

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques
Laboratoire de domiciliation: Laboratoire de Mathématiques Appliquées et de Modélisation
« LMAM »

THÈSE
EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME
DE DOCTORAT

Domaine : Mathématiques et Informatique Filière : Mathématiques
Spécialité : Analyse non Linéaire et Modélisation

Présentée par

Selma ELLAGGOUNE

Intitulée

**Le nombre maximum de cycles limites pour une classe généralisée
des équations de Liénard**

Soutenue le : 21/02/2019

Devant le Jury composé de :

Mr. Mohamed Réda FERCHICHI	MCA	Université de Annaba	Président
Mme. Sabrina BADI	MCA	Université de Guelma	Encadreur
Mr. Amara HITTA	Prof	Université de Guelma	Co-encadreur
Mr. Amar GUESMIA	MCA	Université de Skikda	Examinateur
Mr. Khaireddine FERNANE	MCA	Université de Guelma	Examinateur

Année Universitaire : 2018/2019

Remerciements

Mes remerciements vont en premier lieu, à " ALLAH " Dieu le tout puissant, qui m'a donné la force et la volonté pour présenter cette thèse.

Deuxièmement, j'adresse tout particulièrement tous mes remerciements, ma reconnaissance et ma gratitude à Mme. BADI SABRINA "mon encadreur", Maitre de conférence (A) à l'université de Guelma.

Certainement, sans les conseils, le suivi et les suggestions de ma directrice de thèse, ce travail n'aurait pas abouti. Pour cela, je lui suis très reconnaissante, du fait qu'elle a été toujours disponible et a consacré beaucoup de temps pour moi.

Je remercie MR. HITTA AMARA, Professeur à l'université de Guelma, d'avoir accepté d'être Co-encadreur. Je salue son esprit critique et sa compétence et sa disponibilité.

Je tiens à remercier Mr. FERCHICHI MOHAMED, Maitre de conférence (A) à l'université d'Annaba, pour l'honneur qu'il me fait, en acceptant d'être président du jury de cette thèse.

J'adresse mes remerciements à Mr. GUESMIA AMAR, Maitre de conférence (A) à l'université de Skikda, d'avoir accepté de faire parti de ce jury.

De même, je remercie Mr. FERNANE KHAIREDDINE, Maitre de conférence (A) à l'université de Guelma, qui a bien accepté de faire parti aussi de ce jury.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à mes parents et tout particulièrement à mon frère FATEH Professeur à l'université de Guelma, qui m'a beaucoup aidé et soutenu au cours de mon parcours scolaires, et à tous ceux qui de loin ou de près, m'ont encouragé tout au long de mes études.

**** Merci à tous ****

Dédicace

je dédie cette thèse qui est le fruit de longues années d'études, à mon père, à ma mère et à mes frères et soeurs qui tout ou long de mes études m'ont soutenu et encouragé, sans oublier mes enseignants et tous ceux qui de loin ou de près, m'ont aidé et encouragé.

Résumé

Dans cette thèse, on étudie le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ perturbé par une classe généralisée d'équations différentielles de Liénard de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(f_{11}(x, y)y) - \varepsilon^2(f_{12}(x, y)y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(g_{21}(x, y) + f_{21}(x, y)y) - \varepsilon^2(g_{22}(x, y) + f_{22}(x, y)y), \end{cases}$$

où f_{1i}, f_{2i} et g_{2i} sont des polynômes en x et y de degré l, n et m respectivement pour $i = 1, 2$ et ε suffisamment petit.

On détermine ce nombre maximum pour cette classe des systèmes en utilisant la méthode de moyennisation du premier et du second ordre. De plus, Cette étude est illustrée par des applications.

Mots clés : cycle limite, équation différentielle de Liénard, méthode de moyennisation.

Abstract

In this thesis, we study the maximum number of limit cycles for a class of polynomial differential systems that can bifurcate from the periodic orbits of the linear center $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ perturbed inside a class of the generalized Liénard polynomial differential systems of the form

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(f_{11}(x, y)y) - \varepsilon^2(f_{12}(x, y)y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(g_{21}(x, y) + f_{21}(x, y)y) - \varepsilon^2(g_{22}(x, y) + f_{22}(x, y)y), \end{cases}$$

where f_{1i}, f_{2i} and g_{2i} are polynomials in x and y having degree l, n and m respectively for each $i = 1, 2$ and ε is a small parameter.

The maximum number for this class of systems is determined, we use the averaging method of first and second order. This study is illustrated by applications.

Keywords : Limit cycle, Liénard differential equation, averaging method.

المخلص

في هذه الأطروحة، ندرس عدد الحلول الدورية المنعزلة والتي تنشأ عند ذبذبة الحلول الدورية للجملة :

بمجموعة من المعادلات التفاضلية من نوع ليينارد من الشكل: $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = y, \dot{y} = \frac{dy}{dt} = -x$

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(f_{11}(x, y)y) - \varepsilon^2(f_{12}(x, y)y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(g_{21}(x, y) + f_{21}(x, y)y) - \varepsilon^2(g_{22}(x, y) + f_{22}(x, y)y), \end{cases}$$

حيث: f_{1i}, f_{2i}, g_{2i} هي كثيرات حدود لـ x و y من الدرجة l, n, m على التوالي من أجل $i=1,2$ و ε وسيط صغير كفاية.

يتم تحديد العدد الأكبر لهذا القسم من الجمل باستعمال نظرية المتوسط من الدرجة الأولى و الثانية. زيادة على ذلك، يتم توضيح هذه الدراسة من خلال التطبيقات.

الكلمات المفتاحية: دورة الحد، المعادلات التفاضلية لليينارد، طريقة المتوسط.

Table des matières

Introduction générale	vi
1 Notions préliminaires	1
1.1 Existence et unicité de la solution	1
1.2 Stabilité de la solution	2
1.3 Systèmes dynamiques	3
1.4 Flot d'une équation différentielle	4
1.5 Théorie des systèmes différentiels non linéaires autonomes	5
1.5.1 Points d'équilibre et linéarisation	6
1.5.2 Classification et nature des points d'équilibre	8
1.5.3 Plan et portrait du phase	12
1.5.4 Théorème de Hartman-Grobman	12
1.5.5 Orbites périodiques et cycles limites	13
1.6 Existence et non-existence des cycles limites	15
1.7 Théorie de bifurcation	23
2 Méthode de moyennisation	28
2.1 Théorème de moyennisation	29
2.2 Théorème de moyennisation du premier ordre	32
2.3 Théorème de moyennisation du deuxième ordre	35
2.4 Un autre théorème de moyennisation du premier ordre	42
3 Cycles limites pour une classe généralisée des systèmes de Liénard	48
3.1 Historique	49
3.2 Perturbation du centre linéaire	51
3.3 Bifurcation des cycles limites des orbites périodiques d'un centre linéaire perturbé par une classe généralisée d'équation différentielle de Liénard	51

4 Bifurcation des cycles limites d'un anneau périodique pour un système différentiel plan	69
4.1 Quelques définitions	70
4.2 Théorèmes	71
4.3 Bifurcation des cycles limites d'un centre isochrone via la méthode de moyennisation	74
Conclusion et perspectives	77
Appendice	78
Bibliographie	84

Introduction générale

En général par un système dynamique, on sous-entend tout système qui évolue au cours du temps. On représente cette évolution par des équations différentielles ou des applications. Ainsi, l'étude des systèmes dynamiques traite l'évolution temporelle des systèmes physiques, économiques, chimiques sans pour autant faire référence à la théorie sous jacente qui détermine leurs équations d'évolution.

La notion des équations différentielles est apparue à la fin du 17^{ème} siècle. A cette époque, les équations différentielles s'introduisent par le biais de problèmes d'origine mécanique ou géométrique comme par exemple : le mouvement du pendule circulaire, le problème du mouvement de deux corps s'attirant mutuellement suivant la loi de la gravitation newtonienne, ...

Un des principaux problèmes de la théorie des équations différentielles est l'étude des cycles limites : leur existence, leur nombre et leur stabilité. Un cycle limite pour un système différentiel plan, est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques. La notion des cycles limites stables est très importante car elle modélise des systèmes à oscillations auto-entretenues, voici quelques exemples : les battements du coeur, les vibrations d'un pont, ou des ailes d'un avion. Les cycles limites ont été introduits pour la première fois par H. Poincaré en 1881 dans son "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle" [40]. Poincaré s'est intéressé à l'étude qualitative des solutions des équations différentielles, c'est à dire aux points d'équilibre, aux cycles limites et leur stabilité, ce qui permet d'avoir une idée globale des autres orbites du système étudié.

Un des théorèmes les plus importants de la dynamique non linéaire est le théorème de Poincaré-Bendixson qui affirme que dans une région bornée et compacte du plan, une trajectoire d'un système planaire converge vers un cycle limite ou un point critique. Pour la non-existence des solutions périodiques, il existe les critères de Bendixson et celui de Dulac, qui affirment sous certaines conditions que le système différentiel planaire n'admet aucune solutions périodiques.

En 1900, le mathématicien David Hilbert [16] présenta, lors du deuxième congrès international des mathématiques, 23 problèmes "dont l'avenir attend la résolution grâce aux nouvelles méthodes qui seront découvertes dans le siècle qui commence". Le problème numéro 16 est de déterminer le nombre maximal et la position relative des cycles limites d'un système différentiel polynômial planaire de degré n . On note H_n ce nombre maximal. En 1923, Dulac [12], proposa une démonstration prouvant que H_n est fini pour tout n , mais sa démonstration comportait une erreur. La résolution de ce problème de Dulac a été faite de façon indépendante par Ilyashenko en 1991 et Ecalle, Martinet et Moussu en 1987 puis Ecalle 1992. Cette résolution permet de montrer que $H_n < \infty$. Petrovsky, Landis en 1957, crurent trouver la valeur de H_2 mais ils s'aperçurent d'une erreur dans leur propre démonstration (Landis et Petrovski, 1967) avant que celui-ci ne soit infirmé par un contre exemple de Shi en 1982, dans lequel un système quadratique a 4 cycles limites. Ainsi, si H_n est un nombre fini pour tout n , la seule chose que l'on sache est que $H_2 \geq 4$ et $H_3 \geq 11$ (Jibin et Chunfu, 1985 ; Zoladek, 1995). Christopher et Lloyd ont donné en 1995 une borne inférieure au nombre $H_n : H_n \geq n^2 \log(n)$.

En 1928, **Liénard** [24] un ingénieur français établit un théorème d'existence et d'unicité d'une solution périodique pour un système portant son nom de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x), \\ \dot{y} = -G(x), \end{cases} \quad (1)$$

où $F(x)$ et $G(x)$ sont deux polynômes de degré m et n respectivement. Notons que ce système inclue l'équation de **Van Der Pol** $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$. **Liénard** montra que si $G(x) = x$ et si $F(x)$ est une fonction continue et impaire qui a une unique racine positive en $x = a$ et qui est strictement croissante pour $x \geq a$, alors le système (1) possède un unique cycle limite.

- En 1975, **Rychkov** [44] a prouvé que pour des polynômes $F(x)$ impairs et de degré 5 et si $G(x) = x$ alors le système (1) n'a au plus que deux cycles limites.
- En 1977, **Lins, De Melo et Pugh** [25] ont prouvé que si $m = 3$ et $n = 1$, alors il n'y a au plus qu'un cycle limite. Ils ont de plus donné les conditions pour que ce cycle existe. Enfin ils ont conjecturé que si $G(x) = x$, il ne pouvait y avoir plus de $E \left(\frac{m-1}{2} \right)$ cycles limites ($E(x)$ est la partie entière du réel x). Mais cette conjecture a été prouvée qu'elle est fautive pour $n \geq 6$.
- En 1981, **Zhang** [50] a étudié le résultat de **Rychkov** (1975) à des fonctions non polynômiales :

-
- Si $G(x) = x$, si $F(x)$ et sa dérivée $f(x)$ sont continues.
 - De plus si la dérivée $f(x)$ est pair et a deux racines $a_1, a_2 > 0$ tel que $a_1 < a_2$ et $F(a_1) > 0, F(a_2) < 0$.
 - Si $f(x)$ strictement croissante pour $x > a_2$.
Alors le système (1) a au plus deux cycles limites.
 - En 1983, **Xianwu** [48] a prouvé la conjecture pour certains cas où $m = 4$ et $n = 1$.
 - En 1990, **Dumortier** et **Rousseau** [14] ont montré que $H(3, 1) = 1$.
 - En 1997, **Duman** et **Li** [13] ont prouvé que $H(2, 2) = 1$.
 - En 2002, **Wang** et **Jing** [47] ont prouvé que $H(3, 2) = 3$.
 - En 2012, **Li.Ghengy** et **J.Llibre** [8] ont prouvé que $H(1, 3) = 1$.

Dependent, certains chercheurs furent intéressés au nombre maximum de cycles limites noté $\tilde{H}(m, n)$ appelé "Medium limit cycles" qui seraient créés par bifurcation d'un centre. Ainsi, il ont trouvé une borne inférieure de $\tilde{H}(m, n)$.

En effet, un aspect fondamental de l'analyse des systèmes dynamiques est la théorie de la bifurcation, introduite par **Poincaré** [41] en 1892 pour décrire les changements qualitatifs des points d'équilibres d'une équation différentielle, obtenue selon une faible variation d'un paramètre, ensuite a été discuté par **Andronov** et **Witt** [3] et leurs collègues de travail commençant en 1930.

En 2010, **J.Llibre et al.** [29] ont réussi d'obtenir des bornes inférieurs pour le nombre de cycles limites pour $m, n \geq 1$. Plus précisément, ils ont étudié le nombre maximum de cycles limites $\tilde{H}(m, n)$ qui peuvent bifurquer des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ perturbé par des équations différentielles de **Liénard**. D'autres travaux sont pointés sur la bifurcation des cycles limites pour des systèmes différentielles polynômiaux ayant un centre isochrone. (Voir chapitre 4).

Dans cette thèse, on considère le problème de recherche des solutions périodiques pour un système différentiel dont le second membre dépend d'un petit paramètre ε . Une réponse à ce problème peut être donnée en utilisant la méthode de moyennisation (averaging method), cette méthode est l'une des plus importantes méthodes de perturbations utilisée actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. Elle a été introduite en 1937 par Krylov et Bogoliubov [22] et par Bogoliubov et Mitropolskii [5] en 1961. Elle a été ensuite développée par Verhulst [46], Malkin (1956) et Roseau (1966) [43], en 2004 par Llibre et Buica [6]. D'autres formes et théorèmes de la méthode de moyennisation ont été démontrés ces dernières années

(voir [6]) et beaucoup d'articles ont été publiés concernant l'application de cette méthode. En utilisant la méthode de moyennisation, on réduit le problème difficile de la résolution des équations différentielles non autonomes à la recherche des racines positives d'une équation algébrique.

En 2012, **Llibre J. Valls.C** [30] ont étudié, en utilisant la méthode de moyennisation d'ordre un et deux un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(g_{11}(x) + f_{11}(x)y) - \varepsilon^2(g_{12}(x) + f_{12}(x)y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(g_{21}(x) + f_{21}(x)y) - \varepsilon^2(g_{22}(x) + f_{22}(x)y), \end{cases}$$

où $g_{1i}, f_{1i}, g_{2i}, f_{2i}$ pour $i = 1, 2$ de degré l, k, m et n respectivement et ε un petit paramètre, Ils ont montré qu'au plus

$$\lambda = \max[\mu + [(m-1)/2], \mu + [l/2], [(n-1)/2] + [m/2], [k/2] + [m/2] - 1, [(n-1)/2] + [(l-1)/2] + 1, [k/2] + [(l-1)/2]]$$

(où $\mu = \min[n/2, [(k-1)/2]]$) cycles limites bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$.

En 2013, **Llibre et Valls** [31] ont étudié le système différentiel polynômial plus général

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f_1(x)y, \\ \dot{y} = -x - g_2(x) - f_2(x)y, \end{cases}$$

où $f_1(x) = \varepsilon f_{11}(x) + \varepsilon^2 f_{12}(x) + \varepsilon^3 f_{13}(x)$, $g_2(x) = \varepsilon g_{21}(x) + \varepsilon^2 g_{22}(x) + \varepsilon^3 g_{23}(x)$, et $f_2(x) = \varepsilon f_{21}(x) + \varepsilon^2 f_{22}(x) + \varepsilon^3 f_{23}(x)$ où f_{1i}, f_{2i} et g_{2i} de degré l, n et m respectivement pour $i = 1, 2, 3$ et ε suffisamment petit.

Ils ont trouvé une borne supérieure du nombre maximum de cycles limites qui peuvent bifurquer des orbites périodiques d'un centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$, en utilisant la méthode de moyennisation d'ordre trois.

Dans ce travail, on étudie les cycles limites des systèmes différentiels non autonomes en utilisant la méthode de moyennisation d'ordre un et deux. On s'intéresse à la recherche du nombre maximum de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$, perturbé par une classe généralisée d'équations différentielles de Liénard de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(f_{11}(x, y)y) - \varepsilon^2(f_{12}(x, y)y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(g_{21}(x, y) + f_{21}(x, y)y) - \varepsilon^2(g_{22}(x, y) + f_{22}(x, y)y), \end{cases}$$

où f_{1i}, f_{2i} et g_{2i} sont des polynômes en x et y de degré l, n et m respectivement pour

$i = 1, 2$ et ε suffisamment petit, (voir chapitre 3).

On note que ce système est plus général que celui étudié dans [30] et [31].

Cette thèse est subdivisée en quatre chapitres :

Le premier chapitre est un rappel sur des notions générales. On introduira des définitions élémentaires tels que : le système dynamique, les points d'équilibre et leurs nature, la linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre, les cycles limites, ainsi que des théorèmes sur l'existence et la non-existence des cycles limites. On introduira aussi un rappel sur la théorie de bifurcation.

Dans le deuxième chapitre nous présentons la méthode de moyennisation du premier et second ordre, nous illustrons ceci à travers des exemples.

Le troisième chapitre s'intéresse aux cycles limites des systèmes de Liénard, on détermine le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre linéaire perturbé par une certaine classe généralisée d'équations différentielles de Liénard et ceci en utilisant la méthode de moyennisation d'ordre un et deux. Cette étude a fait l'objet d'une publication intitulée :

"**S. Ellagoune, S. Badi**, On The upper bound of the number of limit cycles for a class of polynomial differential systems. Electronic Journal of Differential Equations. ISSN 072-6691. Volume 2016 (2016), Number 318, pp.1-22."

Le quatrième et dernier chapitre est consacré à l'étude du nombre de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre isochrone, nous introduisons la notion de ce dernier et celle d'intégrale première.

Notions préliminaires

1.1 Existence et unicité de la solution

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

Définition 1.1.1. i) Une équation différentielle ordinaire (EDO) sur U est une relation de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

que l'on note brièvement

$$\dot{x} = f(t, x) \quad \text{où} \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}. \quad (1.1)$$

ii) Pour (t_0, x_0) donné, un problème à valeur initiale associé à l'équation (1.1) est donné sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Définition 1.1.2. i) La fonction $x(t)$ est dite solution de l'équation (1.1) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si elle est définie et continûment dérivable sur I et si $(t, x(t)) \in U, \forall t \in I$ et si $x(t)$ satisfait la relation (1.1) sur I .

ii) Soit $(t_0, x_0) \in U$ donnée, la fonction x est dite solution du problème à valeur initiale (1.2) s'il existe un intervalle I contenant t_0 tel que x est une solution de l'équation (1.1) sur I et vérifie $x(t_0) = x_0$.

Définition 1.1.3. Considérons la fonction $f(t, x)$ avec $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n, |t - t_0| \leq a$, et $x \in D \subset \mathbb{R}^n$.

On dit que la fonction $f(t, x)$ est Lipschitzienne par rapport à x , s'il existe $K > 0$ telle que :

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K|x_1 - x_2|, \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times D.$$

La constante K est appelée constante de Lipschitz.

Théorème 1.1.1. *On considère le système différentiel :*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

et on suppose que la fonction vectorielle $f(t, x)$ est Lipschitzienne de rapport K par rapport à x , uniformément en $t \in [-a, a]$. Soit x_0 une donnée initiale, il existe une seule solution $x(t)$ du système différentiel qui satisfait $x(0) = x_0$ et qui est définie sur l'intervalle $[-c, c]$ avec $c < \min(a, \frac{1}{K})$.

Preuve. Cette solution satisfait l'équation intégrale

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(u, x(u)) du,$$

on considère l'espace des fonctions continues $y \in C^0([-a, a])$ muni de la norme $\|y\| = \max_{t \in [-a, a]} \|y(t)\|$. Soit $L : C^0([-a, a]) \rightarrow C^0([-a, a])$ l'opérateur défini par

$$L(y)(t) = x(0) + \int_0^t f(u, y(u)) du,$$

cet opérateur satisfait

$$L(y)(t) - L(y')(t) = \int_0^t [f(u, y(u)) - f(u, y'(u))] du,$$

et donc

$$\|L(y) - L(y')\| \leq cK \|y - y'\|.$$

Si on pose $c < \min(a, \frac{1}{K})$, on obtient que l'opérateur L est une contraction. Il possède donc un unique point fixe dans l'espace fonctionnel $C^0([-a, a])$. Cet unique point fixe est une fonction continue qui est solution du système différentiel et ceci démontre l'existence et l'unicité cherchées.

1.2 Stabilité de la solution

La stabilité est l'un des aspects essentiels dans l'étude des systèmes dynamiques. Cette notion a été étudiée par *Liapunov* (1857-1918), voir le livre [39].

Définition 1.2.1. *Soit le problème à valeur initiale*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \dots\dots\dots & (I) \\ x(t_0) = x_0, \dots\dots\dots & (II) \end{cases}$$

Supposons que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution. Une solution $\Phi(t)$ du système (I) telle que $\Phi(t_0) = \Phi_0$ est dite stable au

sens de Lyapunov si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ telle que pour toute solution $x(t)$ de (I) dont la valeur initiale $x(t_0) = x_0$ vérifie

$$\|x(t_0) - \Phi_0\| < \delta \implies \|x(t) - \Phi(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Si de plus

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \Phi(t)\| = 0,$$

alors la solution $\Phi(t)$ est dite asymptotiquement stable.

Remarque 1.2.1. Une solution $\Phi(t)$ qui n'est pas stable est dite instable.

Exemple 1.2.1. Soit le problème à valeur initial

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 1, \dots\dots\dots & (*) \\ x(0) = 1. \end{cases} \quad (1.3)$$

La solution de (1.3) est

$$\phi(t) = 1.$$

La solution de (*) telle que $x(0) = x_0$ est

$$x(t) = (x_0 - 1)e^{-t} + 1.$$

On a :

$$|x(t) - \phi(t)| = |(x_0 - 1)e^{-t}| < |x_0 - 1|, \quad \forall t \geq 0,$$

il suffit de prendre $\delta \leq \varepsilon, \delta = \varepsilon \implies \phi(t) = 1$ est stable.

1.3 Systèmes dynamiques

Définition 1.3.1. Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $U: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie et continue telle que

- 1) $U(., x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- 2) $U(t, .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- 3) $U(0, x) = x$.
- 4) $U(t + s, x) = U(t, U(s, x)), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Proposition 1.3.1. Les systèmes dynamiques sont engendrés par des systèmes différentiels.

Exemple 1.3.1. Soit le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.4)$$

où A est une matrice constante, $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}^n$. La solution de (1.4) est donnée par

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

Le système (1.4) engendre un système dynamique

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad U(t, x) = e^{tA}x.$$

En effet :

1) On a $\forall t, \tau \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \|U(t + \tau, x) - U(t, x)\| &= \|e^{(t+\tau)A}x - e^{tA}x\| \leq \|e^{tA}\| \|e^{\tau A}x - x\| \leq e^{t\|A\|} \|e^{\tau A} - I\| \|x\| \\ &\leq e^{t\|A\|} (e^{|\tau\|A\|} - 1) \|x\| \rightarrow 0 \text{ quand } \tau \rightarrow 0, \end{aligned}$$

d'où $U(\cdot, x)$ est continue.

2) On a $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\|U(t, x) - U(t, y)\| = \|e^{At}x - e^{At}y\| = \|e^{At}\| \|x - y\| < M \|x - y\|,$$

où M constante et puisque t est fixé d'où la continuité de $U(t, \cdot)$.

3) On a $U(0, x) = e^{A0}x = Ix = x$.

4) $\forall t, s \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n$, on a $U(t + s, x) = e^{At}e^{As}x = U(t, e^{As}x) = U(t, U(s, x))$.

D'où le résultat.

Définition 1.3.2. Un système dynamique U sur \mathbb{R}^n est linéaire si :

$$U(t, \alpha x + \beta y) = \alpha U(t, x) + \beta U(t, y),$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1.4 Flot d'une équation différentielle

Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

On note par $I(x_0)$ l'intervalle maximum d'existence de la solution $\phi(t, x)$ du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Définition 1.4.1. Soit E un sous ensemble ouvert dans \mathbb{R}^n et $f \in C^1(E)$, et soit pour $x_0 \in E$ la solution $\Phi(t, x_0)$ du problème (1.5) définie sur $I(x_0)$. Alors pour $t \in I(x_0)$, l'ensemble des applications Φ_t définit par

$$\Phi_t(x_0) = \Phi(t, x_0),$$

est appelé le flot du système différentiel (1.5).

