République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques
Laboratoire de domiciliation de Mathématiques Appliquées et de Modélisation

THÈSE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE DOCTORAT

Domaine : Mathématiques et informatique. Filière : Mathématiques.
Spécialité : Mathématique appliquées

Présentée par

Harrat Aicha

Intitulée

Systèmes d'évolution abstraits d'ordres fractionnaires et leurs applications

Soutenue le : 12/12/2018 Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom	**Grade**		
Mr. BADRAOUI Salah	**Prof**	Univ. de 8 mai 1945	Président
Mr. DEBBOUCHE Amar	**Prof**	Univ. de 8 mai 1945	Encadreur
Mr. BOUSSETILA Nadjib	**Prof**	Univ. de 8 mai 1945	Examinateur
Mr. HADDAD Tahar	**Prof**	Univ. de Jijel	Examinateur
Mr. KARIM Abbas	**Prof**	Univ. de Bejaia	Examinateur

Année Universitaire : 2018

Remerciements

En préambule à cette thèse, je tiens à remercier en premier lieu **ALLAH** qui m'a donné le pouvoir d'effectuer ce modeste travail.

En tout premier lieu, mes profonds remerciements, ma reconnaissance et ma gratitude sont destinés à mon directeur de thèse le Professeur **DEBBOUCHE Amar**. Je le remercie sincèrement pour ses encouragements, ses conseils précieux et pour le temps qu'il m'a accordé malgré ses obligations, ses devoirs et ses responsabilités.

Mes remerciement les plus respectueux vont au Professeur **BADRAOUI Salah** d'avoir accepté de présider le jury et au Professeur **BOUSSETILA Nadjib** pour ces encouragements, ses conseils et d'avoir accepté de juger cette thèse.

Je remercie vivement les Professeurs : **HADDAD Tahar** et **KARIM Abbas** qui ont accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger cette thèse.

Je termine avec un remerciement bien particulier à quiconque qui de prés ou de loin a contribué à ma réussite.

Résumé

Dans cette thèse, nous avons étudié la solvabilité et les contrôles optimaux d'une classe d'inclusions d'évolution avec retard fractionnel non linéaire de Hilfer, dans les espaces de Banach. Nous avons présenté les principaux outils et concepts pour établir l'existence de paires optimales d'états et de contrôles, pour minimiser un coût fonctionnel parmi toute la paire de contrôle d'état admissible du problème de Lagrange considéré.

En outre, nous avons étudié la contrôlabilité approchée d'une classe d'inclusions différentielles fractionnaires de Hilfer avec des conditions non locales, nous avons traité le type de Sobolev, où nous avons donné des conditions suffisantes appropriées, pour que notre système puisse être approximativement contrôlable.

De plus, nous avons introduit un nouvel outil appelé famille de résolvantes alpha-Sobolev, pour formuler de nouveaux opérateurs, nécessaires à la représentation de la solution de quelques équations différentielles quasi-linéaires à retard fractionnaire avec des conditions non locales et impulsives de type Sobolev. Notre travail est clôturé avec des exemples illustratifs, pour expliquer les significations théoriques pour de nombreuses applications dans plusieurs domaines de notre vie quotidienne.

Enfin, nous avons terminé par une conclusion qui résume nos contributions scientifiques dans cette thèse, ainsi que, quelques problèmes ouverts possibles à étudier à l'avenir comme de nouvelles directions.

Mots clés: calcul factionnaire, théorie du semigroups, dérivée fractionnaire au sens de Hilfer, dérivées fractionnaire au sens de Caputo...

Abstract

We have focused within this Thesis on some new problems involving fractional differential equations and inclusions which are applied in real life. In particular, we firstly started to review some essential facts from fractional calculus, abstract differential equations, multi-valued analysis, fixed point techniques and control theory that are used to obtain our main results.

Then, we studied the solvability and optimal controls of a class of impulsive nonlinear Hilfer fractional delay evolution inclusions in Banach spaces, we presented the main tools and concepts to guarantee the existence of optimal pairs which are both state and control functions, where the purpose is to minimize a cost functional among all the admissible state control pair of the considered Lagrange problem.

Moreover, we have investigated the approximate controllability of a different class of Hilfer fractional differential inclusions with nonlocal conditions, we included the Sobolev type and constructed an appropriate sufficient conditions set so that we ensured that our system can be approximately controllable.

Furthermore, we introduced a new tool called alpha-Sobolev resolvent family that was qualified to formulate new characteristic operators needed for the solution representation of somefractionaldelayquasilinearintegro-differentialequationswithnonlocal and impulsive conditions of Sobolev type. Our work has been associated with illustrative examples to explain the theoretical meanings and indications for many possible applications in several fields in our daily life.

Finally, we ended by a conclusion that summarized our strict scientific novelties and contributions of this thesis, as well as, some possible open problems to be investigated in future as new directions.

Key words: fractional calculus, semigroups theory, hilfer fractional derivative, Caputo fractional derivatve…

الملخص

بما أن الأنظمة الديناميكية الكسرية تنمو وتنضج و تتطور، ركزنا في هذه الرسالة على بعض المسائل المتعلقة بالمعادلات والإحتواءات التفاضلية الكسرية التي يمكن تطبيقها في الواقع.

على وجه الخصوص بدأنا بمراجعة بعض الحقائق الأساسية مثل الحساب الكسري، المعادلات التفاضلية المجردة، التحليل المتعدد القيم، تقنيات النقطة الثابتة و نظرية التحكم التي استعملت للحصول على نتائجنا الأساسية.

ثم درسنا التحكم الأمثل و قابلية الحل لأصناف من احتواءات التطوير المتأخر ذو رتب كسرية خاصة بهيلفار، والتي هي غير خطية و نبضية في فضاء بناخ، عرضنا الأدوات و الأفكار الأساسية لضمان وجود الأزواج المثلى التي هي عبارة عن دوال الحالة و التحكم، حيث الغرض هنا هو خفض دالة التكلفة قدر الإمكان من بين كل أزواج تحكم الحالة المقبولة لمشكلة لاغرنج.

علاوة على ذلك تطرقنا إلى دراسة قابلية التحكم التقريبي لأصناف مختلفة من إحتواءات تفاضلية كسرية للعالم هيلفر مع شروط غير محلية، أضفنا نوع سوبولاف و شكلنا مجموعة شروط كافية و ملائمة، وهذا لضمان قابلية التحكم النسبية لنظامنا.

بالإضافة إلى ذلك قدمنا أداة جديدة تدعى ألفا-سوبولاف التي هي مؤهلة لتشكيل مؤثرات مميزة جديدة، ومطلوبة لتهيئة الحل لبعض المعادلات التفاضلية التكاملية مع شروط غير محلية نبضية من نوع سوبولاف.

أرفقنا الدراسة أيضا بأمثلة واضحة لشرح المعاني النظرية والإشارة إلى عدة تطبيقات ممكنة في مختلف المجالات في حياتنا اليومية.

في الختام، أنهينا باستنتاج لخص مساهماتنا الجديدة العلمية لهذه الرسالة، و أيضا أشرنا لبعض المشاكل المفتوحة الممكن دراستها في المتقبل كتوجهات جديدة.

الكلمات المفتاحية: الحساب الكسري، نصف زمرة، المشتقة الكسرية لهيلفار، المشتقة الكسرية لكابيتو...

À *ALLAH*

À *ma mère*

À *la mémoire de mon père*

À *mon mari Mohamed*

À *ma fille Taqwa*

À *mes chers frères.*

À *ma grand-mère*

''Louiza''

Systèmes d'évolution abstraits d'ordres fractionnaires et leurs applications

Harrat Aicha
Thèse de Doctorat en Mathématiques
sous la direction du Professeur *Debbouche Amar*
Université de 8 mai 1945 Guelma

Table des matières

Introduction

Le concept d'ordre d'intégration non-entier peut être retracé à la genèse du calcul différentiel lui-même, pendant trois siècles la théorie des dérivés fractionnaires s'est développée principalement comme un champ théorique pur de mathématiques utile seulement pour des mathématiciens. Le philosophe et créateur du calcul moderne G.W. Leibniz a fait quelques remarques sur la signification et la possibilité de la dérivée fractionnaire de l'ordre à la fin du 17ème siècle.

Cependant une enquête rigoureuse a d'abord été menée par Liouville dans une série d'articles où il a défini le premier paria d'un opérateur d'intégration fractionnaire. Des recherches ultérieures et des développements ultérieurs entre autres Riemann conduisirent à la construction de l'opérateur intégral fractionnaire Riemann-Liouville, basé sur l'intégrale, qui a été depuis lors une pierre angulaire précieuse dans le calcul fractionnaire. Avant Liouville et Riemann, Euler a fait le premier pas dans l'étude de l'intégration fractionnaire lorsqu'il a étudié le cas simple des intégrales fractionnaires de monomères d'ordre réel arbitraire dans le mode heuristique de l'époque ; on a dit qu'il l'avait conduit à construire la fonction gamma pour les puissances fractionnaires de la factorielle. Abel, Letnikov, Wayl, Hadamard, Grünwald et beaucoup d'autres bien connus dans ce domaine du passé et du présent. Une première tentative de Liouville a été plus tard purifiée par le mathématicien suédois Holmgren, qui a fait d'importantes contributions à l'étude croissante du calcul fractionnaire. Mais c'est Riemann qui l'a reconstitué pour l'adapter à l'équation intégrale d'Abel, et l'a donc rendu beaucoup plus utile.

Au cours des dernières décennies, de nombreux auteurs ont souligné que les dérivés et intégrales d'ordre non entier sont très appropriés pour la description des propriétés de divers matériaux réels, par ex. des polymères. Il a été démontré que les nouveaux modèles d'ordre fractionnaire sont plus adéquats que les modèles d'ordre entier précédemment utilisés. Considération physique fondamentale en faveur de l'utilisation de modèles basés sur des dérivées d'ordre non entier.

Les dérivés fractionnaires fournissent un excellent instrument pour la description de la mémoire et des propriétés héréditaires de divers matériaux et processus. C'est l'avantage principal des dérivés fractionnaires par rapport aux modèles d'ordre entier classiques, dans lesquels de tels effets sont en fait négligés. Les avantages des dérivés fractionnaires deviennent apparents dans la modélisation des propriétés mécaniques et électriques des matériaux réels.

Ces dernières années, un intérêt considérable a été démontré dans le calcul dit fractionnaire, ce qui nous permet de considérer l'intégration et la différenciation de n'importe quel ordre, pas nécessairement entier. Dans une large mesure, cela est dû aux applications du calcul fractionnaire à des problèmes dans différents domaines de la physique et de l'ingénierie.

Le calcul fractionnaire peut être considéré comme un sujet ancien et pourtant nouveau. Partant de quelques spéculations de Leibniz et d'Euler, suivies par les travaux d'autres mathématiciens éminents, dont Laplace, Fourier, Abel, Liouville et Riemann, il a connu un développement rapide en particulier au cours des deux dernières décennies. L'une des branches émergentes de cette étude est la théorie des équations d'évolution fractionnaire, c'est-à-dire des équations d'évolution où la dérivée entière par rapport au temps est remplacée par une dérivée d'ordre fractionnaire. L'intérêt croissant pour cette classe d'équations est motivé à la fois par leur application à des problèmes de viscoélasticité, de conduction thermique dans les matériaux à mémoire, d'électrodynamique avec mémoire, et aussi parce qu'ils peuvent être utilisés pour approcher des lois de conservation non linéaires.

Il existe aujourd'hui de nombreuses formes d'opérateurs intégraux fractionnaires, allant des types à différences divisées aux types à somme infinie, mais l'opérateur de Riemann-Liouville est toujours le plus fréquemment utilisé lors de l'intégration fractionnaire. Dans la modélisation mathématique des diffusions dépendantes de la fréquence non carrées, également connues sous le nom de diffusions anomales, il est souhaitable d'avoir une transformée de Fourier réelle positive pour la dérivée temporelle d'un ordre entier fractionnaire ou impair. La transformée de Fourier de la dérivée fractionnaire temporelle dans les sens de Riemann-Liouville et de Caputo implique cependant une fonction de puissance complexe de l'ordre fractionnaire. Cette thèse se compose de quatre chapitres :
Le premier chapitre est un rappel de quelques notions de base : calcul fractionnaire, les techniques du point fixe, la théorie du semigroups, ...

Le deuxième chapitre on a étudié la solvabilité et le contrôle optimal des inclusions d'évolution fractionnaires impulsives au sens de Hilfer avec retard et sous-différentiel de Clarke où on a utilisé une version du théoreme de Sadoviski pour montrer les résultats principales.

Dans la troisième chapitre, nous étudions la contrôlabilité approchée des inclusions différentielles fractionnaires de Hilfer de type Sobolev avec des conditions non locales. Les principales techniques reposent sur le théorème du point fixe combinée avec la théorie du semigroupe, le calcul fractionnaire et à l'analyse multivaluée.

Et dans le dernier on introduit un nouvel outil qui s'appelle la famille résolvante alpha-sobolev pour établir l'éxistance et l'unicité des solutions d'une classe d'équations intégro-différentielle quasilinéaire avec retard d'ordre fractionnaire avec des condition nonlocales et impulsives. On utilise le calcul fractionnaire, la famille résolvante et le théorème du point fixe de Banach pour les résultats principaux.

Chapitre 1

Outils fonctionnels

Le but de ce chapitre et de rappeler quelques notions de base que nous allons utiliser dans les chapitres suivants tels que : les espaces de bases, calcul fractionnaire, la théorie du controle, semigroupe,...(et d'autre outils fonctoionnels)

1.1 Notions générales

Espace des fonctions intégrables L^p

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ un intervale fini ou infini de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq +\infty$.

1. Si $1 \leq p < +\infty$ on définit

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable tel que } \int_\Omega |f(t)|^p dt \quad \text{soit fini} \right\}$$

On muni cet espace vectoriel de la norme $\|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}$ qui le rend complet

2. Si $p = \infty$, on définit

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable, } \exists M > 0 \quad \text{t.q} \quad |f(t)| \leq M \text{ p.p. sur } \ \Omega \right\}$$

C'est un espace vectoriel complet pour la norme

$$\|f\|_\infty = \inf\{M > 0, |f(t)| \leq M \quad \text{p.p. sur} \quad \Omega\}$$

Inégalité de Hölder Si $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors $fg \in L^1(\Omega)$ et $\int_\Omega \|fg\| \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Espace des fonctions continues et absolument continues

Soit Ω un intervale de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. On note par $\mathcal{C}(\Omega)$ l'espace des fonctions continue dans $\mathbb{R}$, et on définit les espaces $\mathcal{C}^k(\Omega)$ comme suit :
Pour $k = 0$ on a :

$$\mathcal{C}^0(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{continue}\},$$

Pour $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ on définit :

$$\mathcal{C}^k(\Omega) = \Big\{f \in \mathcal{C}^{k-1}(\Omega), f^n \in \mathcal{C}(\Omega)\Big\},$$

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 0} \mathcal{C}_k(\Omega),$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^k(\Omega)} = \sum_{n=1}^{k} \|f^{(n)}\|_{\mathcal{C}(\Omega)} = \sum_{n=1}^{k} \max_{t\in\Omega} |f^{(n)}(t)|, k = 1, 2, ...$$

Espaces des fonctions absolument continues

Soit $\Omega = [a, b](-\infty < a < b < \infty)$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On désigne par $AC^1([a, b])$ l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables, c'est à dire :

$$AC^1([a, b]) = \Big\{f / \exists \varphi \in L^1([a, b]) : f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt\Big\}$$

On notera $AC^1(\Omega)$ par $AC(\Omega)$ et on l'appelle espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$.
Pour $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, on désigne par $AC^k([a, b])$ l'espace des fonctions f ayant des dérivées continues jusqu'à l'ordre $(n-1)$ sur $[a, b]$ telles que $f^(n-1) \in AC([a, b])$ c'est à dire :

$$AC^k([a, b]) = \left\{ f : \Omega \to \mathcal{C}(\Omega) \quad \text{et } f^{(n-1)} \in AC([a, b]) \right\}$$

Une fonction $f \in AC^k[a, b]$, si et seulement si elle s'écrit sous la forme :

$$f(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^t (t-s)^{k-1} f^{(k)}(s) + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (t-a)^n, \quad \forall t \in \Omega.$$

Pour plus de détails voir [**?**].

Espaces des fonctions continues avec poids $C_\gamma([a, b])$

Soit $\Omega = [a, b]$ un intervalle fermé borné et $\gamma \in C(0 \leq \mathbb{R}(\gamma) < 1)$. On désigne par $C_\gamma([a, b])$ l'espace des fonctions f définies sur $]a, b]$ telles que la fonction $(t-a)^\gamma f(x) \in C([a, b])$ c'est à dire :

$$C_\gamma([a, b]) = f : [a, b] \to \mathcal{C} : (. - a)^\gamma f(.) \in \mathcal{C}([a, b])$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{C_\gamma} = \|(t-a)^\gamma f\|_{\mathcal{C}}$$

L'espace $C_\gamma([a, b])$ est appelé l'espace des fonctions continues avec poids. En particulier, $C_0([a, b]) = \mathcal{C}([a, b])$. Pour plus de détails voir [57].

Eléments sur la transformée de Laplace

Rappelons quelques outils de base de la transformée de Laplace.

Définition 1.1.1 *Soit $f \in L^1(0,\infty)$La fonction $F(s)$ de la variable complexe s définie par*

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{1.1}$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, qui se nomme l'originale de F.

Une condition suffisante pour l'existence de l'intégrale (1.1) est que la fonction $f(t)$ doit être d'ordre exponentiel α, ce qui veut dire qu'il existe deux constantes positives M et α telles que

$$e^{-\alpha t}|f(t)| \leq M \quad \text{pour tout} \quad t > T.$$

où $T \in \mathbb{R}_+^*$

On notera les transformées de Laplace par des lettres majuscules et les originiales par des lettres miniscules.

L'originale $f(t)$ peut être reconsituée à partir de la transformée de Laplace $F(s)$ à l'aide de la transformée de Laplace inverse

$$f(t) = L^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s)ds, \ c = \mathbb{R}(s) > c_0, \tag{1.2}$$

où c_0 réside dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace (1.1).

Le calcul direct de la transformée de Laplace inverse en utilisant la formule (1.2) est "souvent compliqué" ; cependant, parfois elle donne une information utile sur le comportement de l'inconnue originale $f(t)$ qu'on cherche.

La transformée de Laplace de la convolution

$$f(t) \star g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{1.3}$$

de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, qui sont égale à zéro pour $t < 0$, est égale au produit de leurs transformées de Laplace :

$$L\{f(t) \star g(t); s\} = F(s)G(s) \tag{1.4}$$

sous l'hypothèse que $F(s)$ et $G(s)$ existent. On utilisera la propriété (1.4) pour calculer la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

Une autre propriété utile dont on aura besoin est la formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire d'un ordre entier n de la fonction $f(t)$:

$$\begin{aligned} L\{f^{(n)}(t); s\} &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0), \end{aligned} \tag{1.5}$$

qui peut être obtenue de la définition (1.1) par intégration par parties sous l'hypothèse que les intégrales correspondantes existent.

1.2 Calcul fractionnaire

1.2.1 Fonctions spéciales

Les fonctions d'Euler

- **La fonction Gamma**

  L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma Euler $\Gamma(z)$. La fonction de Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \tag{1.6}$$

avec $\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(0_+) = +\infty,\ \Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$. Une propriété importante de la fonction de Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

qu'on peut démontrée par une intégration par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^z dt = [-e^{-t}t^z]_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = z\Gamma(z).$$

La fonction de Gamma Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n\,!$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

– **La fonction Bêta** La fonction Bêta est définie par :

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt,\ Re(p) > 0,\ Re(q) > 0. \tag{1.7}$$

Liens entre la fonction Gamma et la fonction Beta

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ Re(p) > 0,\ Re(q) > 0. \tag{1.8}$$

La fonctions de Mittag-lefler

La fonction exponentielle, e^z, joue un rôle trés important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler et désignée par la fonction suivante :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{1.9}$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres à été introduite par Argawal et elle est définie par un développement en série suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \ (\alpha > 0, \ \beta > 0). \tag{1.10}$$

Pour $\beta = 1$, on retrouve la relation (1.9) car

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} = E_\alpha(z).$$

A partir de la relation (1.10) on montre que

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{n!} = e^z \tag{1.11}$$

La transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres peut s'écrire

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha k+\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(at^\alpha)dt = \frac{s^{\alpha-\beta}k!}{(s^\alpha - a)^{k+1}} \tag{1.12}$$

où

$$E_{\alpha,\beta}^{(k)} = \frac{\mathrm{d}^(k)}{\mathrm{d}t^k} E_{\alpha,\beta}.$$

1.2.2 Intégration fractionnaire

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, \ b]$. On considère l'intégrale

$$I^{(1)}f(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$I^{(2)}f(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(s)ds$$

En permutant l'ordre d'intégration,on obtient

$$I^{(2)}f(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt,$$

Plus généralement le $n^{ième}$ itéré de l'opérateur I peut s'e'crire

$$I^{(n)}f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{(n-1)}f(t)dt, \tag{1.13}$$

pour tout entier n.

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n-1)! = \Gamma(n)$, Riemann rendu compte que le second membre de (1.13) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit :

Définition 1.2.1 *si $f \in C[a,\ b],\ \alpha \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale*

$$I_{a+}^{(\alpha)}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)}f(t)dt \quad \textit{telle que} \quad a \in]-\infty,+\infty[\tag{1.14}$$

est appelée intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre α (qu'on va utiliser dans tout ce qui suit), et l'intégrale

$$I_{b^-}^{(\alpha)}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)}f(t)dt \quad \textit{telle que} \quad b \in]-\infty,+\infty[\tag{1.15}$$

est appelelée intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville d'ordre α.

