

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Mémoire de Magister

Présenté à l'Université de Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de : Génie Civil et Hydraulique

Option : Géotechnique

Par : NEZZAL Meriem

Thème : STABILITE DES TALUS PAR L'ANALYSE LIMITE

Sous la direction de : PR .MEKSAOUINE Mouhamed

JURY

| | | |
|----------------------------|-----------------------------|-------------------|
| Pr BENMALEK ML. | Université de Guelma | Président |
| Pr MEKSAOUINE M. | Université de Annaba | Rapporteur |
| Pr BELABED L . | Université de Guelma | Examineur |
| Dr (MCA) SBARTAI B. | Université de Skikda | Examineur |

Année : 2012

Table des matières :

| | |
|--|----|
| Introduction | 01 |
| Chapitre I : Problématique | 03 |
| I. 1- Généralité sur la plasticité des sols | 03 |
| I. 1- 1- Critère d'écoulement et surface de charge | 03 |
| I. 1- 2- Plasticité parfaite | 04 |
| I. 1- 3- Loi de l'écoulement plastique | 05 |
| I. 2- Autres Méthode de calcul de la stabilité des talus | 07 |
| I. 2- 1- Calcul à la rupture | 07 |
| I. 2- 1- a) Rupture Plane | 07 |
| I. 2- 1- b) Rupture Circulaire | 08 |
| I. 2- 1- c) Rupture non Circulaire | 14 |
| I. 2- 2- Caractéristiques de ses méthodes | 18 |
| I. 2- 2- a) Méthode circulaire | 18 |
| I. 2- 2- b) Méthode non Circulaire | 19 |
| I. 3- Méthode de l'analyse limite | 20 |
| I. 3- 1- Introduction | 20 |
| I. 3- 2- Théorème de la borne Inférieure | 21 |
| I. 3- 3- Théorème de la borne Supérieure | 22 |
| I. 3- 3- a) Méthode de la recherche de la borne supérieure | 22 |
| I. 3- 3- b) Surface de discontinuité d'un matériau de Coulomb standard | 23 |
| I. 3- 3- c) Dissipation d'énergie | 25 |
| I. 3- 4- Extension aux matériaux non standards | 26 |
| I. 3- 5- Aperçue succinct des travaux de différents auteurs | 27 |
| I. 4- Rappel des objectifs | 29 |

| | |
|---|----|
| I. 5- Méthode | 29 |
| I. 6- Présentation du logiciel Mathcad | 30 |
| | |
| Chapitre II : Présentation du modèle mécanique et étude paramétrique | 31 |
| II. 1- Mécanisme de rupture Log-Spiral passant à travers le pied d'un talus non incliné | 31 |
| II. 1- 1- Hauteur critique d'une rupture verticale | 31 |
| II. 1- 1- a) Mécanisme de Translation | 31 |
| II. 1- 1- b) Mécanisme Rotationnel | 32 |
| II. 2- Mécanisme de rupture Log-Spiral passant à travers le pied d'un talus incliné | 38 |
| II. 2- 1- Stabilité des talus | 38 |
| II. 2- 1- a) Equilibre Limite | 38 |
| II. 2- 1- b) Analyse limite | 39 |
| II. 2- 2- Mécanisme du Log-Spiral | 41 |
| II. 2- 2- a) Taux de travail Externe | 42 |
| II. 2- 2- b) Taux de dissipation d'énergie interne | 42 |
| II. 2- 2- c) Hauteur Critique | 43 |
| II. 2- 2- d) Résultats numériques | 44 |
| II. 3- Mécanisme de rupture Log-Spiral passant sous le pied d'un talus | 48 |
| II. 3- 1- Hauteur critique d'un talus | 48 |
| II. 3- 1- a) Taux de travail externe | 48 |
| II. 3- 1- b) Taux de dissipation d'énergie interne | 49 |
| II. 3- 1- c) Hauteur Critique | 49 |
| II. 3- 1- d) Résultats numériques | 50 |
| II. 4- Stabilité des talus dans un sol non homogène et anisotrope | 53 |
| II. 4- 1- Hauteur critique d'un talus | 53 |
| II. 4- 1- a) Exposé du problème | 53 |

| | |
|--|----|
| II. 4- 1- b) Taux de travail externe | 56 |
| II. 4- 1- c) Taux de dissipation d'énergie interne | 57 |
| II. 4- 1- d) Résultats numériques | 60 |
| II. 5- Mécanisme de rupture sous forme de cercle | 62 |
| II. 5- 1- Talus non incliné | 62 |
| II. 5- 1- a) Taux de travail externe | 63 |
| II. 5- 1- b) Taux de dissipation d'énergie interne | 67 |
| II. 5- 2- Talus incliné avec un mécanisme de rupture passant à travers le pied du talus | 67 |
| II. 5- 2- a) Valeurs des $f_i(\theta_n, \theta_0)$ | 68 |
| II. 5- 2- b) Résultats numériques | 68 |
| | |
| Chapitre III : Discussion des résultats | 70 |
| III. 1- Mécanisme de rupture log-spiral passant à travers le pied d'un talus incliné | 70 |
| III. 2- Mécanisme de rupture log-spiral passant sous le pied d'un talus incliné | 71 |
| III. 3- Mécanisme de rupture sous forme de cercle passant à travers le pied d'un talus incliné | 72 |
| III. 4- Conclusion | 75 |
| | |
| Annexes | 76 |
| Facteur de sécurité d'un mécanisme de rupture log spiral pour un talus incliné passant à travers le pied du talus suivant Mathcad | 77 |
| Facteur de sécurité d'un mécanisme de rupture log spiral pour un talus incliné passant sous le pied du talus suivant Mathcad | 82 |
| Facteur de sécurité d'un mécanisme de rupture sous forme de cercle pour un talus incliné passant à travers le pied du talus suivant Mathcad | 90 |

Liste des figures :

| | |
|---|----|
| Fig. :1- Représentation picturale de la surface d'écoulement et des règles de flux | 04 |
| Fig. :2- Courbe contrainte déformation pour des sols réels et idéaux | 05 |
| Fig. :3- Rupture plane | 08 |
| Fig. :4- Rupture circulaire selon FELLENIUS | 09 |
| Fig. :5- Rupture circulaire selon BISHOP | 11 |
| Fig. :6- Schémas des forces selon BISHOP | 12 |
| Fig. :7- Dimensions d'une tranche selon BISHOP | 13 |
| Fig. :8- Rupture non circulaire selon Janbu et al | 15 |
| Fig. :9- Rupture non circulaire selon Morgenster-Price | 16 |
| Fig. :10- Rupture non circulaire selon Spencer | 17 |
| Fig. :11- Zone mince de transition | 24 |
| Fig. :12- Condition de glissement cinématique | 24 |
| Fig. :13- Surface de discontinuité | 25 |
| Fig. :14- Spirale logarithmique (SOUBRA 1989) | 27 |
| Fig. :15- Discrétisation du massifs en éléments triangulaires LYSMER (1970) | 28 |
| Fig. :16- Hauteur critique d'une coupe verticale | 31 |
| Fig. :17- Mécanisme de rupture rotationnel pour la hauteur critique d'une coupe verticale | 32 |
| Fig. :18- Solution de l'équilibre limite pour la stabilité d'une coupe verticale | 38 |
| Fig. :19- Solution de l'équilibre limite pour la stabilité d'une coupe verticale | 40 |
| Fig. :20- Mécanisme de rupture de la stabilité d'un talus avec un plan de rupture passant à travers le pied du talus | 41 |
| Fig. : 21- Valeurs critique de θ_h , θ_0 et L/r_0 en fonction de ϕ pour une rupture passant à travers le pied du talus | 46 |

| | |
|--|----|
| Fig. :22- Courbe du facteur de stabilité suivant l'angle d'inclinaison β d'un mécanisme de rupture log-spiral passant à travers le pied du talus pour $\alpha = 0$ selon Mathcad | 47 |
| Fig. : 23- Mécanisme de rupture de la stabilité d'un talus incliné avec un plan de rupture passant sous le pied du talus | 48 |
| Fig. :24- Valeurs de $\theta_h, \theta_0, L/r_0$ et D/H en fonction de β pour une rupture passant sous le pied d'un talus | 51 |
| Fig. :25- Courbe du facteur de stabilité suivant l'angle d'inclinaison β d'un mécanisme de rupture log-spiral passant sous le pied du talus pour $\alpha = 0$ selon Mathcad | 52 |
| Fig. :26- Mécanisme de rupture de la stabilité d'un talus avec un plan de rupture passant sous le pieds d'un talus pour un sol anisotrope et non homogène | 53 |
| Fig. :27- Différents types de variation de la cohésion linéairement | 55 |
| Fig. :28- Mécanisme de rupture rotationnel suivant un cercle d'un talus non incliné | 63 |
| Fig. :29- Mécanisme de rupture rotationnel suivant un cercle d'un talus incliné passant à traves le pied du talus | 64 |
| Fig. :30- Courbe du facteur de stabilité suivant l'angle d'inclinaison β d'un mécanisme de rupture sous forme de cercle passant à travers le pied du talus pour $\alpha = 0$ selon Mathcad | 69 |
| Fig. :31- Comparaison des Facteurs de Stabilités pour un mécanisme de rupture log-spiral passant à travers le pied d'un talus | 70 |
| Fig. :32- Comparaison des Facteurs de Stabilités pour un mécanisme de rupture log-spiral passant sous le pied d'un talus | 72 |
| Fig. :33- Comparaison des Facteurs de Stabilité entre un mécanisme de rupture log-spiral et celui du cercle passant à travers le pied d'un talus | 73 |

Liste des tableaux :

| | | |
|------------|--|----|
| Tab. :I | Facteur de stabilité pour un mécanisme de rupture log-spiral passant à travers le pied du talus selon Chen | 45 |
| Tab. :II | Facteur de stabilité pour un mécanisme de rupture log-spiral passant à travers le pied d'un talus selon Mathcad | 47 |
| Tab. :III | Facteur de stabilité pour un mécanisme de rupture log-spiral passant sous le pied du talus. (Selon Chen) | 50 |
| Tab. :IV | Facteur de stabilité pour les méthodes de l'équilibre limite et l'analyse limite. (Selon Chen) | 50 |
| Tab. :V | Facteur de stabilité pour un mécanisme de rupture log-spiral passant sous le pied du talus. (Selon Mathcad) | 51 |
| Tab. :VI | Facteur de stabilité pour un sol homogène et anisotropique (Selon Chen) | 60 |
| Tab. :VII | Facteur de stabilité pour un sol non homogène et anisotropique (Selon Chen) | 61 |
| Tab. :VIII | Facteur de Stabilité pour un mécanisme de rupture suivant un cercle passant à travers le pied d'un talus | 68 |
| Tab. :IX | Comparaison des Facteurs de stabilités pour un mécanisme de rupture log-spiral passant à travers le pied d'un talus | 70 |
| Tab. :X | Comparaison des Facteurs de Stabilités pour un mécanisme de rupture log-spiral passant sous le pied d'un talus | 71 |
| Tab. :XI | Comparaison des Facteurs de Stabilités pour un mécanisme de rupture log-spiral et celui d'un cercle passant à travers le pied d'un talus | 73 |

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier le président du jury ainsi que tous ses membres pour le temps qu'ils nous consacrent, la patience et l'intérêt qu'ils portent à notre travail.

Je tiens aussi à remercier mon encadreur le Professeur MEKSAOUINE Mohamed pour la patience dont il a su faire preuve à mon égard, pour sa grande contribution à mon modeste travail, ainsi que de m'avoir soutenue tout au long de mon cursus.

Ma plus grande reconnaissance ira à mes parents NEZZAL Salima et NEZZAL Lahcene pour leurs encouragements, leurs soutient, leur foi inébranlable en leur fille, et leur très grande patience envers moi durant toute ma vie, car sans eux je ne serai pas là où j'en suis.

Mes sincères remerciements à mon oncle BENHAMZA Houcine et sa femme, sans qui tout ce travail n'aurait pas vu le jour. Pour leurs conseils avisés et les leurs remarques plus que nécessaire à l'aboutissement de mon travail.

A mon Mari BENALLEGUE Yacine, qui a su me supporter, m'encourager et me soutenir durant toute cette période sans faillir. Pour son aide précieuse et sa présence, je lui en serai reconnaissante à jamais.

A mon frère Nezzal Rafik et ma sœur Nezzal Nassima, leurs conjoint ainsi qu'à leurs enfants pour leurs soutient et encouragements.

A mes amis, et tout particulièrement à BENSLIMANE Amina et BOUNEMEUR Amel pour leurs encouragements.

Et pour finir, à Monsieur BUCCALA Lucio, mon supérieur, pour le temps qu'il m'a permis de prendre afin de mener à bien ce projet.

Merci à tous.

A mon Grand Père, Grand homme de science et de valeur. Paix à son Ame

Introduction :

Les problèmes de la mécanique des sols sont divisés en deux groupes bien distincts : Problèmes de Stabilités et Problèmes d'Elasticités. Ils sont traités de façons différentes.

Les problèmes élastiques sont liés aux contraintes et déformations du sol quant il n'y a pas de rupture du sol. Les contraintes en un point du sol sous une fondation, ou derrière un mur de soutènement, les déformations autour d'un tunnel ou d'une excavation, et tout problème de stabilisation font partis de cette catégorie. La solution à ces problèmes est obtenue en utilisant **la théorie de l'élasticité linéaire**. La théorie de l'élasticité linéaire est basée sur la loi de Hooke qui établie une relation linéaire entre les contraintes et les déformations.

Concernant le groupe des problèmes de stabilités, ils sont liés aux conditions de rupture ultime d'une masse de sol. Les problèmes de la pression terrestre, la capacité portante, et stabilité des talus sont considérés dans cette catégorie. La caractéristique la plus importante de ces problèmes est de déterminer les charges qui vont causer la rupture de la masse de sol. La solution est obtenue en utilisant **la théorie de parfaite plasticité**.

La théorie de parfaite plasticité tient compte du fait que le sol expose un comportement mécanique régit par la loi de Hooke tant que l'intensité des contraintes est suffisamment petite. Quant l'intensité des contraintes atteint une valeur critique, le sol quitte le rang élastique pour entrer dans le rang plastique, qui pour un état constant de contrainte développe une déformation continue. Et dans le but de maintenir le flux plastique, l'intensité des contraintes doit être à la valeur critique et ne jamais la dépasser. Tant que l'intensité des contraintes tourne autour de cette valeur critique tout changement de déformation sera purement élastique.

Dans ce groupe (Problèmes de stabilité), nous allons traiter plus précisément « **la stabilité des talus** ».

Il existe plusieurs méthodes de traitement de la stabilité des talus. Parmi elles, nous avons choisis la méthode de l'analyse limite en utilisant la méthode de la borne supérieure. Notre choix c'est basé sur cette méthode en vu du fait que :

- 1- Une analyse complète incluant le champ du flux plastique contenue est complexe et peu pratique ;
- 2- La rupture par un effondrement plastique est la condition régissante de plusieurs problèmes dans la mécanique des sols.

Le développement d'une méthode efficace pour le calcul des charges de rupture d'une manière plus directe est par conséquent d'un grand intérêt pratique pour les ingénieurs.

L'analyse limite est concernée par le développement et l'application de pareille méthode. Bien que la méthode de l'analyse limite soit récente, il existe un grand nombre d'applications dans de nombreux domaines allant du traitement de la déformation du métal à la conception des structures en béton armé.

L'application aux poutres et portiques est l'aspect le plus développé de l'analyse limite. Une grande attention a été accordée récemment à la mécanique des sols en plus du béton et de la roche. Une quantité appréciable d'informations pratiques est maintenant disponible.

La caractéristique la plus frappante de la méthode de l'analyse limite est que peu importe la complexité de la géométrie d'un problème ou les conditions de chargement, il est toujours possible d'obtenir une valeur réaliste des charges de ruptures.

Notre but est de présenter la méthode de l'analyse limite en se basant sur l'ouvrage « *Limit Analysis and soil Plasticity* » par l'auteur Wai-Fah Chen.

Pour cela nos objectifs sont :

- Appliquer cette méthode à différents types de talus, pour différents modes de rupture et pour différents comportements de sols, en utilisant un mécanisme de rupture sous forme de « *log-spiral* » et de trouver les facteurs de stabilité à l'aide d'un logiciel de calcul mathématique « Mathcad » et comparer les résultats trouvés avec ceux de l'auteur.
- Changer le mécanisme de rupture en utilisant la forme d'un cercle au lieu d'un log-spiral et l'appliquer à un talus incliné où la rupture passe à travers son pied.
- Déduire les facteurs de stabilité correspondants toujours à l'aide de « Mathcad »
- Comparer les résultats obtenus de ses deux approches pour voir s'ils concordent ou non.

Chapitre I : Problématique

I. 1- Généralité sur la plasticité des sols [Cf. :02]:

Tout traitement des problèmes de stabilité doit se baser sur la connaissance de:

- 1) La géométrie d'un système donné ;
- 2) Son mode de chargement ;
- 3) Les capacités de résistance des matériaux constitutifs.

Le calcul à la rupture se fait aisément. il faut noter que la condition nécessaire pour que la stabilité de l'ouvrage soit assurée est qu'il y ait compatibilité entre les équations exprimant l'équilibre statique et les conditions imposées par les capacités de résistances.

Pour le calcul des facteurs de stabilités, nous sommes amenés à faire un choix d'une approche théorique. Cela nous conduit à un rappel des notions fondamentales de la théorie de l'analyse limite en nous basons sur celles qui sont les plus utilisées dans les méthodes d'étude de la stabilité.

I. 1. 1- Critères d'écoulement et surface de charge :

Chaque élément du corps est supposé être régi par une fonction d'écoulement « f ». Pour un matériau parfaitement plastique, « f » ne dépend que de l'ensemble des composantes de la contrainte $\sigma_{ij} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$, mais pas sur les composantes de la déformation $\epsilon_{ij} = (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx})$

L'écoulement plastique ne peut se produire que lorsque la fonction d'écoulement est satisfaite c'est-à-dire :

$$f(\sigma_{ij}) = 0$$

$f(\sigma) < 0$: Correspond au domaine de l'élasticité du matériau.

$f(\sigma) > 0$: Correspond à l'apparition de déformations irréversibles ou écoulement plastique.

Le terme de surface d'écoulement est utilisé pour insister sur le fait que deux ou trois composantes de contraintes σ_{ij} peuvent être considérées comme axes de coordonnées. Cependant, seule l'image en deux dimension est montrées dans la figure (Cf. Fig. :1).

Dans le cas du matériau parfaitement plastique, la fonction de charge ne varie pas, la surface de charge est une surface fixe et les déformations plastiques se produisent si σ est sur cette surface et y reste.

Dans le cas du matériau écouissable, la fonction de charge change au fur et à mesure du développement des déformations permanentes. Nous devons alors distinguer la surface de charge initiale et la surface de charge actuelle. Pour tenir compte de l'écrouissage, nous noterons le critère de plasticité sous la forme : $f(\sigma, E) = 0$ où e symbolise l'ensemble des paramètres d'écrouissage.

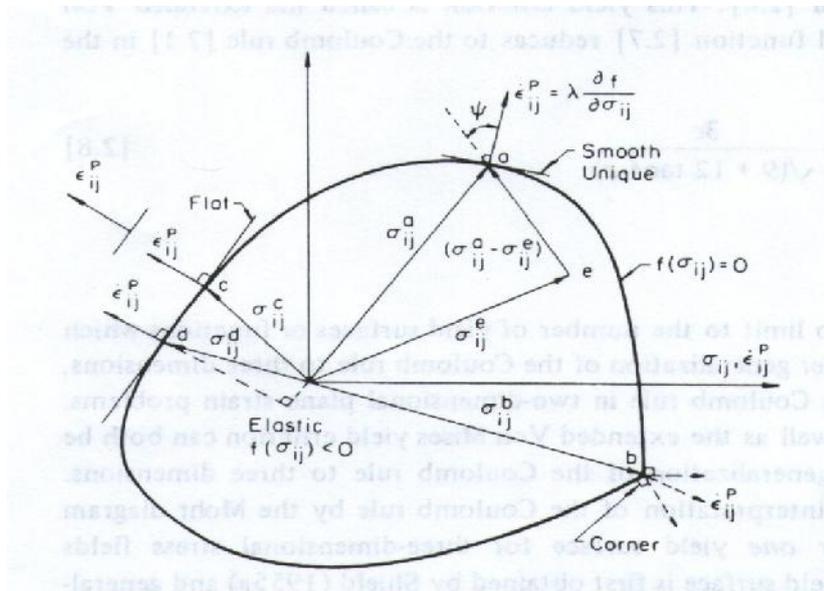


Fig. :1. Représentation picturale de la surface d'écoulement et des règles du flux

I. 1. 2- Plasticité parfaite :

Le diagramme typique contrainte – déformation pour les sols est montré par la (Cf. Fig. :2). Le comportement contrainte – déformation de la plupart des sols réels est caractérisé par une portion initiale linéaire et un pic, ou contrainte de rupture, suivie par une détente vers un état de contrainte résiduelle. Dans l'analyse limite, on ignore ce travail de détente, et on considère un diagramme contrainte – déformation simplifié, du type élastique linéaire parfaitement plastique (Cf. Fig. :2, courbe en pointillée).

Le matériau dit plastique idéal ou parfaitement plastique .est un hypothétique obéissant à cette propriété d'écoulement plastique non – contenu à contrainte constante.

Nous tenons à préciser que le niveau de contrainte de rupture utilisé dans les applications de l'analyse limite, avec l'hypothèse de plasticité parfaite, doit être choisi de telle façon qu'elle représente la contrainte moyenne dans une plage appropriée de déformation.

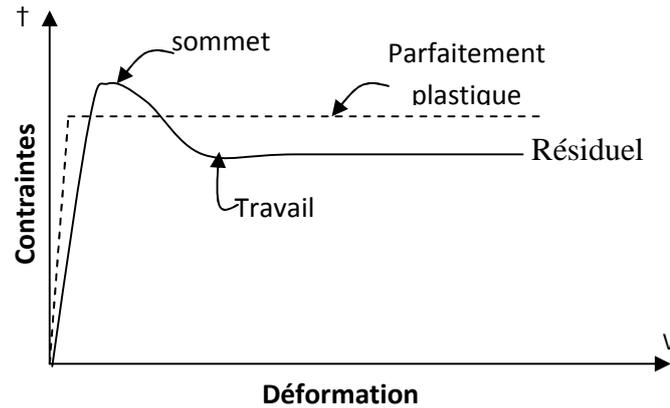


Fig. :2. Courbe contrainte-déformation pour des sols réels et idéaux

I. 1. 3- Loi d'écoulement plastique :

I.1- 3- a) Introduction :

La déformation actuelle en plasticité dépend essentiellement de la façon dont a été atteint l'état de contrainte actuel, autrement dit de l'histoire du chargement, contrairement à l'élasticité. Le temps n'intervenant pas, mais seulement l'ordre de succession des états de contraintes, le trajet du chargement correspond au trajet suivi par le point de coordonnées σ_{ij} dans l'espace représentatif de l'état de contraintes, entre l'état initial et l'état actuel. On ne peut donc établir de relations qu'entre les incréments de contraintes et de déformations.

I.1- 3- b) Règles générales de normalité :

Si nous supposons que les axes de coordonnées de l'espace de contraintes représentent simultanément les accroissements de déformation plastique. Chaque axe σ_{ij} étant également l'axe de l'accroissement de déformation plastique correspondant ε_{ij}^p .

Ainsi, un point représente un état de vitesse de déformation plastique. Dans cette représentation, la règle de normalité apparaît clairement : le vecteur représentant la vitesse de déformation plastique a la direction de la normale extérieure de la surface de charge.

La surface de charge, dans d'autres cas, peut avoir des angles où il n'y a pas de directions uniques normales. Dans ce cas, la règle de normalité implique seulement ce que le vecteur v_{ij}^p ait n'importe quelle direction comprise à l'intérieur de l'angle défini par les normales aux surfaces contiguës.

La relation contrainte - vitesse de déformation, dérivant de la condition de normalité correspondant à la fonction de charge, prend la forme générale :

$$\varepsilon_{ij}^p = \mu \cdot \frac{\delta f}{\delta \sigma_{ij}}$$

Où : $\mu > 0$ est un facteur scalaire de proportionnalité.

I.1- 3- c) Principe du travail maximal de HILL (1950) :

On fait souvent l'hypothèse que les matériaux obéissent au principe du travail maximal de HILL, que nous pouvons énoncer de la manière suivante :

Soit pour un élément, un tenseur contrainte σ à la limite d'écoulement telle que $f(\sigma) = 0$, et ε^p le tenseur vitesse de déformation plastique correspondant : si σ^* est un tenseur tel que $f(\sigma^*) < 0$, alors :

$$\begin{cases} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \varepsilon_{ij}^p \geq 0 \\ (\sigma - \sigma^*) \varepsilon^p \geq 0 \end{cases}$$

Les matériaux obéissant au principe du travail maximal de HILL sont appelés matériaux standards.

Nous démontrons (MANDEL, 1964) que ce principe implique que la surface de charge est convexe.

I.2- Autres méthode de calcul de la stabilité des talus [Cf. :11]::

Il existe plusieurs méthodes de calcul de la stabilité des talus. Avant de développer celle (Méthode de l'analyse limite) qui nous intéresse, nous citerons succinctement d'autres méthodes

I.2- 1- Calcul à la rupture

Ce mode de calcul suppose que le terrain se comporte comme un solide rigide-plastique et obéit aux lois classiques de la rupture par cisaillement. Il est utilisé depuis plusieurs décennies et a donné naissance, dans l'hypothèse de ruptures rotationnelles, à plusieurs méthodes de calculs.

Les ruptures planes représentent un cas particulier très simple dans son principe. Pour les surfaces de rupture de forme quelconque, le calcul est beaucoup plus complexe.

Pour évaluer la stabilité des talus par une méthode à l'équilibre limite, il existe des méthodes linéaires et non linéaires. Les méthodes linéaires sont des méthodes directes de calcul du facteur de sécurité FS et les méthodes non linéaires nécessitent un processus itératif. Les méthodes les plus connues sont données ci-après ainsi que les points de différence entre les méthodes de calcul vis-à-vis des hypothèses adoptées. Les méthodes non linéaires diffèrent essentiellement par les hypothèses faites sur les forces inter-tranches.

I.2- 1-a) Rupture plane

Le modèle de calcul est celui d'un massif de sol infini reposant par une interface plane sur un substratum, avec un écoulement parallèle à la pente. La figure (Cf. Fig. :3) représente une tranche de sol et les forces qui lui sont appliquées : W le poids du bloc de sol considéré, V et H les efforts sur les côtés du bloc, N et T les réactions normale et tangentielle à la base du bloc, UL l'effort dû à la pression d'eau latérale, et U l'effort dû à la pression d'eau à la base. Compte tenu de l'hypothèse de pente infinie, on peut admettre que $V = 0$ et que H et UL s'équilibrent de part et d'autre. En écrivant que la résultante des forces appliquées est nulle, on peut calculer N et T, ainsi que le coefficient de sécurité $F = T_{max}/T$

Le critère de rupture de Coulomb s'écrit :

$$T_{max} = c' \frac{dx}{\cos \beta} + (N - U) \tan \varphi'$$

On obtient l'expression suivante pour

$$F = \frac{2}{\sin 2\beta} \frac{c'}{\gamma} + \frac{(\gamma h - \gamma_w h_w)}{\gamma h \tan \beta} \tan \varphi'$$

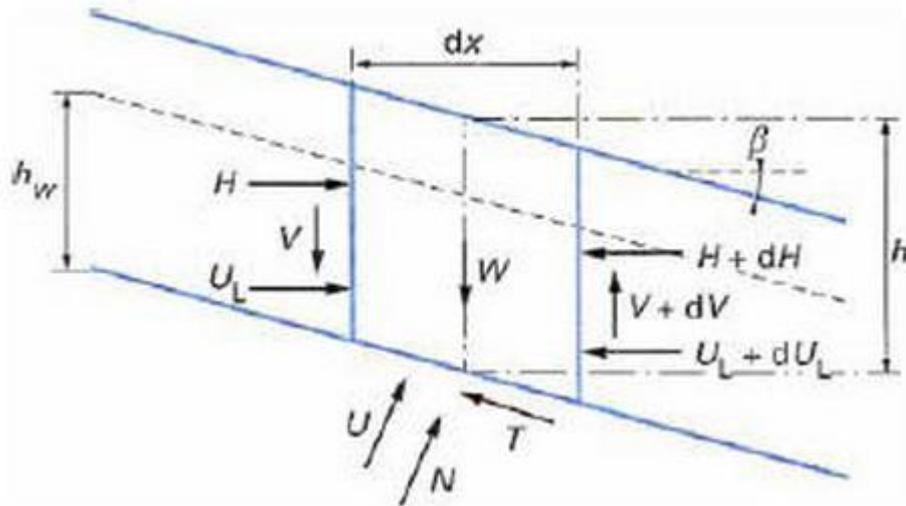


Fig. :3. Rupture Plane

I. 2- 1-b) Rupture Circulaire :

1) Méthode de FELLENIUS:

C'est la méthode la plus simple pour l'analyse de stabilité des talus. Fellenius suppose que le volume de glissement délimité par la surface de glissement et la topographie du talus est subdivisé en « n » tranches. Chaque tranche est considérée comme un solide indéformable, en équilibre sur la ligne de glissement. Considérons un talus recoupant un certain nombre de couches de sols de caractéristiques différentes c_i , φ_i , g_i . La stabilité est étudiée en considérant le problème 2D, c'est-à-dire en analysant l'équilibre d'une masse de sol d'épaisseur unité dans le sens perpendiculaire à la figure.