$\phi_t(x_0)$ possède les propriétés suivantes :

1. $\phi_t(x_0)$ est de classe C^1
2. $\phi_0(x_0) = x_0$
3. $\phi_{t+s}(x_0) = \phi_t(\phi_s(x_0))$.

Remarque 1.4.1. Le flot est dit autonome si f ne dépend pas explicitement du temps t , sinon il est dit non autonome.

Exemple 1.4.1. On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La solution de ce problème est : $\phi(t, x_0) = e^{At}x_0$ avec

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

donc le flot associé à ce problème est défini par :

$$\begin{aligned} \phi_t : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x_0 &\mapsto \phi_t(x_0) = e^{At}x_0 = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} x_0. \end{aligned}$$

1.5 Théorie des systèmes différentiels non linéaires autonomes

Dans cette section, on considère le système non linéaire autonome

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.6}$$

1.5.1 Points d'équilibre et linéarisation

Définition 1.5.1. (*Point critique*). On appelle point critique (ou point d'équilibre ou point singulier ou point fixe) du système (1.6), tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie :

$$f(x_0) = 0.$$

Remarque 1.5.1. Un point qui n'est pas critique est dit régulier.

Définition 1.5.2. Un point critique $x = a$ du système (1.6) est appelé attracteur positif s'il existe un voisinage V_a de a tel que si :

$$x(t_0) \in V_a \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = a.$$

Si un point critique $x = a$, a cette propriété quand $t \rightarrow -\infty$, alors $x = a$ est appelé attracteur négatif.

Exemple 1.5.1. Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = -2y, \end{cases}$$

l'origine est le seul point critique pour ce système .

On voit sur la figure 1.1 que le point critique $(0, 0)$ est un attracteur positif.

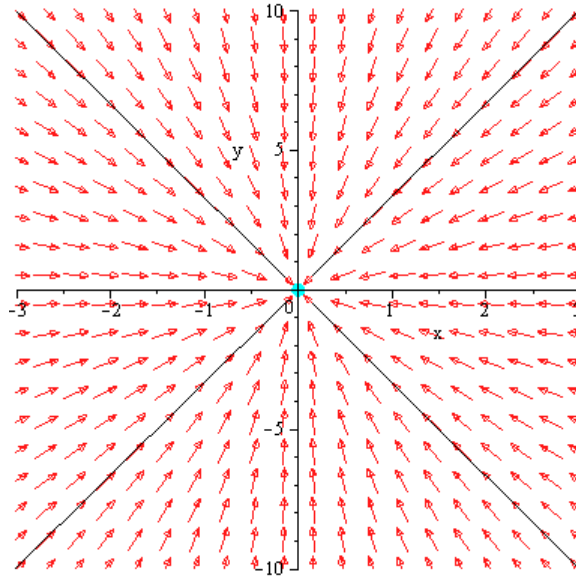


FIGURE 1.1 – Attracteur positif

Définition 1.5.3. (Linéarisation). *Considérons le système non linéaire autonome (1.6), où x_0 est le point d'équilibre.*

Le système

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{où } A = Df(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (1.7)$$

est appelé le système linéarisé de (1.6) en $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.5.2. *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^2 - y, \\ \dot{y} = x + 3y^2, \end{cases} \quad (1.8)$$

l'origine est le seul point critique pour ce système .

La matrice jacobienne associée à (1.8) calculée en $(0, 0)$ est

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x, \end{cases}$$

est le système linéarisé de (1.8) en $(0, 0)$.

Définition 1.5.4. *Le point critique x_0 du système $\dot{x} = f(x)$ est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(x_0)$ n'a de partie réelle nulle.*

Remarque 1.5.2. *La linéarisation d'un système différentiel nous amène à l'étude de la nature des point critiques.*

1.5.2 Classification et nature des points d'équilibre

Définition 1.5.5. *On considère le système :*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

soit x_0 son point critique.

- *Le point critique x_0 est appelé **selle** s'il est hyperbolique et si $A = Df(x_0)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.*
- *Le point x_0 est dit **puits** si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives.*
- *Le point x_0 est une **source** si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles positives.*

Exemple 1.5.3. *Soit le système non linéaire autonome*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y^2, \\ \dot{y} = 3x^3 + y. \end{cases} \quad (1.9)$$

Le système (1.9) a un seul point d'équilibre qui est l'origine $(0,0)$, et le système linéarisé en ce point est

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ce système a deux valeurs propres réelles de même signe $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$. Alors le point critique $(0,0)$ est une source.

Pour un système plan à coefficients constants

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

où A une matrice carrée constante, l'origine $(0,0)$ est le point critique. Considérons λ_1 et λ_2 les valeurs propres de la matrice A . On distingue les différents cas selon les valeurs propres λ_1 et λ_2 :

- (1) Si $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ sont réelles et de signes différents, l'origine est une selle. Il est toujours instable.

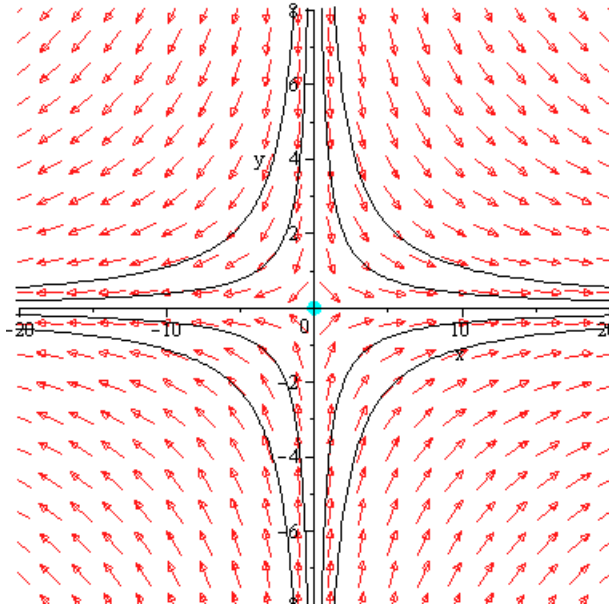


FIGURE 1.2 – selle

(2) Si λ_1 et λ_2 sont réelles de même signe, alors on a trois cas :

- Si $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$, l'origine est un noeud stable.
- Si $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$, l'origine est un noeud instable.
- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, l'origine est un noeud propre, il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$.

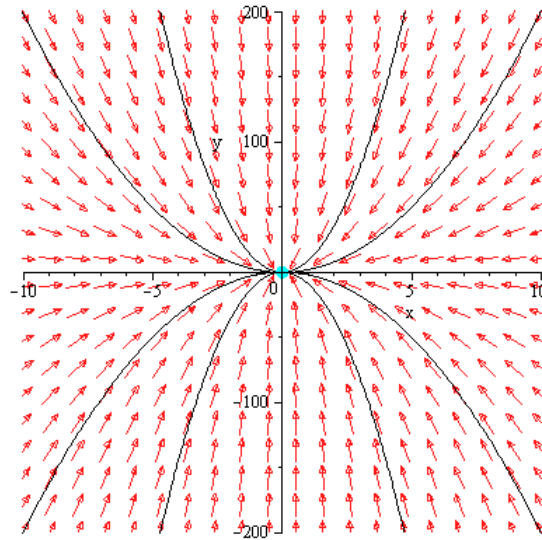


FIGURE 1.3 – noeud stable

(3) Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées, alors l'origine est un foyer. Il est stable si $Re(\lambda_{1,2}) < 0$ et instable si $Re(\lambda_{1,2}) > 0$.

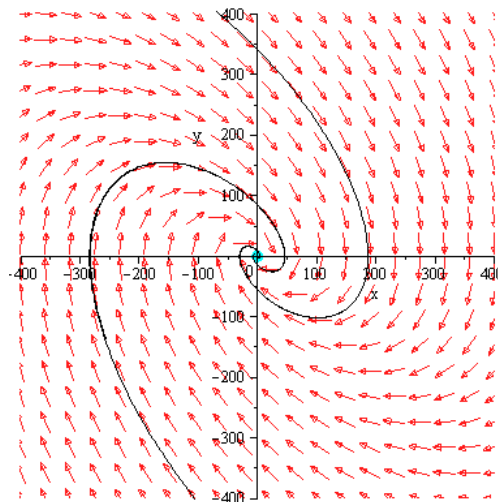


FIGURE 1.4 – foyer stable

(4) Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures, alors l'origine est un centre. Il est stable mais n'est pas asymptotiquement stable.

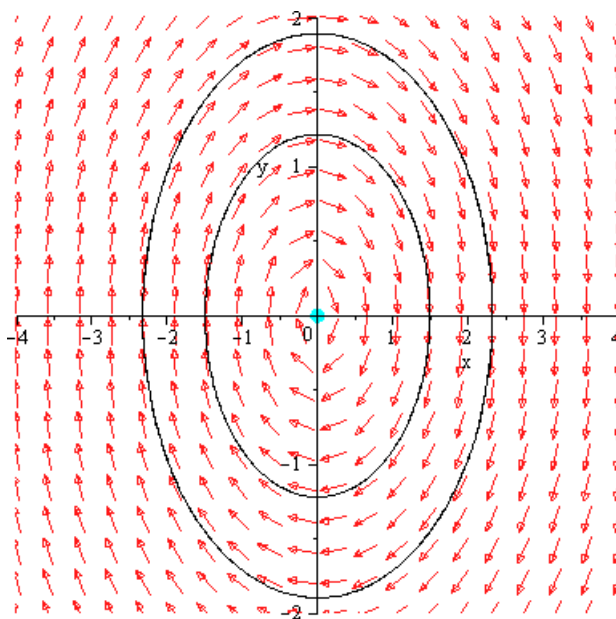


FIGURE 1.5 – Centre stable

Exemple 1.5.4. Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

l'origine est le seul point critique pour ce système .

Ce système a deux valeurs propres imaginaires pures $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$. Alors le point critique $(0, 0)$ est un centre stable.

1.5.3 Plan et portrait du phase

Définition 1.5.6. *Soit le système planaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.10)$$

où P et Q sont des polynômes en x et y à coefficients réels de degré n .

Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.10) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelés orbites ou trajectoires.

Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentés dans le plan (x, y) s'appelle portrait de phase et le plan (x, y) est appelé plan de phase.

1.5.4 Théorème de Hartman-Grobman

Le théorème de Hartman-Grobman (voir [39]) est un résultat important dans la théorie qualitative locale des systèmes différentiels. Il montre qu'au voisinage d'un point critique hyperbolique x_0 le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.11)$$

a la même structure qualitative du système linéarisé

$$\dot{x} = Df(x_0) \cdot x. \quad (1.12)$$

Autrement dit, si l'origine est un point selle ou foyer ou noeud pour le système (1.12), alors le point critique x_0 sera respectivement selle ou foyer ou noeud pour le système (1.11).

Cependant si l'origine est de type centre pour le système (1.12) alors on ne peut rien dire sur la nature du point critique x_0 de (1.11).

Exemple 1.5.5. *Soit le système non linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2xy^2, \\ \dot{y} = -2y + 4x^2y, \end{cases}$$

donc l'origine $(0, 0)$ est le seul point critique de ce système, et le système linéarisé en ce point est

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ce système a deux valeurs propres réelles de signes différents $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Alors le système linéarisé en $(0, 0)$ est un point selle instable. Donc le point critique du système non linéaire est aussi du type selle instable.

Exemple 1.5.6. Soit le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3, \\ \dot{y} = -x - 3y^3, \end{cases}$$

donc l'origine $(0, 0)$ est le seul point critique de ce système, la matrice jacobienne en ce point est

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle admet deux valeurs propres imaginaires pures $\lambda_{1,2} = \pm i$. Alors le système linéarisé on point critique $(0, 0)$ est un centre stable. Mais pour le système non linéaire on ne peut rien dire.

1.5.5 Orbites périodiques et cycles limites

Soit le système différentiel

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.13}$$

Définition 1.5.7. (Orbite périodique). On appelle orbite périodique toute trajectoire fermée $\phi(t, x)$ du système(1.13) vérifiant

$$\phi(t + T, x) = \phi(t, x).$$

Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie cette égalité est appelé période.

Proposition 1.5.1. Toute solution périodique entoure au moins un point d'équilibre.

Définition 1.5.8. (Cycle limite). Pour un système plan, on appelle cycle limite une orbite périodique qui est isolée dans l'ensemble des orbites périodiques.

Théorème 1.5.1. (Stabilité des cycles limites). C étant la trajectoire correspondante au cycle limite, toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de C sont telle que : soit elles s'enroulent toutes en spirales autour de C pour $t \rightarrow +\infty$ où bien $t \rightarrow -\infty$.

1. Le cycle limite est **stable**, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont attirées vers C .
2. Le cycle limite est **instable**, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont refoulées de C .

3. Le cycle limite est **semi-stable**, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont attirées d'un côté et repoussées de l'autre.

Exemple 1.5.7. Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - 2x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + 2y - 2y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (1.14)$$

En coordonnées polaires $x = r \cos(t)$, $y = r \sin(t)$ avec $r > 0$, le système (1.14) devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = 2r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

d'où

$$\dot{r} = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = \pm 1.$$

Comme $r > 0$, on n'accepte que la racine positive $r = 1$. Donc, pour $r = 1$ on a la solution périodique $(x(t), y(t)) = (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0))$, avec $\theta(0) = \theta_0$.

Dans le plan de phase il y a un seul cycle limite dont l'équation $x^2 + y^2 = 1$ et d'amplitude $r = 1$. Voir figure (1.6)

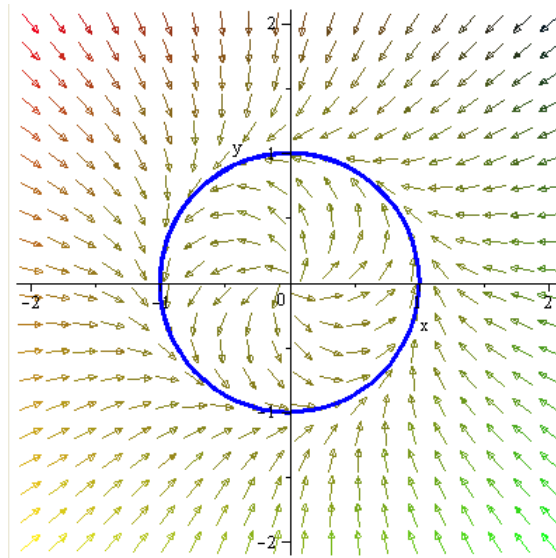


FIGURE 1.6 – Cycle limite du système (1.14).

Remarque 1.5.3. Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.

1.6 Existence et non-existence des cycles limites

Théorème 1.6.1. (Poincaré-Bendixson). *Soit le système plan suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (1.15)$$

supposons que f, g sont des fonctions de classe C^1 sur E , où E est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 , le système (1.15) a une orbite γ telle que l'orbite positive $\gamma_+(p) = \{\Phi(p, t), t \geq 0\}$ passant par le point p est contenue dans un sous ensemble compact A de E . Alors on est dans l'un des trois cas suivants :

- *Soit $\gamma_+(p)$ tend vers un point d'équilibre.*
- *Soit $\gamma_+(p)$ tend vers une orbite périodique.*
- *Soit $\gamma_+(p)$ est une orbite périodique.*

Une conséquence très importante de ce théorème est quand A ne contient pas de points critiques où dans ce cas, on est certain de l'existence d'une solution périodique.

La difficulté dans l'application de ce résultat est bien la construction de la région (elle correspond souvent à un anneau) A . Pour cela cherchons deux cercles (C_1) et (C_2) telle que (C_1) soit à l'intérieur de (C_2) .

La recherche des cercles (C_1) et (C_2) ressemble à la recherche de la fonction de Lyapunov $v(x, y) = x^2 + y^2, x^4 + y^2, x^4 + y^4 \dots$

Soit $(C) : v(x, y) = x^2 + y^2 = c$

$$c_1 > 0 : (C_1) : x^2 + y^2 = c_1$$

$$c_2 > 0 : (C_2) : x^2 + y^2 = c_2, \text{ telle que } c_1 < c_2$$

$$\text{Soit } (C) : v(x, y) = x^2 + y^2 = c > 0.$$

Si pour tout point $p \in (C)$

On a

$$\left[\frac{dv}{dt} \right]_p = \frac{dv}{dx} \dot{x} + \frac{dv}{dy} \dot{y} > 0$$

\Rightarrow Toute trajectoire qui passe par le point p se dirige vers son extérieur.

Exemple 1.6.1. Montrons que le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + x, \\ \dot{y} = -x - y^3 + y, \end{cases}$$

admet au moins une solution périodique dans une région de \mathbb{R}^2 .

On a le point $(0,0)$ est le seul point d'équilibre, la matrice jacobienne en $(0,0)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

cette matrice admet deux valeurs propres complexes $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$, donc $(0,0)$ est un foyer instable pour le système linéarisé \Rightarrow il reste foyer instable pour le système non linéaire d'après le théorème de Hartman-Grobman.

Cherchons l'anneau A :
soit $v(x, y) = x^2 + y^2 = c$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{dv}{dx}\dot{x} + \frac{dv}{dy}\dot{y} = 2x(y - x^3 + x) + 2y(-x - y^3 + y) \\ &= 2[(x^2 + y^2) - (x^4 + y^4)]. \end{aligned}$$

On a pour

$$\begin{aligned} 0 &< x^2 + y^2 < 1 \\ x^4 + y^4 &< x^2 + y^2 \end{aligned}$$

donc si on prend $(C_1) : x^2 + y^2 = c_1$ avec $0 < c_1 < 1$ et $\frac{dv}{dt} > 0$
 \Rightarrow toute trajectoire coupant (C_1) se dirige vers l'extérieur.

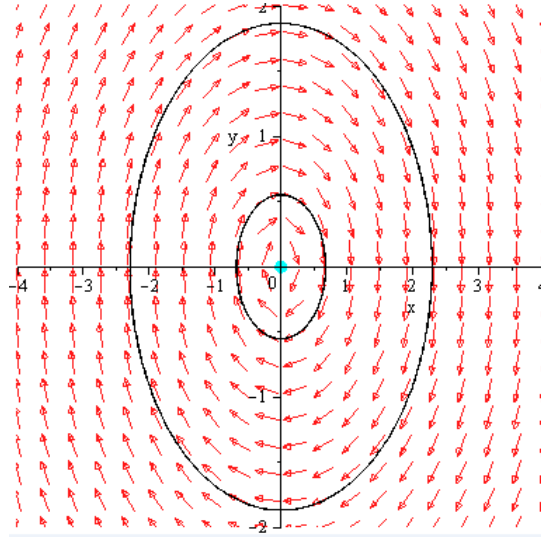
On a pour

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &> 2 \\ 2(x^4 + y^4) &> (x^2 + y^2)^2 > 2(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Pour $c_2 > 2$ $\frac{dv}{dt} < 0$

\Rightarrow toute trajectoire coupant (C_2) se dirige vers l'intérieur.

Alors d'après le théorème de Poincaré Bendixon il existe au moins une solution périodique dans l'anneau A formé des deux cercle (C_1) et (C_2) puisque cet anneau ne contient pas de points critiques. (Voir la figure)



Théorème 1.6.2. (Critère de Bendixson). Soit le système plan

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

et soit $F = (f, g)^T \in C^1(E)$ où E est une région simplement connexe dans \mathbb{R}^2 . Si la divergence du champ de vecteur F (notée ∇F) est non identiquement nulle et ne change pas de signe dans E , alors ce système n'a aucune orbite fermée entièrement contenue dans E .

Preuve.

Supposons que (1.15) possède une solution périodique de période T noté τ , elle correspond à une courbe (orbite) fermée dans E .

D'après la formule de Green on a :

$$\begin{aligned} \int \int_{G=\text{intérieur de } \tau} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{\tau} f dy - g dx \\ &= \int_0^T [f(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} - g(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}] dt \\ &= \int_0^T [f(x(t), y(t))g(x(t), y(t)) - g(x(t), y(t))f(x(t), y(t))] dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ceci est une contradiction, puisque $\operatorname{div}F$ est non identiquement nulle et ne change pas de signe, c'est-à-dire, soit négatif soit positif, donc l'intégrale ne peut pas être nulle. Alors il ne peut pas avoir de solution périodique contenue dans E .

Exemple 1.6.2. *Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 2y^4, \\ \dot{y} = x^2 - y^2 - x^2y^3. \end{cases}$$

Soit $F = (2xy - 2y^4, x^2 - y^2 - x^2y^3)^T$. On calcule la divergence du champ de vecteur F , on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{div}F = \nabla F &= \frac{\partial}{\partial x} (2xy - 2y^4) + \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - y^2 - x^2y^3) \\ &= 2y - 2y - 3x^2y^2 = -3x^2y^2 < 0. \end{aligned}$$

D'où, d'après le critère de Bendixson ce système n'a aucun cycle limite dans \mathbb{R}^2 .

Théorème 1.6.3. (Critère de Dulac). *Soit $F = (f, g)^T \in C^1(E)$ où E est une région simplement connexe dans \mathbb{R}^2 . S'il existe une fonction $B \in C^1(E)$ telle que $\nabla(BF)$ est non identiquement nulle et ne change pas de signe dans E , alors le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

n'admet aucune orbite fermée entièrement contenue dans E .

Preuve.

Supposons qu'il existe une solution périodique τ de période T contenue dans E . Elle est représentée par une trajectoire fermée dans le plan.

Soit G l'intérieur de cette trajectoire d'après la formule de Green on a :

$$\begin{aligned} \int \int_G \left(\frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{\tau} Bf dy - Bg dx \\ &= \int_0^T B \left[f(x, y) \frac{dy}{dt} - g(x, y) \frac{dx}{dt} \right] dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ceci est une contradiction, puisque $\operatorname{div}BF$ est non identiquement nulle et ne change pas de signe, c'est-à-dire, soit négatif soit positif, donc l'intégrale ne peut pas être nulle. Alors il ne peut avoir de solution périodique contenue dans E .

Exemple 1.6.3. *Soit le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ax - by + \alpha x^2 + \beta y^2. \end{cases}$$

Soit $B(x, y) = be^{-2\beta x}$ avec $F = (y, -ax - by + \alpha x^2 + \beta y^2)^T$. Calculant la divergence de BF :

$$\begin{aligned} \nabla(BF) &= \frac{\partial}{\partial x} (be^{-2\beta x}y) + \frac{\partial}{\partial y} be^{-2\beta x} (-ax - by + \alpha x^2 + \beta y^2) \\ &= -2\beta be^{-2\beta x}y - b^2e^{-2\beta x} + 2\beta be^{-2\beta x}y = -b^2e^{-2\beta x} < 0. \end{aligned}$$

Donc, il n'existe pas de solutions périodiques pour ce système.

• **Méthode pour obtenir les fonctions de Dulac**

La liste des fonctions B données ci-dessus ne sert qu'à un nombre limité de systèmes. On discute quelques situations plus générales.

On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1.16)$$

1. Premièrement, proposons une autre fonction positive ou négative $K(x_1, x_2)$ qui s'annule seulement sur un ensemble de mesure nulle telle qu'elle satisfait

$$\frac{\partial(f_1B)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2B)}{\partial x_2} = K(x_1, x_2)$$

2. Maintenant choisissons K pour obtenir quelques résultats.

Alors prenons $K(x_1, x_2) = c(x_1, x_2) \times B(x_1, x_2)$, avec c est une fonction positive ou négative qui s'annule uniquement sur un ensemble de mesure nulle, et substituons

cette relation dans l'équation précédente pour obtenir l'expression suivante :

$$f_1 \frac{\partial B}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial B}{\partial x_2} + B \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) = c(x_1, x_2) \times B(x_1, x_2) \quad (1.17)$$

On peut réécrire cette équation

$$f_1 \frac{\partial B}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial B}{\partial x_2} = B \left(c(x_1, x_2) - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \right) \quad (1.18)$$

3. Trouvons la solution de cette équation aux dérivées partielles quasilineaire du premier ordre.

4. Finalement, voyons si B est une fonction de Dulac pour le système (1.16) jusqu'ici, on a construit une méthode qui nous permet d'écarter les orbites périodiques associées au système d'équations différentielles dans le plan telle qu'elle est résumée dans ce qui suit.

Théorème 1.6.4. *Pour le système d'équation différentielle (1.16), une solution B du système associées (1.18) (pour quelques fonctions c qui ne changent pas de signe et s'annulent seulement sur un sous-ensemble de mesure nulle), est une fonction de Dulac pour le système (1.16) dans toute région A simplement connexe contenue dans $D \setminus \{B^{-1}(0)\}$.*

Corollaire 1.6.1. *Pour le système d'équations différentielles (1.16), si (1.18) (pour quelques fonctions c qui ne changent pas de signe et s'annulent seulement sur un sous-ensemble de mesure nulle) a une solution B sur D telle que B ne change pas de signe et s'annule sur un sous-ensemble de mesure nulle, alors B est une fonction de Dulac pour le système (1.16) sur D .*

Remarque 1.6.1. *Avec le choix de K dans l'étape 2, on obtient une équation linéaire (1.16) qui est simple à manipuler.*

Remarque 1.6.2. *Avec le choix de c est utilisé pour simplifier l'équation (1.17), on peut toujours prendre c une constante non nulle.*

• Applications

Exemple 1.6.4. *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) \\ \dot{x}_2 = 3x_1^2 x_2 \end{cases}$$

d'après l'équation (1.18), on obtient :

$$x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) \frac{\partial B}{\partial x_1} + 3x_1^2 x_2 \frac{\partial B}{\partial x_2} = B[c(x_1, x_2) - (2x_1 x_2^2 (1 - \cos x_2) + 3x_1^2)]$$

qui est une équation différentielle aux dérivées partielles quasilinéaire.