Exemples 1.2.1 *Considérons la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$. Alors*

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)}(t-a)^\beta dt$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement $t = a + (x-a)\tau$, *d'où*

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{(\alpha-1)} \tau^\beta dt = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha}$$

après utilisation de l'intégrale eulérienne de première espèce (la fonction bêta d'Euler). On voit bien que c'est une généralisation du cas $\alpha = 1$ *où on a*

$$I_a^1 (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} (x-a)^{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1} (x-a)^{\beta+1}$$

à cause de la relation bien connue $\Gamma(z\ +1) = z\Gamma(\mathrm{z})$.

Voici des identités qui nous serviront par la suite.

Proposition 1.2.1 *Pour* $f \in C[a,\ b]$, *l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe*

$$I_{a^+}^{(\alpha)} [I_{a^+}^{(\beta)} f(x)] = I_{a^+}^{(\alpha+\beta)} f(x) \quad pour \quad \alpha > 0,\ \beta > 0, \tag{1.16}$$

De plus on a :

$$\frac{d}{dx} I_a^\alpha f(x) = I_a^{\alpha-1} f(x) \quad pour \quad \alpha > 0 \tag{1.17}$$

Démonstration. La preuve découle directement de la définition

$$I_{a+}^{(\alpha)} [I_{a+}^{(\beta)} f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{dt}{(s-t)^{\alpha-1}} \int_a^x \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\beta}} ds.$$

Or $f \in C[a,\ b]$, d'après le théorème de Fubini et par le changement $t = u + s(x-u)$ on obtient

$$I_{a^+}^{(\alpha)} [I_{a^+}^{(\beta)} f(x)] = \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\beta}} ds = I_{a^+}^{(\alpha+\beta)} f(x).$$

La deuxième identité se justifie par les théorèmes classiques de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre et l'utilisation de l'équation fondamentale de la fonction gamma d'Euler : $\Gamma^1(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$. ■

Transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

La transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de Riemann-Liouville définie par (1.14), laquelle peut s'écrire comme une convolution de deux fonctions $g(t) = t^{\alpha-1}$ et $f(t)$:

$$I_{0^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = t^{\alpha-1} \star f(t) = g(t) \star f(t)$$

La transformée de Laplace de la fonction $t^{\alpha-1}$ est [A. Erdélyi (ed), Tables of Integral Transforms, vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1954.]

$$G(s) = L\{t^{\alpha-1}; s\} = \Gamma(\alpha) s^{-p}. \tag{1.18}$$

Et donc, en utilisant la transformée de Laplace de la convolution (1.4), nous obtenons la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville :

$$L\{I_{0^+}^{\alpha}; s\} = s^{-p} F(s). \tag{1.19}$$

1.2.3 Dérivées fractionnaires

Pour la dérivation fractionnaire, il y a plusieurs types de définitions, citons les plus utilisées dans les applications :

Les dérivées fractionnaire de Grünwald-letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires, donc on peut exprimer la dérivée d'ordre entier p (si p est positif) et l'intégrale répétée $(-p)$ fois (si p est négatif) d'une fonction f par la formule suivante :

$$D^p f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{p}{k} f(t-kh), \text{ avec } \binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!} \tag{1.20}$$

La généralisation de cette formule pour p non entier (avec $0 \leq n-1 < p < n$) rien de fait que :

$$\begin{aligned}(-1)^k \binom{p}{k} &= \frac{-p(1-p)\dots(k-p-1)}{k!} \\ &= \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)},\end{aligned}$$

nous substituons dans (1.20)

$${}^G D_a^p f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)} f(t-kh) \tag{1.21}$$

Remplaçons p par $-p$

$${}^G D_a^{-p} f(t) = \lim_{h\to 0} h^{p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p)} f(t-kh). \tag{1.22}$$

Si f est de classe C^n, alors en utilisant l'intégration par parties on obtient :

$${}^G D_a^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+p}}{\Gamma(k+p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+p)} \int_a^t (t-\tau)^{n+p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \tag{1.23}$$

aussi

$${}^G D_a^{p} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \tag{1.24}$$

Exemples :

1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov :

En générale la dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est pas nulle ni constante.

Si $f(t) = c$ et p non entier positif on a :

$$f^{(k)}(t) = 0 \text{ pour } k = 1, 2, ..., n.$$

$$\begin{aligned}{}^{G}D_a^p f(t) =& \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p} \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ =& \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}\end{aligned}$$

2. La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Grünwald-Lenikov.

Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$ alors on a :

$$f^{(k)}(a) = 0 \text{ pour } k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

et

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n},$$

d'où

$${}^{G}D_a^p f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{-p} d\tau.$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on trouve :

$$
\begin{aligned}
{}^{G}D_{a}^{p} =&(t-a) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau \\
=&\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p} \int_{a}^{1} (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds \\
=&\frac{\Gamma(\alpha+1)B(\alpha-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\
=&\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\
=&\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p}
\end{aligned}
$$

A titre d'exemple

$$
{}^{G}D^{1/2}(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)} \sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(1.5)}.
$$

Dérivées fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit f une fonction intégrable sur $[a,t]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre p (avec $n-1 \leq p < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$
\begin{aligned}
{}^{L}D_{a^{+}}^{p} &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^{n}}{dt^{n}} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \\
&= \frac{d^{n}}{dt^{n}} (I^{n-p} f(t))
\end{aligned}
\tag{1.25}
$$

Remarque 1.2.1 *Si f est de classe C^{n}, alors en faisant des intégrations par parties et des dérivations répétées on obtient*

$$
\begin{aligned}
{}^{L}D_{a^{+}}^{p} f(t) =& \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d \\
=&^{G} D^{p} f(t).
\end{aligned}
$$

Dans ce cas l'approche de Grünwald-Letnikov et Approche de Riemann-Liouville sont équivalentes.

Exemples 1.2.2 *:*

1. La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville

En général la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a :

$$^{L}D^{p}_{a^+}C = \frac{C}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}$$

2. La dérivée de $f(t) = (t \ - a)^{\alpha}$ ***au sens de Riemann-Liouville***

Soit p *non entier et* $0 \leq n-1 < p < n$ *et* $\alpha > -1$*, alors on a :*

$$^{L}D^{p}_{a^+}(t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha}d\tau.$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$*, on aura :*

$$\begin{aligned}
^{L}D^{p}_{a^+}(t-a)^{\alpha} =& \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n+\alpha-p}\int_a^t (1-s)^{n-p-1}s^{\alpha}ds \\
=& \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)B(n-p,\alpha+1)}{\Gamma(n-p)}(t-\alpha)^{\alpha-p} \\
=& \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-p+1)\Gamma(n+\alpha-p+1)}(t-\alpha)^{\alpha-p} \\
=& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-\alpha)^{\alpha-p}
\end{aligned}$$

A titre d'exemple

$$^{L}D^{0.5}_{0^+}t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5)$$

Propriétés générales :

1. Composition avec l'intégrale fractionnaire

L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire,

$$ {}^{L}D^{p}_{a^+}(I^{p}f(t)) = f(t), \tag{1.26}$$

en général on a

$$ {}^{L}D^{p}_{a^+}(I^{q}f(t)) = {}^{L}D^{p-q}_{a^+}f(t) \tag{1.27}$$

et si $p - q < 0, {}^{L}D^{p-q}f(t) = I^{q-p}f(t)$.

En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas

$$ {}^{L}D^{-p}_{a^+}({}^{L}_{a}D^{q}_{a^+}f(t)) =^{L} D^{q-p}_{a^+}f(t) - \sum_{k=1}^{m}[{}^{L}D^{q-k}_{a^+}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-k}}{\Gamma(p-k+1)} \tag{1.28}$$

avec $m - 1 \leq q < m$.

2. Composition avec les dérivées d'ordre entier

La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entière) ne commutent que si : $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \ \ldots, \ n-1$.

$$ \frac{d^n}{dt^n}({}^{L}D^{p}_{a^+}f(t)) =^{L} D^{n+p}_{a^+}f(t), \tag{1.29}$$

mais

$$ {}^{L}D^{p}_{a^+}(\frac{d^n}{dt^n}f(t)) =^{L} D^{n+p}_{a^+}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)} \tag{1.30}$$

3. Composition avec les dérivées fractionnaires Soit $n - 1 \leq p < n$ et $m - 1 \leq q < m$, alors

$$ {}^{L}D^{p}_{a^+}({}^{L}D^{q}_{a^+}f(t)) =^{L} D^{p+q}_{a^+}f(t) - \sum_{k=1}^{m}[{}^{L}D^{q-k}_{a^+}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma(p-k+1)}, \tag{1.31}$$

et

$$ {}^{L}D^{p}_{a^+} ={}^{L} D^{p+q}_{a^+}f(t) - \sum_{k=1}^{n}[{}^{L}D^{p-k}_{a^+}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-q-k}}{\Gamma(-q-k+1)}, \tag{1.32} $$

par la suite deux opérateurs de dérivation fractionnaire ${}^{L}D^{p}_{a^+}$ et ${}^{L}D^{q}_{a^+}(p \neq q)$, ne commutent que si et $[{}^{L}D^{p-k}_{a^+}f(t)]_{t=a} = 0$ pour tout $k = 1, 2, \ \ldots, \ n$, et $[{}^{L}D^{q-k}_{a^+}f(t)]_{t=a}$ pour tout $k = 1, 2, \ \ldots, m$.

Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Pour obtenir la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann- Liouville de la fonction $f(t)$, posons

$$ {}^{L}D^{p}_{a^+} = g^{(n)}(t) $$

ce qui entraîne

$$ g(t) ={}^{L} D^{-(n-p)}_{a^+}f(t)\frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_0^t (t-\tau)^{n-\tau-1}f(\tau)d\tau, \ n-1 < p < n. $$

L'utilisation de la transformée de Laplace de la dérivation d'ordre entier conduit à

$$ \mathcal{L}\{{}^{L}D^{p}_{0^+}f(t)\} = s^pG(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \tag{1.33} $$

où

$$ G(s) = s^{-(n-p)}F(s). \tag{1.34} $$

A partir de la définition de la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville, il vient

$$ g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}{}^{L}D^{-(n-p)}_{0^+}f(t) = {}^{L}D^{p-k-1}_{0^+}f(t). \tag{1.35} $$

En substituant (1.34) et (1.35) dans (1.33), nous obtenons l'expression finale de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

$$\mathcal{L}\{{}^L D^p_{0^+} f(t)\} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \; {}^L D^{p-k-1}_{0^+} f(t)|_{t=0_+}, \; n-1 < \alpha < n. \quad (1.36)$$

Dérivées fractionnaire au sens de Caputo

Soit $p > 0$ avec $n-1 < p < n$, $(n \; \in \mathbb{N}^*)$ et f une fonction telle que $\dfrac{d^n}{dt^n} f \in L_1[a, \; b]$

La dériveé fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo est définie par

$$\begin{aligned} {}^c D^p_{a^+} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= I^{n-p}\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) \end{aligned} \quad (1.37)$$

Propriétés générales :

1. Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville Soit $p > 0$ avec $n-1 < p < n$, $(n \; \in \mathbb{N}^*)$, supposons que f est une fonction telle que

${}^c D^p_{a^+} f(t)$ et ${}^L D^p_{a^+} f(t)$ existent alors

$${}^c D^p_{a^+} f(t) = {}^L D^p_{a^+} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} \quad (1.38)$$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \; \ldots.., n-1$, on aura ${}^c D^p_{a^+} f(t) = {}^L D^p_{a^+} f(t)$.

2. Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

Si f est une fonction continue on a

$${}^c D^p_{a^+} I^p_{a^+} f = f \quad \text{et} \quad I^p_{a^+} \; {}^c D^p_{a^+} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}, \quad (1.39)$$

donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'operateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

Exemples 1.2.3 *:*

1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo.

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$$^{c}D^{p}_{a^+}C = 0.$$

2. La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ ***au sens de Caputo.*** *Soit p un entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$, alors on a*

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n},$$

d'où

$$^{c}D^{p}_{a^+}(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau,$$

effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on obtient

$$\begin{aligned}
^{c}D^{p}_{a^+}(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}\int_a^1 (1-s)^{n-p-1}s^{\alpha-n}ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}
\end{aligned}$$

Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo se donne par la formule :

$$\mathcal{L}\{{}^{c}D_{0^+}^{p} f(t)\} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} \frac{d^k f(t)}{dt^k} t = 0_+ n - 1 < \alpha < n. \qquad (1.40)$$

Dérivées fractionnaire au sens de Hilfer

La dérivée fractionnaire au sens de Hilfer d'ordre $0 < \alpha < 1$ et de type $\beta \in [0, 1]$ de la fonction $h : [a, +\infty) \in \mathbb{R}$ est défini par :

$$D_{a^+}^{\alpha,\beta} h(t) = \Big[I_{a^+}^{(1-\alpha)\beta} D \Big(I_{a^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)} h \Big) \Big](t) \qquad (1.41)$$

Relation avec les dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo

– si on pose $\beta = 0$, $0 < \alpha < 1$ et $a = 0$, dans La formule de dérivée fractionnaire au sens de Hilfer (1.41) on obtient la dérivée fractionnaire classique au sens de Riemann-Liouville :

$$D_{0^+}^{\alpha,0} h(t) = \frac{d}{dt} I_{0^+}^{(1-\alpha)} h(t) = {}^{L}D_{0_+}^{\alpha} h(t)$$

– si on pose $\beta = 1$, $0 < \alpha < 1$ and $a = 0$, dans La formule de dérivée fractionnaire au sens de Hilfer (1.41) on obtient la dérivée fractionnaire classique au sens de Caputo :

$$D_{a^+}^{\alpha,1} h(t) = I_{a^+}^{(1-\alpha)} \frac{d}{dt} h(t) = {}^{c}D_{0_+}^{\alpha} h(t)$$

La dérivée fractionnaire au sens de Hilfer peut considérer comme une interpolateur entre la dérivée de Riemann- Liouville et de Caputo .

1.3 Principe du point fixe

Les théorèmes de point fixe consistent à transformer un problème donné en un problème du type $x = \phi(x)$, ainsi ils fournissent des conditions généralement santes pour lesquelles l'équation $x = \phi(x)$ admet une solution.

Définition 1.3.1 *Soient* $(\mathrm{X};\ \|.\|)$ *un espace vectoriel normé et* (x_n) *une suite de X. On dit que* (x_n) *est une suite de Cauchy si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \geq 0,\ \forall n > N,\ \forall m \geq N,\ \|x_{n+m} - x_n\| \leq \epsilon$$

Définition 1.3.2 *On dit que X est comlpet pour la norme $\|.\|$ si toute suite de Cauchy dans X est convergente. Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.*

Définition 1.3.3 *Soit X un espace normé. Un sous-ensemble $\Omega \subset X$ est dit borné s'il existe $M > 0$ telle que pour tout $x \in \Omega$ on a :*

$$||x|| \leq M.$$

Définition 1.3.4 *On dit que Ω est une partie compacte de X si de toute suite de points de Ω on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de Ω.*

Définition 1.3.5 *Une partie Ω de X est dite relativement compacte si son adhérence est compact.*

Définition 1.3.6 *Soit Ω un sous ensemble de $X = C(J,\ E)$. Ω est équicontinue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :*

$$|t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow |\phi(t_1) - \phi(t_1)| \leq \epsilon, \text{ pour tout } t_1,\ t_2 \in J \text{ et } \phi \in \Omega$$

Définition 1.3.7 *Soit* (X; $\|.\|$) *un espace vectoriel normé. Une application* ϕ *de* X *dans* X *est dite contractante s'il existe un nombre positive* $\kappa \in]\, 0, 1\, [$*, tel que pour tout* $x,\ y \in X$*, on a :*

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \kappa\ \|x - y\|.$$

Définition 1.3.8 *Soient* X *un espace vectoriel normé, de norme* $\|.\|$ *et* ϕ *une application d'un ensemble* X *dans lui même. On appelle point ffixe de* ϕ *tout point* $x \in X$ *tel que :*

$$\phi x = x.$$

Définition 1.3.9 *Soient* X *et* Y *deux espaces de Banach. L'opérateur continu* $\phi : X \to Y$ *est complètement continu s'il transforme tout borné de* X *en une partie relativement compacte dans* Y*.*

Théorème 1.3.1 *(Point Fixe de Banach) [44]*

Soient X *un espace de Banach et* $\phi : X \to X$ *est un opérateur contractant. Alors il existe un point fixe* $x \in X$ *tel que* $\phi x = x$*.*

1.4 Théorie du semigroups

Semi-groupe fortement continues à l'origine

Définition 1.4.1 *Soit* E *un espace de Banach. Une famille d' opérateurs linéaires bornés* $S(t) : E \to E$ *dépendante du paramètre* $t \geq 0$ *forme un semi groupe si*

$$\begin{cases} 1)\ S(0) = I \\ 2)\ S(t+s) = S(t)S(s);\ \forall t,\ s \geq 0 \end{cases} \tag{1.42}$$

Définition 1.4.2 *Un semi groupe $S(t)$ est dit fortement continue à l'origine ou bien semi groupe de classe C_0 si*

$$\lim_{t\to 0+} \|S(t)x - x\| = 0; \forall x \in E \tag{1.43}$$

Définition 1.4.3 *Soit $S(t)$ un semi groupe sur E le générateur infinitisimal de $S(t)$ est l'opérateur linéaire non borné A défini par*

$$A : D(A) \subset E \to E$$

$$D(A) = \{x \in E \quad \textit{tel que} \quad \lim_{t\to 0} \frac{S(t) - I}{t} x \quad \textit{existe}\},$$

et

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t} \quad \textit{pour} \quad x \in D(A) \tag{1.44}$$

$D(A)$ est le domaine de A.

Proposition 1.4.1 *Soient $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigroupe d'opérateurs linéaires bornées et A son générateur infinitisimal. Si $x \in D(A)$, alors $S(t)x \in D(A)$ et on a l'égalité $S(t)Ax = AS(t)x;\ \forall t \geq 0$.*

Démonstration 1.4.1 *Soit $x \in D(A)$. Alors pour tout $t \geq 0$, nous avons :*

$$S(t)Ax = S(t) \lim_{h\to 0} \frac{S(h)x - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h}.$$

Donc $S(t)x \in D(A)$ et on a $S(t)Ax = AS(t)x; \forall t \geq 0$. ■

Remarque 1.4.1 *On voit que : $S(t)D(A) \subseteq D(A)$; $\forall t \geq 0$.*

Lemme 1.4.1 *Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe alors :*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\sigma)x d\sigma = S(t)x$$

Pour tout $x \in E$ et $t \geq 0$.