Soit un cercle quelconque de centre O et de rayon R pour lequel on vérifie la sécurité vis-à-vis au risque de glissement. La méthode consiste à découper le volume de sol concerné (compris dans l'arc EMF) en un certain nombre de tranches limitées par des plans verticaux. Etudions l'équilibre de l'une de ces tranches, par exemple la tranche "ABCD" (Cf. Fig. :4). Les forces agissant sur cette tranche sont les suivantes:

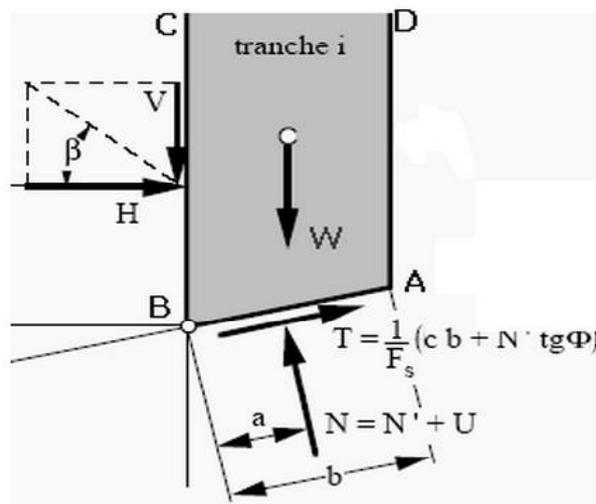
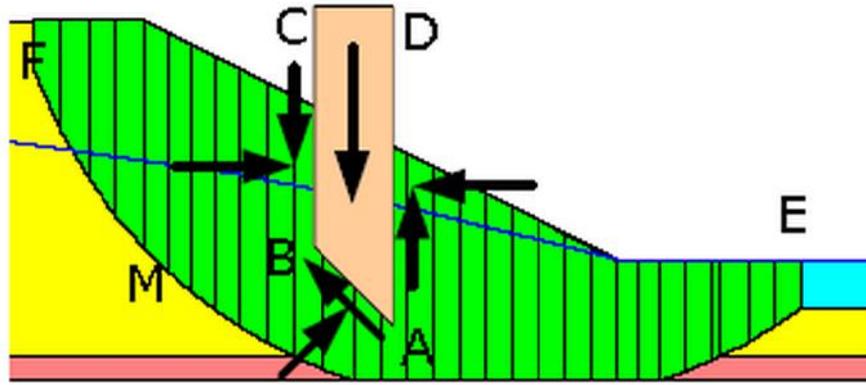


Fig. :4. : Rupture circulaire selon FELLENIUS

- son poids W ;
- la réaction du milieu sous-jacent sur l'arc AB ;
- les réactions sur les faces verticales BC et AD décomposées en réactions horizontales H et en réactions verticales V . Il s'agit de forces internes au massif étudié.
- les pressions hydrauliques.

Définissons par rapport au centre O :

- 1) le moment moteur, comme celui du poids des terres W (et des surcharges éventuelles), qui tend à provoquer le glissement ;
- 2) les moments résistants, comme ceux des réactions s'opposant globalement au glissement de la tranche

La surface de rupture étant limitée par les points E et F, le coefficient de sécurité global FS est défini par le quotient:

$$FS = \text{SEF}(\text{des moments résistants maximaux}) / \text{SEF}(\text{des moments moteurs})$$

Considérons la somme des moments pour l'arc EF, sachant que la somme des moments des forces est nulle. Fellenius a fait une hypothèse qui simplifie considérablement les calculs, à savoir que la seule force agissant sur l'arc AB est le poids W, à l'exception des forces internes.

Dans ces conditions, le moment résistant maximal est fourni par la valeur maximale que peut prendre la composante tangentielle de R_n : $(R_n)_t$

D'après la loi de Coulomb, elle s'écrit :

$$(R_n)_t = c_i AB + N_n \tan \phi_i$$

La somme des moments pour toutes les tranches est :

$$\sum_{n=1}^{n=m} R(c_i AB + N_n \tan \phi_i)$$

m: nombre total de tranches,

R : rayon du cercle de glissement.

c_i & ϕ_i : caractéristiques mécaniques de la couche dans laquelle est situé l'arc de la tranche AB

Par ailleurs, le moment moteur est dû à T_n et égal à $T_n \times R$, d'où:

$$F_s = \frac{\sum_{n=1}^{n=m} (c_i AB + N_n \tan \phi_i)}{\sum_{n=1}^{n=m} T_n}$$

2) Méthode de BISHOP :

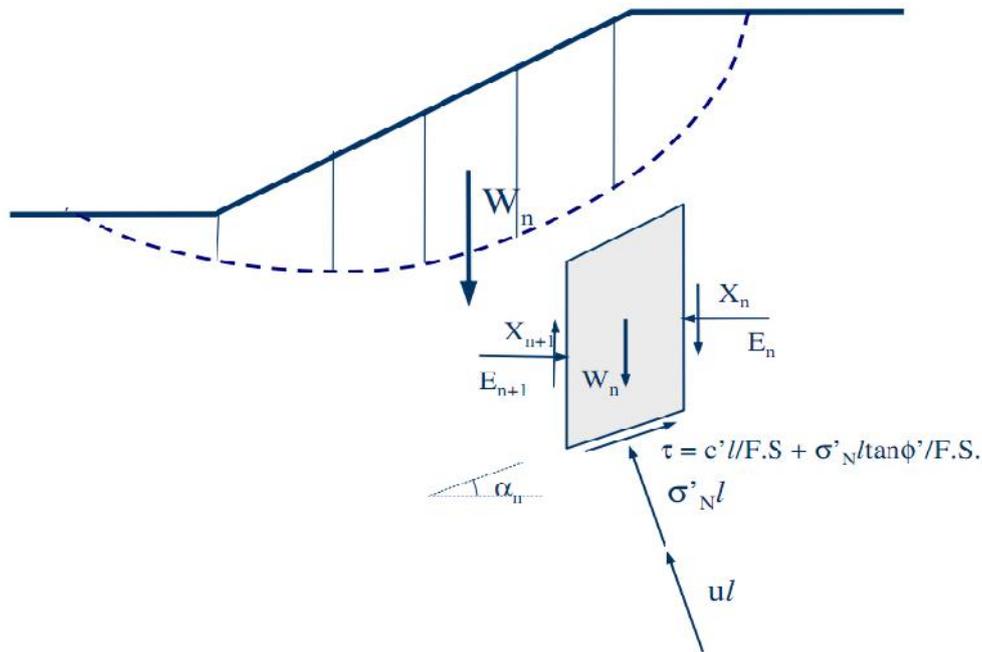


Fig. :5 Rupture circulaire selon BISHOP

La méthode de Bishop diffère de celle des tranches surtout parce qu'elle fait l'équilibre dans chacune des tranches pour trouver σ_n au lieu d'assumer celle-ci comme étant égale à $W \cos \alpha$.

$$\sigma_n = \sum F_v$$

En fait nous voyons que si nous faisons l'équilibre des forces pour obtenir σ'_n , on n'a pas nécessairement $W \cos \alpha$.

Hypothèse : $X_n - X_{n-1} = 0$

Si nous traçons le polygone des forces pour trouver σ'_n pour chaque tranche, nous avons alors :

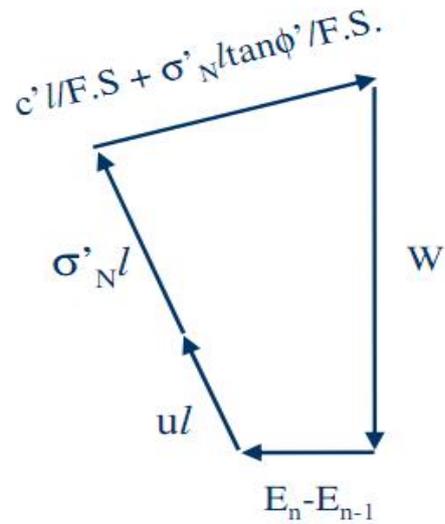


Fig. :6. Schémas des forces selon BISHOP

Dans la $\sum F_v$, $E_n - E_{n-1}$ n'entre pas en ligne de compte mais influence le polygone à l'équilibre :

$$\sum F_v = 0 \rightarrow -W + ul \cos \alpha + \sigma'_N l \cos \alpha + \frac{c'l \sin \alpha}{FS} + \frac{\sigma'_N l \tan \phi \sin \alpha}{FS} = 0$$

$$\sigma'_N l \left(\cos \alpha + \frac{\tan \phi \sin \alpha}{FS} \right) = W - ul \cos \alpha - \frac{c'l \sin \alpha}{FS}$$

$$\sigma'_N l = \left(W - ul \cos \alpha - \frac{c'l \sin \alpha}{FS} \right) / \left(\cos \alpha + \frac{\tan \phi \sin \alpha}{FS} \right)$$

De la Méthode des tranches :

$$\sigma'_N l = W \cos \alpha - ul$$

Equilibre de l'ensemble :

$M = 0$ pour déterminer FS

De l'équilibre des moments on a déjà établie que :

$$FS = \sum (l_i c'_i + \sigma'_{Ni} l_i \tan \phi) / \sum W_i \sin \alpha_i$$

(Bishop est différent que dans le calcul de σ'_N)

Si nous remplaçons σ'_N dans l'équation :

$$FS = \left(1 / \sum W_i \sin \alpha_i\right) \sum \left[l_i c'_i + \left\{ \left(W - ul \cos \alpha - \frac{c' l \sin \alpha}{FS} \right) / \left(\cos \alpha + \frac{\tan \phi \sin \alpha}{FS} \right) \right\} \tan \phi \right]$$

Si nous voulons une expression avec le même dénominateur, nous faisons :

$$m_\alpha = \cos \alpha + \frac{\tan \phi \sin \alpha}{FS}$$

$$FS = \left(1 / \sum W_i \sin \alpha_i\right) \sum [l_i c'_i \cos \alpha + (W - ul \cos \alpha) \tan \phi / m_\alpha]$$

À noter m_α contient F.S. (inconnu). Il faut donc procéder par itération converge rapidement

Si nous travaillons à la main, il est plus simple de réécrire cette équation avec :

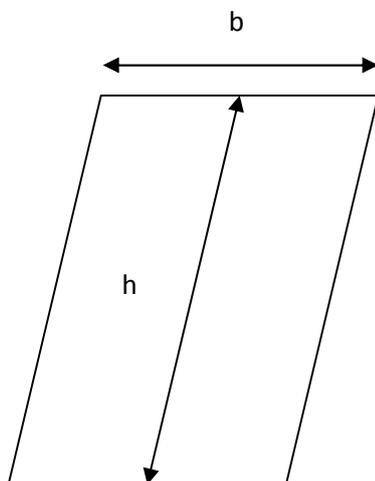


Fig. :7. Dimensions d'une tranche selon BISHOP

$$b = l \cos \alpha \rightarrow m_\alpha = hb \sin \alpha$$

$$W = \gamma hb$$

$$FS = \left(1 / \sum h_i b_i \sin \alpha_i\right) \sum [b_i (c'_i + (\gamma h_i - u_i) \tan \phi / m_\alpha)]$$

Lorsque nous travaillons à la main, le terme m_α est assez fastidieux à évaluer. Il existe cependant des tables qui permettent de donner directement le terme en fonction de α et de $\tan \phi / F.S.$

I. 2- 1-c) Rupture non circulaire

1) Méthode simplifiée de Janbu et al 1956 :

C'est une bonne méthode à utiliser à la main. Cette méthode assume la localisation des forces $P = N-1$ comme hypothèses. Nous avons donc $3N-1$ inconnus et $3N$ équations. Nous nous retrouvons avec un système sur-déterminé. Ceci peut causer certaines instabilités de la solution surtout lorsque nous utilisons l'ordinateur.

La méthode utilise un coefficient correcteur f_0 pour tenir compte des forces entre les tranches. On calcule d'abord un facteur de sécurité non corrigé FS_0 qui est déterminé comme suit :

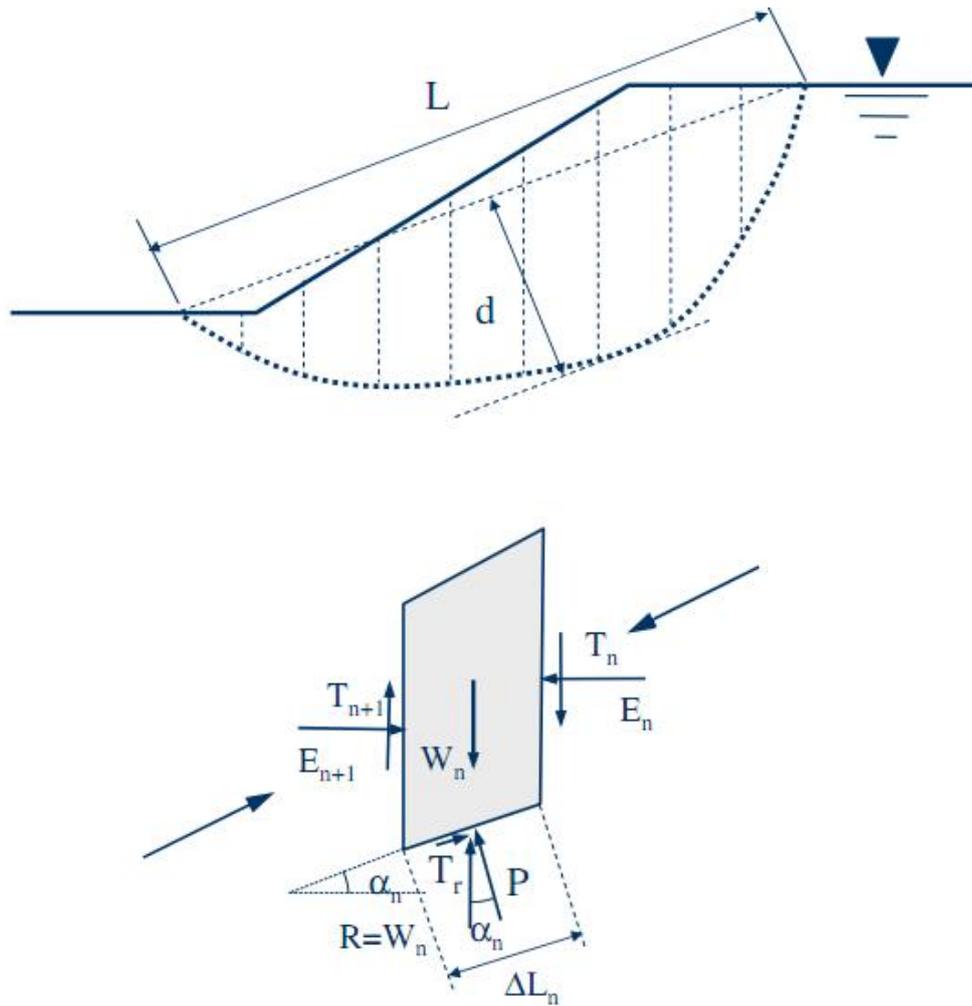


Fig. :8. Rupture non circulaire selon Janbu et al

$$FS_0 = \frac{\sum (c'l \cos \alpha + (P - ul) \tan \phi \cos \alpha)}{\sum P \sin \alpha}$$

$$P = [W - c'l \sin \alpha / FS + ul \tan \phi \sin \alpha / FS] / m_\alpha$$

Le coefficient de sécurité corrigé est :

$$FS = f_0 FS_0$$

Pour obtenir les valeurs de f_0 , nous nous servons d'un diagramme.

Il existe aussi la méthode dite rigoureuse de Janbu où les forces de cisaillement sont incluses dans le calcul de P.

2) Méthode de Morgenstern-Price 1965:

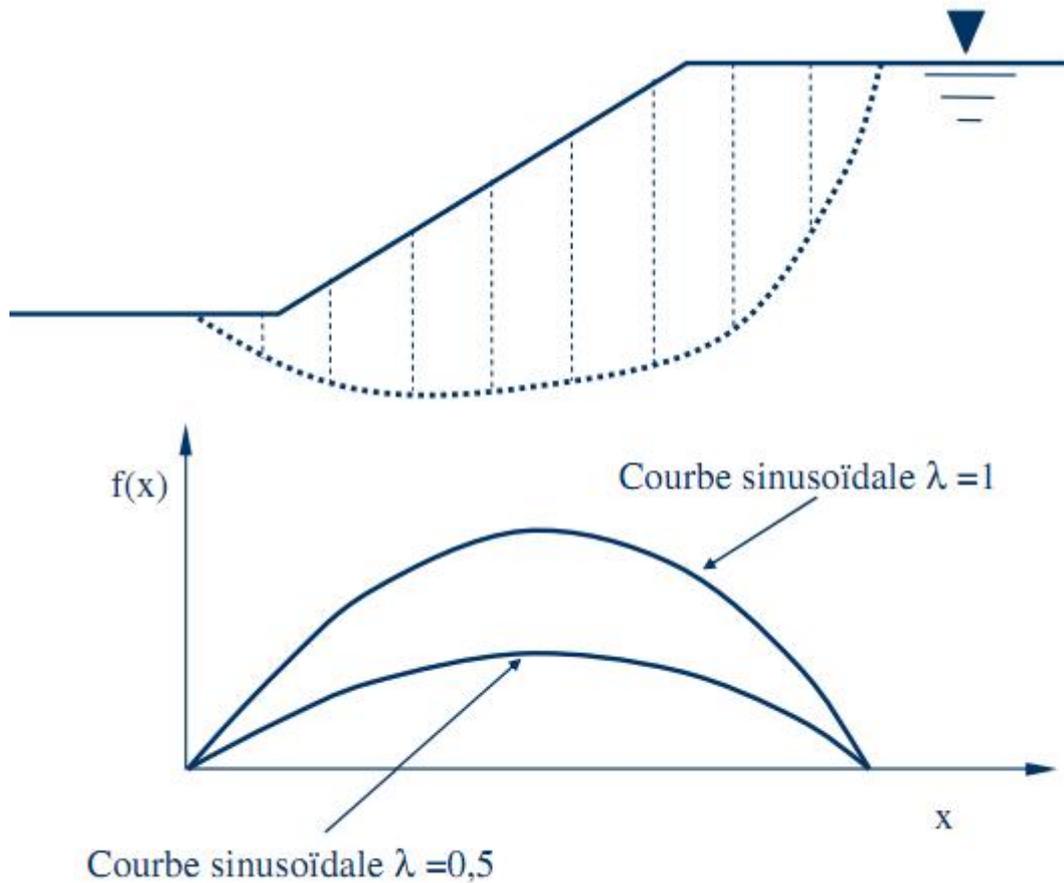


Fig. :9. Rupture non circulaire selon Morgenster-Price

Dans cette méthode, nous supposons que la direction des forces entre les tranches est définie par une fonction mathématique arbitraire :

$$T/E = \lambda f(x)N - 1$$

λ peut varier entre 0 et 1. La figure (Cf. Fig.9) montre les fonctions typiques de $f(x)$.

Dans cette méthode, les forces entre les tranches sont déterminées de la même façon que dans la méthode rigoureuse de Janbu. Dans la première itération, les forces de cisaillement verticales sont égales à 0.

Les coefficients de sécurité sont obtenus par la détermination de deux séries de coefficients de sécurité pour divers valeurs de λ

La première série correspond à l'équilibre des moments et la deuxième à l'équilibre des forces. Ces coefficients de sécurité sont mis en graphique en fonction de λ . Le point d'intersection satisfait les deux conditions d'équilibre. Cette méthode est précise, mais demande une certaine pratique pour donner le bon $f(x)$.

3) Méthode de Spencer 1967:

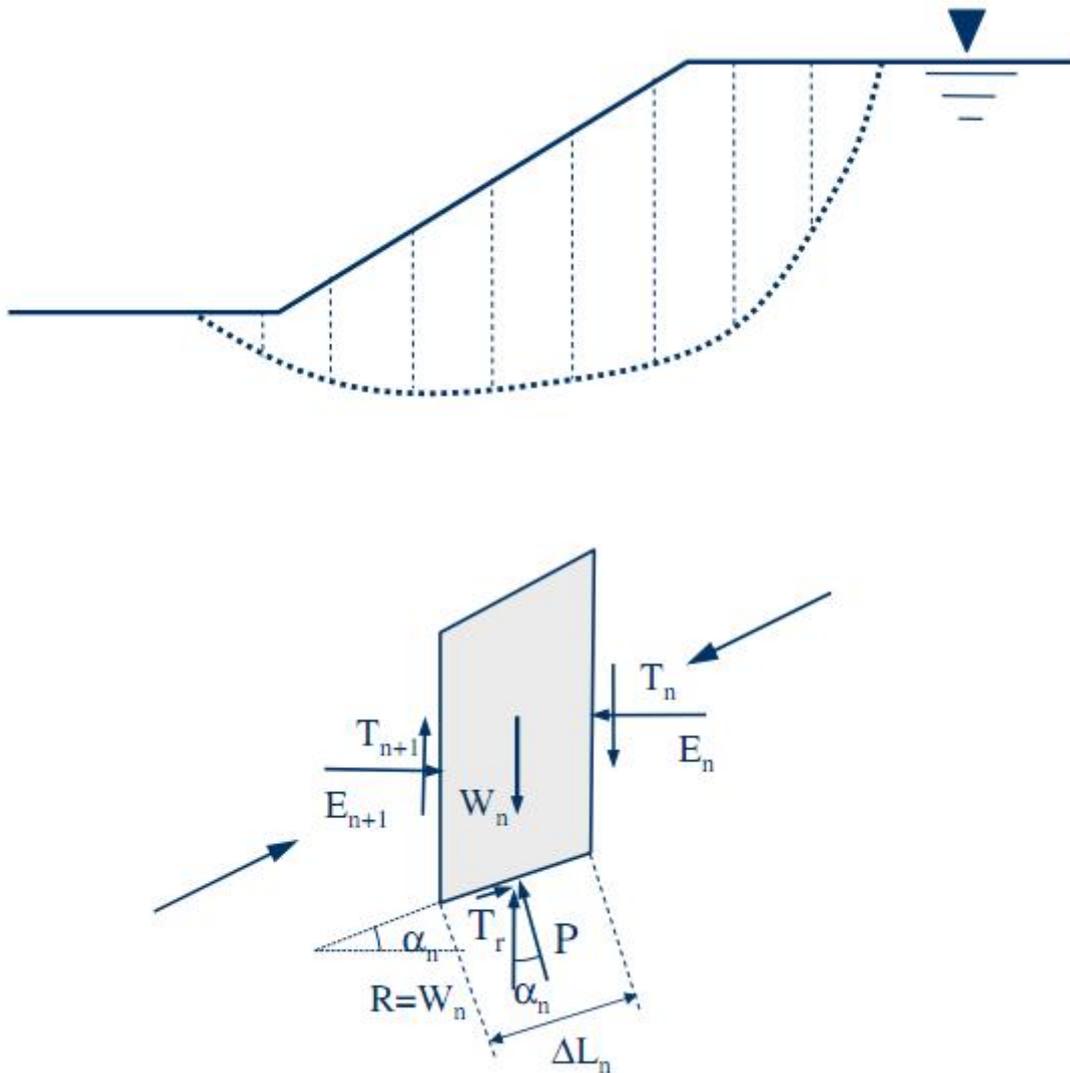


Fig. :10 Rupture non circulaire selon Spencer

Spencer a présenté cette méthode pour une surface circulaire, Wright l'a développée pour une surface non circulaire. Spencer assume que le rapport des forces verticale et horizontale est constant pour toutes les tranches :

$$T/E = (T + dT)/(E + dE) = \text{tag } \theta$$

N-1 hypothèses. Où θ est l'angle formé par la résultante et l'horizontale. Dans ce cas, la force P est donnée par :

$$P = \left[W - dE \operatorname{tag} \theta - \frac{c'l \sin \alpha}{FS} + \frac{ul \tan \phi \sin \alpha}{FS} \right] / m_\alpha$$

$$FS = \frac{\sum c'l \cos \alpha + (P - ul) \tan \phi \cos \alpha}{\sum P \sin \alpha}$$

Pour chaque angle α , on obtient deux coefficients de sécurité. Un qui correspond à l'équilibre des forces horizontales (Janbu) et l'autre à l'équilibre des moments (Bishop). Pour un certain angle α , les deux coefficients sont égaux et les conditions d'équilibre des forces et des moments sont satisfaites.

En fait, Spencer donne la même réponse que Morgenstern et Price (1965) avec $f(x)=0$.

I.2-2- Caractéristiques de ses Méthode :

Il s'agit du champ d'application et des limites des méthodes développées plus haut. Il faut distinguer :

- 1- méthode : Circulaire
- 2- non circulaire

I. 2- 2-a) Méthode Circulaire :

1) Méthode des tranches :

Il s'agit de la méthode la plus simple employée pour $\phi \neq 0$. Elle s'applique à des dépôts de sol non homogènes. La méthode est conservatrice.

Limitations :

- Elle sous-estime le facteur de sécurité en c' et ϕ' , surtout si « u » est élevé.
- Elle est utilisée que pour des surfaces circulaires.
- Elle ne satisfait pas toutes les conditions d'équilibre.

2) Bishop simplifié :

S'applique à des dépôts de sol non homogènes $\phi \neq 0$ et donne des facteurs de sécurité supérieur à ceux obtenus par la méthode des tranches. Elle est par contre plus précise que la méthode des tranches.

Elle donne les mêmes résultats que la méthode des tranches pour $\phi = 0$

Limitations :

- Elle est utilisée que pour des surfaces circulaires.
- Elle ne satisfait pas l'équilibre des forces horizontales.

La méthode de Bishop est la meilleure méthode à utiliser pour des surfaces de rupture circulaires

I. 2- 2-b) Méthode non Circulaire :

1) Méthode de Janbu :

Surface non-circulaire pour $\phi = 0$

Il s'agit d'une bonne méthode pour des surfaces non circulaires et elle peut être utilisée à la main

2) Méthode de Spencer :

Elle semble être une bonne méthode pour des surfaces de rupture non circulaire c'est une méthode à utiliser sur ordinateur.

3) Morgenstern Price :

Peut être la meilleure méthode mais demande plus de travail et de pratique que la méthode de Spencer.

I. 3- Méthode de l'analyse limite [Cf. :02]:

I. 3. 1- Introduction :

Avant de procéder à une discussion générale sur la méthode de l'analyse limite, voyons d'abord les conditions requises pour une solution valide dans la mécanique des milieux déformables.

Trois conditions de base sont requises :

- B: Les équations d'équilibre des contraintes.
- C: La loi de comportement.
- D: Les équations de compatibilité reliant les déplacements et les déformations.

En général, une infinité d'états de contrainte satisfait les conditions aux limites de contrainte, les équations d'équilibres, et le critère de rupture. Et un nombre infini de modes de déplacements est compatible avec une distorsion continue satisfaisant les conditions aux limites de déplacements.

Comme dans la théorie de l'élasticité, on fait utiliser la loi de comportement pour savoir si les états de contraintes et de déplacements correspondent ; il en résulte une solution unique vérifiant les conditions requises.

Cependant, dans un matériau élastique plastique, il y a trois étapes de développement dans une solution (quand nous augmentons progressivement le chargement à partir de zéro) qui sont :

- La réponse initiale élastique.
- L'écoulement plastique imminent intermédiaire
- L'écoulement plastique libre.