En appliquant la méthode des caractéristiques, on obtient le système associé suivant

$$\begin{cases} dx_1 = x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) dt \\ dx_2 = 3x_1^2 x_2 dt \\ dB = B[c(x_1, x_2) - (2x_1 x_2^2 (1 - \cos x_2) + 3x_1^2)] dt \end{cases}$$

des deux premières équations, on élimine le paramètre t on obtient

$$3x_1^2 x_2 dx_1 = x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) dx_2.$$

Résolvant cette équation, on obtient la première caractéristique

$$3x_1 + x_2 \sin x_2 + \cos x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 = c_1.$$

Prenons $c = 3x_1^2$ dans la dernière équation et on multiplie l'équation par x_1 , on trouve

$$x_1 dB = -B(2x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2)) dt.$$

Exemple 1.6.5. *Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2x_2^2 \cos x_1 + (1 + x_1^2)x_2 + x_2^2 \end{cases}$$

Utilisons l'équation (1.18), et prenons $c = 1 + x_1^2$, on obtient

$$-2x_1x_2 \frac{\partial B}{\partial x_1} + (x_1^2x_2^2 \cos x_1 + (1 + x_1^2)x_2 + x_2^2) \frac{\partial B}{\partial x_2} = -B(2x_1^2x_2 \cos x_1).$$

Supposons que B dépend uniquement de x_1 on a

$$-2x_1x_2 \frac{\partial B}{\partial x_1} = -B(2x_1^2x_2 \cos x_1),$$

alors la solution est

$$B = \exp\left(\int x_1 \cos x_1 dx_1\right).$$

1.7 Théorie de bifurcation

Les systèmes d'équations différentielles paramétrées peuvent avoir différents comportements asymptotiques (tendre vers un équilibre, un cycle limite, ...) en fonction des valeurs de leurs paramètres. Ils existent certaines valeurs pour lesquelles le comportement du système passe d'un état qualitatif à un autre. Ce changement d'état qualitatif est une bifurcation et la valeur associée du paramètre est appelée valeur de bifurcation.

La théorie des bifurcations des champs de vecteurs a pour but de décrire les modifications du portrait de phase des champs de vecteurs qui dépendent différemment d'un paramètre μ

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (1.19)$$

où $\mu \in \mathbb{R}$, $f \in C^1(E)$, E un ouvert de \mathbb{R}^n .

Considérons l'exemple suivant :
soit le système différentiel paramétré

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \mu x, \\ \dot{y} = -x + \mu y. \end{cases} \quad (1.20)$$

Le système (1.20) a un seul point d'équilibre $(0, 0)$. la matrice associée est :

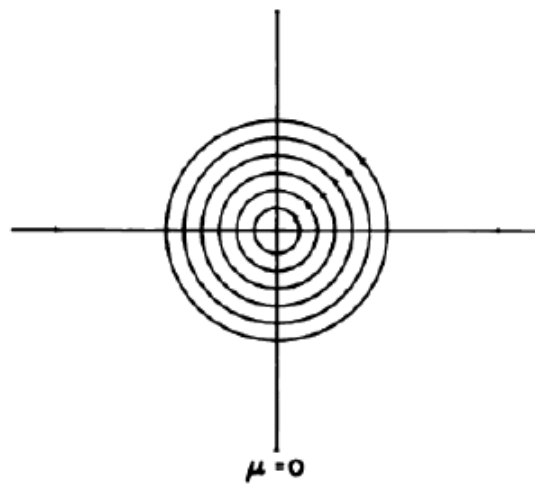
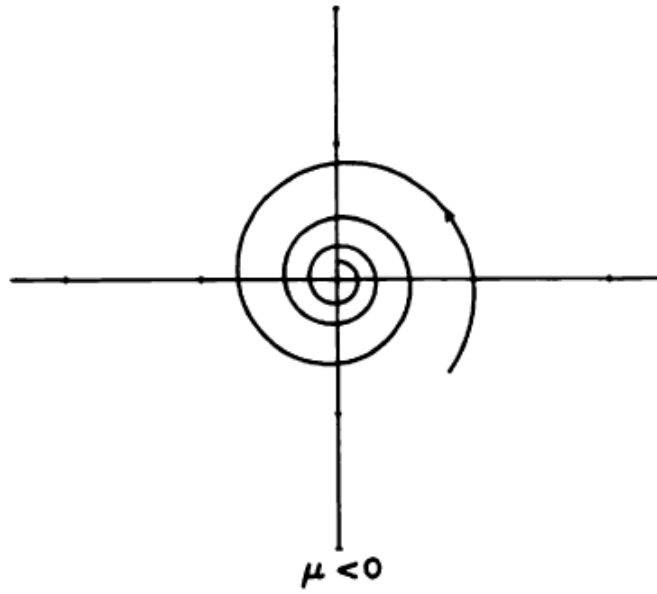
$$\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$$

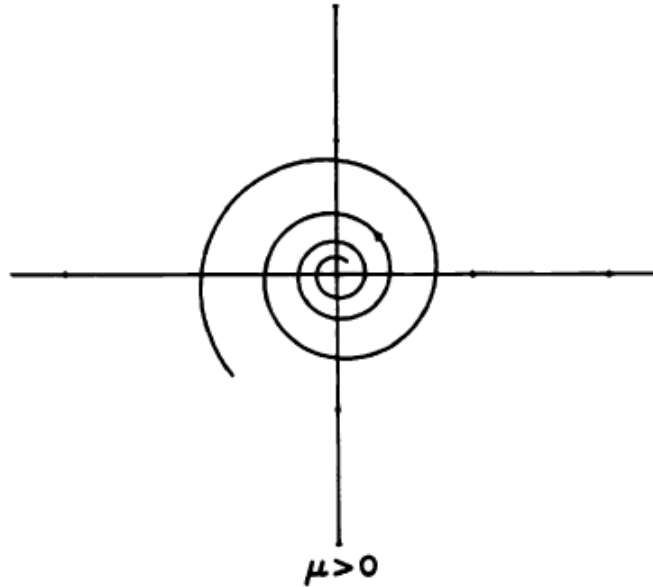
elle admet les valeurs propres $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$.

- Si $\mu < 0$, alors l'origine est un foyer stable.
- Si $\mu > 0$, alors l'origine est un foyer instable.
- Si $\mu = 0$, cette matrice admet une paire de valeurs propres imaginaires pures, donc l'origine est un centre.

Quand ce paramètre change de signe (c-à-d passant du négatif au positif), le système change de stabilité et passe de stable à instable.

On dit, qu'il y a une bifurcation et dans ce cas $\mu = 0$ est la valeur de bifurcation.





Il existe deux types de bifurcations : les bifurcations locales et les bifurcations globales. Les bifurcations "locales" sont appelées ainsi car elles peuvent toujours être identifiées lors d'une linéarisation du système au voisinage de la solution. Le critère de détection utilisé dans le cas des bifurcations locales concerne les valeurs propres du Jacobien qui intervient au premier ordre dans la linéarisation. Par contre, les bifurcations "globales" ne font donc pas forcément intervenir le voisinage de la solution, ici, les linéarisations locales autour de la solution ne seront donc d'aucune aide. C'est pour cela que ces bifurcations sont appelées globales. Ci dessous, un exemple d'une bifurcation locale.

Exemple 1.7.1 (Bifurcation selle-noeud). *Soit le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + \mu \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (1.21)$$

Selon le signe de μ , on distingue trois cas :

- Si $\mu < 0$ dans ce cas le système admet deux points d'équilibre de coordonnées : $(-\sqrt{-\mu}, 0)$ et $(\sqrt{-\mu}, 0)$.

La matrice jacobienne du système s'écrit

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Au point $(-\sqrt{-\mu}, 0)$, la matrice jacobienne s'écrit

$$J(-\sqrt{-\mu}, 0) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{-\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice admet deux valeurs propres réelles négatives $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -2\sqrt{-\mu}$, d'où le point d'équilibre $(-\sqrt{-\mu}, 0)$ est un noeud stable.

Au point $(\sqrt{-\mu}, 0)$, la matrice jacobienne s'écrit

$$J(\sqrt{-\mu}, 0) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{-\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice admet deux valeurs propres réelles et de signes opposés $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2\sqrt{-\mu}$, d'où le point d'équilibre est un point selle instable.

Donc, quand $\mu < 0$ le système admet deux points d'équilibres, le premier du type noeud et le deuxième du type selle.

- Si $\mu = 0$, le système (1.19) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

L'unique point critique du système est l'origine. La matrice jacobienne associée s'écrit

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc le point d'équilibre $(0, 0)$ est non hyperbolique. L'étude de la première équation montre que $x = 0$ est un point d'équilibre non hyperbolique et la deuxième équation montre que $y = 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

- Si $\mu > 0$, dans ce cas le système (1.21) n'admet aucun point d'équilibre car $x \in \mathbb{R}$.

*Cette bifurcation est une bifurcation locale appelée "**selle-noeud**" correspond à l'apparition de deux points d'équilibre, l'un stable (un noeud) et l'autre instable (un point selle) et au point de bifurcation $\mu = 0$ les deux points d'équilibre disparaissent et un point non hyperbolique apparaît, qui en $\mu > 0$ lui même disparaît : cette bifurcation correspond donc au changement de nombre de points d'équilibre et leur stabilité.*

Dans cette thèse, on s'intéresse à un autre type de bifurcation locale appelée la **bifurcation d'un centre linéaire**. On considère un système différentiel plan paramétré (qui dépend de ε), pour lequel il admet un centre à l'origine quand $\varepsilon = 0$, on étudie s'il y a naissance d'orbites périodiques lorsqu'on varie le paramètre ε .

Chapitre 2

Méthode de moyennisation

La méthode de moyennisation est l'une des plus importantes méthodes de perturbations utilisée actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques, cette méthode donne une relation quantitative entre les solutions d'un système différentiel périodique non autonome et celle de son système différentiel moyenné lequel est autonome.

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode de moyennisation d'ordre un et deux appliquée aux équations différentielles contenant un petit paramètre ε de la forme

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon),$$

où $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 2.0.1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui est continue et T -périodique en la première variable t . On appelle fonction moyennée f^0 de f la fonction définie par

$$f^0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt.$$

Définition 2.0.2. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On dit que f a une moyenne notée f^0 si la limite

$$f^0(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\tau, x) d\tau.$$

existe et

$$\left\| \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\tau, x) d\tau - f^0(x) \right\| \leq k\sigma(T), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

avec $k \geq 0$ et $\sigma : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est une fonction strictement décroissante, continue et bornée telle que $\sigma(T) \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow \infty$.

2.1 Théorème de moyennisation

Considérons le problème à valeur initial suivant

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0. \quad (2.1)$$

On suppose que $f(t, x)$ est T -périodique en t et on introduit la moyenne

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt.$$

Considérons maintenant le problème

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0. \quad (2.2)$$

Théorème 2.1.1. *Soient les problèmes aux valeurs initiales (2.1) et (2.2) avec $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$. Supposons que*

1. f, g et $D_x f$ sont continues et bornées par une constante M indépendante de ε dans $[0, +\infty) \times D$.
2. g est Lipschitzienne en $x \in D$.
3. $f(t, x)$ est T -périodique en t , T est indépendante de ε .
4. $y(t)$ est contenue dans un intérieur de D .

Alors, on a $x(t) - y(t)$ est de l'ordre $O(\varepsilon)$ pendant un temps d'échelle $1/\varepsilon$.

Où la solution $y(t)$ représente une approximation de $x(t)$.

Lemme 2.1.1. (Gronwall). *Supposons que pour $t_0 \leq t \leq t_0 + T$*

$$\phi(t) \leq \delta_2(t - t_0) + \delta_1 \int_{t_0}^t \phi(s) ds + \delta_3,$$

où $\phi(t)$ est une fonction continue, $\phi(t) \geq 0 \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T$, δ_1, δ_2 et δ_3 sont des constantes avec $\delta_1 > 0$, $\delta_2 \geq 0$ et $\delta_3 \geq 0$. Alors

$$\phi(t) \leq \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) e^{\delta_1(t-t_0)} - \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

pour $t_0 \leq t \leq t_0 + T$.

Preuve du Théorème (2.1.1).

Les hypothèses (1) et (2) nous assurent l'existence et l'unicité de la solution des problèmes aux valeurs initiales (2.1) et (2.2) sur l'échelle du temps $\frac{1}{\varepsilon}$.

Posons :

$$u(t, y) = \int_{t_0}^t (f(s, y) - f^0(y)) ds.$$

On a

$$\|u(t, y)\| \leq 2MT \text{ pour } t \geq t_0 \text{ et } y \in D.$$

Maintenant, nous introduisons

$$z(t) = y(t) + \varepsilon u(t, y(t)).$$

Comme $y(t) \subset D$, $\forall t \geq t_0$, on a l'estimation

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq \|x(t) - z(t)\| + \|z(t) - y(t)\| \\ &\leq \|x(t) - z(t)\| + \varepsilon \|u(t, y(t))\| \\ &\leq \|x(t) - z(t)\| + 2\varepsilon MT. \end{aligned}$$

Notons que

$$x(t) - z(t) = \int_{t_0}^t \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} \right) ds.$$

Calculons

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} &= \varepsilon f(t, x(t)) + \varepsilon^2 g(t, x(t), \varepsilon) - \frac{dy}{dt} \\ &\quad - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) \cdot \frac{dy}{dt} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(t, y(t)). \end{aligned}$$

Remplaçons $\frac{dy}{dt}$ par $\varepsilon f^0(y)$, on aura

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} = \varepsilon f(t, x(t)) + \varepsilon f(t, z(t)) + R$$

où

$$R = \varepsilon^2 g(t, x(t), \varepsilon) - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) f^0(y) - \varepsilon f(t, y(t)) - \varepsilon f(t, z(t)).$$

On a

$$\|f^0(y)\| \leq M \text{ et } \left\| \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) \right\| \leq 2MT.$$

Grâce à la continuité lipschitzienne de f nous avons

$$\begin{aligned} \|f(t, z(t)) - f(t, y(t))\| &\leq L \|z(t) - y(t)\| \\ &\leq \varepsilon L \|u(t, y(t))\| \\ &\leq 2\varepsilon LMT. \end{aligned}$$

Donc il existe une constante k telle que

$$\|R\| \leq k\varepsilon^2.$$

C'est clair que

$$\begin{aligned} \|x(t) - z(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \left\| \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} \right\| ds \\ &\leq \varepsilon \int_{t_0}^t \|f(t, x(t)) - f(t, z(t)) + k\varepsilon\| ds \\ &\leq \varepsilon \int_{t_0}^t \|f(t, x(t)) - f(t, z(t))\| ds + k\varepsilon^2(t - t_0) \\ &\leq \varepsilon L \int_{t_0}^t \|x(s) - z(s)\| ds + k\varepsilon^2(t - t_0). \end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall

$$\|x(t) - z(t)\| \leq \varepsilon \frac{k}{L} e^\varepsilon L(t - t_0) - \varepsilon \frac{k}{L}.$$

Par conséquent

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon \left(\frac{k}{L} e^\varepsilon L(t - t_0) - \frac{k}{L} + 2MT \right).$$

Si $\varepsilon L(t - t_0)$ est borné par une constante indépendante de ε , on aura l'approximation

$$x(t) = y(t) - O(\varepsilon) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

■

2.2 Théorème de moyennisation du premier ordre

On considère le système différentiel

$$\dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 G(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (2.3)$$

où $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, D est un domaine borné et $t \geq 0$. Supposons que $F(t, x)$ et $G(t, x, \varepsilon)$ sont des fonctions T -périodiques en t .

Le système moyenné associé au système (2.3) est

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0, \quad (2.4)$$

où

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, y) \, ds. \quad (2.5)$$

Théorème 2.2.1. *Soit le système (2.3), on suppose que $F, G, D_x F, D_x^2 F$ and $D_x G$ sont continues et bornées par une constante M dans $[0, \infty) \times D$ avec $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Supposons aussi que F et G sont T -périodiques en t , où T indépendante de ε . Alors on a :*

(1) *Si le point p est un point critique pour le système moyennisé (2.4) tel que*

$$\det(D_x f^0(p)) \neq 0. \quad (2.6)$$

Alors pour $|\varepsilon| > 0$, suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $x(t, \varepsilon)$ du système (2.3) telle que $x(0, \varepsilon) \rightarrow p$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

(2) *Si le point critique $y = p$ du système moyenné (2.4) est hyperbolique, alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, la solution périodique correspondante $x(t, \varepsilon)$ du système (2.3) est unique, hyperbolique et de même stabilité que p .*

Exemple 2.2.1. *Soit L'équation de Van Der Pol*

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}. \quad (2.7)$$

L'équation (2.7) peut s'écrire sous la forme d'un système à deux équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y, \end{cases}$$

en coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ avec $r > 0$, ce système devient de la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r \sin^2(\theta) (1 - r^2 \cos^2(\theta)), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \cos(\theta) \sin(\theta) (1 - r^2 \cos^2(\theta)). \end{cases} \quad (2.8)$$

Le système (2.8) est équivalent à

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r (1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2(\theta) + O(\varepsilon^2). \quad (2.9)$$

On note que l'équation (2.9) est sous la forme standard (2.3), ainsi on peut appliquer la méthode de moyennisation en prenant

$$x = r, \quad t = \theta, \quad T = 2\pi \quad \text{et} \quad F(r, \theta) = -r (1 - r^2 \cos^2(\theta))^2 \sin^2(\theta).$$

On calcule l'équation (2.5) on obtient

$$f^0(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r (1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{8} r (r^2 - 4).$$

$f^0(r)$ a une unique racine positive $r = 2$. Puisque $(df^0/dr)(2) = 1$, par l'hypothèse (1) du théorème (2.2.1) l'équation de Van Der Pol (2.7) a pour $|\varepsilon| \neq 0$ une orbite périodique d'amplitude $r = 2$. De plus, puisque $(df^0/dr)(2) = 1 > 0$ par l'hypothèse (2) du théorème (2.2.1), ce cycle limite est instable. Voir la figure (2.1).

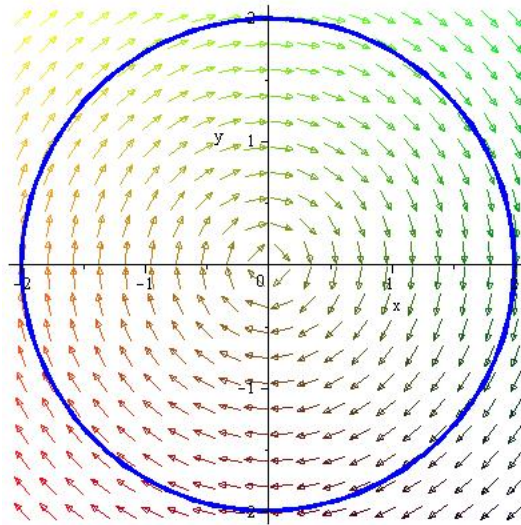


FIGURE 2.1 – Cycle limite instable de l'équation (2.7) pour $\varepsilon = 0.01$.

Exemple 2.2.2. Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(-x + x^2y), \\ \dot{y} = x + \varepsilon(-y + yz + z^2), \\ \dot{z} = \varepsilon(y + x^2 + yz - 1), \end{cases} \quad (2.10)$$

en coordonnées cylindriques $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ et $z = z$, le système (2.10) devient

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \varepsilon(r^3 \cos^3(\theta) \sin(\theta) + \sin(\theta)z^2 - r + rz - rz \cos^2(\theta)), \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 + \frac{1}{r}\varepsilon(rz \cos(\theta) \sin(\theta) + \cos(\theta)z^2 - \cos^2(\theta)r^3 + r^3 \cos^4(\theta)), \\ \frac{dz}{dt} = \varepsilon(r \sin(\theta) + r^2 \cos^2(\theta) + rz \sin(\theta) - 1). \end{cases}$$

Pour écrire le système (2.10) sous la forme standard pour appliquer la méthode de moyennisation on considère θ comme nouvelle variable indépendante. D'où

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon(r^3 \cos^3(\theta) \sin(\theta) + \sin(\theta)z^2 - r + rz - rz \cos^2(\theta)), \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon(r \sin(\theta) + r^2 \cos^2(\theta) + rz \sin(\theta) - 1). \end{cases} \quad (2.11)$$

Le système (2.11) est de la forme

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta, z) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon F_2(r, \theta, z) + O(\varepsilon^2), \end{cases}$$

où F_1, F_2 sont périodiques de période 2π , Calculons maintenant le système moyenné, on obtient

$$\begin{cases} f_1(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta, z) d\theta = \frac{1}{2}r(z - 2), \\ f_2(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta, z) d\theta = \frac{1}{2}r^2 - 1. \end{cases} \quad (2.12)$$

On résout le système (2.12), on obtient les deux racines

$$(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2), \quad (r_2, z_2) = (-\sqrt{2}, 2).$$

Comme $r > 0$, la solution $(\sqrt{2}, 2)$ est la seule qui fournisse un cycle limite. On vérifie maintenant que le déterminant calculé en cette racine est non nul.

$$D(r_1, z_1) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} \Big|_{(r_1, z_1)} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z - 1 & \frac{1}{2}r \\ r & 0 \end{pmatrix} \Big|_{(\sqrt{2}, 2)} = -1 \neq 0.$$

D'après le théorème (2.2.1), le système (2.10) a pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit un seul cycle limite.

De plus la matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}$ calculée au point $(\sqrt{2}, 2)$ admet les deux valeurs propres ± 1 (réelles de signe différent). Donc le point singulier est un point selle qui est toujours instable. Alors, le cycle limite est instable. Voir la figure (2.2).

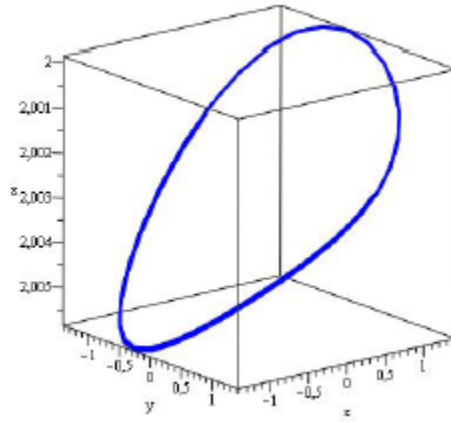


FIGURE 2.2 – Cycle limite instable de l'équation (2.10) pour $\varepsilon = 0.001$.

2.3 Théorème de moyennisation du deuxième ordre

Lorsque le champ de vecteurs est suffisamment différentiable, on peut passer à la méthode de moyennisation d'ordre deux.

considérons les deux problèmes aux valeurs initiales

$$\dot{x} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 F_3(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (2.13)$$

où $F_1, F_2 : [0, +\infty) \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $F_3 : [0, +\infty) \times D \times [0, \varepsilon_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T périodiques par rapport à t et D est un ouvert de \mathbb{R}^n .

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y) + \varepsilon^2 [f^{10}(y) + g^0(y)], \quad y(0) = x_0, \quad (2.14)$$

où f^0, f^{10} et g^0 sont des fonctions moyennées correspondantes à F_1, f_1 et F_2 respectivement.

Théorème 2.3.1. *Soit*

$$f_1(t, x) = \frac{\partial F_1}{\partial x} y_1(t, x) - \frac{\partial y_1}{\partial x} f^0(x),$$

où

$$y_1(t, x) = \int_0^t [F_1(s, x) - f^0(x)] ds + z(x),$$

et $z(x)$ est une fonction de classe C^1 dont la moyenne est nulle.

Supposons que

- (a) $\frac{\partial F_1}{\partial x}, F_2$ et F_3 sont Lipschitziennes relativement à x et continues dans leur domaine de définition.
- (b) $|F_3(t, x, \varepsilon)|$ est bornée par une constante M positive dans $[0, \frac{M}{\varepsilon}) \times D \times (0, \varepsilon_0]$.
- (c) T est indépendante de ε .
- (d) $y(t) \in D$ pendant un temps d'échelle $\frac{1}{\varepsilon}$.

Alors

$$x(t) = y(t) + \varepsilon y_1(t, y(t)) + O(\varepsilon^2),$$

sur l'échelle du temps $\frac{1}{\varepsilon}$.

Corollaire 2.3.1. *Si les hypothèses du théorème (2.3.1) sont satisfaites et de plus*

$$f^0(y) = 0.$$

Alors

1. Si p est un point d'équilibre du système moyenné (2.14) tel que

$$\frac{\partial}{\partial y} (f^{10}(y) + g^0(y))_{y=p} \neq 0. \quad (2.15)$$

Alors, il existe une solution T -périodique $\phi(t, \varepsilon)$ du système (2.13) telle que $\phi(t, \varepsilon) \rightarrow p$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. Si (2.15) est négative, la solution périodique $\phi(t, \varepsilon)$ du système (2.13) est asymptotiquement stable pour n suffisamment petit. Si (2.15) est positive, cette solution est instable.