Démonstration 1.4.2 *Ce lemme résulte de l'évaluation :*

$$\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\sigma)xd\sigma - S(t)x\right\| = \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(S(\sigma)-S(t))xd\sigma\right\| \leq \sup_{\sigma\in[t,t+h]}\left\|S(\sigma)x - S(t)x\right\|$$

et de la continuité de l'application $[0,\ \infty) \ni tS(t)x \in E$. ■

Proposition 1.4.2 *voir [65]*

Soient $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornées et* A *son générateur infinitésimal. Si* $x \in D(A)$, *alors :* $\int_0^t S(\sigma)xd\sigma \in D(A)$ *et on a l'égalité :*
$A\int_0^t S(\sigma)xd\sigma = S(t)x - x;\ \forall t \geq 0.$

Théorème 1.4.1 *voir [65] Soient* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi-groupe d'opérateur linéaire bornée et* A *son générateur infinitésimal. alors* $x \in D(A)$ *et* $Ax = y$ *si et seulement si*
$S(t)x - x = \int_0^t S(\sigma)yd\sigma;\ \forall t \geq 0.$

Proposition 1.4.3 $\forall x \in D(A); S(t)x \in D(A)$ *et* $\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$

Démonstration 1.4.3 *Remarquons que*

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0+}\frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} &= \lim_{h\to 0+}\frac{S(t)S(h) - S(t)}{h}x \\ &= \lim_{h\to 0+}\frac{S(t)(S(h)-I)}{h}x \\ &= S(t)\lim_{h\to 0+}\frac{S(h)-I}{h}x = S(t)Ax\end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{S(h)-I}{h}S(t)x = AS(t)x; \forall t \geq 0.$$

d'autre parte

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0+}\frac{S(t-h)x-S(t)x}{-h} &= \lim_{h\to 0+}\frac{S(t-h)x-S(t-h+h)x}{-h}\\ &= \lim_{h\to 0+}\frac{S(t-h)x-S(t-h)S(h)x}{-h}\\ &= \lim_{h\to 0+}S(t-h)\frac{I-S(h)}{-h}x = S(t)Ax\end{aligned}$$

Donc : $\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{S(h)-I}{h}S(t-h)x = AS(t)x.$ ■

Proposition 1.4.4 *Soit A le générateur infinitisimal d'un C_0 semigroup donc $D(A)$ est un sous espace vectoriel dense dans $E(\overline{D(A)}=E)$.*

Démonstration 1.4.4 *$D(A)$ sous espace vectorielle qu'on peut vériffie facilement.*

Comme

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t S(\sigma)xd\sigma = x\ ;\ \forall x\in E$$

donc il suffit de démontrer que

$$\forall x\in E \quad et \quad \forall t>0; \int_0^t S(\sigma)xd\sigma\in D(A)$$

En effet

$$\begin{aligned}\frac{S(h)-I}{h}\int_0^t S(\sigma)xd\sigma =& \frac{1}{h}\int_0^t\{S(h+\sigma)x-S(\sigma)x\}d\sigma\\ &= \frac{1}{h}\int_0^t S(h+\sigma)xd\sigma-\frac{1}{h}\int_0^t S(\sigma)xd\sigma\\ &= \frac{1}{h}\int_h^{h+t}S(\sigma)xd\sigma-\frac{1}{h}\int_0^t S(\sigma)xd\sigma\\ &= \frac{1}{h}\int_h^0 S(\sigma)xd\sigma+\frac{1}{h}\int_0^{t+h}S(\sigma)xd\sigma-\frac{1}{h}\int_0^t S(\sigma)xd\sigma\\ &= \frac{1}{h}l^{t+h}S(\sigma)xd\sigma-\frac{1}{h}\int_0^h S(\sigma)xd\sigma = S(t)x-x\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{h\to 0+} \frac{S(h)-I}{h} \int_0^t S(\sigma)xd\sigma = S(t)x - x$$

d'où

$$\int_0^t S(\sigma)xd\sigma \in D(A)$$

On a donc aussi $\frac{1}{t}\int_0^t S(\sigma)xd\sigma \in D(A)$*, et comme* $x = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^t S(\sigma)xd\sigma$*.*
On en déduit que $\overline{D(A)} = E$*, et* $A\int_0^t S(\sigma)xd\sigma = S(t)x - x$*. et en plus* $\int_0^t S(\sigma)Axd\sigma = S(t)x - x$. ■

Proposition 1.4.5 *L'opérateur A est fermé.*

Démonstration 1.4.5 *pour tout* $(x_n) \in D(A)$ *telle que* $x_n \to x$ *et* $Ax_n \to y$
Est-ce que $x \in D(A)$ *et* $Ax = y$ *?*
En effet, supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

$$(x_n)_n \in D(A) \quad et \quad x_n \to x_0 \quad et \quad Ax_n \to y_0$$

dans E D'aprés la démonstration précédente

$$\int_0^t S(\sigma)y_0 d\sigma = S(t)x_0 - x_0$$

Donc

$$\lim_{t\to 0+} \frac{S(t)x_0 - x_0}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}\int_0^t S(\sigma)y_0 d\sigma$$

On en déduit que $x_0 \in D(A)$ *et* $Ax_0 = y_0$*. Ainsi lopérateur A est fermé.* ■

Unicité du générateur

Théorème 1.4.2 *Soient deux C_0-semi-groupes $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur$A$. Alors :*

$$T(t) = S(t); \quad \textit{pour tout} \quad t \geq 0.$$

Démonstration 1.4.6 *Soient $t > 0$ et $x \in D(A)$. Déffinissons l'application :*

$$[0,\ t) \ni s \mapsto U(s)x = T(t-s)S(s)x \in D(A).$$

Alors :
$\frac{d}{ds}U(s)x = \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x = -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x = 0.$
Quel que soit $x \in D(A)$. Par suite $U(0)x = U(t)x$, pour tout $x \in D(A)$, d'où :

$$T(t)x = S(t)x;\ \forall x \in D(A) \quad et \quad t \geq 0.$$

Puisque $\overline{D(A)} = E$ et $T(t),\ S(t) \in \mathcal{F}(E)$, pour tout $t \geq 0$, il résulte que :

$$T(t)x = S(t)x;\ \forall t \geq 0 \quad et \quad x \in E$$

Ou bien $T(t) = S(t);\ \forall t \geq 0$. ■

Propriété de la croissance exponentielle de semi groupe

Lemme 1.4.2 *Soit $S(t)$ un semi groupe fortement continu alors il existe $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ telle que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t};\ \forall t \geq 0 \tag{1.45}$$

Démonstration 1.4.7 *Considérons le compact* $[0,1]$

Comme $S(t)$ *est fortement continue alors* $\forall x \in E; t \to S(t)x$ *est continue. Alors l'image du compact* $[0,1]$ *par cette application est borné :*

$$\exists M_x > 0 \quad \textit{telle que} \quad \|S(t)x\| \leq M_x;\ \forall t \in [0,1]$$

d'après Banach-Steinhauss

$$\exists M \quad \textit{telle que} \quad \|S(t)\| \leq M;\ \forall t \in [0,1]$$

Comme $S(0) = I \Rightarrow M \geq 1.$

Si $t \notin [0,1]$ *; on peut écrire* t *sous le forme :* $t = n + \sigma$ *ou* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\sigma \in [0,1]$

$$\begin{aligned} S(t) =& S(n+\sigma) = S(n)S(\sigma) = S(\overbrace{1+\cdots+1}^{n \text{ fois}})S(\sigma) \\ &= \{S(1)\}^n S(\sigma) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|S(t)\| &= \|\{S(1)\}^n\| \|S(\sigma)\| \leq \|S(1)\|^n \|S(\sigma)\| \\ \|S(t)\| &\leq M^n M = M e^{n \log M} = M e^{n\omega} \end{aligned}$$

Donc $\|S(t)\| \leq M e^{t\omega}$ *telle que* $\omega = \log M$. ∎

Proposition 1.4.6 *Si* $S(t)$ *est un semi groupe fortement continue à l'origine est la majoration*

$$\|S(t)\| \leq M e^{\omega t}$$

Alors $S(t)$ *est fortement continue en tout points* $s > 0$.

Démonstration 1.4.8 *Soit* $S(t)$ *un semi groupe fortement continue à l'origine pour tout*

$$x \in E;\ \|S(t)x - x\| \to 0 \quad \textit{quand} \quad t \mapsto 0^+$$

Montrons la continuité forte en un point $s > 0$?

C-à-d montrons que :

$$\forall x \in E;\ \|S(s+t)x - S(s)x\| \to 0 \quad quand \quad t \mapsto 0^+$$

Considérons sont d'abord le cas $t > 0$

$$\|S(s+t)x - S(s)x\| = \|S(t)S(s)x - S(s)x\| = \|S(t)y - y\| \to 0 \quad quand \quad t \mapsto 0^+$$

Grâce à la continuité forte à l'origine. La continuité à droite (I)

Le cas $t < 0$

$$\begin{aligned} \|S(t+s)x - S(s)x\| &= \|S(t+s)x - S(t-t+s)x\| \\ &= \|-S(t+s)(S(-t)x - x)\| \\ &\leq \|S(t+s)\|\|(S(-t)x - x)\| \\ &\leq Me^{\omega(t+s)}\|(S(-t)x - x)\| \end{aligned}$$

On a

$$\|S(-t)x - x\| \to 0 \ quand\ t \mapsto 0^+ (\ car\ t < 0\ alors\ -t > 0)$$

Donc la continuité à gauche (II)

d'après (I) et (II) alors $S(t)$ *est fortement continue.* ■

Type d'un semi-groupe

Définition 1.4.4 *On appelle type d'un* C_0 *semi groupe* $S(t)$ *le nombre* w_0 *définie par*

$$\omega_0 = \inf\{\omega \in \mathbb{R};\ \exists M \in \mathbb{R}^+ \quad telle\ que \quad \|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad pour\ tout \quad t \geq 0\}$$

$$\omega_0 = \lim_{t \to 0+} \frac{\log \|S(t)\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\log \|S(t)\|}{t} \tag{1.46}$$

Semi-groups importants :

Si $\forall t \geq 0$ on a $\|S(t)\| \leq M$ le semi groupe $S(t)$ est *dit* borné.

Si $\forall t \geq 0$ on a $\|S(t)\| \leq 1$ le semi groupe $S(t)$ est *dit* contraction.

La transformée de Laplace d'un C_0-semi groupe

Dans la suite, pour $\omega \geq 0$ nous désignerons par A_ω l'ensemble

$$A_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda > \omega > \omega_0\}$$

Soit $\lambda \in A_\omega$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornées nous avons

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}; \forall t \geq 0.$$

Et on voit que

$$\|e^{-\lambda t}S(t)x\| \leq e^{-\lambda .t}\|S(t)\|\|x\| \leq Me^{-(\lambda-\omega)t}\|x\| \ ; \ \forall x \in E$$

Définissons l'application $R_\lambda : E \to E$ Par

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt$$

Il est clair que R_λ est un opérateur linéaire. De plus on a

$$\|R_\lambda x\| \leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda t}S(t)x\|dt \leq \frac{M}{\lambda - \omega}\|x\|; \forall x \in E$$

d'ou il résulte que R_λ est un opérateur linéaire borné.

Définition 1.4.5 *L'opérateur* $R : A_\omega \to \mathcal{F}(E)$

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)dt \tag{1.47}$$

S'appelle la transformée de Laplace du semi groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Théorème 1.4.3 *Si λ est telle que*

$$\lambda > \omega_0 = \lim_{t \to 0+} \frac{\log \|S(t)\|}{t}$$

Alors $\lambda \in \rho(A)$ et l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt$ existe. Et :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) x dt = R(\lambda,\ A) x$$

Démonstration 1.4.9 *Si $\omega_0 < \omega < \lambda$ on a $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$*

$$\begin{aligned} \| \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt \| \ &\leq \ \int_0^\infty \|e^{-\lambda t} S(t)\| dt = \int_0^\infty |e^{-\lambda t}| \|S(t)\| dt \\ &= M \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} e^{\omega t} dt = M \int_0^\infty e^{(\omega - \lambda) t} dt \end{aligned}$$

Ainsi si $\omega_0 < \lambda$ alors l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt$ existe.
Notons par $R(\lambda)$ l'opérateur définit pour chaque $x \in E$ par

$$R(\lambda) x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) x dt$$

Tout d'abord on va montrer que

$$\forall x \in E;\ R(\lambda) x \in D(A)$$

En effet $\forall x \in E$ on a

$$\frac{S(h) - I}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) x dt = \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} [S(t+h)x - S(t)x] dt$$

On pose $t + h = \sigma$ alors on a

$$\begin{aligned} \frac{S(h) - I}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) x dt =& \frac{1}{h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda(\sigma - h)} S(\sigma) x d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda \sigma} S(\sigma) x d\sigma \\ =& \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda \sigma} S(\sigma) x d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda(\sigma - h)} S(\sigma) x d\sigma \\ =& \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} R(\lambda) x - e^{\lambda h} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda \sigma} S(\sigma) x d\sigma \end{aligned}$$

Si $h \to 0$; on obtient

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x \Rightarrow (\lambda - A)R(\lambda)x = x; \forall x \in E$$

Alors $R(\lambda)$ est linverse à gauche de 1'opérateur $(\lambda I \ - A)$.

L *inverse à droite ?*

Pour montrer que c'est un inverse à droite de $(\lambda I - A)$ il suffit de montrer que $AR(\lambda) = R(\lambda)A$

On a. Si $x \in D(A)$; on a

$$\begin{aligned} AR(\lambda)x =& A\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}S(t)xdt = \lim_{h\to 0+}\frac{S(h)-I}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}S(t)xdt \\ =& \lim_{h\to 0+}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{S(h)-I}{h}S(t)xdt = \lim_{h\to 0+}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}S(t)\frac{S(h)-I}{h}xdt \\ =& \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}S(t)\lim_{h\to 0+}\frac{S(h)-I}{h}xdt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}S(t)Axdt \\ =& \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}S(t)dtAx = R(\lambda)Ax. \end{aligned}$$

Ainsi on a déduire que $R(\lambda)(\lambda I \ - A)x = x$

d'où $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ c'est-à-dire $R(\lambda) = R(\lambda, A)$. ■

Étude de la croissance de la Résolvante

On a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\lambda > \omega > \omega_0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}S(t)xdt$ est convergente.

$$e^{-\lambda t}\|S(t)x\| \leq \|x\|M_{\in}e^{(-\lambda+\omega_0+\epsilon)t} \text{ où } \epsilon \ > 0$$

De cette manière on peut définit l'opérateur borné

$$R(\lambda) : E \to E;\ R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}S(t)xdt \text{ telle que } \lambda > \omega_0 + \epsilon.$$

Et que
$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{M_\epsilon}{\lambda - \omega_0 - \epsilon}$$
d'autre part on a $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda \leq \omega_0\}$, et en générale $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda > \omega_0\}$. Et on a
$$R(\lambda,\ A) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)dt \quad \text{et} \quad \|R(\lambda,\ A)\| \leq \frac{M_0}{\lambda - \omega_0}.$$

Proposition 1.4.7
$$(R(\lambda,\ A))^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{n-1} S(t)dt$$

Démonstration 1.4.10 *Tout d'abord on remarque que l'on a* $R(\lambda,\ A) - R(\mu,\ A) = (\mu - \lambda)R(\lambda,\ A)R(\mu,\ A)$ *identité des résolvante de Hilbert.*
$$\frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\lambda - \mu} = -R(\lambda,\ A)R(\mu,\ A)$$
$$\Rightarrow \lim_{\lambda \to \mu} \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\lambda - \mu} = \lim_{\lambda \to \mu}(-R(\lambda,\ A)R(\mu,\ A))$$
$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda,\ A) = -(R(\lambda,\ A))^2$$
Par récurrence on peut démontrer facilement que
$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda,\ A) = (-1)^n n!(R(\lambda,\ A))^{n+1}$$
Alors :
$$(R(\lambda,\ A))^n = \frac{1}{(-1)^{n-1}(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda,\ A)$$
$$(R(\lambda,\ A))^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{n-1} T(t)dt;\ \forall \lambda \in \rho(A)$$

Donc :

$$\|R(\lambda,\ A)^n\| \leq \frac{M}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-\omega)t}t^{n-1}dt$$

On obtient : $\|R(\lambda,\ A)^n\| \leq \dfrac{M}{(\lambda-\omega)^n}$. ■

L'approximation généralisée de Yosida

Lemme 1.4.3 *Soit* $A : D(A) \subset E \to E$ *un opérateur linéaire vériffiant les propriétés suivantes*

- ⋄ A *est un opérateur fermé et* $\overline{D(A)} = E$.
- ⋄ *Il existe* $\omega \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *tel que* $A_\omega \subset \rho(A)$ *et pour* $\lambda \in A_\omega$ *; on a*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n};\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Alors pour tout $\lambda \in A_\omega$ *; nous avons* $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda,\ A)x = x; \forall x \in E$ *De plus :* $\lambda AR(\lambda,\ A) \in \mathcal{F}(X)$

Et : $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda AR(\lambda,\ A)x = Ax;\ \forall x \in D(A)$

Remarque 1.4.2 *On peut dire que les opérateurs bornés* $\lambda AR(\lambda, \mathcal{A})$ *sont des approximations pour l'opérateur non borné* A*. C'est le motif pour lequel on introduit le théorème suivant.*

Théorème 1.4.4 *La famille* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in A_\omega} \subset \mathcal{F}(E)$ *; où*

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$$

S'appelle l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A.

Démonstration 1.4.11 *On a* $(\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1} = I \Rightarrow (\lambda I - A)R(\lambda, A) = I$

$$\Rightarrow \lambda R(\lambda, A) - AR(\lambda, A) = I\ \ \Rightarrow \lambda^2 R(\lambda,\ A) - \lambda AR(\lambda, A) = \lambda I$$

$$\Rightarrow \lambda^2 R(\lambda,\ A) - \lambda I\ = \lambda AR(\lambda,\ A) = A_\lambda.\ ■$$

Théorème de Hille-Yosida

Théorème 1.4.5

Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \to E$ est le générateur infinitésimal d'un semi groupe $S(t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornées si et seulement si

(i) *A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = E$.*

(ii) Il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $A_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in A_\omega$; on a :

$$\|(\lambda I \ - A)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}; \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{1.48}$$

Démonstration 1.4.12 ($\Rightarrow$) *déjà démontrée.*

($\Leftarrow$) *Dans ce but introduisant tout d'abord la notion d'approchante yosida* ■

Définition 1.4.6 *Pour $\lambda > \omega$ on déffinit les approchant yosida de A par :*

$$A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda,\ A) - \lambda I = \lambda A R(\lambda,\ A).$$

Lemme 1.4.4 *On a*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = Ax\ ;\ \forall x \in D(A).$$

Démonstration 1.4.13 *soit $x \in D(A)$: $\|\lambda R(\lambda,\ A)x - x\| = \|AR(\lambda,\ A)x\|$*

$$= \|R(\lambda,\ A)Ax\| \leq \|R(\lambda,\ A)\|.\ \|Ax\| \leq \frac{M}{\lambda - w}\|Ax\|\lambda \to 0, \lambda \to +\infty$$

D'aprés Banach-Steinhauss :

$$\lambda R(\lambda,\ A)x \to 0,\ \textit{quand}\ \lambda \to +\infty\ ;\ \forall x \in D(A)$$

Or : $\overline{D(A)} = E$: $\|R(\lambda,\ A)\| \leq \dfrac{M\lambda}{\lambda - w} \leq c$

Alors d'aprés Banach-Steinhauss : $\lambda R(\lambda,\ A)x \to x : \forall x \in E$

Ainsi : $A_\lambda x \to Ax;\ \forall x \in D(A)$

$$\{A_\lambda x = \lambda R(\lambda,\ A)Ax \to Ax\}■$$

Lemme 1.4.5 *Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés telle que $A \subset B$ et $\rho(A) \cap \rho(B) = \phi$. Alors $A = B$.*

Démonstration 1.4.14 *soit $x \in D(B)$ et $\lambda_0 \in \rho(A) \cap \rho(B)$ posons : $Bx - \lambda_0 = y$ et $z = (A - \lambda_0 I)^{-1} y$*
$\Rightarrow z \in D(A)$ et de plus $Az - \lambda_0 z = y$
$\Rightarrow z \in D(B) : Bz - \lambda_0 z = y$
$\Rightarrow z = (B - \lambda_0 I)^{-1} y = (B - \lambda_0 I)^{-1}(B - \lambda_0 I)x = x$
$\Rightarrow x \in D(A)$
Ainsi $D(A) = D(B) \Rightarrow A = B$. $\blacksquare$

Démonstration 1.4.15 *(suite de la Démonstration de la Suffisance de théorème de Hille-Yosida) : Pour chaque $\lambda > w$: soit $A_\lambda = \lambda^2(\lambda I - A)^{-1} - \lambda I \Rightarrow A_\lambda \in L(E)$; on peut alors construire le Semi-groupe :*

$$S_t^\lambda = e^{A_\lambda t} = e^{\lambda^2 t(\lambda I - A)^{-1} - \lambda t}$$

$$S_t^\lambda = e^{A_\lambda . t} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!} (\lambda I - A)^{-1}$$

On va montrer que la limite de Semi-groupe S_t^λ existe quand $\lambda \to +\infty$ et que de Semi-groupe chercher S_t.

Notons que :

$$\begin{aligned} \|S_t^\lambda\| &\leq e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!} \frac{M}{(\lambda - w)^n} \\ &= M.\ \exp(\frac{\lambda w t}{\lambda - w}) \end{aligned}$$

Il facile de voir que : $A_\lambda . A_\mu = A_\mu . A_\lambda$ (vue que : $R(\lambda, A).R(\mu,\ A) = R(\mu,\ A).R(\lambda,\ A)$) est que : $A_\lambda . S_t^\mu = S_t^\mu . A_\lambda$

Soit $x \in D(A)$ *on a :*

$$\begin{aligned} S_t^\lambda x - S_t^\mu x &= \int_0^t \frac{d}{ds}(S_{t-s}^\mu S_s^\lambda) \\ &= \int_0^t S_{t-s}^\mu (A_\lambda - A_\mu) S_s^\lambda ds \\ &= \int_0^t S_{t-s}^\mu S_s^\lambda (A_\lambda - A_\mu) x ds \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|S_t^\lambda x - S_t^\mu x\| \leq M^2 . \exp(\frac{\mu w t}{\mu - w}) \|(A_\lambda - A_\mu)x\| . \int_0^t \exp(-\frac{(\lambda-\mu)w^2 s}{(\mu-w)(\lambda-w)}) ds$$

Choisi : $\lambda > \mu$

$$\|S_t^\lambda x - S_t^\mu x\| \leq M^2 . \exp(\frac{\mu w t}{\mu - w}) t \|(A_\lambda - A_\mu)x\| .$$

(et on a $A_\lambda x \to Ax$ *car* $\lambda,\ \mu \to \infty$*)*

Donc $S_t^\lambda x$ *converge fortement vers une limite qu'on note par :* $S_t x$*.*

Il reste que S_t *est un* C^0*-Semi-groupe dans le générateur infinitésimal* A*.*

$\diamond$ $S_{t+s}x = \lim_{\lambda\to\infty} S_{t+s}^\lambda x = \lim_{\lambda\to\infty} S_t^\lambda . S_s^\lambda x = S_t . S_s x ; \forall x \in E ; \forall t,\ s \geq 0$

$\diamond$ $S_0 x = \lim_{\lambda\to\infty} S_0^\lambda x = Ix = x \Rightarrow S_0 = I$

$\diamond$ *la continuité forte est une conséquence directe de la continuité uniforme sur le compacte.*

A *est le générateur infinitésimal de* S_t *?*

Soit $x \in D(A)$

$$S(t)x - x = \lim_{\lambda\to\infty}(e^{A_\lambda t}x - x) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda ds = \int_0^t S(s)Axds$$

Soit B *le générateur de* $S(t)$ *et soit* $x \in D(A)$

$$\Rightarrow \quad \frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} . \int_0^t S(s)Axds$$

$$\Rightarrow \quad x \in D(B); Bx = Ax$$

$$\Rightarrow \ B \supseteq A$$

Si $\lambda > w$ *on' a tout d'abord* $\lambda \in \rho(A)$ *et* $\lambda \in \rho(B)$ *d'après de condition nécessaire de Hille-Yosida alors d'après le lemme précédente :* $A = B$.

Ainsi le théorème est démontré.