La solution complète par cette approche est vraisemblablement lourde pour tous les problèmes mais surtout pour les plus simples. Pour cela, nous avons besoin de méthodes qui fournissent la charge limite ultime de la manière la plus directe.

L'analyse limite est la méthode permettant de définir une valeur de la charge de rupture sans utilisation de l'analyse élastique – plastique incrémentale. Contrairement à la méthode des lignes de glissement et à la méthode de l'équilibre limite (ou prisme de rupture), la méthode de l'analyse limite considère une loi de comportement idéalisée. Cette idéalisation, nommée normalité (ou règle d'écoulement), établit les théorèmes limites sur lesquels est basée l'analyse limite. Dans le cadre de cette hypothèse, l'approche est rigoureuse et ses techniques sont compétitives avec celles de l'équilibre limite. Certains cas sont pourtant plus simples à résoudre avec la méthode de l'équilibre limite. Les théorèmes plastiques limites de DRUCKER et AL (1952) peuvent alors être employés pour obtenir des inférieure et supérieure de la charge de rupture dans les problèmes de stabilité, ou encore de la profondeur critique pour la stabilité des tranchés, ou encore de la capacité portante de sols non - homogènes.

I. 3. 2- Théorème de la borne inférieure :

DRUCKER, PRAGER, GREENBERG (1952) démontrent qu'une charge, déterminée à partir d'une distribution de contrainte seule, et satisfaisant aux conditions suivantes :

- Les équations d'équilibre sont vérifiées en tout point.
- Les conditions aux limites des contraintes sont vérifiées.
- Cette distribution des contraintes satisfait au caractère de rupture en tout point.

n'est pas supérieure à la charge réelle de rupture.

La distribution des contraintes qui satisfait aux trois conditions est appelée : « champ de contrainte statiquement admissible ».

Le théorème de la borne inférieure peut donc s'exprimer de la façon suivante :

Si une distribution de contrainte statiquement admissible peut être trouvée, l'écoulement plastique libre ne se produira pas sous l'effet d'une charge plus petite.

A partir de toutes ces considérations, nous pouvons voir que la technique de la borne inférieure se base seulement sur les conditions d'équilibre et le critère de rupture. Elle ne dit rien sur la cinématique du sol.

I. 3. 3- Théorème de la borne supérieure :

DRUCKER , PRAGER ,GREENBERG (1952) démontrent aussi qu'une charge, déterminée en écrivant que le taux de travail extérieur est égal au taux de dissipation d'énergie interne pour un certain mode de déformation (ou champ de vitesse), et satisfait :

- Aux conditions aux limites des vitesses.
- Aux conditions de compatibilité entre vitesses et déformations.
- Le champ de vitesse doit être cinématiquement admissible.

n'est pas plus petite que la charge de rupture réelle.

Un champ de vitesse, satisfaisant les conditions précédentes, est appelée : «champ de vitesse cinématiquement admissible ».

Nous pouvons énoncer le théorème de la façon suivante :

Si un champ de vitesse cinématiquement admissible peut être trouvé, l'écoulement plastique libre doit être imminent ou a eu lieu auparavant.

La technique de la borne supérieure considère seulement le champ de vitesse ou le mode de rupture et la dissipation d'énergie. Alors qu'il n'est pas nécessaire dans cette approche que la distribution des contraintes satisfasse aux conditions d'équilibre statique.

I .3- 3- a) Méthode de recherche de la borne supérieure :

Le théorème de la borne supérieure exprime que les charges imposées ne peuvent pas être supportées par la masse de sol si, pour un mécanisme de rupture bien déterminé, le taux de travail dû aux forces extérieures excède le taux de travail interne de dissipation d'énergie. Dès lors, en égalisant le taux de travail extérieur au taux de travail interne pour un mécanisme de rupture cinématiquement admissible, nous obtenons une borne supérieure de la charge de rupture. L'équation ainsi obtenue s'appelle l'équation de travail pour le mécanisme de rupture choisi.

En résumé, les conditions nécessaires pour établir une solution type borne supérieure sont les suivantes :

- Un mécanisme de rupture « admissible » satisfaisant aux conditions aux limites doit être choisi.
- La dissipation d'énergie des forces extérieures due aux petits déplacements définis par le mécanisme doit être calculée.
- La dissipation d'énergie interne dans les régions plastiquement déformées du mécanisme doit être calculée.
- La solution la plus critique (plus petite borne supérieure), correspondante au mécanisme de rupture choisi, est obtenue en effectuant une minimisation de la charge de rupture par rapport aux paramètres définissant ce mécanisme.

Nous ferons remarquer qu'en appliquant le théorème de la borne supérieure en analyse limite, nous pouvons utiliser des champs de vitesse discontinus. Les surfaces de discontinuité de vitesse peuvent être admises à condition que la dissipation d'énergie interne soit bien calculée le long de ces surfaces. Le glissement d'un corps rigide sur un autre est un bon exemple.

La surface discontinue doit être regardée comme un cas particulier d'un champ de vitesse continu dans lequel une ou plusieurs composantes de vitesse changent très rapidement à travers une faible couche de transition, qui est remplacée par une surface de discontinuité par simplicité.

La méthode de la borne supérieure suppose que nous calculions la dissipation d'énergie interne dans les régions plastiquement déformées. Nous présentons, dans le paragraphe qui suit, quelques explications concernant la surface de discontinuité d'un matériau de COULOMB standard et la méthode de l'énergie de dissipation interne le long de cette surface de discontinuité.

I.3- 3- b) Surface de discontinuité d'un matériau de COULOMB standard :

L'hypothèse selon laquelle le matériau de COULOMB est standard, implique que toute déformation plastique est accompagnée d'une augmentation de volume.

Si une masse de sol se déplace en translation par rapport à une autre (Cf. Fig. :11), la zone de transition entre ces masses est limitée par deux parallèles.

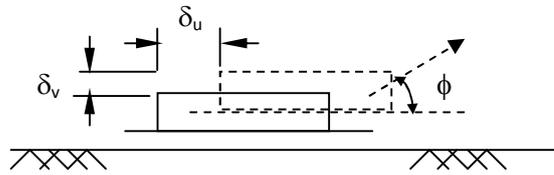


Fig. :11. Zone mince de transition

La notion de normalité exige que la variation de vitesse tangentielle $\delta v = \delta u \cdot \text{tg}\phi$. Cette condition de glissement cinématique signifie que le changement de vitesse relatif δw dans la couche mince de transition limitée par deux plans parallèles, doit faire un angle ϕ avec les plans de glissement (Cf. Fig. :12)

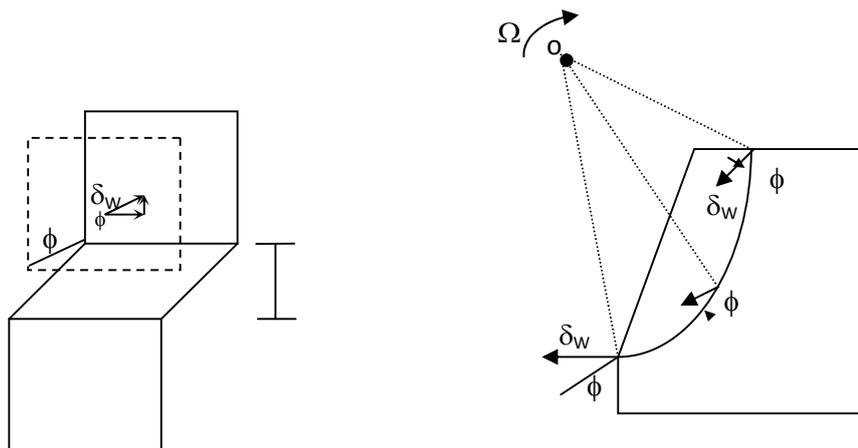


Fig. :12. Condition de glissement cinématique

Si une masse de sol rigide effectue une rotation par rapport à une autre masse, la trace de la zone de transition dans un plan normal à l'axe de rotation ne peut pas être limitée par deux cercles concentriques, mais plutôt par deux spirales logarithmiques qui font, avec le rayon, un angle constant égal à $(\pi/2 + \phi)$. Ceci est illustré dans la (Cf. Fig. :12). La partie supérieure rigide A tourne par rapport au centre avec une vitesse angulaire Ω . Les deux parties A et B sont séparées par une couche en forme de spirale logarithmique. La vitesse relative δw fait un angle constant ϕ avec la couche de transition le long de la longueur de la spirale.

En résumé, nous devons savoir que, dans la méthode de la borne supérieure en analyse limite, la surface de discontinuité circulaire n'est pas acceptable pour un mouvement de corps rigide à cause de la condition de séparation. La surface plane et la surface limitée par une spirale logarithmique d'angle w (Cf. Fig. :13) sont donc les seules surfaces (ou plans) de discontinuité qui sont acceptables en analyse limite pour le cas d'un mouvement de corps rigide par rapport à la surface fixe.

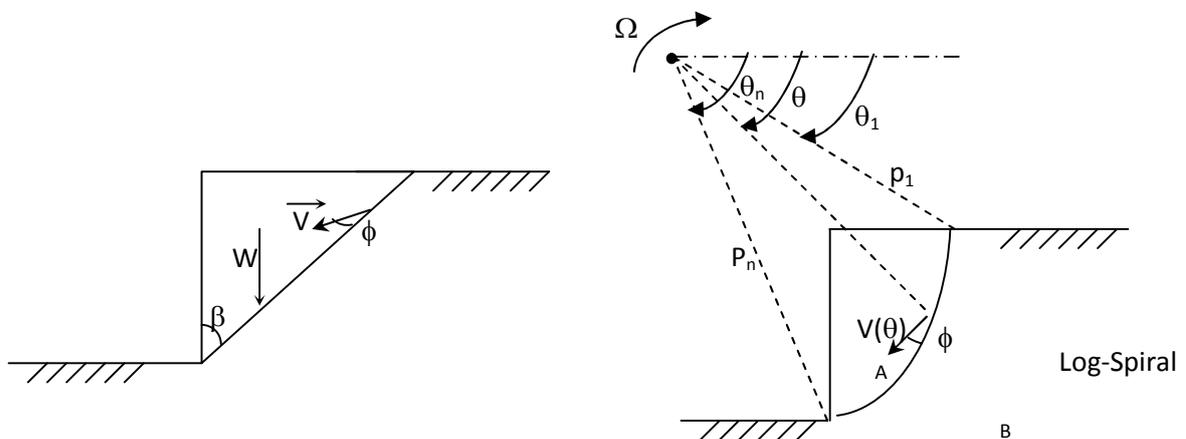


Fig. :13. Surface de discontinuité

I.3- 3- c) Dissipation d'énergie :

Nous allons calculer le taux de dissipation d'énergie interne ΔD dans la couche mince de cisaillement plastique d'épaisseur t .

Le mode de déformation dans cette couche de transition (Cf. Fig. :11) est une combinaison d'un écoulement en cisaillement parallèle à la couche de transition d'une part, et d'extension normale à la couche d'autre part.

Le taux de déformations en cisaillement, supposé uniforme dans la couche de transition, est égal à $\delta u/t$; et le taux de déformation normal est égal à $\delta v/t$. Ainsi, le taux de dissipation d'énergie est égal à « $\tau \cdot \gamma - \sigma \cdot \varepsilon$ » par unité de volume, τ et σ (ici pris positifs en compression) sont respectivement les contraintes normales et tangentielles. Le volume de la couche est égal à t , ainsi :

$$D = (\tau\gamma - \sigma\varepsilon)t = \tau\delta u - \sigma\delta v \rightarrow (1)$$

Ou encore :

$$D = \delta u(\tau - \sigma \tan \varphi) \quad (2)$$

Comme le critère de rupture de MOHR - COULOMB doit être satisfait dans la couche plastique, l'équation (2) se réduit à :

$$D = c\delta u \rightarrow (3)$$

Cette équation signifie que le taux de dissipation d'énergie par unité de la surface de discontinuité pour un sol (ϕ, c) est tout simplement le produit de la cohésion et de la variation tangentielle δu à travers la couche de transition.

Comme l'équation (3) est indépendante de l'épaisseur de la couche de transition t , nous pouvons prendre t d'autant plus petit que l'on veut (épaisseur nulle par simplicité).

I. 3. 4- Extension aux matériaux non – standards : théorème de RADENKOVIC :

Cette prolongation concerne le cas où le principe du travail maximal n'est pas vérifié. Elle permet de situer les charges de rupture du matériau non – standard par rapport à celles obtenues pour le matériau standard.

Considérons un matériau non – standard caractérisé par un critère de plasticité f , et dont la règle d'écoulement admet g comme fonction potentielle. En notant :

K^f : la charge de rupture obtenue pour un matériau standard (f, f)

K^g : la charge de rupture obtenue pour un matériau standard (g, g)

La charge de rupture pour un matériau (f, g) est comprise entre K^f et K^g , frontière comprise.

Le théorème de RADENKOVIC permet d'encadrer les charges limites pour le matériau non – standard entre celles de deux matériaux standards.

- Une approche statique connue pour le matériau standard (g, g) fournit une approximation par défaut de toute charge limite pour le matériau non – standard (f, g).
- Une approche cinématique connue pour le matériau standard (f, f) fournit une approximation par excès de toute charge limite pour le matériau non - standard (f, g).

I. 3. 5- Aperçue succinct des travaux de différents auteurs :

Comme nous l'avons déjà cité plus haut, la méthode de la borne supérieure comme étant simple, facile et souple. Elle a été utilisée pour le calcul du facteur de sécurité par plusieurs auteurs comme FINN (1967), DAVIS (1968), CHEN et SCAWTHORN (1970), CHEN et ROSENFARB (1973), puis dernièrement SOUBRA (1989).

Ces auteurs ont utilisé des mécanismes de rupture allant du plus simple (prisme triangulaire) au plus compliqué (log.sandwich) (Cf. Fig. :1) et (spirale logarithmique) avec SOUBRA (1989) (Cf. Fig. :14) , obtenant ainsi plusieurs bornes supérieures.

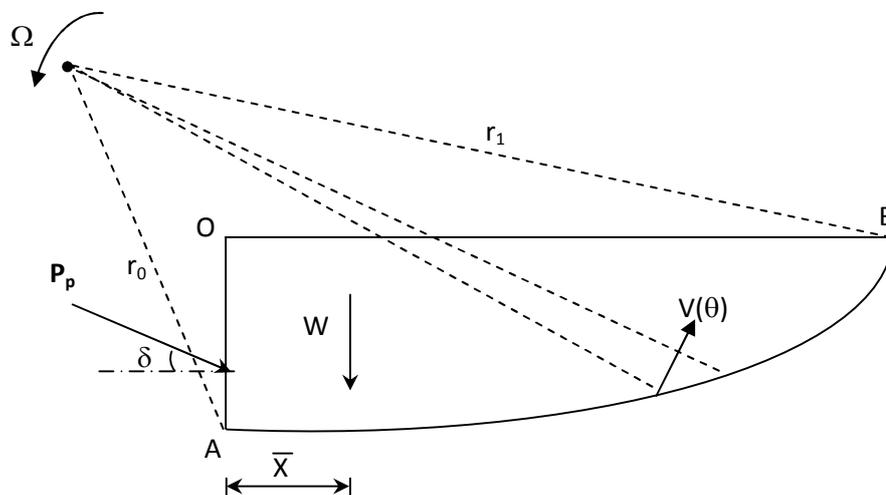


Fig. :14. Spirale logarithmique (SOUBRA 1989)

La méthode de la borne inférieure qui n'est accessible que par des calculs complexes, a fait l'objet de moins d'études. Nous pouvons citer toutefois dans cette catégorie, les travaux de :

- LYSMER (1970) qui admettant un critère de MOHR – COULOMB linéaire, avec un matériau standard, discrétise le massif sollicité en éléments triangulaires (Cf. Fig. :15) : tout en admettant que le champ de contraintes à l'intérieur de chaque élément varie linéairement .
- BASUDHAR et AL (1979) qui ont aussi résolu le problème par la même approche que LYSMER, mais en gardant la non – linéarité du critère de rupture de MOHR COULOMB.
- LEE et HERINGTON (1972) qui établissent une solution, pour un matériau standard, en déduisant le champ de vitesse du champ des contraintes ; cette solution est donc à la fois une borne inférieure et une borne supérieure

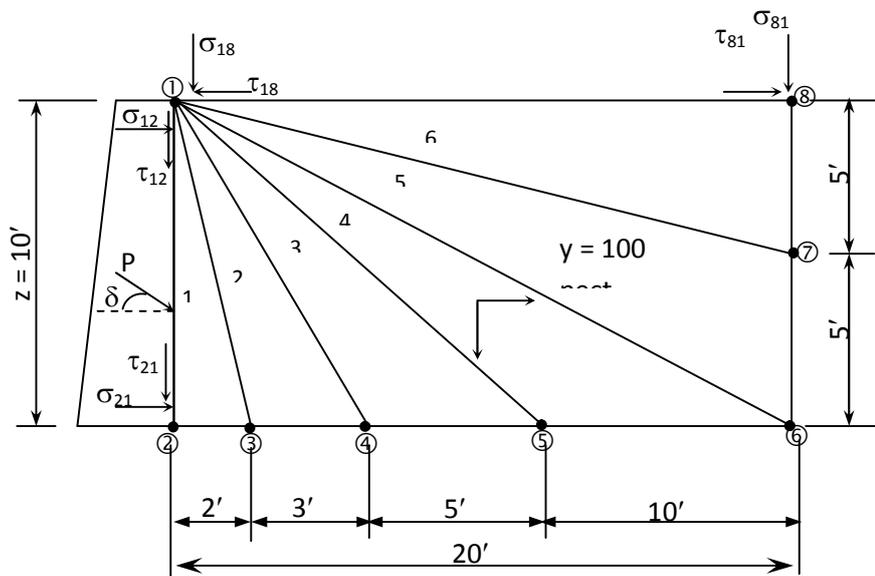


Fig. :15. Discrétisation du massif en éléments triangulaires (LYSMER 1970)

I. 4- Rappel des objectifs :

- Appliquer la méthode de l'analyse limite à différents types de talus, pour différents modes de rupture et pour différents comportements de sols, en utilisant un mécanisme de rupture sous forme de « *log-spiral* » et trouver les facteurs de stabilité à l'aide d'un logiciel de calcul mathématique « Mathcad » puis comparer les résultats trouvés avec ceux de l'auteur.
- Changer le mécanisme de rupture en utilisant la forme d'un cercle au lieu d'un log-spiral et l'appliquer à un talus incliné où la rupture passe à travers son pied.
- Dédire les facteurs de stabilité correspondants toujours à l'aide de « Mathcad »
- Comparer les résultats obtenus de ses deux approches pour voir s'ils concordent ou non.

I. 5- Méthode :

- 1) Pour le premier objectif à savoir l'application de l'analyse limite nous utiliserons un mécanisme rotationnel de rupture *log-spiral* successivement à un :
 - Talus non incliné et homogène ;
 - Talus incliné et homogène avec un mécanisme de rupture passant à travers le pied du talus ;
 - Talus incliné et homogène avec un mécanisme de rupture passant sous le pied du talus ;
 - Talus incliné non homogène et anisotrope avec un mécanisme de rupture passant sous le pied du talus.

Puis nous calculerons les valeurs de Stabilités pour les talus inclinés et homogènes à l'aide du logiciel « Mathcad ». Les résultats seront comparés avec ceux de Chen (*Analysis and soil Plasticity* : pages 407, 411 et 413).

Pour déduire les facteurs de stabilité de chaque talus, nous utiliserons la méthode de la borne supérieure de l'analyse limite (Cf. Chapitre I, Page : 20).

- 2) Pour le second objectif, à savoir le changement du mécanisme de rupture sous forme de cercle, nous l'appliquerons au :
 - Talus incliné et homogène avec un mécanisme de rupture passant à travers le pied du talus.
- 3) Pour le troisième objectif à savoir la déduction des facteurs de stabilité correspondant au cercle. Nous adopterons les mêmes étapes que celles du premier objectif.
- 4) Pour le dernier objectif à savoir la comparaison des facteurs de stabilité, nous verrons s'ils concordent ou non (entre les deux approches : log-spiral et cercle).

I. 6- Présentation du logiciel Mathcad :

Mathcad est un outil de calcul technique standard pour les ingénieurs à travers le monde. Il donne toutes les capacités de résolution, fonctionnalités ainsi que la robustesse nécessaire pour le calcul, la manipulation des données, et les travaux de conception d'ingénierie. Le Calcul de normalisation et de la réutilisation par le biais Mathcad assure la conformité aux normes. En combinant les calculs, graphiques, textes et images dans un seul document, Mathcad permet la capture des connaissances et la publication que la gestion des aides de grands projets.

Mathcad permet de documenter les calculs dans le langage mathématiques, parce qu'il associe un puissant moteur de calcul, accessible par la notation mathématique classique, avec un traitement de texte complet et des outils graphiques. Les équations que nous avons l'habitude de voir sur le papier peuvent y être tapées.

Il suffit de taper les équations, puis de les voir s'afficher avec un résultat immédiat, avec un texte ou non. Il devient facile de communiquer les raisons et les hypothèses derrière les calculs permettant l'assurance qualité de la conception.

Il est possible d'utiliser des équations Mathcad pour résoudre les deux équations symboliques et numériques. Aussi placer du texte n'importe où sur la feuille de calcul et d'y ajouter deux et trois dimensions des graphiques. L'illustration du travail avec des images prises depuis une autre application est faisable.

Mathcad permet de mélanger facilement et de convertir entre les systèmes d'unités, la capture d'erreurs d'unités en vérifiant les feuilles de calcul pour la cohérence dimensionnelle.

Travailler dans un système d'unités préféré ou passer à un autre système pour un ensemble particulier d'équations est très facile.

Mathcad simplifie et rationalise la documentation, essentielle à la communication de réunion d'affaires et les normes d'assurance qualité. En combinant les équations, les textes et des graphiques dans une seule feuille, il est facile de garder une trace des calculs les plus complexes. En enregistrant les feuilles de calcul sous format XML, la réutilisation d'information dans d'autres systèmes basés sur le texte ou la recherche de rapport sur les feuilles de calcul sans avoir besoin de les rouvrir dans Mathcad est possible.

Chapitre II : Présentation du modèle mécanique et étude paramétrique

II. 1- Mécanisme de rupture Log-Spiral passant à travers le pied d'un talus non incliné :

II. 1- 1 Hauteur Critique d'une Rupture Verticale [Cf. :03]:

Nous allons commencer par exemple simple de talus non incliné pour un sol homogène et isotrope.

II. 1. 1- a) Mécanisme de translation :

Les caractéristiques du sol sont :

sol cohérent C - φ avec un poids volumique γ

La hauteur critique h_{cr} est définie ici comme étant la hauteur du talus lors de sa rupture sous son poids propre.

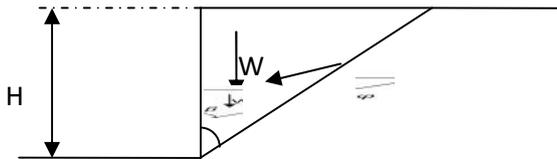


Fig. :16 Hauteur critique d'une coupe verticale

La condition limite est atteinte quand le taux de travail qui est dû aux forces de gravités est égal à la dissipation d'énergie tout au long de la surface de glissement. Le taux de travail donné par la gravité (ou forces de gravités) est la composante verticale de la vitesse multipliée par le poids du sol :

$$\frac{1}{2} \gamma H^2 \tan \beta V \cos(\varphi + \beta) - (01)$$

Et le taux de dissipation d'énergie :

$$C \frac{H}{\cos \beta} V \cos \varphi - (02)$$

En égalisant les deux termes nous trouvons :

$$\frac{1}{2} \gamma H^2 \tan \beta V \cos(\varphi + \beta) = C \frac{H}{\cos \beta} V \cos \varphi - (03)$$

$$H \tan \beta \cos(\varphi + \beta) = \frac{2C \cos \varphi}{\gamma \cos \beta} \rightarrow (04)$$

Si nous posons :

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

Nous trouvons :

$$H \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cos(\varphi + \beta) = \frac{2C \cos \varphi}{\gamma \cos \beta} \rightarrow (05)$$

$$H = \frac{2C}{\gamma} \frac{\cos \varphi}{\sin \beta \cos(\varphi + \beta)} \rightarrow (06)$$

Si nous minimisons l'angle β à $\beta_{cr} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\varphi$

$$H = \frac{4C}{\gamma} \tan\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi\right) \rightarrow (07)$$

II. 1- 1- b) Mécanisme rotationnel :

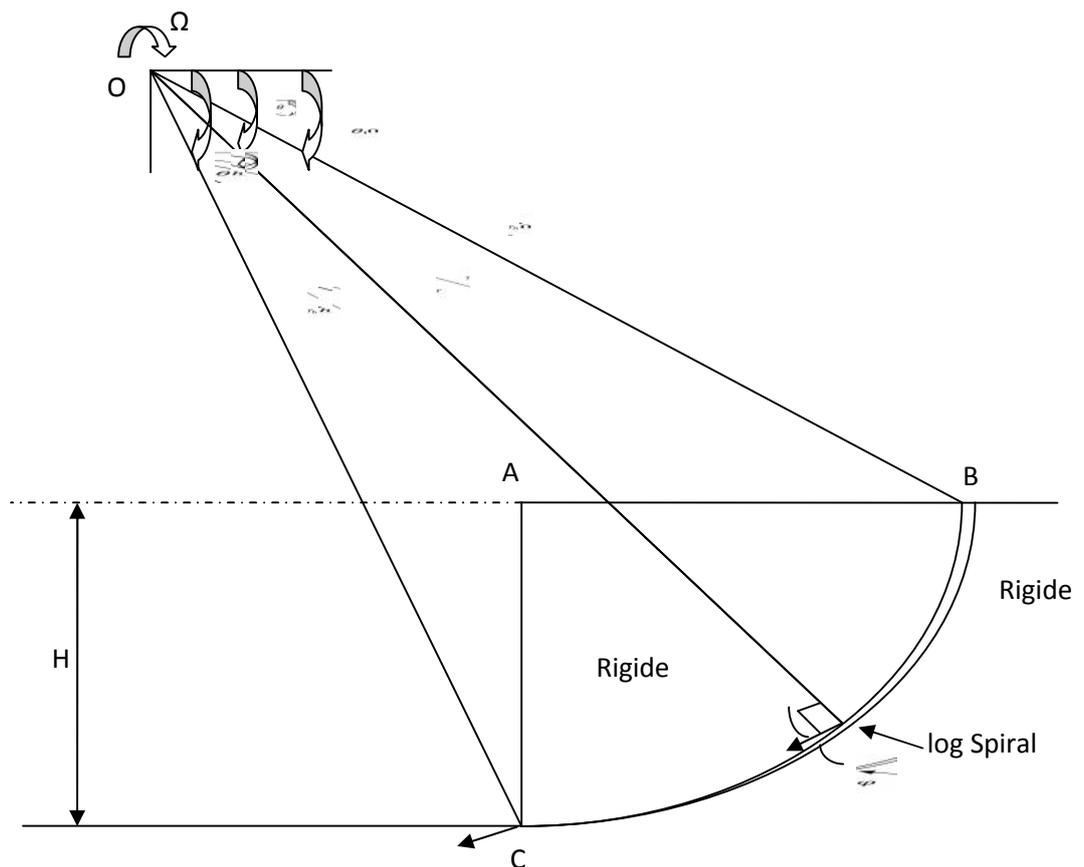


Fig. :17 Mécanisme de rupture rotationnel pour la hauteur critique d'une coupe verticale

Cette analyse requière une expression de la dissipation d'énergie le long de la surface log-spiral et une expression du taux de travail externe donnée par le poids de la masse du sol en rotation.

