texture cristallines, adsorption, etc.

Selon la normalisation française (NF E 05-515), les défauts ou les irrégularités géométriques de surface se classent conventionnellement sous six numéros d'ordre, à savoir:

Ordre 1: Défauts de forme et de position qui sont imputables à un manque de rectitude, à une ovalisation ou à un manque de cylindricité. Leur amplitude varie de 2.5 à plus de 100 microns et leur période est de plusieurs ordres de grandeur plus grande que leur amplitude.

Ordre 2: Défauts d'ondulation (défauts macroscopiques) possédant généralement un caractère périodique dû essentiellement à des vibrations de basses fréquences de la pièce et/ou de l'outil générateur. La période de ces défauts est de quelques ordres de grandeur plus grande que leur amplitude, soit de 0,1 à 50 microns.

Ordre 3: Stries, sillons qui sont des défauts périodiques ou pseudo-périodiques.

Ordre 4: Défauts localisés (échelle microscopique) : arrachement, marque d'outil, ... ; ce type de défaut a un caractère apériodique.

Ordre 5: Structure cristalline (échelle mésoscopique).

Ordre 6: Réseau cristallin (échelle nanoscopique).

Les défauts des 3^{ème} et 4^{ème} ordres, qui sont intéressants du point de vue tribologique, sont désignés par le terme général de rugosités. Il convient de préciser que le profil d'une surface mesuré à l'aide d'un profilographe est le résultat de la superposition des défauts de forme, d'ondulation et de rugosité figure I.2.

Les amplitudes de rugosités peuvent varier de 0,01 microns ou moins pour les surfaces polies à 25 microns pour les surfaces usinées par des procédés conventionnels.

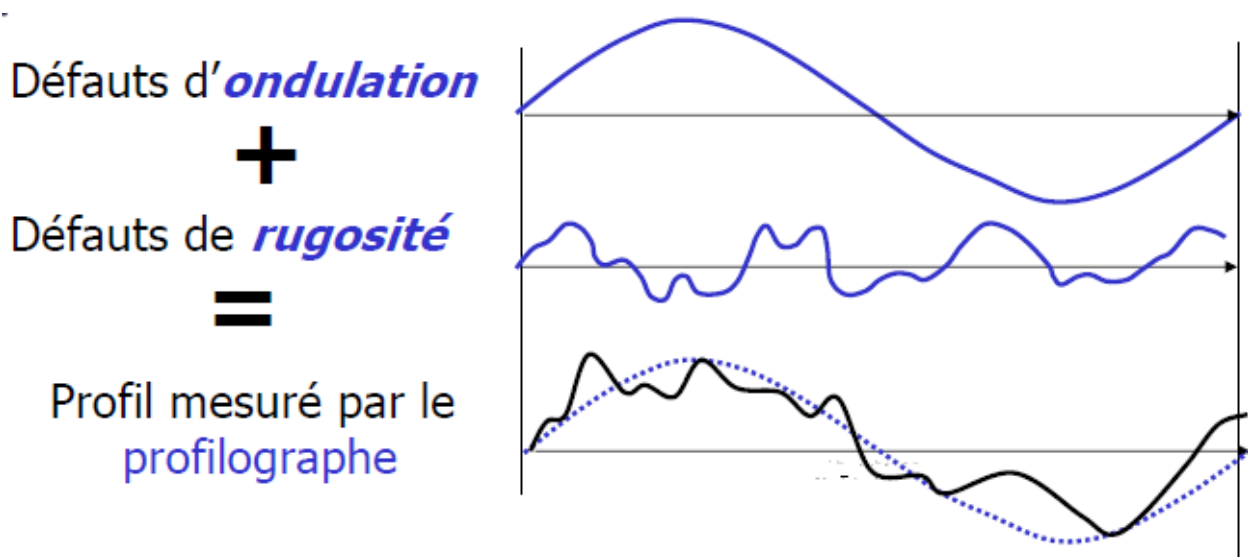


Fig. I.2 Schématisation d'un profil mesuré par le profilographe.

1.2.3. Mesure des défauts

L'étude des états de surface remonte aux années 30, avec le développement des appareils de mesure de profil. Après 1950, les premiers appareils analogiques ont fait leur apparition et permirent de mesurer quelques paramètres. Les années 70 ont vu l'apparition de nouveaux moyens informatiques et électroniques qui permirent de définir un plus grand nombre de paramètres caractérisant l'état de surface.

Aujourd'hui, les moyens métrologiques modernes et les techniques d'imagerie topographique permettent d'extraire des paramètres pertinents des surfaces industrielles.

Le profil d'une surface est le résultat de la superposition des défauts de forme (shape defects), des défauts d'ondulation (waviness defects) et des défauts de rugosité (roughness defects). Les défauts de forme sont facilement mesurés avec les instruments de métrologie classiques comme le micromètre parce que leur période est grande. La période des défauts d'ondulation et de rugosité étant plus petite, un palpeur capable de les détecter doit aussi être petit. L'appareil le plus utilisé pour cette tâche est le *profilographe* figure I.3. Cet appareil comprend un stylet durci (diamant), qui se déplace sur la surface à très basse vitesse (1 mm/s). Le stylet est terminé par une petite pointe ($\approx 0,5 \mu\text{m}$ de rayon) qui agit un peu comme un filtre à haute fréquence : les contours plus petits que le rayon de la pointe du palpeur ne sont pas enregistrés.

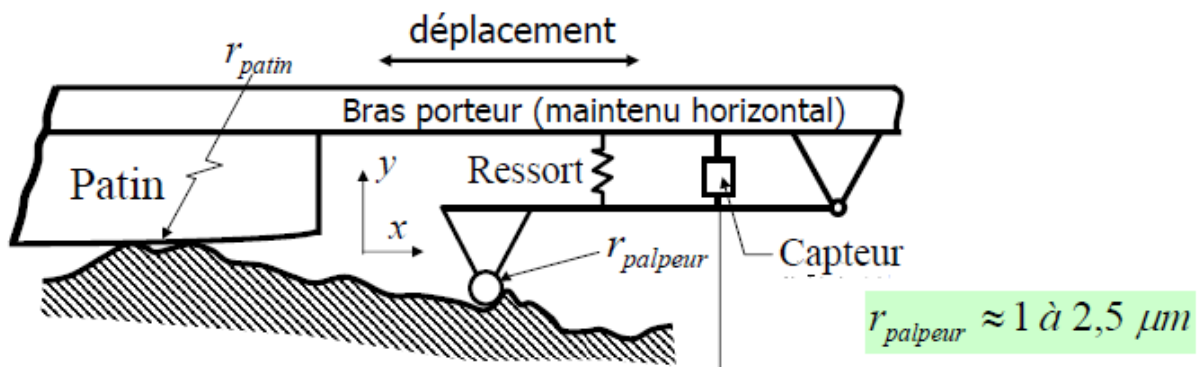


Fig. I.3 Schéma d'un profilographe

Le déplacement du stylet sur le profil est transformé en signal électrique par le capteur, numérisé et ensuite traité par un ordinateur par des techniques statistiques.

1.2.4 Caractérisation des surfaces : Principaux paramètres statistiques

La norme ISO 4287 [17-20] recense l'ensemble des paramètres géométriques et statistiques existants dans l'analyse des états de surfaces. Cette norme définit au moins 19 caractéristiques statistiques pour caractériser les surfaces.

Les paramètres statistiques les plus connus sont sans doute les coefficients R_a et R_q , qui sont définis pour une longueur de base sur une ligne de référence. La ligne de référence sépare les crêtes et les creux d'un profil de la surface en deux catégories : ceux situés au dessus de la ligne de référence, et ceux situés en dessous. Les paramètres statistiques sont toujours calculés à partir de la ligne de référence sur une longueur caractéristique appelée longueur de base.

Définition de R_a et R_q

- R_a est la moyenne des valeurs absolues des déviations y_i du profil par rapport à la ligne de référence arithmétique figure I.4, soit :

$$R_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i| \quad (\text{I.1})$$

La ligne de référence arithmétique (ou ligne centrale) est la ligne qui divise le profil en délimitant, à l'intérieur de la longueur de base, des aires égales de part et d'autre de cette ligne.

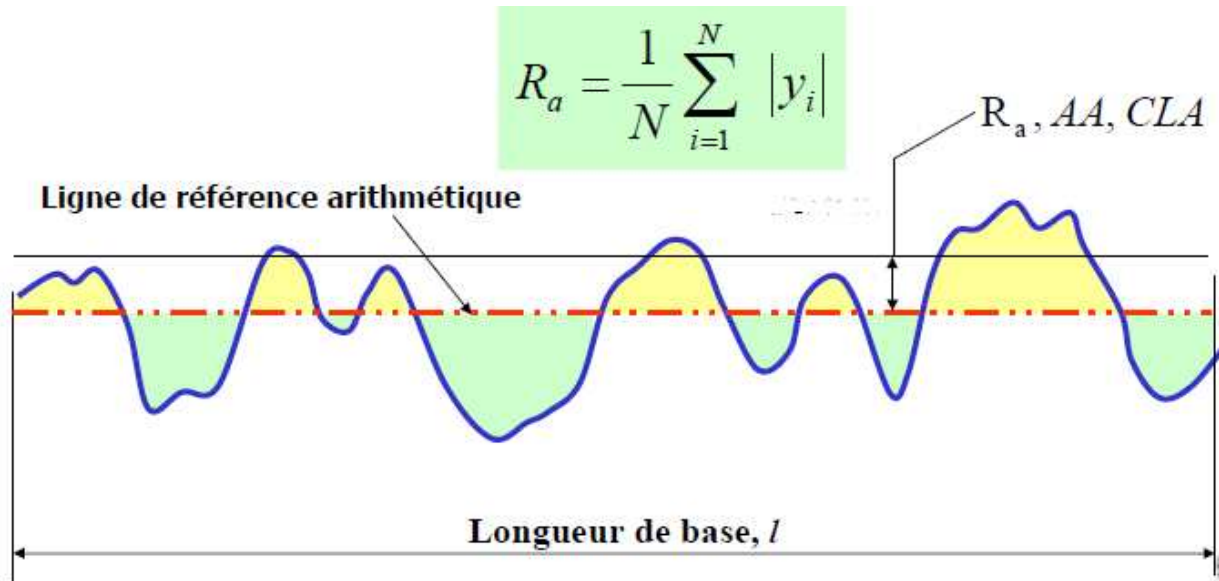


Fig. I.4 Profil de rugosité sur lequel est défini l'écart arithmétique R_a

• R_q est la moyenne *RMS* (*Random Mean Square*) des déviations du profil par rapport à la ligne de référence des moindres carrés figure I.5, soit :

$$R_q = RMS = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (I.2)$$

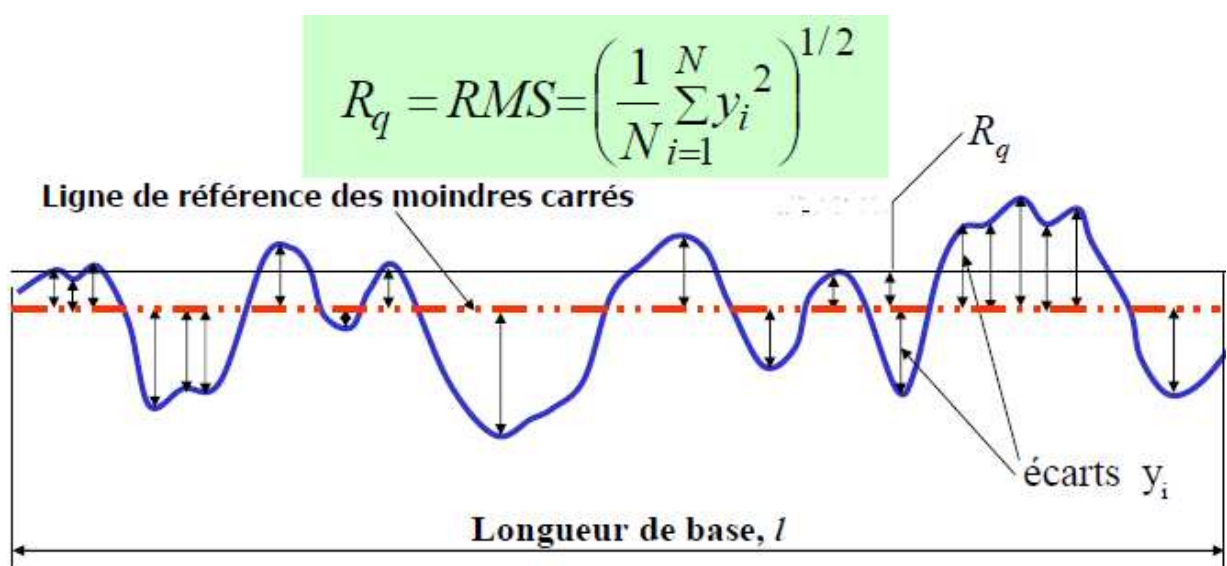
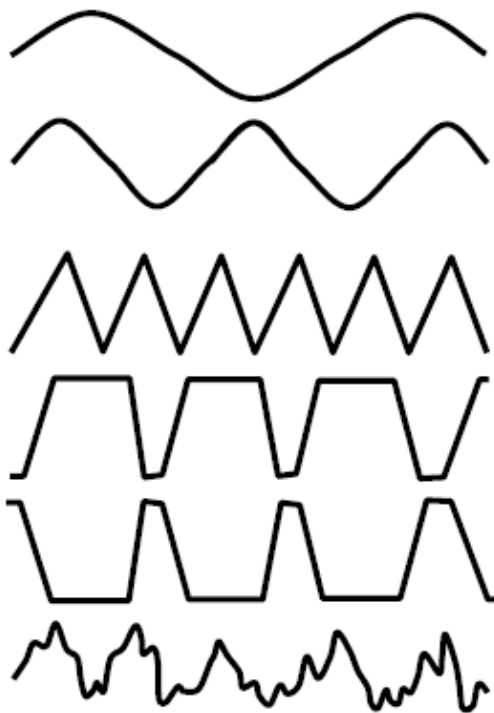


Fig. I.5 Profil de rugosité sur lequel est défini l'écart moyen géométrique RMS

La *ligne de référence des moindres carrés* (ou ligne moyenne) est la ligne qui divise le profil en délimitant, à l'intérieur de la longueur de base, une valeur minimale de la somme des carrés des aires entre les crêtes et les creux.

Les valeurs R_a et R_q sont très proches l'une de l'autre. Malheureusement, beaucoup d'ingénieurs ne spécifient qu'une ou l'autre de ces valeurs pour caractériser le fini de surface. Ni l'un ni l'autre de ces paramètres ne sont en réalité suffisants. En effet, plusieurs formes de profil d'allure différente peuvent avoir des valeurs R_a ou R_q très voisines. Par exemple, les profils de la figure I.6 ont la même valeur R_a et R_q , mais ils présentent un comportement totalement différent en frottement et en usure.

Tous ces profils ont la même valeur de R_a et R_q .



R_a ou R_q caractérisent la hauteur des irrégularités mais pas la forme.



R_a et R_q sont insuffisants pour bien caractériser les surfaces en tribologie.

Fig. I.6 Exemple de 6 profils différents ayant les même R_a et R_q

Définition de l'obliquité (Skewness)

Pour différencier les surfaces du point de vue tribologique, il est nécessaire de calculer d'autres paramètres qui caractérisent leur topographie. L'un de ces paramètres est l'obliquité S_k figure I.7, qui correspond au moment d'ordre 3 :

$$S_k = \frac{1}{R_q^3} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^3 \quad (\text{I.3})$$

Une valeur négative de S_k indique une prédominance de vallées, tandis qu'une valeur positive est le signe de crêtes abondantes. Un profil avec une valeur de S_k négative possède un meilleur comportement au frottement, et donc à l'usure.

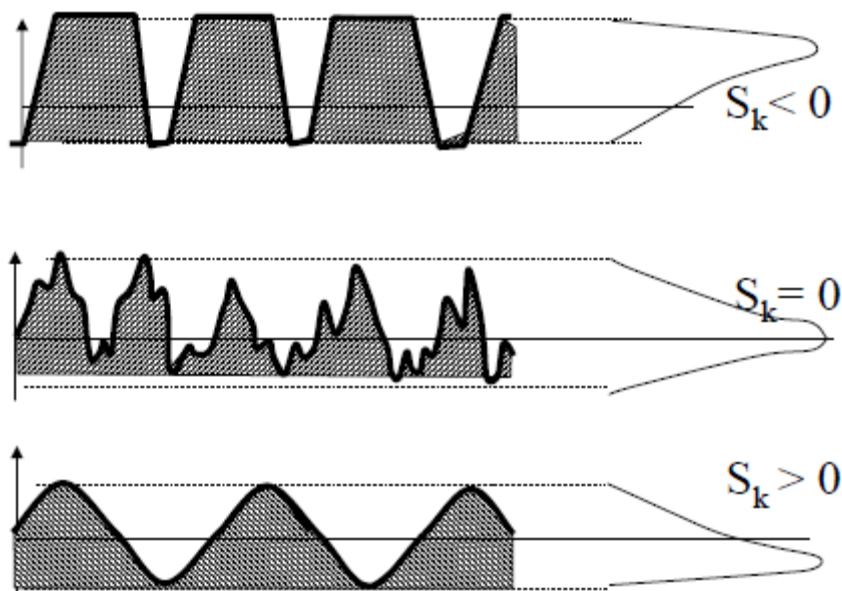


Fig. I.7 Obliquité S_k d'un profil.

Définition de l'étalement (kurtosis)

Enfin, un autre paramètre peut aussi être utilisé pour différencier la qualité du fini de surface : il s'agit de l'étalement E_k figure I.8, qui correspond à un moment d'ordre 4 du profil :

$$E_k = \frac{1}{R_q^4} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^4 \quad (\text{I.4})$$

Un profil avec un étalement $E_k > 3$ correspond à une surface apte à recevoir des placages, qui présente en même temps un bon comportement au frottement et à l'usure.

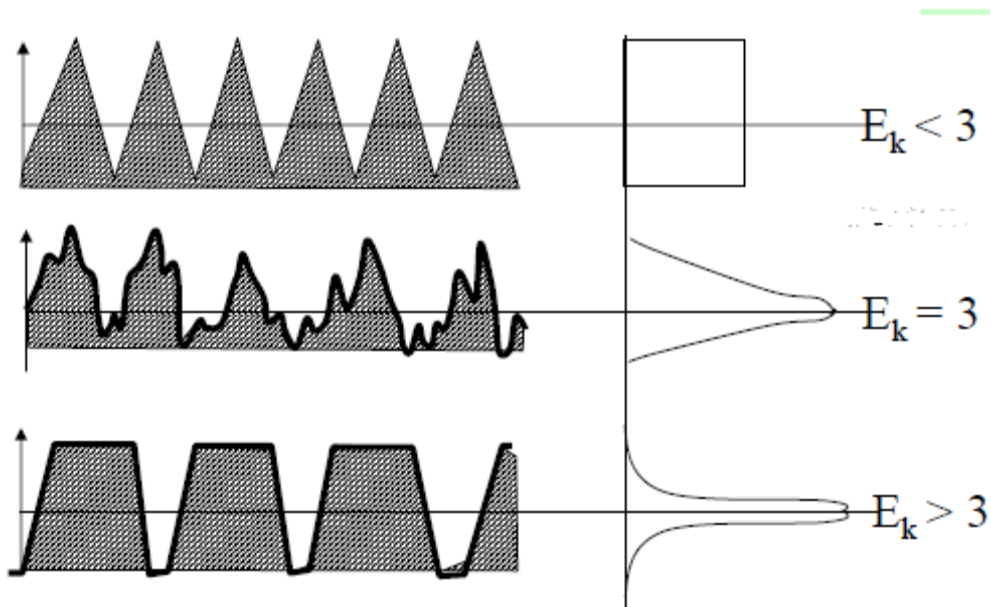


Fig. I.8 Etalement E_k d'un profil.

Longueur portante

La longueur portante d'un profil est définie à la figure I.9 comme la somme des longueurs des segments obtenus en coupant les saillies par une ligne parallèle à la ligne de référence à l'intérieur de la longueur de base. La courbe du taux de longueur portante du profil représente la relation entre le rapport de la longueur portante sur la longueur de la ligne de base avec le niveau de coupe du profil.

Longueur portante η_p : somme des longueurs des segments obtenus en coupant le profil par une ligne parallèle à la ligne de référence à l'intérieur de la longueur de base.

$$\eta_p = \sum_{i=1}^n b_i$$

Taux de longueur portante t_p :

$$t_p = \frac{\eta_p}{l}$$

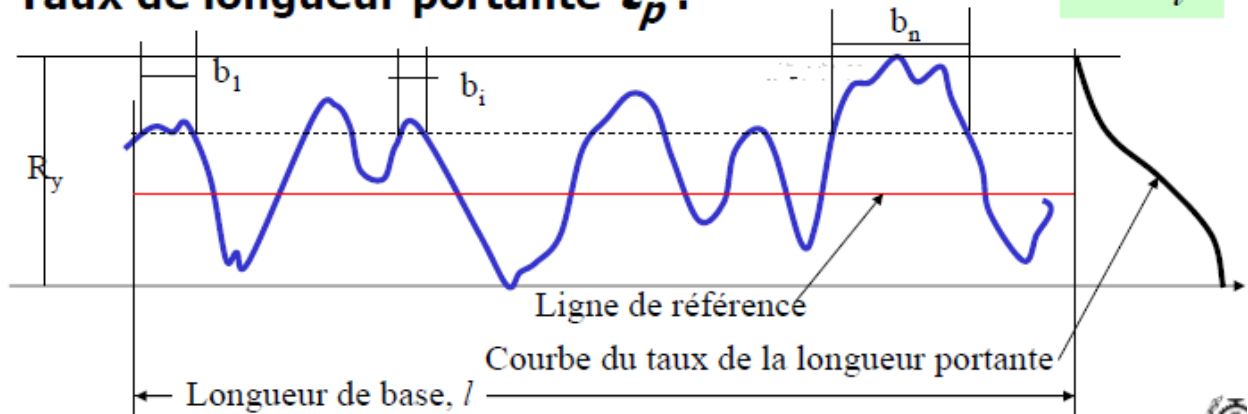


Fig. I.9 Courbe du taux de la longueur portante.

I.2.5 Topographie des surfaces

Le profilographe mesure et enregistre les variations de hauteur d'une surface sur une ligne. Les paramètres mesurés à partir de ces enregistrements ne valent aussi que sur une ligne. Cependant, les surfaces existent en trois dimensions. Pour les caractériser en trois dimensions, il faut utiliser une technique de mesure autre que le profilographe (optique, par exemple) ou effectuer plusieurs passes parallèles avec le profilographe et les juxtaposer figure I.10. Selon le procédé par lequel la surface est usinée, sa topographie en trois dimensions peut s'apparenter soit à des cylindres parallèles, soit à des sphères de différentes hauteurs figure I.10.

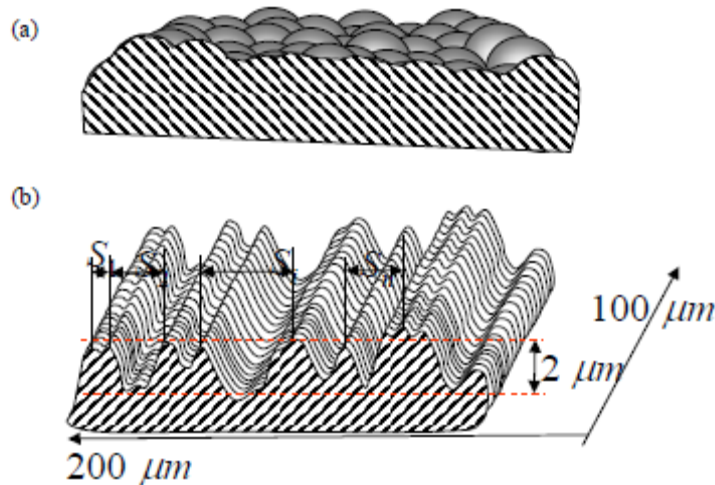


Fig. I.10 Représentation tridimensionnelle de la topographie de surface à partir de mesures réalisées avec un profilographe : a) surface usinée au tour ou à la fraise b) surface grenillée.

Afin de comprendre les phénomènes tels que l'usure, la friction et la lubrification, la quantification de la topographie de la surface est importante. De plus, le design des surfaces esthétiques telles que les surfaces de miroir, nécessite un contrôle de la texture de la surface à une échelle très fine.

Depuis son invention par Abbot *et al.* [21] dans les années 30, la profilométrie décrite précédemment a été employée de façon extensive afin d'estimer la quantité et la fonctionnalité des surfaces industrielles.

Les différentes applications de la profilométrie ont généré de nombreux paramètres permettant de quantifier les propriétés de surface. Le paramètre le plus connu est la rugosité moyenne ou la hauteur arithmétique moyenne, R_a , qui est fréquemment utilisée, même aujourd'hui. Bien que de concept simple, R_a ne décrit pas très bien les surfaces usinées.

Avec la venue des ordinateurs puissants et les systèmes de mesure plus sophistiqués, la topographie (2D) traditionnelle a été suppléée, ou même substituée, par les techniques de mesure tridimensionnelle (3D) dans la mesure où la caractérisation des surfaces en (3D) permet des interprétations faciles et intuitives. Aujourd'hui, les techniques de mesure (3D) les plus couramment utilisées sont :

-Microscopie d'interférence :

Il s'agit d'une technique optique utilisant l'interférométrie pour déterminer la distance de l'objectif à la surface de l'échantillon. En variant la hauteur des lentilles optiques au dessus de l'échantillon et en enregistrant les franges d'interférences, une carte en hauteur est construite par l'ordinateur figure I.11



Fig. I.11 Photographie d'un microscope d'interférences.

-Microscopie à force atomique (AFM) :

La MFA (Atomic Force Microscopy, en anglais) mesure la surface à l'aide d'une pointe silicone extrêmement aiguë avec un rayon d'incurvation de quelques dizaines de nanomètres offrant une plage de résolution en nanomètres. Cette technique extrêmement précise est utilisée pour des surfaces avec des détails et textures extrêmement fines (moins de 5 microns). La figure I.12 montre un instrument MFA numérique.



Fig. I.12 Microscope à force atomique (AFM).

Il existe d'autres procédés exploitant une propriété particulière de la surface à usiner. Par exemple, les mesures de capacité peuvent être utilisées pour analyser les surfaces conductrices et celles par ultrasons permettent d'étudier les surfaces immergées. La figure I.13 illustre différentes micro-topographies (3D) de surfaces industrielles obtenues par la technique optique décrite précédemment.

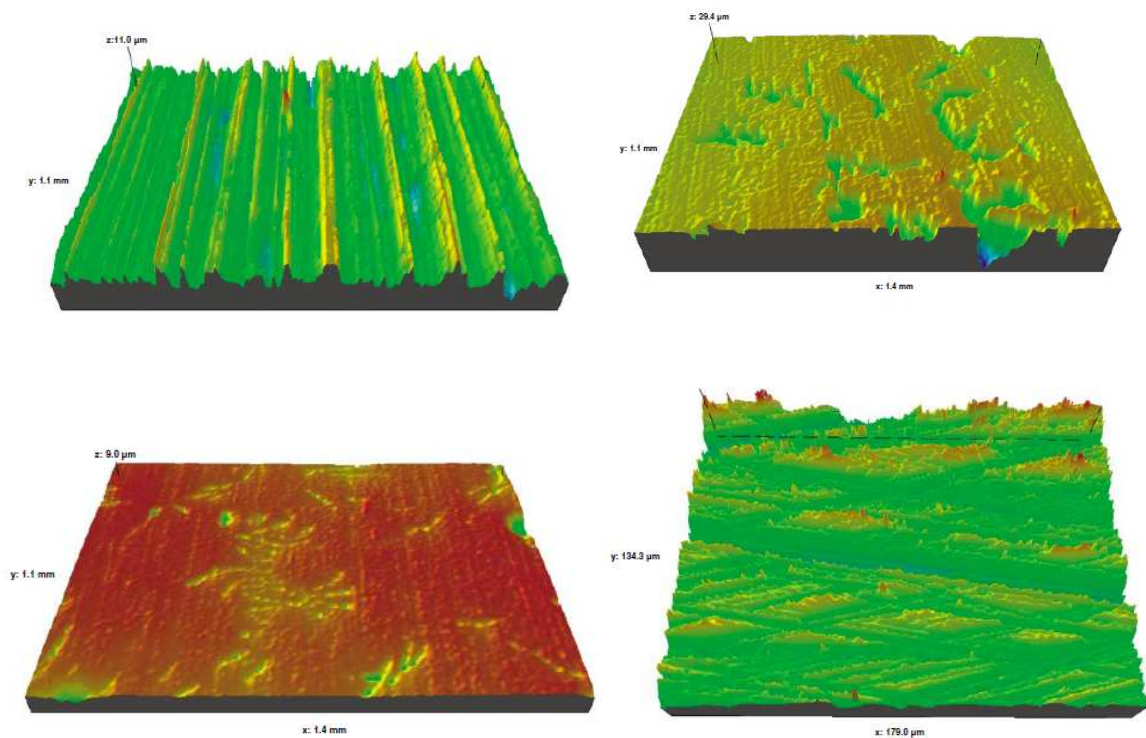


Fig. I.13 Topographies réelles de surfaces industrielles obtenues par la technique optique de mesure (3D)

1.2.6 Modélisation de la rugosité des surfaces

La hauteur d'une surface rugueuse peut être considérée comme une variable aléatoire à deux dimensions $z(x,y)$ où z se mesure à partir du plan moyen de la surface. La densité de probabilité de cette variable par l'examen de sa courbe représentative et de celles de ses moments centrés, permet d'illustrer certains aspects de la rugosité tels que la dispersion ou l'asymétrie (moments d'ordre 3 et 4). En adoptant la notation indicielle, les principaux paramètres de la caractérisation statistique des surfaces s'expriment :

- *Hauteur de la surface moyenne*

$$\langle z_{ij} \rangle = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M z_{ij} \quad (\text{I.5})$$

où N et M sont respectivement le nombre de points suivant les directions x et y et $z_{ij} = z(x_i, y_j)$

Il est à préciser que la moyenne des hauteurs de la surface est supposée nulle (surface normalisée) ; c'est à dire : $\langle z_{ij} \rangle = 0$

- *Ecart type quadratique*

Le calcul de l'écart-type quadratique de la distance des hauteurs de rugosité S_q permet d'évaluer l'intervalle de variation de la hauteur de rugosité. Il est préféré à l'écart arithmétique moyen S_a du fait de son usage fréquent en statistique :

$$S_q = \sigma = \left(\frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M z_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad (\text{I.6})$$

Par définition, l'écart-type d'une distribution statistique est la racine carrée de son moment centré calculé à l'ordre 2 :

$$m_k = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (z_{ij} - \langle z_{ij} \rangle)^k \quad (\text{I.7})$$

Ces moments sont à l'origine de deux nouveaux termes décrivant la distribution statistique, le paramètre d'asymétrie SSk (Skewness) et le paramètre d'étalement SKu (Kurtosis) :

$$SSk = \frac{m_3}{S_q^3} = \frac{1}{NM} \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M z_{ij}^3}{S_q^3} \quad (\text{I.8})$$

$$SKu = \frac{m_4}{S_q^4} = \frac{1}{NM} \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M z_{ij}^4}{S_q^4} \quad (\text{I.9})$$

Dans cette nouvelle notation, la lettre initiale S indique que le paramètre considéré se rapporte à une surface rugueuse et non à un simple profil (§ I.2.4).

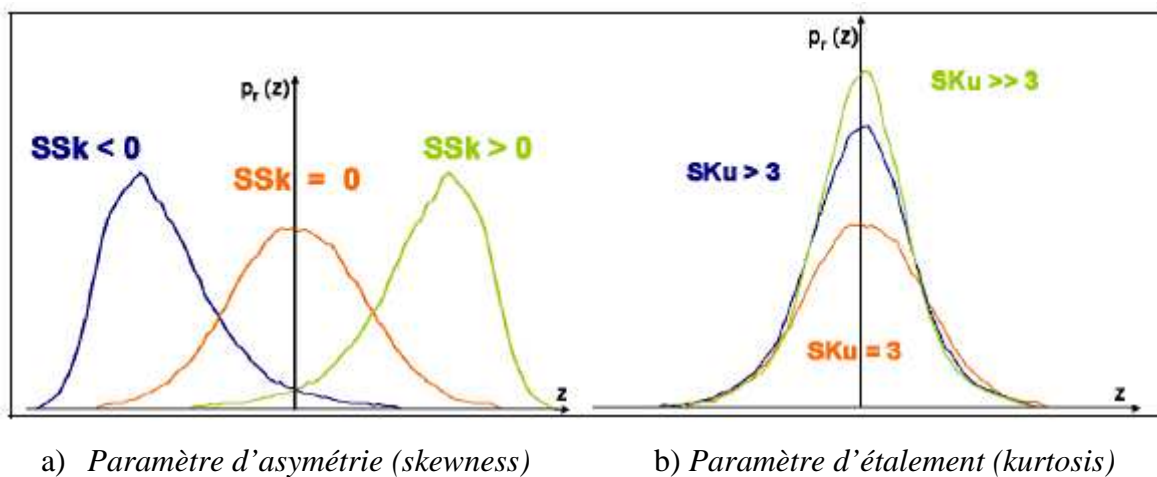


Fig. I.14 Variations de la distribution statistique des hauteurs d'une surface rugueuse pour différentes valeurs des paramètres d'asymétrie et d'étalement.

Les deux paramètres SSk et SKu sont utilisés pour définir la forme et l'agencement de la rugosité d'une surface. Toute distribution gaussienne possède un coefficient d'asymétrie nul et un coefficient d'étalement égal à 3. Une valeur nulle du paramètre SSk indique que la distribution est symétrique figure I.14a. Dans le contexte des surfaces rugueuses, cela signifie que les vallées et les pics (sommets) sont répartis de manière égale de part et d'autre du plan moyen (par exemple, cas des surfaces de forme sinusoïdale). Une valeur négative du paramètre SSk est caractéristique d'une surface présentant plus de vallées que de pics figure I.14a. Autrement dit, une valeur positive de ce paramètre signifie que la surface présente moins de vallées que de pics.

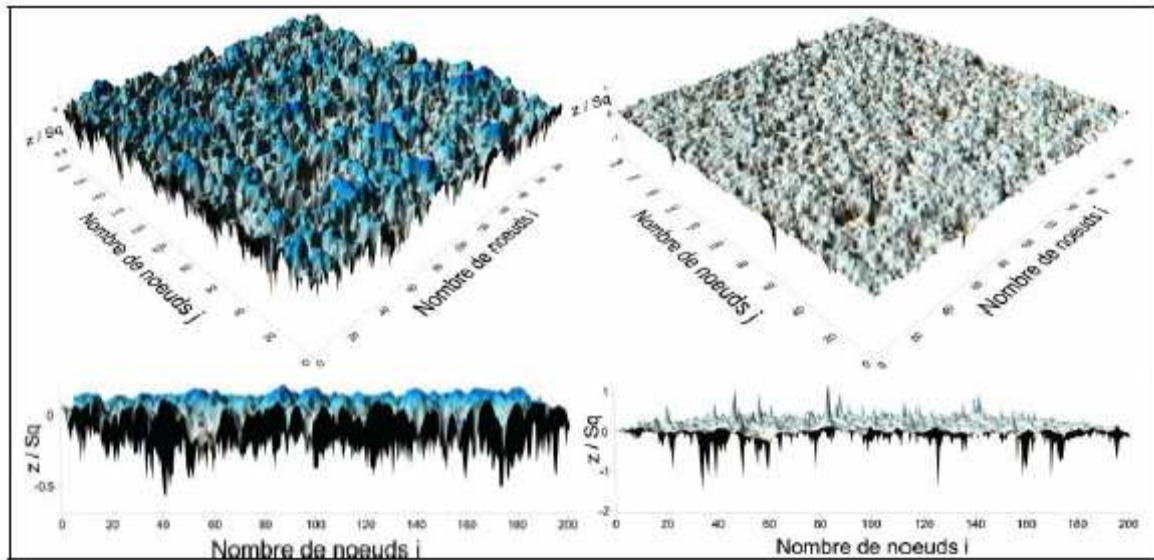
La valeur de SKu renseigne sur l'aplatissement de la courbe de distribution des hauteurs figure I.14b. Lorsque les motifs de la rugosité (pics, vallées) sont larges et leur extrémité peu éloignée du plan moyen, alors $SKu < 3$ et la distribution est reserrée autour de la valeur médiane. En revanche, si les pics pointus et les vallées étroites et profondes prédominent, alors $SKu > 3$ et la distribution est plus large que la distribution normale. En général, les paramètres d'asymétrie et d'étalement varient simultanément.

L'étude des propriétés spectrales d'une surface rugueuse (fonction d'autocorrélation) constitue un bon complément des méthodes statistiques (Cf. référence [22] pour plus de détails).

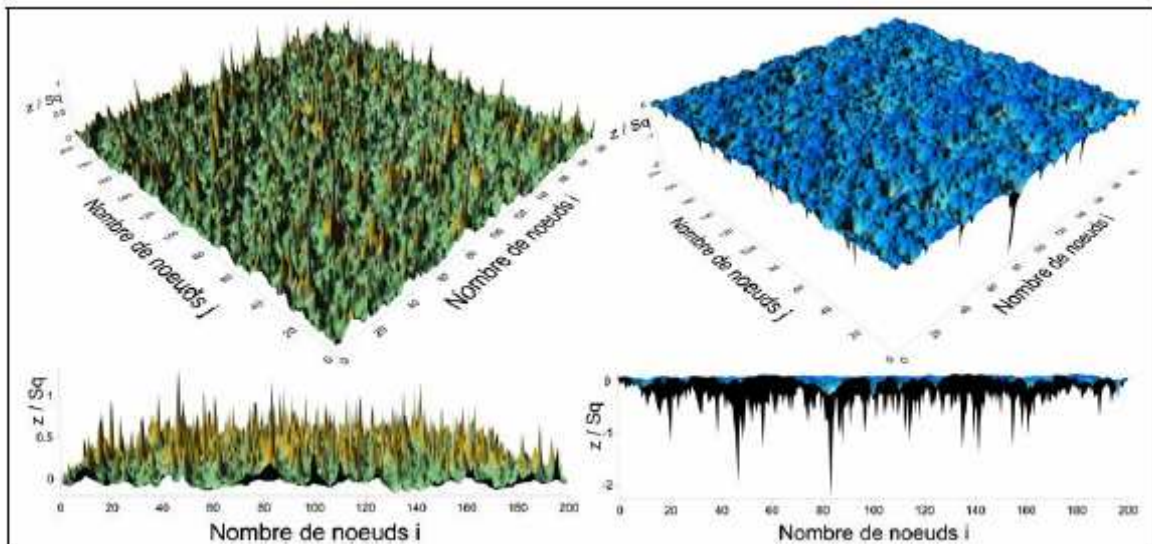
Il est intéressant de noter que les surfaces rugueuses gaussiennes ou non peuvent être générées numériquement figures I.15 en faisant généralement appel à des séries harmoniques de la forme :

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_{kl} [\cos(\omega_k x_i + \phi_k) \cos(\omega_l y_j + \phi_l)] \quad (\text{I.10})$$

Dans cette équation, a_{kl} est un terme d'amplitude, ω_k et ω_l désignent les pulsations spatiales, ϕ_k et ϕ_l sont des déphasages introduits pour donner un caractère aléatoire aux hauteurs z .



a) Surfaces portantes à coefficient d'étalement faible / élevé



b) Surfaces à coefficient d'asymétrie positif / négatif

Fig. I. 15 Exemples de surfaces industrielles générées numériquement.