Chapitre 2

Solvabilité et Contrôle Optimal des Inclusions d'Evolution Fractionnaires Impulsives au sens de Hilfer avec Retard et Sous-différentiel de Clarke

2.1 Résultats préliminaires

Nous sommes concernés par le contrôle des inclusions différentielle fractionnaire avec retard du type suivant :

$$\begin{cases} D_{t_i^+}^{\alpha,\beta} x(t) \in Ax(t) + Bu(t) + F(t, x(t-\sigma)) + \partial G(t, x(t-\delta)), t \in (0,b] - \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}, \\ I_{0^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)}[x(t)]|_{t=0} = x_0, \\ I_{t_i^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)} x(t_i^+) = x(t_i^-) + I_i(x(t_i^-)),\ i = 1, 2, \ldots, m, \\ u(t) \in U_{ad}, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $D_{t_i^+}^{\alpha,\beta}$ désigne la dérivée fractionnaire au sens Hilfer d'ordre α et de type β tel que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $0 \leq \beta \leq 1$. Nous supposons que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continue $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ dans un espace de Banach X, B est un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach séparable et reflexive Y vers X et $\partial G(t,\cdot)$ est le sous-différentiel de Clarke de $G(t,\cdot)$. Soient $J=[0,b], J'=(0,b], J''=J'-\{t_1,t_2,\dots,t_m\}, 0=t_0<t_1<\dots<t_m<t_{m+1}=b, I_i: X\to X$ des fonctions impulsives qui caractérisent le saut des solutions aux points d'impulsions t_i, $F: J\times X\to 2^X\backslash\emptyset$est une application multivaluée nonlinéaire et σ,δ sont des arguments de retard. Comme d'habitude $x(t_i^+)$ et $x(t_i^-)$ sont des limites à droite et à gauche de x au point t_i respectivement, et U_{ad} désigne un ensemble de contrôle admissible. Soit $\mathcal{A}_{ad}$ un ensemble de toutes les paires de contrôle d'état admissibles (x,u) pour lequel nous pouvons présenter le coût fonctionnel comme

$$\mathcal{J}(x,u)=\sum_{i=0}^{m}\int_i^{i+1}\mathcal{L}(t,x^u(t-\sigma),x^u(t-\delta),u(t))dt. \tag{2.2}$$

Définition 2.1.1 *Soient X un espace de Banach, X^* sont dual, et $G: X\to\mathbb{R}$ un fonctionnel localement lipschitzien sur X. La dérivée directionnelle généralisée de Clarke de G au point $x\in X$ dans la direction $z\in X$, notée $G^0(x;z)$, est défini par*

$$G^0(x;z)=\lim_{\lambda\to 0^+}\sup_{y\to x}\frac{G(y+\lambda z)-G(y)}{\lambda}.$$

Le gradient généralisé de Clarke de G au $x\in X$, notée par $\partial G(x)$, est un sous-espae de X^* donné par

$$\partial G(x)=\{x^*\in X^*: G^0(x;z)\geq<x^*;z>,\forall z\in X\}.$$

Tout au long de ce chapitre, on note par $PC(J,X)$, l'espace des fonctions bornées à valeurs dans X sur J avec la norme uniforme $\|x\|_{PC}=$

$\sup\{\|x(t)\|, t \in J\}$ tel que $x(t_i^+)$ existe pour tout $i = 0, \dots, m$, et $x(t)$ est continu sur $J_i, i = 0, \dots, m$, où $J_i = (t_i, t_{i+1}]$ et $t_0 = 0, t_{m+1} = b$. Soit $q = \alpha + \beta - \alpha\beta$, alors $1 - q = (1-\alpha)(1-\beta)$, définissons $PC_{1-q}(J, X) = \{x : (t - t_i)^{1-q}x(t) \in PC(J, X)\}$, avec la norme $\|\cdot\|_q$ Défini par $\|x\|_q = \max\limits_{i=0,1,\dots,m} \sup\limits_{t\in J_i}\{(t-t_i)^{1-q}\|x(t)\|, q = \alpha+\beta-\alpha\beta, t \in J'\}$. Clairement, $PC_{1-q}(J, X)$ est un espace de Banach.

Soit $L^p(J, X), 1 \leq p < \infty$, l'espace des fonctions intégrables au sens de Bochner de J vers X avec la norm $\|f\|_{L^p(J,X)} = \left(\int_0^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$.

On note aussi $P(X) = \{Y \in 2^X : Y \neq \emptyset\}$, $P_{cl}X = \{Y \in P(X), Y \text{ est fermé}\}$,
$P_bX = \{Y \in P(X), Y \text{ est borné}\}$, $P_cX = \{Y \in P(X), Y \text{ est convexe}\}$,
$P_{cp}X = \{Y \in P(X), Y \text{ est compact}\}$.

Nous aurons besoin des résultats suivants.

Définition 2.1.2 (See [33]) *(1) Une fonction mesurable $x : J \to X$ est Bochner intégrable si et seulement si $\|x\|$ est Lebesgue intégrable.*

(2) Une application multi-valuée $F : X \to 2^X$ est dite à valeur convexe (à valeur fermée) si $F(x)$ est convexe (fermée) pour tout $x \in X$; est dite bornée sur des ensembles bornés si $F(B) = \bigcup\limits_{x\in B} F(x)$ est borné dans X pour tout $B \in P_b(X)$.

(3) Une application F est dite semi-continue supérieurement (s.c.s.) sur X si pour chaque $x_0 \in X$ l'ensemble $F(x_0)$ est un sous-ensemble fermé non vide de X, et si pour chaque sous-ensemble ouvert Ω de X contenant $F(x_0)$, il existe un voisinage ouvert $\bigtriangledown$ de x_0 tel que $F(\bigtriangledown) \subseteq \Omega$.

(4) Une application F est dite complètement continu si $F(B)$ Est relativement compact pour chaque $B \in P_b(X)$. si l'application multi-valuée F est complètement continu avec des valeurs compactes non vides,

alors F est s.c.s. si est seulement si le graphe de F est fermé, i.e., $x_n \to x, y_n \to y, y_n \in F(x_n)$ implique $y \in F(x)$.

Nous disons que F a un point fixe s'il y a $x \in X$ tel que $x \in F(x)$.

(5) Une application multi-valuée $F : J \to P_{cl}(X)$ est dite mesurable si pour chaque $x \in X$ la fonction $y : J \to \mathbb{R}$ défini par $y(t) = d(x, F(t)) = \inf\{\|x - z\|, z \in F(t)\}$ is measurable.

(6) Une application multi-valuée $F : X \to 2^X$ est dite condensé si pour tout sous-ensemble borné $B \subset X$ avec $\beta(B) \neq 0$ on a $\beta(F(B)) < \beta(B)$, où $\beta(\cdot)$ désigne la mesure de non-compacité de Kuratowski définie comme suit : $\beta(B) := \inf\{d > 0 : B$ Peut être couvert par un nombre fini de boules de rayon $d\}$.

Les résultats suivants sont motivés par [59].

Proposition 2.1.1 (Cf. [59]) *soit J un intervalle réel compact et soit X un espace de Banach. L'application multivalué non linéaire $F : J \times X \to P_{b,cl,c}(X)$ satisfait les conditions suivantes :*

1. *pour chaque $x \in X$, $(t, x(t - \sigma)) \to F(t, x(t - \sigma))$ est mesurable par rapport à t ;*
2. *pour chaque $t \in J$, $(t, x(t - \sigma)) \to F(t, x(t - \sigma))$ is s.c.s. par rapport à x ;*
3. *pour chaque $x \in X$ fixé et pour $t \in J$ p.p., l'ensemble*

$$S_x^F = \left\{ f \in L^1(J \times X, X) : f(t, x(t - \sigma)) \in F(t, x(t - \sigma)) \right\}$$

est non-vide.

Aussi, soit Υ une application linéaire continue de $L^1(J\times X,X)$ vers $PC_{1-q}(J,X)$. Alos, l'opérateur

$$\Upsilon\circ S_x^F : L^1(J\times X,X)\longrightarrow \Upsilon_{cp,c}(PC_{1-q}(J,X))$$
$$x\longmapsto \Upsilon\circ S^F(x):=\Upsilon(S_x^F)$$

est un opérateur de graphe fermé.

Lemme 2.1.1 (See [33]) *Soit Ω un ensemble borné, convexe, et fermé dans l'espace de Banach X et soit $F:\Omega\to 2^\Omega\setminus\emptyset$ un s.c.s. application condensée multi-valuée. Si pour chaque $x\in\Omega$, $F(x)$est un ensemble fermé et convexe dans Ω, alors F a un point fixe dans Ω.*

Selon les définitions précédentes, il convient de réécrire le problème (2.1) comme l'inclusion intégrale équivalente

$$\begin{cases} x(t)\in \frac{x_0}{\Gamma(\alpha+(1-\alpha)\beta)}t^{q-1} \\ \quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[Ax(s)+Bu(s)+F(s,x(s-\sigma))+\partial G(s,x(s-\delta))]ds,\ t\in[0,t_1), \\ \\ x(t)\in \frac{x(t_1^-)+I_1(x(t_1^-))}{\Gamma(\alpha+(1-\alpha)\beta)}(t-t_1)^{q-1} \\ \quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1}[Ax(s)+Bu(s)+F(s,x(s-\sigma))+\partial G(s,x(s-\delta))]ds,\ t\in(t_1,t_2), \\ \vdots \\ x(t)\in \frac{x(t_m^-)+I_m(x(t_m^-))}{\Gamma(\alpha+(1-\alpha)\beta)}(t-t_m)^{q-1} \\ \quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_m}^t (t-s)^{\alpha-1}[Ax(s)+Bu(s)+F(s,x(s-\sigma))+\partial G(s,x(s-\delta))]ds,\ t\in(t_m,b]. \end{cases} \tag{2.3}$$

Pour définir une solution douce du système (2.3), nous introduisons la fonction Wright $M_\alpha(\theta)$, qui est donné par

$$M_\alpha(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\theta)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(1-\alpha n)}, 0<\alpha<1, \theta\in\mathbb{C},$$

et satisfait l'égalité $\int_0^\infty \theta^\tau M_\alpha(\theta)d\theta=\frac{\Gamma(1+\tau)}{\Gamma(1+\alpha\tau)}$, for $\theta\geq 0$.

Définition 2.1.3 (Cf. [20]) *Une paire de fonctions* $(x, u) \in PC_{1-q}(J, X) \times U_{ad}$ *est appelé une solution douce de* (2.1) *si*

(1) $I_{0^+}^{(1-q)}[x(t)]|_{t=0} = x_0 \in X,$

(2) $I_{t_i^+}^{(1-q)} x(t_i^+) = x(t_i^-) + I_i(x(t_i^-)),\ i = 1, 2, \ldots, m,$

(3) il existe des fonctions $f \in L^1(J \times X, X)$ *et* $g \in L^p(J \times X, X), \frac{1}{p} < \alpha < 1$, *tel que* $f(t, x(t-\sigma)) \in F(t, x(t-\sigma))$ *et* $g(t, x(t-\delta)) \in \partial G(t, x(t-\delta))$ *p.p. sur* J *et les équations intégrales suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{cases} x(t) = S_{\alpha,\beta}(t)x_0 \\ \qquad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))]ds,\ t \in [0, t_1), \\ \\ x(t) = S_{\alpha,\beta}(t-t_1)[x(t_1^-) + I_1(x(t_1^-))] \\ \qquad + \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))]ds,\ t \in (t_1, t_2), \\ \vdots \\ x(t) = S_{\alpha,\beta}(t-t_m)[x(t_m^-) + I_m(x(t_m^-))] \\ \qquad + \int_{t_m}^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))]ds,\ t \in (t_m, b], \end{cases} \tag{2.4}$$

où $P_\alpha(t) = \int_0^\infty \alpha\theta M_\alpha(\theta) S(t^\alpha\theta) d\theta, S_{\alpha,\beta}(t) = I_{0^+}^{(1-\alpha)\beta} T_\alpha(t)$ *and* $T_\alpha(t) = t^{\alpha-1} P_\alpha(t)$.

Lemme 2.1.2 *On a les propriétés suivantes[20, 72] :*

(a) $S(t)$ *est continu dans la topologie uniforme de l'opérateur pour* $t \geq 0$, *et* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est uniformément borné, c'est-à-dire qu'il existe* $M > 1$ *tel que* $\sup_{t\in[0,\infty)} \|S(t)\| < M$,

(b) $P_\alpha(t)$ *est continu dans la topologie uniforme des opérateurs pour* $t > 0$,

(c) pour tout $t > 0, \{T_\alpha(t)\}_{t>0}$ *fixé et* $\{S_{\alpha,\beta}(t)\}_{t>0}$ *sont des opérateurs*

linéaires, et pour tout $x \in X$,

$$\|T_\alpha(t)x\| \leq \frac{Mt^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\|x\|, \ \|S_{\alpha,\beta}(t)x\| \leq \frac{Mt^{q-1}}{\Gamma(\alpha+(1-\alpha)\beta)}\|x\|,$$

(d) $\{T_\alpha(t)\}_{t>0}$ and $\{S_{\alpha,\beta}(t)\}_{t>0}$ sont fortement continus, ce qui signifie que pour tout $x \in X$, et $0 < t' < t'' \leq b$, nous avons $\|T_\alpha(t')x - T_\alpha(t'')x\| \to 0$ and $\|S_{\beta,\alpha}(t')x - S_{\alpha,\beta}(t'')x\| \to 0$, quand $t' \to t''$.

2.2 Résultats de solvabilité

Afin d'étudier les résultats de solvabilité pour le contrôle de l'inclusion différentielle fractionnaire impulsive au sens de Hilfer avec retard et sous-différentiel de Clarke (2.1), nous devons d'abord formuler l'ensemble des conditions suffisantes :

(H_1) Il existe une constante positive ω telle que l'application multi-valuée $F : J \times X \to P_{c,cp}(X)$ satisfait $\|F(t,x)\| \leq \omega\|x\|$ pour tout $t \in J, x \in X$, où

$$\|F(t,x)\| = \sup\{\|f\| : f(t,x) \in F(t,x)\}.$$

(H_2) la fonctionnelle $G : J \times X \to \mathbb{R}$ satisfait

(i) $G(\cdot,x) : J \to \mathbb{R}$ est mesurable pour tous $x \in X$;

(ii) $G(t,\cdot) : X \to \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne pour p.p. $t \in J$;

(iii) il existe une fonction $a(t) \in L^p(J,\mathbb{R}^+), (\frac{1}{p} < \alpha < 1)$ et une constante $c > 0$ tel que

$$\|\partial G(t,x)\| = \sup\{\|g\| : g(t,x) \in \partial G(t,x)\} \leq a(t)+c\|x\|, \text{ pour p.p. } t \in J \text{ et tout } x \in X.$$

(H_3) L'ensemble de contrôle admissible U_{ad} est un sous-ensemble borné fermé convexe de $L^p(J,Y)$ tel que

(i) $U_{ad} = S_U^p = \{u \in L^p(J,Y) : u(t) \in U(t) \text{ pour p.p. } t \in J\}, \frac{1}{p} < \alpha < 1$;

(ii) $\|U(t)\| = \sup\{\|z\| : z \in U(t)\} \leq u(t)$ pour p.p. $t \in J$;

(iii) $U_{ad} \neq \emptyset$ et $Bu \in L^p(J,X)$ pour tout $u \in U_{ad}$.

(H$_4$) pour chaque $x, x_1, x_2 \in X$ et tout $t \in (t_i, t_{i+1}], i = 1, \ldots, m$, Il existe $b_i, d_i > 0$, satisfait

$$\|I_i(x^-(t))\| \leq b_i, \ \|I_i(x_1^-(t)) - I_i(x_2^-(t))\| \leq d_i \sup_{t \in J_i} \|x_1^-(t) - x_2^-(t)\|.$$

Pour $x \in PC_{1-q}(J,X)$, nous définissons l'opérateur $\mathcal{F}^q : PC_{1-q}(J,X) \to 2^{PC_{1-q}(J,X)}$ comme suit : $\mathcal{F}^q(x) = y \in PC_{1-q}(J,X)$:

$$y(t) = \begin{cases} S_{\alpha,\beta}(t)x_0 \\ \qquad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))]ds, \ t \in [0, t_1], \\ \\ S_{\alpha,\beta}(t-t_{k-1})[x(t_{k-1}^-) + I_{k-1}(x(t_{k-1}^-))] \\ \qquad + \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))]ds, \ t \in (t_{k-1}, t_k], \end{cases}$$

où $k = 2, \ldots, m+1$. Notons que les points fixes de $\mathcal{F}^q$ sont des solutions douces du système différentiel de contrôle fractionnaire de Hilfer impulsif(2.1).

Théorème 2.2.1 *soient $u \in U_{ad}$ et $x_0 \in X$. Si des conditions suffisantes (H$_1$)–(H$_4$) sont satisfaites, alors $\mathcal{F}^q$ a un point fixe sur J pour chaque $q = \alpha + \beta - \alpha\beta$ et $p\alpha > 1$, à condition que* $\left[\frac{M(1+d_{k-1})(t_k - t_{k-1})^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha + (1-\alpha)\beta)}\right] < 1$.

Preuve. Afin de prouver l'existence de solutions douces pour le système (2.1), nous divisons la preuve en plusieurs étapes.

Étape 1. Pour chaque $q = \alpha + \beta - \alpha\beta$, $\mathcal{F}^q(x)$ est borné. Pour $y \in \mathcal{F}^q(x)$, en utilisant l'ensemble des conditions suffisantes, Lemme 2.1.2 et l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\|y(t)\|_q \leq \begin{cases} \sup\limits_{t\in[0,t_1]}\Big\{t^{1-q}\|S_{\alpha,\beta}(t)x_0\| \\ \quad +t^{1-q}\left\|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}P_\alpha(t-s)[Bu(s)+f(s,x(s-\sigma))+g(s,x(s-\delta))]ds\right\|\Big\}, \\ \\ \sup\limits_{t\in(t_{k-1},t_k]}\Big\{(t-t_{k-1})^{1-q}\|S_{\alpha,\beta}(t-t_{k-1})[x(t_{k-1}^-)+I_{k-1}(x(t_{k-1}^-))]\| \\ \quad +(t-t_{k-1})^{1-q}\left\|\int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1}P_\alpha(t-s)[Bu(s)+f(s,x(s-\sigma))+g(s,x(s-\delta))]ds\right| \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} \frac{Mt^{q-1}}{\Gamma(\alpha+(1-\alpha)\beta)}\|x_0\|_q + t^{1-q}\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\Big[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|B\|\|u(s)\|_Y ds \\ +\omega\int_{-\sigma}^{t-\sigma}(t-\eta-\sigma)^{\alpha-1}\|x(\eta)\|d\eta + \int_{-\delta}^{t-\delta}(t-\mu-\delta)^{\alpha-1}[a(\mu)+c\|x(\mu)\|]d\mu\Big], t\in[0,t_1], \\ \\ \frac{M(t-t_{k-1})^{q-1}}{\Gamma(\alpha+(1-\alpha)\beta)}[\|x(t_{k-1}^-)\|_q + (t-t_{k-1})^{1-q}b_{k-1}] \\ +(t-t_{k-1})^{1-q}\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\Big[\int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1}\|B\|\|u(s)\|_Y ds \\ +\omega\int_{t_{k-1}-\sigma}^{t-\sigma}(t-\eta-\sigma)^{\alpha-1}\|x(\eta)\|d\eta + \int_{t_{k-1}-\delta}^{t-\delta}(t-\mu-\delta)^{\alpha-1}[a(\mu)+c\|x(\mu)\|]d\mu\Big], \\ t\in(t_{k-1},t_k], \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} \frac{Mt_1^{q-1}}{\Gamma(\alpha+(1-\alpha)\beta)}\|x_0\|_q + t_1^{1-q}\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t (t-s)^{\frac{p(\alpha-1)}{p-1}}ds\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\|B\|\|u\|_{L^p(J,Y)}+\|a\|_{L^p(J,\mathbb{R}^+)}\right) \\ +\frac{M(\omega+c)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|x(s)\|_q ds, t\in[0,t_1], \\ \\ \frac{M(t_k-t_{k-1})^{q-1}}{\Gamma(\alpha+(1-\alpha)\beta)}[\|x(t_{k-1}^-)\|_q + (t_k-t_{k-1})^{1-q}b_{k-1}] \\ +(t_k-t_{k-1})^{1-q}\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\frac{p(\alpha-1)}{p-1}}ds\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\|B\|\|u\|_{L^p(J,Y)}+\|a\|_{L^p(J,\mathbb{R}^+)}\right) \\ +\frac{M(\omega+c)}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1}\|x(s)\|_q ds, t\in(t_{k-1},t_k], \end{cases}$$

Ainsi, pour chaque $x\in PC_{1-q}(J,X)$, il existe une constante positive r satisfaisant $\|x\|_q \leq r$. Par conséquent, $\mathcal{F}^q(\Omega_r)\subset\Omega_r$, où $\Omega_r = \{x\in PC_{1-q}(J,X):$

$\|x\|_q \le r\}$.