Le Bloc (ABC) tourne comme un corps rigide autour du point « O ». La surface logarithmique BC est une couche mince avec une vitesse discontinue. L'équation de la surface logarithmique est alors donnée par :

$$r(\theta) = r_0 \exp[(\theta - \theta_0) \tan \varphi] \cdot (08)$$

Où la longueur du rayon OC est donnée par :

$$r(h) = r_0 \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] \cdot (09)$$

Nous pouvons voir de la figure que :

$$H = r_h \sin \theta_h - r_0 \sin \theta_0$$

$$\frac{H}{r_0} = \sin \theta_h \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] - \sin \theta_0 \cdot (10)$$

Et que :

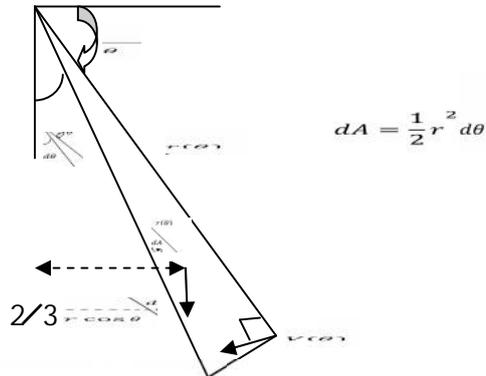
$$L = r_0 \cos \theta_0 - r_h \cos \theta_h$$

$$\frac{L}{r_0} = \cos \theta_0 - \cos \theta_h \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] \cdot (11)$$

L'intégration directe du taux de travail externe dans la région (ABC) est compliqué. Ce sera plus simple d'utiliser la méthode de superposition en trouvant les taux des travaux \dot{W}_1 , \dot{W}_2 et \dot{W}_3 dus au poids du sol dans les régions (OBC), (OAB) et (OAC) respectivement. Le taux de travail externe de la région (ABC) est alors égale à :

$$\dot{W} = \dot{W}_1 - \dot{W}_2 - \dot{W}_3 - (12)$$

1) **Région (OBC) :**



$$d\dot{W}_1 = \left(\Omega \frac{2}{3} r \cos \theta \right) \left(\gamma \frac{1}{2} r^2 d\theta \right)$$

L'intégration pour toute la surface nous donnera :

$$\dot{W}_1 = \frac{1}{3} \gamma \Omega \int_{\theta_0}^{\theta_h} r^3 \cos \theta d\theta$$

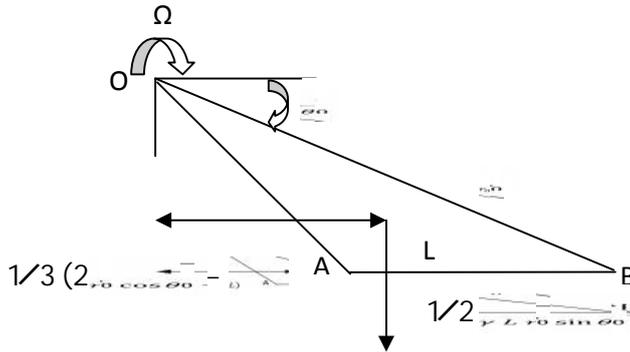
$$\dot{W}_1 = \gamma r_0^3 \Omega \int_{\theta_0}^{\theta_h} \frac{1}{3} \exp[3(\theta - \theta_0) \tan \varphi] \cos \theta d\theta$$

$$\dot{W}_1 = \gamma r_0^3 \Omega f_1(\theta_h, \theta_0)$$

Où la fonction, $f_1(\theta_h, \theta_0)$ est comme suit ;

$$f_1(\theta_h, \theta_0) = \frac{\{(3 \tan \varphi \cos \theta_h + \sin \theta_h) \exp[3(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] - 3 \tan \varphi \cos \theta_0 - \sin \theta_0\}}{3(1 + 9 \tan^2 \varphi)} \quad (13)$$

2) **Région (OAB) :**



Le taux de travail de la région (OAB) est donné comme suit ;

$$\dot{W}_2 = \left(\frac{1}{2} \gamma L r_0 \sin \theta_0 \right) \left[\frac{1}{3} (2r_0 \cos \theta_0 - L) \right] \Omega$$

Où :

$\left(\frac{1}{2} \gamma L r_0 \sin \theta_0 \right)$: Poids total de la région ;

$\left[\frac{1}{3} (2r_0 \cos \theta_0 - L) \right]$: La composante verticale de la vitesse au C.D.G

En faisant la multiplication nous trouverons :

$$\dot{W}_2 = \frac{1}{6} \gamma \Omega L r_0 \sin \theta_0 \times 2 r_0 \cos \theta_0 - \frac{1}{6} \gamma \Omega L r_0 \sin \theta_0 \times L$$

$$\dot{W}_2 = 2 \times \frac{1}{6} \gamma \Omega r_0^2 L \sin \theta_0 \cos \theta_0 - \frac{1}{6} \gamma \Omega L^2 r_0 \sin \theta_0$$

Si nous faisons ressortir la forme $(\gamma \Omega r_0^3)$ alors :

$$\dot{W}_2 = (\gamma \Omega r_0^3) \left\{ 2 \times \frac{1}{6} \frac{L}{r_0} \sin \theta_0 \cos \theta_0 - \frac{1}{6} \frac{L^2}{r_0^2} \sin \theta_0 \right\}$$

Nous remarquons que cette fonction prend la forme de $\dot{W}_2 = (\gamma \Omega r_0^3) f_2(\theta_h, \theta_0)$

Où :

$$f_2(\theta_h, \theta_0) = 2 \times \frac{1}{6} \frac{L}{r_0} \sin \theta_0 \cos \theta_0 - \frac{1}{6} \frac{L^2}{r_0^2} \sin \theta_0$$

Si nous faisons ressortir la valeur :

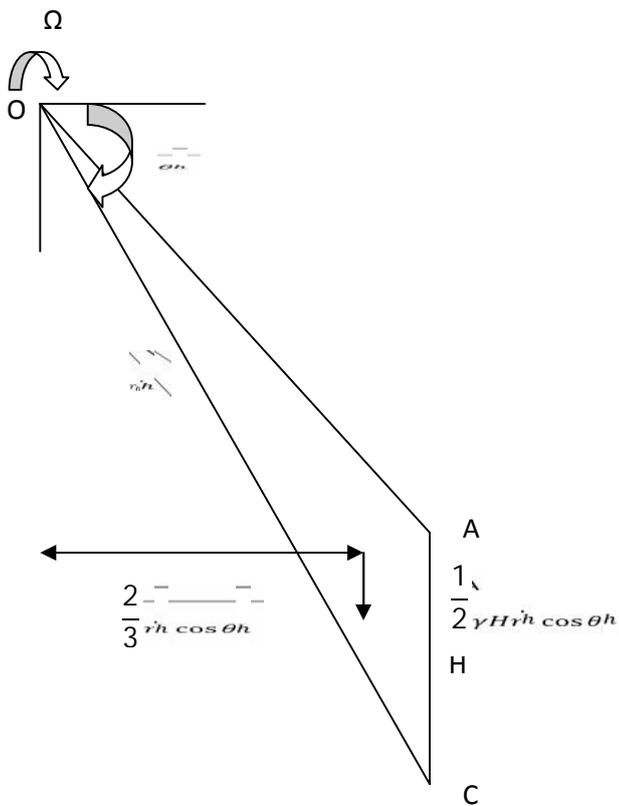
$$\frac{1}{6} \frac{L}{r_0} \sin \theta_0$$

Nous trouverons que :

$$f_2(\theta_h, \theta_0) = \frac{1}{6} \frac{L}{r_0} \left(2 \cos \theta_0 - \frac{L}{r_0} \right) \sin \theta_0 \rightarrow (14)$$

Sans oublier que L/r_0 est en fonction de θ_h et de θ_0

3) Région (OAC) :



De la même façon que précédemment nous trouvons que :

$$\dot{W}_3 = (\gamma \Omega r_0^3) f_3(\theta_h, \theta_0)$$

Où :

$$f_3(\theta_h, \theta_0) = \frac{1}{3} \frac{H}{r_0} \cos^2 \theta_h \exp[2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] \rightarrow (15)$$

Sans oublier que H/r_0 est en fonction de θ_h et de θ_0

La magnitude du taux de travail donné par le poids propre dans la région O-B-C peut être obtenue par une simple sommation algébrique :

$$\dot{W} = \dot{W}_1 - \dot{W}_2 - \dot{W}_3 = \gamma r_0^3 \Omega (f_1 - f_2 - f_3) - \quad (16)$$

La dissipation de l'énergie interne tout au long de la surface BC peut être trouvée en multipliant la surface différentielle $rd\theta/\cos\varphi$ par la cohésion « C » et par la vitesse tangentielle discontinue $V \cos\varphi$, ou ($D = C\delta u$)

La dissipation de l'énergie interne total est obtenue par l'intégration suivante :

$$\int_{\theta_0}^{\theta_h} c(V \cos\varphi) \frac{rd\theta}{\tan\varphi} = \frac{cr_0^2\Omega}{2 \tan\varphi} \{ \exp[2(\theta_h - \theta_0) \tan\varphi] - 1 \} \quad (17)$$

En faisant l'égalité entre le taux de travail externe et la dissipation d'énergie interne nous trouvons :

$$H = \frac{C}{\gamma} f(\theta_h, \theta_0) \quad (18)$$

Où :

$$f(\theta_h, \theta_0) = \frac{[\exp\{2(\theta_h - \theta_0) \tan\varphi\} - 1][\sin\theta_h \exp\{(\theta_h - \theta_0) \tan\varphi\} \sin\theta_0]}{2 \tan\varphi (f_1 - f_2 - f_3)} \quad (19)$$

En utilisant le théorème de la limite sup de l'analyse limite l'équation (18) donne une limite sup pour la valeur critique de la hauteur. La fonction $f(\theta_h, \theta_0)$ aura une valeur min quand θ_h et θ_0 satisfèront les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \theta_h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_0} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

La résolution de ses équations ainsi que la substitution des valeurs de θ_h et θ_0 dans l'équation (18), nous donnera la limite sup de la hauteur critique du talus.

Nous trouvons que la fonction $f(\theta_h, \theta_0)$ a une valeur minimal aux alentours du point $\theta_h = 65^\circ$, $\theta_0 = 40^\circ$ pour une valeur de $\varphi = 20^\circ$

Pour toutes les autres valeurs de φ nous trouverons :

$$H_{cr} = \frac{3,83c}{\gamma} \tan\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi\right) \rightarrow (21)$$

Cette valeur est une limite sup pour la hauteur critique des talus verticaux. C'est la même valeur obtenue par Fellenius (1927) qui a utilisé la méthode conventionnelle de l'équilibre limite

II. 2- Mécanisme de rupture Log-Spiral passant à travers le pied d'un talus incliné :

II. 2- 1- Stabilité des talus [Cf. :5] :

Nous allons nous limiter à l'étude d'un corps rigide, glissant dans un matériau cohérent $c \neq 0$, où la résistance au cisaillement est calculée par la loi de Coulomb.

Nous allons considérer la hauteur critique d'un talus incliné où la rupture passe par son pied.

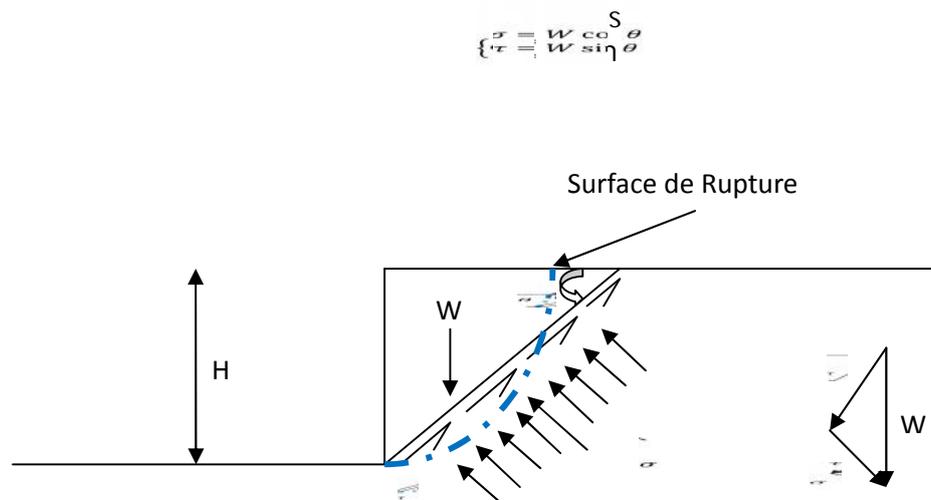


Fig. :18: Solution de l'équilibre limite pour la stabilité d'une coupe verticale

L'utilisation du mécanisme de rupture rotationnel vu précédemment nous donne :

II. 2. 1- a) Equilibre limite :

Nous savons que $\tau = c + \sigma \tan \varphi$

Où :

C : Cohésion ;

φ : L'angle de frottement.

Donc :

$$\int \tau dl = \int c dl + \int \sigma \tan \varphi dl = cl + \tan \varphi \int \sigma dl$$

Nous savons que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \sigma dl = W \cos \theta \\ \int \tau dl = W \sin \theta \end{array} \right. - W \sin \theta = cl + \tan \varphi W \cos \theta$$

Avec :

$$\sin \theta = \frac{H}{l} \Leftrightarrow l = \frac{H}{\sin \theta}$$

$$W = \frac{1}{2} \gamma \frac{H^2}{\tan \theta}$$

Ce qui nous donne :

$$W \sin \theta = c \frac{H}{\sin \theta} + W \cos \theta \tan \varphi$$

Si nous minimisons l'angle θ à :

$$\theta_c = \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \varphi \right)$$

Alors nous trouverons que :

$$H_{cr} = \frac{4c}{\gamma} \tan \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \varphi \right)$$

Ici seules les conditions d'équilibre ont été satisfaites.

Pour qu'une solution soit valide elle requière non seulement l'équilibre, la compatibilité mais aussi que les relations contraintes-déformations soient satisfaites.

La solution vue plus haut n'est ni une limite supérieure ni une limite inférieure, car seules les conditions d'équilibres ont été satisfaites. Ce n'est qu'une solution parmi tant d'autres.

II. 2. 1- b) Analyse limite :

L'analyse limite implique la détermination d'une limite inférieure des charges de rupture en supposant un champ de contraintes qui satisfait l'équilibre et ne viole aucun autre critère de rendement et se en tout points.

Une limite supérieure est obtenue, avec un champ de vitesse compatible avec le mouvement dans lequel « le taux de travail des forces externes est supérieur ou égal au taux de la dissipation d'énergie interne ».

Si nous revenons à l'exemple précédent

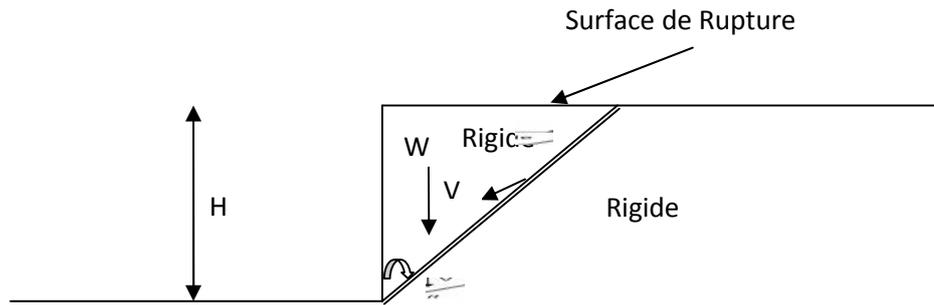


Fig. :19 Solution de l'équilibre limite pour la stabilité d'une coupe verticale.

Le coin formé par le plan de cisaillement qui fait un angle β avec la vertical, glisse tout au long de la vertical. Il ya une séparation de vitesse, $\sin \varphi$, de la surface discontinue.

Le taux de travail donné par les forces extérieures est la composante verticale de la vitesse multiplié par le poids propre du sol du coin, alors que le taux de la dissipation d'énergie est trouvé en multipliant la surface ou l'air de la surface discontinue $H/\cos \beta$ par la cohésion « C » par $\delta u = V \cos \varphi$ ($D = C \delta u$)

En égalisant le travail et la dissipation d'énergie et en minimisant la hauteur à :

$$H_{cr} = \frac{4c}{\gamma} \tan \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \varphi \right)$$

Cela implique que la méthode d'équilibre limite précédente est une limite supérieure.

II. 2- 2- Mécanisme du Log-spiral:

Le problème qui se pose ici est de trouver la hauteur critique qui est fonction des angles d'inclinaisons et

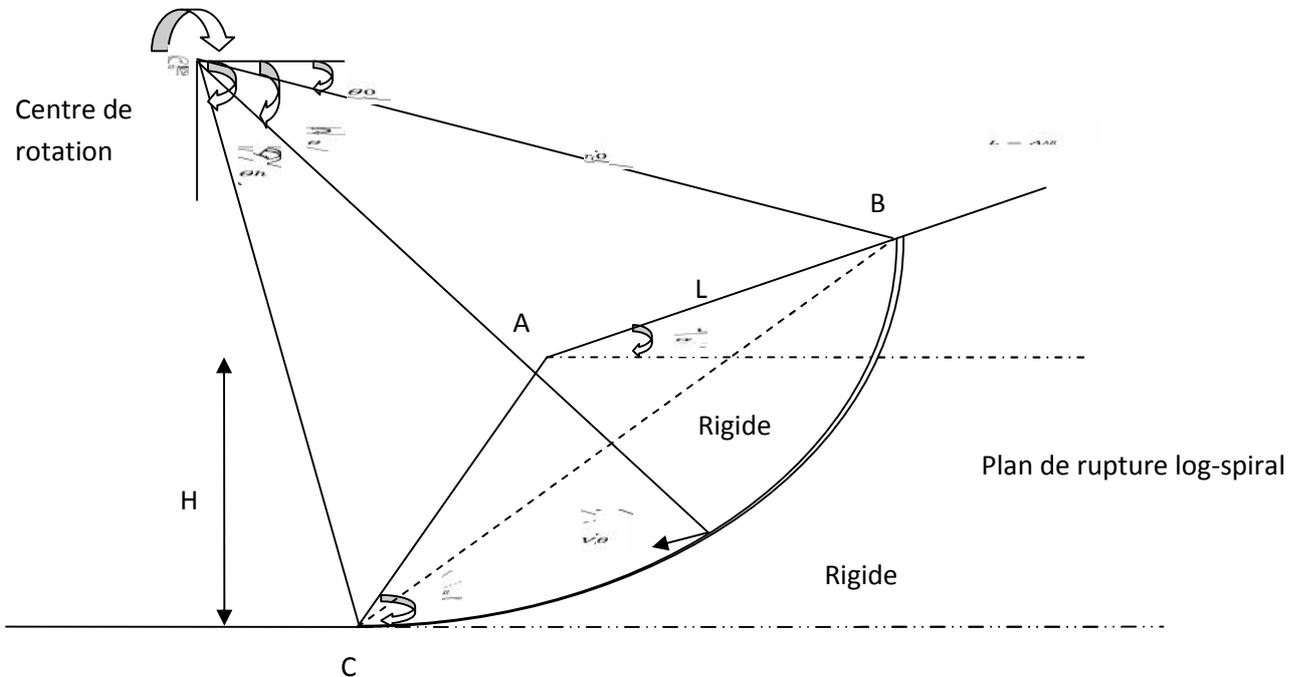


Fig. :20: Mécanisme de rupture de la stabilité d'un talus avec un plan de rupture passant à travers le pied du talus.

Le théorème de la limite supérieure de l'analyse limite établit que le talus va se rompre sous son propre poids si, pour tout mécanisme de rupture, **le taux de travail donné par le poids propre du sol est supérieur ou égal au taux de dissipation d'énergie interne.**

Dans un mécanisme rotationnel discontinu comme le montré la figure plus haut (Cf. Fig.20), et dans laquelle la surface de rupture est supposée passer à travers le pied du talus, la forme triangulaire (ABC) tourne (rotation) comme un corps rigide autour d'un centre de rotation « O ». La surface BC est une surface avec une vitesse discontinue.

L'utilisation des relations géométriques nous donne :

$$\frac{H}{r_0} = \frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)} \{ \sin(\theta_h + \alpha) \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] - \sin(\theta_0 + \alpha) \} \quad (23)$$

$$\frac{L}{r_0} = \frac{\sin(\theta_h - \theta_0)}{\sin(\theta_h + \alpha)} - \frac{\sin(\theta_h + \beta)}{\sin(\theta_h + \alpha) \sin(\beta - \alpha)} \{ \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] \sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha) \} \quad (24)$$

II. 2. 2- a) Taux de travail externe :

Une intégration directe du taux de travail externe due au poids propre du sol dans la région (ABC) est très compliqué. Il existe une alternative plus facile qui consiste à trouver les taux de travaux externes \dot{W}_1 , \dot{W}_2 et \dot{W}_3 dus au poids propre des sols dans les régions (OBC), (OAB) et (OAC) respectivement puis par une simple sommation algébrique nous trouvons le taux de travail externe dans la région (ABC) qui est :

$$\dot{W} = \dot{W}_1 - \dot{W}_2 - \dot{W}_3 - (25)$$

Nous avons trouvé dans l'exemple précédent que le taux de travail donné par le poids propre du sol dans la région (ABC) est :

$$\gamma r_0^3 \Omega (f_1 - f_2 - f_3) - (26)$$

Où :

γ : Poids volumique ;

Ω : Vitesse angulaire de la région (ABC).

Nous posons :

$$f_1(\theta_h, \theta_0) = \frac{1}{3(1 + 9 \tan^2 \varphi)} \{ (3 \tan \varphi \cos \theta_h + \sin \theta_h) \exp[3(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] - (3 \tan \varphi \cos \theta_0 + \sin \theta_0) \} \quad (27)$$

$$f_2(\theta_h, \theta_0) = \frac{1}{6} \frac{L}{r_0} \left(2 \cos \theta_0 - \frac{L}{r_0} \cos \alpha \right) \sin(\theta_h + \alpha) \quad (28)$$

$$f_3(\theta_h, \theta_0) = \frac{1}{6} \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] \left[\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{r_0} \sin(\theta_h + \alpha) \right] \left\{ \cos \theta_0 - \frac{L}{r_0} \cos \alpha + \cos \theta_h \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] \right\} \rightarrow (29)$$

II. 2. 2- b) Taux de dissipation d'énergie interne :

La dissipation interne de l'énergie survient le long de la discontinuité « BC ». Le taux différentiel de la dissipation interne de l'énergie de long de cette surface peut être trouvé en multipliant la surface différentielle $rd\theta/\cos \varphi$ de cette surface par la cohésion C et $V \cos \varphi$. La dissipation d'énergie totale est trouvée en intégrant à travers la surface entière :

$$\int_{\theta_0}^{\theta_h} c(V \cos \varphi) \frac{rd\theta}{\cos \varphi} = \frac{cr^2 \Omega}{2 \tan \varphi} \{ \exp[2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] - 1 \} \quad (30)$$

II. 2. 2- c) Hauteur critique :

L'égalisation du taux de travail externe au taux de dissipation d'énergie nous donne :

$$H = \frac{c}{\gamma} f(\theta_h, \theta_0) \quad (31)$$

Où :

$$f(\theta_h, \theta_0) = \frac{\sin \beta \{ \exp[2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] - 1 \}}{2 \sin(\beta - \alpha) \tan \varphi (f_1 - f_2 - f_3)} \{ \sin(\theta_h + \alpha) \exp[2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] - \sin(\theta_0 + \alpha) \} \quad (32)$$

l'utilisation du théorème de la borne supérieure de l'analyse limite sur la fonction (32) nous donnera une limite supérieure pour la hauteur critique. La fonction $f(\theta_h, \theta_0)$ a une valeur minimale quand θ_h et θ_0 satisfont les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \theta_h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_0} = 0 \end{cases} \rightarrow (33)$$

La résolution de ses équations et leur substitution dans la fonction (31) nous donne :

$$H_c = \frac{c}{\gamma} N_s \quad (34)$$

Où :

$$N_s = \min f(\theta_h, \theta_0) \quad (35)$$

N_s : Facteur de stabilité d'un talus. Il dépend de β , α et φ .

II. 2- d) Résultats numériques :

Les Résultats de Chen sont représentés dans le tableau suivant (Cf. Tab. :I).

Facteur de stabilité $N_s = H_c(\gamma/C)$ par l'analyse limite (Log-Spiral passant à travers le pied d'un talus incliné Fig. :20).

| Angle d'e frottem ^{er} it interne $\frac{\phi}{\phi}$ | Angle d'inclinaison | Angle d'inclinaison | | | | | |
|--|------------------------|---------------------|------|-------|-------|-------|-------|
| | | 90 | 75 | 60 | 45 | 30 | 15 |
| 0 | 0 | 3.83 | 4.57 | 5.25 | 5.86 | 6.51 | 7.35 |
| 5 | 0 | 4.19 | 5.14 | 6.17 | 7.33 | 9.17 | 14.80 |
| | 5 | 4.14 | 5.05 | 6.03 | 7.18 | 8.93 | 14.62 |
| 10 | 0 | 4.59 | 5.80 | 7.26 | 9.32 | 13.53 | 45.53 |
| | 5 | 4.53 | 5.72 | 7.14 | 9.14 | 13.26 | 45.15 |
| | 10 | 4.47 | 5.61 | 6.98 | 8.93 | 12.97 | 44.56 |
| 15 | 0 | 5.02 | 6.57 | 8.64 | 12.05 | 21.71 | |
| | 5 | 4.97 | 6.49 | 8.52 | 11.91 | 21.50 | |
| | 10 | 4.90 | 6.39 | 8.38 | 11.73 | 21.14 | |
| | 15 | 4.83 | 6.28 | 8.18 | 11.42 | 20.59 | |
| 20 | 0 | 5.51 | 7.48 | 10.39 | 16.18 | 41.27 | |
| | 5 | 5.46 | 7.40 | 10.30 | 16.04 | 41.06 | |
| | 10 | 5.40 | 7.31 | 10.15 | 15.87 | 40.73 | |
| | 15 | 5.33 | 7.20 | 9.98 | 15.59 | 40.16 | |
| | 20 | 5.24 | 7.04 | 9.78 | 15.17 | 39.19 | |
| 25 | 0 | 6.06 | 8.59 | 12.75 | 22.92 | 120.0 | |
| | 5 | 6.01 | 8.52 | 12.65 | 22.78 | 119.8 | |
| | 10 | 5.96 | 8.41 | 12.54 | 22.60 | 119.5 | |
| | 15 | 5.89 | 8.30 | 12.40 | 22.37 | 118.7 | |
| | 20 | 5.81 | 8.16 | 12.17 | 21.98 | 117.4 | |
| | 25 | 5.71 | 7.97 | 11.80 | 21.35 | 115.5 | |

| | | | | | | | |
|-----------|-----------|------|-------|-------|-------|--|--|
| 30 | 0 | 6.69 | 9.96 | 16.11 | 35.63 | | |
| | 5 | 6.63 | 9.87 | 16.00 | 35.44 | | |
| | 10 | 6.58 | 9.79 | 15.87 | 35.25 | | |
| | 15 | 6.53 | 9.67 | 15.69 | 34.99 | | |
| | 20 | 6.44 | 9.54 | 15.48 | 34.64 | | |
| | 25 | 6.34 | 9.37 | 15.21 | 34.12 | | |
| | 30 | 6.22 | 9.15 | 14.81 | 33.08 | | |
| 35 | 0 | 7.43 | 11.68 | 20.94 | 65.53 | | |
| | 5 | 7.38 | 11.60 | 20.84 | 65.39 | | |
| | 10 | 7.32 | 11.51 | 20.71 | 65.22 | | |
| | 15 | 7.26 | 11.41 | 20.55 | 65.03 | | |
| | 20 | 2.18 | 11.28 | 20.36 | 64.74 | | |
| | 25 | 7.11 | 11.12 | 20.07 | 64.18 | | |
| | 30 | 6.99 | 10.93 | 19.73 | 63.00 | | |
| | 35 | 6.84 | 10.66 | 19.21 | 60.80 | | |
| 40 | 0 | 8.30 | 14.00 | 28.99 | 185.6 | | |
| | 5 | 8.26 | 13.94 | 28.84 | 185.5 | | |
| | 10 | 8.21 | 13.85 | 28.69 | 185.3 | | |
| | 15 | 8.15 | 13.72 | 28.54 | 185.0 | | |
| | 20 | 8.06 | 13.57 | 28.39 | 184.6 | | |
| | 25 | 7.98 | 13.42 | 28.16 | 184.0 | | |
| | 30 | 7.87 | 13.21 | 27.88 | 183.2 | | |
| | 35 | 7.76 | 12.95 | 27.49 | 182.3 | | |
| | 40 | 7.61 | 12.63 | 26.91 | 181.1 | | |

Tab. :I Facteur de stabilité pour un mécanisme de rupture log-spiral passant à travers le pied du talus selon Chen.