Exemple 2.3.1. *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon (x^2 - 4x^2y), \\ \dot{y} = x + \varepsilon^2 (y^2x + y^5x - 2y + 6y^3 - y^5). \end{cases} \quad (2.16)$$

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ avec $r > 0$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \varepsilon(-4r^3 \cos^3(\theta) \sin(\theta) + r^2 \cos^3(\theta)) + \varepsilon^2(r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) - r^3 \cos^3(\theta) \sin(\theta) \\ \quad + 2r \cos^2(\theta) - r^6 \cos^7(\theta) + r^5 \cos^6(\theta) - 2r + 6r^3 + r^6 \cos(\theta) - r^5 - 3r^6 \cos^3(\theta) \\ \quad + 3r^5 \cos^2(\theta) - 12r^3 \cos^2(\theta) + 3r^6 \cos^5(\theta) - 3r^5 \cos^4(\theta) + 6r^3 \cos^4(\theta)), \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon(4r^2 \cos^2(\theta) - 4 \cos^4(\theta)r^2 - \sin(\theta)r \cos^2(\theta)) + \varepsilon^2(-\cos(\theta)r^4 \sin(\theta) \\ \quad + 2 \sin(\theta) \cos^3(\theta)r^4 - 6r^2 \cos^3(\theta) \sin(\theta) + \sin(\theta)r^5 \cos^2(\theta) + \sin(\theta)r^5 \cos^6(\theta) \\ \quad - 2 \sin(\theta)r^5 \cos^4(\theta) - \cos^4(\theta)r^2 - \sin(\theta) \cos^5(\theta)r^4 + r^2 \cos^2(\theta) + 2 \sin(\theta) \cos^3(\theta)r^4 \\ \quad + 6r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)). \end{array} \right.$$

Considérons maintenant θ comme la variable indépendante, on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3), \quad (2.17)$$

où

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) &= -4r^2 \cos^3(\theta) \sin(\theta) + r^2 \cos^3(\theta), \\ F_2(r, \theta) &= -16r^5 \cos^7(\theta) \sin(\theta) + 16r^5 \cos^5(\theta) \sin(\theta) + r^3 \cos^5(\theta) \sin(\theta) - r^3 \cos^3(\theta) \sin(\theta) \\ &\quad + r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) + r^6 \sin^2(\theta) \cos^5(\theta) - 8r^4 \cos^5(\theta) \sin^2(\theta) - r^5 \sin^2(\theta) \cos^4(\theta) \\ &\quad - 2r^6 \sin^4(\theta) \cos^3(\theta) + 2r^5 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) - 6r^3 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + r^6 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \\ &\quad - r^5 \sin^2(\theta) - 2r \sin^2(\theta) + 6r^3 \sin^2(\theta). \end{aligned}$$

En appliquant maintenant le théorème (2.3.1), on calcule la fonction moyennée

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta = 0.$$

On peut passer à la méthode de moyennisation d'ordre deux, on calcule

$$g^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta$$

et

$$f^{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot \int_0^\theta F_1(r, s) ds \right] d\theta$$

où

$$\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) = -8r \cos^3(\theta) \sin(\theta) + 2r \cos^3(\theta),$$

et

$$\int_0^\theta F_1(r, s) ds = -r^3 + r^3 \cos^4(\theta) + \frac{1}{3} r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \frac{2}{3} r^2 \sin(\theta).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f^{10}(r) + g^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot \int_0^\theta F_1(r, s) ds + F_2(r, \theta) \right] d\theta \\ &= r \left(-\frac{5}{16}r^4 + \frac{9}{4}r^2 - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Pour trouver les cycles limites, on résout l'équation (2.18) et on obtient deux racines positives $r_1 = \frac{1}{5}\sqrt{(90 + 10\sqrt{61})}$, $r_2 = \frac{1}{5}\sqrt{(90 - 10\sqrt{61})}$.

Etant

$$\frac{d}{dr}(f^{10}(r) + g^0(r)) = -\frac{25}{16}r^4 + \frac{27}{4}r^2 - 1,$$

nous obtenons

$$\frac{d}{dr}(f^{10}(r_1) + g^0(r_1)) = -26.25844945 \neq 0,$$

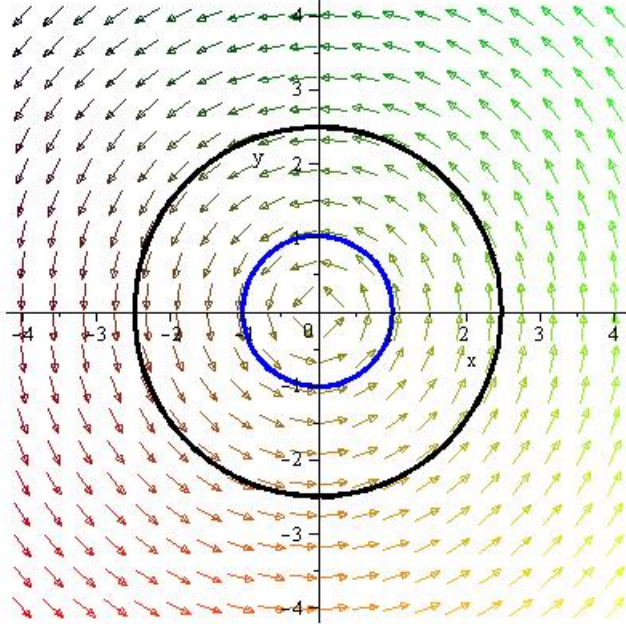
et

$$\frac{d}{dr}(f^{10}(r_2) + g^0(r_2)) = 1.85844941 \neq 0.$$

Donc il existe deux cycles limites, et d'après l'hypothèse (2) du corollaire (2.3.1) on a

$$\frac{d}{dr}(f^{10}(r_1) + g^0(r_1)) = -26.25844945 < 0 \text{ et } \frac{d}{dr}(f^{10}(r_2) + g^0(r_2)) = 1.85844941 > 0.$$

Alors, le premier cycle limite est stable d'amplitude $r_1 = \frac{1}{5}\sqrt{(90 + 10\sqrt{61})}$ et le deuxième cycle limite est instable d'amplitude $r_2 = \frac{1}{5}\sqrt{(90 - 10\sqrt{61})}$ pour ε suffisamment petit. Voir la figure (2.3).


 FIGURE 2.3 – Deux cycles limites du système (2.16) pour $\varepsilon = 0.001$.

Exemple 2.3.2. *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon (x^2 - 4x^2y) + \varepsilon^2(y^2 - xy), \\ \dot{y} = x + \varepsilon^2 (y^3x^2 + y^5x - 4y + 6y^3 - y^5). \end{cases} \quad (2.19)$$

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ avec $r > 0$, on obtient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon(-4r^3 \cos^3(\theta) \sin(\theta) + r^2 \cos^3(\theta)) + \varepsilon^2(-r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - r^2 \cos^3(\theta) \\ \quad + 4r \cos^2(\theta) + r^2 \cos(\theta) - 4r + 4r^5 \cos^2(\theta) + 6r^3 + r^6 \cos(\theta) - r^5 - 3r^6 \cos^3(\theta) \\ \quad - 5r^5 \cos^4(\theta) - 12r^3 \cos^2(\theta) + 3r^6 \cos^5(\theta) - r^6 \cos^7(\theta) + 2r^5 \cos^6(\theta) + 6r^3 \cos^4(\theta)), \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon(4r^2 \cos^2(\theta) - 4 \cos^4(\theta)r^2 - \sin(\theta)r \cos^2(\theta)) + \varepsilon^2(-2 \cos^4(\theta)r^5 \sin(\theta) \\ \quad - r^4 \sin(\theta) \cos(\theta) + r^5 \cos^6(\theta) \sin(\theta) - 2 \sin(\theta)r^4 \cos^5(\theta) + \sin(\theta)r \cos^2(\theta) \\ \quad - 6 \sin(\theta)r^2 \cos^3(\theta) + 3 \sin(\theta) \cos^3(\theta)r^4 - r \sin(\theta) - 4 \sin(\theta) \cos(\theta) + r \cos(\theta) + \sin(\theta) \cos^2(\theta)r^5 \\ \quad - r \cos^3(\theta) + 6r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)). \end{cases}$$

Considérons maintenant θ comme la variable indépendante, on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3), \quad (2.20)$$

où

2.3. THÉORÈME DE MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

$$\begin{aligned}
 F_1(r, \theta) &= -4r^3 \cos^3(\theta) \sin(\theta) + r^2 \cos^3(\theta), \\
 F_2(r, \theta) &= -16r^5 \cos^7(\theta) \sin(\theta) + 16r^5 \cos^5(\theta) \sin(\theta) + r^3 \cos^5(\theta) \sin(\theta) - r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) \\
 &\quad + r^6 \cos^5(\theta) \sin^2(\theta) - 8r^4 \sin^2(\theta) \cos^5(\theta) - 2r^5 \cos^4(\theta) \sin^2(\theta) - 2r^6 \sin^2(\theta) \cos^3(\theta) \\
 &\quad + 3r^5 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) - 62r^3 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) \cos(\theta) + r^6 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \\
 &\quad - 4r \sin^2(\theta) + 6r^3 \sin^2(\theta) - r^5 \sin^2(\theta).
 \end{aligned}$$

En appliquant maintenant le théorème (2.3.1), on calcule la fonction moyennée

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta = 0.$$

On peut passer à la méthode de moyennisation d'ordre deux, on calcule

$$g^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta$$

et

$$f^{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot \int_0^\theta F_1(r, s) ds \right] d\theta$$

où

$$\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) = -12r^2 \cos^3(\theta) \sin(\theta) + 2r \cos^3(\theta),$$

et

$$\int_0^\theta F_1(r, s) ds = -r^3 + r^3 \cos^4(\theta) + \frac{1}{3} r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \frac{2}{3} r^2 \sin(\theta).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 f^{10}(r) + g^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot \int_0^\theta F_1(r, s) ds + F_2(r, \theta) \right] d\theta \\
 &= r \left(-\frac{1}{4} r^4 + \frac{9}{4} r^2 - 2 \right).
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Pour trouver les cycles limites, on résout l'équation (2.21) et on obtient deux racines positives $r_1 = 1, r_2 = 2\sqrt{2}$.

Étant

$$\frac{d}{dr}(f^{10}(r) + g^0(r)) = -\frac{5}{4} r^4 + \frac{27}{4} r^2 - 2,$$

nous obtenons

$$\frac{d}{dr}(f^{10}(r_1) + g^0(r_1)) = 3500000000 \neq 0,$$

et

$$\frac{d}{dr}(f^{10}(r_2) + g^0(r_2)) = -28 \neq 0.$$

Donc il existe deux cycles limites, et d'après l'hypothèse (2) du corollaire (2.3.1) on a $\frac{d}{dr}(f^{10}(r_1) + g^0(r_1)) = 3500000000 > 0$ et $\frac{d}{dr}(f^{10}(r_2) + g^0(r_2)) = -28 < 0$. Alors, le premier cycle limite est instable d'amplitude $r_1 = 1$ et le deuxième cycle limite est stable d'amplitude $r_2 = 2\sqrt{2}$ pour ε suffisamment petit. Voir la figure (2.4).

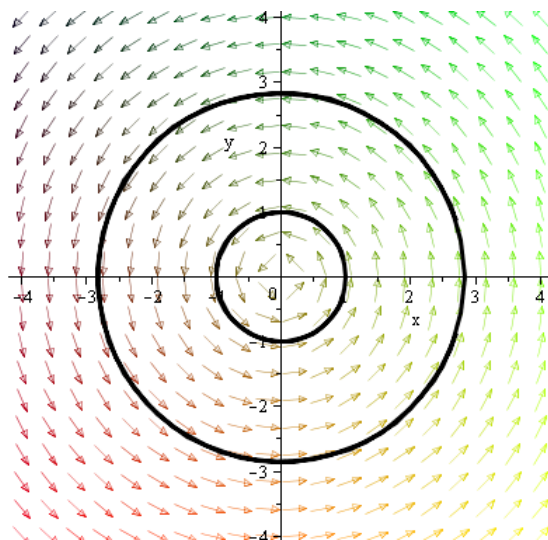


FIGURE 2.4 – Deux cycles limites du système (2.19) pour $\varepsilon = 0.001$.

2.4 Un autre théorème de moyennisation du premier ordre

Théorème 2.4.1. *On considère le problème de bifurcation des solutions T -périodiques du système différentiel de la forme :*

$$\dot{x}(t) = F_0(t, x) + \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x, \varepsilon), \quad (2.22)$$

où $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ pour ε_0 suffisamment petit. Les fonctions $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $F_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions de classe C^2 , T -périodique en t et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n . Supposons que le système non perturbé

$$\dot{x}(t) = F_0(t, x), \quad (2.23)$$

a une sous variété des solutions périodiques de dimension k .

Soit $x(t, z)$ la solution du système non perturbé (2.23) telle que $x(0, z) = z$. La linéarisation du système non perturbé (2.23) le long de la solution périodique $x(t, z)$ s'écrit

$$\dot{y} = D_x F_0(t, x(t, z))y. \quad (2.24)$$

Notons par $M_z(t)$ la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (2.24). Supposons qu'il existe un ensemble ouvert V avec $CL(V) \subset \Omega$, tel que pour chaque $z \in CL(V)$, $x(t, z, 0)$ est T -périodique, où $x(t, z, 0)$ est la solution du système non perturbé (2.23) avec $x(0, z, 0) = z$. L'ensemble $CL(V)$ est isochrone pour le système (2.22), c'est à dire il est un ensemble formé seulement par des orbites périodiques, toutes ayant la même période.

On note par $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ la projection de \mathbb{R}^n sur ses k premières coordonnées, c'est à dire

$$\xi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k),$$

et par $\xi^\perp : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ la projection de \mathbb{R}^n sur ses $n-k$ dernières coordonnées, c'est à dire

$$\xi^\perp(x_1, \dots, x_n) = (x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Alors, on a les résultats suivants :

Théorème 2.4.2. [36] *Soit V un ensemble ouvert et borné de \mathbb{R}^k , et soit $\beta : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une fonction de classe C^2 , supposons que :*

2.4. UN AUTRE THÉORÈME DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

- (i) $Z = \{z_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in CL(V)\} \subset \Omega$ et pour chaque $z_\alpha \in Z$ la solution $x(t, z_\alpha)$ de (2.23) est T -périodique.
- (ii) Pour chaque $z_\alpha \in Z$, il existe une matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(t)$ de (2.24) telle que la matrice $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$ a dans le coin supérieur droit une matrice $k \times (n - k)$ nulle, et dans le coin inférieur droit la matrice $\Delta_\alpha(n - k) \times (n - k)$ avec $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$.

On considère la fonction $\mathcal{F} : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi \left(\frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt \right). \quad (2.25)$$

S'il existe $a \in V$ avec $\mathcal{F}(a) = 0$ et $\det((d\mathcal{F}/d\alpha)(a)) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.22) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Nous donnons maintenant un résultat quand $n = k$.

Théorème 2.4.3. [36] Soit V un ensemble ouvert et borné avec $CL(V) \subset \Omega$ tel que pour chaque $z_\alpha \in CL(V)$ et pour chaque $z_\alpha \in Z$, la solution $x(t, z_\alpha)$ est T -périodique. Considérons la fonction $\mathcal{F} : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt. \quad (2.26)$$

S'il existe $a \in V$ avec $\mathcal{F}(a) = 0$ et $\det((d\mathcal{F}/d\alpha)(a)) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.22) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Théorème 2.4.4. [36] Supposons que $n = 2m$. Soit V un ensemble ouvert et borné de \mathbb{R}^m et soit $\beta : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^2 , supposons que :

- (i) $Z = \{z_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in CL(V)\} \subset \Omega$ et pour chaque $z_\alpha \in Z$ la solution $x(t, z_\alpha)$ de (2.23) est T -périodique.
- (ii) Pour chaque $z_\alpha \in Z$, il existe une matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(t)$ de (2.24) telle que la matrice $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$ a dans le coin supérieur droit la matrice $\Delta_\alpha(m \times m)$ avec $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$, et dans le coin inférieur droit une matrice $m \times m$ nulle.

2.4. UN AUTRE THÉORÈME DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

On considère la fonction $\mathcal{F} : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi^\perp \left(\frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt \right). \quad (2.27)$$

S'il existe $a \in V$ avec $\mathcal{F}(a) = 0$ et $\det((d\mathcal{F}/d\alpha)(a)) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.22) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Exemple 2.4.1. On considère l'équation suivante

$$\ddot{x} - \ddot{x} + \dot{x} - x = \varepsilon(2 + \sin(t))(x^2 + 4x^3). \quad (2.28)$$

On écrit l'équation différentielle du troisième ordre (2.28) comme le système différentiel du premier ordre suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = x - y + z + \varepsilon(2 + \sin(t))(x^2 + 4x^3). \end{cases} \quad (2.29)$$

L'origine est l'unique point singulier du système (2.29) lorsque $\varepsilon = 0$. La partie linéaire du système (2.29) avec $\varepsilon = 0$ à l'origine est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice sont $\pm i$ et 1.

On va faire un changement de variables linéaire

$$(x, y, z)^T = B(X, Y, Z)^T,$$

telle que dans les nouvelles variables (X, Y, Z, V) , le système (2.29) avec $\varepsilon = 0$ a sa partie linéaire égale à sa forme normale de Jordan, c.à.d. $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})^T = J(X, Y, Z)^T$, la forme normale réelle de Jordan de la matrice A est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$BAB^{-1} = J \Rightarrow BA - JB = 0,$$

2.4. UN AUTRE THÉORÈME DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

d'où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la transformation linéaire inversible $(X, Y, Z)^T = B(x, y, z)^T$, c.à.d.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix},$$

on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{x} - \dot{y}, \\ \dot{Y} = -\dot{y} + \dot{z}, \\ \dot{Z} = \dot{x} + \dot{z}. \end{cases} \quad (2.30)$$

On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X - Y + Z \\ -X - Y + Z \\ -X + Y + Z \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

on remplace (2.29) et (2.31) dans (2.30), on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y \\ \dot{Y} = X + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, t) \\ \dot{Z} = Z + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, t), \end{cases} \quad (2.32)$$

où

$$\tilde{F} = \tilde{F}(X, Y, Z, t) = F(x, y, z, t).$$

Pour $\varepsilon = 0$, la solution du système (2.32) est

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos(t) - Y_0 \sin(t) \\ Y_0 \cos(t) + X_0 \sin(t) \\ Z_0 e^t \end{pmatrix}.$$

On utilise la notion introduite dans le théorème 2.4.1, et d'après le système (2.32),

on a

$$x = (X, Y, Z), F_0(x, t) = (-Y, X, Z), F_1(x, t) = (0, \tilde{F}, \tilde{F}) \text{ et } F_2(x, t, \varepsilon) = (0, 0, 0).$$

2.4. UN AUTRE THÉORÈME DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

Soit $x(t, X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon)$ la solution du système (2.32) telle que

$$x(0, X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0, Z_0).$$

IL est clair que, le système non perturbé (2.32) avec $\varepsilon = 0$ admet un centre à l'origine dans le plan (X, Y) . Les solutions périodique de ce centre sont $x(t, X_0, Y_0, 0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t))$ telle que

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos(t) - Y_0 \sin(t) \\ Y_0 \cos(t) + X_0 \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que toutes ces orbites sont périodiques de période 2π .

1. Pour notre système, V et α du théorème 2.4.2 sont
 $V = \{(X, Y, 0), 0 < X^2 + Y^2 < \rho\}$ pour certains ρ arbitraires
 et $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$.

2. La matrice fondamentale $M(t)$ du système non perturbé (2.32) est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

D'autre part, un calcul simple donne

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi} \end{pmatrix},$$

d'où $1 - e^{-2\pi} \neq 0$.

Nous avons montré que toutes les hypothèses du théorème 2.4.2 sont vérifiées.

Par conséquent, nous allons étudier les zéros $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$ des deux premiers composantes de la fonction $\mathcal{F}(\alpha)$ donnée par

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt\right), \quad \xi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2),$$

c.à.d.

$$\mathcal{F}(\alpha) = (\mathcal{F}_1(\alpha), \mathcal{F}_2(\alpha)),$$

2.4. UN AUTRE THÉORÈME DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

d'où

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) \tilde{F}(x(t, X_0, Y_0, 0, 0), t) dt, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) F\left(\frac{X(t) - Y(t)}{2}, -\frac{X(t) + Y(t)}{2}, \frac{-X(t) + Y(t)}{2}, t\right) dt.\end{aligned}\tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) \tilde{F}(x(t, X_0, Y_0, 0, 0), t) dt, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) F\left(\frac{X(t) - Y(t)}{2}, -\frac{X(t) + Y(t)}{2}, \frac{-X(t) + Y(t)}{2}, t\right) dt.\end{aligned}\tag{2.34}$$

On pose $\mathcal{F}(\alpha) = (\mathcal{F}_1(X_0, Y_0), \mathcal{F}_2(X_0, Y_0))$.

On intègre (2.33) et (2.34), on obtient

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \frac{1}{8}Y_0X_0 - \frac{3}{4}Y_0^2X_0 - \frac{3}{4}Y_0X_0^2 - \frac{3}{4}Y_0^3 - \frac{3}{4}X_0^3 + \frac{1}{8}Y_0^2 + \frac{1}{8}X_0^2 \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = \frac{1}{16}(X_0 - Y_0)(12X_0^2 - X_0 + 12Y_0^2 - Y_0) \end{cases}$$

Si $\mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = 0$, on trouve

$$(X_0^*, Y_0^*) = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right).$$

On a

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(X_0, Y_0)}\Big|_{(X_0, Y_0)=(X_0^*, Y_0^*)}\right) = \frac{3}{8192} \neq 0.$$

Alors, pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit, il y a une solution isolée 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ de l'équation différentielle (2.28) telle que

$$x(0, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \dot{x}(0, \varepsilon) \rightarrow -\frac{1}{8}, \quad \ddot{x}(0, \varepsilon) \rightarrow 0,$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Chapitre 3

Cycles limites pour une classe généralisée des systèmes de Liénard

Dans ce chapitre, on étudie les cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ perturbé par une classe généralisée d'équations différentielles de Liénard.

Cette étude a fait l'objet d'un article publié dans le journal " *Electronic Journal of Differential Equations* " :

S. Ellaggoune, S. Badi, Upper bounds for the number of limit cycles of polynomial differential Systems. *Electronic Journal of Differential Equations*. ISSN 072-6691 Volume 2016 (2016), Number 318, pp. 1-22.

3.1 Historique

Nous allons étudier dans ce chapitre des équations différentielles du deuxième ordre.

$$y'' = F(y', y) \text{ où } y = y(x) \text{ et } ' \equiv \frac{d}{dx}. \quad (3.1)$$

Ces équations peuvent se transformer en un système de 2 équations différentielles du premier ordre.

L'espace des phases est alors un plan. La forme générale d'un tel système est :

$$\dot{x} = P(x, y) \text{ , } \dot{y} = Q(x, y). \quad (3.2)$$

Le premier modèle physique publié dans la littérature qui, transformé en un système du type (3.2), admette un cycle limite est l'équation :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \varepsilon \left(\frac{1}{3} \left(\frac{dy}{dt} \right)^3 - \frac{dy}{dt} \right) + y = 0 \quad (3.3)$$

établie par RAYLEIGH (1945) et qui modélise les oscillations d'une corde de violon.

- Dans les années vingt, Balthasar van der Pol, un ingénieur hollandais, étudiait les propriétés électriques des tubes à néon (Van der Pol, 1922). A cette époque là, les oscilloscopes n'existant pas encore, il surveillait l'évolution de son circuit en écoutant les changements de tonalité dans un combiné téléphonique. Il modélisa les charges et décharges du tube par l'équation qui porte maintenant son nom :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (3.4)$$

On voit que si on dérive l'équation (3.3) par rapport à t et que si l'on note $x = \frac{dy}{dt}$, on retrouve l'équation (3.4). Ces deux équations sont donc équivalentes.

Quelques années plus tard Van der Pol (1927) étudiait le même circuit électrique mais en régime sinusoïdal forcé. Lorsqu'il variait la fréquence du courant, il entendait dans son combiné la tonalité changer par à-coups (le circuit se stabilisait donc sur la fréquence externe). Mais de temps à autre il remarquait quelque chose d'étrange, un comportement inexplicablement irrégulier : " on entend souvent au téléphone un bruit irrégulier avant que la fréquence ne saute à la valeur immédiatement inférieure" (Van der Pol, 1927). Son tube à vide devait vraisemblablement traverser une période de chaos transitoire avant de se synchroniser sur la fréquence externe.

Plus tard, en Angleterre, Mary Lucy Cartwright et John E. Littlewood poursuivront les travaux de B. Van der Pol sur les oscillateurs forcés.

• Liénard (1928), un ingénieur français, établit un théorème d'existence et d'unicité d'une solution périodique pour une classe générale d'équations dont fait partie l'équation (3.4) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (3.5)$$

Liénard a transformé l'équation (3.5) en un système de deux équations du premier ordre en posant $\frac{dx}{dt} = z$:

$$\frac{dx}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = -x - f(x)z. \quad (3.6)$$

En fait dans l'énoncé de son théorème, Liénard utilise un autre système, équivalent à (3.6), obtenu en posant $z = y - F(x)$, où $F(x) = \int_0^x f(\tau)d\tau$:

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -x. \quad (3.7)$$

Le plan (x, y) est alors appelé *le plan de Liénard*. L'équation (3.5) est appelée *l'équation de Liénard* et on se réfèrera au système (3.7) comme au *système de Liénard*.