Étape 2. $\mathcal{F}^q(x)$ est convexe pour chaque $x \in \Omega_r$. Si $y_1, y_2 \in \mathcal{F}^q(x)$, alors il existe $u_1, u_2 \in U_{ad}, f_1, f_2 \in S_x^F$, $g_1, g_2 \in \partial G$ et $I_{i,1}, I_{i,2} \in X, i = 1, \ldots, m$, tel que, pour chaque $t \in J$, on a

$$y_j(t) = \begin{cases} S_{\alpha,\beta}(t)x_0 \\ \qquad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu_j(s) + f_j(s, x(s-\sigma)) + g_j(s, x(s-\delta))]ds, \ t \in [0, t_1], \\ \\ S_{\alpha,\beta}(t-t_{k-1})[x(t_{k-1}^-) + I_{k-1,j}(x(t_{k-1}^-))] \\ \qquad + \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu_j(s) + f_j(s, x(s-\sigma)) + g_j(s, x(s-\delta))]ds, \ t \in (t_{k-1}, t_k], \end{cases}$$

$j = 1, 2$. Soit $0 \le \lambda \le 1$. alors,

$\lambda y_1(t) + (1-\lambda) y_2(t) =$

$$\begin{cases} S_{\alpha,\beta}(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)\Big[B\{\lambda u_1(s) + (1-\lambda)u_2(s)\} + \lambda f_1(s, x(s-\sigma)) \\ \quad + (1-\lambda) f_2(s, x(s-\sigma)) + \lambda g_1(s, x(s-\delta)) + (1-\lambda) g_2(s, x(s-\delta))\Big] ds, \ t \in [0, t_1], \\ \\ S_{\alpha,\beta}(t-t_{k-1})[x(t_{k-1}^-) + \lambda I_{k-1,1}(x(t_{k-1}^-)) + (1-\lambda) I_{k-1,2}(x(t_{k-1}^-))] \\ \quad + \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)\Big[B\{\lambda u_1(s) + (1-\lambda)u_2(s)\} + \lambda f_1(s, x(s-\sigma)) \\ \quad + (1-\lambda) f_2(s, x(s-\sigma)) + \lambda g_1(s, x(s-\delta)) + (1-\lambda) g_2(s, x(s-\delta))\Big] ds, \ t \in (t_{k-1}, t_k]. \end{cases}$$

Puisque l'application multi-valuée F et Le gradient généralisé de Clarke ∂G ont des valeurs convexes, il est facile de conclure que $\lambda y_1(t) + (1-\lambda) y_2(t) \in \mathcal{F}^q(x)$.

Étape 3. $\mathcal{F}^q(x)$ est fermé pour chaque $x \in \Omega_r$. Soit $\{y_n\}_{n\ge 0} \in \mathcal{F}^q(x)$ pour $y_n \to y \in \Omega_r$. Ensuite, il existe $u_n \in U_{ad}, f_n \in S_x^F$, $g_n \in \partial G$ et $I_{i,n} \in X, i =$

$1, \ldots, m$, tel que

$$y_n(t) = \begin{cases} S_{\alpha,\beta}(t)x_0 \\ + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu_n(s) + f_n(s, x(s-\sigma)) + g_n(s, x(s-\delta))]ds, \ t \in [0, t_1], \\ \\ S_{\alpha,\beta}(t - t_{k-1})[x(t_{k-1}^-) + I_{k-1,n}(x(t_{k-1}^-))] \\ + \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu_n(s) + f_n(s, x(s-\sigma)) + g_n(s, x(s-\delta))]ds, \ t \in (t_{k-1}, t_k]. \end{cases}$$

De la propriété de compacité faible de U_{ad}, S_x^F et ∂G, respectivement, on a u_n, f_n et g_n convergent faiblement vers quelque $u \in U_{ad}, f \in S_x^F$ et $g \in \partial G$ dans $L^P(J, Y), L^1(J \times X, X)$ et $L^p(J \times X, X)$, respectivement. Donc,

$$y_n(t) \stackrel{\text{weakly}}{\longrightarrow} y(t) = \begin{cases} S_{\alpha,\beta}(t)x_0 \\ + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))]ds, \ t \in [0, t_1], \\ \\ S_{\alpha,\beta}(t - t_{k-1})[x(t_{k-1}^-) + I_{k-1}(x(t_{k-1}^-))] \\ + \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))]ds, \ t \in (t_{k-1} \end{cases}$$

Par conséquent, $y \in \mathcal{F}^q(x)$.

Étape 4. $\mathcal{F}^q(x)$ est s.c.s. est condensé. Nous faisons la décomposition $\mathcal{F}^q = \mathcal{F}_1^q + \mathcal{F}_2^q$, où les opérateurs $\mathcal{F}_1^q$ et $\mathcal{F}_2^q$ sont définis par

$$(\mathcal{F}_1^q x)(t) = \begin{cases} S_{\alpha,\beta}(t)x_0, \ t \in [0, t_1], \\ \\ S_{\alpha,\beta}(t - t_{k-1})[x(t_{k-1}^-) + I_{k-1}(x(t_{k-1}^-))], \ t \in (t_{k-1}, t_k], \end{cases}$$

$\mathcal{F}_2^q(x) = y \in \Omega_r$ tel que :

$$y(t) = \begin{cases} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))]ds, \ t \in [0, t_1], \\ \\ \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))]ds, \ t \in (t_{k-1}, t_k], \end{cases}$$

où $u \in U_{ad}, f \in S_x^F, g \in \partial G$ et $I_{k-1} \in X, k = 2, \ldots, m+1$.

Nous montrons que $\mathcal{F}_1^\lambda$ est une application de contraction. Si $t \in [0, t_1]$, alors la propriété est clairement satisfaite.

Si $t \in (t_{k-1}, t_k]$, let $x_1, x_2 \in \Omega_r$, alors

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}_1^\lambda x_1(t) - \mathcal{F}_1^\lambda x_2(t)\|_q &\leq \|S_{\alpha,\beta}(t-t_{k-1})\| \left\| x_1(t_{k-1}^-) - x_2(t_{k-1}^-) + I_{k-1}(x_1(t_{k-1}^-)) - I_{k-1}(x_2(t_{k-1}^-)) \right\|_q \\ &\leq \left[\frac{M(1+d_{k-1})(t_k - t_{k-1})^{q-1}}{\Gamma(\alpha + (1-\alpha)\beta)}\right] \sup_{s_{k-1}\in J_{k-1}} \|x_1(s_{k-1}^-) - x_2(s_{k-1}^-)\|_q.\end{aligned}$$

Donc, $\|\mathcal{F}_1^\lambda x_1(t) - \mathcal{F}_1^\lambda x_2(t)\|_q \leq K \sup_{s_{k-1}\in J_{k-1}} \|x_1(s_{k-1}^-) - x_2(s_{k-1}^-)\|_q$, où $0 \leq K < 1$. Par conséquent F_1^q est un opérateur de contraction. Ensuite, nous montrons que $\mathcal{F}_2^q$ est s.c.s. et complètement continu. Nous commençons à prouver que $\mathcal{F}_2^q$ est complètement continu.

Etape 1. $\mathcal{F}_2^q$ est équicontinue sur Ω_r. Soit $x \in \Omega_r$, $y \in (\mathcal{F}_2^q)(x)$. Alors il existe $u \in U_{ad}, f \in S_x^F$ et $g \in \partial G$ tel que

$$y(t) = \begin{cases} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))]ds, \ t \in [0, t_1], \\ \\ \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))]ds, \ t \in (t_{k-1}, t_k], \end{cases}$$

Si $\tau \in (0, t_1]$, il en résulte que

$$\begin{aligned}\|y(\tau) - y(0)\|_q &\leq \tau^{1-q} \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^\tau (\tau - s)^{\frac{p(\alpha-1)}{p-1}} ds \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\|B\| \|u\|_{L^p(J,Y)} + \|a\|_{L^p(J,\mathbb{R}^+)} \right) \\ &+ \frac{M(\omega + c)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} \|x(s)\|_q ds \longrightarrow 0\end{aligned}$$

quand $\tau \to 0$ uniformément.

Let $\tau_1, \tau_2 \in (0, t_1]$ avec $0 < \tau_1 < \tau_2 \leq t_1$. Alors

$$
\begin{aligned}
&\|y(\tau_2) - y(\tau_1)\|_q \\
&\leq \left\| \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha-1} P_\alpha(\tau_2 - s)[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))]ds \right\|_q \\
&\quad + \left\| \int_0^{\tau_1} \left[(\tau_2 - s)^{\alpha-1} - (\tau_1 - s)^{\alpha-1}\right] P_\alpha(\tau_2 - s)[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))]ds \right\|_q \\
&\quad + \left\| \int_0^{\tau_1} (\tau_1 - s)^{\alpha-1} \left[P_\alpha(\tau_2 - s) - P_\alpha(\tau_1 - s)\right] \left[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))\right] ds \right\|_q \\
&\leq \left\| \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{\alpha-1} P_\alpha(\tau_2 - s)[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))]ds \right\|_q \\
&\quad + \left\| \int_0^{\tau_1-\epsilon} \left[(\tau_2 - s)^{\alpha-1} - (\tau_1 - s)^{\alpha-1}\right] P_\alpha(\tau_2 - s)[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))]ds \right\|_q \\
&\quad + \left\| \int_{\tau_1-\epsilon}^{\tau_1} \left[(\tau_2 - s)^{\alpha-1} - (\tau_1 - s)^{\alpha-1}\right] P_\alpha(\tau_2 - s)[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))]ds \right\|_q \\
&\quad + \left\| \int_0^{\tau_1-\epsilon} (\tau_1 - s)^{\alpha-1} \left[P_\alpha(\tau_2 - s) - P_\alpha(\tau_1 - s)\right] \left[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))\right] ds \right\|_q \\
&\quad + \left\| \int_{\tau_1-\epsilon}^{\tau_1} (\tau_1 - s)^{\alpha-1} \left[P_\alpha(\tau_2 - s) - P_\alpha(\tau_1 - s)\right] \left[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))\right] ds \right\|_q
\end{aligned}
$$

En vue du lemme 2.1.2, nous pouvons observer que $P_\gamma(\cdot)$ est un opérateur compact et fortement continue, ce qui implique la continuité de cet opérateur dans la topologie uniforme de l'opérateur sur $(0, t_1]$. En suivant *Étape 1*, nous concluons, lorsque $\tau_2 - \tau_1 \to 0$, avec ϵ suffisamment petit, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro indépendamment de $x \in \Omega_r$. Des résultat similaire peut être trouvé lorsque $t_{k-1} < \tau_1 < \tau_2 \leq t_k, k = 2, \ldots, m+1$. Cela montre l'équicontinuité de $\mathcal{F}_2^q$ sur Ω_r.

Etape 2. $(\mathcal{F}_2^q \Omega_r)(t) = \{y(t) : y \in \mathcal{F}_2^q(\Omega_r)\}$ est relativement compact dans X pour chaque $t \in J$.

Clairement, $(F_2^q\Omega_r)(t)$ est relativement compact dans X pour $t=0$.

Soit $t_{k-1}<t\leq t_k, k=1,\ldots,m+1$, fixé, pour chaque $\epsilon\in(t_{k-1},t)$ et tous $\delta>0$, définissons un opérateur $\mathcal{F}_\delta^\epsilon$ on Ω_r par la formule

$$(\mathcal{F}_\delta^\epsilon x)(t)=\alpha\int_{t_{k-1}}^{t-\epsilon}\int_\delta^\infty\theta(t-s)^{\alpha-1}M_\alpha(\theta)S((t-s)^\alpha\theta)[Bu(s)+f(s,x(s-\sigma))+g(s,x(s-\delta))]d\theta ds$$
$$=\alpha\int_{t_{k-1}}^{t-\epsilon}\int_\delta^\infty\theta(t-s)^{\alpha-1}M_\alpha(\theta)[S(\epsilon^\alpha\delta)S((t-s)^\alpha\theta-\epsilon^\alpha\delta)][Bu(s)+f(s,x(s-\sigma))+g(s,x(s-\delta))]$$
$$=S(\epsilon^\alpha\delta)\alpha\int_{t_{k-1}}^{t-\epsilon}\int_\delta^\infty\theta(t-s)^{\alpha-1}M_\alpha(\theta)S((t-s)^\alpha\theta-\epsilon^\alpha\delta)[Bu(s)+f(s,x(s-\sigma))+g(s,x(s-\delta))]d$$

où $x\in\Omega_r$.

Puis de la compacité de $S(\epsilon^\alpha\delta),\epsilon^\alpha\delta>0$, et la limite de l'opérateur qui suivi, dans la dernière égalité, nous obtenons que l'ensemble $V_{\epsilon,\delta}(t)=\{(\mathcal{F}_\delta^\epsilon x)(t):x\in\Omega_r\}$ est relativement compact dans X pour $\forall\epsilon\in(t_{k-1},t)$ et $\forall\delta>0$. De plus, pour chaque $x \in \Omega_r$, on a

$$
\begin{aligned}
&\|(\mathcal{F}_2^q x)(t) - (\mathcal{F}_\delta^\epsilon x)(t)\|_q \\
&= \alpha \bigg\| \int_{t_{k-1}}^{t} \int_0^{\delta} \theta (t-s)^{\alpha-1} M_\alpha(\theta) S((t-s)^\alpha \theta)[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))] d\theta ds \\
&+ \int_{t_{k-1}}^{t} \int_\delta^{\infty} \theta (t-s)^{\alpha-1} M_\alpha(\theta) S((t-s)^\alpha \theta)[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))] d\theta ds \\
&- \int_{t_{k-1}}^{t-\epsilon} \int_\delta^{\infty} \theta (t-s)^{\alpha-1} M_\alpha(\theta) S((t-s)^\alpha \theta)[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))] d\theta ds \bigg\|_q \\
&\leq \alpha \bigg\| \int_{t_{k-1}}^{t} \int_0^{\delta} \theta (t-s)^{\alpha-1} M_\alpha(\theta) S((t-s)^\alpha \theta)[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))] d\theta ds \bigg\|_q \\
&+ \alpha \bigg\| \int_{t-\epsilon}^{t} \int_\delta^{\infty} \theta (t-s)^{\alpha-1} M_\alpha(\theta) S((t-s)^\alpha \theta)[Bu(s) + f(s, x(s-\sigma)) + g(s, x(s-\delta))] d\theta ds \bigg\|_q \\
&\leq \Bigg[(t_k - t_{k-1})^{1-q} M \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} (t-s)^{\frac{p(\alpha-1)}{p-1}} ds \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\|B\| \|u\|_{L^P(J,Y)} + \|a\|_{L^P(J,\mathbb{R}^+)} \right) \\
&\qquad + M(\omega + c) \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t-s)^{\alpha-1} \|x(s)\|_q ds \Bigg] \int_0^{\delta} \theta M_\gamma(\theta) d\theta \\
&+ \epsilon^{1-q} \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\int_{t-\epsilon}^{t} (t-s)^{\frac{p(\alpha-1)}{p-1}} ds \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\|B\| \|u\|_{L^P(J,Y)} + \|a\|_{L^P(J,\mathbb{R}^+)} \right) \\
&+ \frac{M(\omega + c)}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{t-\epsilon}^{t} (t-s)^{\alpha-1} \|x(s)\|_q ds.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, il existe des ensembles relativement compacts arbitrairement proches de l'ensemble $(F_2^q \Omega_r)(t)$. D'où l'ensemble $(F_2^q \Omega_r)(t)$ est relativement compact dans X pour chaque $t \in J$. En utilisant le fait que $\mathcal{F}_2^q$ est bornée et comme conséquence du théorème d'Arzela - Ascoli, nous concluons que F_2^q est complètement continu.

Etape 3. F_2^q a un graphe fermé. D'en haut nous avons que$F_2^q(x)$ est un ensemble relativement compact et fermé pour chaque $x \in \Omega_r$. Par conséquent $F_2^q(x)$ est un ensemble compact. Soient $x_n \to x_*$, $x_n \in \Omega_r$, $y_n \in F_2^q(x_n)$ et

$y_n \to y_*$. Nous allons prouver que $y_* \in F_2^q(x_*)$. Notons que $y_n \in F_2^q(x_n)$, ce qui signifie qu'il existe $f_n \in S_{x_n}^F$ et $g_n \in \partial G$ telle que

$$y_n(t) = \begin{cases} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu(s) + f_n(s, x(s-\sigma)) + g_n(s, x(s-\delta))]ds, & t \in [0, t_1], \\ \\ \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu(s) + f_n(s, x(s-\sigma)) + g_n(s, x(s-\delta))]ds, & t \in (t_{k-1}, t_k]. \end{cases} \tag{2.5}$$

Notons que $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq L^1(J \times X, X)$ et $\{g_n\}_{n\geq 1} \subseteq L^p(J \times X, X), \alpha p > 1$, sont bornés. La réflexivité de $L^p(J \times X, X), p \geq 1$, permet de faire l'assertion

$$f_n \to f_* \text{ et } g_n \to g_* \text{ faiblement dans } L^1(J \times X, X) \text{ et } L^p(J \times X, X), \text{ respectivement.} \tag{2.6}$$

Il résulte de (2.5), (2.6) and Theorem 3.1 dans[20] que

$$y_*(t) = \begin{cases} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu(s) + f_*(s, x(s-\sigma)) + g_*(s, x(s-\delta))]ds, & t \in [0, t_1], \\ \\ \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu(s) + f_*(s, x(s-\sigma)) + g_*(s, x(s-\delta))]ds, & t \in (t_{k-1}, t_k]. \end{cases}$$

Cela montre que $y_* \in F_2^q(x_*)$. Donc, F_2^q a un graphe fermé et F_2^q est une application multi-valuée complètement continue avec des valeurs compact. Ainsi, F_2^q est s.c.s. D'autre part, F_1^q est prouvé un opérateur de contraction et donc $F^q = F_1^q + F_2^q$ est .s.c.s. et condensé. Selon le Lemme 2.1.1, nous assurons l'existence d'un point fixe $x^q(\cdot)$ pour F^q dans Ω_r.

2.3 Résultats de contrôle optimal

Cette section établit le problème de Lagrange suivant

$$(LP) : \begin{cases} \text{Trouver } (x^0, u^0) \in PC_{1-q}(J, X) \times U_{ad} \\ \text{tel que } \mathcal{J}(x^0, u^0) \leq \mathcal{J}(x, u), \forall (x, u) \in PC_{1-q}(J, X) \times U_{ad}, \end{cases}$$

où le coût fonctionnel $\mathcal{J}(x,u)$ est introduit dans (2.2) comme

$$\mathcal{J}(x,u)=\sum_{i=0}^{m}\int_{i}^{i+1}\mathcal{L}(t,x^u(t-\sigma),x^u(t-\delta),u(t))dt, i=0,\ldots,m,$$

c'est-à-dire, minimiser un coût fonctionnel parmi toutes les paires de contrôle d'état admissible du problème (2.1), où x^u dénote la solution douce du système (2.1) correspondant au contrôle $u\in U_{ad}$.

Pour étudier le problème de Lagrange (LP), les hypothèses suivantes sont requises :

(H$_5$) la fonctionnelle $\mathcal{L}: J\times X^2\times Y\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ est Borel measurable ;

(H$_6$) $\mathcal{L}(t,\cdot,\cdot,\cdot)$ est séquentiellement semi-continue inférieurement sur $X^2\times Y$ pour presque tout $t\in J$;

(H$_7$) $\mathcal{L}(t,x(t-\sigma),x(t-\delta),\cdot)$ est convexe sur Y pour chaque $x\in X$ et presque tout $t\in J$;

(H$_8$) Il existe des constantes $c_1,c_2\geq 0, d>0$, ψ est non-négatif et $\psi\in L^1(J,\mathbb{R})$ tel que

$$\mathcal{L}(t,x(t-\sigma),x(t-\delta),u(t))\geq\psi(t)+c_1\|x(t-\sigma)\|_q+c_2\|x(t-\delta)\|_q+d\|u\|_Y^p.$$

Théorème 2.3.1 *Si on a toutes les conditions de Théorème 2.2.1 avec les conditions (H$_5$)–(H$_8$), alors le problème de Lagrange (LP) admet une paire optimale.*

Dèmonstration. Supposon que $\inf\{\mathcal{J}(x,u)|(x,u)\in PC_{1-q}(J,X)\times U_{ad}\}=+\infty$, alors nous savons facilement que le problème de Lagrange (LP) a une paire optimale. Sans perte de généralité, nous supposons que $\inf\{\mathcal{J}(x,u)|(x,u)\in PC_{1-q}(J,X)\times U_{ad}\}=\gamma<\infty$. Par (H$_8$), on obtient $\gamma>-\infty$. Selon la définition de l'infimum, il existe une suite minimisant les paire possible

$\{(x^n, u^n)\} \subset \mathcal{P}_{ad}$, où $\mathcal{P}_{ad} = \{(x, u) | x$ est une solution douce du système(2.1) correspond à $u \in U_{ad}\}$, tel que $\mathcal{J}(x^n, u^n) \to \gamma$ quand $n \to +\infty$. Puisque $\{u^n\} \subseteq U_{ad}, n = 1, 2, \ldots, \{u^n\}$ est un sous-ensemble borné de l'espace réflexif et séparable de Banach $L^p(J, Y)$, alors il existe une sous-suite, encore notée $\{u^n\}$, et $u^0 \in L^p(J, Y)$ tel que

$$u^n \xrightarrow{\text{weakly}} u^0$$

dans $L^p(J, Y)$. Puisque U_{ad} est fermé et convexe, par le Lemme de Marzur, $u^0 \in U_{ad}$. Soit $\{x^n\}$ la suite correspondante des solutions des équations intégrales

$$x^n(t) = \begin{cases} S_{\alpha,\beta}(t)x_0 \\ + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu^n(s) + f(s, x^n(s-\sigma)) + g^n(s, x(s-\delta))]ds, \ t \in [0, t_1], \\ \\ S_{\alpha,\beta}(t - t_{k-1})[x^n(t_{k-1}^-) + I_{k-1}(x^n(t_{k-1}^-))] \\ + \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu^n(s) + f(s, x^n(s-\sigma)) + g^n(s, x(s-\delta))]ds, \ t \in (t_{k-1}, t_k]. \end{cases} \tag{2.7}$$

En adaptant les propriétés de Lemme 2.1.2, grâce à la bornitude de $\{u^n\}$ et sselon *Etape 2.*, on montre que $\{x^n\}$ est un sous-ensemble relativement compact de $PC_{1-q}(J, X)$. Par conséquent, il existe une fonction $x^0 \in PC_{1-q}(J, X)$ tel que

$$x^n \to x^0 \text{ in } PC_{1-q}(J, X). \tag{2.8}$$

De (H_1), (H_4) et (2.8), est en appliquant le théorème de convergence dominé on montre que

$$\begin{cases} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) f(s, x^n(s-\sigma))ds \to \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) f(s, x^0(s-\sigma))ds, \ t \in [0, t_1], \\ \\ S_{\alpha,\beta}(t-t_{k-1})[x^n(t_{k-1}^-) + I_{k-1}(x^n(t_{k-1}^-))] \to S_{\alpha,\beta}(t-t_{k-1})[x^0(t_{k-1}^-) + I_{k-1}(x^0(t_{k-1}^-))], \\ \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) f(s, x^n(s-\sigma))ds \to \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) f(s, x^0(s-\sigma))ds, \\ t \in (t_{k-1}, t_k], k = 2, \dots, m+1. \end{cases}$$

En utilisant (H_2)(iii), on a $\{g^n\}$ est borné sur $L^p(J \times X, X)$. Aussi, nous savons que $L^p(J \times X, X)$ est réflexif, alors il existe une sous-suite de $\{g^n\}$ encore notés par la même notation et $g^0 \in L^p(J \times X, X)$ tel que

$$g^n \xrightarrow{\text{weakly}} g^0 \in L^p(J \times X, X). \tag{2.9}$$

Il résulte de (2.9) et la compacité de P_α que

$$\int_{t_{\tau-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) g^n(s, x(s-\sigma))ds \to \int_{t_{\tau-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) g^0(s, x(s-\sigma))ds,$$

où $t \in (t_{\tau-1}, t_\tau], \tau = 1, \dots, m+1$.