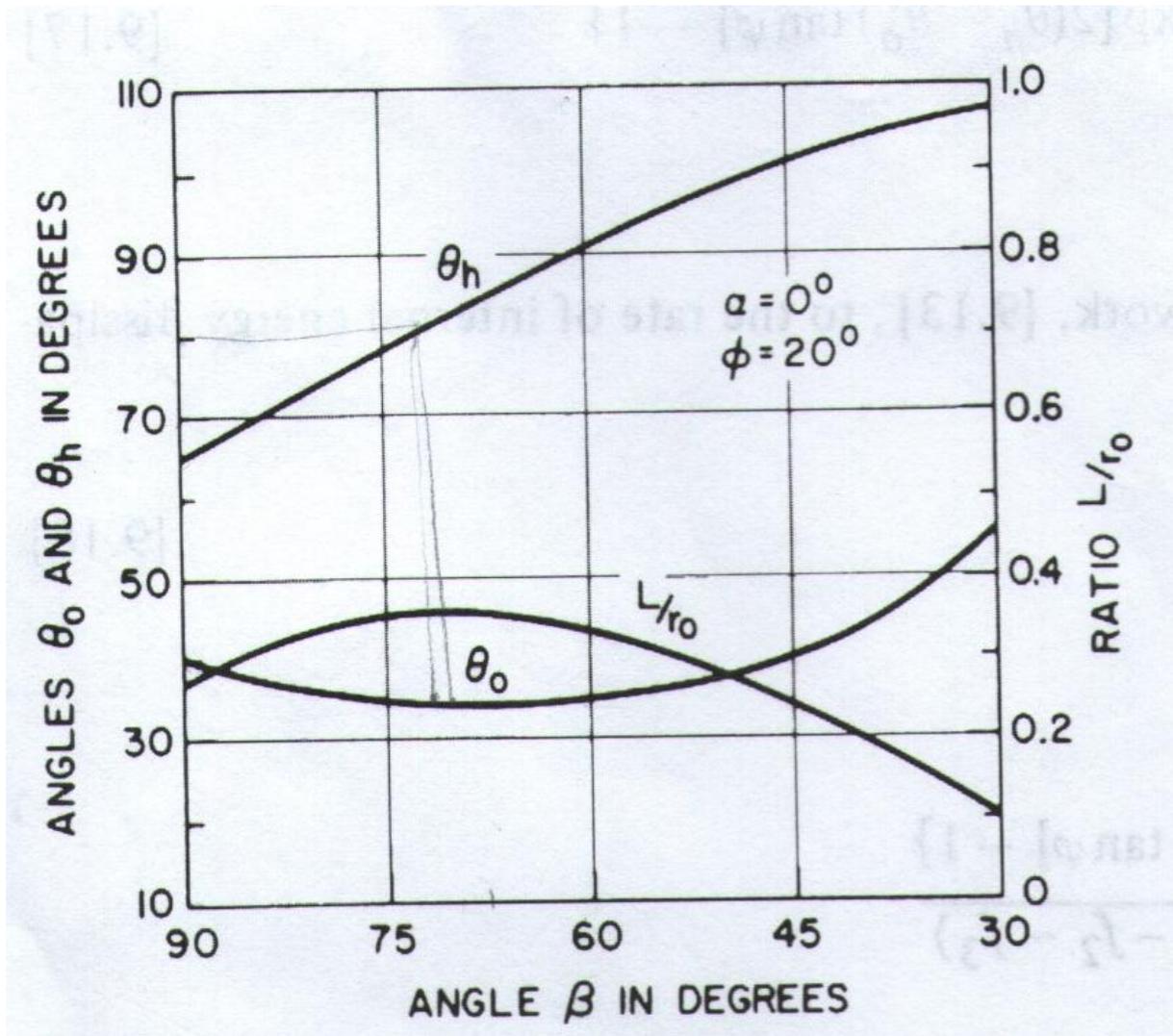


Fig. :21 Valeurs critiques de θ_h , θ_0 et L/r_0 en fonction de β pour une rupture passant à travers le pied du talus

Nos résultats obtenus à l'aide du logiciel Mathcad sont présentés dans le tableau suivant :

Tab. :II Facteur de stabilité pour un mécanisme de rupture log-spiral passant à travers le pied d'un talus selon Mathcad

| Mécanisme de rupture log-spirale passant à travers le pied d'un talus | | | |
|---|--------------------|--------------------|---------------|
| Valeur du facteur de stabilité suivant Mathcad | | | |
| $\alpha = 0^\circ, \theta_0 = 0^\circ$ | | | |
| β (degré) | θ_0 (degré) | θ_h (degré) | Ns |
| 30 | 54 | 107 | 41,351 |
| 45 | 40 | 101 | 16,188 |
| 60 | 35 | 90 | 10,396 |
| 75 | 34 | 79 | 7,485 |
| 90 | 40 | 65 | 5,512 |

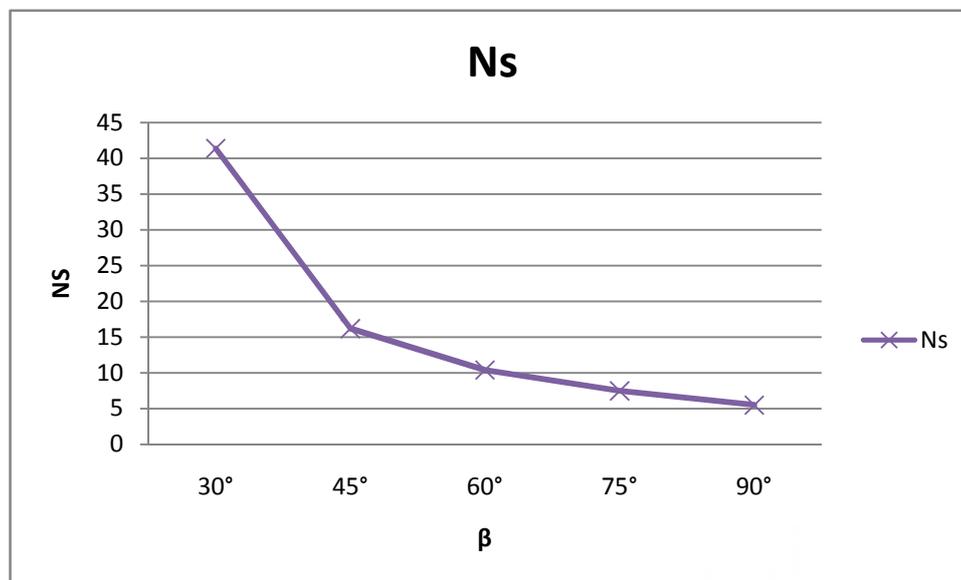


Fig. :22 Courbe du facteur de Stabilité suivant l'angle d'inclinaison β d'un mécanisme de rupture log-spiral passant à travers le pied du talus pour $\alpha = 0$ (Selon Mathcad).

N.B :

Les valeurs critiques des angles θ_h et θ_0 ont été obtenus en satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta \theta_h} = 0 \\ \frac{\delta f}{\delta \theta_0} = 0 \end{cases}$$

II. 3- Mécanisme de rupture log-spiral passant sous le pied du talus

[Cf. :06] :

Nous avons vu précédemment le cas où la surface log-spiral passe à travers le pied du talus. Ici, et pour des valeurs de l'angle de frottement φ et l'angle du talus β petites, la surface va passer sous le pied du talus.

Nous supposons toujours que le sol est homogène et anisotrope.

II. 3- 1- Hauteur critique d'un talus :

II. 3. 1- a) Taux de travail externe :

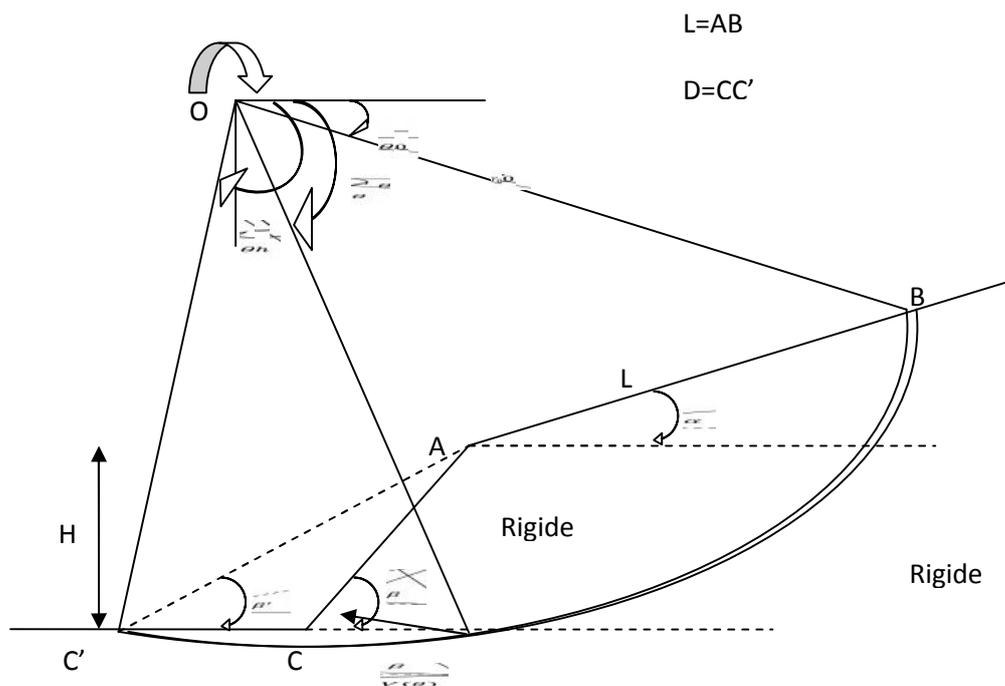


Fig. :23 Mécanisme de rupture de la stabilité d'un talus incliné avec un plan de rupture passant sous le pied du talus.

Ici, le taux de travail externe dans la région ABC'CA peut être obtenu facilement en trouvant les taux de travail \dot{W}_1 , \dot{W}_2 , \dot{W}_3 et \dot{W}_4 dus aux poids des sols des régions OBC'O, OABO, OAC'O et ACC'A respectivement. Le taux de travail externe pour la région ABC'CA est alors obtenue par une simple sommation algébrique :

$$\dot{W}_1 - \dot{W}_2 - \dot{W}_3 - \dot{W}_4 - (36)$$

Nous trouverons que le taux total du travail externe du au poids du sol dans la région ABC'CA est de :

$$\gamma \Omega r_0^3 (f_1 - f_2 - f_3 - f_4) - (37)$$

Les fonctions $f_1(\theta_h, \theta_0)$, $f_2(\theta_h, \theta_0)$ et $f_3(\theta_h, \theta_0)$ sont les mêmes que ceux précédemment définies. La fonction $f_4(\theta_h, \theta_0)$ résultante de la région ACC'A est la suivante :

$$f_4(\theta_h, \theta_0) = \left(\frac{H}{r_0}\right)^2 \frac{\sin(\beta - \beta')}{2 \sin \beta \sin \beta'} \left[\cos \theta_0 - \left(\frac{L}{r_0}\right) \cos \alpha - \frac{1}{3} \frac{H}{r_0} (\cot \beta' + \cot \beta) \right] \rightarrow (38)$$

II. 3. 1- b) Taux de dissipation d'énergie interne :

La dissipation interne d'énergie qui se produit le long de la surface de rupture BC' est identique à la précédente :

$$\int_{\theta_0}^{\theta_h} C(V \cos \varphi) \frac{rd\theta}{\cos \varphi} = \frac{Cr_0^2 \Omega}{2 \tan \varphi} \{ \exp[2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] - 1 \} \quad (39)$$

II. 3. 1- c) Hauteur critique :

De la même façon, l'égalisation des deux taux de travail et de dissipation d'énergie interne nous donne :

$$H = \frac{c}{\gamma} f(\theta_h, \theta_0, \beta') \rightarrow (40)$$

Où :

$$f(\theta_h, \theta_0, \beta') = \frac{\sin \beta' \{ \exp[2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] - 1 \}}{2 \sin(\beta' - \alpha) \tan \varphi (f_1 - f_2 - f_3 - f_4)} \{ \sin(\theta_h + \alpha) \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] - \sin(\theta_0 + \alpha) \} \quad (41)$$

La fonction $f(\theta_h, \theta_0, \beta')$ atteint son maximum quand θ_h, θ_0 et β' satisfont aux conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \theta_h} = 0; \frac{\partial f}{\partial \theta_0} = 0; \frac{\partial f}{\partial \beta'} = 0 \\ \text{avec } \beta' \leq \beta \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} N_s = \min f(\theta_h, \theta_0, \beta') \\ H_c = \frac{c}{\gamma} N_s \end{array} \right. \rightarrow (42)$$

Et :

$$\frac{D}{H_c} = \frac{\sin(\beta - \beta')}{\sin \beta \sin \beta'} - (43)$$

II. 3- 1- d) Résultats numériques :

Les Résultats de Chen sont représentés dans le tableau suivant (Cf. Tab. :III) :

Tab. :III Facteur de stabilité pour un mécanisme de rupture log-spiral passant sous le pied du talus. (Selon Chen)

| Angle d'e frottem ^e t interne ϕ | Angle d'inclinaison | Angle d'inclinaison | | | | | | | |
|---|------------------------|---------------------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|
| | | 50 | 45 | 40 | 35 | 30 | 25 | 20 | 15 |
| 0 | 0 | 5.52 | 5.53 | 5.53 | 5.53 | 5.53 | 5.53 | 5.53 | 5.53 |
| 5 | 0 | 6.92* | 7.35* | 7.84* | 8.41* | 9.13 | 10.02 | 11.46 | 14.38 |
| 5 | 5 | 6.76* | 7.18* | 7.64* | 8.19* | 8.83 | 9.65 | 10.99 | 13.71 |

*Rupture à travers le pied.

Facteur de stabilité $N_s = H_c(\gamma/C)$ par l'analyse limite pour de petites valeurs de γ , β et ϕ (Log-Spiral passant sous le pied d'un talus incliné Fig. :23)

Tab. :IV Facteur de stabilité pour les méthodes de l'équilibre limite et l'analyse limite. (Selon Chen)

| | | Equilibre limite | | | Analyse Limite |
|----|----|------------------|---------|------------|----------------|
| | | Tranches | -cercle | Log-spiral | Log-spiral |
| 90 | 0 | 3.83 | 3.83 | 3.83 | 3.83 |
| | 5 | 4.19 | 4.19 | 4.19 | 4.19 |
| | 15 | 5.02 | 5.02 | | 5.02 |
| | 25 | 6.06 | 6.06 | 6.06 | 6.06 |
| 75 | 0 | 4.57 | 4.57 | 4.57 | 4.56 |
| | 5 | 5.13 | 5.13 | | 5.14 |
| | 15 | 6.49 | 6.52 | | 6.57 |
| | 25 | 8.48 | 8.54 | | 8.58 |
| 60 | 0 | 5.24 | 5.24 | 5.24 | 5.25 |
| | 5 | 6.06 | 6.18 | 6.18 | 6.16 |
| | 15 | 8.33 | 8.63 | 8.63 | 8.63 |
| | 25 | 12.20 | 12.65 | 12.82 | 12.74 |
| 45 | 0 | 5.88 | 5.88 | 5.88 | 5.53 |
| | 5 | 7.09 | 7.36 | | 7.35 |
| | 15 | 11.77 | 12.04 | | 12.05 |
| | 25 | 20.83 | 22.73 | | 22.90 |
| 30 | 0 | 6.41 | 6.41 | 6.41 | 5.53 |
| | 5 | 8.77 | 9.09 | | 9.13 |
| | 15 | 20.84 | 21.74 | | 21.69 |
| | 25 | 83.34 | 111.1 | 125.0 | 119.93 |
| 15 | 0 | 6.90 | 6.90 | 6.90 | 5.53 |
| | 5 | 13.89 | 14.71 | 14.71 | 14.38 |
| | 10 | | 43.62 | | 45.49 |

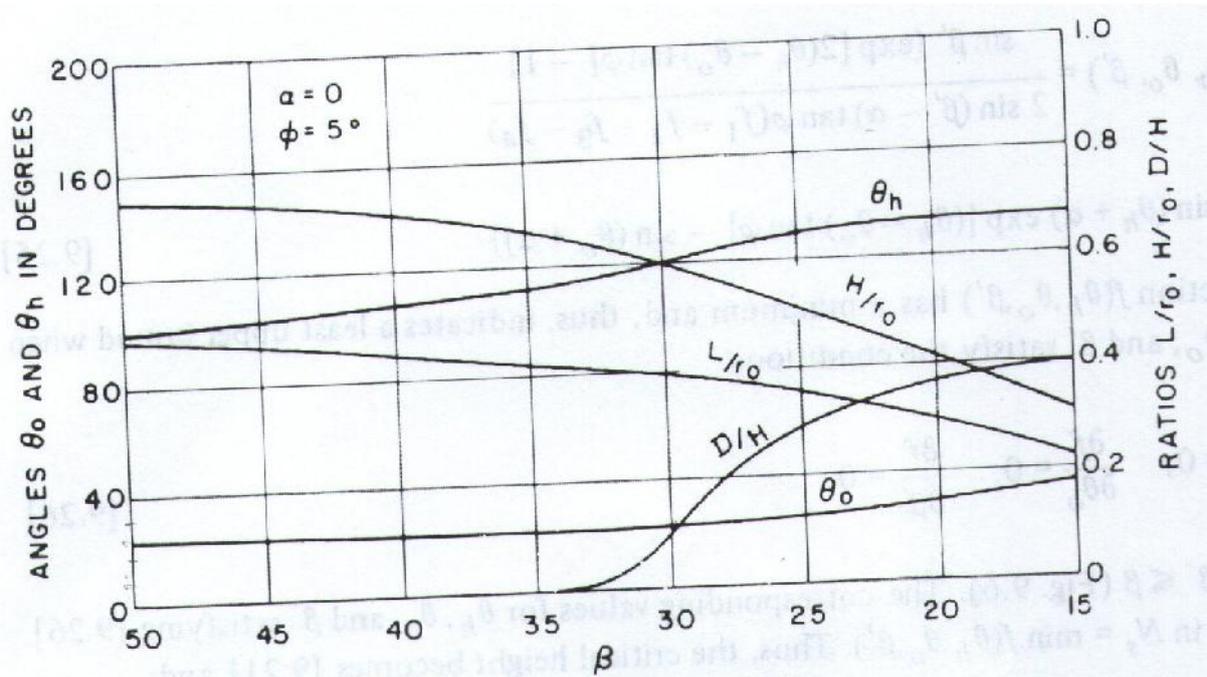


Fig. :24 Valeurs critiques de θ_h , θ_0 , L/r_0 et D/H en fonction de β pour une rupture passant sous le pied du talus

Nos résultats obtenus à l'aide du logiciel Mathcad sont présentés dans le tableau suivant :

Tab. :V Facteur de stabilité pour un mécanisme de rupture log-spiral passant sous le pied du talus. (Selon Mathcad)

| Mécanisme de rupture log-spiral passant sous le pied du talus | | | | |
|---|-------------------|--------------------|--------------------|---------------|
| Valeur du facteur de stabilité suivant Mathcad | | | | |
| $\alpha = 0^\circ, \phi = 5^\circ$ | | | | |
| β (degré) | β_1 (degré) | θ_0 (degré) | θ_h (degré) | Ns |
| 15 | 11,1 | 36 | 135,2 | 14,382 |
| 20 | 16,7 | 30 | 133,2 | 11,477 |
| 25 | 22,5 | 24,8 | 130 | 10,055 |
| 30 | 29 | 24 | 122 | 9,152 |
| 35 | 35 | 23,2 | 112 | 8,423* |
| 40 | 40 | 23,2 | 108 | 7,842* |
| 45 | 45 | 23,2 | 104 | 7,360* |
| 50 | 50 | 23,2 | 100 | 6,936* |

*Rupture à travers le pied.

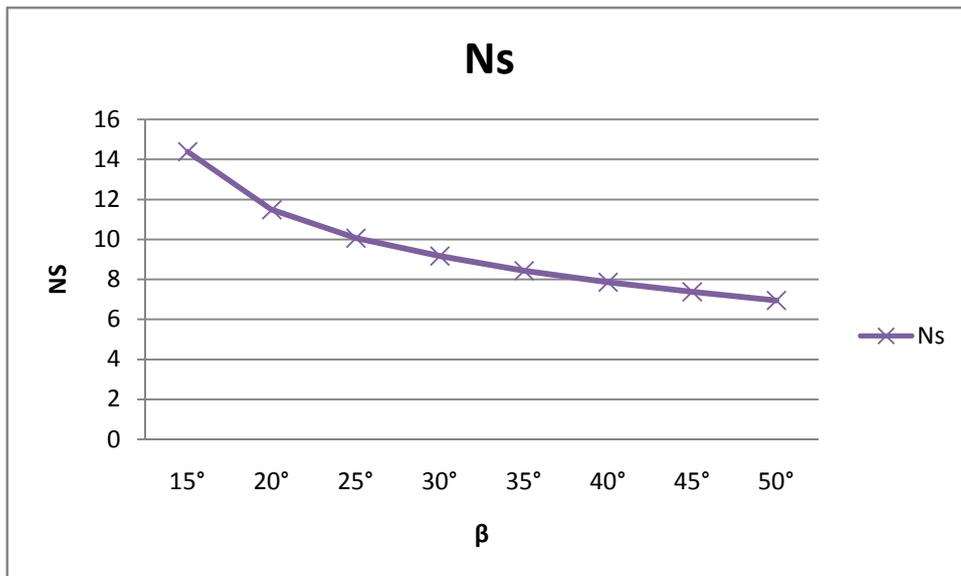


Fig. :25 Courbe du facteur de Stabilité suivant l'angle d'inclinaison β d'un mécanisme de rupture log-spiral passant sous le pied du talus pour $\alpha = 0$ (Selon Mathcad).

Comme nous l'avons vu précédemment, dans la stabilité des talus isotropique et homogène, la technique de la limite sup de l'analyse limite peut être utilisée afin d'obtenir une solution pour la hauteur critique des talus anisotropique et non homogène. Et, puisque les conditions suivantes sont considérées, à savoir :

- 1) La surface de glissement, log-spiral, passe par le pied ou en-dessous ;
- 2) La non homogénéité ;
- 3) L'anisotropie ;
- 4) Talus en général incliné avec différents angles.

Les problèmes considérés vont nous servir à démontrer l'utilité et la valeur de la technique de la limite sup de l'analyse limite dans le développement de nouvelles solutions.

Dans les calculs suivants, nous supposons que le matériau du sol obéit à la condition de coulomb (C et ϕ) où :

C : la cohésion est non homogène et anisotropique.

ϕ : L'angle de frottement est homogène et isotropique.

1) Non homogénéité :

Beaucoup de cas de non homogénéité de la cohésion sont sous forme linéaire, comme présenté dans la figure plus haut (Cf. Fig. :26), en fonction de la profondeur Z. Dans cet esprit, nous montrons plus bas différents types de variations linéaires de la cohésion en fonction de la profondeur. La variation de la cohésion montrée dans la figure (Cf. Fig. :27e) est le cas le plus général et c'est celle que nous avons adoptée dans nos calculs. Les ratios de la cohésion à différentes profondeur sont définis comme n_0, n_1 et n_2

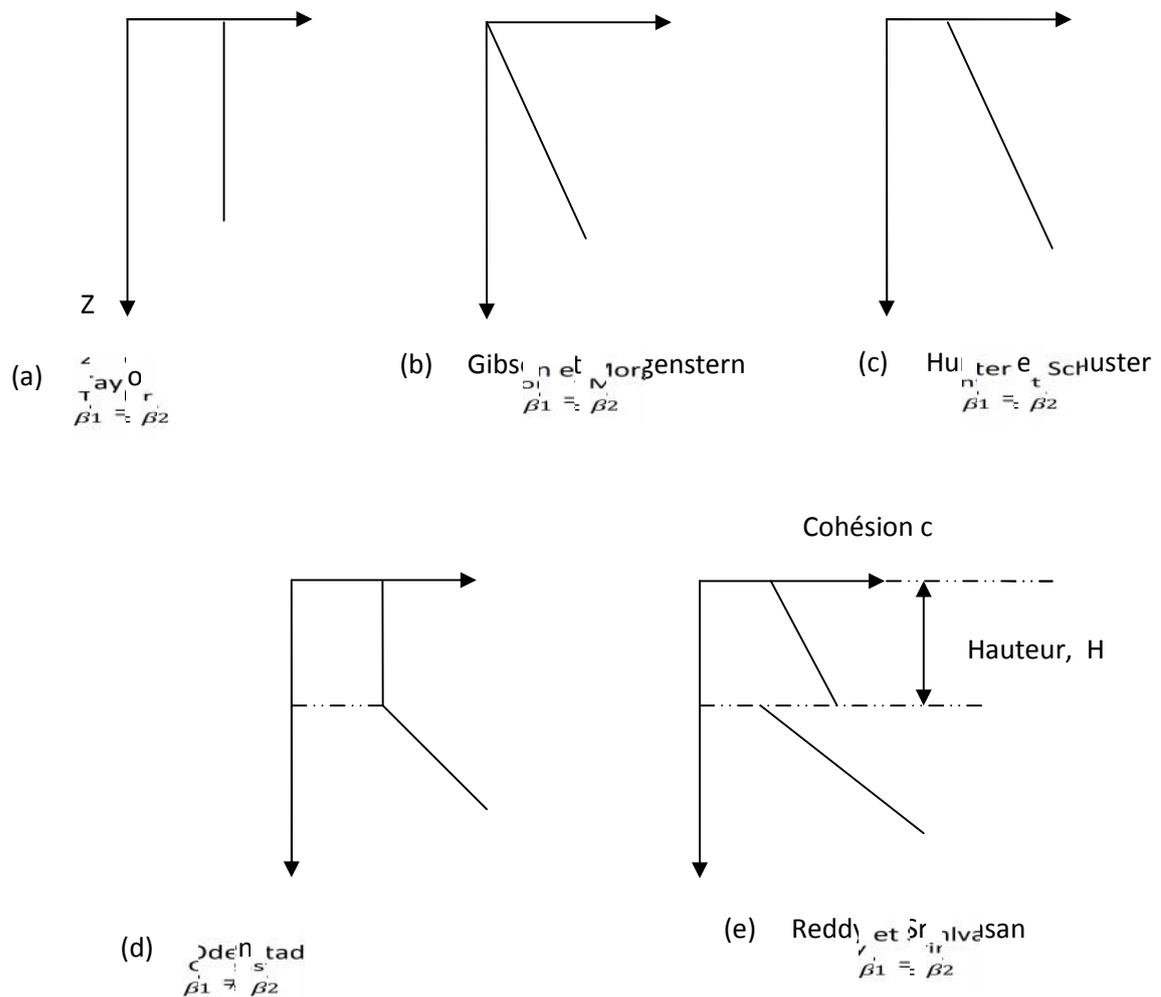


Fig. :27 Différents types de variation de la cohésion linéairement.

2) Anisotropie :

La variation de la cohésion en fonction de la direction en un point particulier a été étudiée par Casagrande et Carrillo en 1954. Il a été trouvé que, la variation en fonction de la direction approche à la courbe de la figure vue plus haut (Cf. Fig. :27). La cohésion c_i , dont la direction de ses contraintes principales est inclinée avec un angle i par rapport à la direction vertical, est donnée par :

$$c_i = c_h + (c_v - c_h) \cos^2 i \rightarrow (44)$$

Où c_v et c_h sont, respectivement, les cohésions principales vertical et horizontal.

3) Talus incliné avec différent angle d'inclinaison :

La conception de talus avec différent angles d'inclinaison α_1 et α_2 , comme dans la figure précédente (Cf. Fig. :26), est devenue plus courante parce qu'un volume minimum d'argile excavée est toujours souhaitable.

Dans l'analyse qui va suivre, nous supposons que la surface du talus consiste en deux plans cassés qui sont fonctions des angles α_1 et α_2 et les hauteurs verticales relatives correspondantes à la hauteur totale H et qui sont définies par les facteurs de profondeur λ_1 et λ_2 . La hauteur verticale de la surface de rupture log-spiral est dénotée par N.

La solution « limite sup » de l'analyse limite :

La limite sup établie que le talus va se rompre sous son propre poids si, pour un mécanisme de rupture log-spiral qui est défini par les paramètres θ_0 , h et D/r_0 , le taux de travail externe donné par le sol dépasse le taux de dissipation d'énergie interne, la limite sup de la hauteur critique peut être obtenue en égalisant le taux de travail externe au taux de dissipation d'énergie interne.