I.3 Méthodes d'analyse des contacts rugueux lubrifiés

La théorie de lubrification hydrodynamique classique fondée par Osborne Reynolds en 1886 est basée sur l'hypothèse de surfaces parfaitement lisses [1]. Cependant, il a été montré qu'une telle hypothèse est peu réaliste surtout pour l'étude des contacts lubrifiés sévèrement chargés fonctionnant avec de faibles épaisseurs de film.

Dans les systèmes mécaniques lubrifiés en régime hydrodynamique ou élasto-hydrodynamique (EHD) tels que les paliers, les butées, les garnitures mécaniques d'étanchéité, les engrenages et les roulements figure I.16, l'épaisseur du film lubrifiant h est censée d'une part être plus grande que la hauteur des aspérités et d'autre part elle doit être très faible devant la longueur d'onde de la rugosité (rugosité de Reynolds); c'est-à-dire $h \ll \lambda$. Dans ces conditions, l'équation de Reynolds peut être appliquée pour décrire le comportement hydrodynamique des contacts rugueux.

Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour l'étude des effets des rugosités de surface sur les performances des contacts hydrodynamiques, à savoir les méthodes stochastiques et les méthodes déterministes. Par comparaison aux modèles stochastiques, les modèles déterministes permettent de prendre en compte de manière plus réaliste la texture et la microtopographie des surfaces dans les études de simulation.

I.3.1 Méthode stochastique

Le concept stochastique a été introduit pour la première fois par Tzeng et Saibel [23] en 1967 pour l'étude de l'influence d'une rugosité transversale sur les performances d'un patin incliné bidimensionnel.

En 1969, la théorie stochastique développée par Christensen [24] pour la lubrification hydrodynamique des surfaces rugueuses a été étendue au cas des paliers poreux par Prakash et Tiwari [25].

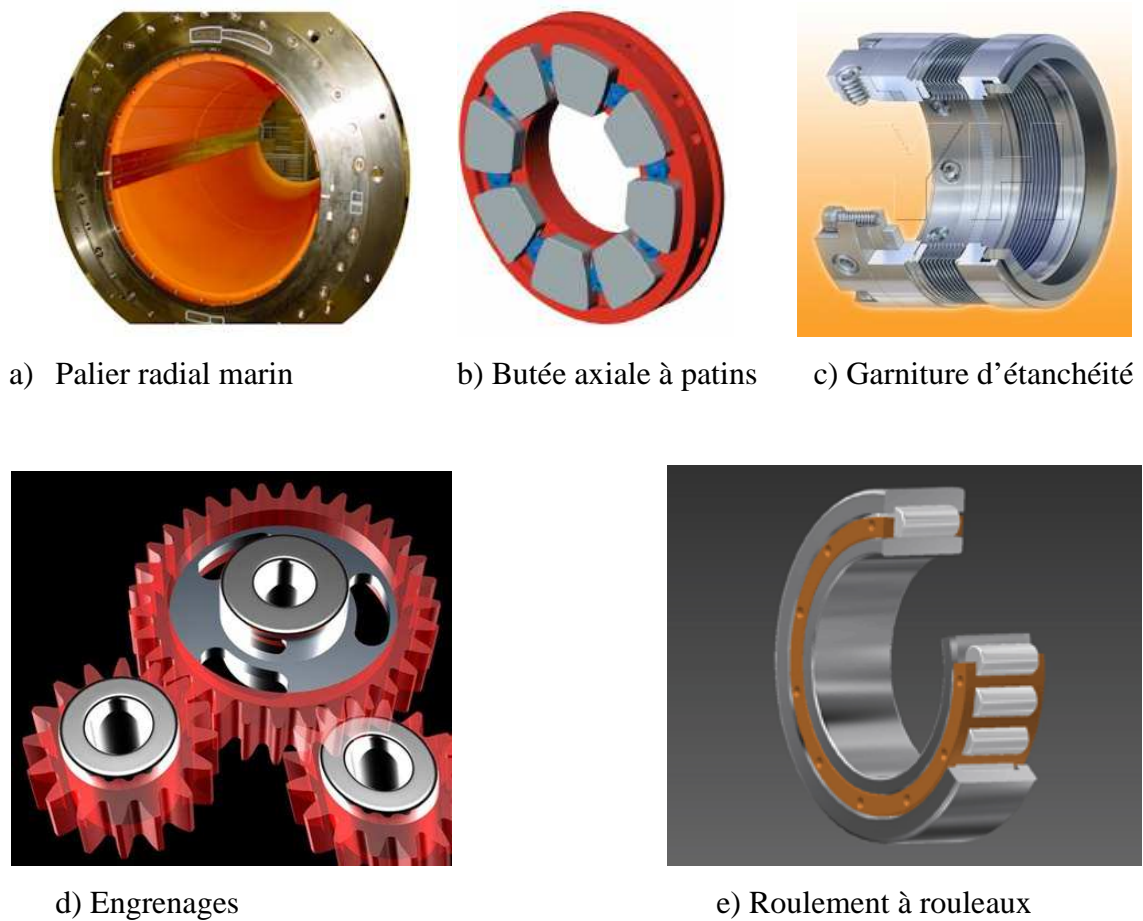


Fig. I.16 Exemples de systèmes mécaniques lubrifiés.

En 1971, Christensen et Tonder [26] développent l'équation moyennée pour analyser la répartition de la pression en présence de rugosités unidirectionnelles. Dans cette équation, ils introduisent le facteur de correction provenant de la théorie stochastique pour tenir compte des effets de la rugosité dans les patins.

En 1973, Elrod [27] a utilisé une approche stochastique pour mettre en évidence les effets des paramètres statistiques sur les caractéristiques d'un écoulement newtonien en film mince en prenant en compte les défauts de rugosité.

En 1978, Patir et Cheng [28] proposent une équation de Reynolds moyennée dans laquelle plusieurs facteurs de correction de débit sont introduits pour tenir compte des effets de la rugosité dans les 3 dimensions.

En 1997, Boedo et Booker [29] utilisent la méthode des éléments finis pour l'analyse des performances d'un palier avec une rugosité isotrope et ses effets sur la déformation élastique du palier. Dans cette étude, le fluide est supposé newtonien. En 2001, Wang et Keith [30] ont utilisé l'algorithme de cavitation universel développé par Elrod [31] en 1981 puis par Vijayaraghavan et Keith [32] pour analyser les effets de la rugosité ainsi que les effets non newtoniens sur le comportement de paliers dynamiquement chargés. Trois types de rugosité ont été étudiés : longitudinale, axiale et isotrope.

Récemment, Naduvinamani et al. [33] ont étudié l'effet de l'obliquité (skewness) de la rugosité sur les performances hydrodynamiques d'un patin échelon de Rayleigh poreux utilisant un fluide à couple de contrainte comme lubrifiant. Ils ont montré que pour une inclinaison négative de la rugosité, la capacité de charge du contact augmente tandis que le coefficient de frottement diminue. Cependant, la tendance inverse est observée pour une inclinaison positive.

I.3.2 Méthode déterministe

Ce type d'analyse est basé sur une résolution numérique directe de l'équation de Reynolds et une description de profils de surfaces simplifiées, en prenant par exemple un profil modélisé par une fonction périodique ou des profils réels figure I.13.

Il n'est plus nécessaire de connaître les paramètres statistiques relatifs au type de rugosité. Au lieu de considérer des facteurs de flux dans l'équation de Reynolds, on l'utilise sous la forme classique. C'est dans l'équation de l'épaisseur du film où sont prises en compte les rugosités.

En 1992, Kweh *et al.* [34] se sont intéressés au cas d'un contact lourdement chargé en introduisant une rugosité transverse sinusoïdale tridimensionnelle. Greenwood *et al.* [35] traitent le problème inverse; c'est-à-dire la rugosité de la surface est recherchée à partir des variations sinusoïdales de la pression.

La reproduction de la rugosité de la surface revient à regarder les variations de la pression et ne prendre en compte que les petites variations : les composantes de basses fréquences (l'ondulation) d'une rugosité de surface sont très aplaties alors que les composantes de hautes fréquences (rugosité) sont encore présentes après déformation.

En 1997, Zhu *et al.* [36] ont utilisé un relevé tridimensionnel de rugosité de surface pour étudier un contact ponctuel. Ils montrent que le pic de pression est une variable locale qui dépend largement des aspérités et de leurs pentes (obliquités).

L'approche déterministe permet de prendre en compte la variance la plus réaliste des rugosités. Les travaux effectués avec ce type d'approche sont basés sur l'application de l'équation de Reynolds et montrent qu'une description précise de la rugosité est une donnée importante. Elle permet d'obtenir des informations locales telles que les variations rapides locales de la pression. Cependant, cette approche nécessite un espace mémoire important et de grands efforts de calcul car il faut raffiner au maximum le maillage pour pouvoir décrire les plus petites ondulations de la rugosité.

Récemment, Dobrica *et al.* [37] ont étudié l'influence de la pression spécifique sur les performances d'un palier à arc partiel rugueux de faibles dimensions dont la surface projetée est de 3 cm^2 fonctionnant en régime de lubrification mixte. Pour prendre en considération les effets des différentes formes de rugosités (anisotropes, transversales et longitudinales), ces auteurs ont utilisé deux approches, à savoir : l'approche stochastique proposée par Patir et Cheng [28] basée sur la résolution d'une équation de Reynolds moyennée par la méthode des volumes finis et l'approche déterministe basée sur la résolution de l'équation de Reynolds classique au moyen de la même méthode, i. e. les volumes finis. Dans cette excellente étude, l'arbre tournant à une faible vitesse de rotation est supposé rigide et parfaitement lisse tandis que la surface du patin contiguë au film présente des rugosités gaussiennes isotropes ou orientées générées numériquement dont la rugosité RMS ou $R_q=0.4$ microns. Ils ont montré que :

- l'orientation de la rugosité de surface affecte les performances du palier tels que l'épaisseur minimale du film, l'angle de calage et les couples de frottement calculés sur l'arbre et le patin;
- par comparaison au cas lisse, l'effet de la rugosité transversale est le plus important conduisant à une augmentation importante de l'épaisseur minimale du film et du couple de frottement sur l'arbre;
- la rugosité longitudinale n'affecte que le couple de frottement.

A partir d'une comparaison des résultats obtenus par les deux approches déterministe et stochastique pour les trois formes de rugosités considérées, ils ont aussi montré que

l'approche stochastique donne une bonne prédiction de l'épaisseur minimale du film et une mauvaise estimation (sous-estimation) des couples de frottement.

Plus récemment, les mêmes auteurs [38] ont développé une nouvelle approche élasto-hydrodynamique (EHD) pour l'étude du comportement des paliers à arc partiel rugueux fonctionnant en régime de lubrification mixte. Dans cette approche, l'arbre est supposé rigide et lisse tournant à de faibles vitesses tandis que le patin est rugueux et compliant dont le comportement est élastique parfaitement plastique (EPP).

I.3.3 Méthode d'homogénéisation

La méthode d'homogénéisation ou de moyennisation est une théorie mathématique qui inclut l'étude des équations aux dérivées partielles à coefficients à oscillation rapide [5]. Depuis quelques décennies, cette méthode a été utilisée avec succès pour le traitement des problèmes ayant trait, par exemple, à l'élasticité des milieux anisotropes tels que les matériaux composites [6, 7]. En revanche, cette méthode n'est pas fréquemment utilisée dans le domaine de la tribologie. Récemment, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'application du concept d'homogénéisation dans les études de simulation des problèmes de lubrification par fluides compressibles et incompressibles dont le comportement peut être newtonien ou non newtonien.

L'approche d'homogénéisation consiste à réécrire le problème posé en deux autres :

- Un problème local gouverné par 3 équations aux dérivées partielles du second ordre dont les inconnues sont les fonctions périodiques locales.
- Un problème homogénéisé régi par une équation aux dérivées partielles dont l'inconnue est la pression homogénéisée supposée nulle sur la frontière du domaine global.

La difficulté majeure de cette technique réside dans le découplage des deux problèmes à partir du problème global. Les coefficients du problème homogénéisé dépendent de la solution locale et ne peuvent être calculés qu'après traitement du problème local.

I.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord présenté les états structural et géométrique des surfaces industrielles ainsi que les paramètres statistiques couramment employés pour caractériser la rugosité des surfaces tout en évoquant quelques techniques de mesure topographique (3D) permettant de les obtenir. L'évaluation de la texture et de la topographie (3D) des surfaces mécaniques, qui est un domaine en expansion, est primordiale pour déterminer leurs propriétés tribologiques. Par exemple, la quantification de l'usure en terme de changement de la morphologie de la surface peut offrir une image plus détaillée du processus d'usure.

D'après la recherche bibliographique effectuée sur les différentes méthodes d'analyse des contacts lubrifiés rugueux, il ressort que la méthode d'homogénéisation s'avère être une alternative intéressante à la méthode déterministe spécifiquement dans le cas de rugosités périodiques car elle ne nécessite qu'une allocation mémoire réduite. De plus, elle présente des résultats plus réalistes comparés à ceux issus des approches stochastiques. Par comparaison à la méthode déterministe décrite précédemment, la technique d'homogénéisation ne nécessite pas un maillage très fin pour prendre en compte l'effet de la rugosité car cette dernière est prise en compte pendant la résolution des problèmes locaux. Cependant, cette technique ne permet pas d'utiliser comme données les topographies de surfaces réelles mesurées suivant les 3 directions de l'espace telles que celles illustrées par la figure I.13.

CHAPITRE II

Equation de base de la lubrification hydrodynamique par fluide newtonien

II .1 Introduction

La lubrification est une science qui s'intéresse à l'étude des phénomènes d'interaction entre deux corps en contact entre lesquels est intercalé un troisième corps appelé lubrifiant qui peut être fluide, solide ou semi-solide. Selon la nature du lubrifiant utilisé, on distingue deux types de lubrification, à savoir : la lubrification solide et la lubrification fluide. Dans cette dernière, les régimes de lubrification qui peuvent être rencontrés dans le cas des contacts fonctionnant à basse pression sont illustrés sur la figure II.1. Le fluide peut être un liquide pratiquement incompressible ou isovolume tels que de l'huile, de l'eau ou, même un métal fondu (Sodium liquide à 400 °C) comme il peut être un gaz compressible le plus souvent de l'air : c'est le cas des paliers et butées à gaz.

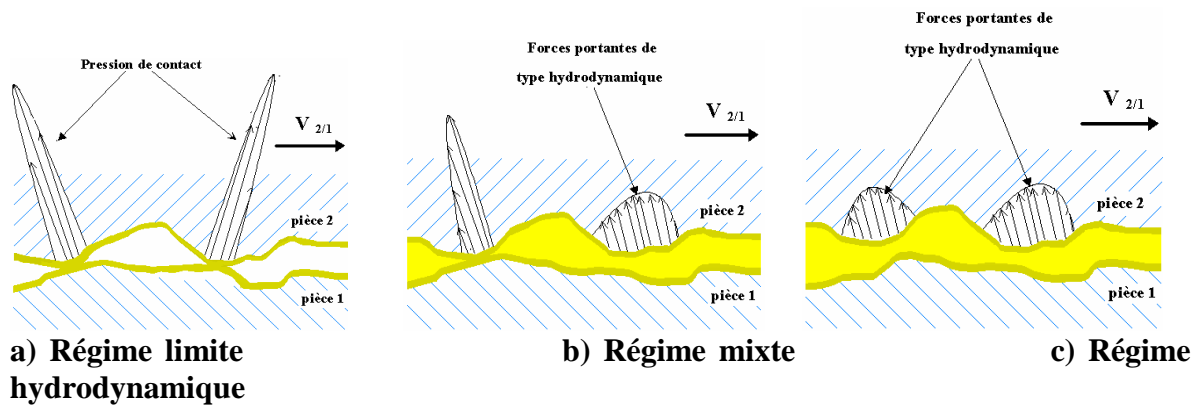


Fig. II.1 Différents régimes de lubrification fluide à basse pression.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à l'étude des contacts hydrodynamiques en supposant que les surfaces antagonistes sont séparées par un film fluide très mince, continu dont le comportement est newtonien figure II.2. Ces hypothèses permettent d'utiliser les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus pour décrire l'écoulement du fluide lubrifiant dans les contacts.

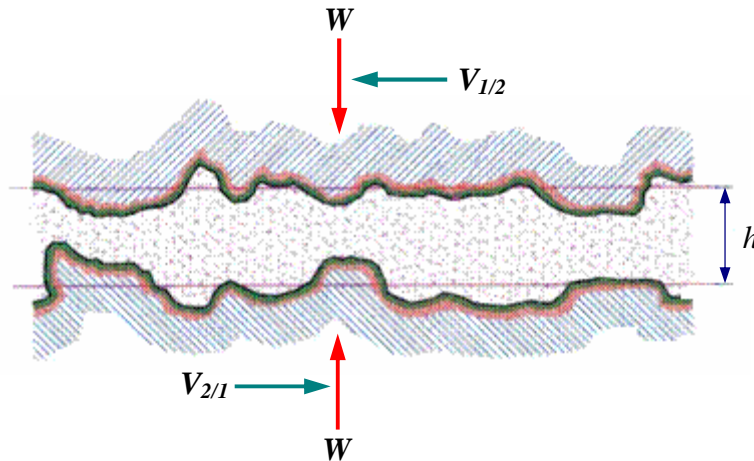


Fig. II.2 Schéma d'un contact lubrifié.

II.2 Equations générales de la dynamique des fluides visqueux

Les équations générales de la dynamique des fluides visqueux (réels) sont établies à partir des lois de conservation de la mécanique et de la loi de comportement rhéologique du fluide considéré. Dans le cas d'un fluide newtonien et compressible, les équations générales sont les suivantes :

- Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{II.1})$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \gamma_i = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{II.2})$$

avec $\gamma_i = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ et $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$

- Loi de comportement rhéologique :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (\text{II.3})$$

$$\text{où } \tau_{ij} = \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); k = 1, 2, 3 \quad (\text{II.4})$$

- Equation de conservation de l'énergie :

L'application du premier principe de la thermodynamique permet la dérivation de l'équation d'énergie suivante :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \Phi \quad (\text{II.5})$$

$$\text{où } \Phi = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \tau_{ij} (D_{ij} + \Omega_{ij}) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{II.6})$$

$$\text{et } \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

En reportant l'équation (II.3) dans l'équation (II.2) et en négligeant les forces massiques extérieures f_i , nous obtenons les équations de Navier :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \quad (\text{II.7})$$

avec $i, j = 1, 2, 3$

Pour un fluide isovolume ou incompressible caractérisé par une masse volumique constante $\rho = \rho_0 = \text{constante}$, les équations (II.1), (II.4), (II.5) et (II.7) deviennent :

- Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad i=1, 2, 3 \quad (\text{II.8})$$

- Equation constitutive du fluide :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{II.9})$$

- Equation d'énergie :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \Phi \quad (\text{II.10})$$

où

$$\Phi = \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.11})$$

- Equations de Navier :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \quad (\text{II.12})$$

Les différents paramètres intervenant dans les équations (II.1) à (II.12) sont définis comme suit :

| | |
|--|--|
| x_i, t | Variables d'espace et de temps, |
| u_i | Composantes de la vitesse d'une particule de fluide, |
| γ_i | Composantes de l'accélération d'une particule de fluide, |
| f_i | Forces massiques extérieures (gravité,...), |
| σ_{ij} | Tenseur des contraintes en un point du fluide, |
| τ_{ij} | Tenseur des contraintes de cisaillement visqueuses, |
| $D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ | Tenseur des taux de déformation symétrique, |
| δ_{ij} | Tenseur unité ou symbole de Kronecker, |
| $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ | |
| $L_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = D_{ij} + \Omega_{ij}$ | Tenseur gradient de vitesse, |
| $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ | Tenseur tourbillon antisymétrique, |
| C_p | Chaleur massique ou capacité calorifique à pression constante, |
| κ | Conductivité thermique du fluide, |
| ρ | Masse volumique du fluide, |
| p | Pression dans le fluide, |
| T | Température du fluide, |
| $\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ | Fonction de dissipation visqueuse ou densité de puissance, |

| | |
|-----------|--|
| λ | Coefficient de viscosité de dilatation du fluide, |
| μ | Coefficient de viscosité de cisaillement ou viscosité dynamique du fluide. |

II.3 Analyses dimensionnelles des équations

En mécanique des films minces visqueux, les équations de Navier (II.7) ou (II.12) et l'expression de la fonction de dissipation (II.6) ou (II.11) se simplifient très sensiblement car l'épaisseur du film suivant ox_3 est très faible par rapport aux deux autres dimensions de contact.

Pour mettre en évidence les termes prépondérants, il est commode de réécrire les équations relatives au fluide incompressible sous forme adimensionnée. Le changement de variables adopté est le suivant :

- Variables d'espace et de temps :

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1}{L}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{x_2}{L}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{x_3}{h}, \quad \tilde{t} = t \frac{V}{L} \quad (\text{II.13})$$

- Composantes de la vitesse de l'écoulement :

$$\tilde{u}_1 = \frac{u_1}{V}, \quad \tilde{u}_2 = \frac{u_2}{V}, \quad \tilde{u}_3 = u_3 \frac{L}{Vh}, \quad (\text{II.14})$$

- Composantes physiques du fluide :

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}$$

Ce changement nous conduit à poser :

$$\tilde{p} = p \frac{h^2}{\mu_0 VL} \quad (\text{II.15})$$

Où :

V est la vitesse d'une des parois du contact,

L est la dimension caractéristique du contact,

μ_0 et ρ_0 sont respectivement la viscosité dynamique et la masse volumique de référence à $T = T_0$.

Compte tenu de ces changements de variables, les équations (II.11) et (II.12) écrites dans le cas d'un fluide iso-volume deviennent :

- Fonction de dissipation :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} &= \frac{\Phi}{\frac{\mu_0 V^2}{h^2}} = \\ &\tilde{\mu} \left\{ 2\xi^2 \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_3} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3} + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2} \right)^2 \right] + \right. \\ &\left. + \xi^4 \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Equations de Navier :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_1} &= -\xi \mathfrak{R}_h \tilde{\rho} \frac{D\tilde{u}_1}{D\tilde{t}} + \xi^2 \left[\tilde{\mu} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_2^2} \right) \tilde{u}_1 + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} \right) \right) + 2 \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_1} + \right. \\ &\left. \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1} \right) + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_3} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1} \right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_2} &= -\tilde{\rho} \xi \mathfrak{R}_h \frac{D\tilde{u}_2}{D\tilde{t}} + \xi^2 \left[\tilde{\mu} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_2^2} \right) \tilde{u}_2 + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} \right) \right) + \right. \\ &\left. \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_1} \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1} + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2} \right) + 2 \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_2} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_3} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2} \right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_3} &= -\xi^3 \mathfrak{R}_h \tilde{\rho} \frac{D\tilde{u}_3}{D\tilde{t}} + \xi^4 \left[\tilde{\mu} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2^2} \right) + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1} + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_2} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2} \right] + \\ &\xi^2 \left[\tilde{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_3^2} \right) + 2 \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_3} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_3} + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3} + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_2} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

avec : $\xi = \frac{h}{L}$ paramètre d'échelle qui est de l'ordre de 10^{-3} .

$$\frac{D\tilde{u}_i}{D\tilde{t}} = \frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial\tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial\tilde{x}_j} \text{ et } \Re_h = \xi \Re_L = \frac{\rho_0 V h}{\mu_0} = \frac{V h}{\nu_0}.$$

\Re_h et \Re_L étant respectivement les nombres de Reynolds relatif à l'épaisseur et à la longueur de l'écoulement.

En négligeant les termes multipliés soit par ξ^2 , soit par ξ^3 ou ξ^4 , il reste :

-Fonction de dissipation :

$$\Phi = \tilde{\mu} \left[\left(\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3} \right)^2 \right] \quad (\text{II.20})$$

Equations de Navier :

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}_i} = -\xi \Re_h \tilde{\rho} \frac{D\tilde{u}_i}{D\tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial\tilde{x}_3} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial\tilde{x}_3} \right), \quad i = 1, 2 \quad (\text{II.21})$$

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}_3} = 0 \quad (\text{II.22})$$

L'équation (II.22) montre que la pression est indépendante de la variable d'espace x_3 .

Les termes en $\xi \Re_h$ ou termes d'inertie de l'équation (II.21) sont plus souvent négligeables devant les termes de viscosité ; ceci est vérifié dans la plupart des écoulements rencontrés en lubrification hydrodynamique. Quelques exceptions se rencontrent toutefois quand la viscosité cinématique du fluide $\left(\nu = \frac{\mu}{\rho} \right)$ est faible (cas des métaux liquides), quand

l'épaisseur du film est importante ou quand les vitesses linéaires sont très élevées.

Si $\xi \Re_h \ll 1$, les équations de Navier s'écrivent :

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}_1} = \frac{\partial}{\partial\tilde{x}_3} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3} \right) \quad (\text{II.23a})$$

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}_2} = \frac{\partial}{\partial\tilde{x}_3} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3} \right) \quad (\text{II.23b})$$

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}_3} = 0 \quad (\text{II.23c})$$

Le système d'équation (II.23), auquel s'ajoute l'équation de continuité (II.8) et l'équation d'énergie (II.10) permettent de déterminer, compte tenu des conditions aux limites et après intégration, le champ de vitesses u_1 , u_2 et u_3 , la pression p et la température dans le film. Si le régime d'écoulement est supposé isotherme ($T = \text{Constante}$), l'équation d'énergie ne sera pas prise en considération.

II.4. Equations de la lubrification hydrodynamique par fluide incompressible.

II.4.1 Fonction de dissipation en variables dimensionnées

En variables dimensionnées, l'équation (II.20) s'écrit :

$$\Phi = \mu \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 \right] \quad (\text{II.24})$$

II.4.2 Equation de la mécanique des films minces visqueux généralisée :

En revenant aux variables dimensionnées, le système (II.23) s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \quad (\text{II.25a})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \quad (\text{II.25b})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \rightarrow p = p(x_1, x_2, t) \quad (\text{II.25c})$$

où : $p = p(x_1, x_2, t)$, $\mu = \mu(x_1, x_2, x_3, t)$ $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3, t)$

L'intégration des équations de Navier (II.25) nécessite la connaissance des conditions limites sur la vitesse (conditions de non glissement) figure II.3 :

-Pour $x_3 = h_1(x_1, x_2, t)$: paroi (S_1)

$$u_1(x_1, x_2, h_1) = U_{12} ; u_2(x_1, x_2, h_1) = U_{12} ; u_3(x_1, x_2, h_1) = U_{13} \quad (\text{II.26})$$

-Pour $x_3 = h_2(x_1, x_2, t)$: paroi (S_2)

$$u_1(x_1, x_2, h_2) = U_{21} ; u_2(x_1, x_2, h_2) = U_{22} ; u_3(x_1, x_2, h_2) = U_{23} \quad (\text{II.27})$$

h_1 et h_2 étant les équations des surfaces ou des parois (S_1) et (S_2) figure II.3.

Dans les équations (II.26) et (II.27), les termes U_{ij} ($i=1,2$ et $j=1,2,3$) représentent les composantes des vitesses des surfaces, le premier indice se réfère aux surfaces (S_1) ou (S_2), le second aux directions x_1, x_2 ou x_3 comme c'est illustré sur la figure II.3.

Une première intégration des équations (II.25a) et (II.25.b) par rapport à la variable x_3 donne :

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_3 + \frac{C_1}{\mu} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \quad (\text{II.28a})$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} x_3 + \frac{C_2}{\mu} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \quad (\text{II.28b})$$

où $C_i = C_i(x_1, x_2, t)$; $i=1,2$

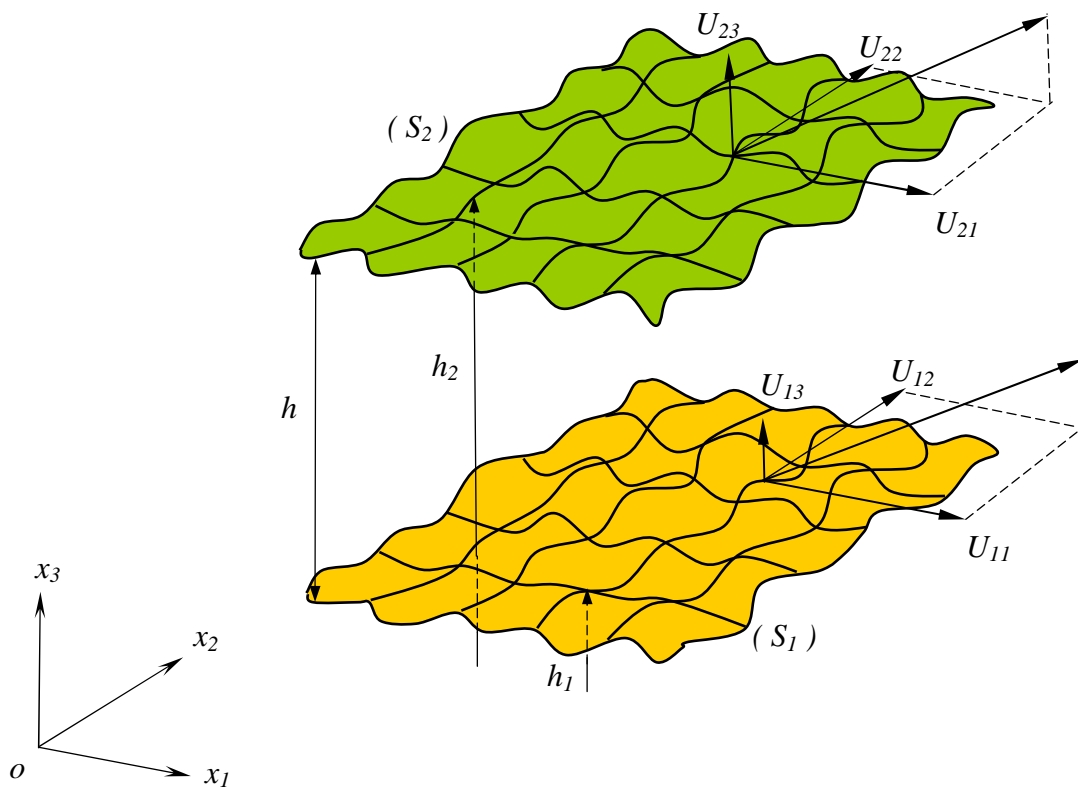


Fig. II.3 Géométrie et Cinématique d'un contact hydrodynamique.

Une deuxième intégration par rapport à x_3 , conduit aux relations suivantes :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} I + C_1 J = \int_{h_1}^{x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \quad (\text{II.29a})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} I + C_2 J = \int_{h_1}^{x_3} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \quad (\text{II.29b})$$

$$\text{où } I = \int_{h_1}^{x_3} \frac{\zeta d\zeta}{\mu(x_1, x_2, \zeta, t)} \quad \text{et } J = \int_{h_1}^{x_3} \frac{d\zeta}{\mu(x_1, x_2, \zeta, t)}$$

Détermination de la constante C_1 :

Nous remarquons que pour $x_3 = h_1$, nous avons $I = J = 0$ et pour $x_3 = h_2$,

$$I_2 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{x_3 dx_3}{\mu(x_1, x_2, x_3, t)} \quad \text{et } J_2 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{dx_3}{\mu(x_1, x_2, x_3, t)}$$

Notons $U_{21} = u_1(x_1, x_2, h_2, t)$ pour $x_3 = h_2(x_1, x_2, t)$ et pour $x_3 = h_1$, l'équation (II.29) s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} I_2 + C_1 J_2 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 = U_{21} - U_{11}$$

$$\text{Soit : } C_1 = \frac{1}{J_2} \left(U_{21} - U_{11} - I_2 \frac{\partial p}{\partial x_1} \right)$$

En remplaçant C_1 par son expression, l'équation (II.29a) prend la forme suivante :

$$u_1(x_1, x_2, x_3, t) = U_{11} + \left(I - \frac{I_2}{J_2} J \right) \frac{\partial p}{\partial x_1} + J \frac{(U_{21} - U_{11})}{J_2} \quad (\text{II.30})$$

En procédant de la même manière pour l'équation (II.29b), nous trouvons :

$$u_2(x_1, x_2, x_3, t) = U_{13} + \left(I - \frac{I_2}{J_2} J \right) \frac{\partial p}{\partial x_2} + J \frac{(U_{22} - U_{12})}{J_2} \quad (\text{II.31})$$

L'intégration de l'équation de continuité (II.1) à travers l'épaisseur du film donne :

$$\int_{h_1(x_1, x_2, t)}^{h_2(x_1, x_2, t)} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho u_3) \right] dx_3 + \int_{h_1(x_1, x_2, t)}^{h_2(x_1, x_2, t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx_3 = 0 \quad (\text{II.32})$$

ou encore :

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u_1) dx_3 + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho u_2) dx_3 + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho u_3) dx_3 + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx_3 = 0$$

$$\text{avec : } \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho u_3) dx_3 = [\rho u_3]_{h_1}^{h_2} = \rho_2 U_{23} - \rho_1 U_{13}$$

Pour calculer les trois autres intégrales, nous devons utiliser la règle de dérivation sous le signe intégrale dite règle de Leibnitz :

$$\int_{h_1(x_1, x_2, t)}^{h_2(x_1, x_2, t)} \frac{\partial F(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_i} dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_{h_1}^{h_2} F(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 \right) - F(x_1, x_2, h_2, t) \frac{\partial h_2}{\partial x_i} + F(x_1, x_2, h_1, t) \frac{\partial h_1}{\partial x_i} \quad (\text{II.33})$$

où F est une fonction continument dérivable et $i = 1, 2, 3$

Il vient alors :

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u_1) dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_{h_1}^{h_2} \rho u_1 dx_3 \right) - \rho_2 U_{21} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \rho_1 U_{11} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho u_2) dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\int_{h_1}^{h_2} \rho u_2 dx_3 \right) - \rho_2 U_{22} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} + \rho_1 U_{12} \frac{\partial h_1}{\partial x_2}$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx_3 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{h_1}^{h_2} \rho dx_3 \right) - \rho_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial h_1}{\partial t}$$

L'équation (II.31) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_{h_1}^{h_2} \rho u_1 dx_3 \right) - \rho_2 U_{21} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \rho_1 U_{11} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \\ & \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\int_{h_1}^{h_2} \rho u_2 dx_3 \right) - \rho_2 U_{22} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} + \rho_1 U_{12} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \rho_2 U_{23} - \rho_1 U_{13} + \\ & \frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

$$\text{avec : } R_2 = \int_{h_1}^{h_2} \rho dx_3$$

Après intégration par parties, les deux intégrales figurant dans l'équation (II.34) s'expriment comme suit :

$$\int_{h_1}^{h_2} \rho u_1 dx_3 = R_2 U_{21} - G \frac{\partial p}{\partial x_1} - F(U_{21} - U_{11})$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \rho u_2 dx_3 = R_2 U_{22} - G \frac{\partial p}{\partial x_2} - F(U_{22} - U_{12})$$

Soit par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_1} [U_{21}(R_2 - F) + U_{11}F] + \\ &\frac{\partial}{\partial x_2} [U_{22}(R_2 - F) + U_{12}F] - \rho_2 U_{21} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \\ &\rho_1 U_{11} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \rho_2 U_{23} - \rho_1 U_{13} - \rho_2 U_{22} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} + \\ &\rho_1 U_{12} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

$$\text{avec : } F = \frac{1}{J_2} \int_{h_1}^{h_2} \frac{R}{\mu} dx_3 ; G = \int_{h_1}^{h_2} \frac{R}{\mu} \left(x_3 - \frac{I_2}{J_2} \right) dx_3 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{R}{\mu} x_3 dx_3 - I_2 F$$

L'équation (II.35) est l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée.

Pour l'obtenir, il a été nécessaire de poser les hypothèses suivantes :

- le milieu est continu,
- le fluide est newtonien,
- l'écoulement est laminaire,
- les forces de volume et d'inertie sont négligeables,
- il n'y a pas de glissement entre la particule de fluide et les parois du contact,
- l'épaisseur du film mesurée suivant la direction ox_3 est toujours très faible devant les autres dimensions du contact; c'est l'hypothèse de base de la lubrification.

Dans l'équation (III.35) :

- le terme $\frac{\partial}{\partial x_1}[U_{21}(R_2 - F) + U_{11}F] - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(G \frac{\partial p}{\partial x_1}\right)$ représente la variation du débit massique dans la direction x_1 pour une section de dimension $(h_2 - h_1)$ suivant x_3 et unité suivant x_2 .

- le terme $\frac{\partial}{\partial x_2}[U_{22}(R_2 - F) + U_{12}F] - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(G \frac{\partial p}{\partial x_2}\right)$ représente la variation du débit massique dans la direction x_2 pour une section de dimension $(h_2 - h_1)$ suivant x_3 et unité suivant x_1 .

Dans les deux expressions ci-dessus le premier terme correspond au débit dû au déplacement des parois (écoulement de Couette dû au cisaillement du fluide). Le second terme correspond au débit dû au gradient de pression (écoulement de Poiseuille dû à la pression).

-le terme $\rho_1\left(U_{11} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + U_{12} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} - U_{13}\right) - \rho_2\left(U_{21} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + U_{22} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} - U_{23}\right)$ représente la variation du débit massique dans la direction x_3 pour une section unité.

-le terme $\frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial h_1}{\partial t}$ caractérise l'effet transitoire dû à la compressibilité du fluide.

Notons que l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée s'applique à différents lubrifiants et à différents type de contact. Nous pouvons distinguer :

-Fluide compressible ou incompressible, dans ce dernier cas la masse volumique peut être éliminée de l'équation (II.35).

-Fluide de viscosité variable ou constante, dans ce dernier cas cette équation se simplifie considérablement.

-Contact hydrodynamique ou hydrostatique dans ce dernier l'équation (II.35) se

$$\text{réduit à : } \frac{\partial}{\partial x_1}\left(G \frac{\partial p}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(G \frac{\partial p}{\partial x_2}\right) = 0 \quad (\text{II.36})$$

Notons que l'équation différentielle aux dérivées partielles (II.36) admet une solution non triviale si et seulement si p n'est pas nulle en tous points de la frontière du domaine d'intégration ; ce qui impose physiquement une source de pression extérieure au contact (cavité, alvéole, ...).