Selon les formules ci-dessus, nous concluons que

$$x^n(t) \to x^0(t) = \begin{cases} S_{\alpha,\beta}(t)x_0 \\ + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu^0(s) + f(s, x^0(s-\sigma)) + g^0(s, x(s-\delta))]ds, \ t \in [0, t_1], \\ \\ S_{\alpha,\beta}(t-t_{k-1})[x^0(t_{k-1}^-) + I_{k-1}(x^0(t_{k-1}^-))] \\ + \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s)[Bu^0(s) + f(s, x^0(s-\sigma)) + g^0(s, x(s-\delta))]ds, \ t \in (t_{k-} \end{cases}$$

où x^0 désigne la suite des solutions douces du système (2.1) correspond à u^0.

A partir des hypothèses (H_5)–(H_8) et en appliquant le théorème de Balder, nous déduisons que

$$(x_\sigma \times x_\delta, u) \to \sum_{i=0}^{m} \int_i^{i+1} \mathcal{L}(t, x(t-\sigma), x(t-\delta), u(t))dt, i = 0, \dots, m,$$

est séquentiellement semi-continu inférieurement dans la topologie forte de $L^1(J, X \times X)$ et la topologie faible de $L^p(J, X \times X)$. Puisque $L^p(J, X \times X) \subset L^1(J, X \times X)$, alors $\mathcal{J}$ est faiblement semicontinuité inférieurement sur $L^p(J, X \times X)$. Nous utilisons (H_8), nous déduisons que $\mathcal{J} > -\infty$. Par conséquent, nous concluons que $\mathcal{J}$ atteint son infimum à $u^0 \in U_{ad}$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\xi &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{m} \int_i^{i+1} \mathcal{L}(t, x^n(t-\sigma), x^n(t-\delta), u^n(t))dt \\
&\geq \sum_{i=0}^{m} \int_i^{i+1} \mathcal{L}(t, x^0(t-\sigma), x^0(t-\delta), u^0(t))dt = \mathcal{J}(x^0, u^0) \geq \xi, i = 0, \dots, m.
\end{aligned}$$

Ceci complète la démonstration du théorème.

2.4 Application

Considérons l'inclusion de contrôle différentielle partielle fractionnaire de Hilfer avec des conditions aux limites impulsives suivante :

$$\begin{cases}
D_{t_i^+}^{\frac{2}{3},\frac{1}{2}} z(t,y) \in z_{yy}(t,y) + \int_0^1 \zeta(y,\eta)u(\eta,t)d\eta + \exp[z(\sin t, y)] + \partial G(t, z(\sin t, y)), \ (t,y) \in \Lambda \times \Upsilon, \\
I_{0^+}^{\frac{1}{6}}[z(t,y)]|_{t=0} = z_0(y), \ y \in \Upsilon, \\
z(t,0) = z(t,\pi) = 0, \ t \in \Lambda, \\
I_{t_k^+}^{\frac{1}{6}} z(t_k^+, y) = z(t_k^-, y) + \varphi_k(z(t_k^-, y)), \ y \in \Upsilon,
\end{cases} \tag{2.10}$$

où $\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{2}, q = \frac{5}{6}, \Upsilon = [0,\pi]$ et $\Lambda = (0,1] - \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ tel que $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} = 1$ and $k = 1, \dots, m$. Prenons $Bu(t)(y) = \int_0^1 \zeta(y,\eta)u(\eta,t)d\eta$, où ζ est continue, l'application multi-valué $F(t, z(t-\sigma))(y) = \exp[z(\sin t, y)]$, le sous-différentiel de Clarke $\partial G(t, z(t-\delta))(y) = \partial G(t, z(\sin t, y))$ and $I_k(z(\cdot))(y) = \varphi_k(z(\cdot, y))$.

Suppose que $X = Y = L^2[0, \pi]$ et définissons $A : D(A) \subset X \to X$ par $Az = z_{yy}$ avec le domaine

$$D(A) = \{z \in X : \ z_y, z_{yy} \in X, \ z(t,0) = z(t,\pi) = 0\}.$$

Il est connu que A est le générateur infinitésimal d'un semigroupe différentiable $S(t), t > 0$ dans X donné par

$$(S(t)x)(y) = \begin{cases} \int_0^\pi \psi(t, y-s)x(s)ds, \ t > 0, \\ x(y), \ t = 0, \end{cases}$$

où

$$\psi(t,y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{y^2}{4t}}, \ t > 0, 0 < y < \pi,$$

et $x(t)(y) = z(t,y)$. Cela implique $\|S(t)\| \leq 1$. L'endsemble de contrôles admissibles $U_{ad} = \{u \in Y | \ \|u\|_{L^2([0,1],Y)} \leq 1\}$. Trouver les contrôles $u(t,y)$ qui réduisent au minimum la fonctionnelle

$$\mathcal{J}(z,u) = \sum_{i=0}^{m} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^\pi |z(t,y)|^2 dydt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^\pi |u(t,y)|^2 dydt \right]$$

sous réserve du problème (2.10). le système (2.10) peut être transformé en (2.1) avec la fonction de coût

$$\mathcal{J}(z,u) = \sum_{i=0}^{m} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\|z(t)\|^2 + \|u(t)\|_Y^2 \right) dt.$$

Nous pouvons vérifier que toutes les hypothèses (H_1)–(H_8) sont remplies, d'où le théorème 2.2.1 et théorème 2.3.1 correctement appliqué pour assurer que le problème (2.10) admet une solution et au moins une paire optimale.

Chapitre 3

Contrôllabilité Approchée des Inclusions différentielles Fractionanaires de Hilfer semilinéaires de type Sobolev

Dans ce chapitre, nous étudions la contrôlabilité approchée des inclusions différentielles fractionnaires de Hilfer de type Sobolev avec des conditions non locales. Les principales techniques reposent sur le théorème du point fixe combinée avec la théorie du semigroupe, le calcul fractionnaire et à l'analyse multivaluée. Un exemple est fourni pour illustrer les résultats obtenus.

3.1 Introduction

On considère l'inclusion différentielle fractionnaire de Hilfer de type Sobolev de la forme :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\gamma,\mu}(Ex(t)) \in Ax(t) + F(t,x(t)) + Bu(t), t \in J' = (0,b], \\ I_{0^+}^{(1-\gamma)(1-\mu)}x(t)|_{t=0} = x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $D_{0^+}^{\gamma,\mu}$ est la dérivée fractionnaire de Hilfer,$0 \leq \gamma \leq 1, 0 < \mu < 1$, l'état $x(\cdot)$ prend ces valeurs dans un espace de Banach X et la fonction de contrôle

$u(\cdot)$ est donnée dans $L^2(J, U)$, un espace de Banach des fonctions de contrôle admissibles avec U comme un espace de Banach. B est un opérateur linéaire borné de U vers Z, qui est un espace de Banach. A et E sont un opérateur linéaire avec des domaines contenus dans un espace de Banach X et des images contenues dans un espace de Banach Z. Soit $J = [0, b], F : J \times X \to 2^Z \backslash \{\emptyset\}$ est une application multivaluée. La norme de X et Z sont notée par $\|\cdot\|$ et $|\cdot|$, respectivement.

Les équations différentielles fractionnaires sont considérées comme un modèle alternatif aux équations différentielles non linéaires. La contrôlabilité est l'un des concepts importants à la fois en mathématiques et en théorie du contrôle. L'existence, la contrôlabilité (approximative) et les contrôles optimaux des systèmes de contrôle déterministes ou stochastiques ont été bien développés en utilisant différents types de méthodes, qui peuvent être trouvés dans [31, 2, 21, 29, 39, 63, 19, 75, 78, 81, 82, 86, 88, 87, 84, 89, 90, 98, 94, 95, 96, 99].

Les équations de type Sobolev (fractionnaires) apparaissent dans divers problèmes physiques tels que l'écoulement de fluide à travers des roches fissurées, thermodynamique, propagation d'ondes longues de faible amplitude, cisaillement dans les fluides de second ordre et ainsi de suite. Brill [15] et Showalter [80] ont établi l'existence des solutions des équations d'évolution semi-linéaires de type Sobolev dans l'espace de Banach. Les problèmes de contrôlabilité pour les différents types de systèmes décrits par des équations différentielles fractionnaires de type Sobolev ont encore un manque de contributions, par exemple [39, 84].

Dans les dernières années, il y a eu un développement important dans les équations différentielles ordinaires et partielles avec des dérivés fractionnaires, voir les monographies de Kilbas et al. [57], Lakshmikantham et al. [61], Miller and Ross [71], Podlubny [74]. Hilfer [50] a proposé un généralisation du dérivé fractionnaire de Riemann - Liouville (GRLFD), qui est devenue en d'autre terme, dérivé fractionnaire de Hilfer, qui comprend à la fois des dérivés fractionnaires de Riemann - Liouville et de Caputo. Furati et al. [41] a considéré un problème à valeur initiale pour une classe d'équations différentielles fractionnaires non linéaires avec un dérivé fractionnaire de Hilfer, Gu and Trujillo [45] ont étudié une classe d'équations d'évolution avc des dérivés fractionnaires au sens de Hilfer, Wang et Zhang [85] ont étudié des problèmes aux valeurs initiales non locales pour des équations différentielles fractionnaire de Hilfer, Mahmudov et al. [66] ont étudié la contrôlabilité approchée des équations d'évolution fractionnaire avec le dérivé de Riemann-Liouville généralisé (GRLFD), Yang et Wang [92] présentent le concept de contrôlabilité approchée des inclusions différentielles fractionnelles de Hilfer avec des conditions non locales, pour les dérivés fractionnés dits au sens de Hilfer, on peut voir [42, 51].

Le contour de ce chapitre est le suivant. Dans la section Résultats préliminaires, nous rappelons quelques notations préliminaires et les résultats qui seront nécessaires pour la suite. La section Résultats d'Existence est consacrée à l'étude de la contrôlabilité approchée du système (3.1) à condition que le système linéaire correspondant soit approximativement contrôlable. Enfin, un exemple est donné pour illustrer l'efficacité des principaux résultats.

3.2 Résultats préliminaires

Dans cette section, nous mentionnons les notations, les définitions, les lemmes et les faits préliminaires nécessaire pour établir nos principaux résultats.

Tout au long de ce chapitre, nous désignons par $C(J, X)$ et $C(J', X)$ les espaces de toutes les fonctions continues de J vers X et de J' vers X, respectivement. Posons $\nu = \gamma + \mu - \gamma\mu$, donc $1 - \nu = (1 - \gamma)(1 - \mu)$, définissons $C_{1-\nu}(J, X) = \{x : t^{1-\nu}x(t) \in C(J, X)\}$, avec la norme $\|\cdot\|_\nu$ défini par $\|x\|_\nu = \sup\{t^{1-\nu}\|x(t)\|, \nu = \gamma + \mu - \gamma\mu\}$.
Évidemment, $C_{1-\nu}(J, X)$ est un espace de Banach.
Les opérateurs $A : D(A) \subset X \to Z$ et $E : D(E) \subset X \to Z$ satisfont les hypothèses suivantes :

(S_1) A and E are closed linear operators,

(S_2) $D(E) \subset D(A)$ and E is bijective,

(S_3) $E^{-1} : Z \to D(E)$ is compact,

Les hypothèses $(S_1) - (S_3)$ et le théorème du graphe fermé impliquent la bornitude de l'opérateur linéaire $AE^{-1} : Z \to Z$, donc AE^{-1} génère un C_0-semigroupe $\{Q(t), t \geq 0\}$, $Q(t) := e^{AE^{-1}t}$ [42].

Lemme 3.2.1 *([78]) Soit D un sous-ensemble non vide de X, qui est bornée, fermée et convexe. Supposons $G : D \to 2^X \backslash \emptyset$ est s.c.s avec des valeurs convexes fermées et telles que $G(D) \subset D$ et $G(D)$ est compact. Alors G a un point fixe.*

Lemme 3.2.2 *Le système de contrôle fractionnaire non local* (3.1) *est équi-*

valent à l'inclusion intégrale

$$Ex(t) \in \frac{Ex_0}{\Gamma(\gamma+\mu-\gamma\mu)}t^{\nu-1}+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^t (t-s)^{\mu-1}\big[Ax(s)+F(s,x(s))+Bu(s)\big]ds, t \in J. \tag{3.2}$$

Remarque 3.2.1 *Pour $x \in X$ nous définissons deux familles d'opérateurs $\{\mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t) : t \geq 0\}$ et $\{\mathcal{T}_{\mu,E}(t) : t \geq 0\}$ par*

$$\mathcal{T}_{\mu,E}(t) = t^{\mu-1}P_{\mu,E}(t), \quad P_{\mu,E}(t) = \int_0^\infty E^{-1}\mu\theta M_\mu(\theta)Q(t^\mu\theta)d\theta,$$
$$\mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t) = I_{0^+}^{\gamma(1-\mu)}\mathcal{T}_{\mu,E}(t),$$

où $M_\mu(\theta)$ est la fonction de Wright, qui est définie par

$$M_\mu(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\theta)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(1-\mu n)}, 0 < \mu < 1, \theta \in \mathbb{C}, \tag{3.3}$$

ce qui satisfait l'égalité suivante $\int_0^\infty \theta^\delta M_\mu(\theta)d\theta = \frac{\Gamma(1+\delta)}{\Gamma(1+\mu\delta)}, for\ \theta \geq 0.$

Lemme 3.2.3 *Si l'inclusion intégrale (3.2) est valide, alors il existe $f \in L^1(J \times X, X)$ tel que $f \in F$ et*

$$x(t) = \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)Ex_0 + \int_0^t \mathcal{T}_{\mu,E}(t-s)\Big[f(s,x(s)) + Bu(s)\Big]ds, t \in J. \tag{3.4}$$

Nous imposons les hypothèses suivantes.

$(\mathbf{H_1})$: $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ is uniformly bounded, i.e., $\exists\, M > 1$ such that $\sup_{t\in[0,+\infty)}|Q(t)| < M$.

Proposition 3.2.1 *([39, 45]) Sous les conditions (S_1), (S_2), (S_3) et $(\mathbf{H_1})$,* *(i) Pour tout $t>0$ fixé, $\{P_{\mu,E}(t)\}_{t>0}$, $\{\mathcal{T}_{\mu,E}(t)\}_{t>0}$ et $\{\mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)\}_{t>0}$ sont des opérateurs compacts linéaires, et pour tout $x\in X$,*

$$\|P_{\mu,E}(t)x\| \leq \frac{M\|E^{-1}\|}{\Gamma(\mu)}\|x\|,$$
$$\|\mathcal{T}_{\mu,E}(t)x\| \leq \frac{M\|E^{-1}\|t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\|x\|,$$
$$\|\mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)x\| \leq \frac{M\|E^{-1}\|t^{(\gamma-1)(\mu-1)}}{\Gamma(\gamma(1-\mu)+\mu)}\|x\|.$$

(ii) $\{P_{\mu,E}(t)\}_{t>0}$, $\{\mathcal{T}_{\mu,E}(t)\}_{t>0}$ et $\{\mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)\}_{t>0}$ sont continues au sens de la topologie d'opérateur uniforme.

Preuve : (i) De l'égalité

$$\int_0^\infty \theta^\delta M_\mu(\theta)d\theta = \frac{\Gamma(1+\delta)}{\Gamma(1+\mu\delta)}$$

nous savons que

$$\|P_{\mu,E}(t)x\| = \Big\|\int_0^\infty E^{-1}\mu\theta M_\mu(\theta)Q(t^\mu\theta)xd\theta\Big\| \leq \frac{M\|E^{-1}\|}{\Gamma(\mu)}\|x\|,\ for\, t\in J\, and\, x\in X,$$

ensuite nous avons

$$\|\mathcal{T}_{\mu,E}(t)x\| \leq \frac{M\|E^{-1}\|t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\|x\|,\ for\, t\in J'\, and\, x\in X.$$

Pour $t\in J'$ et $x\in X$,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)x\| = \|I_{0^+}^{\gamma(1-\mu)}\mathcal{T}_{\mu,E}(t)x\| &= \Big\|\frac{1}{\Gamma(\gamma(1-\mu))}\int_0^t (t-s)^{\gamma(1-\mu)-1}\mathcal{T}_{\mu,E}(s)xds\Big\| \\
&= \Big\|\frac{1}{\Gamma(\gamma(1-\mu))}\int_0^t (t-s)^{\gamma(1-\mu)-1}s^{\mu-1}P_{\mu,E}(s)xds\Big\| \\
&= \Big\|\frac{t^{(\gamma-1)(1-\mu)}}{\Gamma(\gamma(1-\mu))}\int_0^1 (1-s)^{\gamma(1-\mu)-1}s^{\mu-1}P_{\mu,E}(ts)xds\Big\| \\
&\leq \frac{t^{(\gamma-1)(1-\mu)}\|E^{-1}\|M}{\Gamma(\gamma(1-\mu))\Gamma(\mu)}\int_0^1 (1-s)^{\gamma(1-\mu)-1}s^{\mu-1}ds\|x\| \\
&= \frac{M\|E^{-1}\|t^{(\gamma-1)(\mu-1)}}{\Gamma(\gamma(1-\mu)+\mu)}\|x\|.
\end{aligned}$$

Ceci complète la preuve de (i).

(ii) Pour tout $t > 0, h > 0$ and $x \in X$, on a

$$\|P_{\mu,E}(t+h)x - P_{\mu,E}(t)x\| = \Big\| \int_0^\infty E^{-1}\mu\theta M_\mu(\theta)[Q((t+h)^\mu\theta) - Q(t^\mu\theta)]xd\theta\Big\|.$$

on remarque que

$$\begin{aligned} & \Big\| \int_0^\infty E^{-1}\mu\theta M_\mu(\theta)[Q((t+h)^\mu\theta) - Q(t^\mu\theta)]xd\theta\Big\| \\ \leq \ & 2M\|E^{-1}\| \int_0^\infty \mu\theta M_\mu(\theta)d\theta\|x\| = \frac{2M\|E^{-1}\|}{\Gamma(\mu)}\|x\|, \end{aligned}$$

puis par le théorème de convergence dominé de Lebesgue, nous avons $\|P_{\mu,E}(t+h)x - P_{\mu,E}(t)x\| \to 0$ quand $h \to 0$. Par conséquent, $P_{\mu,E}(t)$ est continue dans la topologie de l'opérateur uniforme pour $t > 0$.

De même $\{\mathcal{T}_{\mu,E}(t)\}_{t>0}$ et $\{\mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)\}_{t>0}$ sont continues dans le sens de la topologie d'opérateur uniforme. Ceci complète la preuve.

Proposition 3.2.2 *([39, 45]) Sous l'hypothèse* $(\mathbf{H_1})$, $\{P_{\mu,E}(t)\}_{t>0}$, $\{\mathcal{T}_{\mu,E}(t)\}_{t>0}$ *et* $\{\mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)\}_{t>0}$ *sont fortement continues, ce qui signifie que, pour tout* $x \in X$ *et* $0 < t' < t'' \leq b$, *on a* $\|P_{\mu,E}(t')x - P_{\mu,E}(t'')x\| \to 0$, $\|\mathcal{T}_{\mu,E}(t')x - \mathcal{T}_{\mu,E}(t'')x\| \to 0$ *et* $\|\mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t')x - \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t'')x\| \to 0$ *quand* $t'' \to t'$

Preuve : Par la proposition 3.2.1, nous savons que $\{P_{\mu,E}(t)\}_{t>0}$ est fortement continue, alors nous obtenons facilement $\{\mathcal{T}_{\mu,E}(t)\}_{t>0}$ est aussi fortement continu. Pour tout $x \in X$ et $0 < t_1 < t_2 \leq b$, on a

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t_2)x - \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t_1)x\| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\gamma(1-\mu))}\Big\|\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\gamma(1-\mu)-1}\mathcal{T}_{\mu,E}(s)xds - \int_0^{t_1}(t_1-s)^{\gamma(1-\mu)-1}\mathcal{T}_{\mu,E}(s)xds\Big\| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\gamma(1-\mu))}\Big\|\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\gamma(1-\mu)-1}s^{\mu-1}P_{\mu,E}(s)xds - \int_0^{t_1}(t_1-s)^{\gamma(1-\mu)-1}s^{\mu-1}P_{\mu,E}(s)xds\Big\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\gamma(1-\mu))}\Big\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\gamma(1-\mu)-1}s^{\mu-1}P_{\mu,E}(s)xds\Big\| \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\gamma(1-\mu))}\Big\|\int_0^{t_1}\big[(t_2-s)^{\gamma(1-\mu)-1} - (t_1-s)^{\gamma(1-\mu)-1}\big]s^{\mu-1}P_{\mu,E}(s)xds\Big\| \\
&\leq \frac{M\|E^{-1}\|t_1^{\mu-1}}{\Gamma(\gamma(1-\mu))\Gamma(\mu)}\frac{1}{\gamma(1-\mu)}(t_2-t_1)^{\gamma(1-\mu)}\|x\| \\
&\quad + \frac{M\|E^{-1}\|}{\Gamma(\gamma(1-\mu))\Gamma(\mu)}\Big\|\int_0^{t_1}\big[(t_2-s)^{\gamma(1-\mu)-1} - (t_1-s)^{\gamma(1-\mu)-1}\big]s^{\mu-1}ds\Big\|\|x\|.
\end{aligned}
$$

Notons que

$$
\Big\|\int_0^{t_1}\big[(t_2-s)^{\gamma(1-\mu)-1} - (t_1-s)^{\gamma(1-\mu)-1}\big]s^{\mu-1}ds\Big\| \leq 2\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\gamma(1-\mu)-1}s^{\mu-1}ds,
$$

puis par le théorème de convergence dominé de Lebesgue, nous avons $\Big\|\int_0^{t_1}\big[(t_2-s)^{\gamma(1-\mu)-1} - (t_1-s)^{\gamma(1-\mu)-1}\big]s^{\mu-1}ds\Big\| \to 0$ as $t_2 \to t_1$.