En se référant à la figure précédente (Cf. Fig. :26), la région (AA'CB'BA) fait une rotation autour du point « O » par rapport au matériau sous la surface de rupture log-spiral AB (cette surface a une vitesse discontinue).

II. 4. 1- b) Taux de travail externe :

Comme nous l'avons vus précédemment, le taux de travail externe donné par la région (AA'CB'BA) peut être obtenu par une simple sommation algébrique :

$$W_1 - W_2 - W_3 - W_4 - W_5 \rightarrow (45)$$

Où :

W_1, W_2, W_3, W_4 et W_5 représentent respectivement les taux de travail externe donnés par le poids du sol des régions (OABO), (OB'BO), (OCB'O), (OA'CO) et (OAA'O). Après simplification, le taux total de travail externe donné par le poids du sol est de :

$$r_0^3(f_1 - g_2 - g_3 - g_4 - g_5) \rightarrow (46)$$

Où :

$f_1(\theta_h, \theta_0)$ est identique aux précédentes ;

$$g_2 = \frac{1}{6} \frac{L}{r_0} \sin \theta_0 \left(2 \cos \theta_0 - \frac{L}{r_0} \right) \rightarrow (47)$$

$$g_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{H}{r_0} \right) \left[\cos^2 \theta_0 + \frac{L}{r_0} \left(\frac{L}{r_0} - 2 \cos \theta_0 \right) + \sin \theta_0 \cot \alpha_1 \left(\cos \theta_0 - \frac{L}{r_0} \right) - \frac{1}{2} \frac{H}{r_0} \cot \alpha_1 \left(\cos \theta_0 + \frac{L}{r_0} - \sin \theta_0 \cot \alpha_1 \right) \right] \rightarrow (48)$$

$$g_4 = \frac{2}{3} \left(\frac{H}{r_0} \right) \left\{ (\cos^2 \theta_h + \sin \nu_h \cos \theta_h \cot \beta_2) \exp[2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] \right. \\ \left. + \left(2 \frac{D}{r_0} \cos \theta_h + \frac{D}{r_0} \sin \theta_h \cot \beta_2 + \frac{2}{2} \frac{H}{r_0} \cos \theta_h \cot \beta_2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\alpha_2 H}{2 r_0} \sin \nu_h \cot^2 \beta_2 \right) \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] + \left(\frac{D}{r_0} \right)^2 \right\} \rightarrow (49)$$

$$g_5 = \frac{1}{6} \left(\frac{D}{r_0} \right) \sin \theta_h \left\{ 2 \cos \theta_h \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] + \frac{D}{r_0} \right\} \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] \rightarrow (50)$$

Des relations géométrique, les fractions H/r_0 , L/r_0 et N/r_0 peuvent être exprimées par :

$$\frac{H}{r_0} = \sin \theta_h \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] - \sin \theta_0 \rightarrow (51)$$

$$\frac{L}{r_0} = \cos \theta_0 - \cos \nu_h \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi] - \frac{D}{r_0} - \left(\frac{H}{r_0} \right) (\alpha_1 \cot \beta_1 + \alpha_2 \cot \beta_2) \rightarrow (52)$$

$$\frac{N}{r_0} = \cos \theta_0 \exp \left[\left(\frac{1}{2} \pi + \varphi - \theta_0 \right) \tan \varphi \right] - \sin \theta_0 - \frac{D}{r_0} \rightarrow (53)$$

II. 4- 1- c) Taux de dissipation d'énergie interne :

Le taux total de la dissipation d'énergie interne le long de la discontinuité log-spiral de la surface de rupture « AB » est trouvé en multipliant la surface différentielle $rd / \cos \theta$ par c_i et $V \cos \nu$, puis en intégrant sur toute la surface « AB » comme suit :

$$\int_{\theta_0}^{\theta_h} c_i (V \cos \nu) \frac{rd}{\cos \theta} = \int_{\theta_0}^{\theta_m} (c_i)_1 (V \cos \nu) \frac{rd}{\cos \theta} + \int_{\theta_m}^{\theta_h} (c_i)_2 (V \cos \nu) \frac{rd}{\cos \theta} \rightarrow (54)$$

L'angle log-spiral (θ_m) et l'angle anisotropique (i) sont obtenus directement des relations géométriques et peuvent être exprimés ainsi :

$$\theta_m \exp(\theta_m \tan \varphi) = \sin \theta_h \exp(\theta_h \tan \varphi) \rightarrow (55)$$

$$i = -\frac{1}{2} \pi - \varphi + \theta_m = \theta + \epsilon \rightarrow (56)$$

Où :

$$\epsilon = -\left(\frac{1}{2} \pi + \varphi - \theta_m \right) \rightarrow (57)$$

En ce référant à l'équation (44), $(c_i)_1$ et $(c_i)_2$ peuvent être exprimés comme suit :

$$(c_i)_1 = c \left[n_0 + \frac{(1 - n_0)}{H/r_0} \{ \sin \exp[(\theta - \theta_0) \tan \varphi] - \sin \theta_0 \} \right] \left[1 + \frac{(1 - k)}{k} \cos^2 i \right] \rightarrow (58)$$

$$(c_i)_2 = c \left[n_1 + \frac{(n_2 - n_1)}{N/r_0} \{ \sin \exp[(\theta - \theta_0) \tan \varphi] - \sin \theta_m \exp[(\theta_m - \theta_0) \tan \varphi] \} \right] \times \left[1 + \frac{(1 - k)}{k} \cos^2 i \right] \rightarrow (59)$$

En substituant les équations (58) et (59) dans l'équation (54), et après intégration et simplification, l'équation (54) sera réduite à :

$$c \cdot r_0^2 (q_1 + q_2 + q_3) \rightarrow (60)$$

Les fonctions q_1 , q_2 et q_3 sont définies comme :

$$q_1 = \left\{ \frac{n_0}{\exp(2 \theta_0 \tan \varphi)} \left[\psi(\theta) + \frac{(1 - k)}{k} (\cdot) \right] \right\}_{\theta_0}^{\theta_m} + \left\{ \frac{n_1}{\exp(2 \theta_0 \tan \varphi)} \left[\psi(\theta) + \frac{(1 - k)}{k} (\cdot) \right] \right\}_{\theta_m}^{\theta_h} \rightarrow (61)$$

$$q_2 = \frac{(1 - n_0)}{(H/r_0) \exp(3 \theta_0 \tan \varphi)} \left\{ \xi(\theta) - (\cdot) \sin \theta_0 \exp(\theta_0 \tan \varphi) + \frac{(1 - k)}{k} \times [(\cdot) - (\cdot) \sin \theta_0 \exp(\theta_0 \tan \varphi)] \right\}_{\theta_m}^{\theta_h} \rightarrow (62)$$

$$q_3 = \frac{(n_2 - n_1)}{(N/r_0) \exp(3 \theta_0 \tan \varphi)} \left\{ \xi(\theta) - (\cdot) \sin \theta_m \exp(\theta_m \tan \varphi) + \frac{(1 - k)}{k} \times [(\cdot) - (\cdot) \sin \theta_m \exp(\theta_m \tan \varphi)] \right\}_{\theta_m}^{\theta_h} \rightarrow (63)$$

Où :

$$(\cdot) = \frac{(3 \tan \sin - \cos) \exp(3 \tan)}{1 + 9 \tan^2 \varphi} \rightarrow (64 - a)$$

$$(\cdot) = \frac{\exp(2 \tan)}{2 \tan} \rightarrow (64 - b)$$

$$\begin{aligned}
 () = \frac{\exp(3 \tan \varphi)}{2} & \left\{ \cos 2\varphi \left[\frac{(\cos \varphi - 3 \tan \varphi \sin \varphi)}{2(1 + 9 \tan^2 \varphi)} + \frac{(\tan \varphi \sin 3\varphi - \cos 3\varphi)}{6(1 + \tan^2 \varphi)} \right] \right. \\
 & - \sin 2\varphi \left[\frac{(\sin \varphi + 3 \tan \varphi \cos \varphi)}{2(1 + 9 \tan^2 \varphi)} - \frac{(\tan \varphi \cos 3\varphi + \sin 3\varphi)}{6(1 + \tan^2 \varphi)} \right] \\
 & \left. + \left[\frac{(3 \tan \varphi \sin \varphi - \cos \varphi)}{1 + 9 \tan^2 \varphi} \right] \right\} \rightarrow (64 - c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 () = \frac{\exp(2 \tan \varphi)}{2} & \left\{ \cos 2\varphi \left[\frac{\tan \varphi \cos 2\varphi + \sin 2\varphi}{2(1 + \tan^2 \varphi)} \right] - \sin 2\varphi \left[\frac{\tan \varphi \sin 2\varphi - \cos 2\varphi}{2(1 + \tan^2 \varphi)} \right] \right\} \\
 & + \frac{\exp(2 \tan \varphi)}{4 \tan \varphi} \rightarrow (64 - d)
 \end{aligned}$$

L'égalisation du taux total de travail externe (46) au taux total de dissipation d'énergie interne (60) nous donne :

$$H = \frac{C}{r_0} f(\theta_0, \theta_h, \frac{D}{r_0}) \rightarrow (65)$$

Où :

C : cohésion principal horizontal au pied du talus

$$f(\theta_0, \theta_h, \frac{D}{r_0}) = \left(\frac{H}{r_0}\right) \frac{(q_1 + q_2 + q_3)}{(f_1 - g_2 - g_3 - g_4 - g_5)} \rightarrow (66)$$

La fonction $f(\theta_0, \theta_h, \frac{D}{r_0})$ a un minimum quand :

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \theta_h} = 0; \frac{\partial f}{\partial \theta_0} = 0; \frac{\partial f}{\partial (D/r_0)} = 0 \right. \quad (67)$$

Les valeurs correspondantes de θ_0 , θ_h et D/r_0 qui satisfont l'équation (67) sont les même que ceux de l'équation du facteur de Stabilité:

$$N_s = \min f(\theta_h, \theta_0, D/r_0) \quad (68)$$

La hauteur critique peut être obtenue de l'équation suivante :

$$H_c \leq \frac{C}{r_0} N_s \quad (69)$$

II. 4- 1- d) Résultats numériques :

Les Résultats de Chen sont représentés dans le tableau suivant (Cf. Tab. :VI et VII) :

Tab. :VI Facteur de stabilité pour un sol homogène et anisotropique (Selon Chen)

| Facteur de stabilité pour un sol Homogène et anisotropique | | |
|--|-----|------|
| $\frac{c}{\gamma H} = 0 \text{ m}=55^\circ$ | | |
| β (degré) | k | NS |
| 90° | 1.0 | 3.83 |
| | 0.9 | 3.81 |
| | 0.8 | 3.79 |
| | 0.7 | 3.78 |
| | 0.6 | 3.76 |
| | 0.5 | 3.74 |
| 70° | 1.0 | 4.79 |
| | 0.9 | 4.72 |
| | 0.8 | 4.65 |
| | 0.7 | 4.58 |
| | 0.6 | 4.49 |
| | 0.5 | 4.41 |
| 50° | 1.0 | 5.68 |
| | 0.9 | 5.54 |
| | 0.8 | 5.38 |
| | 0.7 | 5.23 |
| | 0.6 | 5.09 |
| | 0.5 | 4.95 |
| 30° | 1.0 | 7.45 |
| | 0.9 | 7.20 |
| | 0.8 | 6.95 |
| | 0.7 | 6.70 |
| | 0.6 | 6.45 |
| | 0.5 | 6.19 |

Tab. :VII Facteur de stabilité pour un sol non homogène et anisotropique (Selon Chen)

| Facteur de Stabilité pour un sol non homogène et anisotropique | | |
|--|-----|------|
| m=55° | | |
| β (degré) | k | NS |
| 90° | 1.0 | 2.00 |
| | 0.9 | 2.00 |
| | 0.8 | 2.00 |
| | 0.7 | 2.00 |
| | 0.6 | 2.00 |
| | 0.5 | 2.00 |
| 70° | 1.0 | 2.77 |
| | 0.9 | 2.73 |
| | 0.8 | 2.69 |
| | 0.7 | 2.65 |
| | 0.6 | 2.61 |
| | 0.5 | 2.52 |
| 50° | 1.0 | 3.78 |
| | 0.9 | 3.66 |
| | 0.8 | 3.56 |
| | 0.7 | 3.45 |
| | 0.6 | 3.31 |
| | 0.5 | 3.20 |
| 30° | 1.0 | 5.50 |
| | 0.9 | 5.22 |
| | 0.8 | 5.00 |
| | 0.7 | 4.69 |
| | 0.6 | 4.41 |
| | 0.5 | 4.16 |

Pour ce cas (sol non homogène et anisotropique) nous n'avons pas calculé les facteurs de stabilités avec le logiciel Mathcad car nous avons jugés que pour une comparaison les calculs réalisés précédemment sont suffisants.

II. 5- Mécanisme de rupture sous forme de Cercle :

Dans ce paragraphe nous allons essayer de simplifier la méthode de calcul en changeant la forme de la surface de rupture, du log-spiral au cercle, tout en suivant les mêmes étapes de l'analyse limite. Ensuite calculer les valeurs du facteur de stabilité correspondantes et les comparer avec ceux que nous avons trouvé précédemment pour la surface du log-spiral.

De ce fait, et pour plus de rapidité, nous allons utiliser un logiciel de calcul mathématique intitulé « *Mathcad* » afin de trouver les valeurs des facteurs de stabilités.

II. 5- 1 Talus non incliné [Cf. :09 et Cf. :10]:

Ici contrairement à ce que nous avons vus précédemment le rayon de courbure « R » est constant ce qui va nous faciliter les calculs.

En suivant les mêmes étapes et tout en sachant que la fonction d'un cercle est la suivante :

$$R^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 - (70)$$

Avec :

(a, b) : les coordonnées du centre de rotation du cercle dans un système cartésien ;

(x, y) : les coordonnées cartésiennes ;

R : Rayon du cercle.

Nous trouvons que :

$$r_0 = r_h = R = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} - (71)$$

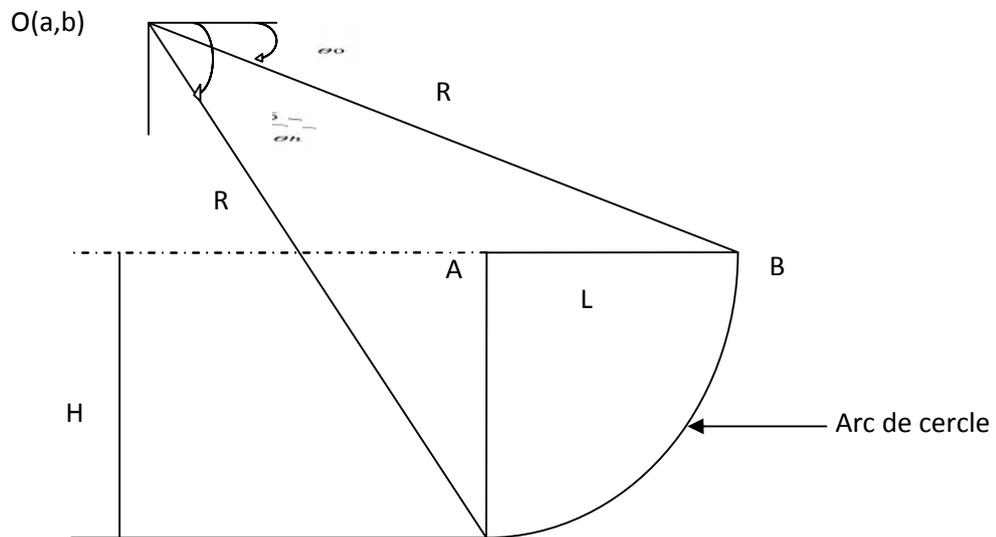


Fig. :28 Mécanisme de rupture rotationnel suivant un cercle d'un talus non incliné

A partir de la figure (Cf. Fig. :28) nous trouvons facilement ce qui suit :

$$H \approx R \sin \theta_h - R \sin \theta_0$$

$$H = R(\sin \theta_h - \sin \theta_0)$$

$$\frac{H}{R} = (\sin \theta_h - \sin \theta_0) \quad (72)$$

Et :

$$L = R \cos \theta_0 - R \cos \theta_h$$

$$\frac{L}{R} = (\cos \theta_0 - \cos \theta_h) \quad (73)$$

II. 5. 1- a) Taux de travail externe :

Et de la même manière que précédemment nous savons que le taux de travail externe total peut être divisé en une sommation comme suit :

$$\dot{W} = \dot{W}_1 - \dot{W}_2 - \dot{W}_3 - (74)$$

Où :

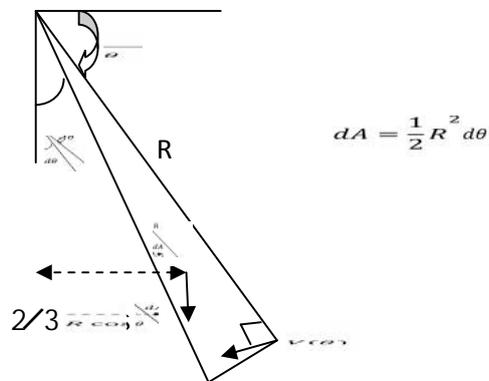
\dot{W} : taux de travail de la région (ABC) ;

\dot{W}_1 : taux de travail de la région (OBC) ;

\dot{W}_2 : taux de travail de la région (OAB) ;

\dot{W}_3 : taux de travail de la région (OAC).

1) **Région (OBC) :**



$$\dot{W}_1 = \int_{\theta_0}^{\theta_h} \left(\Omega \frac{2}{3} R \cos \theta \right) \left(\gamma \frac{1}{2} R^2 d\theta \right)$$

Et comme le rayon R n'est plus fonction de l'angle θ alors :

$$\dot{W}_1 = \frac{1}{3} \gamma R^3 \int_{\theta_0}^{\theta_h} \cos \theta d\theta$$

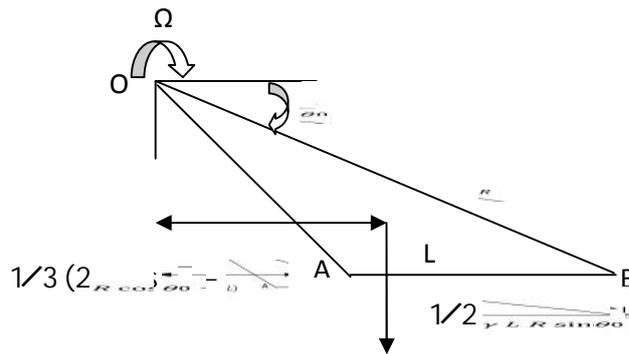
$$\dot{W}_1 = \frac{1}{3} \Omega \gamma R^3 (\sin \theta_h - \sin \theta_0)$$

$$\dot{W}_1 = \gamma R^3 \Omega f_1(\theta_h, \theta_0)$$

Où :

$$f_1(\theta_h, \theta_0) = \frac{1}{3} (\sin \theta_h - \sin \theta_0) \quad (75)$$

2) Région (OAB) :



$$\dot{W}_2 = \left(\frac{1}{2} \gamma L R \sin \theta_0 \right) \left[\frac{1}{2} (2R \cos \theta_0 - L) \right]$$

$$\dot{W}_2 = \left(\frac{1}{2} \gamma L R \sin \theta_0 \right) \left[\frac{2}{3} R \cos \theta_0 - \frac{1}{3} L \right]$$

$$\dot{W}_2 = \gamma R^3 \Omega \left[\frac{2}{6} L \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_0}{R} - \frac{1}{6} L^2 \frac{\sin \theta_0}{R^2} \right]$$

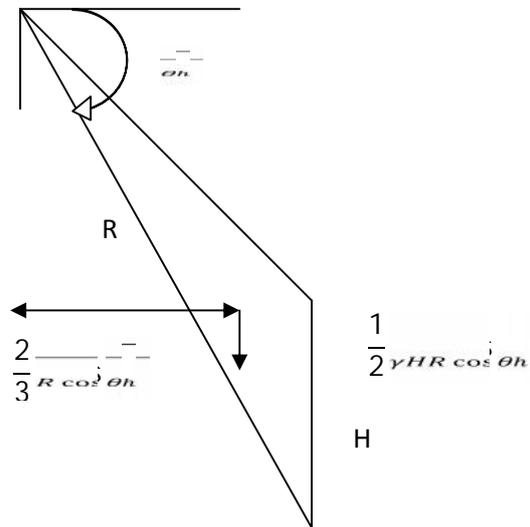
$$\dot{W}_2 = \gamma R^3 \Omega \left[\frac{1}{6} \frac{L}{R} \left(2 \cos \theta_0 - \frac{L}{R} \right) \sin \theta_0 \right]$$

$$\dot{W}_2 = \gamma R^3 \Omega f_2(\theta_h, \theta_0)$$

Où :

$$f_2(\theta_h, \theta_0) = \frac{1}{6} \frac{L}{R} \left(2 \cos \theta_0 - \frac{L}{R} \right) \sin \theta_0 \rightarrow (76)$$

3) Région (OAC) :



$$\dot{W}_3 = \left(\frac{1}{2} \gamma H R \cos \theta_h \right) \left(\frac{2}{3} R \cos \theta_h \right)$$

$$\dot{W}_3 = \frac{1}{3} \gamma H R^2 \Omega \cos^2 \theta_h$$

$$\dot{W}_3 = \gamma R^3 \Omega \left(\frac{1}{3} \frac{H}{R} \cos^2 \theta_h \right)$$

$$\dot{W}_3 = \gamma R^3 \Omega f_3(\theta_h, \theta_0)$$

où:

$$f_3(\theta_h, \theta_0) = \frac{1}{3} \frac{H}{R} \cos^2 \theta_h \rightarrow (77)$$

En remplaçant dans l'équation (74) nous trouvons :

$$\dot{W} = \gamma R^3 \Omega (f_1 - f_2 - f_3) - (78)$$

II. 5. 1- b) Taux de dissipation d'énergie interne:

La dissipation de l'énergie interne tout au long de la surface BC peut être trouvée en multipliant la surface différentielle $rd\theta / \cos\varphi$ par la cohésion « C » et par la vitesse tangentielle discontinue $V \cos \varphi$, ou ($D = C\delta u$)

La dissipation de l'énergie interne total est obtenue par l'intégration de :

$$\int_{\theta_0}^{\theta_h} C \left(\frac{Rd\theta}{\cos\varphi} \right) (V \cos \varphi) = CR \int_{\theta_0}^{\theta_h} Vd\theta = CR\Omega \rightarrow (79)$$

II. 5- 2- Talus incliné avec un mécanisme de rupture passant à travers le pied du talus:

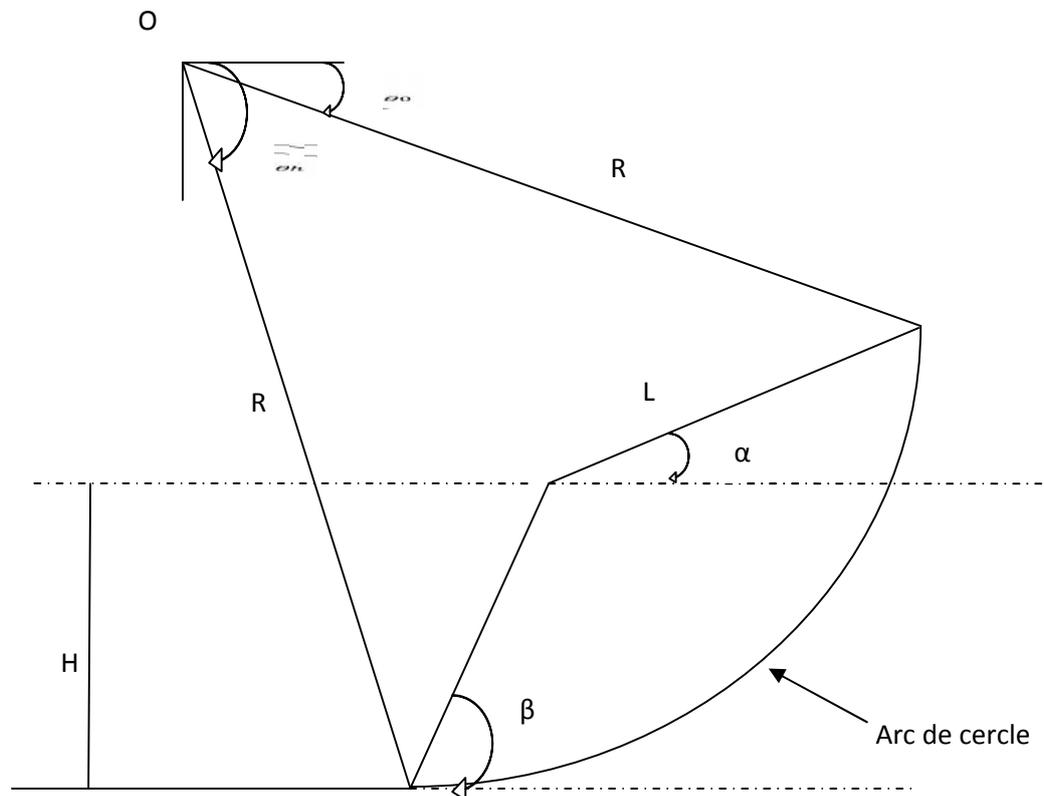


Fig. :29 Mécanisme de rupture rotationnel suivant un cercle d'un talus incliné passant à traves le pied du talus

II. 5. 2- a) Valeurs des $f_i(\theta_h, \theta_0)$:

De la même façon que précédemment nous trouvons les valeurs suivantes :

$$f_1(\theta_h, \theta_0) = \frac{1}{3}(\sin \theta_h - \sin \theta_0) \rightarrow (80)$$

$$f_2(\theta_h, \theta_0) = \frac{1}{6} \frac{L}{R} \left(2 \cos \theta_0 - \frac{L}{R} \cos \alpha \right) \sin(\theta_0 + \alpha) \rightarrow (81)$$

$$f_3(\theta_h, \theta_0) = \frac{1}{6} \left[\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{R} \sin(\theta_h + \alpha) \right] \left\{ \cos \theta_0 - \frac{L}{R} \cos \alpha \right\} \rightarrow (82)$$

$$f(\theta_h, \theta_0) = \frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \alpha) \sqrt{(f_1 - f_2 - f_3)}} \{ \sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha) \} \quad (83)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \theta_h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_0} = 0 \end{cases} \rightarrow (84)$$

$$H_c - \frac{c}{\gamma} N_s \rightarrow (85)$$

$$N_s = \min f(\theta_h, \theta_0) \quad (86)$$

II. 5. 2- b) Résultats Numériques:

En introduisant les fonctions (80), (81), (82), (83), (84), (85) et (86) dans le logiciel Mathcad nous trouvons les valeurs suivantes :

Tab. :VIII Facteur de Stabilité pour un mécanisme de rupture suivant un cercle passant à travers le pied d'un talus

| Valeurs du facteur de Stabilité suivant Mathcad | | | |
|---|---------------------|---------------------|----------------|
| $\alpha=0^\circ, \frac{c}{\gamma}=0$ | | | |
| β | θ_0 (cercle) | θ_h (cercle) | N_s (cercle) |
| 30° | 0° | 90° | 1,836 |
| 45° | 0° | 90° | 1,804 |
| 60° | 0° | 90° | 1,759 |
| 75° | 0° | 89,95° | 1,759 |
| 90° | 0° | 90° | 1,735 |

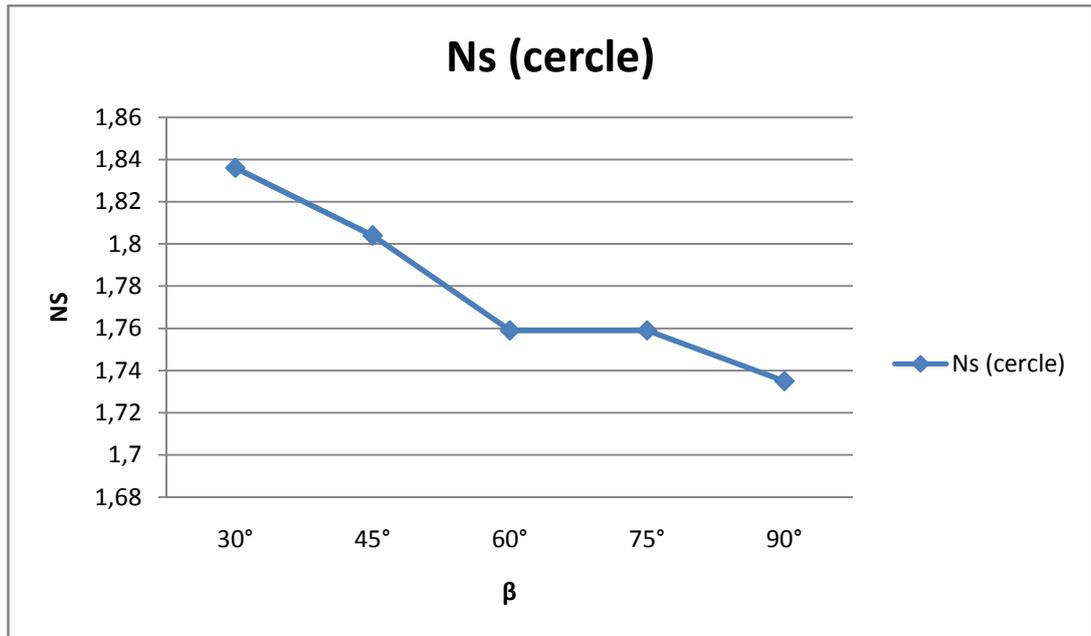


Fig. :30 Courbe du facteur de Stabilité suivant l'angle d'inclinaison β d'un mécanisme de rupture sous forme de cercle passant à travers le pied du talus pour $\alpha = 0$ (Selon Mathcad).