Le théorème de Liénard établi que si $F(x)$ est une fonction continue et impaire qui a une unique racine positive en $x = a$ et qui est strictement croissante pour $x \geq a$, alors le système (3.7) possède un unique cycle limite.

• Levinson et Smith (1942), ont suggéré de généraliser le système (3.7) :

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -G(x), \quad (3.8)$$

qui se met sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + G(x) = 0. \quad (3.9)$$

et qui est connu sous le nom de *système de Liénard généralisé*.

• Le problème fondamental lié au système (3.8) est le nombre de solutions périodiques isolées (i.e. cycles limites) qui peuvent exister simultanément. Imaginons que le système (3.8) décrit le mouvement d'un oscillateur. Si ce système a un cycle limite globalement attracteur alors l'oscillateur va évoluer, après un régime transitoire, selon un mouvement périodique. Le point important est que la période de ce mouvement sera la même quelle que soit la condition initiale.

On voit donc que la présence d'un cycle limite peut être une propriété importante d'un système surtout si ce système est une horloge.

3.2 Perturbation du centre linéaire

Nous allons considérer la perturbation indépendante du temps où la fonction perturbée est le centre linéaire $\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$.

Si on choisit $f(x) = \begin{pmatrix} F(x) \\ 0 \end{pmatrix}$, le système étudié sera :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} F(x) \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui est bien le système de Liénard.

Pour $\varepsilon = 0$, il n'y a pas de cycles limites, mais seulement des trajectoires périodiques du type centre.

La perturbation introduite transforme le centre du système linéaire en un foyer et transforme occasionnellement certaines trajectoires périodiques du centre en cycles limites, La méthode de moyennisation permet de connaître le nombre de cycles limites qui apparaissent.

3.3 Bifurcation des cycles limites des orbites périodiques d'un centre linéaire perturbé par une classe généralisée d'équation différentielle de Liénard

Nous allons étudier le nombre maximum de cycles limites qui peuvent bifurquer des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$, perturbé par une classe généralisée d'équations différentielles de Liénard de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f_1(x, y)y, \\ \dot{y} = -x - g_2(x, y) - f_2(x, y)y, \end{cases} \quad (3.10)$$

avec $f_1(x, y) = \varepsilon f_{11}(x, y) + \varepsilon^2 f_{12}(x, y)$, $f_2(x, y) = \varepsilon f_{21}(x, y) + \varepsilon^2 f_{22}(x, y)$ et $g_2(x, y) = \varepsilon g_{21}(x, y) + \varepsilon^2 g_{22}(x, y)$, où f_{1i} , f_{2i} et g_{2i} des polynômes en x et y de degré l , n et m respectivement pour $i = 1, 2$, et ε suffisamment petit. On note que ce système est plus général que celui étudié dans [31].

Nous considérons le système (3.11)

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(f_{11}(x, y)y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(g_{21}(x, y) + f_{21}(x, y)y), \end{cases} \quad (3.11)$$

3.3. BIFURCATION DES CYCLES LIMITES DES ORBITES PÉRIODIQUES
D'UN CENTRE LINÉAIRE PERTURBÉ PAR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE
D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LIÉNARD

où f_{11}, g_{21} et f_{21} des polynômes en x et y de degré l, m et n respectivement, et ε suffisamment petit.

Notre résultat est le suivant :

Théorème 3.3.1. *Pour ε suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites pour la classe généralisée du système de Liénard (3.11) qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ est $\left[\frac{n}{2}\right]$ en utilisant la méthode de moyennisation d'ordre un.*

Ensuite, nous considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(f_{11}(x, y)y) - \varepsilon^2(f_{12}(x, y)y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(g_{21}(x, y) + f_{21}(x, y)y) - \varepsilon^2(g_{22}(x, y) + f_{22}(x, y)y), \end{cases} \quad (3.12)$$

où f_{11} et f_{12} de degré l ; g_{21} et g_{22} de degré m , et f_{21}, f_{22} de degré n et ε suffisamment petit.

On a :

Théorème 3.3.2. *Pour ε suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites pour la classe généralisée du système de Liénard (3.12) qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ en utilisant la méthode de moyennisation d'ordre deux est :*

$$\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2 + 1, \lambda_3 + 2\},$$

où

$$\lambda_1 = \max\left\{\left[\frac{O(m) + E(l) - 1}{2}\right], \left[\frac{E(m) + O(l) - 1}{2}\right], m - 1, \left[\frac{E(n)}{2}\right], \left[\frac{E(m) + O(n) - 1}{2}\right]\right\},$$

$$\lambda_2 = \max\left\{O(n) - 1, \left[\frac{E(m) + O(n) - 3}{2}\right], \left[\frac{O(m) + E(n) - 3}{2}\right], \left[\frac{O(n) + O(l) - 2}{2}\right], l - 1, E(m) - 2, \left[\frac{E(m) + O(l) - 3}{2}\right], \left[\frac{O(m) + E(l) - 3}{2}\right]\right\},$$

$$\lambda_3 = \left[\frac{E(n) + E(l) - 4}{2}\right],$$

avec

- $O(i)$ est le plus grand nombre impair inférieur ou égal à i .
- $E(i)$ est le plus grand nombre pair inférieur ou égal à i .
- $[\cdot]$ désigne la partie entière.

3.3. BIFURCATION DES CYCLES LIMITES DES ORBITES PÉRIODIQUES
D'UN CENTRE LINÉAIRE PERTURBÉ PAR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE
D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LIÉNARD

Preuve du Théorème (3.3.1).

On utilise la méthode de moyennisation d'ordre un. Pour cela posons

$$f_{11}(x, y) = \sum_{i+j=0}^l a_{ij,1} x^i y^j, \quad f_{21}(x, y) = \sum_{i+j=0}^n a_{ij,2} x^i y^j, \quad g_{21}(x, y) = \sum_{i+j=0}^m b_{ij,2} x^i y^j,$$

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r > 0$, le système (3.11) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = -\varepsilon \left(\sum_{i+j=0}^n a_{ij,2} r^{i+j+1} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) + \sum_{i+j=0}^m b_{ij,2} r^{i+j} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \right. \\ \quad \left. + \sum_{i+j=0}^l a_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \right), \\ \dot{\theta} = -1 - \frac{1}{r} \left[\varepsilon \left(\sum_{i+j=0}^n a_{ij,2} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+1}(\theta) + \sum_{i+j=0}^m b_{ij,2} r^{i+j} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) \right) \right. \\ \quad \left. - \sum_{i+j=0}^l a_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) \right]. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Considérons maintenant θ comme nouvelle variable indépendante, le système (3.13) s'écrit sous la forme standard du théorème de moyennisation d'ordre un

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F(r, \theta) + O(\varepsilon^2), \quad (3.14)$$

où

$$F(r, \theta) = \sum_{i+j=0}^n a_{ij,2} r^{i+j+1} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) + \sum_{i+j=0}^m b_{ij,2} r^{i+j} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \\ + \sum_{i+j=0}^l a_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+1}(\theta).$$

Maintenant, on calcule la fonction moyennée

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta,$$

3.3. BIFURCATION DES CYCLES LIMITES DES ORBITES PÉRIODIQUES
D'UN CENTRE LINÉAIRE PERTURBÉ PAR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE
D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LIÉNARD

sachant que

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ impair où } j \text{ impair,} \\ \pi\alpha_{ij}, & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair,} \end{cases}$$

où α_{ij} est une constante non nulle, on trouve que

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2} \sum_{i+j=0}^n a_{ij,2} \alpha_{ij} r^{i+j+1}, \quad (3.15)$$

où i et j sont paires. On voit que le polynôme $F_{10}(r)$ a au plus $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ racines positives. De plus ce polynôme peut admettre exactement $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ racines positives simples, avec un bon choix des coefficients a_{ij} . Cela complète la preuve du théorème (3.3.1).

Exemple 3.3.1. *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(\sqrt{2} + 5x^2y + y^2)y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + xy + (3 + xy^2 - \frac{1}{2}y^2)y). \end{cases} \quad (3.16)$$

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r > 0$, le système (3.16) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \left[\sqrt{2}r \cos(\theta) \sin(\theta) + \sin(\theta) - r^3 \cos^3(\theta) \sin(\theta) + r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) \right. \\ \quad + 4r^4 \cos^3(\theta) \sin^2(\theta) + \frac{1}{2}r^3 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + r^4 \sin^2(\theta) \cos(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \\ \quad \left. + 3r \sin^2(\theta) - \frac{1}{2}r^3 \sin^2(\theta) \right], \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \left[-r \sin(\theta) \cos^2(\theta) - 3 \sin(\theta) \cos(\theta) - 4r^3 \sin(\theta) \cos^4(\theta) - \frac{1}{2}r^2 \sin(\theta) \cos^3(\theta) \right. \\ \quad + \frac{1}{2}r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - \frac{\cos(\theta)}{r} + 4r^3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \sqrt{2} \cos^2(\theta) + \sqrt{2} + r^2 \cos^4(\theta) \\ \quad \left. - 2r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \right]. \end{cases}$$

Pour déterminer les cycles limites, on résout l'équation

$$F_{10}(r) = -\frac{3}{16}r(-8 + r^2) = 0. \quad (3.17)$$

L'équation (3.17) possède une racine positive $r = 2\sqrt{2}$. D'après le théorème (3.3.1), le système (3.16) a exactement un unique cycle limite qui bifurque des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$. Voir la figure (3.1).

3.3. BIFURCATION DES CYCLES LIMITES DES ORBITES PÉRIODIQUES
D'UN CENTRE LINÉAIRE PERTURBÉ PAR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE
D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LIÉNARD

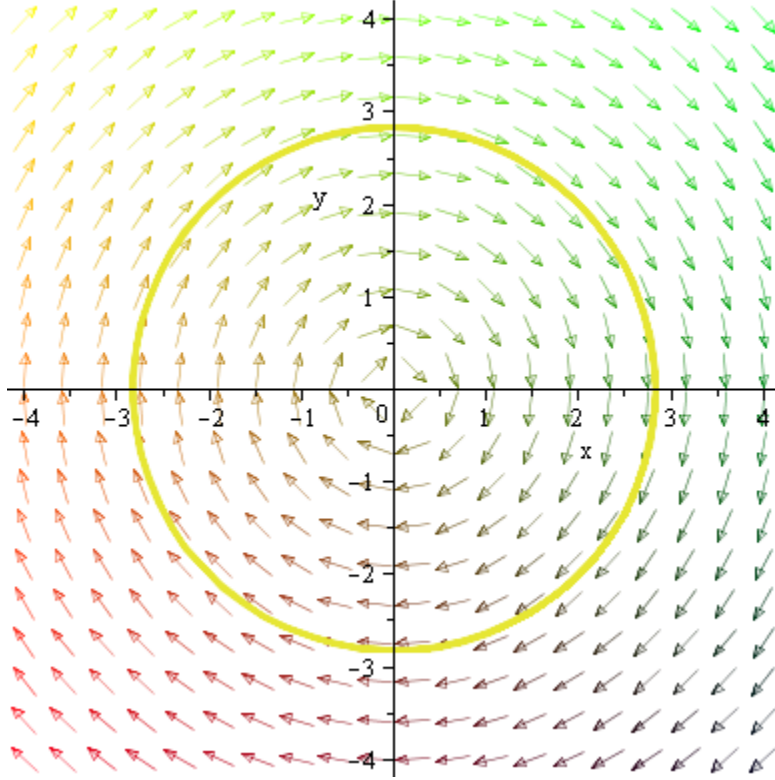


FIGURE 3.1 – Cycle limite du système (3.16) pour $\varepsilon = 0.0001$.

Preuve du Théorème (3.3.2).

On utilise la méthode de moyennisation d'ordre deux, pour cela prenons f_{11}, f_{21} et g_{21} les fonctions définies dans la partie précédente, de plus soit :

$$f_{12}(x, y) = \sum_{i+j=0}^l C_{ij,1} x^i y^j, \quad f_{22}(x, y) = \sum_{i+j=0}^n c_{ij,2} x^i y^j, \quad g_{22}(x, y) = \sum_{i+j=0}^m d_{ij,2} x^i y^j.$$

Le système (3.12) en coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r > 0$, devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon(A + \varepsilon B), \\ \dot{\theta} = -1 - \frac{\varepsilon}{r}(A_1 + \varepsilon B_1), \end{cases} \quad (3.18)$$

où

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i+j=0}^n a_{ij,2} r^{i+j+1} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) + \sum_{i+j=0}^m b_{ij,2} r^{i+j} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \\ &+ \sum_{i+j=0}^l a_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+1}(\theta), \end{aligned}$$

3.3. BIFURCATION DES CYCLES LIMITES DES ORBITES PÉRIODIQUES
D'UN CENTRE LINÉAIRE PERTURBÉ PAR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE
D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LIÉNARD

$$B = \sum_{i+j=0}^n c_{ij,2} r^{i+j+1} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) + \sum_{i+j=0}^m d_{ij,2} r^{i+j} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \\ + \sum_{i+j=0}^l C_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+1}(\theta),$$

et

$$A_1 = \sum_{i+j=0}^n a_{ij,2} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+1}(\theta) + \sum_{i+j=0}^m b_{ij,2} r^{i+j} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) \\ - \sum_{i+j=0}^l a_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta),$$

$$B_1 = \sum_{i+j=0}^n c_{ij,2} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+1}(\theta) + \sum_{i+j=0}^m d_{ij,2} r^{i+j} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) \\ - \sum_{i+j=0}^l C_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta).$$

Considérons maintenant θ comme la variable indépendante, on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3), \quad (3.19)$$

avec

$$F_1(r, \theta) = A, \\ F_2(r, \theta) = B - \frac{1}{r} AA_1.$$

Déterminons la fonction moyennée suivante

$$F_{20}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{d}{dr} F_1(r, \theta) y_1(r, \theta) + F_2(r, \theta) \right] d\theta,$$

où $y_1(r, \theta) = \int_0^\theta F_1(r, s) ds$. Pour cela, on a besoin d'annuler la fonction moyennée F_{10} , donc on pose $a_{ij,2} = 0$ pour tout i pair et j pair. Maintenant, on commence par calculer

$$\frac{d}{dr} F_1(r, \theta) = \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ odd or } j \text{ odd}}}^n (i+j+1) a_{ij,2} r^{i+j} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) + \sum_{i+j=0}^m (i+j) b_{ij,2} r^{i+j-1} \\ \times \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) + \sum_{i+j=0}^l (i+j+1) a_{ij,1} r^{i+j} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+1}(\theta),$$

3.3. BIFURCATION DES CYCLES LIMITES DES ORBITES PÉRIODIQUES
D'UN CENTRE LINÉAIRE PERTURBÉ PAR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE
D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LIÉNARD

ensuite $y_1(r, \theta)$ qu'on écrit comme suit

$$y_1(r, \theta) = \int_0^\theta F_1(r, t) dt = y_1^1 + y_1^2 + y_1^3,$$

avec

$$\begin{aligned} y_1^1(r, t) &= \int_0^\theta \sum_{i+j=0}^n a_{ij,2} r^{i+j+1} \cos^i(t) \sin^{j+2}(t) dt \\ &= a_{10,2} r^2 (\alpha_{110} \sin(\theta) + \alpha_{210} \sin(3\theta)) + \dots + a_{c_1 e_1, 2} r^{c_1 + e_1 + 1} (\alpha_{1 c_1 e_1} \sin(\theta) \\ &+ \alpha_{2 c_1 e_1} \sin(3\theta) + \dots + \alpha_{\frac{(c_1 + e_1 + 2) + 1}{2} c_1 e_1} \sin((c_1 + e_1 + 2)\theta)) + a_{01,2} r^2 (\alpha_{101} \\ &+ \alpha_{201} \cos(\theta) + \alpha_{301} \cos(3\theta)) + \dots + a_{p_1 q_1, 2} r^{p_1 + q_1 + 1} (\alpha_{1 p_1 q_1} + \alpha_{2 p_1 q_1} \cos(\theta) \\ &+ \alpha_{3 p_1 q_1} \cos(3\theta) + \dots + \alpha_{\frac{(p_1 + q_1 + 2) + 3}{2} p_1 q_1} \cos((p_1 + q_1 + 2)\theta)) + a_{11,2} r^3 (\alpha_{111} \\ &+ \alpha_{211} \cos(2\theta) + \alpha_{311} \cos(4\theta)) + \dots + a_{c_1 q_1, 2} r^{c_1 + q_1 + 1} (\alpha_{1 c_1 q_1} + \alpha_{2 c_1 q_1} \cos(2\theta) \\ &+ \alpha_{3 c_1 q_1} \cos(4\theta) + \dots + \alpha_{\frac{(c_1 + q_1 + 2) + 2}{2} c_1 q_1} \cos((c_1 + q_1 + 2)\theta)), \end{aligned}$$

où

- c_1 est le plus grand impair et e_1 le plus grand pair tel que $c_1 + e_1 \leq n$,
- p_1 est le plus grand pair et q_1 est le plus grand impair tel que $p_1 + q_1 \leq n$,
- α_{ijk} sont les constantes réelles obtenues durant le calcul de $\int_0^\theta \cos^i(t) \sin^{j+2}(t) dt$ pour tout i et j .

$$\begin{aligned} y_1^2(r, t) &= \int_0^\theta \sum_{i+j=0}^m b_{ij,2} r^{i+j} \cos^i(t) \sin^{j+1}(t) dt \\ &= b_{00,2} (\tilde{\alpha}_{100} + \tilde{\alpha}_{200} \cos(\theta)) + b_{02,2} r^2 (\tilde{\alpha}_{102} + \tilde{\alpha}_{202} \cos(\theta) + \tilde{\alpha}_{302} \cos(3\theta)) \\ &+ \dots + b_{p_2 e_2, 2} r^{p_2 + e_2} (\tilde{\alpha}_{1 p_2 e_2} + \tilde{\alpha}_{2 p_2 e_2} \cos(\theta) + \tilde{\alpha}_{3 p_2 e_2} \cos(3\theta) \\ &+ \dots + \tilde{\alpha}_{\frac{(p_2 + e_2 + 2) p_2 e_2}{2}} \cos((p_2 + e_2 + 1)\theta)) + b_{01,2} r (\tilde{\alpha}_{101} \theta + \tilde{\alpha}_{201} \sin(2\theta)) \\ &+ \dots + b_{p_2 q_2, 2} r^{p_2 + q_2} (\tilde{\alpha}_{1 p_2 q_2} \theta + \tilde{\alpha}_{2 p_2 q_2} \sin(2\theta) + \tilde{\alpha}_{3 p_2 q_2} \sin(4\theta) + \dots + \tilde{\alpha}_{\frac{(p_2 + q_2 + 3) p_2 q_2}{2}} \\ &\times \sin((p_2 + q_2 + 1)\theta)) + b_{10,2} r (\tilde{\alpha}_{110} + \tilde{\alpha}_{210} \cos(2\theta)) + b_{30,2} r^3 (\tilde{\alpha}_{130} + \tilde{\alpha}_{230} \cos(2\theta) \\ &+ \tilde{\alpha}_{330} \cos(4\theta)) + \dots + b_{c_2 e_2, 2} r^{c_2 + e_2} (\tilde{\alpha}_{1 c_2 e_2} + \tilde{\alpha}_{2 c_2 e_2} \cos(2\theta) + \dots + \tilde{\alpha}_{\frac{(c_2 + e_2 + 1) c_2 e_2}{2} + 1} \\ &\times \cos((c_2 + e_2 + 1)\theta)) + b_{11,2} r^2 (\tilde{\alpha}_{111} \sin(\theta) + \tilde{\alpha}_{211} \sin(3\theta)) + b_{13,2} r^4 (\tilde{\alpha}_{113} \sin(\theta) \\ &+ \tilde{\alpha}_{213} \sin(3\theta) + \tilde{\alpha}_{313} \sin(5\theta)) + \dots + b_{c_2 q_2, 2} r^{c_2 + q_2} (\tilde{\alpha}_{1 c_2 q_2} \sin(\theta) + \tilde{\alpha}_{2 c_2 q_2} \sin(3\theta) \\ &+ \dots + \tilde{\alpha}_{\frac{(c_2 + q_2 + 2) c_2 q_2}{2}} \sin((c_2 + q_2 + 1)\theta)), \end{aligned}$$

où

- p_2 est le plus grand pair et e_2 le plus grand pair tel que $p_2 + e_2 \leq m$,

3.3. BIFURCATION DES CYCLES LIMITES DES ORBITES PÉRIODIQUES D'UN CENTRE LINÉAIRE PERTURBÉ PAR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LIÉNARD

- c_2 est le plus grand impair et q_2 est le plus grand impair tel que $c_2 + q_2 \leq m$,
- α_{ijk} sont les constantes réelles obtenues durant le calcul de $\int_0^\theta \cos^i(t) \sin^{j+1}(t) dt$ pour tout i et j .

et

$$\begin{aligned}
 y_1^3(r, t) &= \int_0^\theta \sum_{i+j=0}^l a_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(t) \sin^{j+1}(t) dt \\
 &= a_{00,1} r \left(\hat{\alpha}_{100} + \hat{\alpha}_{200} \cos(2\theta) \right) + \dots + a_{p_3 e_3, 1} r^{p_3 + e_3 + 1} \left(\hat{\alpha}_{1 p_3 e_3} + \hat{\alpha}_{2 p_3 e_3} \cos(2\theta) \right. \\
 &+ \dots + \hat{\alpha}_{\left(\frac{p_3 + e_3 + 2}{2} + 1\right) p_3 e_3} \cos((p_3 + e_3 + 2)\theta) \left. \right) + a_{01,1} r^2 \left(\hat{\alpha}_{101} \sin(\theta) + \hat{\alpha}_{201} \sin(3\theta) \right) \\
 &+ \dots + a_{p_3 q_3, 1} r^{p_3 + q_3 + 1} \left(\hat{\alpha}_{1 p_3 q_3} \sin(\theta) + \hat{\alpha}_{2 p_3 q_3} \sin(3\theta) + \hat{\alpha}_{3 p_3 q_3} \sin(5\theta) + \dots + \hat{\alpha}_{\left(\frac{p_3 + q_3 + 3}{2}\right) p_3 q_3} \right. \\
 &\times \sin((p_3 + q_3 + 2)\theta) \left. \right) + a_{10,1} r^2 \left(\hat{\alpha}_{110} + \hat{\alpha}_{210} \cos(\theta) + \hat{\alpha}_{310} \cos(3\theta) \right) \\
 &+ \dots + a_{c_3 e_3, 1} r^{c_3 + e_3 + 1} \left(\hat{\alpha}_{1 c_3 e_3} + \hat{\alpha}_{2 c_3 e_3} \cos(\theta) + \hat{\alpha}_{3 c_3 e_3} \cos(3\theta) + \dots + \hat{\alpha}_{\left(\frac{c_3 + e_3 + 1}{2} + 2\right) c_3 e_3} \right. \\
 &\times \cos((c_3 + e_3 + 2)\theta) \left. \right) + a_{11,1} r^3 \left(\hat{\alpha}_{111} \theta + \hat{\alpha}_{211} \sin(4\theta) \right) + a_{13,1} r^5 \left(\hat{\alpha}_{113} \theta + \hat{\alpha}_{213} \sin(2\theta) \right. \\
 &+ \hat{\alpha}_{313} \sin(4\theta) + \hat{\alpha}_{413} \sin(6\theta) \left. \right) + \dots + a_{c_3 q_3, 1} r^{c_3 + q_3 + 1} \left(\hat{\alpha}_{1 c_3 q_3} \theta + \hat{\alpha}_{2 c_3 q_3} \sin(2\theta) \right. \\
 &+ \hat{\alpha}_{3 c_3 q_3} \sin(4\theta) + \dots + \hat{\alpha}_{(c_3 + q_3) c_3 q_3} \sin((c_3 + q_3 + 2)\theta) \left. \right),
 \end{aligned}$$

où

- p_3 est le plus grand pair et e_3 le plus grand pair tel que $p_3 + e_3 \leq l$,
- c_3 est le plus grand impair et q_3 est le plus grand impair tel que $c_3 + q_3 \leq l$,
- α_{ijk} sont les constantes réelles obtenues durant le calcul de $\int_0^\theta \cos^{i+1}(t) \sin^{j+1}(t) dt$ pour tout i et j .