-régime transitoire et régime permanent : nous définissons en mécanique des films minces visqueux, le régime permanent comme un régime de fonctionnement tel que dans un repère particulier mobile ou non, les paramètres géométriques du contact et les vitesses des parois sont indépendants du temps.

II.4.3 Equation de la mécanique des films minces visqueux

Dans le cas où la température ne varie pas selon l'épaisseur du film ; i.e. $\frac{\partial T}{\partial x_3} = 0$ et

si nous supposons que la viscosité μ et la masse volumique ρ du fluide ne sont fonction que de la température et de la pression, nous pouvons écrire :

$$\mu = \mu(T, p) \text{ et } \rho = \rho(T, p)$$

avec $T = T(x_1, x_2, t)$ et $p = p(x_1, x_2, t)$

Il vient alors : $\mu = \mu(x_1, x_2, t)$ et $\rho = \rho(x_1, x_2, t)$; c'est-à-dire $\frac{\partial \mu}{\partial x_3} = \frac{\partial \rho}{\partial x_3} = 0$. Dans ces

conditions, on peut écrire : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$; $R_2 = \int_{h_1}^{h_2} \rho(x_1, x_2, t) dx_3 = \rho(h_2 - h_1)$;

$$I_2 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{x_3 dx_3}{\mu(x_1, x_2, t)} = \frac{1}{2\mu} (h_2^2 - h_1^2) ; J_2 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{dx_3}{\mu(x_1, x_2, t)} = \frac{1}{\mu} (h_2 - h_1) ;$$

$$R = \int_{h_1}^{x_3} \rho(x_1, x_2, t) dx_3 = \rho(x_3 - h_1) ; I = \frac{1}{\mu} \left(\frac{x_3^2 - h_1^2}{2} \right) ; J = \frac{1}{\mu} (x_3 - h_1) ; F = \frac{\rho(h_2 - h_1)}{2} ;$$

$$G = \frac{1}{\mu} \int_{h_1}^{h_2} R \left(x_3 - \frac{I_2}{J_2} \right) dx_3 = \frac{1}{\mu} \int_{h_1}^{h_2} \rho(x_3 - h_1) \left(x_3 - \frac{I_2}{J_2} \right) dx_3 = \frac{\rho}{12\mu} (h_2 - h_1)^3 ;$$

$$U_{21}(R_2 - F) + U_{11}F = \frac{\rho}{2} (h_2 - h_1)(U_{21} + U_{11}) ; U_{22}(R_2 - F) + U_{12}F = \frac{\rho}{2} (h_2 - h_1)(U_{22} + U_{12}) ;$$

Compte tenu de ces relations, l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée (II.35) se réduit à :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\rho \frac{(h_2 - h_1)^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\rho \frac{(h_2 - h_1)^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} \right] = \\
& 6 \frac{\partial}{\partial x_1} [\rho(U_{11} + U_{21})(h_2 - h_1)] - 12\rho U_{21} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + 12\rho U_{11} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \\
& 6 \frac{\partial}{\partial x_2} [\rho(U_{12} + U_{22})(h_2 - h_1)] - 12\rho U_{22} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} + 12\rho U_{12} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \\
& 12\rho(U_{23} - U_{13}) + 12(h_2 - h_1) \frac{\partial \rho}{\partial t}
\end{aligned} \tag{II.37}$$

L'équation (II.37) est appelée : équation de la mécanique des films minces visqueux.

Cette équation est généralement employée pour étudier l'effet des défauts de forme et des rugosités de surfaces sur les caractéristiques de fonctionnement d'un contact en régime isotherme. Notons cependant que la viscosité et la masse volumique du fluide peuvent varier en fonction des variables x_1, x_2 et t .

Les vitesses u_1 et u_2 s'expriment cette fois-ci par :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} [x_3^2 - x_3(h_1 + h_2) + h_1 h_2] + \frac{U_{11} - U_{21}}{h_1 - h_2} (x_3 - h_1) + U_{11} \\ u_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} [x_3^2 - x_3(h_1 + h_2) + h_1 h_2] + \frac{U_{12} - U_{22}}{h_1 - h_2} (x_3 - h_1) + U_{12} \end{cases} \tag{II.38}$$

Les contraintes de cisaillement dans le film s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_{13}(x_1, x_2, x_3) = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_1} (2x_3 - h_1 - h_2) + \mu \frac{(U_{11} - U_{21})}{h_1 - h_2} \\ \sigma_{23}(x_1, x_2, x_3) = \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_2} (2x_3 - h_1 - h_2) + \mu \frac{(U_{12} - U_{22})}{h_1 - h_2} \end{cases} \tag{II.39}$$

II.4.4 Equation de Reynolds généralisée

Lorsque la vitesse d'une paroi du contact est tangente en tous points à cette paroi (cas fréquent en lubrification), l'équation de la mécanique des films minces visqueux

généralisée (II.35) se simplifie car en plaçant l'origine du système d'axes sur cette paroi, nous pouvons poser $h_1 = 0$ et $h_2 = h$ figure (II.4).

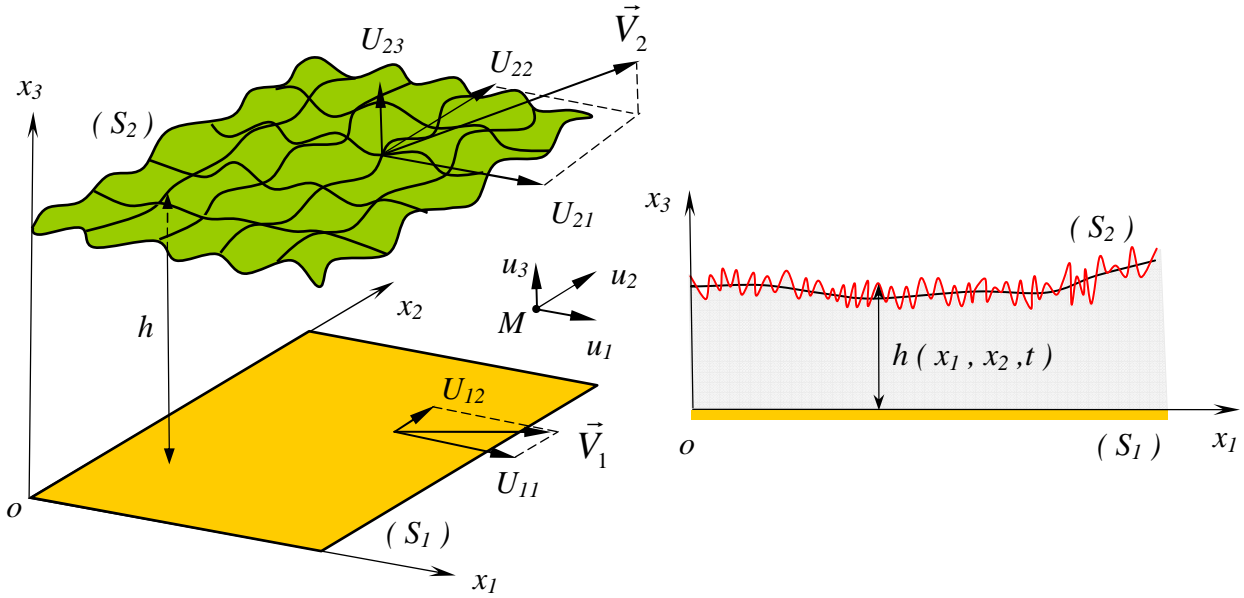


Fig. II.4 Système d'axes et conditions aux limites sur les vitesses.

Dans le système d'axes choisi, les conditions aux limites sur la vitesse s'écrivent :

-Sur la paroi (S_1) , pour $x_3 = 0, u_1 = U_{11}, u_2 = U_{12}, u_3 = 0$

-Sur la paroi (S_2) , pour $x_3 = h, u_1 = U_{21}, u_2 = U_{22}, u_3 = U_{23}$

Remarquons que le choix du système d'axes impose à la vitesse U_{13} de la paroi (S_1) dans la direction x_3 d'être identiquement nulle. Les vitesses u_1 et u_2 du fluide s'écrivent alors :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\partial p}{\partial x_1} \left(I - \frac{I_2}{J_2} J \right) + \frac{U_{21} - U_{11}}{J_2} J + U_{11} \\ u_2 = \frac{\partial p}{\partial x_2} \left(I - \frac{I_2}{J_2} J \right) + \frac{U_{22} - U_{12}}{J_2} J + U_{12} \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

Dans ces relations :

$$I = \int_0^{x_3} \frac{\zeta d\zeta}{\mu} ; J = \int_0^{x_3} \frac{d\zeta}{\mu} ; I_2 = \int_0^h \frac{x_3}{\mu} dx_3 ; J_2 = \int_0^h \frac{dx_3}{\mu}$$

De ces expressions, nous déduisons les contraintes de cisaillement dans le fluide :

$$\begin{cases} \sigma_{13} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \left(x_3 - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{U_{21} - U_{11}}{J_2} \\ \sigma_{23} = \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \left(x_3 - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{U_{22} - U_{12}}{J_2} \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

Dans ces conditions, l'équation de la mécanique des fils minces visqueux généralisée (II.35) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_1} [U_{21}(R_2 - F) + U_{11}F] - \rho_2 U_{21} \frac{\partial h}{\partial x_1} + \\ &\frac{\partial}{\partial x_2} [U_{22}(R_2 - F) + U_{12}F] - \rho_2 U_{22} \frac{\partial h}{\partial x_2} + \frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial h}{\partial t} + \rho_2 U_{23} \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

avec $G = \int_0^h \frac{R}{\mu} x_3 dx_3 - I_2 F ; F = \frac{1}{J_2} \int_0^h \frac{R}{\mu} dx_3 ; R = \int_0^{x_3} \rho(x_1, x_2, \zeta, t) d\zeta$ et $R_2 = \int_0^h \rho dx_3$

L'équation (II.42) est communément connue sous le nom d'équation de Reynolds généralisée.

Les relations (II.40), (II.41) et l'équation de Reynolds généralisée (II.42) doivent être utilisées pour l'étude des contacts lubrifiés dans lesquels nous tenons compte des effets thermiques.

Il faut de plus :

- l'équation de continuité pour calculer la vitesse u_3 dans le fluide,
- l'équation de l'énergie pour calculer le champ de température dans le fluide,
- les relations qui donnent les variations de la masse volumique et de la viscosité avec la température. Dans le cas des lubrifiants liquides, la masse volumique est généralement supposée constante.
- l'équation de la chaleur pour déterminer le champ de température dans les solides délimitant le contact.

-l'équation d'état du gaz $f(p, \rho, t) = 0$.

II.4.5. Equation de Reynolds

Très souvent nous admettons que la masse volumique et la viscosité ne varient pas selon l'épaisseur du film et nous plaçons l'origine du système d'axes sur l'une des parois du contact. L'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée (II.35) prend alors une forme simple ; c'est l'équation de Reynolds qui s'écrit en coordonnées cartésiennes figure II.4 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) = 6\rho(U_{11} - U_{21}) \frac{\partial h}{\partial x_1} + 6\rho(U_{12} - U_{22}) \frac{\partial h}{\partial x_2} + \\ 6h \frac{\partial}{\partial x_1} [\rho(U_{11} + U_{21})] + 6h \frac{\partial}{\partial x_2} [\rho(U_{12} + U_{22})] + 12\rho U_{23} + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

$$\text{où } U_{23} = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U_{21} \frac{\partial h}{\partial x_1} + U_{22} \frac{\partial h}{\partial x_2} \quad (\text{II.44})$$

Les composantes de la vitesse du fluide u_1 et u_2 dans les directions x_1 et x_2 s'écrivent :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_3(x_3 - h) + \frac{h - x_3}{h} U_{11} + \frac{x_3}{h} U_{21} \\ u_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} x_3(x_3 - h) + \frac{h - x_3}{h} U_{12} + \frac{x_3}{h} U_{22} \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

De ces relations, nous déduisons les contraintes de cisaillement dans le fluide :

$$\begin{cases} \sigma_{13}(x_1, x_2, x_3) = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_1} (2x_3 - h) + (U_{21} - U_{11}) \frac{\mu}{h} \\ \sigma_{23}(x_1, x_2, x_3) = \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_2} (2x_3 - h) + (U_{22} - U_{12}) \frac{\mu}{h} \end{cases} \quad (\text{II.46})$$

Autre écriture de l'équation de Reynolds :

En remplaçant U_{23} par son expression (Eq. II.44), l'équation de Reynolds (II.43) prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) = 6\rho(U_{11} + U_{21}) \frac{\partial h}{\partial x_1} + 6\rho(U_{12} + U_{22}) \frac{\partial h}{\partial x_2} +$$

$$6h \frac{\partial}{\partial x_1} [\rho(U_{11} + U_{21})] + 6h \frac{\partial}{\partial x_2} [\rho(U_{12} + U_{22})] + 12 \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) \quad (\text{II.47})$$

ou encore :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \vec{\nabla} p \right) = 6 \vec{\nabla} \cdot (\rho h \vec{U}) + 12 \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) \quad (\text{II.48})$$

$$\text{avec } \vec{U} = \begin{Bmatrix} U_{11} + U_{21} \\ U_{12} + U_{22} \end{Bmatrix} \text{ et } \vec{\nabla} p = \begin{Bmatrix} \partial p / \partial x_1 \\ \partial p / \partial x_2 \end{Bmatrix}$$

En utilisant la notation matricielle, l'équation (II.48) peut s'écrire :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} ; \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \begin{Bmatrix} \frac{\rho h^3}{\mu} & \partial p / \partial x_1 \\ \frac{\rho h^3}{\mu} & \partial p / \partial x_2 \end{Bmatrix} = 6 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} ; \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \begin{Bmatrix} \rho h (U_{11} + U_{21}) \\ \rho h (U_{12} + U_{22}) \end{Bmatrix} + 12 \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) \quad (\text{II.49})$$

Si le liquide est incompressible; c'est-à-dire $\rho = \text{constante}$, l'équation (II.48) devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{h^3}{\mu} \vec{\nabla} p \right) = 6 \vec{\nabla} \cdot (h \vec{U}) + 12 \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.50})$$

En régime permanent ou stationnaire, l'équation (II.50) se réduit à :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{h^3}{\mu} \vec{\nabla} p - 6h \vec{U} \right) = 0 \quad (\text{II.51})$$

II.4.6 Conditions limites associées à l'équation incompressible

Le champ de pression p dans le film fluide doit satisfaire à l'équation de Reynolds (II.51) ainsi qu'aux conditions limites suivantes figure II.5 :

$$\begin{cases} p = p_0 & \text{sur } (\Gamma_1) \\ \vec{n} \cdot \left(\frac{\vec{U}h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \vec{\nabla} p \right) = q_n & \text{sur } (\Gamma_2) \end{cases} \quad (\text{II.52})$$

où : \vec{n} est le vecteur normal unitaire, $q_n = \vec{Q} \cdot \vec{n}$ est le débit volumique normal à travers la frontière (Γ_2) , (Γ_1) et (Γ_2) sont les frontières du domaine d'intégration $(\Omega) \subset R^2$ tel que

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega \text{ et } \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset .$$

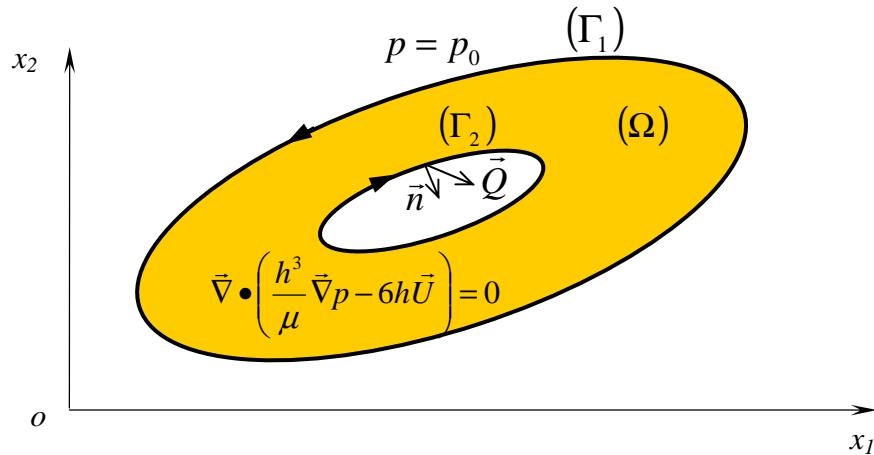


Fig. II.5 Représentation du domaine d'intégration de l'équation de Reynolds et des conditions limites sur les frontières.

Selon la géométrie et la cinématique du contact étudié, la pression calculée à partir de l'équation de Reynolds (II.50) ou (II.51) et des conditions limites qui lui sont associées peut être inférieure à la pression atmosphérique (dépression) en certains points du domaine (Ω) . Ces dépressions entraînent une rupture du film lubrifiant. Ainsi, dans le domaine (Ω) , nous distinguons figure II.5 :

- des régions actives où la pression relative est positive, donc génératrice d'une force portante ;
- des régions inactives ou de cavitation où la pression relative qui y règne est négative ou nulle. Dans ces conditions, l'air ambiant peut y être aspiré et le lubrifiant liquide se vaporise à température ambiante.

Les visualisations de l'écoulement dans certains contacts mettent en évidence dans la zone de rupture de film, soit une juxtaposition de filets d'air (gaz) et de lubrifiant (liquide),

Figure II.6.

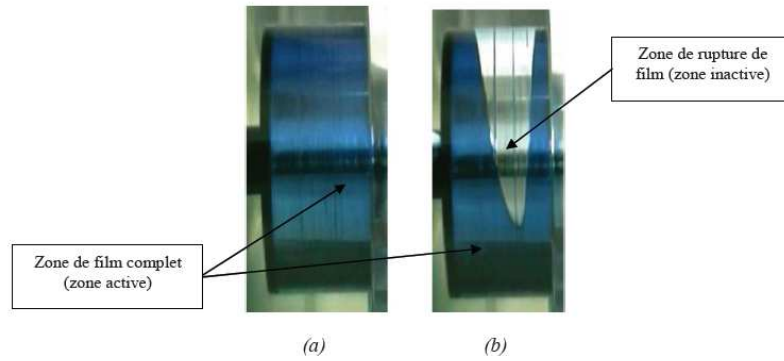


Fig. II.6 Représentation des zones active et inactive dans un palier lisse soumis à un chargement statique : (a) Film complet, (b) Film rompu.

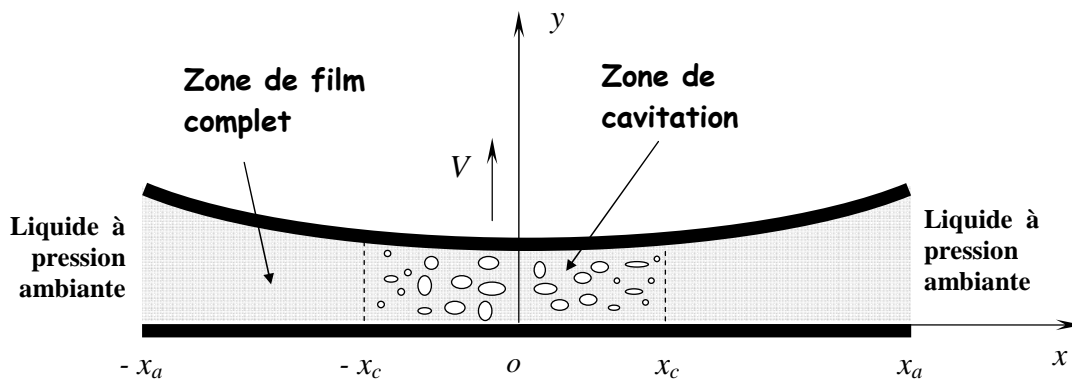


Fig. II.7 Vue en coupe des zones de film complet et de cavitation dans un palier à film amortisseur (SFDB).

Remarques

-Les études expérimentales montrent que dans la zone de rupture, la pression est constante et égale ou légèrement inférieure à la pression atmosphérique car le lubrifiant est souvent en contact avec le milieu extérieur, la pression atmosphérique et la pression de vapeur saturante sont voisines.

-Les frontières entre les régions actives et inactives sont des inconnues supplémentaires du problème ; pour ces frontières nous devons avoir simultanément $p = 0$ et $\vec{\nabla}p = 0$ car au passage des frontières la conservation du débit volumique implique $\vec{\nabla}p = 0$.

-Les dispositifs hydrodynamiques peuvent être différenciés du point de vue de la cavitation. En effet un patin ne représente qu'un convergent donc ne cavitera pas figure II.8 tandis qu'un palier cylindrique présente nécessairement un divergent donc pourra caviter.

-La rupture du film lubrifiant n'a pas nécessairement un effet néfaste. En effet, une butée symétrique ne peut supporter une charge appliquée verticale que si il y a rupture du film d'huile figure II.9. De même, un palier lisse cylindrique où il n'y aurait pas rupture du film lubrifiant serait toujours instables du point de vue vibratoire.

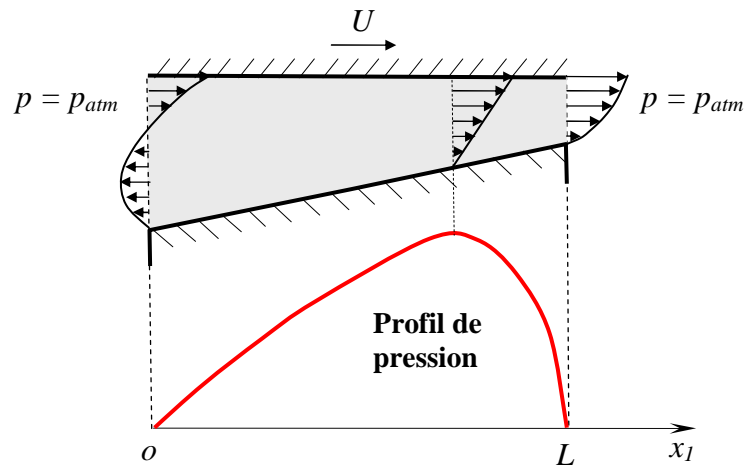


Fig. II.8 Schématisation d'un patin de butée inclinée.

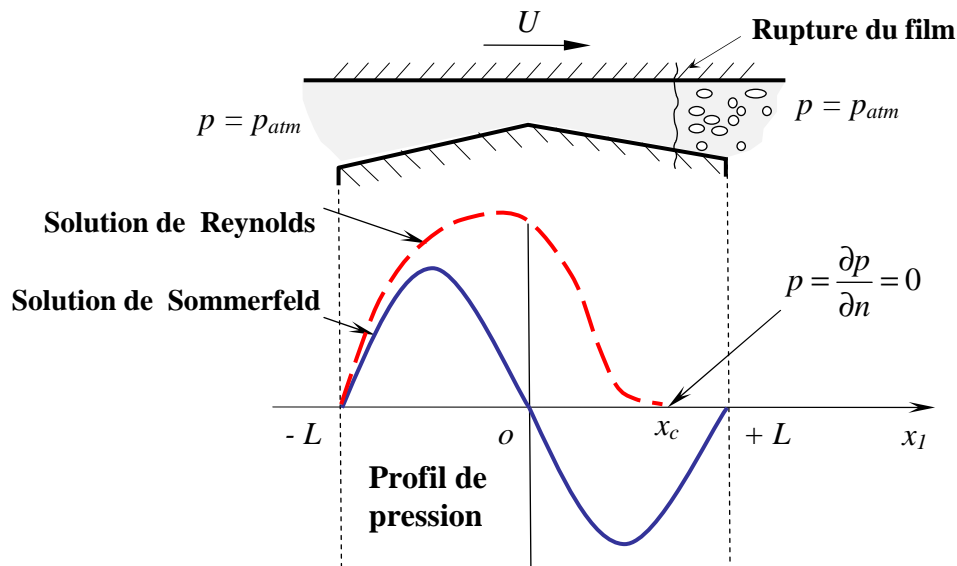


Fig. II.9 Schématisation d'une butée symétrique.

Dans la littérature [39], les conditions de cavitation souvent utilisées dans les études de simulation des problèmes de lubrification hydrodynamique sont :

-Conditions aux limites dites de Reynolds :

Lorsque les conditions de fonctionnement permettent au film lubrifiant de se reformer au niveau des rainures d'alimentation, la frontière d'alimentation de rupture du film est déterminée et seule la frontière de reformation demeure une inconnue du problème. On a précisé que la pression et sa dérivée normale s'annulent le long de la frontière de rupture du film. Ces conditions déjà proposées par Swift [40] sont connus aujourd'hui sous le nom de conditions limites de Reynolds et s'écrivent :

$$p = \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{Sur la frontière de rupture du film} \quad (\text{II.53})$$

Ces conditions, fréquemment utilisées, permettent d'avoir une continuité du débit entre les régions actives et inactives et donnent des résultats comparables aux résultats expérimentaux.

- Conditions limites de Gümbel ou de demi-Sommerfeld :

Ce sont des conditions qui ont été initialement introduites pour prendre en compte la rupture du film lubrifiant. En 1921, Gümbel [41] propose tout simplement de négliger dans la solution finale les pressions inférieures à la pression atmosphérique. Il faut toutefois noter que ces conditions limites ne respectent bien évidemment pas la continuité du débit. En pratique elles sont fréquemment utilisées (dans le cas des paliers fortement chargés) et les résultats théoriques obtenus sont souvent proches des résultats expérimentaux.

II.5. Calcul des performances hydrodynamiques

II.5.1. Champ de pression dans le film

Le champ de pression hydrodynamique est obtenu à partir de l'intégration de l'équation de Reynolds (II.51) en satisfaisant les différentes conditions aux limites sur la pression liées à l'alimentation, à l'écoulement du fluide dans le contact et à l'environnement dans lequel fonctionne le mécanisme. La connaissance du champ de pression permettra de déduire aisément les différentes caractéristiques du contact tel que la portance, la force de frottement, les débits de fuite et la puissance dissipée.

II.5.2. Action du fluide sur les surfaces du contact

L'action de contact \vec{t} (figure II.10), appelée habituellement le vecteur contrainte, exercée en un point M de la paroi, dépend uniquement du tenseur des contraintes en ce point et du vecteur normal \vec{n} , i.e.

$$t_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} n_j \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{II.54})$$

où : $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$ est le tenseur des contraintes et n_j représente les composantes du vecteur normal en M_1 ou M_2 orienté de la surface vers le fluide (normale extérieure).

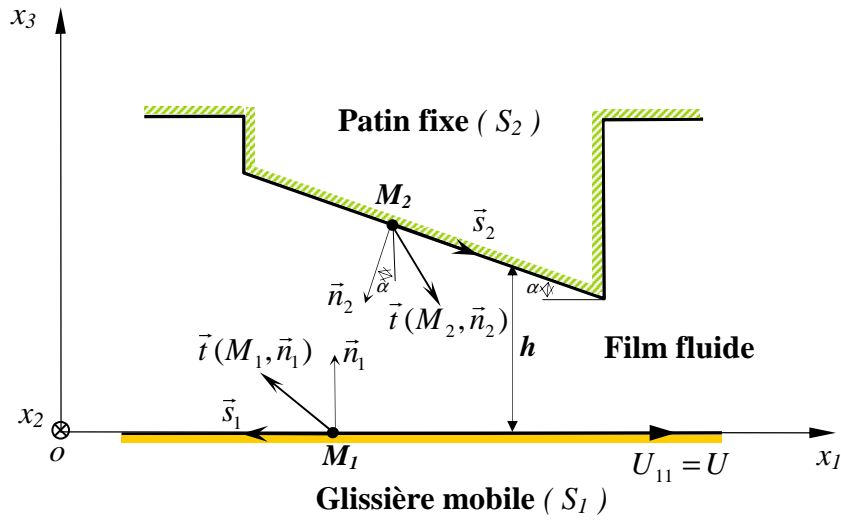


Fig. II.10 Action du fluide sur les parois d'un contact hydrodynamique

En un point M du fluide, la matrice représentative du tenseur des contraintes s'écrit :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ 0 & -p & \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & -p \end{bmatrix} \quad (\text{II.55})$$

Les éléments de réduction en un point C quelconque du tenseur des actions de contact du fluide sur la surface (Ω) du contact seront donc :

- Résultante : $\vec{R} = \iint_{\Omega} \vec{t} d\Omega = \iint_{\Omega} [\sigma_{ij}] \{n\} d\Omega$

$$\text{- Moment en C : } \vec{M}(C) = \iint_{\Omega} \overrightarrow{CM} \wedge \vec{t} d\Omega \quad (\text{II.56})$$

Dans un repère (x_1, x_2, x_3) (figure II.10), les cosinus directeurs de la normale sont :

$$\{\vec{n}_2\} = \begin{Bmatrix} -\sin \alpha \\ 0 \\ -\cos \alpha \end{Bmatrix} \quad (\text{II.57})$$

Soit :

$$[\sigma_{ij}(M_2)]\{\vec{n}_2\} = \begin{Bmatrix} p \sin \alpha - \mu \cos \alpha \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0,h} \\ -\mu \cos \alpha \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0,h} \\ -\sin \alpha \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0,h} + p \cos \alpha \end{Bmatrix} \quad (\text{II.58})$$

où α est l'angle d'incidence du patin

α étant petit, nous pouvons écrire :

$$\cos \alpha \approx 1, \quad \sin \alpha \approx \text{tg} \alpha = \alpha \quad \text{avec } \text{tg} \alpha = \frac{\partial h}{\partial x}$$

Par conséquent, les composantes de la résultante \vec{R} se réduisent à :

$$\vec{R} = \iint_{\Omega} \begin{Bmatrix} -\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0,h} \\ -\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0,h} \\ p \end{Bmatrix} d\Omega \quad (\text{II.59})$$

La première et la deuxième composante du vecteur \vec{R} représentent les forces de frottement F_1 et F_2 exercées par le fluide sur les parois selon x_1 et x_2 tandis que la troisième composante $\iint_{\Omega} p d\Omega$ représente la portance hydrodynamique du contact notée W .

Pour le contact schématisé sur la figure II.10, le nombre de frottement se calcule par :

$$C_f = \frac{|F_1|}{W} \quad (\text{II.60})$$

II.5.3. Vitesses moyennes de l'écoulement et débit de fuite

Pour le contact représenté sur la figure (II.11), les vitesses moyennes de l'écoulement se calculent par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_1(x_1, x_2) = \frac{1}{h} \int_0^h u_1(x_1, x_2, x_3) dx_3 = \frac{1}{h} \int_0^h \left\{ \frac{h-x_3}{h} U_{11} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} [x_3^2 - x_3 h] \right\} dx_3 \\ \bar{u}_2(x_1, x_2) = \frac{1}{h} \int_0^h u_2(x_1, x_2, x_3) dx_3 = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} [x_3^2 - x_3 h] dx_3 \end{array} \right. \quad (\text{II.61})$$

avec $U_{11} = U$ et $U_{12} = 0$

Après intégration :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_1 = \frac{U}{2} - \frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \bar{u}_2 = -\frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{array} \right. \quad (\text{II.62})$$

Les débits de fuite suivant x_1 et x_2 se calculent par intégration du champ de vitesses de l'écoulement u_1 et u_2 (figure II.11) :

$$Q_1 = \iint_{S \perp x_1} u_1 dS \quad (\text{II.63})$$

$$Q_2 = \iint_{S \perp x_2} u_2 dS \quad (\text{II.64})$$

Les expressions de u_1 et u_2 sont données par les équations (II.45). Les débits selon x_1 et x_2 peuvent aussi être calculés en utilisant les expressions des vitesses moyennes (II.61) :

$$Q_1 = \int_0^B \bar{u}_1 h dx_2 \quad (\text{II.65})$$

De même :

$$Q_2 = \int_0^L \bar{u}_2 h dx_1 \quad (\text{II.66})$$

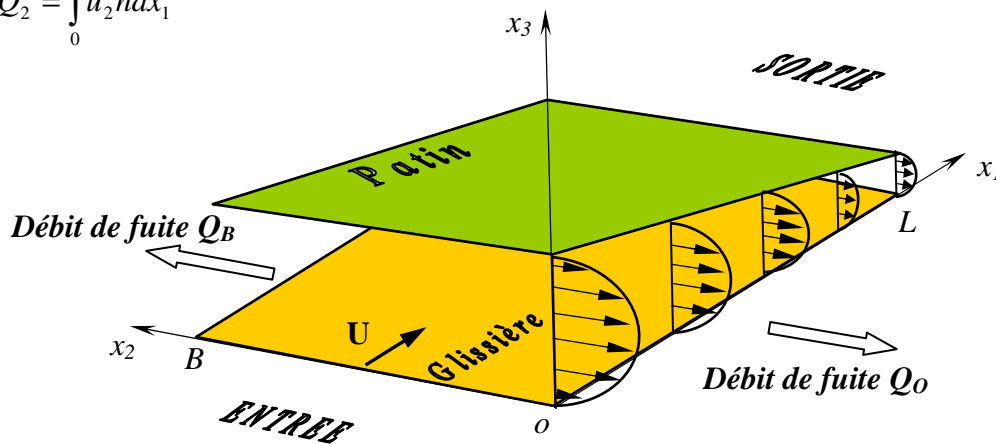


Fig. II.11 Débit de fuite dans une butée cylindrique.

II.5.4 Puissance dissipée

L'intégration de la fonction de dissipation visqueuse Φ sur le volume occupé par le fluide en écoulement permet de calculer la puissance dissipée due au cisaillement du fluide :

$$P = \iiint_v \Phi dv = \int_0^h \int_0^B \int_0^L \Phi dx_1 dx_2 dx_3 \quad (\text{II.67})$$

où Φ est définie par l'équation (II.24).

Après intégration à travers l'épaisseur du film, la puissance dissipée s'écrit :

$$P = \int_0^B \int_0^L \left\{ \mu \frac{U^2}{h} + \frac{h^3}{12\mu} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dx_1 dx_2 \quad (\text{II.68})$$

II.6 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté les différentes formes que peut prendre l'équation de la mécanique des films minces visqueux qui va être utilisée au cours de notre étude pour déterminer les caractéristiques d'écoulement de films minces entre parois mobiles. L'intégration de l'équation de la mécanique des films minces visqueux permet de calculer la répartition de la pression qui existe en tout point du fluide. Un certain nombre de caractéristiques telles que la portance hydrodynamique, le débit de fuite, la force de frottement et la puissance dissipée dans le contact s'en déduisent aisément. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons plus particulièrement à l'équation de Reynolds (II.51) écrite en régime permanent pour étudier le comportement statique du patin incliné rugueux utilisant un fluide newtonien comme lubrifiant. Dans le prochain chapitre, nous appliquons le processus d'homogénéisation à cette équation en vue de prendre en considération la géométrie locale du patin.

CHAPITRE III

Homogénéisation de l'équation de Reynolds newtonienne

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous appliquons la technique d'homogénéisation pour l'analyse théorique du problème de lubrification hydrodynamique dans les contacts rugueux lubrifiés par des fluides newtoniens. Nous supposons, par hypothèse, que la surface stationnaire du contact est rugueuse tandis que la surface mobile est parfaitement lisse. Cette hypothèse nous permettra d'utiliser l'équation de Reynolds dérivée dans le chapitre précédent sans la prise en considération du terme transitoire figurant dans le second membre de l'équation. Pour pouvoir appliquer cette technique, nous supposerons d'autre part que la distribution des rugosités est périodique sur toute la surface du contact. Nous montrerons que le processus d'homogénéisation de l'équation de Reynolds conduit à la résolution par la méthode des différences finies de deux problèmes, à savoir :

- un problème local gouverné par trois équations aux dérivées partielles du second ordre dont les inconnues sont des fonctions périodiques locales ;
- un problème global régi par une équation aux dérivées partielles dont l'inconnue est la pression homogénéisée supposée nulle sur la frontière du domaine d'intégration.

La validation de la technique d'homogénéisation sera effectuée en comparant les résultats obtenus à partir de cette technique avec ceux issus de l'application de la méthode déterministe classique dans le cas d'un patin incliné de Mitchell en considérant quatre formes de rugosités : transversales, longitudinales, isotropes et anisotropes.

III.2 Application de la méthode déterministe à la résolution de l'équation de Reynolds

L'approche déterministe consiste à résoudre directement l'équation de Reynolds dans le cas des écoulements de films très minces entre parois rugueuses. Dans cette approche, qui nécessite des maillages très fins du film, la rugosité de surface est prise en compte dans l'équation géométrique du film.

III.2.1 Equation de Reynolds en régime stationnaire et équation géométrique du film

Dans cette approche, il convient d'écrire l'équation de Reynolds (II.51) sous la forme suivante :

$$\vec{\nabla} \cdot (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla} p_\varepsilon) = 6\mu \vec{\nabla} \cdot (h_\varepsilon \vec{U}) \text{ sur } D = (0, L) \times (0, B) \quad (\text{III.1})$$

ou encore :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} ; \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \left\{ \begin{array}{l} h_\varepsilon^3 \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial x_1} \\ h_\varepsilon^3 \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial x_2} \end{array} \right\} = 6\mu \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} ; \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \left\{ \begin{array}{l} h_\varepsilon (U_{11} + U_{21}) \\ h_\varepsilon (U_{12} + U_{22}) \end{array} \right\} \quad (\text{III.2})$$

Où :

$$h_\varepsilon(x_1, x_2) = h_0(x_1, x_2) + h_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0 \quad (\text{III.3})$$

La pression déterministe p_ε doit satisfaire à l'équation (III.1) et à la condition de Dirichlet suivante :

$$p_\varepsilon = 0 \text{ sur la frontière } (\partial D) \quad (\text{III.4})$$

Dans l'équation (III.3), h_0 est l'épaisseur nominale du film définie comme la distance entre la surface mobile et le niveau moyen de la surface stationnaire tandis que h_1 représente l'amplitude des rugosités mesurée par rapport au niveau moyen de la surface stationnaire.