Chapitre III : Discussion des résultats

III. 1- Mécanisme de rupture Log-Spiral passant à travers le pied d'un talus incliné :

Les résultats des facteurs de stabilités obtenus pour un mécanisme de rupture los-spiral passant à travers le pied du talus pour un angle d'inclinaison $\alpha = 0$ et , $\phi=20$ sont représentés dans le tableau suivant (Cf. Tab. :IX) :

Tab. :IX Comparaison des Facteurs de stabilités pour un mécanisme de rupture log-spiral passant à travers le pied d'un talus

| Valeur du facteur de stabilité | | | | |
|--------------------------------|--------------------|--------------------|---------------|--------------|
| selon Mathcad | | | | selon Chen |
| β (degré) | θ_0 (degré) | θ_h (degré) | Ns | Ns |
| 30° | 54° | 107° | 41,351 | 41,27 |
| 45° | 40° | 101° | 16,188 | 16,18 |
| 60° | 35° | 90° | 10,396 | 10,39 |
| 75° | 34° | 79° | 7,485 | 7,48 |
| 90° | 40° | 65° | 5,512 | 5,51 |

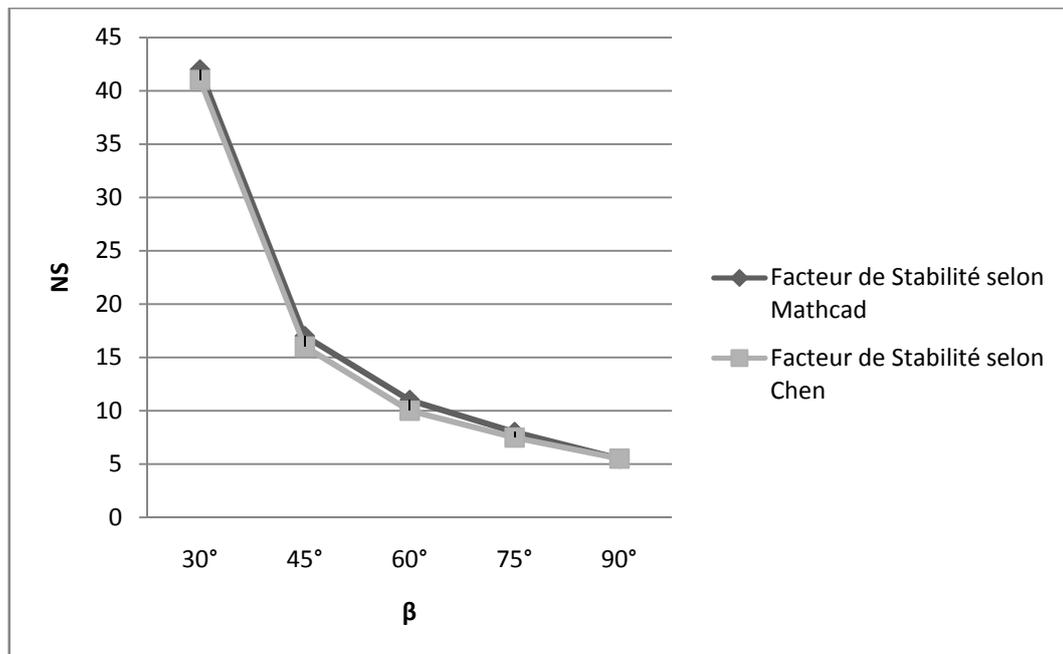


Fig. :31 Comparaison des Facteurs de Stabilités pour un mécanisme de rupture log-spiral passant à travers le pied d'un talus

Le graphique montre très clairement une superposition des deux lignes représentant les facteurs de Stabilités pour un mécanisme de rupture log-spiral passant à travers le pied du talus pour un angle d'inclinaison $\alpha = 0$, en gris pour Chen et en noir pour Mathcad, de telle manière qu'on ne peut bien distinguer la courbe noir (selon Mathcad).

Ce qui montre que les résultats que nous avons obtenus en utilisant le logiciel Mathcad correspondent parfaitement à ceux qu'a obtenu Chen et ce pour les mêmes hypothèses.

III. 2- Mécanisme de rupture Log-Spiral passant sous le pied d'un talus incliné :

Les résultats des facteurs de Stabilités obtenus pour un mécanisme de rupture los-spiral passant sous le pied du talus pour un angle d'inclinaison $\alpha = 0$ et $\phi=5$ sont représentés dans le tableau suivant (Cf. Tab. :X) :

Tab. :X Comparaison des Facteurs de Stabilités pour un mécanisme de rupture log-spiral passant sous le pied d'un talus

| Valeur du facteur de stabilité | | | | | |
|--------------------------------|-------------------|--------------------|--------------------|---------------|--------------|
| selon Mathcad | | | | | selon Chen |
| β (degré) | β_1 (degré) | θ_0 (degré) | θ_h (degré) | Ns | Ns |
| 15° | 11,1 | 36 | 135,2 | 14,382 | 14,38 |
| 20° | 16,7 | 30 | 133,2 | 11,477 | 11,46 |
| 25° | 22,5 | 24,8 | 130 | 10,055 | 10,02 |
| 30° | 29 | 24 | 122 | 9,152 | 9,13 |
| 35° | 35 | 23,2 | 112 | 8,423 | 8,41 |
| 40° | 40 | 23,2 | 108 | 7,842 | 7,84 |
| 45° | 45 | 23,2 | 104 | 7,360 | 7,35 |
| 50° | 50 | 23,2 | 100 | 6,936 | 6,92 |

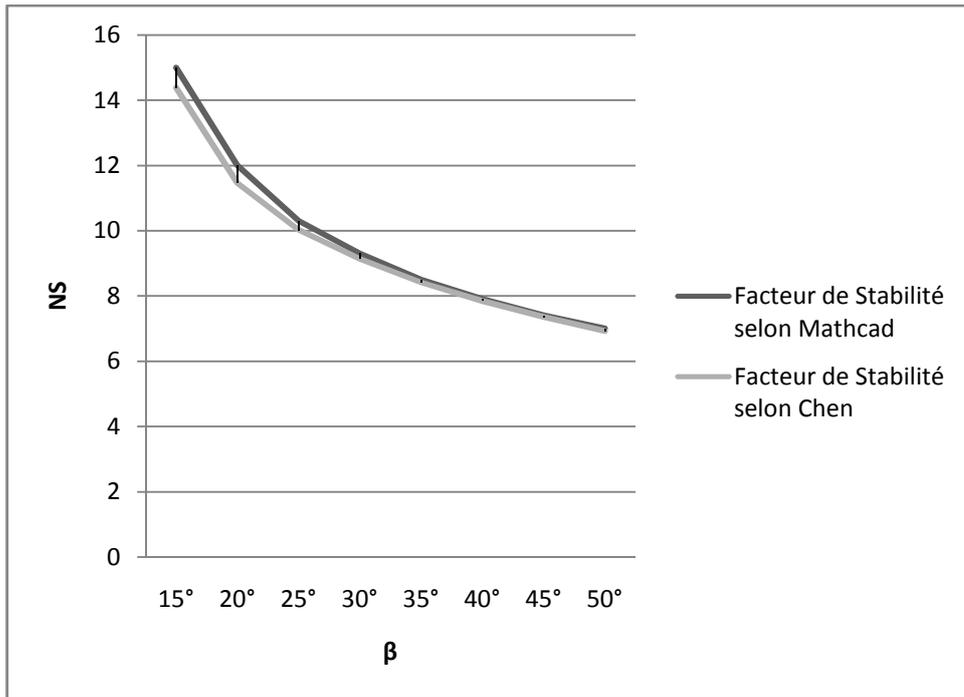


Fig. :32 Comparaison des Facteurs de Stabilités pour un mécanisme de rupture log-spiral passant sous le pied d'un talus

Le graphique montre très clairement une superposition des deux lignes représentant les facteurs de Stabilités pour un mécanisme de rupture log-spiral passant sous le pied du talus pour un angle d'inclinaison $\alpha = 0$, en gris pour Chen et en noir pour Mathcad, de telle manière qu'on ne peut distinguer la courbe noir (selon Mathcad).

Ce qui montre que les résultats que nous avons obtenus en utilisant le logiciel Mathcad correspondent parfaitement à ceux qu'a obtenu Chen et ce pour les mêmes hypothèses.

III. 3- Mécanisme de rupture sous forme de cercle passant à travers le pied d'un talus incliné :

Les résultats des facteurs de Stabilités obtenus pour un mécanisme de rupture sous forme d'un cercle passant à travers le pied du talus pour un angle d'inclinaison $\alpha = 0^\circ$ et $\phi=20^\circ$ sont représentés dans le tableau suivant (Cf. Tab. :XI) :

Tab. :XI Comparaison des Facteurs de Stabilités pour un mécanisme de rupture log-spiral et celui d'un cercle passant à travers le pied d'un talus

| Valeur du facteur de stabilité | | | | | |
|--------------------------------|---------------------|---------------------|--------------|-----------------|-----------------|
| selon Mathcad | | | | | selon Chen |
| β | θ_0 (cercle) | θ_h (cercle) | Ns (cercle) | Ns (log spiral) | Ns (log spiral) |
| 30° | 44° | 100° | 1,836 | 41,351 | 41,27 |
| 45° | 43° | 99° | 1,804 | 16,188 | 16,18 |
| 60° | 43° | 99° | 1,759 | 10,396 | 10,39 |
| 75° | 44° | 100° | 1,759 | 7,485 | 7,48 |
| 90° | 44° | 100° | 1,735 | 5,512 | 5,51 |

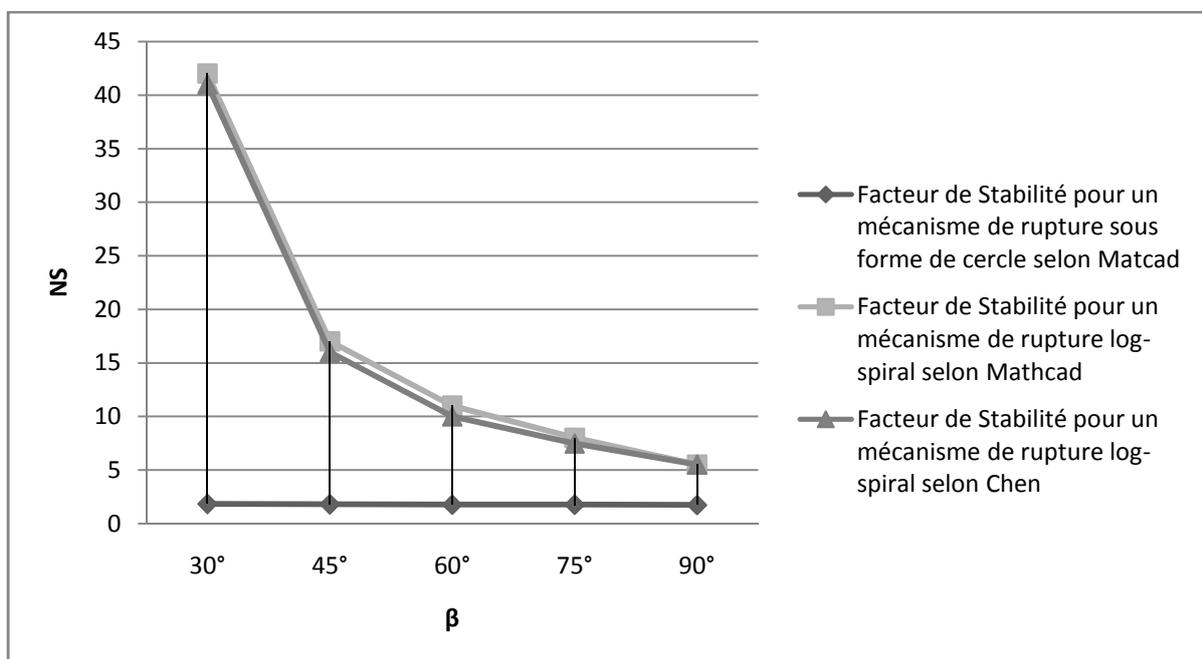


Fig. :33 Comparaison des Facteurs de Stabilité entre un mécanisme de rupture log-spiral et celui du cercle passant à travers le pied d'un talus

Ici nous voyons très clairement que la ligne gris clair, à savoir celle du mécanisme de rupture sous forme de cercle passant à travers le pied du talus, est très loin de correspondre à celle des lignes du mécanisme de rupture log-spiral passant à travers le pied du talus.

Ce qui montre que les résultats que nous avons obtenus pour la surface de rupture sous forme de cercle en utilisant le logiciel Mathcad ne correspondent en rien à ceux qu'a obtenu pour la surface log-spiral.

Au vu des résultats que nous avons trouvés lors de notre travail, nous pouvons déduire ce qui suit :

- 1) Concernant le premier objectif à savoir, la comparaison des facteurs de stabilités pour un mécanisme de rupture rotationnel log-spiral entre ceux de Mathcad et ceux de l'auteur, nous avons trouvé qu'ils correspondent les uns aux autres que ce soit pour un mécanisme de rupture rotationnel log-spiral passant à travers le pied du talus ou sous son pied.

Et comme les résultats de l'auteur correspondent à ceux d'autres méthodes, nous pouvons en conclure que les résultats des facteurs de stabilités que nous avons trouvés correspondent eux aussi à la réalité.

- 2) Concernant le dernier objectif à savoir, la comparaison des facteurs de stabilités entre un mécanisme de rupture rotationnel log spiral et celui sous forme de cercle passant à travers le pied du talus, les résultats obtenus sont loin de correspondre les uns aux autres.

Nous pouvons en conclure que, la forme du mécanisme rotationnel pour un corps rigide et suivant la méthode de la borne supérieure de l'analyse limite ne peut en aucun cas être de forme circulaire mais que seule la forme log-spiral est acceptée pour cette méthode. Ce qui confirme l'hypothèse de la Surface de discontinuité d'un matériau de COULOMB standard (Cf. I.3- 3- b. page 23) qui dit : « Quand un corps rigide effectue une rotation par rapport à un autre corps rigide, alors la surface de transition (ou de rupture) ne peut être en aucun cas limitée par deux cercles concentriques mais par deux spirales logarithmiques.

La méthode de la borne supérieure de l'analyse limite de Chen nous apparaît comme étant une méthode relativement facile à utiliser d'autant plus qu'il existe actuellement de nombreux logiciels performants et à la portée de tous. Ce qui n'était pas le cas il y a 50 ans !

Nos résultats montrent aussi que cette méthode englobe la majorité des cas qu'un ingénieur peut rencontrer lors d'une résolution d'un problème de stabilité.

Les résultats que nous avons obtenus dans notre travail n'ont pas fait l'objet d'une application sur site ou en laboratoire, ça reste un travail théorique. Une future application de ses résultats peut, éventuellement, constituer un bon sujet de thèse pour un doctorat.

III. 4- Conclusion:

La théorie de la borne supérieure de l'analyse limite appliquée à la stabilité des talus est une Méthode relativement facile à utiliser. Il suffit simplement d'avoir de bonnes bases en géométrie et en mathématique. D'autant plus qu'il existe un large choix de logiciels mathématiques performants et accessibles.

Ce qui est le plus intéressant avec cette méthode c'est son champ d'application qui est très vaste. Car, peu importe la complexité des formes d'un talus ou les composantes de son sol, il est toujours possible d'avoir les facteurs de stabilité correspondants et donc les hauteurs critiques.

La théorie de l'analyse limite ne se limite pas aux facteurs de stabilités des talus. Elle fournit également la capacité portante des fondations (semelles isolées, filantes, rectangulaires, circulaires), les pressions actives et passives des terres sur des murs de soutènements, la capacité portante d'un bloc de béton ou d'une roche...etc.

Les résultats que donne cette méthode reflètent la réalité. Ce qui la rend compétitive avec les autres méthodes

La conclusion que nous pouvons tirer de ce modeste travail, est :

La méthode de l'analyse limite est relativement facile à utiliser avec un large champ d'application. Elle permet de résoudre un grand nombre de problèmes de stabilités qu'un ingénieur peut rencontrer au cours de sa carrière. Elle est incontournable.

Pour conclure nous reprenons un passage de l'auteur du livre « limit analysis and soil plasticity » page 3 :

«...Although the limit analysis method were established firmly less than twenty years ago, there has been an enormous number of applications in a wide variety of field from metal deformation processing to the design of reinforced concrete structures ». Cette affirmation reste toujours d'actualité.

Annexes

Facteur de sécurité d'un mécanisme de rupture log-spiral pour un talus incliné passant à travers le pied du talus suivant Mathcad

1) Pour une valeur de $\beta = 30^\circ$:

$$\alpha := 0 \quad \phi := \frac{\pi}{9} \quad \beta := \frac{\pi}{6} \quad L := 1$$

$$r(\theta_0, \theta_h) := \frac{L}{\frac{\sin(\theta_h - \theta_0)}{\sin(\theta_h + \alpha)} - \frac{\sin(\theta_h + \beta)}{\sin(\theta_h + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)} \left[e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]}$$

$$f1(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{3 \cdot (1 + 9 \tan(\phi)^2)} \cdot \left[(3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_h) + \sin(\theta_h)) e^{3 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - (3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_0) + \sin(\theta_0)) \right]$$

$$f2(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \left(2 \cdot \cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \sin(\theta_0 + \alpha)$$

$$f3(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \left(\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) \right) \cdot \left[\cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) + \cos(\theta_h) e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \right]$$

$$f(\theta_0, \theta_h) := \frac{\sin(\beta) \cdot \left[e^{2 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - 1 \right]}{2 \cdot \sin(\beta - \alpha) \cdot \tan(\phi) \cdot (f1(\theta_0, \theta_h) - f2(\theta_0, \theta_h) - f3(\theta_0, \theta_h))} \cdot \left[\sin(\theta_h + \alpha) e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]$$

$$\theta_0 := 0.942 \quad \theta_h := 1.868$$

$$N := \min(f(\theta_0, \theta_h))$$

$$N = 41.351$$

2) Pour une valeur de $\beta = 45^\circ$:

$$\alpha := 0 \quad \phi := \frac{\pi}{9} \quad \beta := \frac{\pi}{4} \quad \underline{L} := 1$$

$$r(\theta_0, \theta_h) := \frac{L}{\frac{\sin(\theta_h - \theta_0)}{\sin(\theta_h + \alpha)} - \frac{\sin(\theta_h + \beta)}{\sin(\theta_h + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)}} \left[e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]$$

$$f1(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{3 \cdot (1 + 9 \tan(\phi)^2)} \cdot \left[(3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_h) + \sin(\theta_h)) e^{3 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - (3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_0) + \sin(\theta_0)) \right]$$

$$f2(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \left(2 \cdot \cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \sin(\theta_0 + \alpha)$$

$$f3(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \left(\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) \right) \cdot \left[\cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) + \cos(\theta_h) e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \right]$$

$$f(\theta_0, \theta_h) := \frac{\sin(\beta) \cdot \left[e^{2 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - 1 \right]}{2 \cdot \sin(\beta - \alpha) \cdot \tan(\phi) \cdot (f1(\theta_0, \theta_h) - f2(\theta_0, \theta_h) - f3(\theta_0, \theta_h))} \cdot \left[\sin(\theta_h + \alpha) e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]$$

$$\theta_0 := 0.698 \quad \theta_h := 1.763$$

$$\underline{N} := \min(f(\theta_0, \theta_h))$$

$$N = 16.188$$

3) Pour une valeur de $\beta = 60^\circ$:

$$\alpha := 0 \quad \phi := \frac{\pi}{9} \quad \beta := \frac{\pi}{3} \quad \underline{L} := 1$$

$$r(\theta_0, \theta_h) := \frac{L}{\frac{\sin(\theta_h - \theta_0)}{\sin(\theta_h + \alpha)} - \frac{\sin(\theta_h + \beta)}{\sin(\theta_h + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)}} \left[e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]$$

$$f1(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{3 \cdot (1 + 9 \tan(\phi)^2)} \cdot \left[(3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_h) + \sin(\theta_h)) e^{3 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - (3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_0) + \sin(\theta_0)) \right]$$

$$f2(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \left(2 \cdot \cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \sin(\theta_0 + \alpha)$$

$$f3(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \left(\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) \right) \cdot \left[\cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) + \cos(\theta_h) e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \right]$$

$$f(\theta_0, \theta_h) := \frac{\sin(\beta) \cdot \left[e^{2 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - 1 \right]}{2 \cdot \sin(\beta - \alpha) \cdot \tan(\phi) \cdot (f1(\theta_0, \theta_h) - f2(\theta_0, \theta_h) - f3(\theta_0, \theta_h))} \cdot \left[\sin(\theta_h + \alpha) e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]$$

$$\theta_0 := 0.611 \quad \theta_h := 1.571$$

$$\underline{N} := \min(f(\theta_0, \theta_h))$$

$$N = 10.396$$

4) Pour une valeur de $\beta = 75^\circ$:

$$\alpha := 0 \quad \phi := \frac{\pi}{9} \quad \beta := \frac{\pi}{2.4} \quad \underline{L} := 1$$

$$r(\theta_0, \theta_h) := \frac{L}{\frac{\sin(\theta_h - \theta_0)}{\sin(\theta_h + \alpha)} - \frac{\sin(\theta_h + \beta)}{\sin(\theta_h + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)} \left[e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]}$$

$$f1(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{3 \cdot (1 + 9 \tan(\phi)^2)} \cdot \left[(3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_h) + \sin(\theta_h)) e^{3 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - (3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_0) + \sin(\theta_0)) \right]$$

$$f2(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \left(2 \cdot \cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \sin(\theta_0 + \alpha)$$

$$f3(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \left(\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) \right) \cdot \left[\cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) + \cos(\theta_h) e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \right]$$

$$f(\theta_0, \theta_h) := \frac{\sin(\beta) \cdot \left[e^{2 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - 1 \right]}{2 \cdot \sin(\beta - \alpha) \cdot \tan(\phi) \cdot (f1(\theta_0, \theta_h) - f2(\theta_0, \theta_h) - f3(\theta_0, \theta_h))} \cdot \left[\sin(\theta_h + \alpha) e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]$$

$$\theta_0 := 0.59\text{rad} \quad \theta_h := 1.37\text{rad}$$

$$\underline{N} := \min(f(\theta_0, \theta_h))$$

$$N = 7.485$$

5) Pour une valeur de $\beta = 90^\circ$:

$$\alpha := 0 \quad \phi := \frac{\pi}{9} \quad \beta := \frac{\pi}{2} \quad \underline{L} := 1$$

$$r(\theta_0, \theta_h) := \frac{L}{\frac{\sin(\theta_h - \theta_0)}{\sin(\theta_h + \alpha)} - \frac{\sin(\theta_h + \beta)}{\sin(\theta_h + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)} \left[e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]}$$

$$f_1(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{3 \cdot (1 + 9 \tan^2(\phi))} \cdot \left[(3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_h) + \sin(\theta_h)) e^{3 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - (3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_0) + \sin(\theta_0)) \right]$$

$$f_2(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \left(2 \cdot \cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \sin(\theta_0 + \alpha)$$

$$f_3(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \left(\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) \right) \cdot \left[\cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) + \cos(\theta_h) e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \right]$$

$$f(\theta_0, \theta_h) := \frac{\sin(\beta) \cdot \left[e^{2 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - 1 \right]}{2 \cdot \sin(\beta - \alpha) \cdot \tan(\phi) \cdot (f_1(\theta_0, \theta_h) - f_2(\theta_0, \theta_h) - f_3(\theta_0, \theta_h))} \cdot \left[\sin(\theta_h + \alpha) e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]$$

$$\theta_0 := 0.698 \quad \theta_h := 1.134$$

$$\underline{N} := \min(f(\theta_0, \theta_h))$$

$$N = 5.512$$

Facteur de sécurité d'un mécanisme de rupture log-spiral pour un talus incliné passant sous le pied d'un talus suivant Mathcad