Finalement

$$\begin{aligned}
 y_1(r, \theta) &= a_{10,2} r^2 \left(\alpha_{110} \sin(\theta) + \alpha_{210} \sin(3\theta) \right) + \dots + a_{c_1 e_1, 2} r^{c_1 + e_1 + 1} \left(\alpha_{1 c_1 e_1} \sin(\theta) \right. \\
 &+ \alpha_{2 c_1 e_1} \sin(3\theta) + \dots + \alpha_{\left(\frac{c_1 + e_1 + 2}{2} + 1\right) c_1 e_1} \sin((c_1 + e_1 + 2)\theta) \left. \right) + a_{01,2} r^2 \left(\alpha_{101} + \alpha_{201} \cos(\theta) \right. \\
 &+ \alpha_{301} \cos(3\theta) \left. \right) + \dots + a_{p_1 q_1, 2} r^{p_1 + q_1 + 1} \left(\alpha_{1 p_1 q_1} + \alpha_{2 p_1 q_1} \cos(\theta) + \alpha_{3 p_1 q_1} \cos(3\theta) \right. \\
 &+ \dots + \alpha_{\left(\frac{p_1 + q_1 + 2}{2} + 3\right) p_1 q_1} \cos((p_1 + q_1 + 2)\theta) \left. \right) + a_{11,2} r^3 \left(\alpha_{111} + \alpha_{211} \cos(2\theta) + \alpha_{311} \cos(4\theta) \right) \\
 &+ \dots + a_{c_1 q_1, 2} r^{c_1 + q_1 + 1} \left(\alpha_{1 c_1 q_1} + \alpha_{2 c_1 q_1} \cos(2\theta) + \alpha_{3 c_1 q_1} \cos(4\theta) + \dots + \alpha_{\left(\frac{c_1 + q_1 + 2}{2} + 2\right) c_1 q_1} \right. \\
 &\times \cos((c_1 + q_1 + 2)\theta) \left. \right) + b_{00,2} \left(\tilde{\alpha}_{100} + \tilde{\alpha}_{200} \cos(\theta) \right) + b_{02,2} r^2 \left(\tilde{\alpha}_{102} + \tilde{\alpha}_{202} \cos(\theta) \right. \\
 &+ \tilde{\alpha}_{302} \cos(3\theta) \left. \right) + \dots + b_{p_2 e_2, 2} r^{p_2 + e_2} \left(\tilde{\alpha}_{1 p_2 e_2} + \tilde{\alpha}_{2 p_2 e_2} \cos(\theta) + \tilde{\alpha}_{3 p_2 e_2} \cos(3\theta) \right. \\
 &+ \dots + \tilde{\alpha}_{\left(\frac{p_2 + e_2}{2} + 2\right) p_2 e_2} \cos((p_2 + e_2 + 1)\theta) \left. \right) + b_{01,2} r \left(\tilde{\alpha}_{101} \theta + \tilde{\alpha}_{201} \sin(2\theta) \right) \\
 &+ \dots + b_{p_2 q_2, 2} r^{p_2 + q_2} \left(\tilde{\alpha}_{1 p_2 q_2} \theta + \tilde{\alpha}_{2 p_2 q_2} \sin(2\theta) + \tilde{\alpha}_{3 p_2 q_2} \sin(4\theta) + \dots + \tilde{\alpha}_{\left(\frac{p_2 + q_2 + 3}{2}\right) p_2 q_2} \right)
 \end{aligned}$$

3.3. BIFURCATION DES CYCLES LIMITES DES ORBITES PÉRIODIQUES
D'UN CENTRE LINÉAIRE PERTURBÉ PAR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE
D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LIÉNARD

$$\begin{aligned}
& \times \sin((p_2 + q_2 + 1)\theta) + b_{10,2}r \left(\tilde{\alpha}_{110} + \tilde{\alpha}_{210} \cos(2\theta) \right) + b_{30,2}r^3 \left(\tilde{\alpha}_{130} + \tilde{\alpha}_{230} \cos(2\theta) \right. \\
& \left. + \tilde{\alpha}_{330} \cos(4\theta) \right) + \dots + b_{c_2 e_2, 2} r^{c_2 + e_2} \left(\tilde{\alpha}_{1c_2 e_2} + \tilde{\alpha}_{2c_2 e_2} \cos(2\theta) + \dots + \tilde{\alpha}_{\left(\frac{c_2 + e_2 + 1}{2}\right) + 1} c_2 e_2 \right. \\
& \times \cos((c_2 + e_2 + 1)\theta) + b_{11,2}r^2 \left(\tilde{\alpha}_{111} \sin(\theta) + \tilde{\alpha}_{211} \sin(3\theta) \right) + b_{13,2}r^4 \left(\tilde{\alpha}_{113} \sin(\theta) \right. \\
& \left. + \tilde{\alpha}_{213} \sin(3\theta) + \tilde{\alpha}_{313} \sin(5\theta) \right) + \dots + b_{c_2 q_2, 2} r^{c_2 + q_2} \left(\tilde{\alpha}_{1c_2 q_2} \sin(\theta) + \tilde{\alpha}_{2c_2 q_2} \sin(3\theta) \right. \\
& \left. + \dots + \tilde{\alpha}_{\left(\frac{c_2 + q_2 + 2}{2}\right) c_2 q_2} \sin((c_2 + q_2 + 1)\theta) \right) + a_{00,1}r \left(\hat{\alpha}_{100} + \hat{\alpha}_{200} \cos(2\theta) \right) + \dots + a_{p_3 e_3, 1} r^{p_3 + e_3 + 1} \\
& \times \left(\hat{\alpha}_{1p_3 e_3} + \hat{\alpha}_{2p_3 e_3} \cos(2\theta) + \dots + \alpha_{\left(\frac{p_3 + e_3 + 2}{2}\right) + 1} p_3 e_3 \cos((p_3 + e_3 + 2)\theta) \right) + a_{01,1}r^2 \left(\hat{\alpha}_{101} \sin(\theta) \right. \\
& \left. + \hat{\alpha}_{201} \sin(3\theta) \right) + \dots + a_{p_3 q_3, 1} r^{p_3 + q_3 + 1} \left(\hat{\alpha}_{1p_3 q_3} \sin(\theta) + \hat{\alpha}_{2p_3 q_3} \sin(3\theta) + \hat{\alpha}_{3p_3 q_3} \sin(5\theta) \right. \\
& \left. + \dots + \hat{\alpha}_{\left(\frac{p_3 + q_3 + 3}{2}\right) p_3 q_3} \sin((p_3 + q_3 + 2)\theta) \right) + a_{10,1}r^2 \left(\hat{\alpha}_{110} + \hat{\alpha}_{210} \cos(\theta) + \hat{\alpha}_{310} \cos(3\theta) \right) \\
& \left. + \dots + a_{c_3 e_3, 1} r^{c_3 + e_3 + 1} \left(\hat{\alpha}_{1c_3 e_3} + \hat{\alpha}_{2c_3 e_3} \cos(\theta) + \hat{\alpha}_{3c_3 e_3} \cos(3\theta) + \dots + \hat{\alpha}_{\left(\frac{c_3 + e_3 + 1}{2}\right) + 2} c_3 e_3 \right. \right. \\
& \times \cos((c_3 + e_3 + 2)\theta) + a_{11,1}r^3 \left(\hat{\alpha}_{111} \theta + \hat{\alpha}_{211} \sin(4\theta) \right) + a_{13,1}r^5 \left(\hat{\alpha}_{113} \theta + \hat{\alpha}_{213} \sin(2\theta) \right. \\
& \left. + \hat{\alpha}_{313} \sin(4\theta) + \hat{\alpha}_{413} \sin(6\theta) \right) + \dots + a_{c_3 q_3, 1} r^{c_3 + q_3 + 1} \left(\hat{\alpha}_{1c_3 q_3} \theta + \hat{\alpha}_{2c_3 q_3} \sin(2\theta) \right. \\
& \left. + \hat{\alpha}_{3c_3 q_3} \sin(4\theta) + \dots + \hat{\alpha}_{(c_3 + q_3) c_3 q_3} \sin((c_3 + q_3 + 2)\theta) \right).
\end{aligned}$$

En utilisant les résultats des intégrales de l'Appendice, et notons

$$H_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{d}{dr} F_1(r, \theta) y_1(r, \theta) \right] d\theta, \quad (3.20)$$

on trouve

$$\begin{aligned}
H_1(r) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair et } j \text{ impair}}}^n (i+j+1) a_{ij,2} r^{i+j} \left[a_{10,2} r^2 \left(\alpha_{110} A_{ij}^1 + \alpha_{210} A_{ij}^3 \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \dots + a_{c_1 e_1, 2} r^{c_1 + e_1 + 1} \left(\alpha_{1c_1 e_1} A_{ij}^1 + \alpha_{2c_1 e_1} A_{ij}^3 + \dots + \alpha_{\left(\frac{c_1 + e_1 + 2}{2}\right) + 1} c_1 e_1 A_{ij}^{c_1 + e_1 + 2} \right) \right] \right. \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair et } j \text{ pair}}}^n (i+j+1) a_{ij,2} r^{i+j} \left[a_{01,2} r^2 \left(\alpha_{201} B_{ij}^1 + \alpha_{301} B_{ij}^3 \right) \right. \\
& \left. \left. + \dots + a_{p_1 q_1, 2} r^{p_1 + q_1 + 1} \left(\alpha_{2p_1 q_1} B_{ij}^1 + \alpha_{3p_1 q_1} B_{ij}^3 + \dots + \alpha_{\left(\frac{p_1 + q_1 + 2}{2}\right) + 3} p_1 q_1 B_{ij}^{p_1 + q_1 + 2} \right) \right] \right. \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair et } j \text{ pair}}}^n (i+j+1) a_{ij,2} r^{i+j} \left[b_{00,2} \left(\tilde{\alpha}_{200} \tilde{B}_{ij}^1 \right) + b_{02,2} r^2 \left(\tilde{\alpha}_{202} \tilde{B}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{302} \tilde{B}_{ij}^3 \right) \right. \\
& \left. \left. + \dots + b_{p_2 e_2, 2} r^{p_2 + e_2} \left(\tilde{\alpha}_{2p_2 e_2} \tilde{B}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{302} \tilde{B}_{ij}^3 + \dots + \tilde{\alpha}_{\left(\frac{p_2 + e_2 + 2}{2}\right) p_2 e_2} \tilde{B}_{ij}^{p_2 + e_2 + 1} \right) \right] \right. \\
& + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair et } j \text{ impair}}}^n (i+j+1) a_{ij,2} r^{i+j} \left[b_{01,2} r \left(\tilde{\alpha}_{101} \gamma_{ij} + \tilde{\alpha}_{201} C_{ij}^2 \right) \right. \\
& \left. \left. + \dots + b_{p_2 q_2, 2} r^{p_2 + q_2} \left(\tilde{\alpha}_{1p_2 q_2} \gamma_{ij} + \tilde{\alpha}_{2p_2 q_2} C_{ij}^2 + \tilde{\alpha}_{3p_2 q_2} C_{ij}^4 + \dots + \tilde{\alpha}_{\left(\frac{p_2 + q_2 + 3}{2}\right) p_2 q_2} C_{ij}^{p_2 + q_2 + 1} \right) \right] \right. \\
& \left. + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair et } j \text{ impair}}}^n (i+j+1) a_{ij,2} r^{i+j} \left[b_{11,2} r^2 \left(\tilde{\alpha}_{111} \tilde{A}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{211} \tilde{A}_{ij}^3 \right) \right. \right.
\end{aligned}$$

3.3. BIFURCATION DES CYCLES LIMITES DES ORBITES PÉRIODIQUES
D'UN CENTRE LINÉAIRE PERTURBÉ PAR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE
D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LIÉNARD

$$\begin{aligned}
& + \dots + b_{c_2q_2,2}r^{c_2+q_2} \left(\tilde{\alpha}_{1c_2q_2}\tilde{A}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{2c_2q_2}\tilde{A}_{ij}^3 + \dots + \tilde{\alpha}_{(\frac{c_2+q_2+2}{2})c_2q_2}\tilde{A}_{ij}^{c_2+q_2+1} \right) \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair et } j \text{ impair}}}^n (i+j+1)a_{ij,2}r^{i+j} \left[a_{01,1}r^2 \left(\hat{\alpha}_{101}\hat{A}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{201}\hat{A}_{ij}^3 \right) \right. \\
& + \dots + a_{p_3q_3,1}r^{p_3+q_3+1} \left(\hat{\alpha}_{1p_3q_3}\hat{A}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{2p_3q_3}\hat{A}_{ij}^3 + \dots + \hat{\alpha}_{(\frac{p_3+q_3+3}{2})p_3q_3}\hat{A}_{ij}^{p_3+q_3+2} \right) \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair et } j \text{ pair}}}^n (i+j+1)a_{ij,2}r^{i+j} \left[a_{10,1}r^2 \left(\hat{\alpha}_{210}\hat{B}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{310}\hat{B}_{ij}^3 \right) \right. \\
& + \dots + a_{c_3e_3,1}r^{c_3+e_3+1} \left(\hat{\alpha}_{2c_3e_3}\hat{B}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{3c_3e_3}\hat{B}_{ij}^3 + \dots + \hat{\alpha}_{(\frac{c_3+e_3+1}{2}+2)c_3e_3}\hat{B}_{ij}^{c_3+e_3+2} \right) \\
& + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair et } j \text{ impair}}}^n (i+j+1)a_{ij,2}r^{i+j} \left[a_{11,1}r^3 \left(\hat{\alpha}_{111}\gamma_{ij} + \hat{\alpha}_{211}\tilde{C}_{ij}^4 \right) \right. \\
& + \dots + a_{c_3q_3,1}r^{c_3+q_3+1} \left(\hat{\alpha}_{1c_3q_3}\gamma_{ij} + \hat{\alpha}_{2c_3q_3}\tilde{C}_{ij}^2 + \dots + \hat{\alpha}_{(c_3+q_3)c_3q_3}\tilde{C}_{ij}^{c_3+q_3+2} \right) \\
& + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ pair et } j \text{ pair}}}^m (i+j)b_{ij,2}r^{i+j-1} \left[a_{10,2}r^2 \left(\alpha_{110}D_{ij}^1 + \alpha_{210}D_{ij}^3 \right) \right. \\
& + \dots + a_{c_1e_1,2}r^{c_1+e_1+1} \left(\alpha_{1c_1e_1}D_{ij}^1 + \alpha_{2c_1e_1}D_{ij}^3 + \dots + \alpha_{(\frac{c_1+e_1+2}{2}+1)c_1e_1}D_{ij}^{c_1+e_1+2} \right) \\
& + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair et } j \text{ impair}}}^m (i+j)b_{ij,2}r^{i+j-1} \left[a_{01,2}r^2 \left(\alpha_{201}E_{ij}^1 + \alpha_{301}E_{ij}^3 \right) \right. \\
& + \dots + a_{p_1q_1,2}r^{p_1+q_1+1} \left(\alpha_{2p_1q_1}E_{ij}^1 + \alpha_{3p_1q_1}E_{ij}^3 + \dots + \alpha_{(\frac{p_1+q_1+2}{2}+3)p_1q_1}E_{ij}^{p_1+q_1+2} \right) \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair et } j \text{ impair}}}^m (i+j)b_{ij,2}r^{i+j-1} \left[a_{11,2}r^3 \left(\alpha_{111}\beta_{ij} + \alpha_{211}F_{ij}^2 + \alpha_{311}F_{ij}^4 \right) \right. \\
& + \dots + a_{c_1q_1,2}r^{c_1+q_1+1} \left(\alpha_{1c_1q_1}\beta_{ij} + \alpha_{2c_1q_1}F_{ij}^2 + \alpha_{3c_1q_1}F_{ij}^4 + \dots + \alpha_{(\frac{c_1+q_1+2}{2}+2)c_1q_1}F_{ij}^{c_1+q_1+2} \right) \\
& + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair et } j \text{ impair}}}^m (i+j)b_{ij,2}r^{i+j-1} \left[b_{00,2} \left(\tilde{\alpha}_{200}\tilde{E}_{ij}^1 \right) + b_{02,2}r^2 \left(\tilde{\alpha}_{202}\tilde{E}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{302}\tilde{E}_{ij}^3 \right) \right. \\
& + \dots + b_{p_2e_2,2}r^{p_2+e_2} \left(\tilde{\alpha}_{2p_2e_2}\tilde{E}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{3p_2e_2}\tilde{E}_{ij}^3 + \dots + \tilde{\alpha}_{(\frac{p_2+e_2}{2}+2)p_2e_2}\tilde{E}_{ij}^{p_2+e_2+1} \right) \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair et } j \text{ pair}}}^m (i+j)b_{ij,2}r^{i+j-1} \left[b_{01,2}r \left(\tilde{\alpha}_{101}\sigma_{ij} + \tilde{\alpha}_{201}G_{ij}^2 \right) \right. \\
& + \dots + b_{p_2q_2,2}r^{p_2+q_2} \left(\tilde{\alpha}_{1p_2q_2}\sigma_{ij} + \tilde{\alpha}_{2p_2q_2}G_{ij}^2 + \dots + \tilde{\alpha}_{(\frac{p_2+q_2+3}{2})p_2q_2}G_{ij}^{p_2+q_2+1} \right) \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair et } j \text{ impair}}}^m (i+j)b_{ij,2}r^{i+j-1} \left[b_{10,2}r \left(\tilde{\alpha}_{110}\beta_{ij} + \tilde{\alpha}_{210}\tilde{F}_{ij}^2 \right) \right. \\
& + \dots + b_{c_2e_2,2}r^{c_2+e_2} \left(\tilde{\alpha}_{1c_2e_2}\beta_{ij} + \tilde{\alpha}_{210}\tilde{F}_{ij}^2 + \dots + \tilde{\alpha}_{(\frac{c_2+e_2+1}{2}+1)c_2e_2}\tilde{F}_{ij}^{c_2+e_2+1} \right) \\
& + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ pair et } j \text{ pair}}}^m (i+j)b_{ij,2}r^{i+j-1} \left[b_{11,2}r^2 \left(\tilde{\alpha}_{111}\tilde{D}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{211}\tilde{D}_{ij}^3 \right) \right. \\
& + \dots + b_{c_2q_2,2}r^{c_2+q_2} \left(\tilde{\alpha}_{1c_2q_2}\tilde{D}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{2c_2q_2}\tilde{D}_{ij}^3 + \dots + \tilde{\alpha}_{(\frac{c_2+q_2+2}{2})c_2q_2}\tilde{D}_{ij}^{c_2+q_2+1} \right) \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair et } j \text{ impair}}}^m (i+j)b_{ij,2}r^{i+j-1} \left[a_{00,1}r \left(\hat{\alpha}_{100}\beta_{ij} + \hat{\alpha}_{200}\hat{F}_{ij}^2 \right) \right. \\
& + \dots + a_{p_3e_3,1}r^{p_3+e_3+1} \left(\hat{\alpha}_{1p_3e_3}\beta_{ij} + \hat{\alpha}_{2p_3e_3}\hat{F}_{ij}^2 + \dots + \hat{\alpha}_{(\frac{p_3+e_3+2}{2}+1)p_3e_3}\hat{F}_{ij}^{p_3+e_3+2} \right)
\end{aligned}$$

3.3. BIFURCATION DES CYCLES LIMITES DES ORBITES PÉRIODIQUES
D'UN CENTRE LINÉAIRE PERTURBÉ PAR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE
D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LIÉNARD

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ pair} \text{ et } j \text{ pair}}}^m (i+j)b_{ij,2}r^{i+j-1} \left[a_{01,1}r^2 \left(\hat{\alpha}_{101}\hat{D}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{201}\hat{D}_{ij}^3 \right) \right. \\
& + \dots + a_{p_3q_3,1}r^{p_3+q_3+1} \left(\hat{\alpha}_{1p_3q_3}\hat{D}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{2p_3q_3}\hat{D}_{ij}^3 + \dots + \hat{\alpha}_{\left(\frac{p_3+q_3+3}{2}\right)p_3q_3}\hat{D}_{ij}^{p_3+q_3+2} \right) \left. \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair} \text{ et } j \text{ impair}}}^m (i+j)b_{ij,2}r^{i+j-1} \left[a_{10,1}r^2 \left(\hat{\alpha}_{210}\hat{E}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{310}\hat{E}_{ij}^3 \right) \right. \\
& + \dots + a_{c_3e_3,1}r^{c_3+e_3+1} \left(\hat{\alpha}_{2c_3e_3}\hat{E}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{3c_3e_3}\hat{E}_{ij}^3 + \dots + \hat{\alpha}_{\left(\frac{c_3+e_3+1}{2}\right)c_3e_3}\hat{E}_{ij}^{c_3+e_3+2} \right) \left. \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair} \text{ et } j \text{ pair}}}^m (i+j)b_{ij,2}r^{i+j-1} \left[a_{11,1}r^3 \left(\hat{\alpha}_{111}\sigma_{ij} + \hat{\alpha}_{211}\tilde{G}_{ij}^4 \right) \right. \\
& + \dots + a_{c_3q_3,1}r^{c_3+q_3+1} \left(\hat{\alpha}_{1c_3q_3}\sigma_{ij} + \hat{\alpha}_{2c_3q_3}\tilde{G}_{ij}^2 + \hat{\alpha}_{3c_3q_3}\tilde{G}_{ij}^4 + \dots + \hat{\alpha}_{(c_3+q_3)c_3q_3}\tilde{G}_{ij}^{c_3+q_3+2} \right) \left. \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair} \text{ et } j \text{ pair}}}^l (i+j+1)a_{ij,1}r^{i+j} \left[a_{10,2}r^2 \left(\alpha_{110}H_{ij}^1 + \alpha_{210}H_{ij}^3 \right) \right. \\
& + \dots + a_{c_1e_1,2}r^{c_1+e_1+1} \left(\alpha_{1c_1e_1}H_{ij}^1 + \alpha_{2c_1e_1}H_{ij}^3 + \dots + \alpha_{\left(\frac{c_1+e_1+2}{2}\right)c_1e_1}H_{ij}^{c_1+e_1+2} \right) \left. \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair} \text{ et } j \text{ impair}}}^l (i+j+1)a_{ij,1}r^{i+j} \left[a_{01,2}r^2 \left(\alpha_{201}I_{ij}^1 + \alpha_{301}I_{ij}^3 \right) \right. \\
& + \dots + a_{p_1q_1,2}r^{p_1+q_1+1} \left(\alpha_{2p_1q_1}I_{ij}^1 + \alpha_{3p_1q_1}I_{ij}^3 + \dots + \alpha_{\left(\frac{p_1+q_1+2}{2}\right)p_1q_1}I_{ij}^{p_1+q_1+2} \right) \left. \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair} \text{ et } j \text{ impair}}}^l (i+j+1)a_{ij,1}r^{i+j} \left[a_{11,2}r^3 \left(\alpha_{111}\delta_{ij} + \alpha_{211}K_{ij}^2 + \alpha_{311}K_{ij}^4 \right) \right. \\
& + \dots + a_{c_1q_1,2}r^{c_1+q_1+1} \left(\alpha_{1c_1q_1}\delta_{ij} + \alpha_{21c_1q_1}K_{ij}^2 + \dots + \alpha_{\left(\frac{c_1+q_1+2}{2}\right)c_1q_1}K_{ij}^{c_1+q_1+2} \right) \left. \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair} \text{ et } j \text{ impair}}}^l (i+j+1)a_{ij,1}r^{i+j} \left[b_{00,2} \left(\tilde{\alpha}_{200}\tilde{I}_{ij}^1 \right) + b_{02,2}r^2 \left(\tilde{\alpha}_{202}\tilde{I}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{302}\tilde{I}_{ij}^3 \right) \right. \\
& + \dots + b_{p_2e_2,2}r^{p_2+e_2} \left(\tilde{\alpha}_{2p_2e_2}\tilde{I}_{ij}^1 + \dots + \tilde{\alpha}_{\left(\frac{p_2+e_2}{2}\right)p_2e_2}\tilde{I}_{ij}^{p_2+e_2+1} \right) \left. \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair} \text{ et } j \text{ pair}}}^l (i+j+1)a_{ij,1}r^{i+j} \left[b_{01,2}r \left(\tilde{\alpha}_{101}\mu_{ij} + \tilde{\alpha}_{201}L_{ij}^2 \right) \right. \\
& + \dots + b_{p_2q_2,2}r^{p_2+q_2} \left(\tilde{\alpha}_{1p_2q_2}\mu_{ij} + \tilde{\alpha}_{2p_2q_2}L_{ij}^2 + \dots + \tilde{\alpha}_{\left(\frac{p_2+q_2+3}{2}\right)p_2q_2}L_{ij}^{p_2+q_2+1} \right) \left. \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair} \text{ et } j \text{ impair}}}^l (i+j+1)a_{ij,1}r^{i+j} \left[b_{10,2}r \left(\tilde{\alpha}_{110}\delta_{ij} + \tilde{\alpha}_{210}\tilde{K}_{ij}^2 \right) \right. \\
& + \dots + b_{c_2e_2,2}r^{c_2+e_2} \left(\tilde{\alpha}_{1c_2e_2}\delta_{ij} + \tilde{\alpha}_{2c_2e_2}\tilde{K}_{ij}^2 + \dots + \tilde{\alpha}_{\left(\frac{c_2+e_2+1}{2}\right)c_2e_2}\tilde{K}_{ij}^{c_2+e_2+1} \right) \left. \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair} \text{ et } j \text{ pair}}}^l (i+j+1)a_{ij,1}r^{i+j} \left[b_{11,2}r^2 \left(\tilde{\alpha}_{111}\tilde{H}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{211}\tilde{H}_{ij}^3 \right) \right. \\
& + \dots + b_{c_2q_2,2}r^{c_2+q_2} \left(\tilde{\alpha}_{1c_2q_2}\tilde{H}_{ij}^1 + \dots + \tilde{\alpha}_{\left(\frac{c_2+q_2+2}{2}\right)c_2q_2}\tilde{H}_{ij}^{c_2+q_2+1} \right) \left. \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair} \text{ et } j \text{ impair}}}^l (i+j+1)a_{ij,1}r^{i+j} \left[a_{00,1}r \left(\hat{\alpha}_{100}\delta_{ij} + \hat{\alpha}_{200}\hat{K}_{ij}^2 \right) \right. \\
& + \dots + a_{p_3e_3,1}r^{p_3+e_3+1} \left(\hat{\alpha}_{1p_3e_3}\delta_{ij} + \hat{\alpha}_{2p_3e_3}\hat{K}_{ij}^2 + \dots + \hat{\alpha}_{\left(\frac{p_3+e_3+2}{2}\right)p_3e_3}\hat{K}_{ij}^{p_3+e_3+2} \right) \left. \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair} \text{ et } j \text{ pair}}}^l (i+j+1)a_{ij,1}r^{i+j} \left[a_{01,1}r^2 \left(\hat{\alpha}_{101}\hat{H}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{201}\hat{H}_{ij}^3 \right) \right.
\end{aligned}$$