III.2.2 Application au patin incliné de Mitchell (3D)

La figure III.1 représente schématiquement un patin incliné de Mitchell de dimension finie (3D) où seule la surface du patin fixe contiguë au film est rugueuse. La glissière supposée lisse se déplace suivant la direction ox_1 avec une vitesse

uniforme $\vec{U} = U\vec{e}_1$. Dans ces conditions les équations (III.1) et(III.3) prennent la forme suivante :

$$\vec{\nabla} \cdot (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla} p_\varepsilon) = \Lambda \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x_1} \quad (\text{III.5})$$

où

$$h_\varepsilon(x_1, x_2) = \underbrace{(h_{\min} - h_{\max}) \frac{x_1}{L} + h_{\max}}_{h_0} + h_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \quad \text{tel que } 0 \leq x_1 \leq L \quad (\text{III.6})$$

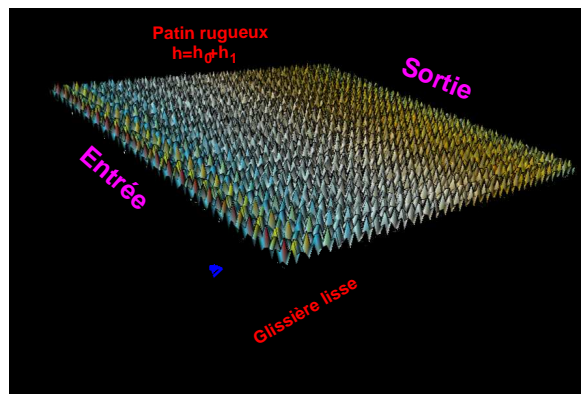
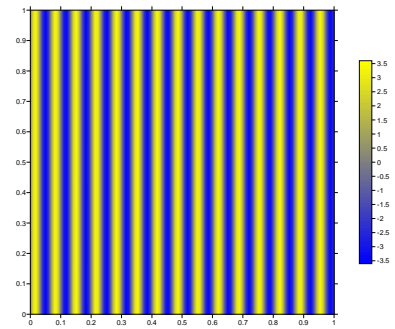
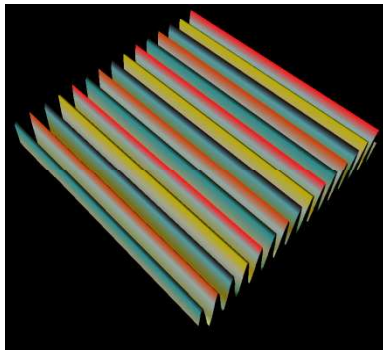


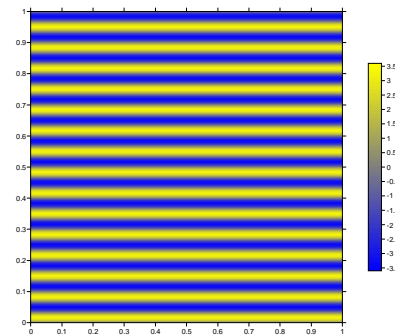
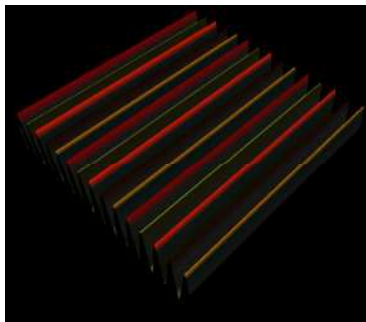
Fig. III.1 Schéma du patin incliné rugueux.

Dans l'équation (III.6), h_1 est une fonction périodique qui peut prendre selon la forme des rugosités figure III.2. Les expressions mathématiques et les caractéristiques indiquées dans le tableau III.1.

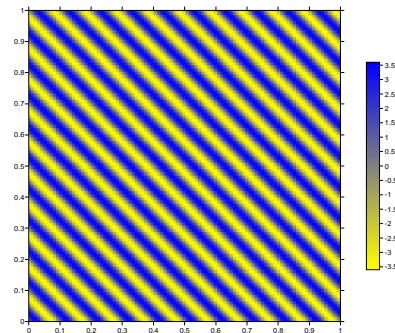
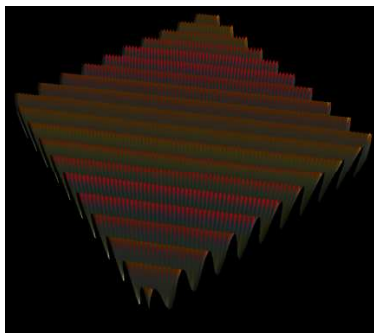
a) Rugosités transversales



b) Rugosités longitudinales



c) Rugosités anisotropes



d) Rugosités isotropes

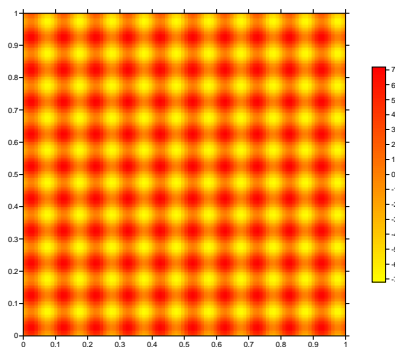
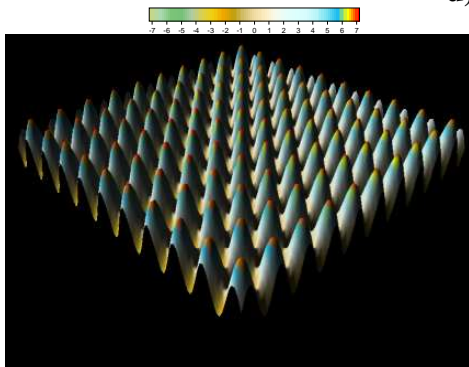


Fig. III.2 Formes de rugosités étudiées

Tableau III.1 : Expressions mathématiques des différentes formes de rugosités en coordonnées globales

| Types de rugosités | Expressions de h_1 | $RMS = \sqrt{\frac{1}{LB} \int_0^B \int_0^L h_1^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2}$ |
|--------------------------|---|---|
| Rugosités transversales | $h_1 = \alpha \sin\left(\frac{2\pi n_p x_1}{L}\right) = \alpha \sin\left(\frac{2\pi x_1}{\lambda_{x_1}}\right)$ <p>où $\lambda_{x_1} = \frac{L}{n_p} = \varepsilon L$ et $\varepsilon = 1/n_p$</p> | $RMS = \alpha\sqrt{2}/2$ |
| Rugosités longitudinales | $h_1 = \alpha \sin\left(\frac{2\pi n_p x_2}{B}\right) = \alpha \sin\left(\frac{2\pi x_2}{\lambda_{x_2}}\right)$ <p>où $\lambda_{x_2} = \frac{B}{n_p} = \varepsilon B$</p> | $RMS = \alpha\sqrt{2}/2$ |
| Rugosités anisotropes | $h_1 = \alpha \sin\left(2\pi n_p \left(\frac{x_1}{L} + \frac{x_2}{B}\right)\right) = \alpha \sin\left(2\pi \left(\frac{x_1}{\lambda_{x_1}} + \frac{x_2}{\lambda_{x_2}}\right)\right)$ | $RMS = \alpha\sqrt{2}/2$ |
| Rugosités isotropes | $h_1 = \alpha \left(\sin\left(2\pi n_p \frac{x_1}{L}\right) + \sin\left(2\pi n_p \frac{x_2}{B}\right) \right) =$ $\alpha \left(\sin\left(2\pi \frac{x_1}{\varepsilon L}\right) + \sin\left(2\pi \frac{x_2}{\varepsilon B}\right) \right)$ | $RMS = \alpha\sqrt{2}$ |

où : λ_{x_1} et λ_{x_2} sont respectivement les longueurs d'ondes des rugosités suivant x_1 et x_2 .

L'équation (III.5) dont l'inconnue est la pression déterministe p_ε n'admet pas de solution analytique, il est donc nécessaire d'utiliser les méthodes de résolution numérique. La discrétisation de l'équation (III.5) par la méthode des différences finies (figure III.3) conduit au système d'équations algébriques suivant :

$$a_{ij} p_{\varepsilon_{i+1,j}} + b_{ij} p_{\varepsilon_{i-1,j}} + c_{ij} p_{\varepsilon_{i,j+1}} + d_{ij} p_{\varepsilon_{i,j-1}} - e_{ij} p_{\varepsilon_{ij}} = f_{ij} \quad (\text{III.7})$$

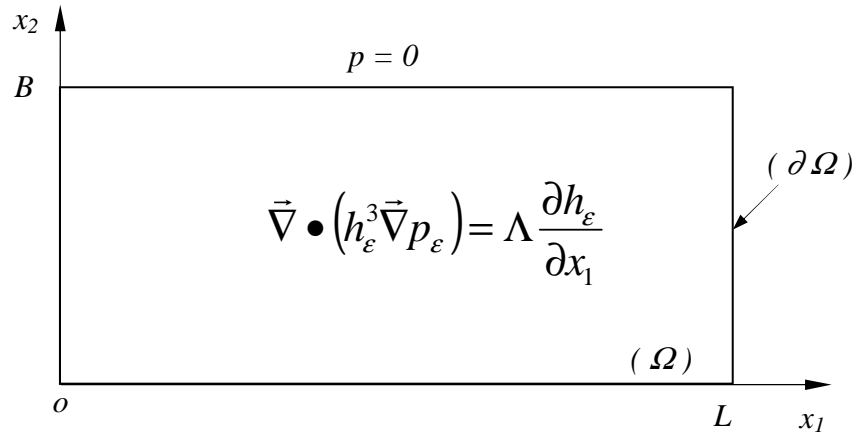
où :

$$a_{ij} = \frac{h_{\varepsilon ij}^3}{\Delta x_1^2} + \frac{3}{2} \frac{h_{\varepsilon ij}^2 \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial x_1} \right)_{ij}}{\Delta x_1}; \quad b_{ij} = \frac{h_{\varepsilon ij}^3}{\Delta x_1^2} - \frac{3}{2} \frac{h_{\varepsilon ij}^2 \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial x_1} \right)_{ij}}{\Delta x_1}; \quad c_{ij} = \frac{h_{\varepsilon ij}^3}{\Delta x_2^2} + \frac{3}{2} \frac{h_{\varepsilon ij}^2 \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial x_2} \right)_{ij}}{\Delta x_2}; \quad d_{ij} = \frac{h_{\varepsilon ij}^3}{\Delta x_2^2} - \frac{3}{2} \frac{h_{\varepsilon ij}^2 \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial x_2} \right)_{ij}}{\Delta x_2};$$

$$e_{ij} = 2h_{\varepsilon ij}^3 \left(\frac{1}{\Delta x_1^2} + \frac{1}{\Delta x_2^2} \right); \quad f_{ij} = \Lambda \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial x_1} \right)_{ij}$$

Δx_i étant respectivement les pas du maillage suivant les directions x_i .

a) Problème continu



b) Problème discret

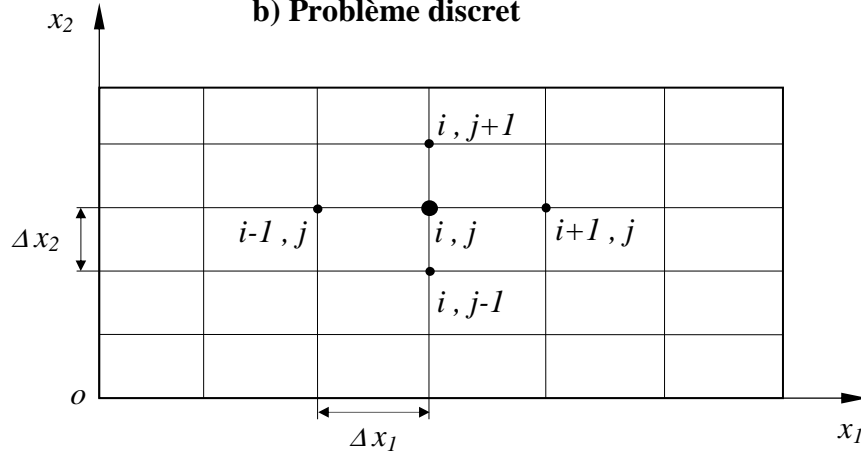


Fig. III.3 Discrétisation du film.

Le système d'équations (III.7) résultant de la discrétisation de l'équation de Reynolds (III.5) peut être résolu par la méthode itérative du gradient conjugué ou de la méthode des sur-relaxations successives (S.O.R) de Gauss-Seidel. Les algorithmes de ces deux méthodes itératives sont présentées en détails dans la référence [42].

L'application de la méthode de Gauss-Seidel nécessite la détermination par expérimentation numérique de la valeur optimale du coefficient de sur-relaxation α dont la valeur s'échelonne entre 1 et 2 afin d'accélérer la convergence du processus itératif. Il convient de souligner que la méthode de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation permet de prendre en considération numériquement les conditions de rupture du film de Reynolds dans la région à géométrie divergente de certains contacts hydrodynamiques cavitants telle que la butée symétrique présentée dans le chapitre précédent en figure II.9 .

III.2.3 Application au cas du patin incliné (2D)

Lorsque la largeur de patin suivant x_2 est très grande devant sa longueur, l'écoulement du fluide s'effectue seulement suivant la longueur du patin car le gradient de pression $\frac{\partial p}{\partial x_2} \ll \frac{\partial p}{\partial x_1}$ figure III.4. Dans ces conditions, l'équation de Reynolds (III.5) se réduit à :

$$\frac{d}{dx_1} \left(h_\varepsilon^3(x_1) \frac{dp_\varepsilon}{dx_1} \right) = \Lambda \frac{dp_\varepsilon}{dx_1} \quad (\text{III.8})$$

avec :

$$h_\varepsilon = h_0(x_1) + h_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \quad (\text{III.9})$$

Les conditions limites associées à l'équation (III.8) sont :

$$p_\varepsilon(x_1 = 0) = p_\varepsilon(x_1 = L) = 0 \quad (\text{III.10})$$

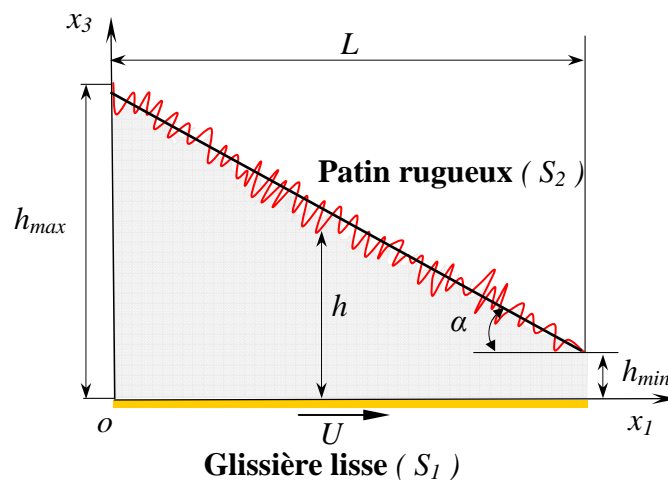


Fig. III.4 Schématisation d'un patin incliné plan.

Dans l'équation (III.9), les expressions de h_0 et h_1 sont données par :

$$h_0 = (h_{\min} - h_{\max}) \frac{x_1}{L} + h_{\max}$$

$$h_1 = \alpha \sin\left(\frac{2\pi n_p x_1}{L}\right) = \alpha \sin\left(\frac{2\pi x_1}{\lambda_{x_1}}\right)$$

n_p et λ_{x_1} étant respectivement le nombre de périodes ou de rugosités et la longueur d'onde de la rugosité.

La discrétisation de l'équation (III.8) par la méthode des différences finies centrées conduit à la résolution du système algébrique suivant :

$$a_i p_{\varepsilon_{i+1,j}} + b_i p_{\varepsilon_{i-1,j}} - e_i p_{\varepsilon_i} = f_i \quad (\text{III.11})$$

avec

$$a_i = \frac{h_{\varepsilon_i}^3}{\Delta x_1^2} + \frac{3}{2} \frac{h_{\varepsilon_i}^2 \left(\frac{dh_{\varepsilon}}{dx_1}\right)_i}{\Delta x_1} \quad b_i = \frac{h_{\varepsilon_{ij}}^3}{\Delta x_1^2} - \frac{3}{2} \frac{h_{\varepsilon_i}^2 \left(\frac{dh_{\varepsilon}}{dx_1}\right)_i}{\Delta x_1} \quad e_i = \frac{2h_{\varepsilon_i}^3}{\Delta x_1^2} \quad \text{et} \quad f_i = \Lambda \left(\frac{dh_{\varepsilon}}{dx_1}\right)_i$$

La résolution du système d'équation (III.11) s'effectue à l'aide de méthodes itératives tels que la méthode de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation ou la méthode du gradient conjugué.

III.3 Application de la méthode d'homogénéisation.

Pour homogénéiser l'équation de Reynolds (III.5), nous introduisons le développement asymptotique multi-échelle de la pression :

$$p_{\varepsilon}(x_1, x_2, y_1, y_2) = p_0(x_1, x_2) + \varepsilon p_1(x_1, x_2, y_1, y_2) + \varepsilon^2 p_2(x_1, x_2, y_1, y_2) + \dots \quad (\text{III.12})$$

où p_0 est la pression homogénéisée dépendant des variables globales $(x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2$ et p_1 et p_2 sont des fonctions périodiques par rapport aux variables locales

$$(y_1, y_2) = \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right)$$

tel que $(y_1, y_2) \in Y = (0,1) \times (0,1)$ qui est la cellule unitaire.

Dans ce qui suit, nous utiliserons la règle de différentiation suivante :

$$\vec{\nabla}(\circ) = \vec{\nabla}_x(\circ) + \varepsilon^{-1} \vec{\nabla}_y(\circ) \quad (\text{III.13})$$

avec $\vec{\nabla}_x(\circ) = \frac{\partial(\circ)}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial(\circ)}{\partial x_2} \vec{e}_2$ et $\vec{\nabla}_y(\circ) = \frac{\partial(\circ)}{\partial y_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial(\circ)}{\partial y_2} \vec{e}_2$

$\vec{\nabla}_x(\circ)$ et $\vec{\nabla}_y(\circ)$ regroupent respectivement les opérateurs différentiels par rapport aux variables globales (x_1, x_2) et variables locales (y_1, y_2) .

En notation indicielle, l'équation (III.13) s'écrit : $\frac{\partial(\circ)}{\partial x_i} = \frac{\partial(\circ)}{\partial x_i} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial(\circ)}{\partial y_i}$; $i = 1, 2$

En limitant le développement de la pression p_ε à l'ordre 1, l'équation de Reynolds (III.5) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla}_x \bullet (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_x p_0) + \vec{\nabla}_x \bullet (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_y p_1) + \vec{\nabla}_y \bullet (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_x p_1) + \\ & \varepsilon \vec{\nabla}_x \bullet (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_x p_1) + \varepsilon^{-1} [\vec{\nabla}_y \bullet (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_x p_0) + \vec{\nabla}_y \bullet (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_y p_1)] = 6\mu \vec{\nabla}_x \bullet (h_\varepsilon \vec{U}) + 6\mu \varepsilon^{-1} \vec{\nabla}_y \bullet (h_\varepsilon \vec{U}) \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Après identification par rapport à ε^j ($j = -1, 0, 1$), nous trouvons les équations suivantes :

- termes en ε^{-1} :

$$\vec{\nabla}_y \bullet (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_y p_1) = 6\mu \vec{\nabla}_y \bullet (h_\varepsilon \vec{U}) - \vec{\nabla}_y \bullet (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_x p_0) \quad (\text{III.15})$$

- termes en ε^0 :

$$\vec{\nabla}_x \bullet [h_\varepsilon^3 (\vec{\nabla}_x p_0 + \vec{\nabla}_y p_1)] = 6\mu \vec{\nabla}_x \bullet (h_\varepsilon \vec{U}) - \vec{\nabla}_y \bullet (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_x p_1) \quad (\text{III.16})$$

- termes en ε^1 :

$$\vec{\nabla}_x \bullet (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_x p_1) = 0 \quad (\text{III.17})$$

Si $\vec{U} = U \vec{e}_1$, les équations (III.15) et (III.16) s'écrivent :

$$\vec{\nabla}_y \bullet (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_y p_1) = \Lambda \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial y_1} - \vec{\nabla}_y \bullet (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_x p_0) \quad (\text{III.18})$$

$$\vec{\nabla}_x \bullet [h_\varepsilon^3 (\vec{\nabla}_x p_0 + \vec{\nabla}_y p_1)] = \Lambda \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x_1} - \vec{\nabla}_y \bullet (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_x p_1) \quad (\text{III.19})$$

Pour découpler les équations (III.17), (III.18) et (III.19), nous posons [43] :

$$p_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = v_1(x_1, x_2, y_1, y_2) \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + v_2(x_1, x_2, y_1, y_2) \frac{\partial p_0}{\partial x_2} + v_3(x_1, x_2, y_1, y_2) \quad (\text{III.20})$$

v_1, v_2 et v_3 sont des fonctions périodiques.

En remplaçant l'équation (III.20) dans l'équation (III.18), nous obtenons :

$$\vec{\nabla}_y \bullet \left[h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_y \left(v_1 \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial p_0}{\partial x_2} + v_3 \right) \right] = \Lambda \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial y_1} - \vec{\nabla}_y \bullet \left[h_\varepsilon^3 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \vec{e}_2 \right) \right]$$

Par identification, nous trouvons les équations différentielles suivantes :

$$\vec{\nabla}_y \bullet (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_y v_1) = -\vec{\nabla}_y \bullet (h_\varepsilon^3 \vec{e}_1)$$

$$\vec{\nabla}_y \bullet (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_y v_2) = -\vec{\nabla}_y \bullet (h_\varepsilon^3 \vec{e}_2)$$

$$\vec{\nabla}_y \bullet (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_y v_3) = \Lambda \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial y_1}$$

ou encore :

$$\vec{\nabla}_y \bullet (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_y v_1) = -\frac{\partial h_\varepsilon^3}{\partial y_1} \quad (\text{III.21})$$

$$\vec{\nabla}_y \bullet (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_y v_2) = -\frac{\partial h_\varepsilon^3}{\partial y_2} \quad (\text{III.22})$$

$$\vec{\nabla}_y \bullet (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_y v_3) = \Lambda \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial y_1} \quad (\text{III.23})$$

où: $h(x_1, x_2, y_1, y_2) = h_0(x_1, x_2) + h_1(y_1, y_2)$. Les expressions mathématiques de h_1 en fonction des coordonnées locales sont données dans le tableau III.2.

Le domaine d'intégration des équations (III.21) à (III.23) est défini par la cellule unitaire $Y = (0,1) \times (0,1)$.

L'intégration de l'équation(III.19) sur la cellule Y conduit à :

$$\int_Y \left[\vec{\nabla}_y \cdot (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_x p_1) + \vec{\nabla}_x \cdot (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_y p_1) + \vec{\nabla}_x \cdot (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_x p_0) - \Lambda \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x_1} \right] dY = 0 \quad (III.24)$$

avec $dY = dy_1 dy_2$

Tableau III. 2 Expressions mathématiques de h_1 en fonction des coordonnées locales.

| Types de rugosités | Expressions de h_1 | $RMS = \sqrt{\frac{1}{LB} \int_0^B \int_0^L h_1^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2}$ |
|--------------------------|--|---|
| Rugosités transversales | $h_1 = \alpha \sin(2\pi y_1)$ | $RMS = \alpha \sqrt{2}/2$ |
| Rugosités longitudinales | $h_1 = \alpha \sin(2\pi y_2)$ | $RMS = \alpha \sqrt{2}/2$ |
| Rugosités anisotropes | $h_1 = \alpha \sin(2\pi(y_1 + y_2))$ | $RMS = \alpha \sqrt{2}/2$ |
| Rugosités isotropes | $h_1 = \alpha (\sin(2\pi y_1) + \sin(2\pi y_2))$ | $RMS = \alpha \sqrt{2}$ |

Puisque $h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_x p_1$ est périodique, nous pouvons écrire : $\int_Y \vec{\nabla}_y \cdot (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_x p_1) dY = 0$.

L'équation (III.24) se réduit à :

$$\int_Y \left(\vec{\nabla}_x \cdot \left[h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_y \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial p_0}{\partial x_2} v_2 + v_3 \right) \right] + \vec{\nabla}_x \cdot (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_x p_0) - \Lambda \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x_1} \right) dY = 0 \quad (III.25)$$

L'équation (III.24) peut s'écrire aussi :

$$\vec{\nabla}_x \cdot \left[\frac{\partial p_0}{\partial x_1} \int_Y (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_y v_1 + h_\varepsilon^3 \vec{e}_1) dY + \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \int_Y (h_\varepsilon^3 \vec{\nabla}_y v_2 + h_\varepsilon^3 \vec{e}_2) dY \right] = \vec{\nabla}_x \cdot \int_Y \left\{ \begin{matrix} \Lambda h_\varepsilon \\ 0 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} h_\varepsilon^3 \frac{\partial v_3}{\partial y_1} \\ h_\varepsilon^3 \frac{\partial v_3}{\partial y_2} \end{matrix} \right\} dY \quad (III.26)$$

Soit par conséquent :

$$\vec{\nabla}_x \bullet (\mathbf{A}(x)\vec{\nabla}_x p_0) = \vec{\nabla}_x \bullet \boldsymbol{\theta}(x) \text{ sur } (D) \quad (\text{III.27})$$

$$\text{avec } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(x_1, x_2) & a_{12}(x_1, x_2) \\ a_{21}(x_1, x_2) & a_{22}(x_1, x_2) \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\theta} = \begin{Bmatrix} \theta_1(x_1, x_2) \\ \theta_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix}$$

Les coefficients a_{ij} et θ_i sont définis par :

$$a_{11} = \int_Y h_\varepsilon^3 \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right) dY ; \quad a_{12} = \int_Y h_\varepsilon^3 \frac{\partial v_2}{\partial y_1} dY ; \quad a_{21} = \int_Y h_\varepsilon^3 \frac{\partial v_1}{\partial y_2} dY ; \quad a_{22} = \int_Y h_\varepsilon^3 \left(1 + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} \right) dY$$

$$\theta_1 = \int_Y \left(\Lambda h_\varepsilon - h_\varepsilon^3 \frac{\partial v_3}{\partial y_1} \right) dY ; \quad \theta_2 = - \int_Y h_\varepsilon^3 \frac{\partial v_3}{\partial y_2} dY \quad (\text{III.28})$$

L'équation (III.27) peut aussi s'écrire sous la forme développée comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(a_{11} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(a_{21} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \right) = - \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \right) \text{ sur } (D) \quad (\text{III.29})$$

La pression homogénéisée p_0 doit satisfaire à l'équation (III.27) ou (III.29) ainsi qu'à la condition de Dirichlet :

$$p_0 = 0 \text{ sur la frontière } \partial D \quad (\text{III.30})$$

Dans le cas lisse, c'est-à-dire : $h(x) = h_0(x)$ l'équation (III.27) se réduit à l'équation de Reynolds classique, i.e. :

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial x_1} (h_0(x)) - \vec{\nabla}_x \bullet (h_0^3(x)\vec{\nabla}_x p_0) = 0 \quad (\text{III.31})$$

III.3.1. Solutions numériques des problèmes local et global

a) traitement numérique des équations locales.

La discrétisation par la méthode des différences finies centrées des équations locales (III.21) à (III.23) sur la cellule unitaire Y figure III.5 conduit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} v_{ij}^{(1)} = \alpha_{ij} v_{i+1,j}^{(1)} + \beta_{ij} v_{i-1,j}^{(1)} + \gamma_{ij} v_{i,j+1}^{(1)} + \delta_{ij} v_{i,j-1}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(1)} \\ v_{ij}^{(2)} = \alpha_{ij} v_{i+1,j}^{(2)} + \beta_{ij} v_{i-1,j}^{(2)} + \gamma_{ij} v_{i,j+1}^{(2)} + \delta_{ij} v_{i,j-1}^{(2)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} \\ v_{ij}^{(3)} = \alpha_{ij} v_{i+1,j}^{(3)} + \beta_{ij} v_{i-1,j}^{(3)} + \gamma_{ij} v_{i,j+1}^{(3)} + \delta_{ij} v_{i,j-1}^{(3)} + \varepsilon_{ij}^{(3)} \end{cases} \quad (\text{III.32})$$

En utilisant l'algorithme de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation α_{GS} , le système (III.31) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} (v_{i,j}^{(1)})^{(k+1)} &= (1 - \alpha_{GS})(v_{i,j}^{(1)})^{(k)} + \alpha_{GS} [\alpha_{ij} (v_{i+1,j}^{(1)})^{(k)} + \beta_{ij} (v_{i-1,j}^{(1)})^{(k+1)} + \gamma_{ij} (v_{i,j+1}^{(1)})^{(k)} + \delta_{ij} (v_{i,j-1}^{(1)})^{(k+1)} + \varepsilon_{ij}^{(1)}] \\ (v_{i,j}^{(2)})^{(k+1)} &= (1 - \alpha_{GS})(v_{i,j}^{(2)})^{(k)} + \alpha_{GS} [\alpha_{ij} (v_{i+1,j}^{(2)})^{(k)} + \beta_{ij} (v_{i-1,j}^{(2)})^{(k+1)} + \gamma_{ij} (v_{i,j+1}^{(2)})^{(k)} + \delta_{ij} (v_{i,j-1}^{(2)})^{(k+1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}] \\ (v_{i,j}^{(3)})^{(k+1)} &= (1 - \alpha_{GS})(v_{i,j}^{(3)})^{(k)} + \alpha_{GS} [\alpha_{ij} (v_{i+1,j}^{(3)})^{(k)} + \beta_{ij} (v_{i-1,j}^{(3)})^{(k+1)} + \gamma_{ij} (v_{i,j+1}^{(3)})^{(k)} + \delta_{ij} (v_{i,j-1}^{(3)})^{(k+1)} + \varepsilon_{ij}^{(3)}] \end{aligned} \quad (\text{III.33})$$

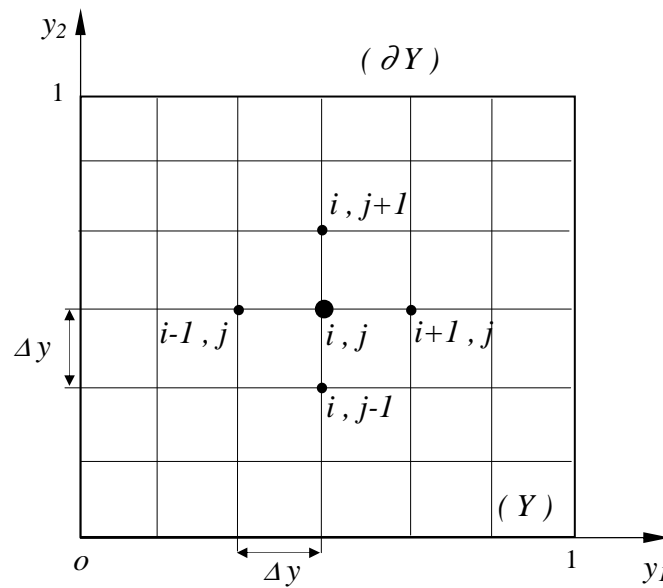


Fig. III.5 Discrétisation par différences finies de la cellule $Y = (0,1) \times (0,1)$

$$\text{avec } \alpha_{ij} = \frac{\frac{h_{\varepsilon ij}^3}{\Delta y^2} + \frac{3 h_{\varepsilon ij}^2}{2 \Delta y} \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial y_1} \right)_{ij}}{4h_{\varepsilon ij}^3 / \Delta y^2} ; \beta_{ij} = \frac{\frac{h_{\varepsilon ij}^3}{\Delta y^2} - \frac{3 h_{\varepsilon ij}^2}{2 \Delta y} \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial y_1} \right)_{ij}}{4h_{\varepsilon ij}^3 / \Delta y^2} ; \gamma_{ij} = \frac{\frac{h_{\varepsilon ij}^3}{\Delta y^2} + \frac{3 h_{\varepsilon ij}^2}{2 \Delta y} \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial y_2} \right)_{ij}}{4h_{\varepsilon ij}^3 / \Delta y^2} ;$$

$$\delta_{ij} = \frac{\frac{h_{\varepsilon ij}^3}{\Delta y^2} - \frac{3 h_{\varepsilon ij}^2}{2 \Delta y} \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial y_2} \right)_{ij}}{4h_{\varepsilon ij}^3 / \Delta y^2} ; \varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{3\Lambda h_{\varepsilon ij}^2 \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial y_1} \right)_{ij}}{4h_{\varepsilon ij}^3 / \Delta y^2} ; \varepsilon_{ij}^{(2)} = \frac{3\Lambda h_{\varepsilon ij}^2 \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial y_2} \right)_{ij}}{4h_{\varepsilon ij}^3 / \Delta y^2} ;$$

$$\varepsilon_{ij}^{(3)} = -\frac{\Lambda \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial y_1} \right)_{ij}}{4h_{\varepsilon ij}^3 / \Delta y^2}$$

b) Traitement numérique de l'équation globale (homogénéisée)

L'application de la méthode des différences finies centrées à l'équation (III.29) conduit à l'équation discrétisée suivante :

$$p_{ij}^{(0)} = A_{ij} p_{i+1,j}^{(0)} + B_{ij} p_{i-1,j}^{(0)} + C_{ij} p_{i,j+1}^{(0)} + D_{ij} p_{i,j-1}^{(0)} + E_{ij} (p_{i+1,j+1}^{(0)} + p_{i-1,j-1}^{(0)} - p_{i+1,j-1}^{(0)} - p_{i-1,j+1}^{(0)}) + F_{ij} \quad (\text{III.34})$$

avec

$$A_{ij} = \frac{\frac{a_{ij}^{11}}{(\Delta x_1)^2} + \frac{\left(\frac{\partial a^{11}}{\partial x_1} \right)_{ij} + \left(\frac{\partial a^{21}}{\partial x_2} \right)_{ij}}{2\Delta x_1}}{2 \left(\frac{a_{ij}^{11}}{\Delta x_1^2} + \frac{a_{ij}^{22}}{\Delta x_2^2} \right)} ; \quad B_{ij} = \frac{\frac{a_{ij}^{11}}{(\Delta x_1)^2} - \frac{\left(\frac{\partial a^{11}}{\partial x_1} \right)_{ij} + \left(\frac{\partial a^{21}}{\partial x_2} \right)_{ij}}{2\Delta x_1}}{2 \left(\frac{a_{ij}^{11}}{\Delta x_1^2} + \frac{a_{ij}^{22}}{\Delta x_2^2} \right)}$$

$$C_{ij} = \frac{\frac{a_{ij}^{22}}{(\Delta x_2)^2} + \frac{\left(\frac{\partial a^{12}}{\partial x_1} \right)_{ij} + \left(\frac{\partial a^{22}}{\partial x_2} \right)_{ij}}{2\Delta x_2}}{2 \left(\frac{a_{ij}^{11}}{\Delta x_1^2} + \frac{a_{ij}^{22}}{\Delta x_2^2} \right)} ; \quad D_{ij} = \frac{\frac{a_{ij}^{22}}{(\Delta x_2)^2} - \frac{\left(\frac{\partial a^{12}}{\partial x_1} \right)_{ij} + \left(\frac{\partial a^{22}}{\partial x_2} \right)_{ij}}{2\Delta x_2}}{2 \left(\frac{a_{ij}^{11}}{\Delta x_1^2} + \frac{a_{ij}^{22}}{\Delta x_2^2} \right)}$$

$$E_{ij} = \frac{\frac{a_{ij}^{12} + a_{ij}^{21}}{4\Delta x_1 \Delta x_2}}{2\left(\frac{a_{ij}^{11}}{\Delta x_1^2} + \frac{a_{ij}^{22}}{\Delta x_2^2}\right)} \quad \text{et} \quad F_{ij} = \frac{\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1}\right)_{ij} + \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x_2}\right)_{ij}}{2\left(\frac{a_{ij}^{11}}{\Delta x_1^2} + \frac{a_{ij}^{22}}{\Delta x_2^2}\right)}$$

Le système (III.34) peut être résolu par la méthode (S.O.R).

III.3.2 Algorithme d'homogénéisation

L'algorithme ou le processus d'homogénéisation comprend les étapes suivantes :

Etape 1 :

Résolution numérique du problème local gouverné par le système d'équation (III.21) à (III.23) dont les inconnues sont des fonctions périodiques $v_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $v_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $v_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Etape 2 :

Calcul des coefficients des matrices $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ et $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})$ définies par les expressions (III.28) à l'aide d'une intégration numérique.

Etape 3 :

Résolution numérique du problème global régi par l'équation homogénéisée (III.27) ou (III.29) dont l'inconnue est la pression homogénéisée p_0 .

Il est utile de noter que les étapes 1 et 2 de l'algorithme d'homogénéisation s'appliquent à chaque point $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2 \rangle$ du domaine global $(D) = (0, L) \times (0, B)$.

Dans le cas (1D), les équations locales et globales se réduisent à :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(h_\varepsilon^3 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = - \frac{\partial (h_\varepsilon^3)}{\partial y} \tag{III.35}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(h_\varepsilon^3 \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) = \Lambda \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial y}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})}{dx} - \frac{d}{dx} \left(A(\mathbf{x}) \frac{dp_0}{dx} \right) = 0 \tag{III.36}$$

où :

$$\theta(x) = \int_Y \left(\Lambda h_\varepsilon(x, y) - h_\varepsilon^3(x, y) \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) dy \quad ; \quad A(x) = \int_Y h_\varepsilon^3(x, y) \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dy$$

où : $(Y) = (0,1)$

III.4 Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées

Deux programmes de calcul ont été élaborés pour simuler le comportement du patin lubrifié à l'aide d'un fluide newtonien en se basant sur le concept des deux méthodes d'analyse tridimensionnelles développées. Les données de cette étude sont reportées dans le tableau III.3.

Les solutions déterministes et homogénéisées sont obtenues pour diverses valeurs de l'amplitude relative de rugosité ($\tilde{\alpha} = 0.0, 0.025, 0.25$) et du paramètre ε qui correspond à l'inverse du nombre de périodes ou de rugosités dont les valeurs sont $n_p = 5, 10$ et 40 . Notons que pour le cas d'un patin lisse, $\alpha = 0$.

Tous les calculs sont effectués pour une valeur du rapport de l'épaisseur maximale du film à l'épaisseur minimale $r = 2$

Les caractéristiques de maillages utilisés pour la discrétisation spatiale par la méthode des différences finies centrées des différentes équations aux dérivées partielles (III. 5), (III.21), (III.22), (III.23) et (III.29) sont indiquées dans le tableau III.4.