Par conséquent, nous avons $\|\mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t_2)x - \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t_1)x\| \to 0$ as $t_2 \to t_1$, i.e., $\{\mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)\}_{t>0}$ est fortement continue. Ceci complète la preuve.

Soit$(X, \|.\|)$ un espace Banach. Nous utiliserons les notations suivantes : $\mathcal{P}(X) = \{Y \in 2^Y : Y \neq \emptyset\}$, $\mathcal{P}_{cl}(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X)\}$ est fermé, $\mathcal{P}_b(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X)\}$ est borné, $\mathcal{P}_{cv}(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X)\}$ est convexe, $\mathcal{P}_{cp}(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X)\}$ est compact.

Lemme 3.2.4 *([59]) Soit J un intervalle réel compact et soit X un espace de Banach. L'application multivaluée $F : J \times X \to \mathcal{P}_{b,cl,cv}(X)$ est mesurable pour*

t pour chaque $x \in X$ fixé, u.s.c.pour x pour chaque $t \in J$,et pour chaque $x \in C(J,X)$ l'ensemble $S_{F,x} = \{f \in L^1(J,X) : f(t,x(t)) \in F\Big(t,x(t)) for\ a.e\ t \in J\}$ est nonvide. Soit Γ une application linéaire continue de $L^1(J,X)$ vers $C(J,X)$, puis l'opérateur

$$\Gamma \circ S_F : C(J,X) \to \mathcal{P}_{b,cl,cv}(C(J,X))$$

$x \longmapsto (\Gamma \circ S_F)(x) = \Gamma(S_{F,x})$ est un opérateur de graphe fermé dans $C(J,X) \times C(J,X)$

Proposition 3.2.3 *([29])*

(1) Une fonction mesurable $u : J \to X$ est Bochner intégrable si et seulement si $\|u\|$ est Lebesgue intégrable.

(2) Une application multivaluée $F : X \to 2^X$ est dit être à valeurs convexe (à valeurs fermé), si $F(u)$ est convexe (fermé) pour tout $u \in X$; est dit être bornée sur des ensembles bornés si $F(B) = \bigcup_{u \in B}$ est bornée dans X pour tout $B \in \mathcal{P}_b(X)$.

(3) une application F est dit semi-continue supérieurement (s.c.s.) sur X si pour chaque $u_0 \in X$ l'ensemble $F(u_0)$ est un sous-ensemble fermé non vide de X, et si pour chaque sous-ensemble ouvert Ω de X contenant $F(u_0)$, il existe un voisinage ouvert ∇ de u_0 telle que $F(\nabla) \subseteq \Omega$.

(4) une application F est dit être complètement continue si $F(B)$ est relativement compact pour tout $B \in P_b(X)$. si l'application multivaluée F est complètement continu aux valeurs compactes non vides, puis F est s.c.s. si et seulement si F a un graphe fermé, c'est-à-dire, $u_n \to u; y_n \to y; y_n \in F(u)$. Nous disons que F a un point fixe s'il y a $u \in X$ tel que $u \in F(u)$.

(5) Une application multivaluée $F : J \to \mathcal{P}_{cl}(X)$ est dite mesurable si pour chaque $u \in X$ la fonction $y : J \to R$ Défini par $y(t) = d(u, F(t)) = \inf\{\|u - z\|, z \in F(t)\}$ est mesurable.

(6) Une application multivaluée $F : X \to 2^X$ est dit se condenser si pour tout sous-ensemble borné $B \subset X$ avec $\beta(B) \neq 0$ on a $\beta(F(B)) < \beta(B)$, où $\beta(\cdot)$ désigne la mesure de non-compacité de Kuratowski définie comme suit : $\beta(B) = inf\{d > 0 : B$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon $d\}$

Définition 3.2.1 *Par une solution douce du système (3.1), on veut dire une fonction $x \in C_{1-\nu}(J, X)$ satisfaisant :*

(1) $I_{0^+}^{1-\nu} x(t)|_{t=0} + h(x) = x_0 \in X$;

(2)

$$x(t) = \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)E[x_0 - h(x)] + \int_0^t \mathcal{T}_{\mu,E}(t-s)f(s, x(s))ds + \int_0^t \mathcal{T}_{\mu,E}(t-s)Bu(s)ds,\ t \in J.$$

Car $\mathcal{T}_{\mu,E}(t) = t^{\mu-1}P_{\mu,E}(t)$, alors l'équation ci-dessus est équivalente à

$$x(t) = \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)E[x_0 - h(x)] + \int_0^t (t-s)^{\mu-1}P_{\mu,E}(t-s)f(s, x(s))ds + \int_0^t (t-s)^{\mu-1}P_{\mu,E}(t-s)Bu(s)ds.$$

Afin d'étudier la contrôlabilité approximative pour le système de contrôle non linéaire (3.1), nous considérons d'abord la contrôlabilité approximative de sa partie linéaire

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\gamma;\mu} Ex(t) \in Ax(t) + (Bv)t, & t \in J' = (0, b] \\ I_{0^+}^{(1-\gamma)(1-\mu)} x(t)|_{t=0} = x_0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Ici, $B : U \to Z$ est un opérateur linéaire borné et $v \in L^2(J, U)$

Définition 3.2.2 *Le système de contrôle (3.5) est dite approximativement contrôlable sur J si $\overline{\mathcal{R}(b,x_0)} = X$, c-à-d, étant donné un arbitraire $\epsilon > 0$, il est possible de partir des points $x(0)$ à l'instant t tous les points dans l'espace d'état X dans une distance ϵ. où $\mathcal{R}(b,x_0) = \{x(b,u) : u \in L^2(J,U), x(0,u) = x_0\}$; qui est l'ensemble atteignable du système (3.5) avec la valeur initiale x_0 au moment terminal b.*

Remarque 3.2.2 *Supposons que le système de contrôle fractionnaire linéaire (3.5) est approximativement contrôlable. Nous rappelons que [7, 77] la contrôlabilité approximative de (3.5) est équivalent à la convergence de $a\mathcal{R}(a,\Gamma_0^b) \to 0$ quand $a \to 0^+$ in the strong operator topology.*

3.3 Résultats d'existence

Nous obtenons l'existence et la contrôlabilité approchée du système. (3.1). Nous considérons les hypothèses suivantes

($\mathbf{H_2}$) $\|a(\mathcal{R}(a,\Gamma_0^b))\| \leq 1$ for $\forall\ a > 0$.

($\mathbf{H_3}$) The multivalued map $F : J \times X \to \mathcal{P}_{b,cl,cv}(Z)$ satisfait ce qui suit :

(**3a**) $F(t,.) : X \to Z$ is u.s.c et pour chaque $t \in J$ et pour $x \in X$, la fonction $F(.,x) : J \to Z$ est fortement mesurable par rapport à t pour chaque $x \in X$, l'ensemble

$$\begin{aligned} S_{F,x} = \{f \in L^1(J,X) : & f(t,x(t)) \\ & \in F(t,x(t)) for\ p.p\ t \in J\} \end{aligned}$$

est non-vide.

(**3b**) il existe une fonction $n(\cdot) \in L^{\frac{1}{\mu_1}}$, $\mu_1 \in (0,\mu)$ et une fonction continue non décroissante $\phi : [0,\infty) \to (0,\infty)$ such that for any $(t,x,y) \in J \times X \times X$, $\|F(t,x(t),\int_0^t k(t,s,x(s))ds)\| = \sup_{t\in J}\{\|f\| : f(t,x(t),\int_0^t k(t,s,x(s))ds) \in F(t,x(t),\int_0^t k(t,s,x(s))ds)\} \leq n(t)\phi(\|x\|_\nu)$, et, $\lim_{r\to\infty} \inf \frac{\phi(r)}{r} = \varpi < \infty$;

(**H**$_5$) $\left(\frac{b^{1-\nu}M\|E^{-1}\|}{\Gamma(\mu)} \frac{(1-\mu_1)^{1-\mu_1} b^{\mu-\mu_1}\varpi\|n\|_{\frac{1}{\mu}}}{(\mu-\mu_1)^{1-\mu_1}}\right)\left(1+\frac{M^2\|E^{-1}\|^2 M_B^2}{a\Gamma^2(\mu)}\frac{b^{2\mu-1}}{(2\mu-1)}\right) < 1.$

Pour prouver nos résultats, nous présentons d'abord les deux opérateurs :

$$\Gamma_0^b = \int_0^b (b-s)^{2\mu-2} P_{\mu,E}(b-s)BB^*P^*_{\mu,E}(b-s)ds, \quad \frac{1}{2} < \mu \leq 1$$

et $\mathcal{R}(a,\Gamma_0^b) = (aI+\Gamma_0^b)^{-1}, \forall \quad a>0$, où B^* désigne l'adjoint de B et $P^*_{\mu,E}$ est l'adjoint de $P_{\mu,E}$. Il est claire que l'opérateur Γ_0^b is a linear bounded operator. Maintenant, pour tout $a > 0$, et $x_1 \in X$, on pose

$$u(t) = (b-t)^{\mu-1}B^*P^*_{\mu,E}(b-s)\mathcal{R}(a,\Gamma_0^b)p(x(\cdot)),$$

où

$$\begin{aligned} p(x(\cdot)) &= x_1 - \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(b)E[x_0] \\ &\quad + \int_0^b (b-s)^{\mu-1}P_{\mu,E}(b-s)f(s,x(s))ds. \end{aligned}$$

En utilisant le contrôle u,nous définissons l'opérateur $\Psi : C_{1-\nu}(J,X) \to 2^{C_{1-\nu}(J,X)}$ comme suit

$$\begin{aligned} \Psi(x) = \Big\{ & z \in C_{1-\nu}(J,X) : \\ & z(t) = \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)E[x_0] \\ & + \int_0^t (t-s)^{\mu-1}P_{\mu,E}(t-s)f(s,x(s))ds \\ & \qquad + \int_0^t (t-s)^{\mu-1}P_{\mu,E}(t-s)Bu(s)ds, f \in S_{F,x}\Big\} \end{aligned}$$

Selon l'hypothèse ($\mathbf{H_3}$) et la proposition 3.2.1, nous pouvons obtenir

$$\int_0^t (t-s)^{\mu-1} P_{\mu,E}(t-s) f(s,x(s))ds$$
$$\leq \frac{M\|E^{-1}\|\phi(\|x\|_\nu)}{\Gamma(\mu)} \frac{(1-\mu_1)^{1-\mu_1} b^{\mu-\mu_1}}{(\mu-\mu_1)^{1-\mu_1}} \|n\|_{\frac{1}{\mu}}.$$

Ainsi

$$\|p(x(b))\|$$
$$\leq \|x_1\| + \frac{M\|E^{-1}\|b^{\nu-1}}{\Gamma(\gamma(1-\mu))}[\|Ex_0\|] + \frac{M\|E^{-1}\|\phi(\|x\|_\nu)}{\Gamma(\mu)} \frac{(1-\mu_1)^{1-\mu_1} b^{\mu-\mu_1}}{(\mu-\mu_1)^{1-\mu_1}} \|n\|_{\frac{1}{\mu}}.$$

Théorème 3.3.1 *Si les conditions* (S_1), (S_2), (S_3) *et les hypothèses* ($\mathbf{H_1}$)–($\mathbf{H_5}$) *sont satisfaites, alors le système* (3.1) *a une solution douce fourni par* $\frac{1}{2} < \nu \leq 1$.

Proof : Maintenant, il sera montré que l'opérateur Ψ a un point fixe. La preuve sera divisée en six étapes.

Étape 1 : L'opérateur $\Psi(x)$ est convexe pour chaque $x \in C_{1-\nu}(J,X)$.

Soit $z_1, z_2 \in C_{1-\nu}(J,X)$, alors il existe $f_1, f_2 \in S_{F,x}$tel que pour chaque $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} z_i(t) &= \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)E[x_0] \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\mu-1} P_{\mu,E}(t-s) f_i(s,x(s))ds \\ &\quad\quad + \int_0^t (t-s)^{\mu-1} P_{\mu,E}(t-s)(b-s)^{\mu-1} BB^* P^*_{\mu,E}(b-s)\mathcal{R}(a,\Gamma_0^b) \\ &\quad \times \Big(x_1 - \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(b)E[x_0] \\ &\quad - \int_0^b (b-\tau)^{\mu-1} P_{\mu,E}(b-\tau) f_i(\tau,x(\tau))d\tau \quad i=1,2. \end{aligned}$$

Soit $0 \leq \lambda \leq 1$, puis pour chaque $t \in J$ on a

$$\begin{aligned}
&(\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2)(t) \\
&= \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t) E[x_0] + \int_0^t (t-s)^{\mu-1} P_{\mu,E}(t-s) \\
&\quad \times \Big[\lambda f_1(s, x(s)) + (1-\lambda) f_2(s, x(s) g)\Big] ds \\
&\quad + \int_0^t (t-s)^{\mu-1} P_{\mu,E}(t-s)(b-s)^{\mu-1} B B^* P^*_{\mu,E}(b-s) \mathcal{R}(a, \Gamma_0^b) \\
&\quad \times \Big(x_1 - \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(b) E[x_0] - \int_0^b (b-\tau)^{\mu-1} P_{\mu,E}(b-\tau) \\
&\quad \times \Big[\lambda f_1(\tau, x(\tau)) + (1-\lambda) f_2(\tau, x(\tau))\Big] d\tau \Big) ds.
\end{aligned}$$

Puisque $S_{F,x}$ est convexe, $\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \in S_{F,x}$. Par conséquent $\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \in \Psi(x)$.

Étape 2 : Considérons un ensemble $B_r = x \in C_{1-\nu}(J, X) : \|x\|_\nu \leq r$, où r est une constante positive. Évidemment, B_r est un ensemble borné, fermé et convexe $C_{1-\nu}(J, X)$. Nous supposons qu'il existe un nombre positif r tel que $\Psi(B_r) \subset B_r$.

Si ce n'est pas vrai, alors pour chaque nombre positif r, il existe une fonction $x^r \in B_r$, mais $\Psi(x^r) \notin B_r$, i.e.,

$$
\begin{aligned}
r &\leq \|\Psi(x^r)\|_\nu \\
&\leq \sup_{t\in J} t^{1-\nu}\|\mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)E[x_0]\| \\
&\quad + \sup_{t\in J} t^{1-\nu}\|\int_0^t (t-s)^{\mu-1}P_{\mu,E}(t-s)f(s,x^r(s))ds\| \\
&\quad + \sup_{t\in J} t^{1-\nu}\|\int_0^t (t-s)^{\mu-1}P_{\mu,E}(t-s)Bu^r(s)ds\| \\
&\leq \frac{M\|E^{-1}\|}{\Gamma(\gamma(1-\mu)+\mu)}[\|Ex_0\|] + \frac{b^{1-\nu}M\|E^{-1}\|\phi(\|x^r\|)}{\Gamma(\mu)}\frac{(1-\mu_1)^{1-\mu_1}b^{\mu-\mu_1}}{(\mu-\mu_1)^{1-\mu_1}}\|n\|_{\frac{1}{\mu}} \\
&\quad + \left[\frac{b^{1-\nu}M^2\|E^{-1}\|^2M_B^2}{a\Gamma^2(\mu)}\frac{b^{2\mu-1}}{(2\mu-1)}\right] \\
&\quad \times \left(\|x_1\| + \frac{M\|E^{-1}\|b^{\nu-1}}{\Gamma(\gamma(1-\mu)+\mu)}[\|Ex_0\|] + \frac{M\phi(\|x^r\|)}{\Gamma(\mu)}\frac{(1-\mu_1)^{1-\mu_1}b^{\mu-\mu_1}}{(\mu-\mu_1)^{1-\mu_1}}\|n\|_{\frac{1}{\mu}}\right) \\
&\leq \frac{M\|E^{-1}\|}{\Gamma(\gamma(1-\mu)+\mu)}[\|Ex_0\|] + \frac{b^{1-\nu}M\|E^{-1}\|\phi(r)}{\Gamma(\mu)}\frac{(1-\mu_1)^{1-\mu_1}b^{\mu-\mu_1}}{(\mu-\mu_1)^{1-\mu_1}}\|n\|_{\frac{1}{\mu}} \\
&\quad + \left[\frac{b^{1-\nu}M^2\|E^{-1}\|^2M_B^2}{a\Gamma^2(\mu)}\frac{b^{2\mu-1}}{(2\mu-1)}\right] \\
&\quad \times \left(\|x_1\| + \frac{M\|E^{-1}\|b^{\nu-1}}{\Gamma(\gamma(1-\mu)+\mu)}[\|Ex_0\|] + \frac{M\|E^{-1}\|\phi(r)}{\Gamma(\mu)}\frac{(1-\mu_1)^{1-\mu_1}b^{\mu-\mu_1}}{(\mu-\mu_1)^{1-\mu_1}}\|n\|_{\frac{1}{\mu}}\right),
\end{aligned}
$$

où on a utilise la proposition 3.2.1.

Divisant les deux côtés de l'inégalité ci-dessus par r et en prenant la limite quand $r \to \infty$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{b^{1-\nu}M\|E^{-1}\|}{\Gamma(\mu)}\frac{(1-\mu_1)^{1-\mu_1}b^{\mu-\mu_1}}{(\mu-\mu_1)^{1-\mu_1}}\varpi\|n\|_{\frac{1}{\mu}}\right) \\
&\times\left(1 + \frac{M^2\|E^{-1}\|^2M_B^2}{a\Gamma^2(\mu)}\frac{b^{2\mu-1}}{(2\mu-1)}\right) \geq 1,
\end{aligned}
$$

ce qui est une contradiction à $(\mathbf{H_5})$. Ainsi, il existe $r > 0$ tel que Ψ applique B_r en lui-même.

Étape 3 : Ψ applique des ensembles bornés vers des ensembles équicontinues de $C_{1-\nu}(J, X)$.