1) Pour une valeur de $\beta = 15^\circ$:

$$\alpha := 0 \quad \phi := \frac{\pi}{36} \quad \beta := \frac{\pi}{12} \quad \underline{L} := 1 \quad \beta_1 := \frac{\pi}{16.216}$$

$$r(\theta_0, \theta_h) := \frac{L}{\frac{\sin(\theta_h - \theta_0)}{\sin(\theta_h + \alpha)} - \frac{\sin(\theta_h + \beta)}{\sin(\theta_h + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)}} \left[e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]$$

$$\underline{H}(\theta_0, \theta_h) := \frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)} \left[\sin(\theta_h + \alpha) \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - \sin(\theta_0 + \alpha) \right] \cdot r(\theta_0, \theta_h)$$

$$f_1(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{3 \cdot (1 + 9 \tan^2(\phi))} \left[(3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_h) + \sin(\theta_h)) e^{3 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - (3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_0) + \sin(\theta_0)) \right]$$

$$f_2(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \left(2 \cdot \cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \sin(\theta_0 + \alpha)$$

$$f_3(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \left(\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) \right) \cdot \left[\cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) + \cos(\theta_h) e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \right]$$

$$f_4(\theta_0, \theta_h) := \left(\frac{H(\theta_0, \theta_h)}{r(\theta_0, \theta_h)} \right)^2 \cdot \frac{\sin(\beta - \beta_1)}{2 \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\beta_1)} \left[\cos(\theta_0) - \left(\frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{H(\theta_0, \theta_h)}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot (\cot(\beta_1) + \cot(\beta)) \right]$$

$$f(\theta_0, \theta_h) := \frac{\sin(\beta_1) \cdot \left[e^{[2 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)]} - 1 \right]}{2 \cdot \sin(\beta_1 - \alpha) \cdot \tan(\phi) \cdot (f_1(\theta_0, \theta_h) - f_2(\theta_0, \theta_h) - f_3(\theta_0, \theta_h) - f_4(\theta_0, \theta_h))} \cdot \left[\sin(\theta_h + \alpha) \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]$$

$$\theta_0 := 0.628 \quad \theta_h := 2.36$$

$$\underline{N} := \min(f(\theta_0, \theta_h))$$

$$N = 14.382$$

2) Pour une valeur de $\beta = 20^\circ$:

$$\alpha := 0 \quad \phi := \frac{\pi}{36} \quad \beta := \frac{\pi}{9} \quad \underline{L} := 1 \quad \beta_1 := \frac{\pi}{10.778}$$

$$r(\theta_0, \theta_h) := \frac{L}{\frac{\sin(\theta_h - \theta_0)}{\sin(\theta_h + \alpha)} - \frac{\sin(\theta_h + \beta)}{\sin(\theta_h + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)} \left[e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]}$$

$$\underline{H}(\theta_0, \theta_h) := \frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)} \cdot \left[\sin(\theta_h + \alpha) \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - \sin(\theta_0 + \alpha) \right] \cdot r(\theta_0, \theta_h)$$

$$f_1(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{3 \cdot (1 + 9 \tan(\phi)^2)} \cdot \left[(3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_h) + \sin(\theta_h)) e^{3 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - (3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_0) + \sin(\theta_0)) \right]$$

$$f_2(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \left(2 \cdot \cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \sin(\theta_0 + \alpha)$$

$$f_3(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \left(\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) \right) \cdot \left[\cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) + \cos(\theta_h) e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \right]$$

$$f_4(\theta_0, \theta_h) := \left(\frac{H(\theta_0, \theta_h)}{r(\theta_0, \theta_h)} \right)^2 \cdot \frac{\sin(\beta - \beta_1)}{2 \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\beta_1)} \cdot \left[\cos(\theta_0) - \left(\frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{H(\theta_0, \theta_h)}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot (\cot(\beta_1) + \cot(\beta)) \right]$$

$$f(\theta_0, \theta_h) := \frac{\sin(\beta_1) \cdot \left[e^{[2 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)]} - 1 \right]}{2 \cdot \sin(\beta_1 - \alpha) \cdot \tan(\phi) \cdot (f_1(\theta_0, \theta_h) - f_2(\theta_0, \theta_h) - f_3(\theta_0, \theta_h) - f_4(\theta_0, \theta_h))} \cdot \left[\sin(\theta_h + \alpha) \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]$$

$$\theta_0 := 0.52^\circ \quad \theta_h := 2.32^\circ$$

$$\underline{N} := \min(f(\theta_0, \theta_h))$$

$$N = 11.477$$

3) Pour une valeur de $\beta = 25^\circ$:

$$\alpha := 0 \quad \phi := \frac{\pi}{36} \quad \beta := \frac{\pi}{7.2} \quad \underline{L} := 1 \quad \beta_1 := \frac{\pi}{8}$$

$$r(\theta_0, \theta_h) := \frac{L}{\frac{\sin(\theta_h - \theta_0)}{\sin(\theta_h + \alpha)} - \frac{\sin(\theta_h + \beta)}{\sin(\theta_h + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)} \left[e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]}$$

$$\underline{H}(\theta_0, \theta_h) := \frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)} \cdot \left[\sin(\theta_h + \alpha) \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - \sin(\theta_0 + \alpha) \right] \cdot r(\theta_0, \theta_h)$$

$$f1(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{3 \cdot (1 + 9 \tan(\phi)^2)} \cdot \left[(3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_h) + \sin(\theta_h)) e^{3 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - (3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_0) + \sin(\theta_0)) \right]$$

$$f2(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \left(2 \cdot \cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \sin(\theta_0 + \alpha)$$

$$f3(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \left(\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) \right) \cdot \left[\cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) + \cos(\theta_h) e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \right]$$

$$f4(\theta_0, \theta_h) := \left(\frac{H(\theta_0, \theta_h)}{r(\theta_0, \theta_h)} \right)^2 \cdot \frac{\sin(\beta - \beta_1)}{2 \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\beta_1)} \cdot \left[\cos(\theta_0) - \left(\frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{H(\theta_0, \theta_h)}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot (\cot(\beta_1) + \cot(\beta)) \right]$$

$$f(\theta_0, \theta_h) := \frac{\sin(\beta_1) \cdot \left[e^{[2 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)]} - 1 \right]}{2 \cdot \sin(\beta_1 - \alpha) \cdot \tan(\phi) \cdot (f1(\theta_0, \theta_h) - f2(\theta_0, \theta_h) - f3(\theta_0, \theta_h) - f4(\theta_0, \theta_h))} \cdot \left[\sin(\theta_h + \alpha) \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]$$

$$\theta_0 := 0.43 \quad \theta_h := 2.26$$

$$\underline{N} := \min(f(\theta_0, \theta_h))$$

$$N = 10.055$$

4) Pour une valeur de $\beta = 30^\circ$:

$$\alpha := 0 \quad \phi := \frac{\pi}{36} \quad \beta := \frac{\pi}{6} \quad \underline{L} := 1 \quad \beta_1 := \frac{\pi}{6.207}$$

$$r(\theta_0, \theta_h) := \frac{L}{\frac{\sin(\theta_h - \theta_0)}{\sin(\theta_h + \alpha)} - \frac{\sin(\theta_h + \beta)}{\sin(\theta_h + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)}} \left[e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]$$

$$\underline{H}(\theta_0, \theta_h) := \frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)} \cdot \left[\sin(\theta_h + \alpha) \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - \sin(\theta_0 + \alpha) \right] \cdot r(\theta_0, \theta_h)$$

$$f_1(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{3 \cdot (1 + 9 \tan^2(\phi))} \cdot \left[(3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_h) + \sin(\theta_h)) e^{3 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - (3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_0) + \sin(\theta_0)) \right]$$

$$f_2(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \left(2 \cdot \cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \sin(\theta_0 + \alpha)$$

$$f_3(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \left(\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) \right) \cdot \left[\cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) + \cos(\theta_h) e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \right]$$

$$f_4(\theta_0, \theta_h) := \left(\frac{H(\theta_0, \theta_h)}{r(\theta_0, \theta_h)} \right)^2 \cdot \frac{\sin(\beta - \beta_1)}{2 \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\beta_1)} \cdot \left[\cos(\theta_0) - \left(\frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{H(\theta_0, \theta_h)}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot (\cot(\beta_1) + \cot(\beta)) \right]$$

$$f(\theta_0, \theta_h) := \frac{\sin(\beta_1) \cdot \left[e^{[2 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)]} - 1 \right]}{2 \cdot \sin(\beta_1 - \alpha) \cdot \tan(\phi) \cdot (f_1(\theta_0, \theta_h) - f_2(\theta_0, \theta_h) - f_3(\theta_0, \theta_h) - f_4(\theta_0, \theta_h))} \cdot \left[\sin(\theta_h + \alpha) \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]$$

$$\theta_0 := 0.415 \quad \theta_h := 2.125$$

$$\underline{N} := \min(f(\theta_0, \theta_h))$$

$$N = 9.152$$

5) Pour une valeur de $\beta = 35^\circ$:

$$\alpha := 0 \quad \phi := \frac{\pi}{36} \quad \beta := \frac{\pi}{5.143} \quad \underline{L} := 1 \quad \beta_1 := \frac{\pi}{5.143}$$

$$r(\theta_0, \theta_h) := \frac{L}{\frac{\sin(\theta_h - \theta_0)}{\sin(\theta_h + \alpha)} - \frac{\sin(\theta_h + \beta)}{\sin(\theta_h + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)} \left[e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]}$$

$$\underline{H}(\theta_0, \theta_h) := \frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)} \cdot \left[\sin(\theta_h + \alpha) \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - \sin(\theta_0 + \alpha) \right] \cdot r(\theta_0, \theta_h)$$

$$f_1(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{3 \cdot (1 + 9 \tan(\phi)^2)} \cdot \left[(3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_h) + \sin(\theta_h)) e^{3 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - (3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_0) + \sin(\theta_0)) \right]$$

$$f_2(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \left(2 \cdot \cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \sin(\theta_0 + \alpha)$$

$$f_3(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \left(\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) \right) \cdot \left[\cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) + \cos(\theta_h) e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \right]$$

$$f_4(\theta_0, \theta_h) := \left(\frac{H(\theta_0, \theta_h)}{r(\theta_0, \theta_h)} \right)^2 \cdot \frac{\sin(\beta - \beta_1)}{2 \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\beta_1)} \cdot \left[\cos(\theta_0) - \left(\frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{H(\theta_0, \theta_h)}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot (\cot(\beta_1) + \cot(\beta)) \right]$$

$$f(\theta_0, \theta_h) := \frac{\sin(\beta_1) \cdot \left[e^{[2 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)]} - 1 \right]}{2 \cdot \sin(\beta_1 - \alpha) \cdot \tan(\phi) \cdot (f_1(\theta_0, \theta_h) - f_2(\theta_0, \theta_h) - f_3(\theta_0, \theta_h) - f_4(\theta_0, \theta_h))} \cdot \left[\sin(\theta_h + \alpha) \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]$$

$$\theta_0 := 0.40^\circ \quad \theta_h := 1.95^\circ$$

$$\underline{N} := \min(f(\theta_0, \theta_h))$$

$$N = 8.423$$

6) Pour une valeur de $\beta = 40^\circ$:

$$\alpha := 0 \quad \phi := \frac{\pi}{36} \quad \beta := \frac{\pi}{4.5} \quad \underline{L} := 1 \quad \beta_1 := \frac{\pi}{4.5}$$

$$r(\theta_0, \theta_h) := \frac{L}{\frac{\sin(\theta_h - \theta_0)}{\sin(\theta_h + \alpha)} - \frac{\sin(\theta_h + \beta)}{\sin(\theta_h + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)} \left[e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]}$$

$$\underline{H}(\theta_0, \theta_h) := \frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)} \cdot \left[\sin(\theta_h + \alpha) \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - \sin(\theta_0 + \alpha) \right] \cdot r(\theta_0, \theta_h)$$

$$f1(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{3 \cdot (1 + 9 \tan(\phi)^2)} \cdot \left[(3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_h) + \sin(\theta_h)) e^{3 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - (3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_0) + \sin(\theta_0)) \right]$$

$$f2(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \left(2 \cdot \cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \sin(\theta_0 + \alpha)$$

$$f3(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \left(\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) \right) \cdot \left[\cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) + \cos(\theta_h) e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \right]$$

$$f4(\theta_0, \theta_h) := \left(\frac{H(\theta_0, \theta_h)}{r(\theta_0, \theta_h)} \right)^2 \cdot \frac{\sin(\beta - \beta_1)}{2 \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\beta_1)} \cdot \left[\cos(\theta_0) - \left(\frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{H(\theta_0, \theta_h)}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot (\cot(\beta_1) + \cot(\beta)) \right]$$

$$f(\theta_0, \theta_h) := \frac{\sin(\beta_1) \cdot \left[e^{[2 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)]} - 1 \right]}{2 \cdot \sin(\beta_1 - \alpha) \cdot \tan(\phi) \cdot (f1(\theta_0, \theta_h) - f2(\theta_0, \theta_h) - f3(\theta_0, \theta_h) - f4(\theta_0, \theta_h))} \cdot \left[\sin(\theta_h + \alpha) \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]$$

$$\theta_0 := 0.40^\circ \quad \theta_h := 1.88^\circ$$

$$\underline{N} := \min(f(\theta_0, \theta_h))$$

$$N = 7.842$$

7) Pour une valeur de $\beta = 45^\circ$:

$$\alpha := 0 \quad \phi := \frac{\pi}{36} \quad \beta := \frac{\pi}{4} \quad \underline{L} := 1 \quad \beta_1 := \frac{\pi}{4}$$

$$r(\theta_0, \theta_h) := \frac{L}{\frac{\sin(\theta_h - \theta_0)}{\sin(\theta_h + \alpha)} - \frac{\sin(\theta_h + \beta)}{\sin(\theta_h + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)}} \left[e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]$$

$$\underline{H}(\theta_0, \theta_h) := \frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)} \cdot \left[\sin(\theta_h + \alpha) \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - \sin(\theta_0 + \alpha) \right] \cdot r(\theta_0, \theta_h)$$

$$f1(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{3 \cdot (1 + 9 \tan(\phi)^2)} \cdot \left[(3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_h) + \sin(\theta_h)) e^{3 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - (3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_0) + \sin(\theta_0)) \right]$$

$$f2(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \left(2 \cdot \cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \sin(\theta_0 + \alpha)$$

$$f3(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \left(\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) \right) \cdot \left[\cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) + \cos(\theta_h) e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \right]$$

$$f4(\theta_0, \theta_h) := \left(\frac{H(\theta_0, \theta_h)}{r(\theta_0, \theta_h)} \right)^2 \cdot \frac{\sin(\beta - \beta_1)}{2 \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\beta_1)} \cdot \left[\cos(\theta_0) - \left(\frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{H(\theta_0, \theta_h)}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot (\cot(\beta_1) + \cot(\beta)) \right]$$

$$f(\theta_0, \theta_h) := \frac{\sin(\beta_1) \cdot \left[e^{[2 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)]} - 1 \right]}{2 \cdot \sin(\beta_1 - \alpha) \cdot \tan(\phi) \cdot (f1(\theta_0, \theta_h) - f2(\theta_0, \theta_h) - f3(\theta_0, \theta_h) - f4(\theta_0, \theta_h))} \cdot \left[\sin(\theta_h + \alpha) \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]$$

$$\theta_0 := 0.40^\circ \quad \theta_h := 1.81^\circ$$

$$\underline{N} := \min(f(\theta_0, \theta_h))$$

$$N = 7.36$$

8) Pour une valeur de $\beta = 50^\circ$:

$$\alpha := 0 \quad \phi := \frac{\pi}{36} \quad \beta := \frac{\pi}{3.6} \quad \underline{L} := 1 \quad \beta_1 := \frac{\pi}{3.6}$$

$$r(\theta_0, \theta_h) := \frac{L}{\frac{\sin(\theta_h - \theta_0)}{\sin(\theta_h + \alpha)} - \frac{\sin(\theta_h + \beta)}{\sin(\theta_h + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)} \left[e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]}$$

$$\underline{H}(\theta_0, \theta_h) := \frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)} \cdot \left[\sin(\theta_h + \alpha) \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - \sin(\theta_0 + \alpha) \right] \cdot r(\theta_0, \theta_h)$$

$$f_1(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{3 \cdot (1 + 9 \tan^2(\phi))} \cdot \left[(3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_h) + \sin(\theta_h)) e^{3 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - (3 \cdot \tan(\phi) \cdot \cos(\theta_0) + \sin(\theta_0)) \right]$$

$$f_2(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \left(2 \cdot \cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \sin(\theta_0 + \alpha)$$

$$f_3(\theta_0, \theta_h) := \frac{1}{6} \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \cdot \left(\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) \right) \cdot \left[\cos(\theta_0) - \frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) + \cos(\theta_h) e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} \right]$$

$$f_4(\theta_0, \theta_h) := \left(\frac{H(\theta_0, \theta_h)}{r(\theta_0, \theta_h)} \right)^2 \cdot \frac{\sin(\beta - \beta_1)}{2 \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\beta_1)} \cdot \left[\cos(\theta_0) - \left(\frac{L}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot \cos(\alpha) \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{H(\theta_0, \theta_h)}{r(\theta_0, \theta_h)} \cdot (\cot(\beta_1) + \cot(\beta)) \right]$$

$$f(\theta_0, \theta_h) := \frac{\sin(\beta_1) \cdot \left[e^{[2 \cdot (\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)]} - 1 \right]}{2 \cdot \sin(\beta_1 - \alpha) \cdot \tan(\phi) \cdot (f_1(\theta_0, \theta_h) - f_2(\theta_0, \theta_h) - f_3(\theta_0, \theta_h) - f_4(\theta_0, \theta_h))} \cdot \left[\sin(\theta_h + \alpha) \cdot e^{(\theta_h - \theta_0) \cdot \tan(\phi)} - \sin(\theta_0 + \alpha) \right]$$

$$\theta_0 := 0.40^\circ \quad \theta_h := 1.74^\circ$$

$$\underline{N} := \min(f(\theta_0, \theta_h))$$

$$N = 6.936$$

Facteur de sécurité d'un mécanisme de rupture sous forme de cercle pour un talus incliné passant à travers le pied d'un talus suivant Mathcad

1) Pour une valeur de $\beta = 30^\circ$:

$$\alpha := 0 \quad \phi := \frac{\pi}{9} \quad \beta := \frac{\pi}{6} \quad L := 4.3 \quad r := 8.1$$

Given

$$f1 = \frac{1}{3} \cdot (\sin(\theta h) - \sin(\theta 0))$$

$$f2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{r} \cdot \left(2 \cdot \cos(\theta 0) - \frac{L}{r} \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \sin(\theta 0 + \alpha)$$

$$f3 = \frac{1}{6} \cdot \left(\sin(\theta h - \theta 0) - \frac{L}{r} \cdot \sin(\theta h + \alpha) \right) \cdot \left(\cos(\theta 0) - \frac{L}{r} \cdot \cos(\alpha) \right)$$

$$f = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha) \cdot \sqrt{(f1 - f2 - f3)}} \cdot (\sin(\theta h + \alpha) - \sin(\theta 0 + \alpha))$$

$$\frac{d}{d\theta h} \left[\frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha) \cdot \sqrt{(f1 - f2 - f3)}} \cdot (\sin(\theta h + \alpha) - \sin(\theta 0 + \alpha)) \right] = 0 \text{ solve, } \theta h, \theta 0 \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} \quad 0 \right)$$

$$\frac{d}{d\theta 0} \left[\frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha) \cdot \sqrt{(f1 - f2 - f3)}} \cdot (\sin(\theta h + \alpha) - \sin(\theta 0 + \alpha)) \right] = 0 \text{ solve, } \theta h, \theta 0 \rightarrow \left(0 \quad \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\theta 0 := 0 \quad \theta h := \frac{\pi}{2}$$

$$N := \min(f(\theta 0, \theta h))$$

$$N = 1.836$$

2) Pour une valeur de $\beta = 45^\circ$:

$$\alpha := 0 \quad \phi := \frac{\pi}{9} \quad \beta := \frac{\pi}{4} \quad \underline{L} := 4.9 \quad r := 8.1$$

Given

$$f1 = \frac{1}{3} \cdot (\sin(\theta_h) - \sin(\theta_0))$$

$$f2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{r} \cdot \left(2 \cdot \cos(\theta_0) - \frac{L}{r} \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \sin(\theta_0 + \alpha)$$

$$f3 = \frac{1}{6} \cdot \left(\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{r} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) \right) \cdot \left(\cos(\theta_0) - \frac{L}{r} \cdot \cos(\alpha) \right)$$

$$f = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha) \cdot \sqrt{(f1 - f2 - f3)}} \cdot (\sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha))$$

$$\frac{d}{d\theta_h} \left[\frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha) \cdot \sqrt{(f1 - f2 - f3)}} \cdot (\sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha)) \right] = 0 \text{ solve, } \theta_h, \theta_0 \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} \quad 0 \right)$$

$$\frac{d}{d\theta_0} \left[\frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha) \cdot \sqrt{(f1 - f2 - f3)}} \cdot (\sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha)) \right] = 0 \text{ solve, } \theta_h, \theta_0 \rightarrow \left(0 \quad \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\theta_0 := 0 \quad \theta_h := \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{N} := \min(f(\theta_0, \theta_h))$$

$$N = 1.804$$

3) Pour une valeur de $\beta = 60^\circ$:

$$\alpha := 0 \quad \phi := \frac{\pi}{9} \quad \beta := \frac{\pi}{3} \quad \underline{N} := 6.1r := 8.1$$

Given

$$f1 = \frac{1}{3} \cdot (\sin(\theta_h) - \sin(\theta_0))$$

$$f2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{r} \cdot \left(2 \cdot \cos(\theta_0) - \frac{L}{r} \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \sin(\theta_0 + \alpha)$$

$$f3 = \frac{1}{6} \cdot \left(\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{r} \cdot \sin(\theta_h + \alpha) \right) \cdot \left(\cos(\theta_0) - \frac{L}{r} \cdot \cos(\alpha) \right)$$

$$f = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha) \cdot \sqrt{(f1 - f2 - f3)}} \cdot (\sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha))$$

$$\frac{d}{d\theta_h} \left[\frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha) \cdot \sqrt{(f1 - f2 - f3)}} \cdot (\sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha)) \right] = 0 \text{ solve, } \theta_h, \theta_0 \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} \quad 0 \right)$$

$$\frac{d}{d\theta_0} \left[\frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha) \cdot \sqrt{(f1 - f2 - f3)}} \cdot (\sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha)) \right] = 0 \text{ solve, } \theta_h, \theta_0 \rightarrow \left(0 \quad \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\theta_0 := 0 \quad \theta_h := \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{N} := \min(f(\theta_0, \theta_h))$$

$$N = 1.759$$

4) Pour une valeur de $\beta = 75^\circ$:

$$\alpha := 0 \quad \phi := \frac{\pi}{9} \quad \beta := \frac{\pi}{2.4} \quad \underline{L} := 6.1 \quad r := 8.1$$

Given

$$f1 = \frac{1}{3} \cdot (\sin(\theta h) - \sin(\theta 0))$$

$$f2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{r} \cdot \left(2 \cdot \cos(\theta 0) - \frac{L}{r} \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \sin(\theta 0 + \alpha)$$

$$f3 = \frac{1}{6} \cdot \left(\sin(\theta h - \theta 0) - \frac{L}{r} \cdot \sin(\theta h + \alpha) \right) \cdot \left(\cos(\theta 0) - \frac{L}{r} \cdot \cos(\alpha) \right)$$

$$f = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha) \cdot \sqrt{(f1 - f2 - f3)}} \cdot (\sin(\theta h + \alpha) - \sin(\theta 0 + \alpha))$$

$$\frac{d}{d\theta h} \left[\frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha) \cdot \sqrt{(f1 - f2 - f3)}} \cdot (\sin(\theta h + \alpha) - \sin(\theta 0 + \alpha)) \right] = 0 \text{ solve, } \theta h, \theta 0 \rightarrow (1.57079632679489661920)$$

$$\frac{d}{d\theta 0} \left[\frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha) \cdot \sqrt{(f1 - f2 - f3)}} \cdot (\sin(\theta h + \alpha) - \sin(\theta 0 + \alpha)) \right] = 0 \text{ solve, } \theta h, \theta 0 \rightarrow (0 \ 1.57079632679489661920)$$

$$\theta 0 := 0 \quad \theta h := 1.57$$

$$\underline{N} := \min(f(\theta 0, \theta h))$$

$$N = 1.759$$

5) Pour une valeur de $\beta = 90^\circ$:

$$\alpha := 0 \quad \phi := \frac{\pi}{9} \quad \beta := \frac{\pi}{2} \quad \underline{L} := 7.4 \quad r := 8.1$$

Given

$$f1 = \frac{1}{3} \cdot (\sin(\theta h) - \sin(\theta 0))$$

$$f2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{r} \cdot \left(2 \cdot \cos(\theta 0) - \frac{L}{r} \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \sin(\theta 0 + \alpha)$$

$$f3 = \frac{1}{6} \cdot \left(\sin(\theta h - \theta 0) - \frac{L}{r} \cdot \sin(\theta h + \alpha) \right) \cdot \left(\cos(\theta 0) - \frac{L}{r} \cdot \cos(\alpha) \right)$$

$$f = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha) \cdot \sqrt{(f1 - f2 - f3)}} \cdot (\sin(\theta h + \alpha) - \sin(\theta 0 + \alpha))$$

$$\frac{d}{d\theta h} \left[\frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha) \cdot \sqrt{(f1 - f2 - f3)}} \cdot (\sin(\theta h + \alpha) - \sin(\theta 0 + \alpha)) \right] = 0 \text{ solve, } \theta h, \theta 0 \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} \quad 0 \right)$$

$$\frac{d}{d\theta 0} \left[\frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha) \cdot \sqrt{(f1 - f2 - f3)}} \cdot (\sin(\theta h + \alpha) - \sin(\theta 0 + \alpha)) \right] = 0 \text{ solve, } \theta h, \theta 0 \rightarrow \left(0 \quad \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\theta 0 := 0 \quad \theta h := \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{N} := \min(f(\theta 0, \theta h))$$

$$N = 1.735$$

Bibliographie :

- 01- Wai-Fah Chen, 1936. Limit Analysis and Soil Plasticity. J.ROSS PUBLISHING, ed. 2008, 01-04, 638 pages
- 02- Wai-Fah Chen, 1936. Limit Analysis and Soil Plasticity. J.ROSS PUBLISHING, ed. 2008, 15-57, 638 pages
- 03- Wai-Fah Chen, 1936. Limit Analysis and Soil Plasticity. J.ROSS PUBLISHING, ed. 2008, 58-63, 638 pages
- 04- Wai-Fah Chen, 1936. Limit Analysis and Soil Plasticity. J.ROSS PUBLISHING, ed. 2008, 341-398, 638 pages
- 05- Wai-Fah Chen, 1936. Limit Analysis and Soil Plasticity. J.ROSS PUBLISHING, ed. 2008, 399-407, 638 pages
- 06- Wai-Fah Chen, 1936. Limit Analysis and Soil Plasticity. J.ROSS PUBLISHING, ed. 2008, 409-413, 638 pages
- 07- Wai-Fah Chen, 1936. Limit Analysis and Soil Plasticity. J.ROSS PUBLISHING, ed. 2008, 416-423, 638 pages
- 08- Liu, Deng and Chu, 2008. THE LIMIT ANALYSIS OF REINFORCED SLOPES
- 09- OURAGH Youcef. 1994. Aide Mémoire de Mathématiques pour Ingénieurs (1^{ère} partie).OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES, 278 pages
- 10- OURAGH Youcef. 1994. Aide Mémoire de Mathématiques pour Ingénieurs (2^{ème} partie).OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES
- 11- Sites internet visités :

<http://www.pages.usherbrooke.ca/gci730/gci730/chapitre5.pdf>

<http://www.lb.refer.org/kourdey/Classiques.htm>

<http://geotech.sn/MoodleCours/STABILITE%20DES%20PENTES.htm>

STABILITE DES TALUS PAR L'ANALYSE LIMITE

Résumé :

La stabilité des talus a toujours été d'un très grand intérêt dans la géotechnique. Il existe plusieurs méthodes de calcul. Parmi les méthodes préconisées, ce document a pour objet de présenter la méthode de l'analyse limite.

Cette méthode se base sur les théorèmes plastiques limites de DRUCKER et AI (1952) qui sont utilisés pour obtenir des supérieures de la charge de rupture dans les problèmes de stabilité.

Ce qui différencie cette méthode des autres est que, peu importe la complexité de la géométrie d'un problème ou les conditions de chargement, il est toujours possible d'obtenir une valeur réaliste des charges de ruptures.

Dans la première partie, nous présentons, brièvement, quelques généralités sur la plasticité des sols ainsi que les différentes méthodes de calcul de la stabilité des talus. La présentation de la méthode de l'analyse limite sera en dernier. Nous exposons les objectifs et méthodes de ce travail.

La seconde partie, aura pour but l'application de cette méthode aux différents types de talus (inclinés ou non, homogènes ou non) allant du simple au complexe puis nous changerons la surface de ruptures du log-spiral au cercle.

Dans la troisième partie, nous discuterons les résultats obtenus et nous les comparerons les uns aux autres.

Finalement, et en dernière partie, des annexes seront joint à ce document pour plus d'information.

Mots clés : Stabilité des talus. Analyse limite. Bornes supérieures. Mécanisme de rupture log-spiral.

STABILITY OF SLOPE BY THE LIMIT ANALYSIS

Summary

Slope stability has always been a great interest in geotechnical engineering. There are several methods of calculation. Among the recommended methods, this document is to present the method of limit analysis.

This method is based on plastic limit theorems of Drucker et al (1952) that are used to obtain higher tensile strength in stability problems.

What differentiates this method from others is that no matter the complexity of the geometry of a problem or loading conditions, it is always possible to obtain a realistic value of the breaking load.

In the first part, we present, briefly, some background on the plasticity of soil and different methods of calculating slope stability. The presentation of the method of limit analysis will be the last. The goals and methods of this work are given here.

In the second part, we will see the application of this method to different types of slope (inclined or not, homogeneous or not) from the simple to the complex and then we will change the surface of rupture from the log-spiral to the circle.

In the third part, we discuss the results and compare them to each others.

Finally, in the last parts, the annexes are attached to this document for more information.

Keywords: Slope stability. Limit analysis. Upper bound. Log-Spiral Failure mechanism.

استقرار التربة بالتحليل الموجز

ان استقرار التربة كان دائما ذو اهمية كبيرة في ميدان الجيوتقني توجد عدة طرق
من بين الطرق المعتمدة هدف هذه الطريقة هو تقديم التحليل الموجز

هذه الطريقة تعتمد على نظرية الحدود البلاستيكية
تستعمل للحصول على القيم الحدية العليا 1952 لشحنة التمزيق في هذا اميدان

ما يميز هذه الطريقة عن غيرها هو أنه مهما كان الشكل الهندسي أو طرق الشحن
‘فان امكانية الحصول على قيمة حقيقية لشحنة الانكسار ممكنة،

، بعض الطرق المستخدمة في هذا الميدان‘ تلخيص وجيز
لهذه الطريقة مع بعض العموميات حول بلاستيكية التربة

، نبرز تطوير طريقة الحساب المرتبطة باستقرار التربة مهما كان
شكلها ، تكوينها او تعقيدها.

، سنغير مساحة الانكسار من لوسبرال الى الدائرة و سنطور هذه
التقنية في هذا المجال للحصول على النتائج وهذا باستعمال برنامج رياضي
(MATHCAD)

في القسم الاخير سنضيف اشكال و جداول للمزيد من التفسير

، التحليل الموجز، الحدود العليا، طريقة التمزيق ،

-سبيرال