Tableau III. 3 Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement du patin

| Paramètres | Symboles | Valeurs | Unités |
|---|------------|---------------------------------------|------------|
| Longueur du patin | L | 0.10 | m |
| Largeur du patin | B | 0.10 | m |
| Epaisseur minimale du film lubrifiant à la sortie du contact | h_{\min} | $4.\times 10^{-6}$ | m |
| Epaisseur maximale du film lubrifiant à l'entrée du contact | h_{\max} | $8.\times 10^{-6}$ | m |
| Amplitude des rugosités | α | 0.0 (Cas lisse) $1.\times 10^{-6}$ | m |
| Ecart quadratique moyen des rugosités | RMS | $\sqrt{2}/2 \times 10^{-6}$ | m |
| Vitesse de déplacement de la glissière | U | 1. | $m.s^{-1}$ |
| Viscosité dynamique du fluide lubrifiant (Huile industrielle ISO VG 32) | μ | $30.\times 10^{-3}$ | $Pa.s$ |

Tableau III.4 Caractéristiques des maillages par différences finies.

| Méthodes d'analyse | EDPs gouvernant le problème | Nombre de mailles |
|--------------------|---|-------------------|
| Déterministe | Equation de Reynolds (Eq. III.5) | 600×600 |
| Homogénéisation | Equations locales (Eqs III.21 à III.23) | 40×40 |
| | Equation globale (Eq. III.29) | 80×80 |

Les figures (III.6) et (III.7) ainsi que les tableaux III.6 à III.13 représentent les répartitions de pression hydrodynamique obtenues dans le cas du patin lisse et du patin rugueux. D'après ces illustrations, nous observons nettement que les solutions obtenues dans le cas lisse sont confondues ce qui permet de valider le programme de calcul basé sur l'homogénéisation de l'équation de Reynolds. Dans le cas rugueux, nous remarquons que la solution déterministe obtenue pour une amplitude de rugosité relativement faible converge vers la solution homogénéisée et ce pour les quatre formes de rugosités considérées. Cependant, la convergence de la solution déterministe ne peut être obtenue pour les formes

de rugosités transversales et anisotropes que pour un nombre important de rugosités; c'est à dire lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Il est à noter que les rugosités longitudinales n'ont pas d'effets sur la convergence de la solution déterministe vers la solution homogénéisée du fait que ces défauts sont orientés dans le même sens que celui de l'écoulement du lubrifiant comme l'illustre la figure (III.8).

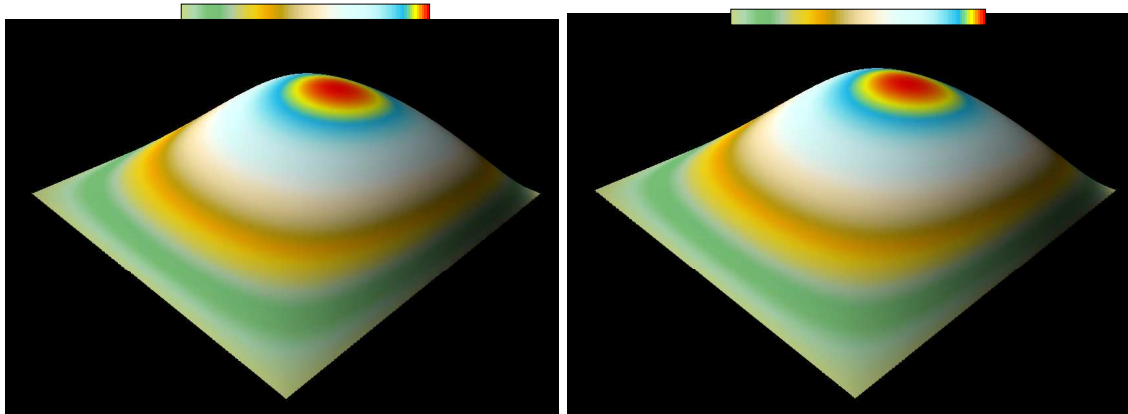
La figure III.9 illustre clairement que lorsque le nombre de périodes ou de rugosités augmente l'écart relatif entre les portances hydrodynamiques déterministes et homogénéisées $\delta\tilde{W} = \int_{\Omega} |p_0 - p_{\varepsilon}| dx_1 dx_2 / \int_{\Omega} p_0 dx_1 dx_2$ diminue pour les quatre formes de rugosités considérées. Cette diminution est plus rapide dans le cas des rugosités longitudinales.

Tableau III. 5 Comparaison en temps CPU des méthodes déterministe et d'homogénéisation (Processeur Intel Pentium 1.66 GHz, RAM 503 MB).

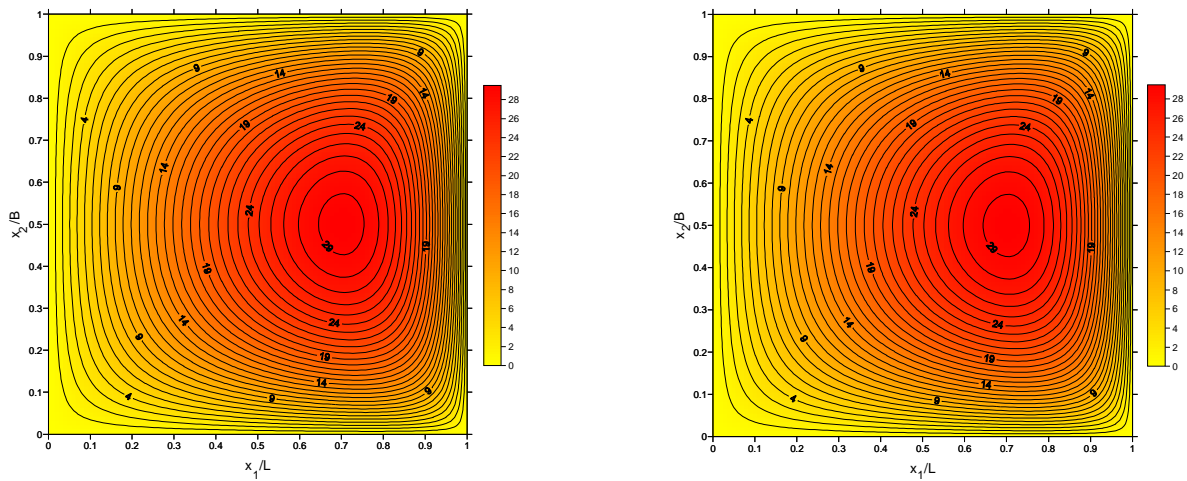
| Méthodes d'analyse | Cas lisse ($\tilde{\alpha} = 0$) | Modèles de rugosités | | |
|--------------------|------------------------------------|--|---|--|
| | | Transversales ($\varepsilon = 1/40, \tilde{\alpha} = 1/4$) | Longitudinales ($\varepsilon = 1/40, \tilde{\alpha} = 1/4$) | Anisotropes ($\varepsilon = 1/40, \tilde{\alpha} = 1/4$) |
| Déterministe | 44.85 s | 56.53 s | 53.23 s | 56.00 s |
| Homogénéisation | 382.98 s | 487.52 s | 425.9 s | 476.35 s |

a) Solution homogénéisée, p_0

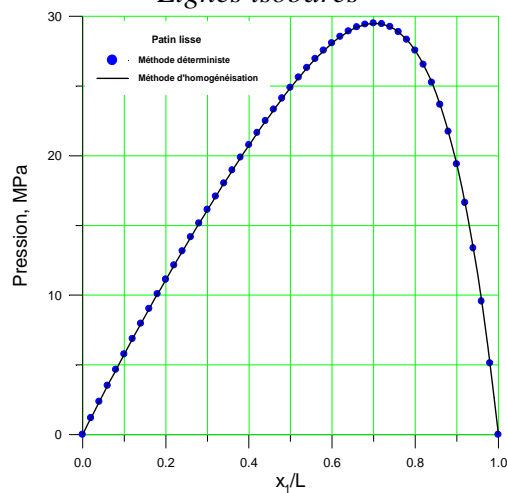
b) Solution déterministe, p_ε



Représentations 3-D



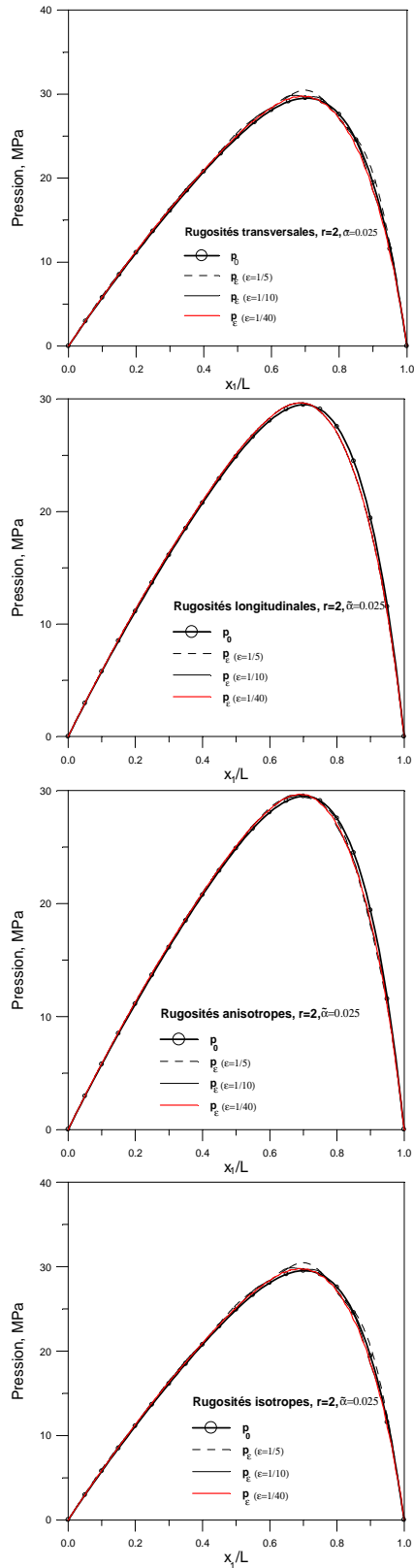
Lignes isobares



Répartition du champ de pression dans la section médiane du patin

Fig. III.6. Répartitions des pressions homogénéisée et déterministe dans le cas du patin lisse, ($\alpha = 0.0$, $r = 2$)

a) $\tilde{\alpha} = 0.025, r = 2$



b) $\tilde{\alpha} = 0.25, r = 2$

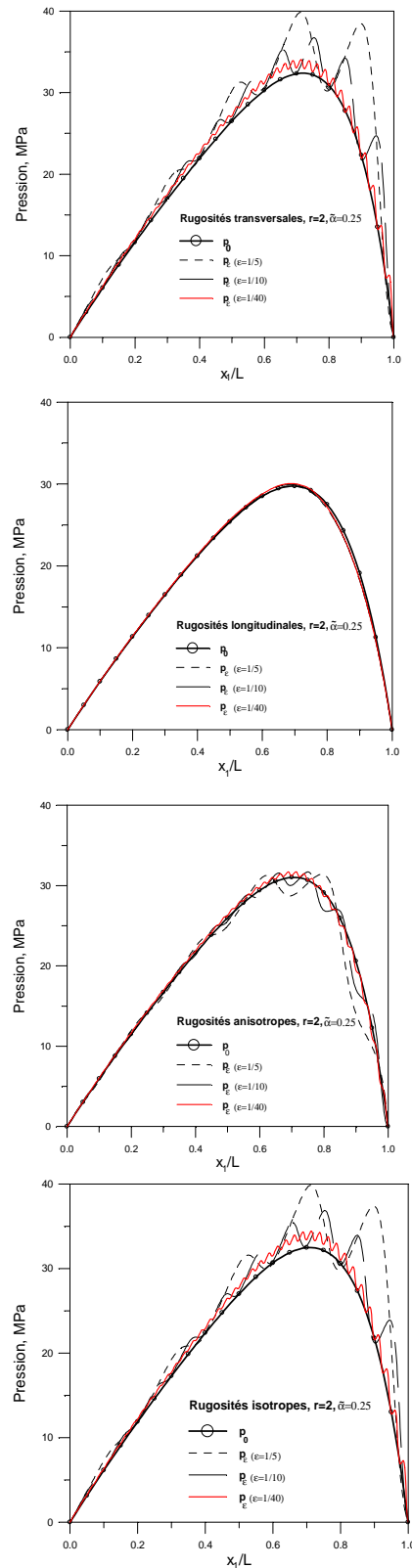


Fig. III.7 Comparaison des solutions homogénéisées et déterministes obtenues dans la section médiane du patin pour les différentes formes de rugosités (patin rugueux).

Tableau III.6 Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité transversale, $\alpha/h_{min} = 0.025$

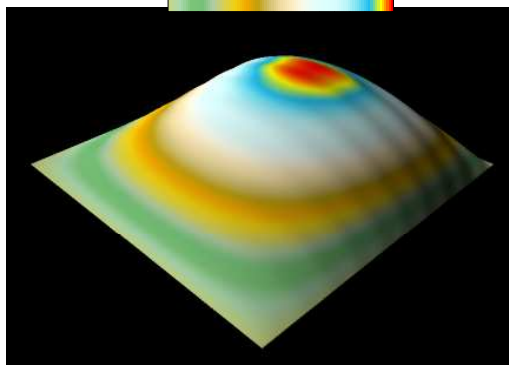
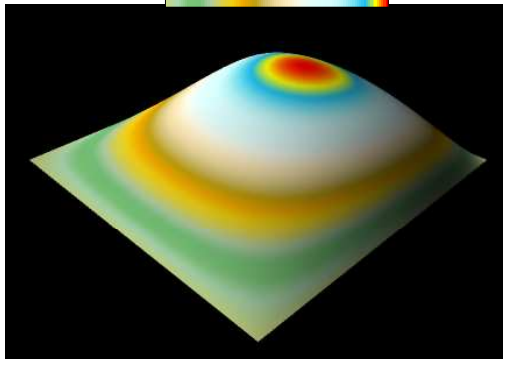
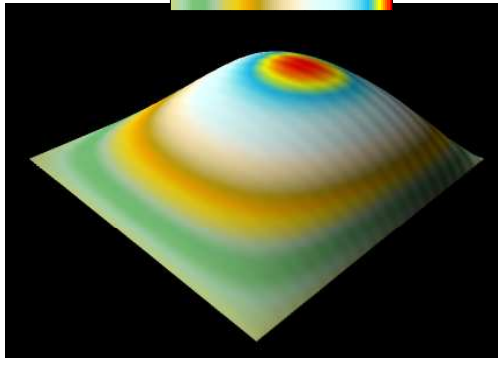
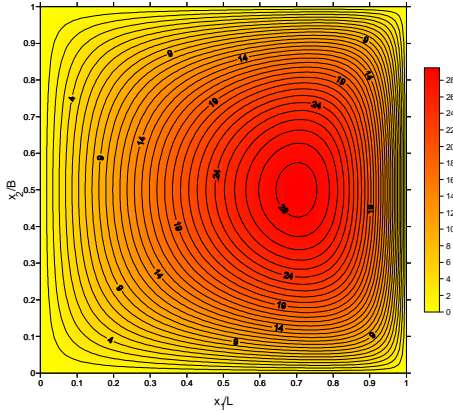
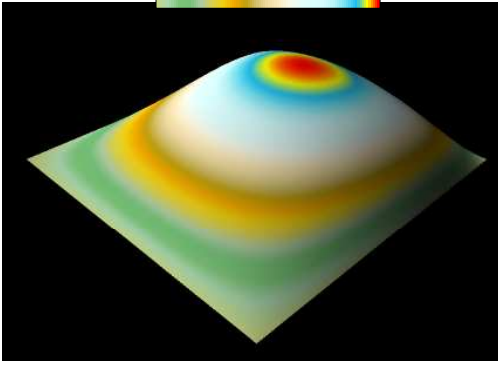
| n_p | ε | Solution déterministe | Solution homogénéisée |
|-------|---------------|---|---|
| 10 | 1/10 |  |  |
| 20 | 1/20 |  |  |
| 40 | 1/40 |  | |

Tableau III.7 Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité transversale, $\alpha/h_{min} = 0.25$

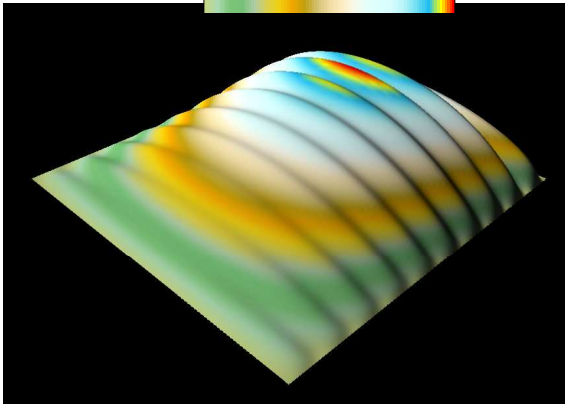
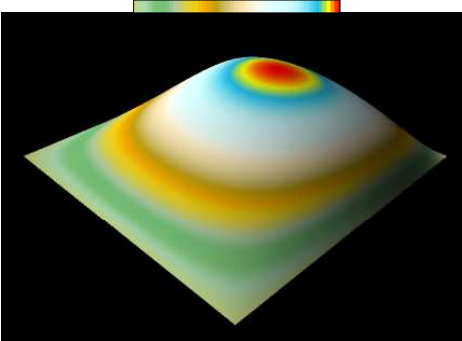
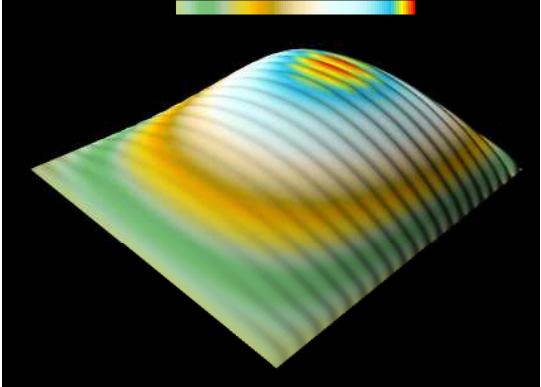
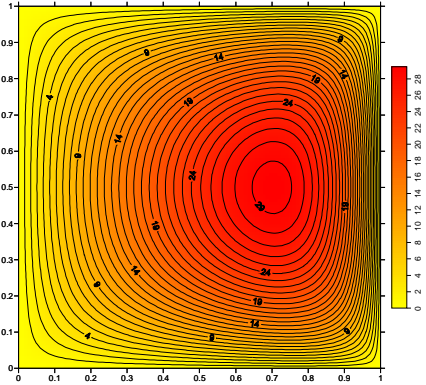
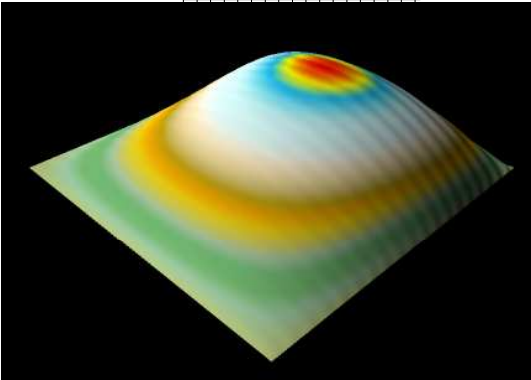
| n_p | ε | Solution déterministe | Solution homogénéisée |
|-------|---------------|---|---|
| 10 | 1/10 |  |  |
| 20 | 1/20 |  |  |
| 40 | 1/40 |  | |

Tableau III.8 Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité longitudinale, $\alpha/h_{min} = 0.025$

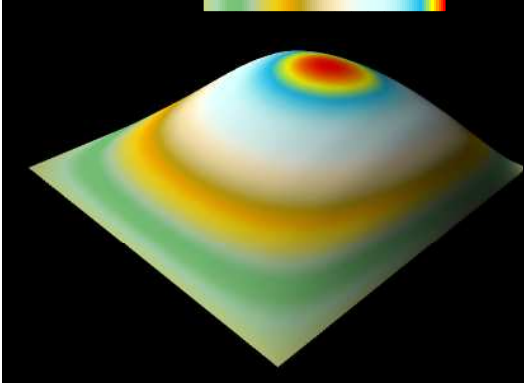
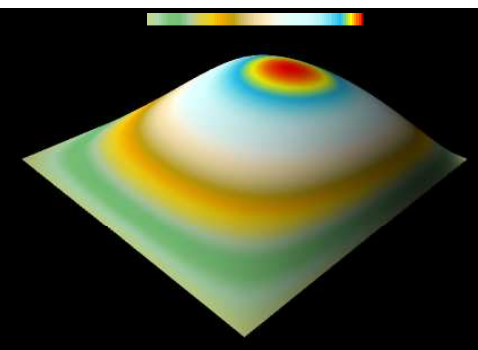
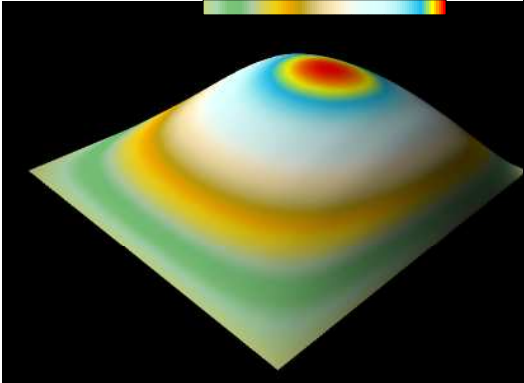
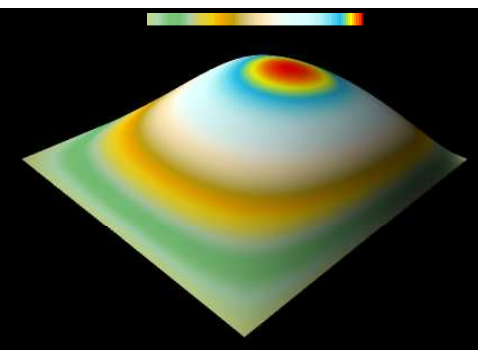
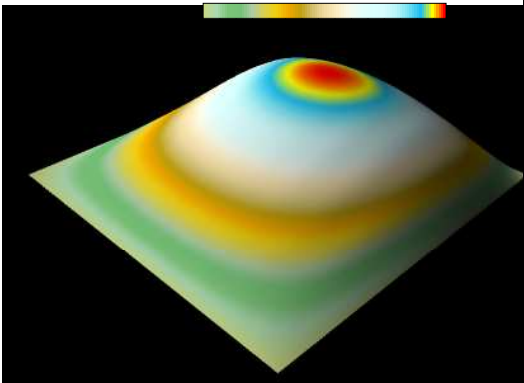
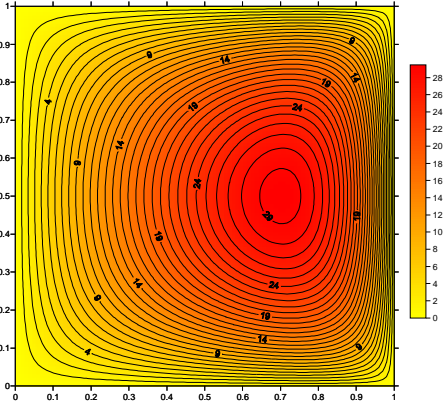
| n_p | ε | Solution déterministe | Solution homogénéisée |
|-------|---------------|---|--|
| 10 | 1/10 |  |  |
| 20 | 1/20 |  |  |
| 40 | 1/40 |  |  |

Tableau III.9 Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité longitudinale, $a/h_{min} = 0.25$

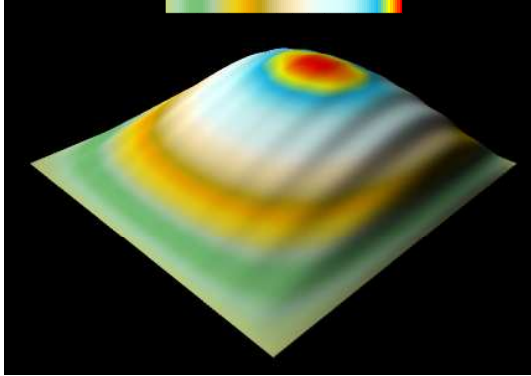
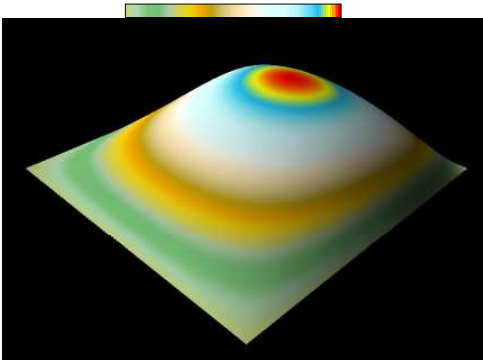
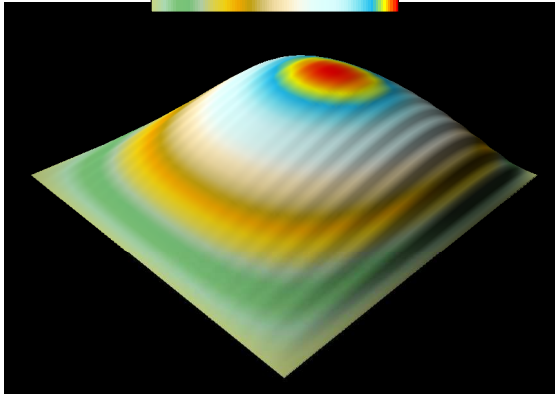
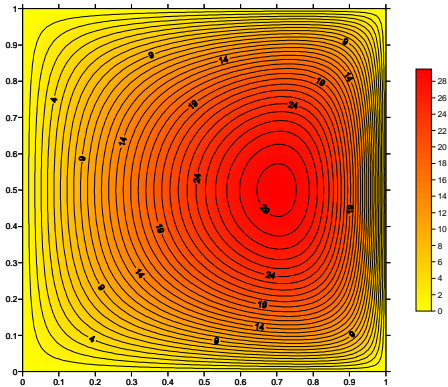
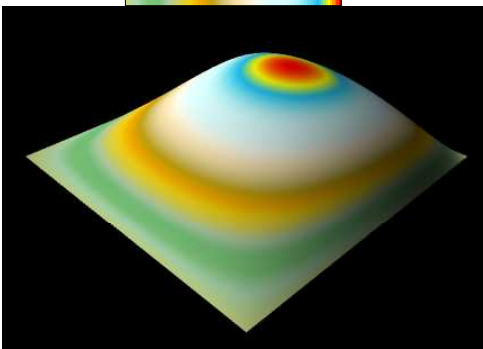
| n_p | ε | Solution déterministe | Solution homogénéisée |
|-------|---------------|---|---|
| 10 | 1/10 |  |  |
| 20 | 1/20 |  |  |
| 40 | 1/40 |  | |

Tableau III.10 Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité anisotrope, $\alpha/h_{min} = 0.025$

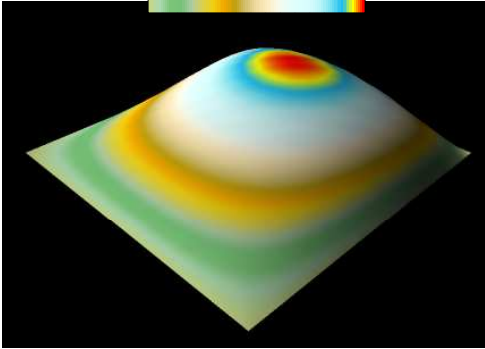
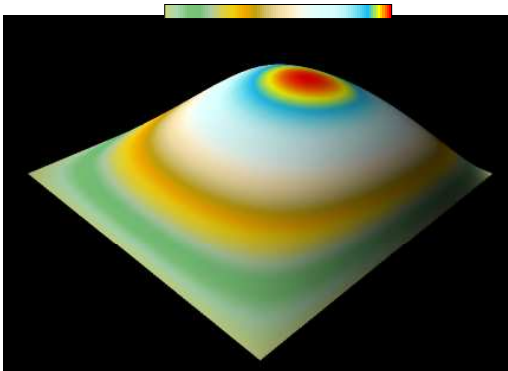
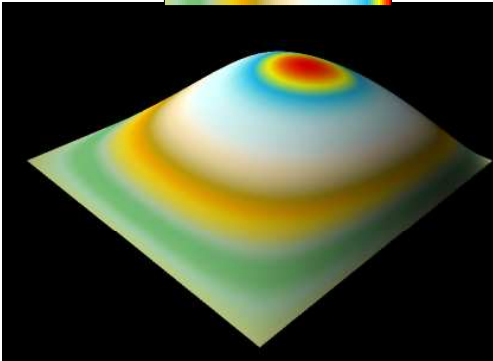
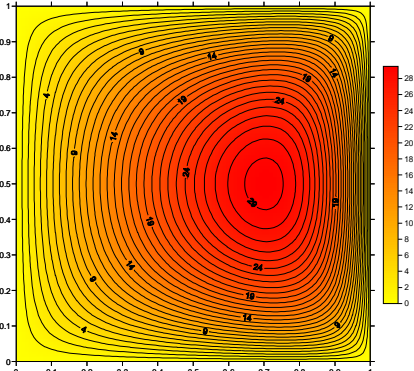
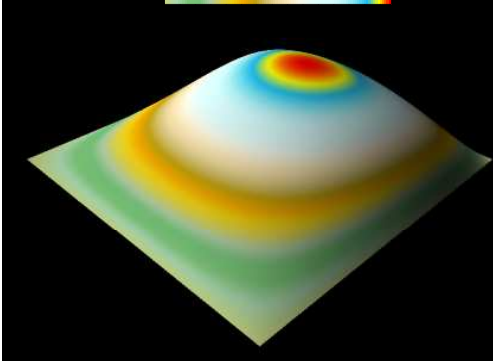
| n_p | ε | Solution déterministe | Solution homogénéisée |
|-------|---------------|---|--|
| 10 | 1/10 |  |  |
| 20 | 1/20 |  |  |
| 40 | 1/40 |  | |

Tableau III. 11 Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité anisotrope, $\alpha/h_{min} = 0.25$

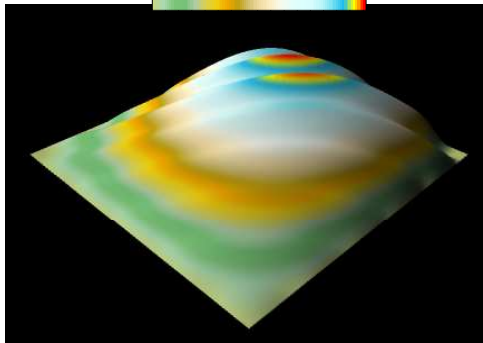
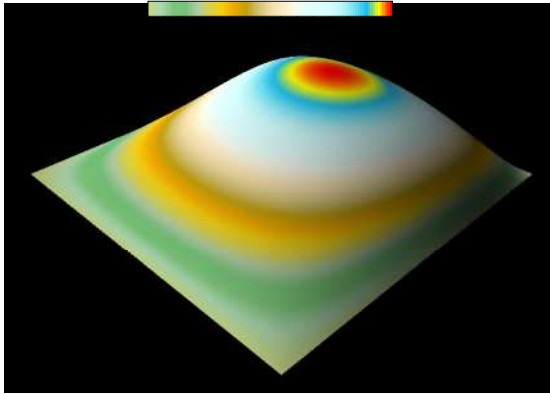
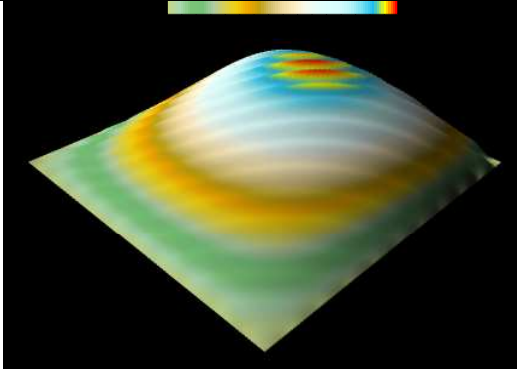
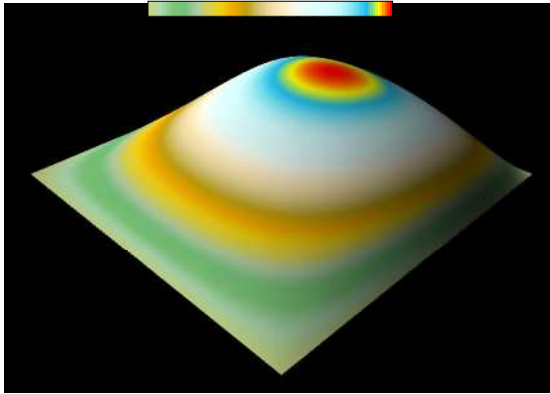
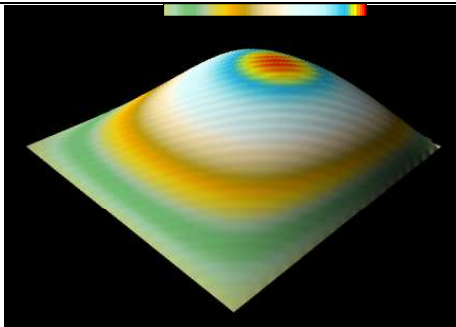
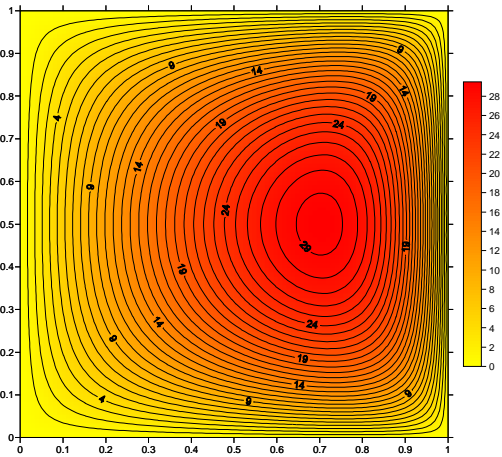
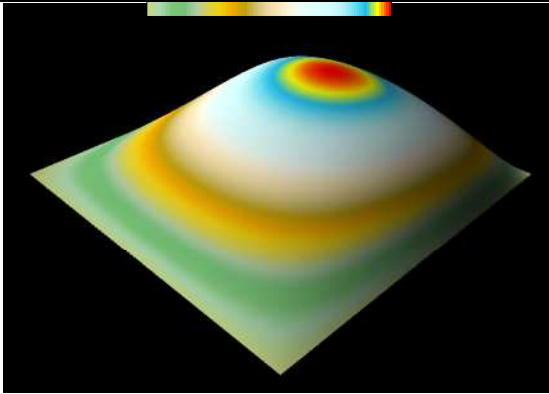
| n_p | ε | Solution déterministe | Solution homogénéisée |
|-------|---------------|---|---|
| 5 | 1/5 |  |  |
| 10 | 1/10 |  |  |
| 20 | 1/20 |  |  |
| 40 | 1/40 |  | |

Tableau III.12 Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité isotrope, $\alpha/h_{min} = 0.025$

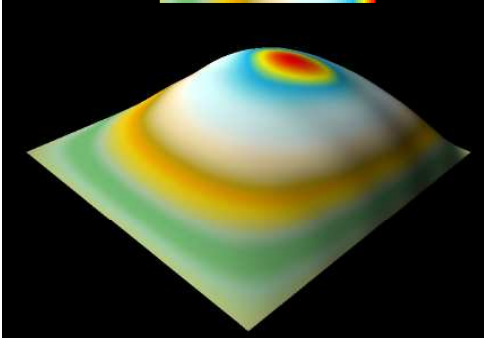
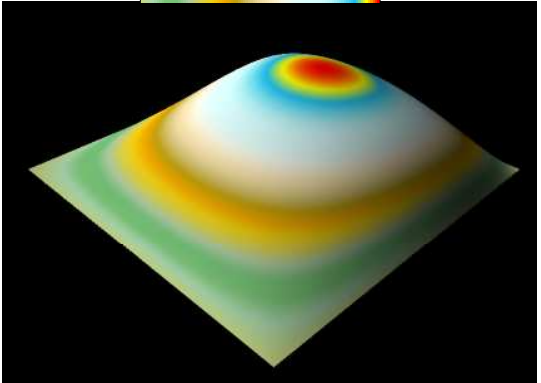
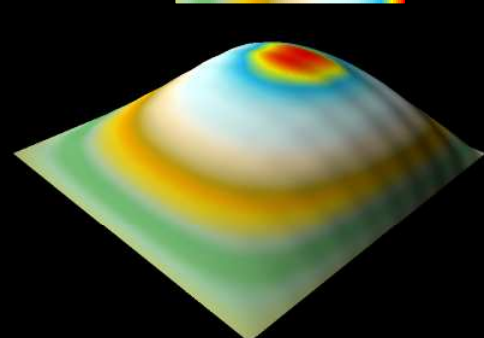
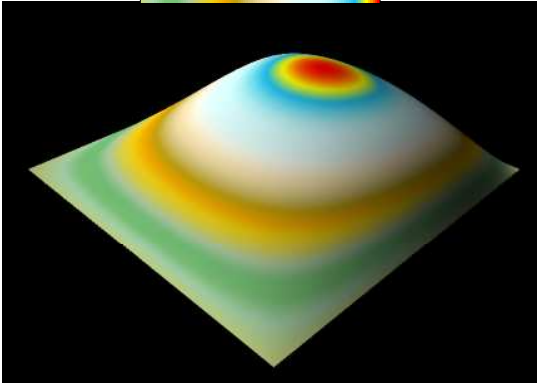
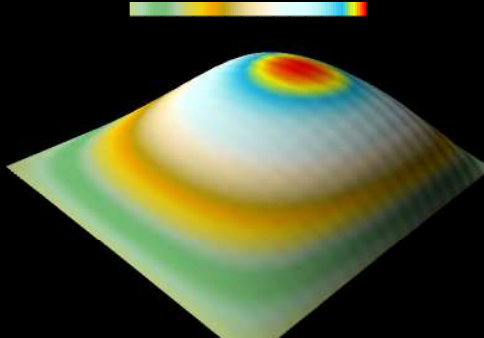
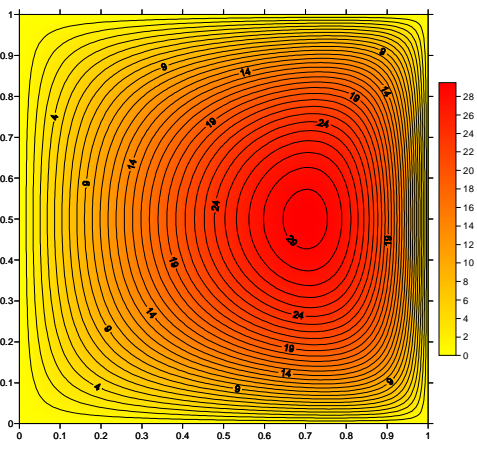
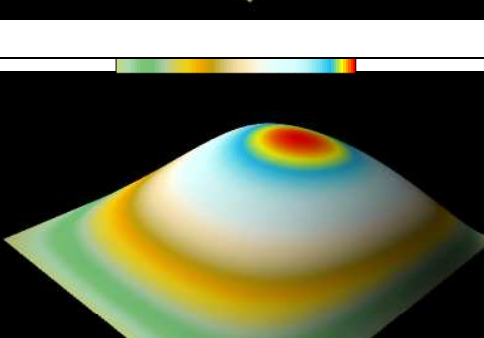
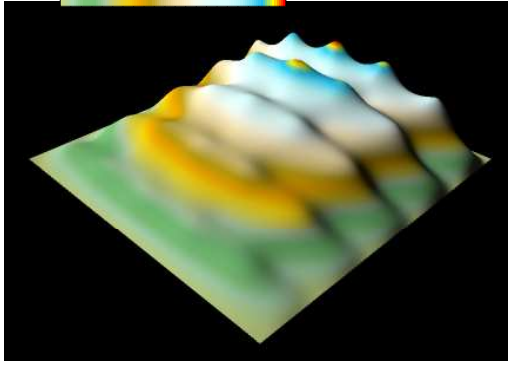
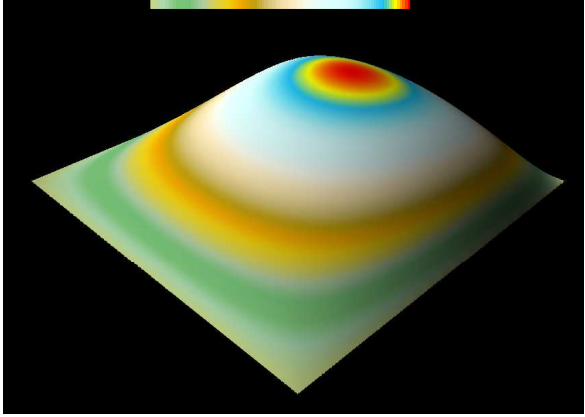
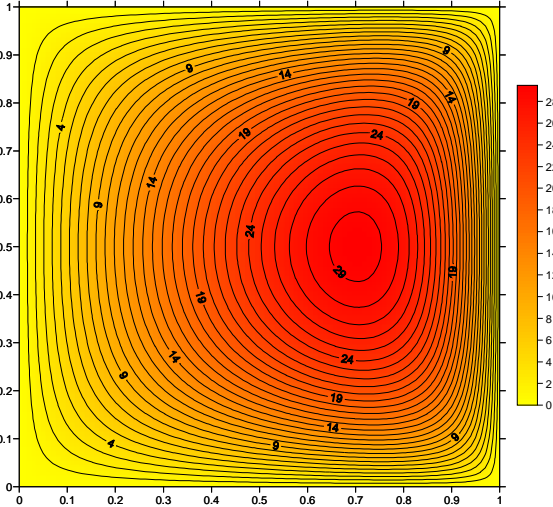
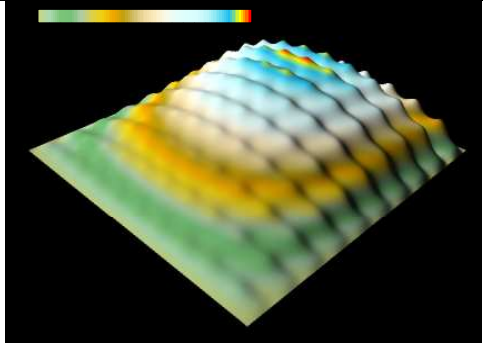
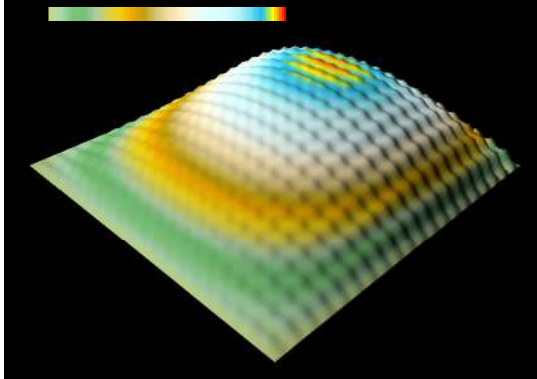
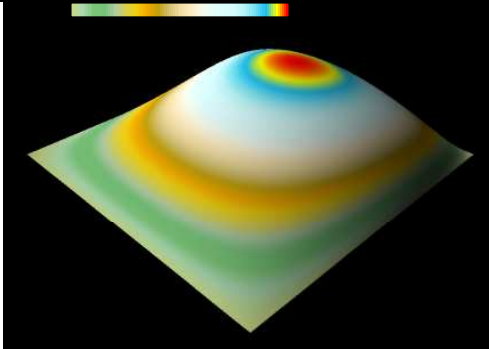
| n_p | ε | Solution déterministe | Solution homogénéisée |
|-------|---------------|---|---|
| 5 | 1/5 |  |  |
| 10 | 1/10 |  |  |
| 20 | 1/20 |  |  |
| 40 | 1/40 |  | |