3.3. BIFURCATION DES CYCLES LIMITES DES ORBITES PÉRIODIQUES
D'UN CENTRE LINÉAIRE PERTURBÉ PAR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE
D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LIÉNARD

$$\begin{aligned}
& + \dots + a_{p_3q_3,1} r^{p_3+q_3+1} \left(\hat{\alpha}_{1p_3q_3} \hat{H}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{2p_3q_3} \hat{H}_{ij}^3 + \dots + \hat{\alpha}_{\left(\frac{p_3+q_3+3}{2}\right)p_3q_3} \hat{H}_{ij}^{p_3+q_3+2} \right) \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair et } j \text{ impair}}}^l (i+j+1) a_{ij,1} r^{i+j} \left[a_{10,1} r^2 \left(\hat{\alpha}_{210} \hat{I}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{310} \hat{I}_{ij}^3 \right) \right. \\
& + \dots + a_{c_3e_3,1} r^{c_3+e_3+1} \left(\hat{\alpha}_{2c_3e_3} \hat{I}_{ij}^1 + \dots + \hat{\alpha}_{\left(\frac{c_3+e_3+1}{2}\right)c_3e_3} \hat{I}_{ij}^{c_3+e_3+2} \right) \\
& + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair et } j \text{ pair}}}^l (i+j+1) a_{ij,1} r^{i+j} \left[a_{11,1} r^3 \left(\hat{\alpha}_{111} \mu_{ij} + \hat{\alpha}_{211} \tilde{L}_{ij}^4 \right) \right. \\
& \left. \left. + \dots + a_{c_3q_3,1} r^{c_3+q_3+1} \left(\hat{\alpha}_{1c_3q_3} \mu_{ij} + \hat{\alpha}_{2c_3q_3} \tilde{L}_{ij}^2 + \dots + \hat{\alpha}_{(c_3+q_3)c_3q_3} \tilde{L}_{ij}^{c_3+q_3+2} \right) \right] \right].
\end{aligned}$$

Maintenant, on calcule

$$\begin{aligned}
F_2(r, \theta) &= \sum_{i+j=0}^n c_{ij,2} r^{i+j+1} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) + \sum_{i+j=0}^m d_{ij,2} r^{i+j} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \\
&+ \sum_{i+j=0}^l C_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \\
&- \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair ou } j \text{ impair}}}^n \sum_{\substack{k+h=0 \\ k \text{ impair ou } h \text{ impair}}}^n a_{ij,2} a_{kh,2} r^{i+j+k+h+1} \cos^{i+k+1}(\theta) \sin^{j+h+3}(\theta) \\
&- \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair ou } j \text{ impair}}}^n \sum_{k+h=0}^m a_{ij,2} b_{kh,2} r^{i+j+k+h} \cos^{i+k+1}(\theta) \sin^{j+h+2}(\theta) \\
&+ \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair ou } j \text{ impair}}}^n \sum_{k+h=0}^l a_{ij,2} a_{kh,1} r^{i+j+k+h+1} \cos^{i+k}(\theta) \sin^{j+h+4}(\theta) \\
&- \sum_{i+j=0}^m \sum_{\substack{k+h=0 \\ k \text{ impair ou } h \text{ impair}}}^n b_{ij,2} a_{kh,2} r^{i+j+k+h} \cos^{i+k+1}(\theta) \sin^{j+h+2}(\theta) \\
&- \sum_{i+j=0}^m \sum_{k+h=0}^m b_{ij,2} b_{kh,2} r^{i+j+k+h-1} \cos^{i+k+1}(\theta) \sin^{j+h+1}(\theta) \\
&+ \sum_{i+j=0}^m \sum_{k+h=0}^l b_{ij,2} a_{kh,1} r^{i+j+k+h} \cos^{i+k}(\theta) \sin^{j+h+3}(\theta)
\end{aligned}$$

3.3. BIFURCATION DES CYCLES LIMITES DES ORBITES PÉRIODIQUES
D'UN CENTRE LINÉAIRE PERTURBÉ PAR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE
D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LIÉNARD

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i+j=0}^l \sum_{\substack{n \\ k+h=0 \\ k \text{ impair ou } h \text{ impair}}} a_{ij,1} a_{kh,2} r^{i+j+k+h+1} \cos^{i+k+2}(\theta) \sin^{j+h+2}(\theta) \\
& - \sum_{i+j=0}^l \sum_{k+h=0}^m a_{ij,1} b_{kh,2} r^{i+j+k+h} \cos^{i+k+2}(\theta) \sin^{j+h+1}(\theta) \\
& + \sum_{i+j=0}^l \sum_{k+h=0}^l a_{ij,1} a_{kh,1} r^{i+j+k+h+1} \cos^{i+k+1}(\theta) \sin^{j+h+3}(\theta).
\end{aligned}$$

et notons

$$H_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
H_2(r) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{\substack{n \\ i+j=0 \\ i \text{ pair et } j \text{ pair}}} c_{ij,2} r^{i+j+1} \alpha_{ij} + \sum_{\substack{m \\ i+j=1 \\ i \text{ pair et } j \text{ impair}}} d_{ij,2} r^{i+j} \beta_{ij} \right. \\
&+ \sum_{\substack{l \\ i+j=2 \\ i \text{ impair et } j \text{ impair}}} C_{ij,1} r^{i+j+1} \delta_{ij} \\
&- \sum_{\substack{n \\ i+j=1 \\ i \text{ impair et } j \text{ pair}}} \sum_{\substack{n \\ k+h=1 \\ k \text{ pair et } h \text{ impair}}} a_{ij,2} a_{kh,2} r^{i+j+k+h+1} M_{ijkh} \\
&- \sum_{\substack{n \\ i+j=1 \\ i \text{ pair et } j \text{ impair}}} \sum_{\substack{n \\ k+h=1 \\ k \text{ impair et } h \text{ pair}}} a_{ij,2} a_{kh,2} r^{i+j+k+h+1} \tilde{M}_{ijkh} \\
&- \sum_{\substack{n \\ i+j=1 \\ i \text{ impair et } j \text{ pair}}} \sum_{\substack{m \\ k+h=0 \\ k \text{ pair et } h \text{ pair}}} a_{ij,2} b_{kh,2} r^{i+j+k+h} N_{ijkh} \\
&- \sum_{\substack{n \\ i+j=2 \\ i \text{ impair et } j \text{ impair}}} \sum_{\substack{m \\ k+h=1 \\ k \text{ pair et } h \text{ impair}}} a_{ij,2} b_{kh,2} r^{i+j+k+h} \tilde{N}_{ijkh}
\end{aligned}$$

3.3. BIFURCATION DES CYCLES LIMITES DES ORBITES PÉRIODIQUES
D'UN CENTRE LINÉAIRE PERTURBÉ PAR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE
D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LIÉNARD

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair et } j \text{ impair}}}^n \sum_{\substack{k+h=2 \\ k \text{ impair et } h \text{ impair}}}^m a_{ij,2} b_{kh,2} r^{i+j+k+h} \hat{N}_{ijkh} \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair et } j \text{ pair}}}^n \sum_{\substack{k+h=1 \\ k \text{ impair et } h \text{ pair}}}^l a_{ij,2} a_{kh,1} r^{i+j+k+h+1} P_{ijkh} \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair et } j \text{ impair}}}^n \sum_{\substack{k+h=1 \\ k \text{ pair et } h \text{ impair}}}^l a_{ij,2} a_{kh,1} r^{i+j+k+h+1} \tilde{P}_{ijkh} \\
& + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair et } j \text{ impair}}}^n \sum_{\substack{k+h=2 \\ k \text{ impair et } h \text{ impair}}}^l a_{ij,2} a_{kh,1} r^{i+j+k+h+1} \hat{P}_{ijkh} \\
& - \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair et } j \text{ impair}}}^m \sum_{\substack{k+h=1 \\ k \text{ pair et } h \text{ impair}}}^n b_{ij,2} a_{kh,2} r^{i+j+k+h} \tilde{N}_{ijkh} \\
& - \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair et } j \text{ pair}}}^m \sum_{\substack{k+h=1 \\ k \text{ impair et } h \text{ pair}}}^n b_{ij,2} a_{kh,2} r^{i+j+k+h} N_{ijkh} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair et } j \text{ impair}}}^m \sum_{\substack{k+h=2 \\ k \text{ impair et } h \text{ impair}}}^n b_{ij,2} a_{kh,2} r^{i+j+k+h} \hat{N}_{ijkh} \\
& - \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair et } j \text{ pair}}}^m \sum_{\substack{k+h=2 \\ k \text{ impair et } h \text{ impair}}}^m b_{ij,2} b_{kh,2} r^{i+j+k+h-1} Q_{ijkh} \\
& - \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair et } j \text{ impair}}}^m \sum_{\substack{k+h=0 \\ k \text{ pair et } h \text{ pair}}}^m b_{ij,2} b_{kh,2} r^{i+j+k+h-1} Q_{ijkh} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair et } j \text{ pair}}}^m \sum_{\substack{k+h=1 \\ k \text{ pair et } h \text{ impair}}}^m b_{ij,2} b_{kh,2} r^{i+j+k+h-1} \tilde{Q}_{ijkh}
\end{aligned}$$

3.3. BIFURCATION DES CYCLES LIMITES DES ORBITES PÉRIODIQUES
D'UN CENTRE LINÉAIRE PERTURBÉ PAR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE
D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LIÉNARD

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair et } j \text{ impair}}}^m \sum_{\substack{k+h=1 \\ k \text{ impair et } h \text{ pair}}}^m b_{ij,2} b_{kh,2} r^{i+j+k+h-1} \tilde{Q}_{ijkh} \\
& + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair et } j \text{ pair}}}^m \sum_{\substack{k+h=1 \\ k \text{ pair et } h \text{ impair}}}^l b_{ij,2} a_{kh,1} r^{i+j+k+h} R_{ijkh} \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair et } j \text{ impair}}}^m \sum_{\substack{k+h=0 \\ k \text{ pair et } h \text{ pair}}}^l b_{ij,2} a_{kh,1} r^{i+j+k+h} R_{ijkh} \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair et } j \text{ pair}}}^m \sum_{\substack{k+h=2 \\ k \text{ impair et } h \text{ impair}}}^l b_{ij,2} a_{kh,1} r^{i+j+k+h} \tilde{R}_{ijkh} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair et } j \text{ pair}}}^l \sum_{\substack{k+h=2 \\ k \text{ impair et } h \text{ impair}}}^m a_{ij,1} b_{kh,2} r^{i+j+k+h} \tilde{U}_{ijkh} \\
& - \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair et } j \text{ impair}}}^l \sum_{\substack{k+h=1 \\ k \text{ impair et } h \text{ pair}}}^m a_{ij,1} b_{kh,2} r^{i+j+k+h} \tilde{U}_{ijkh} \\
& + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair et } j \text{ pair}}}^l \sum_{\substack{k+h=2 \\ k \text{ impair et } h \text{ impair}}}^l a_{ij,1} a_{kh,1} r^{i+j+k+h+1} V_{ijkh} \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair et } j \text{ impair}}}^l \sum_{\substack{k+h=1 \\ k \text{ impair et } h \text{ pair}}}^l a_{ij,1} a_{kh,1} r^{i+j+k+h+1} \tilde{V}_{ijkh} \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair et } j \text{ pair}}}^l \sum_{\substack{k+h=1 \\ k \text{ pair et } h \text{ impair}}}^l a_{ij,1} a_{kh,1} r^{i+j+k+h+1} \tilde{V}_{ijkh} \Big].
\end{aligned}$$

Finalement, on remarque que $H_1(r) + H_2(r)$ est un polynôme en r^2 de la forme suivante.

$$H_1(r) + H_2(r) = r \left[P_1(r^2) + r^2 P_2(r^2) + r^4 P_3(r^2) \right],$$

où

3.3. BIFURCATION DES CYCLES LIMITES DES ORBITES PÉRIODIQUES
D'UN CENTRE LINÉAIRE PERTURBÉ PAR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE
D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LIÉNARD

$P_1(r^2)$ est un polynôme en la variable r^2 de degré

$$\lambda_1 = \max\left\{\left[\frac{O(m) + E(l) - 1}{2}\right], \left[\frac{E(m) + O(l) - 1}{2}\right], m - 1, \left[\frac{E(n)}{2}\right], \left[\frac{E(m) + O(n) - 1}{2}\right]\right\},$$

$P_2(r^2)$ est un polynôme en la variable r^2 de degré

$$\lambda_2 = \max\left\{O(n) - 1, \left[\frac{E(m) + O(n) - 3}{2}\right], \left[\frac{O(m) + E(n) - 3}{2}\right], \left[\frac{O(n) + O(l) - 2}{2}\right], l - 1, E(m) - 2, \left[\frac{E(m) + O(l) - 3}{2}\right], \left[\frac{O(m) + E(l) - 3}{2}\right]\right\},$$

$P_3(r^2)$ est un polynôme en la variable r^2 de degré

$$\lambda_3 = \left[\frac{E(n) + E(l) - 4}{2}\right],$$

avec

- $O(i)$ le plus grand impair inférieur ou égal à i .
- $E(i)$ le plus grand pair inférieur ou égal à i .
- $[\cdot]$ désigne la partie entière.

Donc

$$F_{20}(r) = \frac{1}{2\pi} r \left[P_1(r^2) + r^2 P_2(r^2) + r^4 P_3(r^2) \right].$$

Pour trouver les racines positives réelles de F_{20} , nous devons résoudre une équation algébrique en r^2 de degré $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2 + 1, \lambda_3 + 2\}$. Cela donne que F_{20} a au plus λ racines positives. Cela complète la preuve.

De plus, nous pouvons choisir les Coefficients $a_{ij,1}, a_{ij,2}, b_{ij,2}, C_{ij,1}, c_{ij,2}, d_{ij,2}$ de telle façon que F_{20} admet exactement λ racines positives.

3.3. BIFURCATION DES CYCLES LIMITES DES ORBITES PÉRIODIQUES
D'UN CENTRE LINÉAIRE PERTURBÉ PAR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE
D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LIÉNARD

Exemple 3.3.2. *On considère le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(1 + xy - 2x^2 - x)y - \varepsilon^2(-2xy - y^2)y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(4xy + (-x^2 - y)y) - \varepsilon^2(x^2 - y + (-xy + y^2 - x)y), \end{cases} \quad (3.21)$$

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r > 0$, le système (3.21) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \left[-\cos(\theta) \sin(\theta)r + (\sin(\theta) - 4 \sin^2(\theta) \cos(\theta))r^2 + 2 \sin(\theta) \cos^3(\theta)r^3 \right] \\ \quad + \varepsilon^2 \left[\sin^2(\theta)r + (-\sin(\theta) \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \cos(\theta))r^2 \right. \\ \quad \left. + (2 \cos(\theta) \sin(\theta) + 3 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) - 2 \cos^3(\theta) - \sin(\theta) - \sin^2(\theta))r^3 \right], \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \left[1 - \cos^2(\theta) - 4 \sin(\theta) \cos^2(\theta)r + (\cos(\theta) \sin(\theta) \right. \\ \quad \left. + 2 \cos^4(\theta) - 2 \cos^2(\theta))r^2 \right] + \varepsilon^2 \left[\cos(\theta) \sin(\theta) + (-\cos^3(\theta) \right. \\ \quad \left. + \sin(\theta) \cos^2(\theta))r + (3 \sin(\theta) \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) \sin(\theta) - 2 \cos^4(\theta) \right. \\ \quad \left. + 3 \cos^2(\theta) - 1)r^2 \right]. \end{cases} \quad (3.22)$$

Considérons maintenant θ comme la variable indépendante, on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3), \quad (3.23)$$

où

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) &= -2r^3 \sin(\theta) \cos^3(\theta) + \cos(\theta)r \sin(\theta) - r^2 \sin(\theta) + 4r^2 \sin^2(\theta) \cos(\theta), \\ F_2(r, \theta) &= -6r^4 \sin(\theta) \cos^4(\theta) + 20r^3 \sin(\theta) \cos^5(\theta) - 2 \sin(\theta)r^3 \cos(\theta) + 6r^4 \sin(\theta) \cos^2(\theta) \\ &\quad - \cos^3(\theta)r \sin(\theta) - 4r^5 \sin(\theta) \cos^7(\theta) + 4r^5 \sin(\theta) \cos^5(\theta) - 18r^3 \sin(\theta) \cos^3(\theta) \\ &\quad + 2 \sin(\theta)r^2 \cos^2(\theta) + \cos(\theta)r \sin(\theta) - r^2 \sin(\theta) - 8r^4 \sin^2(\theta) \cos^3(\theta) \\ &\quad + 3r^2 \sin^2(\theta) \cos(\theta) - r \sin^2(\theta) - 8 \cos^3(\theta)r^2 \sin^2(\theta) + r^3 \sin^2(\theta) + 2r^3 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \\ &\quad + 16r^4 \sin^2(\theta) \cos^5(\theta) - r^4 \sin^2(\theta) \cos(\theta) - 2r^5 \sin^2(\theta) \cos^4(\theta). \end{aligned}$$

Notons d'abord que : $F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) = 0$.

3.3. BIFURCATION DES CYCLES LIMITES DES ORBITES PÉRIODIQUES D'UN CENTRE LINÉAIRE PERTURBÉ PAR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LIÉNARD

Pour déterminer les cycles limites, on résout l'équation

$$\begin{aligned}
 F_{20}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot \int_0^\theta F_1(r, s) ds + F_2(r, \theta) \right] d\theta \\
 &= r \left(-\frac{1}{8}r^4 - \frac{3}{4}r^3 - \frac{1}{2} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

L'équation (3.24) possède deux racines positives $r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{10} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{10} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$. D'après le théorème (3.3.2), le système (3.21) a exactement deux cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$, en utilisant la méthode de moyennisation d'ordre deux. Voir la figure (3.2).

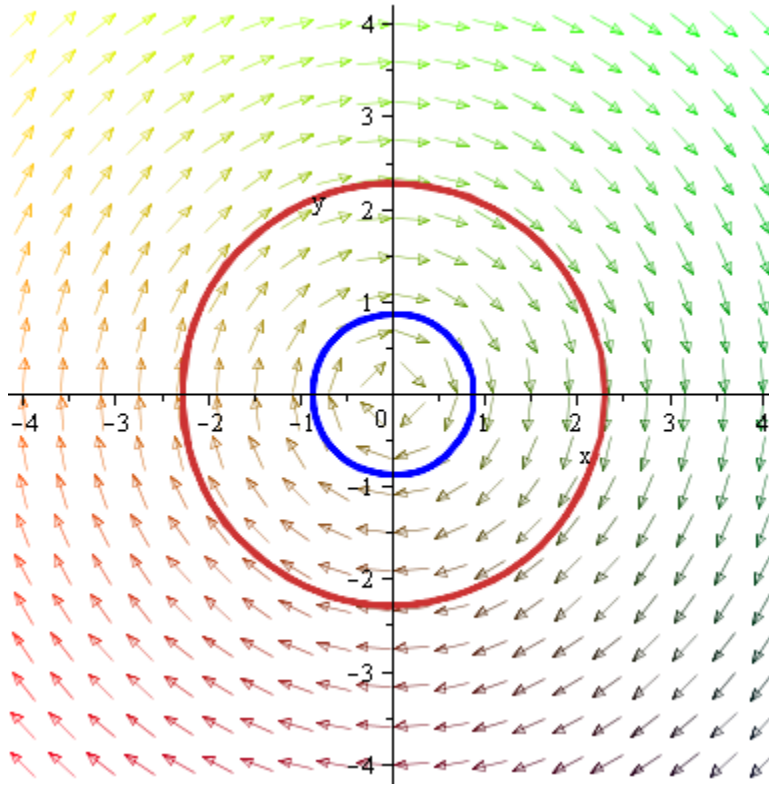


FIGURE 3.2 – Les deux cycles limites du système (3.21) pour $\varepsilon = 0.0001$.

Chapitre 4

Bifurcation des cycles limites d'un anneau périodique pour un système différentiel plan

Dans ce chapitre, nous allons appliquer la méthode de moyennisation proposée en 2004, par Buică et Llibre [6] pour étudier le nombre de cycles limites qui bifurquent des trajectoires périodiques d'un anneau périodique d'un système différentiel plan.

4.1 Quelques définitions

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (4.1)$$

Soit Ω un ouvert du plan de phase et $(x(t), y(t))$ une solution (ou une trajectoire). Notons par $\Delta_{x,y}^\Omega$ l'ensemble

$$\Delta_{x,y}^\Omega = \{t \in \mathbb{R} / (x(t), y(t)) \in \Omega\}.$$

Définition 4.1.1. (Intégrale première). L'application $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée *intégrale première* du système (4.1) sur Ω si elle est constante sur les courbes solutions $(x(t), y(t))$ du système (4.1) contenues dans Ω c-à-d

$$H(x(t), y(t)) = \text{cste}, \forall t \in \Delta_{x,y}^\Omega.$$

Définition 4.1.2. Une fonction différentiable $(x, y) \rightarrow H(x, y)$ est une *intégrale première* du système différentiel (4.1) si :

$$f(x, y) \frac{\partial H}{\partial x} + g(x, y) \frac{\partial H}{\partial y} = 0.$$

Remarque 4.1.1. On dit que le système (4.1) est *intégrable* sur un ouvert Ω s'il admet une *intégrale première* sur Ω .

Exemple 4.1.1. Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = cxy - dy \end{cases}$$

définie sur $U =]0; +\infty[\times]0; +\infty[$. La fonction

$$F : (x, y) \in U \rightarrow cx + by - d \ln x - a \ln y$$

est une *intégrale première* du système. En effet

$$\frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} = \left(c - \frac{d}{x}\right)(ax - bxy) + \left(b - \frac{a}{y}\right)(cxy - dy) = 0.$$

D'où le résultat.

Définition 4.1.3. (facteur intégrant). On appelle facteur intégrant du système (4.1) sur Ω associé à une intégrale première H une fonction de classe C^1 $R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ non identiquement nulle telle que

$$\frac{\partial(Rf)}{\partial x} + \frac{\partial(Rg)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}(RX) = 0.$$

Définition 4.1.4. (Centre isochrone). Un point singulier est un centre si, dans un certain voisinage de ce point toutes les orbites sont fermées. Un centre est isochrone si le temps de parcours de ces orbites fermées est toujours le même.

4.2 Théorèmes

On considère le système différentiel autonome plan

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (4.2)$$

où $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues. Supposons la condition (A1) suivante :
(A1) : le système (4.2) a un anneau périodique autour du point d'équilibre $(0, 0)$,

$$\Gamma_h : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = h, \quad h_c < h < h_s\}.$$

où H est une intégrale première du système.

Désignons par $\mu = \mu(x, y)$ le facteur intégrant pour le système (4.2) correspondant à l'intégrale première H .

On perturbe le système (4.2) comme suit

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) + \varepsilon p(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} = Q(x, y) + \varepsilon q(x, y, \varepsilon), \end{cases} \quad (4.3)$$

où $p, q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

En 2004, Buică et Llibre [6] ont proposé une manière pour appliquer la méthode de moyennisation dont le but est d'étudier le nombre de cycles limites qui bifurquent des trajectoires périodiques du système (4.3) pour $\varepsilon = 0$.

La première étape est d'écrire le système (4.3) sous la forme standard pour appliquer la méthode de moyennisation, i.e. sous la forme

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon).$$

Le système différentiel (4.3) écrit avec cette forme standard décrit la dépendance entre la racine carrée de l'énergie $R = \sqrt{h}$ et l'angle φ des coordonnées polaires.

Théorème 4.2.1. *Supposons que (A1) est vérifiée pour le système (4.2) et que*

$$xQ(x, y) - yP(x, y) \neq 0 \quad (4.4)$$

pour tout (x, y) dans l'anneau périodique.

Soit $\rho : (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}) \times [0, 2\pi) \rightarrow [0, \infty)$ une fonction continue telle que

$$H(\rho(R, \varphi) \cos \varphi, \rho(R, \varphi) \sin \varphi) = R^2, \quad (4.5)$$

pour tout $R \in (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s})$ et tout $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Alors, l'équation différentielle qui décrit la dépendance entre la racine carrée de l'énergie $R = \sqrt{h}$ et l'angle φ pour le système (4.3) est

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py) + 2R\varepsilon(qx - py)}, \quad (4.6)$$

où $x = \rho(R, \varphi) \cos \varphi$ et $y = \rho(R, \varphi) \sin \varphi$.