Tableau III. 13 Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité isotrope, $\alpha/h_{min}=0.25$

| n_p | ε | Solution déterministe | Solution homogénéisée |
|-------|---------------|---|---|
| 5 | 1/5 |  |   |
| 10 | 1/10 |  | |
| 20 | 1/20 |  | |
| 100 | 1/100 |  | |

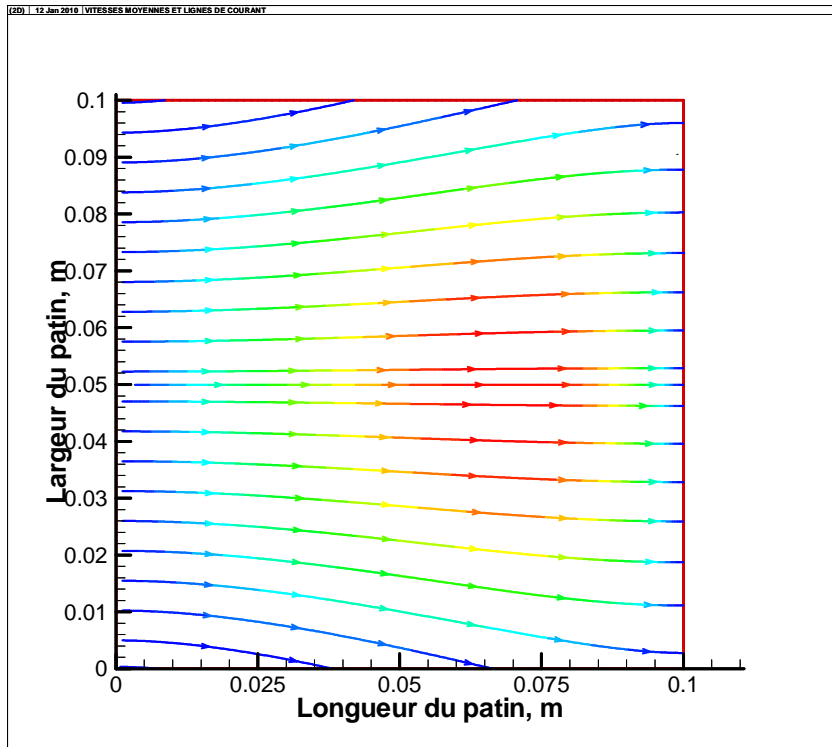


Fig. III.8 Représentation des lignes de courant de l'écoulement calculées par la technique d'homogénéisation dans le cas des rugosités longitudinales ($\tilde{\alpha} = 0.25, r = 2$)

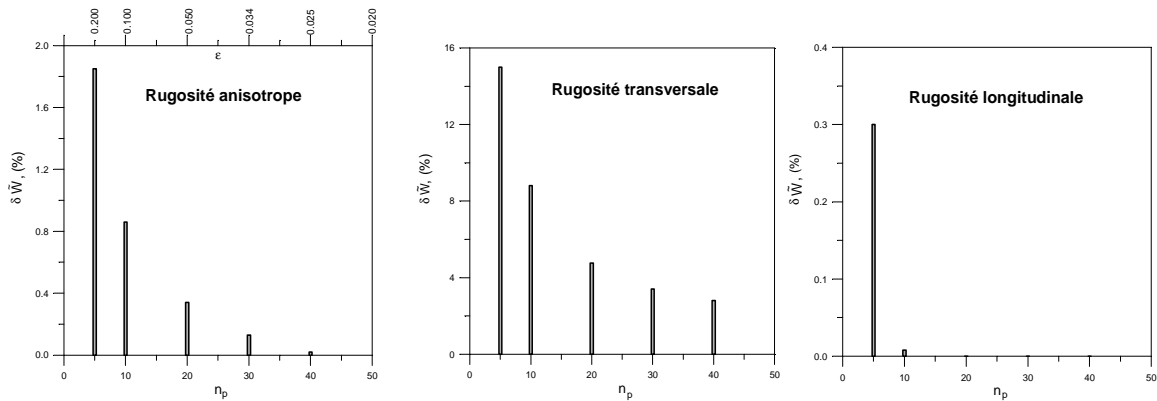


Fig. III.9 Evolutions de l'écart relatif entre les capacités de charges déterministes et homogénéisées en fonction du nombre de périodes.

Sur la base de ces résultats, nous pouvons conclure que pour des amplitudes de rugosités relativement faibles et un nombre important de rugosités, la technique d'homogénéisation, de mise en œuvre simple, est efficace du point de vue espace mémoire quelque soit la forme de rugosité considérée. Néanmoins, l'application de cette technique n'est possible que si la

distribution des rugosités sur la surface de contact est périodique. Ces constatations sont en bonne concordance avec celles de [43].

Dans le tableau III. 5, nous comparons les temps CPU exprimés en secondes des calculs effectués pour la détermination des solutions déterministes et homogénéisées sur un PC doté d'un processeur de fréquence 1.66 GHz. Nous remarquons que le temps de calcul nécessaire pour la convergence de la solution homogénéisée est plus important que celui de la solution déterministe aussi bien dans le cas lisse que rugueux. Cela s'explique par le fait que la résolution du problème homogénéisé nécessite le calcul de nombreuses intégrales et ce pour chaque point du domaine global. Une étude de sensibilité des maillages est alors nécessaire afin de déterminer les tailles optimales des différents maillages.

III.5 Conclusion

L'application du processus d'homogénéisation à l'équation de Reynolds par l'introduction d'un développement asymptotique multi-échelle de la pression a conduit à la résolution de deux problèmes : un problème local gouverné par trois équations aux dérivées partielles et un problème global régi par une équation aux dérivées partielles dont l'inconnue est la pression homogénéisée p_0 .

Nous avons ensuite étudié la convergence de la solution déterministe p_ϵ , obtenue par la résolution numérique directe de l'équation de Reynolds vers la solution homogénéisée p_0 pour les quatre formes de rugosités (transversales, longitudinales, isotropes et anisotropes). La comparaison des solutions obtenues (2D) et (3D) par la méthode d'analyse déterministe et d'homogénéisation a permis d'affirmer que la méthode d'homogénéisation est efficace quelque soit la forme de rugosité. En effet, pour des amplitudes relativement faibles et un nombre important de rugosité, la solution déterministe p_ϵ tend vers la solution homogénéisée p_0 pour les quatre formes de rugosités. Toutefois, une étude de sensibilité du maillage est nécessaire afin de réduire le temps de calcul.

CHAPITRE IV

Formulation mathématique du problème de lubrification hydrodynamique par fluide non newtonien à couple de contraintes

IV.1 Introduction

Dans les études de simulation des problèmes de lubrification, nous supposons généralement que le comportement des fluides lubrifiants est newtonien. Néanmoins, les applications pratiques de la lubrification montrent que le modèle de fluide newtonien ne constitue pas une approche satisfaisante des problèmes de lubrification avec des huiles dopées ou additivées. Des études expérimentales ont montré que les huiles contenant des additifs de viscosité ont un comportement rhéologique non-newtonien, leur viscosité diminue quand le taux de cisaillement auquel elles sont soumises augmente. Ainsi, leur écoulement ne peut être décrit par la théorie des milieux continus classique qui néglige la taille des particules. Dans la littérature, il existe plusieurs théories permettant de décrire l'écoulement de ces fluides dits à rhéologie complexe [2,44,45]. Parmi ces théories, la théorie des milieux continus de Vijay Kumar Stokes est la plus simple et la plus utilisée car elle permet de tenir compte de la taille des particules en mouvement et des couples de volume et de contrainte dus à la présence des additifs. Dans la présente étude, le lubrifiant est assimilé à un fluide incompressible à couple de contrainte pour lequel seuls les moments de contrainte qui s'ajoutent au force de surface (forces de pression et de frottement visqueux) sont pris en considération. Le modèle de fluide à couple de contrainte a été largement utilisé pour l'étude de certains problèmes de la lubrification hydrodynamique, hydrostatique et thermo-hydrodynamique. Lin [46-48] a étudié les effets du paramètre du couple de contrainte $\tilde{\ell} = \ell/c$ sur les caractéristiques du film amortisseur d'un palier à arc partiel et d'un palier complet de longueur finie en appliquant la théorie des milieux continus de V. K. Stokes. Les résultats théoriques obtenus montrent que la présence des couples de contrainte permet d'avoir une amélioration de la capacité de charge du palier. Oliver [49] a

montré expérimentalement que la présence de polymères dissous dans les lubrifiants entraîne une augmentation de la capacité de charge du film lubrifiant et une diminution du coefficient de frottement. Dans une autre étude, Mokhiamar et al. [50] ont étudié l'effet du paramètre du couple de contrainte sur les caractéristiques statiques d'un palier lisse en considérant l'élasticité du revêtement de surface. Ils ont montré qu'une augmentation du paramètre de couple de contrainte entraîne :

- une augmentation du pic de pression et de la portance du palier, celle-ci est plus importante à forte excentricité ;

- une diminution de l'angle de calage et du coefficient de frottement.

Ils montrent par ailleurs que le débit de fuite n'est pas influencé, sauf pour les grandes valeurs du coefficient d'élasticité ; c'est-à-dire dans le cas de revêtement caractérisés par de faibles valeurs du module d'élasticité. Les mêmes constatations ont également été faites plus récemment par Lahmar [51] dans le cas d'un palier lisse bicouche.

Lin [52] a étudié l'influence du paramètre du couple de contrainte sur la stabilité linéaire d'un palier lisse rigide. Il a montré que le système lubrifié par un fluide à couple de contrainte est plus stable que celui lubrifié par un fluide newtonien. Il convient de noter que toutes les études précédentes ont été effectuées en régime de lubrification isotherme, i.e. la température est supposée constante dans les deux milieux fluide et solide. Wang et al [53] ont utilisé une approche thermo-hydrodynamique pour étudier le comportement d'un palier lisse soumis à une charge statique lubrifié par un fluide à couple de contrainte. Ils ont conclu que la température du palier calculée dans le cas du fluide à couple de contrainte est plus faible que celle obtenue pour un fluide newtonien (non polaire). Dans un autre travail, les mêmes auteurs ont utilisé le même modèle de fluide pour étudier le comportement dynamique du palier de tête de bielle d'un moteur à combustion interne [54].

et à l'étude des écoulements de films minces entre parois fixes ou mobiles a permis de dériver une équation aux dérivées partielles linéaire de type elliptique appelée équation de Reynolds modifiée.

Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus de V. K. Stokes, puis nous dérivons moyennant les hypothèses de la lubrification par films minces les équations de base de la lubrification hydrodynamique par fluide polaire qui prennent en considération les couples de contraintes dus à la présence des additifs dans le lubrifiant.

IV.2 Bilan des efforts agissant sur un élément de fluide polaire

Considérons un volume matériel (B_0) délimité par la surface extérieure $(S_0 \equiv \partial B_0)$ figure IV.1. Imaginons une portion (B_1) qui est séparée du reste du volume (B_0) par la surface $(S_1 \equiv \partial B_1)$.

Selon le principe de contrainte d'Euler et de Cauchy, l'action de la portion du volume $(B_0 - B_1)$ sur la portion (B_1) est représentée par les composantes du vecteur contrainte (t_i) et les composantes du vecteur couple de contrainte (m_i) agissant sur la surface (S_1) délimitant (B_1)

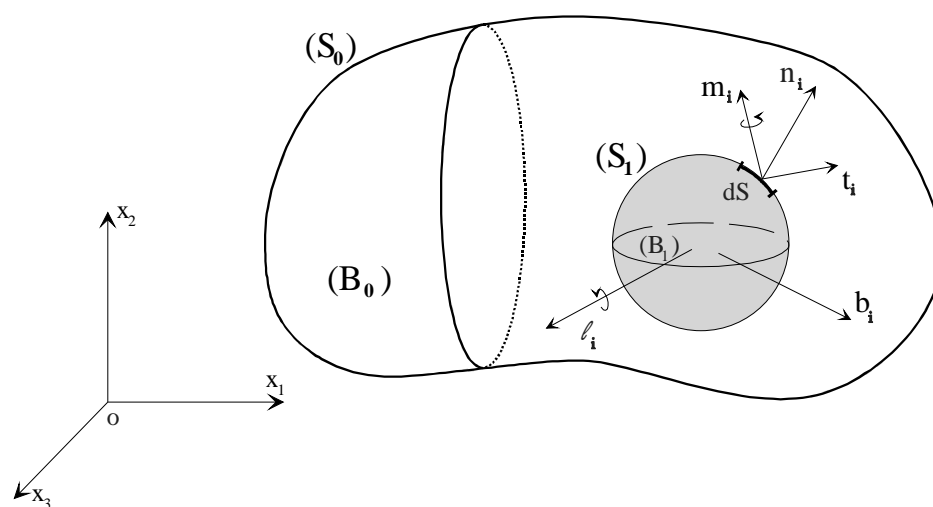


Fig. IV.1 Bilan des efforts agissant sur un élément de volume.

La théorie classique (non polaire) des fluides est basée sur l'hypothèse d'annulation des couples de contraintes m_i et des couples de volume par unité de masse ℓ_i .

Les couples de volume peuvent résulter de l'action d'un champ magnétique externe sur les particules magnétisées du matériau ou de l'action d'un champ électrique sur la matière polarisée.

Les couples de contrainte résultent des interactions entre les parties adjacentes du matériau en plus des forces colinéaires d'interaction. Le concept des couples de contrainte a été introduit pour la première fois en mécanique des milieux continus par Voigt [3] et Cosserat [4] au début du $XX^{\text{ème}}$ siècle. Il convient de noter que certains auteurs tels que Aero et Kurshinskii[55] (1960), Toupin [56] (1962) Mindlin et Tiersten [57] ont considéré dans

leurs travaux des matériaux élastiques à couple de contrainte.

IV.3 Equations de mouvement d'un fluide polaire

Pour un fluide compressible, l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0; \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{IV.1})$$

où : ρ est la masse volumique du fluide et u_i sont les composantes du champ de vitesse de l'écoulement et $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}$ qui est la dérivé particulaire de ρ .

Les équations de conservation de la quantité de mouvement et du moment de la quantité de mouvement (lois d'Euler) gouvernant le mouvement d'un fluide polaire sont :

$$\int_{B_1} \rho \gamma_i dv = \int_{\partial B_1} t_i ds + \int_{B_1} \rho b_i dv \quad \text{avec} \quad \gamma_i = \frac{D^2 x_i}{Dt^2} = \frac{Du_i}{Dt} \quad (\text{IV.2})$$

et

$$\int_{B_1} \rho \left(e_{ijk} (x_j \gamma_k) + \frac{DI_i}{Dt} \right) dv = \int_{\partial B_1} e_{ijk} x_j t_k dS + \int_{B_1} \rho e_{ijk} x_j b_k dv + \int_{\partial B_1} m_i dS + \int_{B_1} \rho \ell_i dv \quad (\text{IV.3})$$

où : e_{ijk} est le tenseur permutation antisymétrique d'ordre 3 et I_i est la quantité de mouvement angulaire intrinsèque par unité de masse.

L'équation (IV.3) exprime le principe du moment de la quantité de mouvement.

En utilisant la notation vectorielle, les équations (IV.2) et (IV.3) prennent la forme suivante :

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_1} \rho \vec{V} dv = \int_{\partial B_1} \vec{t} dS + \int_{B_1} \rho \vec{b} dv \quad (\text{IV.4})$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_1} (\vec{r} \wedge \rho \vec{V} + \rho \vec{I}) dv = \int_{\partial B_1} (\vec{r} \wedge \vec{t} + \vec{m}) dS + \int_{B_1} (\vec{r} \wedge \rho \vec{b} + \rho \vec{\ell}) dv \quad (\text{IV.5})$$

où $\vec{r} = \vec{OM}$ est le rayon vecteur.

Dans le cas non polaire (fluide newtonien), les équations (IV.3) et (IV.5) se réduisent à :

$$\int_{\partial B_1} e_{rmm} x_m t_n dS + \int_{B_1} e_{rmm} x_m b_n \rho dv = \frac{D}{Dt} \int_{B_1} e_{rmm} x_m \rho u_n dv \quad \text{avec } u_n = \frac{Dx_n}{Dt} \quad (\text{IV.6})$$

ou encore

$$\int_{\partial B_1} (\vec{r} \Lambda \vec{t}) dS + \int_{B_1} (\vec{r} \Lambda \rho \vec{b}) dv = \frac{D}{Dt} \int_{B_1} (\vec{r} \Lambda \rho \vec{V}) dv \quad (\text{IV.7})$$

$$\text{avec } t_n = T_{jn} n_j \quad (\text{IV.8})$$

L'application du théorème de la divergence ou de Gauss-Ostrogradsky :

$$\int_{\partial B_1} n_i T_{ij} dS = \int_{B_1} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} dv \quad \text{ou} \quad \int_{\partial B_1} \vec{V} \vec{n} dS = \int_{B_1} \vec{\nabla} \bullet \vec{V} dv \quad \text{et compte tenu de l'équation (IV.8),}$$

l'équation (IV.6) devient :

$$\int_{B_1} e_{rmm} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (x_m T_{jn}) + x_m \rho b_n \right] dv = \int_{B_1} e_{rmm} \frac{D}{Dt} (x_m u_n) \rho dv \quad (\text{IV.9})$$

Soit :

$$\int_{B_1} e_{rmm} \left[x_m \left(\frac{\partial T_{jn}}{\partial x_j} + \rho b_n \right) + \delta_{mj} T_{jn} \right] dv = \int_{B_1} e_{rmm} \left(u_m u_n + x_m \frac{D u_n}{Dt} \right) \rho dv \quad (\text{IV.10})$$

avec $u_m = \frac{Dx_m}{Dt}$ et δ_{mj} est le symbole de Kronecker.

Puisque $e_{rmm} u_m u_n = 0$ car $u_m u_n$ est symétrique ;

$\delta_{mj} T_{jn} = T_{mn}$ et comme $\frac{\partial T_{jn}}{\partial x_j} + \rho b_n = \rho \frac{D u_n}{Dt}$, l'équation (IV.10) se réduit à :

$$\int_{B_1} e_{rmm} T_{mn} dv = 0 \quad (\text{IV.11})$$

$$\text{Soit : } e_{rmm} T_{mn} = 0 \quad \forall (B_1) \quad (\text{IV.12})$$

$$\text{Pour } r = 1, T_{23} - T_{32} = 0 \quad (\text{IV.13})$$

$$\text{Pour } r = 2, T_{31} - T_{13} = 0$$

$$\text{Pour } r = 3, T_{12} - T_{21} = 0$$

Par conséquent, nous venons de démontrer que le tenseur de contrainte dans le cas non polaire est bien symétrique ; c'est-à-dire : $T_{ji} = T_{ij}$

A partir des équations (IV.2) et (IV.3) et le principe de contrainte d'Euler et de Cauchy, nous pouvons montrer l'existence du tenseur des couples de contrainte T_{ij} et du tenseur des couples de contrainte M_{ij} qui sont donnés par les relations suivantes :

$$t_i = n_j T_{ji} ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{IV.14})$$

$$m_i = n_j M_{ji} ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{IV.15})$$

Où : n_j sont les composantes de la normale à la surface sur laquelle agissent \vec{t} et \vec{m} tels que $\vec{t} = t_i \vec{e}_i$ et $\vec{m} = m_i \vec{e}_i$.

En substituant (IV.14) et (IV.15) dans (IV.2) et (IV.3) et après simplification, nous trouvons les lois de mouvement de Cauchy :

$$\rho \frac{D^2 x_i}{Dt^2} = T_{ji} + \rho b_i \quad (\text{IV.16})$$

$$M_{ji,j} + \rho \ell_i + e_{ijk} T_{jk} = \rho \frac{DI_i}{Dt} \quad (\text{IV.17})$$

Le tenseur de contrainte T_{mn} n'est plus symétrique, mais il peut être exprimé comme la somme d'une partie symétrique $T_{(mn)}$ et une partie antisymétrique notée $T_{[mn]}$:

$$\begin{cases} T_{(mn)} = \frac{1}{2} (T_{mn} + T_{nm}) \\ T_{[mn]} = \frac{1}{2} (T_{mn} - T_{nm}) \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

La quantité $e_{rnm} T_{mn}$ n'est plus nulle et s'exprime :

$$\text{Pour } r = 1, \quad e_{1mn} T_{mn} = 2T_{[23]}$$

$$\text{Pour } r = 2, \quad e_{2mn} T_{mn} = 2T_{[31]} \quad (\text{IV.19})$$

$$\text{Pour } r = 3, \quad e_{3mn} T_{mn} = 2T_{[12]}$$

Dans le cas où $I_i = 0$, l'équation (IV.17) prend la forme suivante :

$$M_{ji,j} + \rho \ell_i + e_{ijk} T_{jk} = 0 \quad (\text{IV.20})$$

En prenant le rotationnel de l'équation (IV.20), nous trouvons:

$$T_{[ji],j} = \frac{1}{2} \{ e_{ijs} M_{rs,rj}^{(D)} + e_{ijs} (\rho \ell_s)_{,j} \}$$

$$\text{où } T_{[ij]} = \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}) = T_{ij}^{(A)}$$

$$M_{ij}^{(D)} = M_{ij} - \frac{1}{3} M_{rr} \delta_{ij}$$

Puisque $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\nabla} \bullet \overline{\overline{M}}) = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\nabla} \bullet \overline{\overline{M}}^{(D)})$. En remplaçant dans l'équation (IV.16), nous obtenons :

$$\rho \frac{D^2 x_i}{Dt^2} = T_{(ji),j} + \frac{1}{2} \{ e_{ijs} M_{rs,rj}^{(D)} + e_{ijs} (\rho \ell_s)_{,j} \} + \rho b_i \quad (\text{IV.21})$$

$$\text{Où : } T_{(ij)} = \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) = T_{ij}^{(S)}$$

A partir de l'équation (IV.20), nous trouvons aussi :

$$T_{[ij]} = -\frac{1}{2} \{ e_{ijs} M_{rs,r} + \rho e_{ijs} \ell_s \} \quad (\text{IV.22})$$

Dans le cas où les couples de volume ℓ_s ($s = 1,2,3$) sont négligés, dans ce cas le fluide est dit fluide à couple de contrainte, la partie antisymétrique du tenseur de contrainte s'exprime alors :

$$T_{[ij]} = -\frac{1}{2} e_{ijs} M_{rs,r} \quad (\text{IV.23})$$

IV.4 Lois de conservation d'énergie pour un fluide polaire

L'équation d'énergie est fournie par la thermodynamique en appliquant le principe de conservation. Ce dernier s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{D}{Dt} (E + K) = P_e + \dot{Q} \quad (\text{IV.24})$$

D'autre part, le théorème de l'énergie cinétique (conséquence de l'équation de bilan de la

quantité de mouvement) s'écrit :

$$\frac{DK}{Dt} = P_e + P_i \quad (\text{IV.25})$$

Dans les équations (IV.24) et (IV.25), P_e et P_i sont respectivement les puissances réelles des actions extérieures et intérieures s'exerçant sur (B_1) , $E = \int_{B_1} \rho e dv$ est l'énergie interne attachée à (B_1) .

$$P_e = \int_{\partial B_1} \bar{t} \bar{V} dS + \int_{B_1} \rho \bar{b} \bar{V} dv + \int_{\partial B_1} \bar{m} \bar{\omega} dS + \int_{B_1} \rho \bar{\ell} \bar{\omega} dv \quad \text{et} \quad P_i = - \int_{B_1} \bar{T} : \bar{D} dv - \int_{B_1} \bar{M} : \bar{K} dv$$

$\dot{Q} = - \int_{\partial B_1} \bar{q} \bar{n} dS + \int_{B_1} \rho r dv$ est appelé le taux de chaleur reçu par (B_1) et $K = \frac{1}{2} \int_{B_1} \rho \bar{V} \bullet \bar{V} dv$ est l'énergie cinétique attachée à (B_1) .

Nous en déduisons, en soustrayant les deux relations (IV.24) et (IV.25) membre à membre :

$$\frac{DE}{Dt} = -P_i + \dot{Q} \quad (\text{IV.26})$$

La dérivée particulière de l'énergie cinétique et de la puissance réelle des actions extérieures ont été éliminées.

L'équation (IV.26), dite équation de bilan d'énergie interne, peut être interprétée de la façon suivante :

« la variation d'énergie interne est due à la puissance réelle des actions intérieures et à un apport de chaleur ».

Compte tenu des expressions de E et \dot{Q} , l'équation de bilan d'énergie (IV.26) prend la forme suivante :

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_1} \rho e dv = \int_{B_1} \bar{T} : \bar{L} dv + \int_{B_1} \bar{M} : \bar{K} dv + \int_{B_1} \rho r dv - \int_{\partial B_1} \bar{q} \bar{n} dS \quad (\text{IV.27})$$

ou encore :

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_1} \rho e \, dv = \int_{B_1} T_{ji} L_{ij} \, dv + \int_{B_1} M_{ji} K_{ij} \, dv + \int_{B_1} \rho r \, dv - \int_{\partial B_1} q_i n_i \, dS \quad (\text{IV.28})$$

où :

$T_{ji} = T_{(ji)} + T_{[ji]}$ est le tenseur de contrainte (non symétrique) et $L_{ij} = u_{i,j} = D_{ij} + W_{ij}$ est le tenseur gradient de vitesse décomposé en une partie symétrique et une partie antisymétrique.

$D_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ et $W_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$ étant respectivement les tenseurs des taux de déformation (symétrique) et tourbillon ou de vorticité (antisymétrique).

Le premier terme du second membre de l'équation (IV.28) s'écrit aussi :

$$\int_{B_1} (T_{(ji)} D_{ij} + T_{[ji]} W_{ij}) \, dv \quad (\text{IV.29})$$

avec $T_{[ji]} W_{ij} = e_{mni} T_{mn} \omega_i$ et $K_{ij} = \omega_{j,i}$ est le tenseur gradient de vorticité tel que $\omega_i = \frac{1}{2} e_{irs} u_{s,r} = \frac{1}{2} e_{irs} W_{rs}$ est la ième composante du vecteur tourbillon ou vorticité.

$q_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i}$ est la ième composante du vecteur densité de flux de chaleur et r est la densité

volumique du taux de chaleur reçu par (B_1) ou source de chaleur interne souvent négligée. Nous devons la prendre en compte pour les phénomènes de rayonnement (radiation) ou lorsque des sources de chaleur apparaissent par réaction chimique.

L'application du théorème de la divergence permet de transformer le dernier terme de l'équation (IV.28) :

$$\int_{\partial B_1} q_i n_i \, dS = \int_{B_1} q_{i,i} \, dv = - \int_{B_1} (\kappa T_{,i})_{,i} \, dv \quad (\text{IV.30})$$

Compte tenu de l'équation (IV.30), l'équation (IV.28) s'écrit sous la forme locale comme suit :

$$\rho \frac{De}{Dt} = T_{(ij)} D_{ij} + M_{ij} K_{ij} - q_{i,i} + \rho r \quad (\text{IV.31})$$

avec $M_{ij} K_{ij} = \left(M_{ij}^{(D)} + \frac{1}{3} M_{kk} \delta_{ij} \right) K_{ij} = M_{ij}^{(D)} K_{ij}$

Car $\delta_{ij} K_{ij} = K_{ii} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} = 0$, ou sous forme vectorielle : $\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \right) = 0$

Par conséquent, l'équation d'énergie (IV.31) devient :

$$\rho \frac{De}{Dt} = T_{(ij)} D_{ij} + M_{ij}^{(D)} K_{ij} - q_{i,i} + \rho r \quad (\text{IV.32})$$

Il est intéressant de noter que seulement la partie symétrique du tenseur de contrainte et le tenseur déviateur des couples de contrainte apparaissent dans l'équation d'énergie.

Dans le cas non polaire (i.e, fluide newtonien), l'équation d'énergie (IV.32) se simplifie et prend la forme suivante :

$$\rho \frac{De}{Dt} = T_{ij} D_{ij} - q_{i,i} + \rho r \quad (\text{IV.33})$$

avec $T_{ij} = T_{(ij)}$.

IV.5 Equations constitutives d'un fluide polaire

Dans le cas d'un fluide polaire de V. K. Stokes, la partie symétrique du tenseur des contraintes et le déviateur du tenseur des couples de contraintes s'expriment :

$$T_{(ij)} = -p \delta_{ij} + \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (\text{IV.34})$$

$$M_{ij}^{(D)} = 4\eta K_{ij} + 4\eta' K_{ji} \quad (\text{IV.35})$$

où $D_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$ est le taux de dilatation cubique.

Notons que la loi de comportement (IV.34) est identique à celle utilisée dans le cas d'un milieu non polaire. Les dimensions des caractéristiques du fluide λ et μ sont celles de la viscosité (i.e., $[\lambda] = [\mu] = ML^{-1}T^{-1}$) tandis que les dimensions de η et η' sont celles de la quantité de mouvement, à savoir :

$[\eta] = [\eta'] = MLT^{-1}$. Le rapport $\frac{\eta}{\mu}$ a la dimension d'une longueur au carré notée ℓ^2 ; c'est

à dire $\ell = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}$. Rappelons que le tenseur des couples de contrainte s'écrit :

$$M_{ij} = m \delta_{ij} + 4\eta K_{ij} + 4\eta' K_{ji} \quad (\text{IV.36})$$

avec : $m = \frac{1}{3}M_{rr}$

En remplaçant l'équation (IV.36) dans l'équation (IV.22), nous trouvons les expressions de la partie antisymétrique du tenseur de contrainte :

$$T_{[ij]} = -\frac{1}{2}e_{ijs}m_{,s} - 2\eta W_{ij,rr} - \frac{1}{2}\rho e_{ijs}\ell_{,s} \quad (IV.37)$$

L'équation (IV.37) est obtenue en supposant η et η' constants.

Si par hypothèse, le fluide est incompressible ; c'est-à-dire $u_{r,r} = 0$ et les couples de volumes $\ell_{,s}$ sont négligés, l'équation (IV.37) devient :

$$T_{[ij]} = -\frac{1}{2}e_{ijs}m_{,s} - 2\eta W_{ij,rr} \quad (IV.38)$$

où m est souvent pris égal à zéro ce qui permet d'écrire l'équation (IV.38) sous la forme :

$$T_{[ij]} = -2\eta W_{ij,rr} \quad (IV.39)$$

IV.6 Equations de mouvement d'un fluide polaire

Si nous considérons que les coefficients $\lambda, \mu, \eta, \eta'$ sont constants, la substitution des équations (IV.34) à (IV.36) dans l'équation (IV.21) permet d'obtenir les équations de mouvement du fluide polaire lorsque nous prenons en considération des couples de volume et des couples de contrainte) :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -p_{,i} + (\lambda + \mu)(u_{r,r})_{,i} + \mu u_{i,rr} - \eta u_{i,rrss} + \eta (u_{r,r})_{,iss} + \frac{1}{2}e_{irs}(\rho \ell_{,s})_{,r} + \rho b_i \quad (IV.40)$$

Pour un fluide incompressible ($u_{r,r} = 0$) et dans le cas où les forces et les couples de volume sont négligés, l'équation (IV.40) se simplifie et prend la forme suivante :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -p_{,i} + \mu u_{i,rr} - \eta u_{i,rrss} \quad (IV.41)$$

ou encore :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu\vec{\nabla}^2\vec{V} - \eta\vec{\nabla}^4\vec{V} \quad (\text{IV.42})$$

En coordonnées cartésiennes, l'équation (IV.41) et l'équation de conservation de la masse s'écrivent:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) - \\ \eta \left(\frac{\partial^4 u_1}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^4} \right) - 2\eta \left(\frac{\partial^4 u_1}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.43a})$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) - \\ \eta \left(\frac{\partial^4 u_2}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^4} \right) - 2\eta \left(\frac{\partial^4 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.43b})$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) - \\ \eta \left(\frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_3^4} \right) - 2\eta \left(\frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.43c})$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad (\text{IV.44})$$

En utilisant les hypothèses de la lubrification hydrodynamique établies pour ce type d'écoulement, les équations de mouvement de Stokes se réduisent à [Annexe A] :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - \eta \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^4} \quad (\text{IV.45a})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} - \eta \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^4} \quad (\text{IV.45b})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \quad (\text{IV.45c})$$

Les solutions générales des équations (IV.45a) et (IV.45b) sont de la forme :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3) = A_0 + A_1 x_3 + B_1 \cosh\left(\frac{x_3}{\ell}\right) + B_2 \sinh\left(\frac{x_3}{\ell}\right) + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_3^2 \\ u_2(x_1, x_2, x_3) = C_0 + C_1 x_3 + D_1 \cosh\left(\frac{x_3}{\ell}\right) + D_2 \sinh\left(\frac{x_3}{\ell}\right) + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} x_3^2 \end{cases} \quad (\text{IV.46})$$

IV.7 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée

La dérivation de l'équation de Reynolds modifiée pour un fluide polaire dans le cas du patin incliné de Mitchell (figure IV.2) est basée sur les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, 0) = U \\ u_2(x_1, x_2, 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.47a})$$

$$\left. \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right|_{x_3=0} = \left. \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right|_{x_3=0} = 0 \quad (\text{IV.47b})$$

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, h) &= 0 \\ (\text{IV.48a}) \quad u_2(x_1, x_2, h) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.48b})$$

$$\left. \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right|_{x_3=h} = \left. \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right|_{x_3=h} = 0 \quad (\text{IV.48c})$$

$$u_3(x_1, x_2, 0) = u_3(x_1, x_2, h) = 0 \quad (\text{IV.49})$$

L'équation (IV.47a) représente la condition limite de non glissement et les équations (IV.47b) et (IV.47c) représentent les conditions permettant l'annulation des couples de contraintes au niveau des parois.

L'utilisation des conditions limites (IV.47a) à (IV.48c) permet d'exprimer les vitesses de l'écoulement d'un fluide polaire par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = U \frac{x_3}{h} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \left(x_3(x_3 - h) + 2\ell^2 \left(1 - \frac{\cosh\left(\frac{2x_3 - h}{2\ell}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2\ell}\right)} \right) \right) \\ u_2 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} \left(x_3(x_3 - h) + 2\ell^2 \left(1 - \frac{\cosh\left(\frac{2x_3 - h}{2\ell}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2\ell}\right)} \right) \right) \end{array} \right. \quad (\text{IV.50})$$

En substituant les équations de la vitesse (IV.50) dans l'équation de continuité (IV.44) et en utilisant les conditions aux limites (IV.49) permet de dériver l'équation de Reynolds modifiée moyennant le théorème de Leibnitz (Eq. II.33) :

$$\bar{\nabla} \cdot (G^*(h, \ell) \bar{\nabla} p) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \text{sur } (D) = (0, L) \times (0, B) \quad (\text{IV.51})$$

où

$$G^*(h, \ell) = h^3 - 12\ell^2 h + 24\ell^3 \tanh\left(\frac{h}{2\ell}\right) \quad (\text{IV.52})$$

et $\Lambda = 6\mu U$

L'équation (IV.51) décrit le comportement d'un fluide à couple de contrainte non newtonien en régime d'écoulement stationnaire, isotherme et laminaire. Notons que pour un fluide newtonien, l'équation (IV.51) se réduit à l'équation de Reynolds classique qui s'écrit sous forme condensée comme suit :

$$\bar{\nabla} \cdot (h^3 \bar{\nabla} p) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \text{sur } D = (0, L) \times (0, B) \quad (\text{IV.53})$$

Le champ de pression doit satisfaire à l'équation (IV.51) ou (IV.53) et aux conditions limites suivantes :

$$p = 0 \quad \text{sur } \partial D \quad (\text{IV.54})$$

IV.8 Equation géométrique du film

La figure IV.2 représente schématiquement un patin incliné de Mitchell où seule la surface du patin fixe contiguë au film est rugueuse. Dans ces conditions, l'épaisseur du film s'exprime par:

$$h(x_1, x_2) = h_0 + h_1 \quad (\text{IV.55})$$

où :

$$h_0 = (h_{\min} - h_{\max}) \frac{x_1}{L} + h_{\max} \quad \text{tel que} \quad 0 \leq x_1 \leq L \quad (\text{IV.56})$$

Dans l'équation (IV.56) h_{\min} et h_{\max} représentent respectivement les épaisseurs minimale et maximale du film mesurée à l'entrée et la sortie du contact.

L'équation (IV.56) donne l'épaisseur nominale du film définie comme la distance entre la glissière et le niveau moyen de la surface du patin

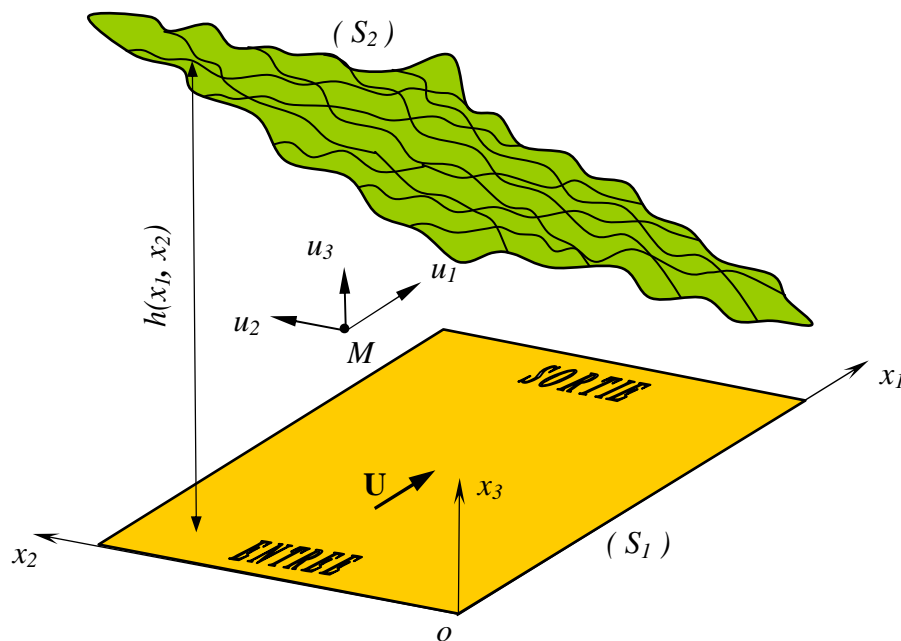


Fig. IV.2 Schéma du patin incliné rugueux.

h_1 représente l'amplitude des rugosités mesurées par rapport au niveau moyen de la surface rugueuse.

IV.9 Performances hydrodynamiques du contact

La détermination de la répartition de la pression dans le film lubrifiant p pour une valeur du rapport $r = \frac{h_{\max}}{h_{\min}} > 1$ permet de déterminer les performances statiques du contact, à savoir :

IV.9.1 Portance hydrodynamique

La portance de l'écoulement est obtenue en intégrant le champ de pression hydrodynamique p sur la surface du patin :

$$W = \int_0^L \int_0^B p(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \quad (\text{IV.57})$$

Cette relation est similaire à celle du chapitre II.

IV.9.2 Force de frottement

L'intégration des contraintes de cisaillement à la surface de la glissière permet de calculer la force de frottement :

$$F = \int_0^L \int_0^B \left(\mu \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right]_{x_3=0} - \eta \left[\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_3^3} \right]_{x_3=0} \right) dx_2 dx_1 = - \int_0^L \int_0^B \left(\mu \frac{U}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) dx_2 dx_1 \quad (\text{IV.58})$$

Cette relation est similaire à celle établie dans le cas newtonien dans le chapitre II .

IV.9.3 Vitesses moyennes de l'écoulement et débit de fuite

Les vitesses moyennes de l'écoulement et le débit de fuite moyen du patin sont calculés par :

$$\begin{cases} \bar{u}_1(x_1, x_2) = \frac{1}{h} \int_0^h u_1(x_1, x_2, x_3) dx_3 = \frac{U}{2} - \frac{G^*(h, \ell)}{12\mu h} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \bar{u}_2(x_1, x_2) = \frac{1}{h} \int_0^h u_2(x_1, x_2, x_3) dx_3 = - \frac{G^*(h, \ell)}{12\mu h} \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{cases} \quad (\text{IV.59})$$

$$\bar{Q} = |\bar{Q}_0| + |\bar{Q}_B| \quad (\text{IV.60})$$

où :

$$\bar{Q}_0 = \int_0^L [h\bar{u}_2]_{x_3=0} dx_1 \quad \text{et} \quad \bar{Q}_B = \int_0^L [h\bar{u}_2]_{x_3=B} dx_1 \quad (\text{IV.61})$$

\bar{Q}_0 et \bar{Q}_B étant les débits de fuite moyens aux extrémités libres du patin.

IV.9.4 Puissance dissipée

La puissance dissipée peut être calculée à partir de l'intégration de la fonction de dissipation visqueuse Φ [58] :

$$P = \int_0^L \int_0^B \int_0^h \Phi(x_1, x_2, x_3) dx_3 dx_2 dx_1 \quad (\text{IV.62})$$

où

$$\Phi = \lambda(\nabla_i u_i)^2 + \frac{\mu}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)^2 - \eta(\nabla_r \nabla_r e_{kmn} \nabla_m u_n)(e_{kij} \nabla_i u_j) \quad (\text{IV.63})$$

avec $\nabla_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$ qui sont les composantes cartésiennes de l'opérateur différentiel $\vec{\nabla}$.

En utilisant les hypothèses de la lubrification hydrodynamique, l'expression de Φ se réduit à:

$$\Phi = \mu \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 - \ell^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_3^3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_3^3} \right) \right] \quad (\text{IV.64})$$

Lorsque ℓ tend vers zéro (cas newtonien), l'équation. (IV.64) se réduit à (II.24).

La puissance dissipée totale P comprend deux termes correspondant aux effets de Hagen-Poiseuille et de Couette qui s'expriment comme suit:

$$P_{\text{Hagen-Poiseuille}} = \int_0^L \int_0^B \frac{G^*(h, \ell)}{12\mu} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_2 dx_1 \quad (\text{IV.65})$$

$$P_{\text{Couette}} = \int_0^L \int_0^B \frac{\mu U^2}{h} dx_2 dx_1 \quad (\text{IV.66})$$

IV. 10 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté en détail les lois fondamentales de la théorie des milieux continus de V. K. Stokes, à savoir : les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, du moment de la quantité de mouvement et de l'énergie ainsi que les lois constitutives en vue de décrire l'écoulement d'un fluide polaire en prenant en considération les couples de contrainte. L'existence de ces derniers est due à la présence des polymères additifs dans les huiles lubrifiantes. Ce type de fluide, est appelé fluide à couple de contrainte, se caractérise par le paramètre $\ell = \sqrt{\eta/\mu}$ qui représente physiquement la longueur de la chaîne du polymère. Sur la base de cette théorie, nous avons dérivé à partir des équations de mouvement et de continuité écrite dans le cas incompressible une équation aux dérivées partielles du second ordre linéaire appelée équation de Reynolds modifiée dont l'inconnue principale est la pression dans le fluide.

Ce chapitre a été complété par la formulation des caractéristiques hydrodynamiques du contact, à savoir : la puissance dissipée et le débit de fuite dont les expressions diffèrent de celles établies dans le cas newtonien (Cf. Chapitre II).

Dans ce qui suit, nous allons appliquer la théorie d'homogénéisation à l'équation de Reynolds modifiée afin de résoudre le problème de lubrification hydrodynamique dans les contacts rugueux lubrifiés par des fluides à couples de contrainte dont le comportement est non newtonien.

CHAPITRE V

Homogénéisation de l'équation de Reynolds non newtonienne

V.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous appliquons la technique d'homogénéisation pour l'analyse théorique du problème de lubrification hydrodynamique dans les contacts rugueux lubrifiés par des fluides non newtoniens. Nous supposons, par hypothèse, que la surface stationnaire du contact est rugueuse tandis que la surface mobile est parfaitement lisse. Cette hypothèse nous permettra d'utiliser l'équation de Reynolds dérivée, dans le chapitre précédent sans la prise en considération du terme transitoire figurant dans le second membre de l'équation. Pour pouvoir appliquer cette technique, nous supposerons d'autre part que la distribution des rugosités est périodique sur toute la surface du contact. Nous montrerons que le processus d'homogénéisation de l'équation de Reynolds conduit à la résolution par la méthode des différences finies de deux problèmes, à savoir :

- Un problème local gouverné par trois équations aux dérivées partielles du second ordre dont les inconnues sont des fonctions périodiques locales ;
- Un problème global régi par une équation aux dérivées partielles dont l'inconnue est la pression homogénéisée supposée nulle sur la frontière du domaine d'intégration.

La validation de la technique d'homogénéisation sera effectuée en comparant les résultats obtenus à partir de cette technique avec ceux issus de l'application de la méthode déterministe classique dans le cas d'un patin incliné de Mitchell en considérant trois formes de rugosités : transversales, longitudinales et anisotropes ayant la même rugosité RMS.

L'étude des effets combinés des rugosités et des couples de contraintes existant dans le fluide sur les performances hydrodynamiques du contact tels que la portance, le nombre de frottement, la puissance dissipée et le débit de fuite sera aussi envisagé.

V.2 Equation de base de la lubrification hydrodynamique par fluide à couple de contrainte

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que pour un fluide à couple de contrainte, l'équation de Reynolds modifiée s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{\nabla} \cdot (G_\varepsilon \vec{\nabla} p_\varepsilon) = 6\mu \vec{\nabla} \cdot (h_\varepsilon \vec{U}) \text{ sur } (D) = (0, L) \times (0, B) \quad (\text{V.1})$$

où

$$G_\varepsilon(h_\varepsilon, \ell) = h_\varepsilon^3 - 12\ell^2 h_\varepsilon + 24\ell^3 \tanh\left(\frac{h_\varepsilon}{2\ell}\right) \quad (\text{V.2})$$

et $\Lambda = 6\mu U$

L'équation (V.1) s'écrit aussi :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} ; \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \left\{ \begin{array}{l} G_\varepsilon \quad \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial x_1} \\ G_\varepsilon \quad \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial x_2} \end{array} \right\} = 6\mu \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} ; \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle \left\{ \begin{array}{l} h_\varepsilon (U_{11} + U_{21}) \\ h_\varepsilon (U_{12} + U_{22}) \end{array} \right\} \quad (\text{V.3})$$

où :

h_ε est l'épaisseur du film exprimée par l'équation (III.3).

La pression déterministe p_ε doit satisfaire à l'équation (V.1) et à la condition de Dirichlet (III.4).

V.3 Application au patin incliné

V.3.1. Cas du patin de dimensions finies (3D)

Dans le cas du patin incliné (figure III.1), les équations de la lubrification hydrodynamique prennent la forme suivante :

$$\vec{\nabla} \cdot (G_\varepsilon \vec{\nabla} p_\varepsilon) = \Lambda \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x_1} \quad (\text{V.4})$$

où h_ε est définie par l'équation (III.6)

La discrétisation de l'équation (V.4) par la méthode des différences finies centrées (figure III.3) conduit au système d'équations algébriques suivant :

$$a_{ij} p_{\varepsilon_{i+1,j}} + b_{ij} p_{\varepsilon_{i-1,j}} + c_{ij} p_{\varepsilon_{i,j+1}} + d_{ij} p_{\varepsilon_{i,j-1}} - e_{ij} p_{\varepsilon_{ij}} = f_{ij} \quad (\text{V.5})$$

où :

$$a_{ij} = \frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta x_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial x_1} \right)_{ij}}{\Delta x_1}; \quad b_{ij} = \frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta x_1^2} - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial x_1} \right)_{ij}}{\Delta x_1}; \quad c_{ij} = \frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta x_2^2} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial x_2} \right)_{ij}}{\Delta x_2}; \quad d_{ij} = \frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta x_2^2} - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial x_2} \right)_{ij}}{\Delta x_2};$$

$$e_{ij} = 2G_{\varepsilon_{ij}} \left(\frac{1}{\Delta x_1^2} + \frac{1}{\Delta x_2^2} \right); \quad f_{ij} = \Lambda \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial x_1} \right)_{ij}$$

Δx_i étant respectivement les pas du maillage suivant les directions x_i .

Comme dans le cas newtonien, le système d'équations (V.5) résultant de la discrétisation de l'équation de Reynolds modifiée (V.4) peut être résolu par la méthode itérative du gradient conjugué ou de la méthode des sur-relaxations successives (S.O.R) de Gauss-Seidel.

V.3.2. Cas du patin de largeur infinie (2D)

Lorsque la largeur de patin suivant x_2 est très grande devant sa longueur (figure III.4), l'équation de Reynolds (V.4) se réduit à :

$$\frac{d}{dx_1} \left(G_{\varepsilon} \frac{dp_{\varepsilon}}{dx_1} \right) = \Lambda \frac{dp_{\varepsilon}}{dx_1} \quad (\text{V.6})$$

avec : $h_{\varepsilon} = h_0(x_1) + h_1 \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right)$

Les conditions limites associées à l'équation (V.6) sont $p_{\varepsilon}(x_1=0) = p_{\varepsilon}(x_1=L) = 0$.

La solution de l'équation (V.6) est recherchée numériquement à l'aide de la méthode des différences finies centrées.

V.4 Application de la méthode d'homogénéisation

L'application du processus d'homogénéisation décrit dans le chapitre III conduit aux équations des dérivées partielles suivantes :

- Equations aux dérivées partielles locales :

$$\vec{\nabla}_y \bullet (G_\varepsilon \vec{\nabla}_y v_1) = -\frac{\partial G_\varepsilon}{\partial y_1} \quad (\text{V.7})$$

$$\vec{\nabla}_y \bullet (G_\varepsilon \vec{\nabla}_y v_2) = -\frac{\partial G_\varepsilon}{\partial y_2} \quad (\text{V.8})$$

$$\vec{\nabla}_y \bullet (G_\varepsilon \vec{\nabla}_y v_3) = \Lambda \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial y_1} \quad (\text{V.9})$$

- Equation aux dérivées partielles globale :

$$\vec{\nabla}_x \bullet (A(x) \vec{\nabla} p_0) = \vec{\nabla}_x \bullet \boldsymbol{\theta}(x) \text{ sur } (D) \quad (\text{V.10})$$

$$\text{avec } A = \begin{bmatrix} a_{11}(x_1, x_2) & a_{12}(x_1, x_2) \\ a_{21}(x_1, x_2) & a_{22}(x_1, x_2) \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\theta} = \begin{Bmatrix} \theta_1(x_1, x_2) \\ \theta_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix}$$

Les coefficients a_{ij} et θ_i sont définis par :

$$a_{11} = \int_Y G_\varepsilon \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right) dY ; \quad a_{12} = \int_Y G_\varepsilon \frac{\partial v_2}{\partial y_1} dY ; \quad a_{21} = \int_Y G_\varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial y_2} dY ; \quad a_{22} = \int_Y G_\varepsilon \left(1 + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} \right) dY$$

$$\theta_1 = \int_Y \left(\Lambda h_\varepsilon - G_\varepsilon \frac{\partial v_3}{\partial y_1} \right) dY ; \quad \theta_2 = - \int_Y G_\varepsilon \frac{\partial v_3}{\partial y_2} dY \quad (\text{V.11})$$

La pression homogénéisée p_0 doit satisfaire à l'équation (V.10) ainsi qu'à la condition de Dirichlet $p_0 = 0$ sur la frontière ∂D .

Dans le cas lisse, c'est-à-dire : $h(x) = h_0(x)$ l'équation (V.10) se réduit à l'équation de Reynolds modifiée classique, i.e. :

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial x_1} (h_0(x)) - \vec{\nabla} \bullet (G_0^*(x) \vec{\nabla} p_0) = 0 \quad (\text{V.12})$$

La discrétisation par la méthode des différences finies centrées des équations locales (V.7) à (V.9) sur la cellule unitaire Y (figure III.5) conduit à un système d'équations similaire à (III.32) où les coefficients α_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} , δ_{ij} et ε_{ij} sont définis comme suit:

$$\alpha_{ij} = \frac{G_{\varepsilon_{ij}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_1} \right)_{ij}}{\Delta y^2} ; \beta_{ij} = \frac{G_{\varepsilon_{ij}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_1} \right)_{ij}}{\Delta y^2} ; \gamma_{ij} = \frac{G_{\varepsilon_{ij}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_2} \right)_{ij}}{\Delta y^2} ;$$

$$\delta_{ij} = \frac{G_{\varepsilon_{ij}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_2} \right)_{ij}}{\Delta y^2} ; \varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_1} \right)_{ij}}{4G_{\varepsilon_{ij}} / \Delta y^2} ; \varepsilon_{ij}^{(2)} = \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_2} \right)_{ij}}{4G_{\varepsilon_{ij}} / \Delta y^2} ; \varepsilon_{ij}^{(3)} = \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_1} \right)_{ij}}{4G_{\varepsilon_{ij}} / \Delta y^2}$$

L'application de la méthode des différences finies centrées à l'équation (V.10) conduit à une équation discrétisée similaire à l'équation (III.34).

Notons que dans le cas du patin infiniment large, les équations locales et globales se réduisent à :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(G_{\varepsilon} \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = - \frac{\partial (G_{\varepsilon})}{\partial y} \quad (V.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(G_{\varepsilon} \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) = \Lambda \frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial y}$$

$$\frac{d\theta(x)}{dx} - \frac{d}{dx} \left(A(x) \frac{dp_0}{dx} \right) = 0 \quad (V.14)$$

où :

$$\theta(x) = \int_Y \left(\Lambda h_{\varepsilon}(x, y) - G_{\varepsilon}(x, y) \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) dy ; A(x) = \int_Y G_{\varepsilon} \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dy$$

Où : $(Y) = (0,1)$

V.5 Etude paramétrique : Effets des rugosités de surface et des couples de contrainte sur les performances hydrodynamiques du patin

Un programme de calcul a été élaboré en se basant sur l'algorithme d'homogénéisation exposé dans le présent chapitre en vue de simuler le comportement du patin hydrodynamique rugueux utilisant un fluide à couple de contrainte comme lubrifiant. Les données de cette étude sont reportées dans le tableau III.3. A ces données, nous avons rajoutées les valeurs de la constante physique du fluide η responsable de la présence des couples de contrainte qui sont : $\eta = 0., 16 \times 10^{-14}$ et $4.32 \times 10^{-14} \text{ N.s}$

Les valeurs de ℓ correspondantes sont respectivement égales à $\ell = 0., 4 \times 10^{-7}$ et $1.2 \times 10^{-6} \text{ m}$

Notons que la valeur nulle de η correspond au cas newtonien.

La figure V.1 représente les évolutions des performances hydrodynamiques du contact en fonction de l'amplitude relative des rugosités pour les différentes formes de rugosité (longitudinales, transversales et anisotropes) représentées sur la figure III.2. Les calculs ont été effectués par la méthode d'homogénéisation pour trois valeurs du paramètre de couple de contrainte adimensionné, à savoir : $\tilde{\ell} = \ell/h_{\min} = 0., 0.1$ et 0.3 . Nous observons que pour les rugosités transversales et anisotropes, la pression maximale, la portance, la puissance dissipée et le nombre de frottement sont sensiblement influencés par l'amplitude des rugosités aussi bien pour le cas newtonien que non newtonien. Cependant, ces paramètres ne sont pas affectés de façon significative par l'amplitude dans le cas des rugosités longitudinales.

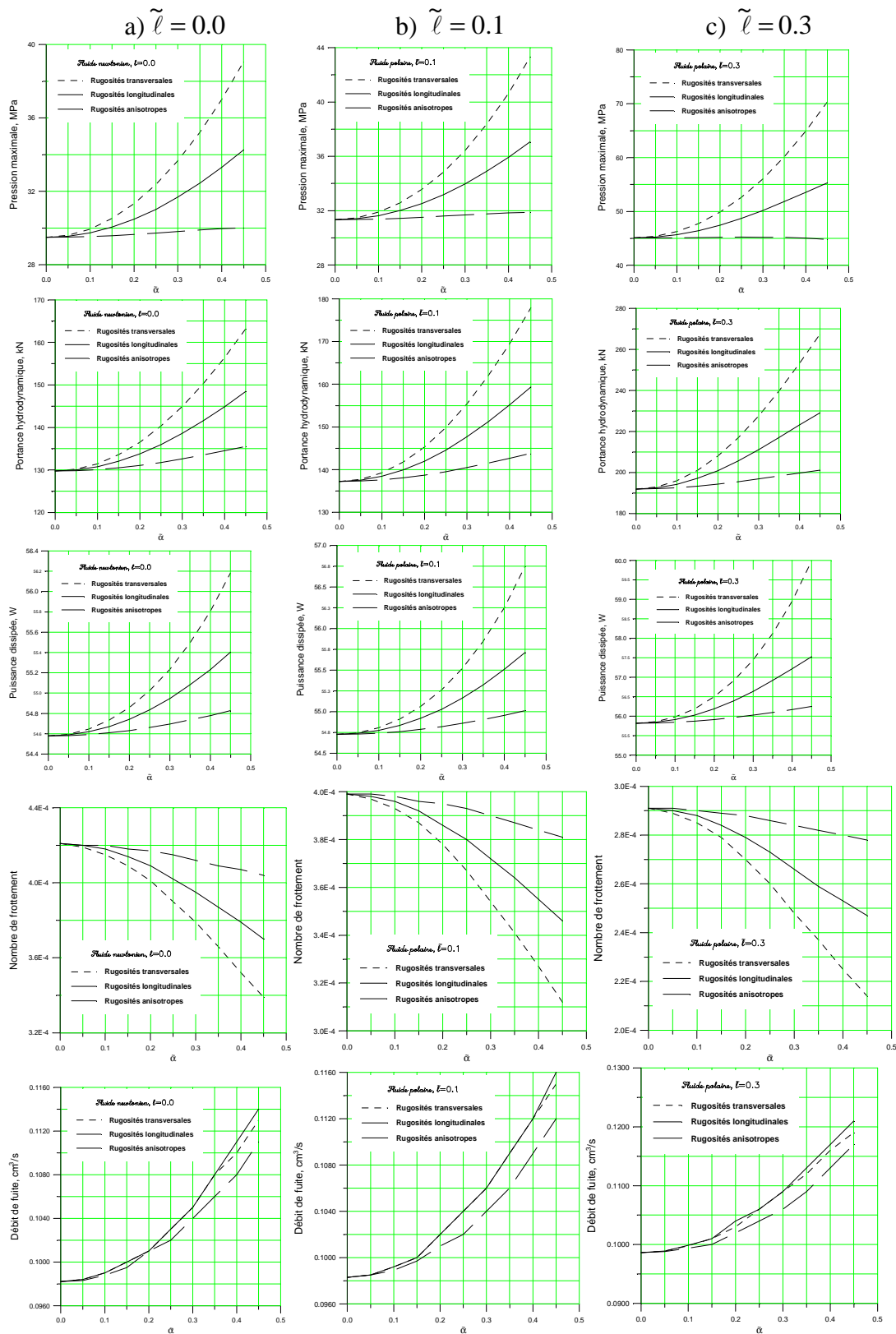


Fig. V.1 Variations des performances hydrodynamiques du contact en fonction de l'amplitude relative des rugosités pour différentes valeurs du paramètre de couple de contrainte.

Les résultats obtenus montrent aussi que l'amplitude des rugosités n'a pas d'effet appréciable sur le débit de fuite quelque soit la forme de rugosité. Il est intéressant de souligner que pour une même valeur de l'amplitude, la pression maximale et la portance hydrodynamique calculées dans le cas des rugosités transversales sont nettement supérieures à celles obtenues avec les rugosités anisotropes et longitudinales.

Le tableau V.1 donne une quantification des effets des différentes rugosités sur les performances du patin. Les valeurs de ces performances correspondant à deux valeurs de l'amplitude relative de la rugosité $\tilde{\alpha} = 0$. (cas lisse) et $\tilde{\alpha} = 0.45$ obtenues dans le cas newtonien $\tilde{\ell} = 0$. et non newtonien $\tilde{\ell} = 0.3$

Tableau V.1 Comparaisons des performances hydrodynamiques obtenues dans le cas lisse et rugueux pour deux valeurs du paramètre de couple de contrainte.

| Performances | Type de rugosité | $\tilde{\ell} = 0.0$ | | $\tilde{\ell} = 0.3$ | |
|--------------------------------|--------------------------------------|----------------------|--------------------|----------------------|--------------------|
| | | Valeur | Ecart relatif, (%) | Valeur | Ecart relatif, (%) |
| Pression maximale, (MPa) | Cas lisse ($\tilde{\alpha} = 0.0$) | 29.5 | | 45.1 | |
| | Transversale | 39.06 | +32.4 | 70.35 | +56 |
| | Longitudinale | 30.00 | +1.7 | 45.00 | -0.22 |
| | Anisotrope | 34.50 | +16.9 | 55.30 | +22.62 |
| Portance, (kN) | Cas lisse ($\tilde{\alpha} = 0.0$) | 130 | | 192 | |
| | Transversale | 163.0 | +25.40 | 267.4 | +39.27 |
| | Longitudinale | 136.0 | +4.61 | 200.0 | +4.20 |
| | Anisotrope | 148.4 | +14.15 | 229.1 | +19.32 |
| Puissance dissipée, (W) | Cas lisse ($\tilde{\alpha} = 0.0$) | 54.6 | | 55.8 | |
| | Transversale | 56.2 | +2.93 | 60.0 | +7.53 |
| | Longitudinale | 54.8 | +0.37 | 56.2 | +0.72 |
| | Anisotrope | 55.4 | +1.46 | 57.5 | +3.05 |
| Nombre de frottement, (-) | Cas lisse ($\tilde{\alpha} = 0.0$) | 0.00042 | | 0.00029 | |
| | Transversale | 0.00034 | -19.05 | 0.00021 | -27.60 |
| | Longitudinale | 0.00040 | -4.76 | 0.00028 | -3.45 |
| | Anisotrope | 0.00037 | -11.90 | 0.00025 | -13.79 |
| Débit de fuite, (cm^3 / s) | Cas lisse ($\tilde{\alpha} = 0.0$) | 0.098 | | 0.098 | |

La figure V.2 montre les variations des performances hydrodynamiques en fonction du rapport r pour trois valeurs du paramètre de couple de contrainte adimensionné

$\tilde{\ell} = 0., 0.1$ et 0.3 dans le cas d'un patin lisse et d'un patin rugueux. Précisons que l'épaisseur minimale du film à la sortie du contact est constante et prise égale à 4 microns pour tous les calculs. La variation de r est obtenue en faisant varier l'épaisseur maximale du film à l'entrée du contact de 4 à 24 microns.

Les résultats obtenus montrent:

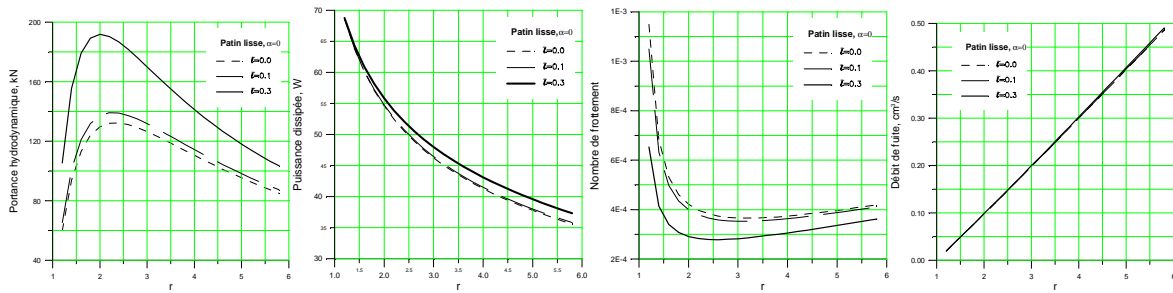
- une augmentation importante de la portance hydrodynamique avec le paramètre du couple de contrainte quelque soit la valeur de r ; cette augmentation est plus significative dans le cas des rugosités transversales et anisotropes;
- une augmentation de la puissance dissipée avec le paramètre du couple de contrainte; cette augmentation est plus importante dans le cas des rugosités transversales;
- une diminution du nombre de frottement avec le paramètre de couple de contrainte quelque soit la valeur de r .

Ces résultats montrent aussi que les couples de contrainte dus à la présence des additifs dans le lubrifiant n'ont pas d'effets appréciables sur le débit de fuite.

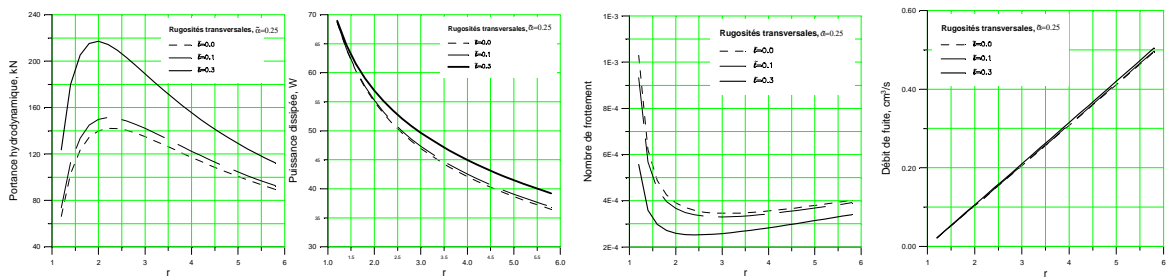
Les résultats illustrés dans la figure V.3 montrent que les rugosités transversales permettent d'améliorer la capacité de charge du patin et de réduire le nombre de frottement.

Nous pouvons conclure que la présence des additifs de viscosité dans les huiles lubrifiantes permet d'améliorer la capacité de charge du patin et de réduire le frottement dans le contact surtout pour les additifs de longues chaînes moléculaires

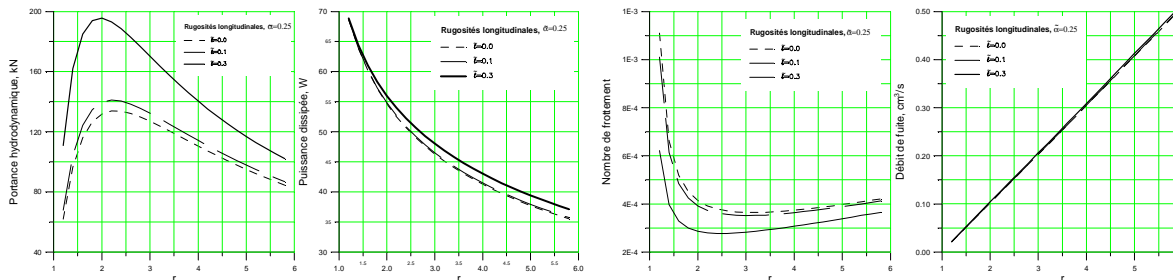
a) Patin lisse



b) Rugosités transversales



c) Rugosités longitudinales



d) Rugosités anisotropes

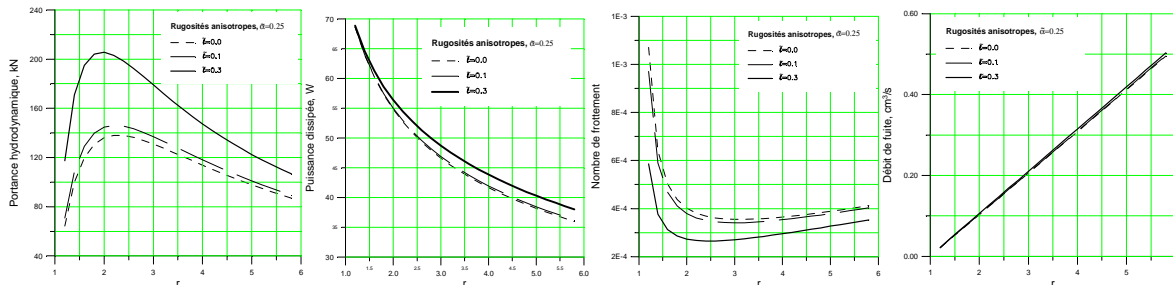


Fig. V.2 Variations des performances hydrodynamiques du contact en fonction du rapport r pour les différentes formes de rugosités

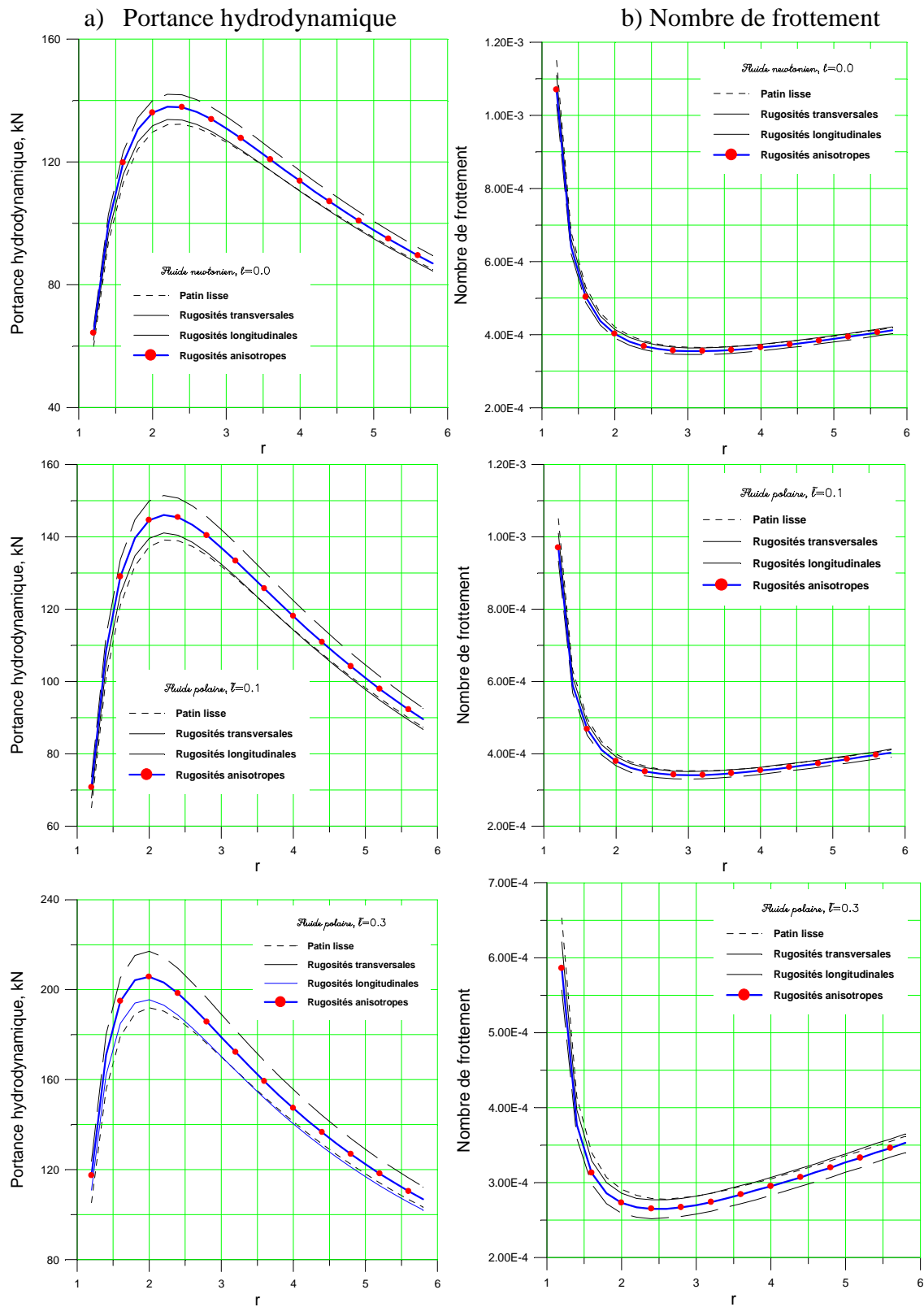


Fig. V.3 Variations de la portance hydrodynamique du contact et du nombre de frottement en fonction du rapport r pour les différentes formes de rugosités.

V.6 Conclusion

Au début de ce chapitre, nous avons appliqué le processus d'homogénéisation à l'équation de Reynolds modifiée écrite pour un fluide non newtonien à couple de contrainte.

L'étude de l'influence des couples de contrainte et des rugosités de surface effectuée en utilisant la méthode d'homogénéisation a conduit aux conclusions suivantes:

- La présence des rugosités entraîne une augmentation du pic de pression surtout dans le cas des rugosités transversales ce qui confirme bien les résultats obtenus par Dobrica *et al.* en utilisant les modèles déterministes et stochastiques [37].
- Pour les rugosités transversales et anisotropes, la pression maximale, la portance et le nombre de frottement sont sensiblement influencés par l'amplitude des rugosités aussi bien pour le cas newtonien que non newtonien, i. e. polaire. Cependant, ces paramètres ne sont pas affectés de façon significative par l'amplitude dans le cas des rugosités longitudinales.
- Pour une même valeur de l'amplitude, la pression maximale et la portance hydrodynamique calculées dans le cas des rugosités transversales sont supérieures à celles obtenues avec les rugosités anisotropes et longitudinales.
- La portance hydrodynamique augmente de façon importante avec le paramètre du couple de contrainte; cette augmentation est importante dans le cas des rugosités transversales et anisotropes.
- Une augmentation de la puissance dissipée avec le paramètre du couple de contrainte dans le cas lisse et rugueux.
- Une diminution du nombre de frottement avec le paramètre du couple de contrainte.
- les couples de contrainte dus à la présence des additifs dans le lubrifiant n'affectent pas de façon significative le débit de fuite.

Conclusions générales et perspectives

L'étude entreprise dans cette thèse visait à développer un modèle de simulation numérique basé sur le processus d'homogénéisation de l'équation de Reynolds modifiée considérée comme l'équation de base de la lubrification hydrodynamique. Ce modèle permet de prendre en considération la géométrie locale du contact ainsi que le comportement non newtonien du fluide lubrifiant.