Preuve

D'après la définition de l'intégrale première et du facteur intégrant, nous avons :

$$\frac{\partial H}{\partial x} P + \frac{\partial H}{\partial y} Q = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\mu P, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \mu Q.$$

On définit la fonction

$$G(r, R, \varphi) = H(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - R^2,$$

en tout point (r, φ) de l'anneau périodique et pour tout $R \in (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s})$.

On a

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial H}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial H}{\partial y} \sin \varphi = \frac{\mu(x, y)}{r} (Q(x, y)x - P(x, y)y),$$

où $x = r \cos \varphi$ et $y = r \sin \varphi$.

Pour tout (r_0, φ_0) dans l'anneau périodique, il existe un R_0 tel que $G(r_0, R_0, \varphi_0) = 0$.

L'hypothèse (4.4) assure que $\frac{\partial G}{\partial r}(r_0, R_0, \varphi_0) \neq 0$.

D'après le théorème des fonctions implicites, au voisinage de chaque point (R_0, φ_0) il existe une unique fonction continue $\rho = \rho(R, \varphi)$ telle que l'équation (4.5) soit vérifiée.

Donc cette fonction est bien définie sur $(\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}) \times [0, 2\pi)$ et satisfait (4.5).

La relation entre la racine carrée de l'énergie et le temps est donnée par

$$R(t) = \sqrt{H(x(t), y(t))}$$

et entre l'angle φ et le temps est

$$\varphi(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}$$

pour tout $(x(t), y(t)) \in \Gamma_h$, $t \in \mathbb{R}$.

On obtient alors

$$\dot{R} = \varepsilon \frac{\mu(Qp - Pq)}{2R}, \quad \dot{\varphi} = \frac{(Qx - yP) + \varepsilon(qx - py)}{x^2 + y^2}.$$

éliminant le temps dans les deux expressions, on obtient l'équation (4.6). \square

La démonstration du théorème qui suit est une conséquence du résultat du théorème 4.2.1.

Théorème 4.2.2. *la fonction $f : (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}) \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(z, \varepsilon) = \int_0^T F(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon) dt$ pour l'équation (4.6) est donnée par l'expression suivante*

$$f(R, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py) + 2R\varepsilon(qx - py)} d\varphi, \quad (4.7)$$

et la fonction $f_1 : (\sqrt{h_{c*}}, \sqrt{h_{s*}}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_1(z) = \int_0^T F_1(s, z) ds$ pour l'équation (4.5) est

$$f_1(R) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py)} d\varphi, \quad (4.8)$$

où $\mu = \mu(x, y)$ est un facteur intégrant pour le système (4.2) correspondant à l'intégrale première H , avec $x = \rho(R, \varphi) \cos \varphi$ et $y = \rho(R, \varphi) \sin \varphi$.

4.3 Bifurcation des cycles limites d'un centre isochrone via la méthode de moyennisation

Comme il a été présenté dans [6], soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2, \\ \dot{y} = x + xy, \end{cases} \quad (4.9)$$

qui possède un centre isochrone à l'origine et une intégrale première

$H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{(1 + y)^2}$. Notons que $h_c = 0$, $h_s = 1$, et la fonction ρ satisfaisant les hypothèses du théorème 4.2.1 est $\rho(R, \varphi) = \frac{R}{1 - R \sin \varphi}$ pour tout $0 < R < 1$ et $\varphi \in [0, 2\pi)$.

On perturbe le système (4.9) comme suit

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 + \varepsilon p(x, y), \\ \dot{y} = x + xy + \varepsilon q(x, y), \end{cases} \quad (4.10)$$

où

$$p(x, y) = a_1x - a_3x^2 + (2a_2 + a_5)xy + a_6y^2$$

et

$$q(x, y) = a_1y + a_2x^2 + a_4xy - a_2y^2.$$

L'équation (4.6) correspondante à ce système est

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \frac{a_1R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3}{1 - R \sin \varphi + \varepsilon c(\varphi)R}, \quad (4.11)$$

où

$$\begin{cases} a(\varphi) = (-2a_1 + 3a_2 + a_5) \sin \varphi + (a_4 + a_6) \cos \varphi + (-5a_2 - a_5) \sin^3 \varphi \\ \quad + (-a_3 - a_4 - a_6) \cos^3 \varphi, \\ b(\varphi) = a_1 + a_2 + (-a_1 - 2a_2) \cos^2 \varphi - a_4 \cos \varphi \sin \varphi, \\ c(\varphi) = (a_3 + a_4) \sin \varphi + (-3a_2 - a_5) \cos \varphi + (-a_3 - a_4 - a_6) \sin^3 \varphi \\ \quad + (4a_2 + a_5) \cos^3 \varphi. \end{cases}$$

4.3. BIFURCATION DES CYCLES LIMITES D'UN CENTRE ISOCHRONE VIA LA MÉTHODE DE MOYENNISATION

L'équation (4.11) s'écrit sous la forme

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon F_1(\varphi, R) + \varepsilon^2 G(\varphi, R, \varepsilon),$$

avec

$$F_1(R, \varphi) = \frac{a_1 R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3}{1 - R \sin \varphi},$$

$$G(R, \varphi, \varepsilon) = -\frac{[a_1 R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3]c(\varphi)R}{(1 - R \sin \varphi)(1 - R \sin \varphi + \varepsilon c(\varphi)R)},$$

c'est à dire sous la forme standard de la méthode de moyennisation d'ordre un.

Pour appliquer le Théorème de moyennisation d'ordre un, on a besoin de la fonction $f_1(z) = \int_0^{2\pi} F_1(s, z) ds$, qui est pour notre problème $f_1 :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_1(z) = \int_0^{2\pi} \frac{a_1 z + a(\varphi)z^2 + b(\varphi)z^3}{1 - z \sin \varphi} d\varphi,$$

On calcule cette intégrale par maple, on obtient

$$f_1(z) = -\frac{1}{2(z\sqrt{1-z^2})} [2a_2 z^4 + (6a_2 + a_5 - 2a_1)z^2 \sqrt{1-z^2} - (10a_2 + 2a_5)z^2 - (2a_5 + 8a_2)\sqrt{1-z^2} + 8a_2 + 2a_5].$$

En considérant la nouvelle variable $\xi \in]0, 1[$ définie par $z = \sqrt{1 - \xi^2}$, on obtient

$$f_1(\sqrt{1 - \xi^2}) = \frac{1}{2(\sqrt{1 - \xi^2})} (1 - \xi)(2a_2 \xi^2 + (2a_1 - 4a_2 - a_5)\xi + 2a_1 + 2a_2 + a_5).$$

Notons que $z \in (0, 1)$ est une racine de f_1 si et seulement si $\xi \in]0, 1[$ est une racine du polynôme $g(\xi) = 2a_2 \xi^2 + c_1 \xi + c_2$, où $c_1 = 2a_1 - 4a_2 - a_5$ et $c_2 = 2a_1 + 2a_2 + a_5$. La fonction g possède au plus deux racines dans l'intervalle $]0, 1[$, ceci signifie que la fonction f_1 admet au plus deux racines.

4.3. BIFURCATION DES CYCLES LIMITES D'UN CENTRE ISOCHRONE VIA LA MÉTHODE DE MOYENNISATION

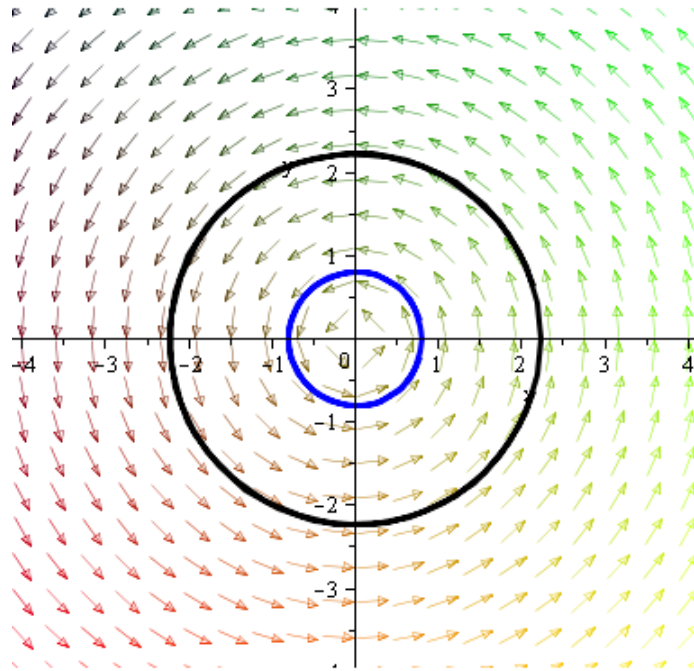


FIGURE 4.1 – Deux cycles limites du système (4.9).

Donc au plus deux cycles limites peuvent bifurquer de l'anneau périodique du système (4.9).

Conclusion et perspectives

Cette thèse de doctorat porte sur un aspect important de la théorie qualitative des systèmes différentiels planaires, à savoir les cycles limites.

L'importance de déterminer le nombre de cycles limites fait l'objet de la deuxième partie du 16^{ème} problème de Hilbert.

L'application de la méthode de moyennisation pour étudier les cycles limites des systèmes différentiels dépendant d'un paramètre, s'avère ces dernières années très fructueuse, elle a donné de bon résultats et a été appliquée par différents Mathématiciens. Notons que nos différents calculs ont été réalisés par le logiciel Maple.

Nous continuons à travailler sur des problèmes analogues.

Appendice

Dans cet appendice, nous définissons certaines formules écrites dans la preuve du théorème 3.3.1 et dans celle du théorème 3.3.2, pour $i \geq 0$ et $j \geq 0$.

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) d\theta = \begin{cases} \pi\alpha_{ij} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair,} \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) \cos((2h)\theta) d\theta = 0 \quad \text{si } i \text{ impair ou } j \text{ impair, } h = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) d\theta = \begin{cases} \pi\beta_{ij} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) \times \theta d\theta = \begin{cases} \pi\gamma_{ij} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ impair,} \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \times \theta d\theta = \begin{cases} \pi\mu_{ij} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair,} \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \times \theta d\theta = \begin{cases} \pi\sigma_{ij} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+1}(\theta) d\theta = \begin{cases} \pi\delta_{ij} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ impair,} \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) \cos((2h+1)\theta) d\theta = \begin{cases} \pi B_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, n \\ \pi \tilde{B}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, m \\ \pi \hat{B}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, l \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) \sin((2h+1)\theta) d\theta = \begin{cases} \pi A_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, n \\ \pi \tilde{A}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, m \\ \pi \hat{A}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, l \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) \sin((2h)\theta) d\theta = \begin{cases} \pi C_{ij}^{2h} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ impair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, m \\ \pi \tilde{C}_{ij}^{2h} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ impair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, l \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \sin((2h+1)\theta) d\theta = \begin{cases} \pi D_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, n \\ \pi \tilde{D}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, m \\ \pi \hat{D}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, l \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \cos((2h+1)\theta) d\theta = \begin{cases} \pi E_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ impair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, n \\ \pi \tilde{E}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ impair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, m \\ \pi \hat{E}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ impair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, l \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \cos((2h)\theta) d\theta = \begin{cases} \pi F_{ij}^{2h} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, n \\ \pi \tilde{F}_{ij}^{2h} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, m \\ \pi \hat{F}_{ij}^{2h} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, l \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \sin((2h)\theta) d\theta = \begin{cases} \pi G_{ij}^{2h} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, m \\ \pi \tilde{G}_{ij}^{2h} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, l \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \sin((2h+1)\theta) d\theta = \begin{cases} \pi H_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, n \\ \pi \tilde{H}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, m \\ \pi \hat{H}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, l \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \cos((2h+1)\theta) d\theta = \begin{cases} \pi I_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, n \\ \pi \tilde{I}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, m \\ \pi \hat{I}_{ij}^{2h+1} & \text{if } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, l \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \cos((2h)\theta) d\theta = \begin{cases} \pi K_{ij}^{2h} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ impair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, n \\ \pi \tilde{K}_{ij}^{2h} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ impair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, m \\ \pi \hat{K}_{ij}^{2h} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ impair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, l \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \sin((2h)\theta) d\theta = \begin{cases} \pi L_{ij}^{2h} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, m \\ \pi \tilde{L}_{ij}^{2h} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair,} \\ & h = 0, 1, 2, \dots, l \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

Ou $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}, \delta_{ij}, A_{ij}^{2h+1}, \tilde{A}_{ij}^{2h+1}, \hat{A}_{ij}^{2h+1}, B_{ij}^{2h+1}, \tilde{B}_{ij}^{2h+1}, \hat{B}_{ij}^{2h+1}, C_{ij}^{2h}, \tilde{C}_{ij}^{2h}, D_{ij}^{2h+1}, \tilde{D}_{ij}^{2h+1}, \hat{D}_{ij}^{2h+1}, E_{ij}^{2h+1}, \tilde{E}_{ij}^{2h+1}, \hat{E}_{ij}^{2h+1}, F_{ij}^{2h+1}, \tilde{F}_{ij}^{2h+1}, \hat{F}_{ij}^{2h+1}, G_{ij}^{2h}, \tilde{G}_{ij}^{2h}, H_{ij}^{2h+1}, \tilde{H}_{ij}^{2h+1}, \hat{H}_{ij}^{2h+1}, I_{ij}^{2h+1}, \tilde{I}_{ij}^{2h+1}, \hat{I}_{ij}^{2h+1}, K_{ij}^{2h}, \tilde{K}_{ij}^{2h}, \hat{K}_{ij}^{2h}, L_{ij}^{2h}$ et \tilde{L}_{ij}^{2h} sont des constantes non nulles.

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+k+1}(\theta) \sin^{j+h+3}(\theta) d\theta = \begin{cases} \pi M_{ijkh} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\ & k \text{ pair et } h \text{ impair,} \\ \pi \tilde{M}_{ijkh} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ & k \text{ impair et } h \text{ pair,} \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+k+1}(\theta) \sin^{j+h+2}(\theta) d\theta = \begin{cases} \pi N_{ijkh} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\ & k \text{ est pair et } h \text{ est pair,} \\ & \text{ou } i \text{ pair et } j \text{ pair,} \\ & k \text{ impair et } h \text{ pair,} \\ \pi \tilde{N}_{ijkh} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ impair,} \\ & k \text{ est pair et } h \text{ est impair,} \\ \pi \hat{N}_{ijkh} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ & k \text{ impair et } h \text{ impair,} \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+k}(\theta) \sin^{j+h+4}(\theta) d\theta = \begin{cases} \pi P_{ijkh} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\ & k \text{ impair et } h \text{ pair,} \\ \pi \tilde{P}_{ijkh} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ & k \text{ pair et } h \text{ impair,} \\ \pi \hat{P}_{ijkh} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ impair,} \\ & k \text{ impair et } h \text{ impair,} \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+k+1}(\theta) \sin^{j+h+1}(\theta) d\theta = \begin{cases} \pi Q_{ijkh} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair,} \\ & k \text{ impair et } h \text{ impair,} \\ & \text{ou } i \text{ impair et } j \text{ impair,} \\ & k \text{ pair et } h \text{ pair,} \\ \pi \tilde{Q}_{ijkh} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ & k \text{ impair et } h \text{ pair,} \\ & \text{ou } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\ & k \text{ pair et } h \text{ impair,} \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+k}(\theta) \sin^{j+h+3}(\theta) d\theta = \begin{cases} \pi R_{ijkh} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair,} \\ & k \text{ pair et } h \text{ impair,} \\ & \text{ou } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ & k \text{ pair et } h \text{ pair,} \\ \pi \tilde{R}_{ijkh} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\ & k \text{ impair et } h \text{ impair,} \\ \text{or } i \text{ impair et } j \text{ impair,} \\ & k \text{ impair et } h \text{ pair,} \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+k+2}(\theta) \sin^{j+h+2}(\theta) d\theta = \begin{cases} \pi T_{ijkh} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ & k \text{ pair et } h \text{ impair,} \\ \pi \tilde{T}_{ijkh} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\ & k \text{ est impair et } h \text{ est pair,} \\ \pi \hat{T}_{ijkh} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ impair,} \\ & k \text{ impair et } h \text{ impair,} \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+k+2}(\theta) \sin^{j+h+1}(\theta) d\theta = \begin{cases} \pi U_{ijkh} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair,} \\ & k \text{ pair et } h \text{ impair,} \\ & \text{ou } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ & k \text{ pair et } h \text{ epair,} \\ \pi \tilde{U}_{ijkh} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\ & k \text{ impair et } h \text{ impair,} \\ \text{ou } i \text{ impair et } j \text{ impair,} \\ & k \text{ impair et } h \text{ pair,} \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+k+1}(\theta) \sin^{j+h+3}(\theta) d\theta = \begin{cases} \pi V_{ijkh} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair,} \\ & k \text{ impair et } h \text{ impair,} \\ \pi \tilde{V}_{ijkh} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ & k \text{ impair et } h \text{ pair,} \\ & \text{ou } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\ & k \text{ pair et } h \text{ impair,} \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

où

$$M_{ijkh}, \tilde{M}_{ijkh}, N_{ijkh}, \tilde{N}_{ijkh}, \hat{N}_{ijkh}, Q_{ijkh}, \tilde{Q}_{ijkh}, P_{ijkh}, \tilde{P}_{ijkh}, \hat{P}_{ijkh}, R_{ijkh}, \tilde{R}_{ijkh}, T_{ijkh}, \\ \tilde{T}_{ijkh}, \hat{T}_{ijkh}, U_{ijkh}, \tilde{U}_{ijkh}, V_{ijkh}, \tilde{V}_{ijkh}$$

sont des constantes non nulles.

Bibliographie

- [1] Alavez-Ramirez J, Blé G, Llibre J, Lopez-Lopez J. *On the maximum number of limit cycle of a class of generalized Liénard differential systems*. Int J Bifurcat Chaos, 2012; 22 : 1250063-14.
- [2] Andronov A.A, Leontoviitch E.A and Gordon II. Mayer A.G. *Etude qualitative des systèmes dynamiques d'ordre deux*. En Russe, Nouka Moxau, 1966.
- [3] Andronov A.A, Witt A. *Sur la théorie mathématiques des auto oxillations*. C.R.Acad. Sct. Paris, 1930; 190 : 256-258.
- [4] Blows TR, Llyod NG. *The number of small- amplitude limit cycles of Liénard equation*. Math Proc Camb Phil Soc, 1984; 95 : 359-66.
- [5] Bogoliubov N.N and Mitropolsky Yu. A. *Asymtotic methodds in the theory of nonlinear oscillations*. Gordon and Breach, New York, 1961.
- [6] Buică A, Llibre J. *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*. Bull Sci Math, 2004; 128 : 7-22.
- [7] Buică A, Llibre J. *Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter*, Comm. Pure Appl. Anal. 6(2006),103111.
- [8] Chengzi Li and Llibre J. *Uniqueness of limit cycles for Liénard differential equations of degree four*. J Differ Equ 2012; 252 : 3142-62.
- [9] Christopher C.J and Lynch S. *Small amplitude limit cycle bifurcations for Liénard systems with quadratic or cubic damping or restoring forces*. Nonlinearity, 1999; 12 : 1099-1112.
- [10] Chavarriga J. Sabatini M. *A survey of isochronous centers*. Qualitative Theory of Dynamical Systems 1, (1999) 1-70.
- [11] Chicone C. Jacobs M. *Bifurcation of limit cycles from quadratic isochrones*, J. Differential Equations 91, (1991) 268-326.
- [12] Dulac H. *Sur les cycles limites*. Bull. Soc. Math. France, 1923; 51 : 45-188.
- [13] Dumortier F, Li C. *Quadratic Liénard equations with quadratic damping*. J Differ Equ, 1997; 139 : 41-59.
- [14] Dumortier F, Rousseau C. *Cubic Liénard equations with linear dapimg*. Nonlinearity, 1990; 3 : 1015-39.

-
- [15] Ecalle J. *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*. Paris, France Hermann, 1992.
- [16] D. Hilbert. *Mathematische Probleme*. Lecture, in : Second Internat. Congr. Math., Paris, 1900, Nachr. Ges. Wiss. Goett. Math-Phys. Kl. (1900) 253-297; English transl : Bull. Amer. Math. Soc. 8(1902) 437-479.
- [17] Ilyashenko Y. *Finiteness theorems for limit cycles*. Providence, RI : American Math. Society, 1991.
- [18] Irisson J. *L'analyse de bifurcations*. Ecole pratique des Hautes etudes, UMR-CNRS 8046.
- [19] Giné J, Grau M and Llibre J. *Averaging theory at any order for computing periodic orbits*. Phys, 2013; 250 : 58-65.
- [20] Guckenheimer J. *On a codimension two bifurcation*. Lecture notes in Math, 1980; 898 : 99-142.
- [21] Guckenheimer J, Holmes P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Revised and corrected reprint of the 1983 original. Applied Mathematical Sciences, 42. New York : Springer-Verlag, 1990.
- [22] Kryloff N. M et Bogoliuboff N. N. *Introduction à la mécanique nonlinéaire : Les méthodes approchées et asymptotiques*. vol. 1-2 of Ukrainiska Akad. Nauk Inst. Mec. Paris : Chaire de Phys. Math. Annales, 1937.
- [23] Kuznetsov YA. *Elements of applied bifurcation theory*. Third edition. Applied Mathematical Sciences, 112. New York : Springer-Verlag, 2004.
- [24] Liénard A. *Étude des oscillations entretenues*. Revue Gén' Électr, 1928; 23 : 946-54.
- [25] Lins A, de Melo W, Pugh CC. *On Liénard's equation*. Lecture notes in mathematics. Berlin : Springer, 1977; 597 : 335-57.
- [26] Llibre J. *Averaging theory and limit cycles for quadratic systems*. Rad Mat 2002; 11 : 215-228.
- [27] Llibre J, Makhlouf A, Badi S. *3-dimensional Hopf bifurcation via averaging theory of second order*. Discrete Contin Dynam Syst 2009; 25 : 1287-1295.
- [28] Llibre J, Novaes D.D and Teixeira M.A . *Higher order averaging theory for finding periodic solutions via Brouwer degree*. IOP Pub Ltd, London Mathematical Society. 2014; 27 : 563-583.
- [29] Llibre J, Mereu AC, Teixeira M A. *Limit cycles of the generalized polynomial Liénard differential equations*. Math Proc Cambridge Philos Soc 2010; 148 : 363-383.
- [30] Llibre J, Valls C. *On the number of limit cycles of a class of polynomial differential systems*. Proc A : R Soc 2012; 468 : 2347-60.

-
- [31] Llibre J, Valls C. *Limit cycles for a generalization of polynomial Liénard differential systems*. Chaos, Solitons Fractals 2013 ; 46 : 65-74.
- [32] Lloyed N.G. *Degree Theory*. Cambridge University Press, 1978.
- [33] Lloyd NG. Lynch S. *Small-amplitude limit cycles of certain Liénard systems*. Proc R Soc Lond Ser A 1988 ; 418 : 199-208.
- [34] Lynch S. *Limit cycles of generalized Liénard equation*. Appl Math Lett 1995 ; 8 : 15-7.
- [35] Lynch S. and Christopher C. *Limit cycles in highly non-linear differential equations*. J. Sound Vib, 1999 ; 224 : 505-517.
- [36] Malkin I. G. *Some Problems of the theory of nonlinear oscillations*, Gosudarstv. Izdat. Tehn-Teor. Lit. Moscow, 1956 (in Russian).
- [37] Melnikov V. K. *On the stability of the center for time periodic perturbations*, Trans Moscow Math. Soc, 12 : 1-57, 1963.
- [38] Murdock J, Sanders A, Verhulst F. *Averaging methods in Nonlinear Dynamical Systems*, 2nd edition Appl Math sci 50 Springer, 2007.
- [39] Perko L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics 7, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [40] Poincaré H. *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, (première partie)*, Journal Mathématique, 1881.
- [41] Poincaré H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Vol I Paris, 1892.
- [42] Pontrjagin L. S. *Über Autoschwingungssysteme, die den hamiltonschen nahe liegen*, Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion, 6(1-2) :25-28, 1934.
- [43] Roseau M. *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*. (French) Springer Tracts in Natural Philosophy, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966 ; 8.
- [44] Rychkov GS. *The maximum number of limit cycle of the system $\dot{x} = y - a_1x^3 - a_2x^5$, $\dot{y} = -x$ is two*. DifferUravn 1975 ; 11 : 380-91.
- [45] Sanders JA, Verhulst F. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. Applied Mathematical Sciences, New York : Springer-Verlag, 1985.
- [46] Verhulst F. *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. Universitext, Berlin : Springer-Verlag, 1996.
- [47] Wang Y. and Jing Z. *Cubic Liénard equations with quadratic damping(II)*. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2002 ; 18 : 103-116.
- [48] Xianwu Z. *Remarks on the uniqueness of limit cycles*. Kexue Tongbao, 1983 ; 28 : 452-455.
- [49] Yu P, Han M. *Limit cycles in generalized Liénard systems*. Chaos solutions Fract, 2006 ; 30 : 1048-68.
- [50] Zhang Z. *On the existence of exactly two limit cycles for the Liénard equation*. Acta Math. Sinica, 1981 ; 24 : 710-716.