La recherche bibliographique effectuée dans le premier chapitre a permis d'une part, de situer notre contribution par rapport aux travaux déjà réalisés dans le domaine d'analyse de contacts lubrifiés prenant en compte la géométrie locale ; c'est-à-dire les défauts de forme et de rugosité existant au niveau des surfaces. La littérature technique offre trois types d'analyse des contacts lubrifiés rugueux que nous avons répertoriés comme suit :

- l'analyse stochastique,
- l'analyse déterministe,
- l'analyse d'homogénéisation.

Notre choix s'est porté sur la technique d'homogénéisation car cette technique est rigoureuse et la mieux adaptée dans le cas des rugosités anisotropes dont la distribution est périodique. D'autre part, par comparaison à la méthode déterministe, la technique d'homogénéisation ne nécessite pas de maillages très fins ; c'est-à-dire des moyens de calcul importants pour prendre en compte l'effet de la rugosité.

Dans le chapitre 3, le processus d'homogénéisation a été appliqué à l'équation de Reynolds (2D) newtonienne établie au deuxième chapitre à partir des équations de Navier-Stokes écrites pour un écoulement de faible épaisseur (film mince) et l'équation de continuité. Dans le chapitre 5, le même processus a été aussi appliqué à l'équation de Reynolds modifiée dans le cas du fluide non newtonien à couple de contrainte.

L'homogénéisation de l'équation de Reynolds dans le cas newtonien ou non newtonien, basée sur un développement asymptotique multi-échelle de la pression, a conduit à l'écriture d'un système de quatre équations aux dérivées partielles gouvernant deux types de problème ; un problème local (échelle microscopique) et un autre global (échelle macroscopique).

Les étapes du processus d'homogénéisation ainsi que le traitement numérique des équations différentielles par la méthode des différences finies ont été exposées explicitement aux chapitres 3 et 5.

Dans un premier temps, nous avons étudié la convergence de la solution déterministe obtenue par la résolution numérique directe de l'équation de Reynolds vers la solution homogénéisée pour les trois formes de rugosités : transversales, longitudinales et anisotropes. La comparaison des solutions obtenues par les méthodes déterministe et d'homogénéisation a permis de conclure que la méthode d'homogénéisation est efficace du point de vue espace mémoire quelque soit la forme de rugosité. En effet, pour des amplitudes relativement faibles et un nombre important de rugosités, la solution déterministe p_ε obtenue par la résolution directe de l'équation de Reynolds newtonienne ou non newtonienne tend vers la solution homogénéisée p_0 pour les trois formes de rugosités considérées.

Dans le dernier chapitre de cette thèse, une étude inédite des effets combinés des couples de contrainte et des rugosités de surface a été menée en utilisant la méthode d'homogénéisation dans le cas du patin incliné de Mitchell. Les résultats obtenus nous ont conduits aux constatations et conclusions suivantes:

- La présence des rugosités entraîne une augmentation du pic de pression surtout dans le cas des rugosités transversales. Ceci est confirmé par les résultats publiés dans la littérature en utilisant les modèles déterministes et stochastiques.
- Pour les rugosités transversales et anisotropes, la pression maximale, la portance et le nombre de frottement sont sensiblement influencés par l'amplitude des rugosités aussi bien pour le cas newtonien que non newtonien. Cependant, ces paramètres ne

sont pas affectés de façon significative par l'amplitude dans le cas des rugosités longitudinales.

- Pour une même valeur de l'amplitude, la pression maximale et la portance hydrodynamique calculées dans le cas des rugosités transversales sont supérieures à celles obtenues avec les rugosités anisotropes et longitudinales.
- La portance hydrodynamique augmente de façon importante avec le paramètre du couple de contrainte; cette augmentation est plus significative dans le cas des rugosités transversales et anisotropes.
- Une augmentation de la puissance dissipée avec le paramètre du couple de contrainte dans le cas lisse et rugueux.
- Une diminution du nombre de frottement avec le paramètre du couple de contrainte.
- Les couples de contrainte dus à la présence des additifs dans le lubrifiant n'affectent pas de façon significative le débit de fuite.
- A travers les simulations effectuées, il s'est avéré que la méthode itérative du gradient conjugué converge plus rapidement que la méthode itérative de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation.
- L'emploi de la méthode itérative de Gauss-Seidel nécessite la détermination au travers des expérimentations numériques de la valeur optimale du facteur de sur-relaxation afin d'assurer une convergence plus rapide du processus.

L'étude théorique menée dans le cadre de cette thèse est d'un intérêt pratique certain car elle constitue une meilleure compréhension du comportement des contacts hydrodynamiques rugueux lubrifiés par des huiles minérales additivées.

Les prolongements de cette étude pouvant être envisagés sont :

- i) la prise en considération de la rugosité de la surface mobile,
- ii) la prise en compte de la porosité et de la déformation des massifs en contact,
- iii) extension du modèle développé à l'étude des contacts cavitants,
- iv) une étude expérimentale qui permettrait de valider le modèle développé.

Références bibliographiques

- [1] Reynolds O. On the theory of lubrication and its application to M. Beauchamp Tower's experiments, *Phil. Trans. Roy. Soc. London, A* 177, 1886, 157-234.
- [2] Stokes V. K. Couple stresses in fluids, *Physics of fluids*, Sept. 1966, Vol. 9, 9, 1709-1715.
- [3] Voigt W. *Lehrbuch der kristallphysik*, Leipzig and Berlin, B. G. Teubner, 1910 (Reprinted 1928).
- [4] E. Cosserat, F. Cosserat. *Théorie des corps déformables*, Hermann & Cie, Paris, 1909.
- [5] Marchenko V. A., Khruslov E. Ya. *Homogenization of partial differential equations*, Birkhäuser, Boston 2006.
- [6] Hiroshi O., Yasuyoshi F., Noriyoshi K. Homogenization method for heterogeneous material based on boundary element method, *Computers and Structures*, 79, 2001, 1987-2007.
- [7] Marcin K. Sensitivity and randomness in homogenization of periodic fiber-reinforced composites via the response function method, *Intl Journal of Solids and Structures*, 46, 2009, 923-937.
- [8] G. Bayada, J. B. Faure. A double scale analysis approach of the Reynolds roughness comments and application to the journal bearing. *Journal of Tribology*, 111, 323–330, 1989.
- [9] M. Jai. Homogenization and two-scale convergence of the compressible Reynolds lubrication equation modelling the flying characteristics of a rough magnetic head over a rough rigid-disk surface. *ASME Journal of Tribology*, 124, 327–335, 2002.
- [10] G. Bayada, S. Ciuperca, M. Jai. Homogenization of variational equations and inequalities with small oscillating parameters: Application to the study of thin film unstationary lubrication flow. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 328, Série II b, 819–824, 2000.
- [11] M. Jai, B. Bou-Said. A comparison of homogenization and averaging techniques for the treatment of roughness in slip-flow-modified Reynolds equation. *Transactions of the ASME. Journal of Tribology*, 124(2), 327–335, 2002.

- [12] G. C. Buscaglia, M. Jai. Homogenization of the generalized Reynolds equation for ultra-thin gas films and its resolution by FEM. *Journal of Tribology*, 126(3), 547–552, 2004.
- [13] M. Kane, B. Bou-Said. Comparison of homogenization and direct techniques for the treatment of roughness in incompressible lubrication. *Journal of Tribology*, 126(4), 733–737, 2004.
- [14] M. Kane, B. Bou-Said. A study of roughness and non-newtonian effects in lubricated contacts. *ASME Journal of Tribology*, 127, 575–581, 2005.
- [15] A. Almqvist, D. Lukkassen, A. Meidell, P. Wall New concepts of homogenization applied in rough surface hydrodynamic lubrication. *Intl Journal of Engg Science*, 2006.
- [16] A. Almqvist, E. K. Essel, L. E. Persson, P. Wall Homogenization of the unstationary incompressible Reynolds equation, *Tribology International*, 40, 1344-1350, 2007.
- [17] Norme Internationale ISO 4287, 1997, “Spécification Géométrique des Produits (GPS) – État de Surface: Méthode du Profil ; Termes, Définitions et Paramètres d’Etat de Surface”.
- [18] Norme Internationale ISO 13565-1, 1997, “Spécification Géométrique des Produits (GPS) – État de Surface: Méthode du Profil ; Surfaces Ayant des Propriétés Fonctionnelles Différentes Suivant les Niveaux — Partie 1 : Filtrage et Conditions Générales de Mesurage”.
- [19] Norme Internationale ISO 13565-2, 1997, “Spécification Géométrique des Produits (GPS) – État de Surface: Méthode du Profil ; Surfaces Ayant des Propriétés Fonctionnelles Différentes Suivant les Niveaux — Partie 2 : Caractérisation des Hauteurs par la Courbe de Taux de Longueur Portante”.
- [20] Norme Internationale ISO 13565-3, 1997, “Spécification Géométrique des Produits (GPS) – État de Surface: Méthode du Profil ; Surfaces Ayant des Propriétés Fonctionnelles Différentes Suivant les Niveaux — Partie 3 : Caractérisation des Hauteurs par la Courbe de Probabilité de Matière”.
- [21] Abbott E. J., Firestone F. A., 1933, “Specifying Surface Quality: A Method Based on Accurate Measurement and Comparison”, *Mechanical Engineering*, Vol. 55, pp. 569-572.
- [22] C. Minet, 2009, *Lubrification mixte dans les étanchéités dynamiques : application aux garnitures mécaniques d’étanchéité*, thèse de Doctorat, Université de Poitiers, France.
- [23] Tzeng S T, Saibel E., Surface roughness effect on slider lubrication, *ASLE Trans* 1967; vol. 10, 334

[24] Christensen H. Stochastics models for hydrodynamic lubrication of rough surfaces. Proc. IMechE 1969-70, 184 (Part 1)

[25] Prakash J., Tiwari K. Lubrication of a porous bearing with surface corrugations. ASME Journal of Lubrication Technology, 1982; 104, 127-34

[26] Christensen H., Tonder K. The hydrodynamic lubrication of rough bearing surfaces of finite width, Transactions of the ASME, Journal of Lubrication Technology, July 1971, Vol. 93, Serie F, 3, 324-330.

[27] Elrod H. G. Thin-film lubrication theory for newtonian fluids possessing striated roughness or grooving. ASME Journal of Lubrication Tech., 95, 484-489, 1973.

[28] Patir N., Cheng H. S. Effect of surface roughness orientation on central film thickness in EHD contact, Proc. 5th Leeds-Lyon Symp. Trib., 1978, 15-21

[29] Boedo S., Booker J. F. Surface roughness and structural inertia in a mode-based mass conserving elastohydrodynamic lubrication model, Trans. of the ASME, Journal of Tribology, Jul. 1997, 119, 3, 449-455.

[30] Wang P., Keith T. G. Combined surface roughness of dynamically loaded journal bearings, Tribology Transactions, 2002, Vol. 45, 1-10.

[31] Elrod J. R. A cavitation algorithm, Trans. of the ASME Journal of Lubrication Technology, July 1981, Vol. 103, 3, 350-354.

[32] Vijayaraghavan D., Keith J. R. Development and evaluation of a cavitation algorithm, Tribology Transactions, Apr. 1989, Vol. 32, 2, 225-233.

[33] N. B. Naduvinamani, A. Siddangouda Effect of surface roughness on the hydrodynamic lubrication of porous step-slider bearings with couple stress fluids. Tribology International, 40, 780-793, 2007.

[34] Kweh C. C., Patching M. J., Evans H. P., Snidle R. W. Simulation of elastohydrodynamic contacts between rough surfaces, trans. of the ASME Journal of Tribology, Jul. 1992, Vol.114, 3, 412-419.

- [35] Greenwood J. A., Morales, Espejel G. E. The behavior of transverse roughness in elastohydrodynamic lubrication contact, Proc. Of the IMechE, Journal of Tribology Engg, Part J, 1994, Vol. 208, J2, 121-132.
- [36] Zhu D., Ai X. Point contact elastohydrodynamic lubrication based on optically measured three-dimensional rough surfaces, Trans. of the ASME, Journal of Tribology, Jul. 1997, Vol. 119, 3, 375-384.
- [37] Dobrica M. B., Fillon M., Maspeyrot P., 2006. Mixed elastohydrodynamic lubrication in partial journal bearings – comparison between deterministic and stochastic models, ASME J. Tribol., 128, 778-788.
- [38] Dobrica M. B., Fillon M., Maspeyrot P., 2008. Influence of mixed lubrication and rough elastic-plastic contact on the performance of small fluid film bearings, STLE Tribol. Transactions, 51, 699-717.
- [39] Frêne J., Nicolas D., Degueurce B., Berthe D., Godet M., 1990. Lubrification hydrodynamique – Paliers et Butées”, Eyrolles, Paris.
- [40] Swift, H. W. (1931), “The Stability of Lubricating Films in Journal Bearings, J. Inst. Engrs., **233**(1), 267-322.
- [41] Gumbel L., 1921, Vergleich der Ergebnisse der rechnerischen Behandlung des lagerschmierungsproblem mit neuen Versuchsergebnissen, Monatsblätter d. Berlin, Bezirk V. D. I., 125-8
- [42] Gourdin A., M. Boumahrat, 1989, Méthodes numériques appliqués : avec nombreux problèmes résolus en Fortran 77, Paris : Technique et Documentation (Lavoisier), 440 p.
- [43] M. Kane, 2003, Contribution à l'étude de l'influence de la rugosité et des effets non newtoniens dans les contacts sévères lubrifiés, Thèse de Doctorat, INSA de Lyon, France.
- [44] T.T. Ariman, N.D. Sylvester, 1973. Microcontinuum fluid mechanics, A Review, Int. J. Eng. Sci. 11, 905–930
- [45] T.T. Ariman, N.D. Sylvester, 1974. Application of microcontinuum fluid mechanics, J. Eng. Sci. 12 273–293
- [46] J.R. Lin, 1997. Squeeze film characteristics of long partial journal bearings lubricated with couple stress fluids, Tribology Int. 30 53–58
- [47] J.R. Lin, 1998. Squeeze film characteristics of finite journal bearings : couple stress fluid model, Tribology Int. 4, 201–207
- [48] J.R. Lin, C.B. Yang, R.F. Lu, 2001. Effects of couple stresses in the cyclic squeeze films of finite partial journal bearings, Tribology Int. 34 119–125

- [49] D.R. Oliver, 1988. Load enhancement effects due to polymer thickening in a short model journal bearings, *J. Non Newtonian Fluid Mech.* 30 185–196
- [50] U.M. Mokhiamar, W.A. Crosby, H.A. El-Gamal, 1999. A study of a journal bearing lubricated by fluids with couple stress considering the elasticity of the liner, *Wear* 224 194–201
- [51] M. Lahmar, 2005. Elastohydrodynamic analysis of doublelayered journal bearings lubricated with couple-stress fluids. *Proc. I Mech E, Part J: J. Eng. Tribology* 219 145–171
- [52] J.R. Lin, 2001. Linear stability analysis of a rotor bearing system : couple stress fluid model, *Computers & Structures* 79 801–809
- [53] X.L. Wang, K.Q. Zhu, S.Z. Wen, 2001. Thermohydrodynamic analysis of journal bearings lubricated with couple-stress fluids, *Tribology Int.* 34 335–343
- [54] X. L. Wang, K. Q. Zhu, S. Z. Wen, 2002. On the performance of dynamically loaded journal bearings lubricated with couple-stress fluids, *Tribology Int.* 35 185–191.
- [55] Aero, E. L., E.V. Kurshinskii, 1961, Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles, *Soviet physics Solid State*,2,1272-1281.
- [56] Toupin, R. A. , 1962, Elastic,materials with couple-stresses, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 11,385-414.
- [57] R. D. Mindlin, H. A. Tiersten, 1962. *Arch. Ratl. Mech. Anal.* 11, 415.
- [58] Xiao-Li Wang, Ke-Qin Zhu, Shi-Zhu Wen, 2001. Thermohydrodynamic analysis of journal bearings lubricated with couple stress fluids, *Tribology International*, Vol. 34, 5, 335-343.

REFERENCES ADDITIVES

- i. J. M. Georges, *Frottement, usure et lubrification*, 2000, CNRS Editions, Eyrolles, ISBN 2-212-05823-3.
- ii. F. P. Bowden, D. Tabor, *Friction et lubrification*, 1959, Monographies Dunod, Paris.
- iii. H. Yelle, *Notes de cours de transmission de puissance*, 2003, Ecole Polytechnique de Montréal, Canada.
- iv. L. Goirand, *Notes de cours de tribologie*, 1984, Institut National de Génie Mécanique (INGM) de Boumerdès.
- v. *Notes techniques du Centre Technique des Industries Mécaniques (CETIM) n° 18.*

Annexe A

Analyse dimensionnelle des équations de mouvement d'un fluide polaire

La théorie des écoulements de films minces visqueux suppose que l'épaisseur du film mesurée suivant la direction (O, x_3) est très faible devant les deux autres dimensions de l'espace, ce qui permet, pour déterminer l'ordre de grandeur des différents termes des équations (IV.43) de poser :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 = \frac{x_1}{L}, \tilde{x}_2 = \frac{x_2}{L}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{x_3}{h}, \quad \tilde{t} = \frac{tV}{L}, \\ \tilde{u}_1 = \frac{u_1}{L}, \tilde{u}_2 = \frac{u_2}{L}, \quad \tilde{u}_3 = \frac{u_3 L}{Vh}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \text{ et } \tilde{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0} \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

Dans ces expressions, L et V sont respectivement la dimension et la vitesse caractéristiques selon les axes (o, x_1) et (o, x_2) , h et Vh/L celles suivant (o, x_3) tandis que L/V , μ_0 et η_0 définissent l'ordre de grandeur du temps et des constantes physiques du fluide. Ce

changement de variables conduit à poser $\tilde{p} = p \frac{h^2}{VL\mu_0}$ et $\ell_0 = \sqrt{\eta_0/\mu_0}$.

Compte tenu de ces changements de variables, les équations de mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_1} = -\xi \mathfrak{R}_h \tilde{\rho} \frac{D\tilde{u}_1}{D\tilde{t}} + \tilde{\mu} \left[\xi^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3^2} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2^2} \right] - \left(\frac{\ell_0}{h} \right)^2 \tilde{\eta} \left[\xi^4 \left(\frac{\partial^4 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_1^4} + \frac{\partial^4 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3^4} \right) + \frac{\partial^4 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2^4} \right] - \\ 2 \left(\frac{\ell_0}{h} \right)^2 \tilde{\eta} \left[\xi^4 \frac{\partial^4 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_3^2} + \xi^2 \left(\frac{\partial^4 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_2^2} + \frac{\partial^4 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2^2 \partial \tilde{x}_3^2} \right) \right] \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_2} = -\xi \mathfrak{R}_h \tilde{\rho} \frac{D\tilde{u}_2}{D\tilde{t}} + \tilde{\mu} \left[\xi^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3^2} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_2^2} \right] - \left(\frac{\ell_0}{h} \right)^2 \tilde{\eta} \left[\xi^4 \left(\frac{\partial^4 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1^4} + \frac{\partial^4 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3^4} \right) + \frac{\partial^4 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_2^4} \right] - \\ 2 \left(\frac{\ell_0}{h} \right)^2 \tilde{\eta} \left[\xi^4 \frac{\partial^4 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_2^2} + \xi^2 \left(\frac{\partial^4 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_2^2} + \frac{\partial^4 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_2^2 \partial \tilde{x}_3^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_3} = \xi^2 \left\{ -\xi \mathfrak{R}_h \tilde{\rho} \frac{D\tilde{u}_3}{D\tilde{t}} + \tilde{\mu} \left[\xi^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_3^2} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2^2} \right] - \left(\frac{\ell_0}{h} \right)^2 \tilde{\eta} \left[\xi^4 \left(\frac{\partial^4 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1^4} + \frac{\partial^4 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_3^4} \right) + \frac{\partial^4 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2^4} \right] - 2\xi^2 \left(\frac{\ell_0}{h} \right)^2 \tilde{\eta} \left[\frac{\partial^4 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_2^2} + \xi^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_3^2} + \frac{\partial^4 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2^2 \partial \tilde{x}_3^2} \right] \right\}$$

où $\mathfrak{R}_h = \rho_0 \frac{Vh}{\mu_0}$ est le nombre de Reynolds local et $\xi = \frac{h}{L}$ est un paramètre d'échelle d'ordre 10^{-3} .

En négligeant les termes multipliés par ξ^2 et ξ^4 , il reste :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} = -\xi \tilde{\rho} \mathfrak{R}_h \frac{D\tilde{u}_i}{D\tilde{t}} + \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_2^2} - \tilde{\eta} \left(\frac{\ell_0}{h} \right)^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_2^4} & ; \quad i=1, 2 \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_3} = 0 & \rightarrow \tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \end{cases} \quad (\text{A3})$$

Si $\xi \mathfrak{R}_h \ll 1$, les termes d'inertie seront négligeables et l'Eq. (A3) se réduit à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} = \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_2^2} - \tilde{\eta} \left(\frac{\ell_0}{h} \right)^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_2^4} & i=1, 2 \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_3} = 0 & \rightarrow \tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \end{cases} \quad (\text{A4})$$

En revenant aux variables dimensionnées, les équations (A4) deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^4} - \frac{1}{\ell^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^4} - \frac{1}{\ell^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{cases} \quad (\text{A5})$$

ou encore

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - \eta \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^4} = \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} - \eta \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^4} = \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{cases} \quad (\text{A6})$$

Principales notations utilisées

| | |
|--------------------------------|--|
| B | largeur du patin, (m) |
| C_f | nombre de frottement |
| F | Force de frottement, (N) |
| h_0 | épaisseur du film du contact parfait, (m) |
| h_1 | amplitude des rugosités, (m) |
| h | épaisseur du film lubrifiant, $h = h_0 + h_1$, (m) |
| h_{\min} | épaisseur minimale du film à la sortie du contact, $h_{\min} = \min(h_0)$, (m) |
| h_{\max} | épaisseur maximale du film à l'entrée du contact, $h_{\max} = \max(h_0)$, (m) |
| h_ε | épaisseur déterministe du film lubrifiant, (m) |
| L | longueur du patin, (m) |
| ℓ | paramètre du couple des contraintes, $\ell = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}$, (m) |
| $\tilde{\ell}$ | paramètre du couple des contraintes adimensionné, $\tilde{\ell} = \frac{\ell}{h_{\min}}$ |
| n_p | nombre de périodes ou de rugosités, $n_p = \frac{1}{\varepsilon}$ |
| p | pression dans le film lubrifiant, (Pa) |
| p_0 | pression, solution homogénéisée, (Pa) |
| p_ε | pression, solution déterministe, (Pa) |
| P | puissance dissipée, W |
| \overline{Q} | débit de fuite moyen, $m^3.s^{-1}$ |
| r | rapport des épaisseurs du film à l'entrée et à la sortie du contact, $r = \frac{h_{\max}}{h_{\min}} > 1$ |
| U | vitesse de déplacement de la glissière, $m.s^{-1}$ |
| u_1, u_2 | composantes du champ de vitesse de l'écoulement suivant x_1 et x_2 , $m.s^{-1}$ |
| \bar{u}_1, \bar{u}_2 | vitesse moyennes de l'écoulement suivant x_1 et x_2 , $m.s^{-1}$ |
| W | portance hydrodynamique, (N) |
| \mathbf{x} | coordonnées d'espace globales, $\mathbf{x} = \langle x_1 \quad x_2 \rangle$ |
| \mathbf{y} | coordonnées d'espace locales, $\mathbf{y} = \langle y_1 \quad y_2 \rangle$ |
| Y | cellule unitaire, $Y = (0, 1) \times (0, 1)$ |
| α | amplitude des rugosités, (m) |
| $\tilde{\alpha}$ | amplitude adimensionnée, $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{h_{\min}}$ |
| ε | paramètre inversement proportionnel au nombre de périodes, $\varepsilon = \frac{1}{n_p}$ |
| Φ | fonction de dissipation visqueuse, $W.m^{-3}$ |
| η | constante physique due à la présence des couples de contraintes, ($N.s$) |
| λ | longueur d'onde des rugosités, (m) |
| $\lambda_{x_1}, \lambda_{x_2}$ | longueurs d'onde des rugosités suivant les directions x_1 et x_2 , (m) |

- Λ constante, $\Lambda = 6\mu U$, $Pa.m$
 ρ masse volumique du lubrifiant, $kg.m^{-3}$
 μ viscosité dynamique du lubrifiant, $(Pa.s)$
 $\bar{\nabla}_x(\bullet)$ opérateur différentiel, $\bar{\nabla}_x(\bullet) = \left\langle \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_2} \right\rangle$
 $\bar{\nabla}_y(\bullet)$ opérateur différentiel, $\bar{\nabla}_y(\bullet) = \left\langle \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_1} \quad \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_2} \right\rangle$
 $\bar{\nabla}(\bullet)$ gradient de la fonction (\bullet) , $\bar{\nabla}(\bullet) = \bar{\nabla}_x(\bullet) + \varepsilon^{-1}\bar{\nabla}_y(\bullet)$
 $\bar{\nabla} \bullet$ opérateur de divergence
 $(\tilde{\bullet})$ quantité adimensionnée
 $(\vec{\bullet})$ quantité vectorielle
 $(\bar{\bullet})$ valeur moyenne
 $\langle \quad \rangle$ vecteur ligne, $\langle \quad \rangle \equiv \{ \quad \}^T$

Abbreviations

EPP : Elastique Parfaitement Plastique

EHD : Elasto-Hydro-Dynamique

EDPs : Equations aux dérivées partielles

RMS : Moyenne quadratique des écarts du profil de rugosité par rapport à la ligne moyenne de rugosité, notée aussi Rq ou σ .

SFDB : Squeeze Film Damper Bearing

Liste des illustrations

CHAPITRE I

- Fig. I.1 Composition schématique des couches superposées d'une surface
- Fig. I.2 Schématisation d'un profil mesuré par le profilographe
- Fig. I.3 Schéma d'un profilographe
- Fig. I.4 Profil de rugosité sur lequel est défini l'écart arithmétique R_a
- Fig. I.5 Profil de rugosité sur lequel est défini l'écart moyen géométrique RMS
- Fig. I.6 Exemple de 6 profils différents ayant les même R_a et R_q
- Fig. I.7 Obliquité S_k d'un profil (Skewness)
- Fig. I.8 Etalement E_k d'un profil (kurtosis)
- Fig. I.9 Courbe du taux de la longueur portante
- Fig. I.10 Représentation tridimensionnelle de la topographie de surface à partir de mesures réalisées avec un profilographe
- Fig. I.11 Photographie d'un microscope d'interférences
- Fig. I.12 Microscope à force atomique (AFM)
- Fig. I.13 Topographies réelles de surfaces industrielles obtenues par la technique optique de mesure (3D)
- Fig. I.14 Variations de la distribution statistique des hauteurs d'une surface rugueuse pour différentes valeurs des paramètres d'asymétrie et d'étalement
- Fig. I. 15 Exemples de surfaces industrielles générées numériquement
- Fig. I.16 Exemples de systèmes mécaniques lubrifiés.

CHAPITRE III

Fig. II.1 : Différents régimes de lubrification fluide à basse pression

Fig. II.2 : Schéma d'un contact lubrifié

Fig. II.3 : Géométrie et Cinématique d'un contact hydrodynamique

Figure II.4 : Système d'axes et conditions aux limites sur les vitesses

Fig. II.5 : Représentation du domaine d'intégration de l'équation de Reynolds et des conditions limites sur les frontières

Fig. II.6 : Représentation des zones actives et inactives dans un palier lisse soumis à un chargement statique

Fig. II.7 : Vue en coupe des zones de film complet et de cavitation dans un palier à film amortisseur (SFDB),

Fig. II.8 : Schématisation d'un patin de butée inclinée

Fig. II.9 : Schématisation d'une butée symétrique

Fig. II.10 : Action du fluide sur les parois d'un contact hydrodynamique

Fig. II.11 : Débit de fuite dans une butée cylindrique

CHAPITRE III

Fig. III.1 : Schéma du patin incliné rugueux

Fig. III.2 : Formes de rugosités étudiées

Fig. III.3 : Discrétisation du film

Fig. III.4 : Schématisation d'un patin incliné plan

Fig. III.5 : Discrétisation par différences finies de la cellule $Y = (0,1) \times (0,1)$

Fig. III.6 : Répartitions des pressions homogénéisée et déterministe dans le cas du patin lisse

Fig. III.7 : Comparaison des solutions homogénéisées et déterministes pour les différentes formes de rugosités (patin rugueux)

Fig. III.8 : Représentation des lignes de courant de l'écoulement calculées par la technique d'homogénéisation dans le cas des rugosités longitudinales ($\tilde{\alpha} = 0.25, r = 2$)

Fig. III.9 : Evolutions de l'écart relatif entre les capacités de charges déterministes et homogénéisées en fonction du nombre de périodes

Tableau III.1 : Expressions mathématiques des différentes formes de rugosités en coordonnées globales

Tableau III.2 : Expressions mathématiques de h_1 en fonction des coordonnées locales

Tableau III.3 : Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement du patin

Tableau III.4 : Caractéristiques des maillages par différences finies

Tableau III.5 : Comparaison en temps CPU des méthodes déterministe et d'homogénéisation (Processeur Intel Pentium 1.66 GHz, RAM 503 MB)

Tableau III.6 : Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité transversale ($\alpha/h_{min}=0.025$)

Tableau III.7 : Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité transversale ($\alpha/h_{min}=0.25$)

Tableau III.8 : Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité longitudinale ($\alpha/h_{min}=0.025$)

Tableau III.9 : Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité longitudinale ($\alpha/h_{min}=0.25$)

Tableau III.10 : Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité anisotrope ($\alpha/h_{min}=0.025$)

Tableau III.11 : Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité anisotrope ($\alpha/h_{min}=0.25$)

Tableau III.12 : Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité isotrope ($\alpha/h_{min}=0.025$)

Tableau III.13 : Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité isotrope ($\alpha/h_{min}=0.25$)

CHAPITRE IV

Fig. IV.1 : Bilan des efforts agissant sur un élément de volume

Fig. IV.2 : Schéma du patin incliné rugueux

CHAPITRE V

Fig. V.1 : Variations des performances hydrodynamiques du contact en fonction de l'amplitude relative des rugosités pour différentes valeurs du paramètre de couple de contrainte

Fig. V.2 : Variations des performances hydrodynamiques du contact en fonction du rapport r pour les différentes formes de rugosités

Fig. V.3 : Variations de la portance hydrodynamique du contact et du nombre de frottement en fonction du rapport r pour les différentes formes de rugosités

Tableau V.1 : Comparaisons des performances hydrodynamiques obtenues dans le cas lisse et rugueux pour deux valeurs du paramètre de couple de contrainte.

TABLE DES MATIERES

Sommaire

Dédicaces

Avant-Propos

| | |
|---|----|
| INTRODUCTION GENERALE | 4 |
| CHAPITRE I : | |
| ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE | 12 |
| I.1 Introduction | 12 |
| I.2 description des surfaces | 12 |
| I.2.1 Etat structural des surfaces | 12 |
| I.2.2 Etat géométrique des surfaces | 14 |
| I.2.3 Mesure des défauts | 16 |
| I.2.4 Caractérisation des surfaces : Principaux paramètres statistiques | 17 |
| I.2.5 Topographie des surfaces | 22 |
| I.2.6 Modélisation de la rugosité des surfaces | 25 |
| I.3 Méthodes d'analyse des contacts rugueux lubrifiés | 30 |
| I.3.1 Méthode stochastique | 30 |
| I.3.2 Méthode déterministe | 32 |
| I.3.3 Méthode d'homogénéisation | 34 |
| I.4 conclusion | 35 |
| CHAPITRE II : | |
| EQUATIONS DE BASE DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE | |
| PAR FLUIDE NEWTONIEN | 36 |
| II.1 Introduction | 36 |
| II.2 Equations générales de la dynamique des fluide visqueux | 37 |
| II.3 Analyses dimensionnelles des équations | 40 |
| II.4 Equations de la lubrification hydrodynamique par fluide incompressible | 43 |
| II.4.1 Fonction de dissipation en variables dimensionnées | 43 |
| II.4.2 Equation de la mécanique des films minces visqueux généralisée | 43 |
| II.4.3 Equation de la mécanique des films minces visqueux | 49 |
| II.4.4 Equation de Reynolds généralisée | 50 |
| II.4.5 Equation de Reynolds | 53 |
| II.4.6 Conditions limites associées à l'équation incompressible | 54 |
| II.5 Calcul des performances hydrodynamiques | 58 |
| II.5.1 Champ de pression dans le film | 58 |
| II.5.2 Action du fluide sur les surfaces du contact | 58 |
| II.5.3 Vitesses moyennes de l'écoulement et débit de fuite | 60 |
| II.5.4 Puissance dissipée | 62 |
| II.6 Conclusion | 62 |

CHAPITRE III :

| | |
|--|----|
| HOMOGENEISATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS NEWTONIENNE | 63 |
| III.1 Introduction | 63 |
| III.2 Application de la méthode déterministe à la résolution de l'équation de Reynolds | 64 |
| III.2.1 Equation de Reynolds en régime stationnaire et équation géométrique du film | 64 |
| III.2.2 Application au patin incliné de Mitchell (3D) | 64 |
| III.2.3 Application au patin incliné (2D) | 69 |
| III.3 Application de la méthode d'homogénéisation | 70 |
| III.3.1 Solutions numériques des problème local et global | 75 |
| III.3.2 Algorithme d'homogénéisation | 77 |
| III.4 Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées | 78 |
| III.5 Conclusion | 92 |

CHAPITRE IV :

| | |
|---|-----|
| FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME DE LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE PAR FLUIDE NON NEWTONIEN A COUPLE DE CONTRAINTE | 93 |
| IV.1 Introduction | 93 |
| IV.2 Bilan des efforts agissant sur un élément de fluide polaire | 95 |
| IV.3 Equations de mouvement d'un fluide polaire | 96 |
| IV.4 Lois de conservation d'énergie pour un fluide polaire | 99 |
| IV.5 Equations constitutives d'un fluide polaire | 102 |
| IV.6 Equations de mouvement d'un fluide polaire | 103 |
| IV.7 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée | 105 |
| IV.8 Equation géométrique du film | 107 |
| IV.9 Performances hydrodynamiques du contact | 108 |
| IV.9.1 Portance hydrodynamique | 108 |
| IV.9.2 Forces de frottement | 108 |
| IV.9.3 Vitesses moyennes de l'écoulement et débit de fuite | 108 |
| IV.9.4 Puissance dissipée | 109 |
| IV.10 Conclusion | 110 |

CHAPITRE V :

| | |
|--|-----|
| HOMOGENEISATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS NON NEWTONIENNE | 111 |
| V.1 Introduction | 111 |
| V.2 Equations de base de la lubrification hydrodynamique par fluide à couple de contrainte | 112 |
| V.3 Application au patin incliné | 112 |
| V.3.1 Cas du patin de dimensions finies (3D) | 112 |
| V.3.2 Cas du patin de largeur infinie (2D) | 113 |
| V.4 Application de la méthode d'homogénéisation | 113 |

| | |
|--|------------|
| V.5 Etude paramétrique | 116 |
| V.6 Conclusion | 122 |
| CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES | 123 |
| REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES | 126 |
| ANNEXE A : | |
| ANALYSE DIMENSIONNELLE DES EQUATIONS DE MOUVEMENT D'UN FLUIDE POLAIRE | 131 |
| PRINCIPALES NOTATIONS UTILISEES | 133 |
| LISTE DES ILLUSTRATIONS | 135 |
| TABLE DES MATIERES | 139 |

Résumé

La plupart des modèles de contacts lubrifiés sont basés sur plusieurs hypothèses parmi lesquelles les surfaces formant ces contacts sont parfaitement lisses et le lubrifiant s'écoulant entre ces surfaces possède un comportement newtonien. Cependant, il a été montré que pour des contacts lubrifiés par des huiles additivées et fonctionnant dans des conditions sévères, ces hypothèses sont mises en défaut. La prise en compte de la texture et de la topographie réelle des surfaces, et le comportement rhéologique plus complexe du lubrifiant est indispensable pour une bonne détermination des performances d'un contact hydrodynamique.

L'approche adoptée est basée sur l'application du processus d'homogénéisation à l'équation de Reynolds modifiée obtenue à partir des équations de mouvement d'un fluide polaire de V. K. Stokes en vue de prendre en considération les couples de contrainte dus à la présence des additifs de viscosité dans le lubrifiant.

Le développement multi-échelle de la pression conduit à l'écriture d'un système de quatre équations aux dérivées partielles gouvernant un problème local et un problème global dont les solutions sont les fonctions périodiques et la pression homogénéisée.

Les études de simulation sont effectuées en considérant quatre formes de rugosités (transversales, longitudinales, isotropes et anisotropes) distribuées de façon périodique sur la surface stationnaire, et différentes valeurs du paramètre de couple de contrainte représentant physiquement la longueur de la chaîne moléculaire du polymère incorporé dans le lubrifiant.

L'analyse montre que les effets combinés des rugosités de surfaces et des couples de contraintes affectent de façon significative les performances hydrodynamiques du contact tels que le champ de pression, la capacité de charge, le nombre de frottement et la puissance dissipée surtout pour des amplitudes de rugosité et des valeurs du paramètre de couple de contrainte élevées.

Mots clés : Lubrification hydrodynamique/ Rugosité de surface/ Fluide à couple de contrainte/ Méthode d'homogénéisation/Milieus continus de V. K. Stokes.

Abstract

Most of the lubricated contact models are based on several assumptions among them the surfaces are perfectly smooth, and the lubricant flowing between these surfaces is considered as a Newtonian fluid. However, it was shown that for contacts lubricated with oils incorporating polymer additives, and operating under severe conditions, these hypotheses are put in the wrong. The consideration of the

real surface texture and topography, and the more complex rheological behavior of lubricant is necessary to accurately determine the hydrodynamic performance characteristics of such contacts.

The adopted approach is based on the application of the homogenization process to the modified Reynolds equation derived from the momentum equations of the V.K. Stokes polar fluid in order to take into account the couple stress due to the presence of viscosity additives in the lubricant.

The multi-scale expansion of the fluid pressure leads to a system of four partial differential equations governing two types (local and global) problems whose the solutions are the periodic functions and the homogenized pressure.

The numerical simulation studies are performed by considering four roughness patterns (transverse, longitudinal, isotropic and anisotropic) periodically distributed over the stationary surface, and various values of the couple stress parameter which is physically regarded as the polymer length added to the base lubricant.

The analysis shows that the homogenization method is rigorous and efficient for the four roughness patterns considered. Besides, the combined effects of the surface roughness as well as the couple stress significantly affect the performance characteristics such as fluid pressure distribution, load-carrying capacity, friction factor and power loss especially for high roughness amplitudes and long molecular chains.

Keywords: lubrication hydrodynamics / Surface roughness of / Couple stress fluid/ Homogenization method / V. K. Stokes micro-continuum.