Soit $0 < s < t < t+h \leq b$ et $\epsilon > 0$. Pour chaque $x \in B_r, z \in \Psi(x)$, il existe un $f \in S_{F,x}$ tel que

$$\begin{aligned} z(t) = \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)[x_0] &+ \int_0^t (t-s)^{\mu-1} P_{\mu,E}(t-s) f(s, x(s)) ds \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\mu-1} P_{\mu,E}(t-s) Bu(s) ds. \end{aligned}$$

Clairement,

$$
\begin{aligned}
&\|z(t+h)-z(t)\|\\
&\leq \sup_{t\in J} t^{1-\nu}\|\mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t+h)E[x_0]-\mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)E[x_0]\|\\
&+\sup_{t\in J} t^{1-\nu}\Big\|\int_t^{t+h}(t+h-s)^{\mu-1}P_{\mu,E}(t+h-s)f(s,x(s))ds\Big\|\\
&+\sup_{t\in J} t^{1-\nu}\Big\|\int_{t-\epsilon}^{t}(t+h-s)^{\mu-1}(P_{\mu,E}(t+h-s)-P_{\mu,E}(t-s))\times f(s,x(s))ds\Big\|\\
&+\sup_{t\in J} t^{1-\nu}\Big\|\int_{t-\epsilon}^{t}((t+h-s)^{\mu-1}-(t-s)^{\mu-1})P_{\mu,E}(t-s)\times f(s,x(s))ds\Big\|\\
&+\sup_{t\in J} t^{1-\nu}\Big\|\int_0^{t-\epsilon}(t+h-s)^{\mu-1}(P_{\mu,E}(t+h-s)-P_{\mu,E}(t-s))\times f(s,x(s))ds\Big\|\\
&+\sup_{t\in J} t^{1-\nu}\Big\|\int_0^{t-\epsilon}((t+h-s)^{\mu-1}-(t-s)^{\mu-1})P_{\mu,E}(t-s)\times f(s,x(s))ds\Big\|\\
&+\sup_{t\in J} t^{1-\nu}\Big\|\int_t^{t+h}(t+h-s)^{\mu-1}P_{\mu,E}(t+h-s)Bu(s)ds\Big\|\\
&+\sup_{t\in J} t^{1-\nu}\Big\|\int_{t-\epsilon}^{t}(t+h-s)^{\mu-1}(P_{\mu,E}(t+h-s)-P_{\mu,E}(t-s))Bu(s)ds\Big\|\\
&+\sup_{t\in J} t^{1-\nu}\Big\|\int_{t-\epsilon}^{t}((t+h-s)^{\mu-1}-(t-s)^{\mu-1})P_{\mu,E}(t-s)Bu(s)ds\Big\|\\
&+\sup_{t\in J} t^{1-\nu}\Big\|\int_0^{t-\epsilon}(t+h-s)^{\mu-1}(P_{\mu,E}(t+h-s)-P_{\mu,E}(t-s))Bu(s)ds\Big\|\\
&+\sup_{t\in J} t^{1-\nu}\Big\|\int_0^{t-\epsilon}((t+h-s)^{\mu-1}-(t-s)^{\mu-1})P_{\mu,E}(t-s)Bu(s)ds\Big\|\\
&:=\sum_{i=1}^{11} I_i.
\end{aligned}
$$

Maintenant, nous avons seulement besoin de vérifier $I_i \to 0$ as $h \to 0, i = 1, 2, ..., 11$.

pour I_1, par Proposition 3.2.2, $I_1 \to 0$ as $h \to 0$,

Soit $q = \frac{\mu-1}{1-\mu_1} \in (-1, 0)$. En vue de la proposition 3.2.1, pour I_2, I_3, I_4, I_5

and I_6 on a

$$I_2 \leq \frac{b^{1-\nu} M \|E^{-1}\| \phi(r)}{\Gamma(\mu)} \frac{h^{(q+1)(1-\mu_1)}}{(q+1)^{(1-\mu_1)}} \|n\|_{\frac{1}{\mu_1}}.$$

$$I_3 \leq \frac{b^{1-\nu} M \|E^{-1}\| \phi(r)}{\Gamma(\mu)} \left(\int_{t-\epsilon}^{t} (t+h-s)^{\mu-1} ds \right) \|n\|_{\frac{1}{\mu_1}}$$

$$\leq \frac{b^{1-\nu} M \|E^{-1}\| \phi(r)}{\Gamma(\mu)} \frac{(2h)^{(q+1)(1-\mu_1)}}{(q+1)^{(1-\mu_1)}} \|n\|_{\frac{1}{\mu_1}}.$$

$$I_4 \leq \frac{b^{1-\nu} M \|E^{-1}\| \phi(r)}{\Gamma(\mu)} \left(\int_{t-\epsilon}^{t} [(t+h-s)^{\mu-1} - (t-s)^{\mu-1}]^{\frac{1}{1-\mu_1}} ds \right)^{1-\mu_1} \|n\|_{\frac{1}{\mu_1}}$$

$$\leq \frac{b^{1-\nu} M \|E^{-1}\| \phi(r)}{\Gamma(\mu)} \frac{(2h)^{(q+1)(1-\mu_1)}}{(q+1)^{(1-\mu_1)}} \|n\|_{\frac{1}{\mu_1}}.$$

$$I_5 \leq b^{1-\nu} \sup_{s\in[0,t-\epsilon]} \|P_{\mu,E}(t+h-s) - P_{\mu,E}(t-s)\| \left(\int_0^{t-\epsilon} (t+h-s)^{\mu-1} ds \right) \phi(r) \|n\|_{\frac{1}{\mu_1}}$$

$$\leq b^{1-\nu} \sup_{s\in[0,t-\epsilon]} \|P_{\mu,E}(t+h-s) - P_{\mu,E}(t-s)\| \frac{[(t+h)^{q+1} - (h+\epsilon)^{q+1}]^{1-\mu_1}}{(q+1)^{1-\mu_1}} \phi(r) \|n\|_{\frac{1}{\mu_1}}.$$

De la même manière, pour I_7, I_8, I_9, I_{10} and I_{11} on obtient

$$I_7 \leq \frac{b^{1-\nu} M \|E^{-1}\| M_B}{\Gamma(\mu)} \frac{h^{(q+1)(1-\mu_1)}}{(q+1)^{(1-\mu_1)}} \|u\|.$$

$$I_8 \leq \frac{b^{1-\nu} M \|E^{-1}\| M_B}{\Gamma(\mu)} \frac{(2h)^{(q+1)(1-\mu_1)}}{(q+1)^{(1-\mu_1)}} \|u\|.$$

$$I_9 \leq \frac{b^{1-\nu} M \|E^{-1}\| M_B}{\Gamma(\mu)} \frac{(2h)^{(q+1)(1-\mu_1)}}{(q+1)^{(1-\mu_1)}} \|u\|.$$

$$I_{10} \leq b^{1-\nu} M_B \sup_{s\in[0,t-\epsilon]} \|P_{\mu,E}(t+h-s) - P_{\mu,E}(t-s)\| \frac{[(t+h)^{q+1} - (h+\epsilon)^{q+1}]^{1-\mu_1}}{(q+1)^{1-\mu_1}} \|u\|.$$

$$I_{11} \leq \frac{b^{1-\nu} M \|E^{-1}\| M_B}{\Gamma(\mu)} \frac{(2h)^{(q+1)(1-\mu_1)}}{(q+1)^{(1-\mu_1)}} \|u\|.$$

On peut facilement voir que $I_2, I_3, I_4, I_6, I_7, I_8, I_9, I_{11}$ tend vers zéro quand $h \to 0$. Par la Proposition 3.2.1, I_5 et I_{10} tend vers zéro. Ainsi $\|z(t+h) - z(t)\| \to 0$ quand $h \to 0$ pour tout $x \in B_r$. Cela implique que $\Psi(B_r) \subset C_{1-\nu}(J, X)$ est équicontinue.

Étape 4 : Ensuite, nous montrons que l'ensemble $V(t) = \{z(t) : z \in \Psi(B_r)\}$ est relativement compact dans X. Le cas $t = 0$ est trivial. Soit $t \in (0, b]$ fixé et pour chaque $\lambda \in (0, t)$ et $\forall\ \delta > 0$, $z \in \Psi(B_r)$, définissons un opérateur

$$\begin{aligned} z^{\lambda,\delta}(t) = {} & \frac{1}{\Gamma(\gamma(1-\mu))}\int_0^{t-\lambda}\int_\delta^\infty E^{-1}\mu\theta M_\mu(\theta)(t-s)^{\gamma(1-\mu)-1}s^{\mu-1}Q(s^\mu\theta)E[x_0]d\theta ds \\ & + Q(\lambda^\mu\theta)\int_0^{t-\lambda}\int_\delta^\infty E^{-1}\mu\theta(t-s)^{\mu-1}M_\mu(\theta)Q((t-s)^\mu\theta-\lambda^\mu\theta)\times\big[f(s,x(s))+Bu(s)\big]d\theta ds \end{aligned}$$

De la compacité de $Q(\lambda^\mu\theta), \lambda^\mu\theta > 0$, nous obtenons que pour $\forall\,\lambda \in (0, t)$ et $\forall\,\delta > 0$, l'ensemble $V^{\epsilon,\delta}(t) = \{z^{\lambda,\delta}(t), z^{\lambda,\delta} \in \Psi^{\lambda,\delta}(x), x \in B_r\}$ est relativement compact dans X.

De plus, pour chaque $x \in B_r$, nous avons

$$
\begin{aligned}
&\|z(t) - z^{\lambda,\delta}(t)\| \\
&= \sup_{t\in J} t^{1-\nu}\Big\| \frac{1}{\Gamma(\gamma(1-\mu))}\int_0^t (t-s)^{\gamma(1-\mu)-1} s^{\mu-1}\int_0^\delta E^{-1}\mu\theta M_\mu(\theta)Q(s^\mu\theta)E[x_0]d\theta ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\gamma(1-\mu))}\int_0^t (t-s)^{\gamma(1-\mu)-1} s^{\mu-1}\int_\delta^\infty E^{-1}\mu\theta M_\mu(\theta)Q(s^\mu\theta)E[x_0]d\theta ds \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\gamma(1-\mu))}\int_0^{t-\lambda} (t-s)^{\gamma(1-\mu)-1} s^{\mu-1}\int_\delta^\infty E^{-1}\mu\theta M_\mu(\theta)Q(s^\mu\theta)E[x_0]d\theta ds \\
&\quad + \int_0^t\int_0^\delta E^{-1}\mu\theta(t-s)^{\mu-1}M_\mu(\theta)Q((t-s)^\mu\theta)\times\big[f(s,x(s))+Bu(s)\big]d\theta ds \\
&\quad + \int_0^t\int_\delta^\infty E^{-1}\mu\theta(t-s)^{\mu-1}M_\mu(\theta)Q((t-s)^\mu\theta)\times\big[f(s,x(s))+Bu(s)\big]d\theta ds \\
&\quad - \int_0^{t-\lambda}\int_\delta^\infty E^{-1}\mu\theta(t-s)^{\mu-1}M_\mu(\theta)Q((t-s)^\mu\theta)\times\big[f(s,x(s))+Bu(s)\big]d\theta ds\Big\| \\
&\le \sup_{t\in J} t^{1-\nu}\Big\| \frac{1}{\Gamma(\gamma(1-\mu))}\int_0^t (t-s)^{\gamma(1-\mu)-1} s^{\mu-1}\times\int_0^\delta E^{-1}\mu\theta M_\mu(\theta)Q(s^\mu\theta)E[x_0]d\theta ds\Big\| \\
&\quad + \sup_{t\in J} t^{1-\nu}\Big\| \frac{1}{\Gamma(\gamma(1-\mu))}\times\int_{t-\lambda}^t (t-s)^{\gamma(1-\mu)-1} s^{\mu-1}\int_\delta^\infty E^{-1}\mu\theta M_\mu(\theta)Q(s^\mu\theta)E[x_0]d\theta ds\Big\| \\
&\quad + \sup_{t\in J} t^{1-\nu}\Big\|\int_0^t\int_0^\delta E^{-1}\mu\theta(t-s)^{\mu-1}M_\mu(\theta)Q((t-s)^\mu\theta)\times\big[f(s,x(s))+Bu(s)\big]d\theta ds\Big\| \\
&\quad + \sup_{t\in J} t^{1-\nu}\Big\|\int_{t-\lambda}^t\int_\delta^\infty E^{-1}\mu\theta(t-s)^{\mu-1}M_\mu(\theta)Q((t-s)^\mu\theta)\times\big[f(s,x(s))+Bu(s)\big]d\theta ds\Big\| \\
&\le \frac{\mu\|E^{-1}\|M}{\Gamma(\gamma(1-\mu))}\|Ex_0\|B(\gamma(\mu-1),\mu-1)\int_0^\delta \theta M_\mu(\theta)d\theta \\
&\quad + \frac{M\mu\|E^{-1}\|b^{\gamma(1-\mu)-1}}{\Gamma(\gamma(1-\mu))\Gamma(1+\mu)}\frac{\lambda^\mu}{\mu}\|Ex_0\|\int_\delta^\infty \theta M_\mu(\theta)d\theta \\
&\quad + \frac{b^{1-\nu}M\|E^{-1}\|b^{(q+1)(1-\mu_1)}}{(q+1)^{(1-\mu_1)}}(\phi(r)\|n\|_{\frac{1}{\mu_1}} + M_B\|u\|)\int_0^\delta \theta M_\mu(\theta)d\theta \\
&\quad + \frac{b^{1-\nu}M\|E^{-1}\|\lambda^{(q+1)(1-\mu_1)}}{\Gamma(1+\mu)(q+1)^{(1-\mu_1)}}(\phi(r)\|n\|_{\frac{1}{\mu_1}} + M_B\|u\|).
\end{aligned}
$$

Cela implique qu'il existe des ensembles relativement compacts arbitrairement proche de l'ensemble $V(t)$ pour chaque $t \in (0,b]$. Ainsi $V(t)$ est relativement compact dans X pour tout $t \in (0,b]$. Comme il est compact à $t=0$, donc $V(t)$ est relativement compact en X pour tout $t \in J$.

Étape 5 : Ψ a un graphe fermé.

Soit $x_n \to x_*$ quand $n \to \infty$, $z_n \in \Psi(x_n)$ et $z_n \to z_*$ quand $n \to \infty$. On va montrer que $z_* \in \Psi(x_*)$. Puisque $z_n \in \Psi(x_n)$, il existe un $f_n \in S_{F,x_n}$ tel que

$$\begin{aligned} z_n(t) = \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)E[x_0] &+ \int_0^t (t-s)^{\mu-1} P_{\mu,E}(t-s) f(s,x_n(s))ds \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\mu-1} P_{\mu,E}(t-s)(b-s)^{\mu-1} BB^* P^*_{\mu,E}(b-s)\mathcal{R}(a,\Gamma_0^b) \\ &\times \Big(x_1 - \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(b)E[x_0] - \int_0^b (b-\tau)^{\mu-1} P_{\mu,E}(b-\tau) f(\tau,x_n(\tau))d\tau\Big)ds. \end{aligned}$$

Nous devons prouver qu'il existe $f_* \in S_{F,x_*}$ tel que pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned} z_*(t) = \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)Ex_0 &+ \int_0^t (t-s)^{\mu-1} P_{\mu,E}(t-s) f(s,x_*(s))ds \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\mu-1} P_{\mu,E}(t-s)(b-s)^{\mu-1} BB^* P^*_{\mu,E}(b-s)\mathcal{R}(a,\Gamma_0^b) \\ &\times \Big(x_1 - \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(b)Ex_0 - \int_0^b (b-\tau)^{\mu-1} P_{\mu,E}(b-\tau) f(\tau,x_*(\tau))d\tau\Big)ds. \end{aligned}$$

Clairement,

$$\begin{aligned}
&\Big\|\Big[z_n(t) - \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)Ex_0 \\
&- \int_0^t (t-s)^{\mu-1}P_{\mu,E}(t-s)(b-s)^{\mu-1}BB^*P^*_{\mu,E}(b-s)\mathcal{R}(a,\Gamma_0^b) \\
&\quad \times \Big(x_1 - \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(b)Ex_0 - \int_0^b (b-\tau)^{\mu-1}P_{\mu,E}(b-\tau)f(\tau,x_n(\tau))d\tau\Big)ds\Big] \\
&- \Big[z_*(t) - \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)Ex_0 \\
&- \int_0^t (t-s)^{\mu-1}P_{\mu,E}(t-s)(b-s)^{\mu-1}BB^*P^*_{\mu,E}(b-s)\mathcal{R}(a,\Gamma_0^b) \\
&\times \Big(x_1 - \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(b)Ex_0 - \int_0^b (b-\tau)^{\mu-1}P_{\mu,E}(b-\tau)f(\tau,x_*(\tau))d\tau\Big)ds\Big]\Big\| \\
&\to 0 \quad \text{as}\, n \to \infty.
\end{aligned}$$

Considérons l'opérateur linéaire continue $\Gamma : L^{\frac{1}{\mu}}(J,X) \to C_{1-\nu}(J,X)$

$$\begin{aligned}
(\Gamma f)(t) = &\int_0^t (t-s)^{\mu-1}P_{\mu,E}(t-s)f(s,x_n(s))ds \\
&+ \int_0^t (t-s)^{\mu-1}P_{\mu,E}(t-s)(b-s)^{\mu-1}BB^*P^*_{\mu,E}(b-s)\mathcal{R}(a,\Gamma_0^b) \\
&\times \Big(\int_0^b (b-\tau)^{\mu-1}P_{\mu,E}(b-\tau)f(\tau,x_*(\tau))d\tau\Big)ds.
\end{aligned}$$

Clairement, il résulte du Lemme 3.2.4 que $\Gamma \circ S_{F,x}$ est un opérateur de graphe fermé. D'après la définition de Γ, nous avons que

$$\begin{aligned}
&\Big[z_n(t) - \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)Ex_0 - \int_0^t (t-s)^{\mu-1}P_{\mu,E}(t-s)(b-s)^{\mu-1}BB^*P^*_{\mu,E}(b-s)\mathcal{R}(a,\Gamma_0^b) \\
&\times \Big(x_1 - \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(b)Ex_0 - \int_0^b (b-\tau)^{\mu-1}P_{\mu,E}(b-\tau)f(\tau,x_n(\tau))d\tau\Big)ds\Big] \in \Gamma(S_{F,x_n}).
\end{aligned}$$

Puisque $f_n \to f_*$, il résulte du Lemme 3.2.4 que

$$\begin{aligned}
&\Big[z_*(t) - \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)Ex_0 - \int_0^t (t-s)^{\mu-1}P_{\mu,E}(t-s)(b-s)^{\mu-1}BB^*P^*_{\mu,E}(b-s)\mathcal{R}(a,\Gamma_0^b) \\
&\times \Big(x_1 - \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(b)Ex_0 - \int_0^b (b-\tau)^{\mu-1}P_{\mu,E}(b-\tau)f(\tau,x_*(\tau))d\tau\Big)ds\Big] \in \Gamma(S_{F,x_*}).
\end{aligned}$$

Par conséquent Ψ a un graphe fermé. En conséquence de l'étape 1 à l'étape 5 avec le théorème d'Arzela-Ascoli, Ψ est une application multivaluée complètement continu à valeur compacte et donc de la Proposition 3.2.3(4), nous obtenons que Ψ est s.c.s.. D'où par le lemme 3.2.1, Ψ a un point fixe $x(\cdot)$ on B_r , qui est la solution douce du système (3.1).

Théorème 3.3.2 *Supposons que les conditions* (S_1), (S_2), (S_3) *et* $(H_1)-(H_5)$ *soient vérifiées et la fonction multivaluée* $F(t,x(t))$ *est uniformément bornée. De plus, supposons que le système linéaire correspondant* (3.4) *est approximativement contrôlable sur* J*, alors le système* (3.1) *est approximativement contrôlable sur* J*.*

Dèmonstration : Sous les hypothèses ci-dessus, nous connaissons l'opérateur Ψ a un point fixe dans B_r. Soit x^a le point fixe de Ψ dans B_r, cela signifie qu'il existe $f^a \in S_{F,x}$ tel que

$$\begin{aligned} x^a(t) = {} & \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(t)Ex_0 + \int_0^t (t-s)^{\mu-1}P_{\mu,E}(t-s)f(s,x^a(s))ds \\ & + \int_0^t (t-s)^{\mu-1}P_{\mu,E}(t-s)(b-s)^{\mu-1}BB^*P^*_{\mu,E}(b-s)\mathcal{R}(a,\Gamma_0^b) \\ & \times \Big(x_1 - \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(b)Ex_0 - \int_0^b (b-\tau)^{\mu-1}P_{\mu,E}(b-\tau)f(\tau,x^a(\tau))d\tau\Big)ds, \quad t \in J. \end{aligned}$$

on définit

$$p(x^a) = x_1 - \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(b)Ex_0 - \int_0^b (b-\tau)^{\mu-1}P_{\mu,E}(b-\tau)f(\tau,x^a(\tau))d\tau.$$

Notons que $I - \Gamma_0^b \mathcal{R}(a, \Gamma_0^b) = a\mathcal{R}(a, \Gamma_0^b)$ on obtient

$$\begin{aligned}
x^a(b) &= \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(b)Ex_0 + \int_0^b (b-s)^{\mu-1} P_{\mu,E}(t-s) f(s, x^a(s))ds \\
&\quad + \int_0^b (b-s)^{2(\mu-1)} P_{\mu,E}(b-s)BB^* P^*_{\mu,E}(b-s)\mathcal{R}(a, \Gamma_0^b) \\
&\quad \times \Big(x_1 - \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(b)Ex_0 - \int_0^b (b-\tau)^{\mu-1} P_{\mu,E}(b-\tau) f(\tau, x^a(\tau))d\tau\Big)ds \\
&= \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(b)Ex_0 + \int_0^b (b-s)^{\mu-1} P_{\mu,E}(t-s) f(s, x^a(s))ds \\
&\quad + \Gamma_0^b \mathcal{R}(a, \Gamma_0^b) p(x^a) \\
&= \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(b)Ex_0 + \int_0^b (b-s)^{\mu-1} P_{\mu,E}(t-s) f(s, x^a(s))ds \\
&\quad + p(x^a) - a\mathcal{R}(a, \Gamma_0^b) p(x^a) \\
&= x_1 - a\mathcal{R}(a, \Gamma_0^b) p(x^a).
\end{aligned}$$

De plus, il existe un $\widetilde{L} < \infty$ tel que $\big\|f(s, x^a(s))\big\| \leq \widetilde{L}$. Par conséquent, la suite $\{f(s, x^a(s))\}$ a sous-suite encore notée par $\{f(s, x^a(s))\}$, converge faiblement, vers, $\{f(s, x(s))\}$.

On note

$$w = x_1 - \mathcal{S}_{\gamma,\mu,E}(b)Ex_0 - \int_0^b (b-s)^{\mu-1} P_{\mu,E}(b-s) f(s, x(s))ds.$$

Nous dérivons cela

$$\begin{aligned}
\|p(x^a) - w\| &= \Big\| \int_0^b (b-s)^{\mu-1} P_{\mu,E}(b-s) \times \Big[f(s, x^a(s)) - f(s, x(s))\Big]ds \Big\| \\
&\leq \Big\| \int_0^b (b-s)^{\mu-1} P_{\mu,E}(b-s) \times \Big[f(s, x^a(s)) - f(s, x(s))\Big]ds \Big\|.
\end{aligned}$$

De la compacité de l'opérateur $\{P_{\mu,E}(t), t > 0\}$ et la bornitude uniforme de $\{f(s, x^a(s))\}$ il existe quelques $f \in L^1(J, X)$ tel que lorsque $a \to 0^+$

$$P_{\mu,E}(b-s) f(s, x^a(s) \to P_{\mu,E}(b-s) f(s, x(s)).$$

De plus, par la contrôlabilité approximative du système (3.4) et la remarque (3.2.2), nous savons que $a(aI + \Gamma_0^b)^{-1}$ tend vers zéro quand $a \to 0^+$ dans la topologie de strong operator. Ainsi, nous pouvons obtenir cela comme $a \to 0^+$,

$$\begin{aligned}\|x^a(b) - x_1\| &\leq \|a\mathcal{R}(a, \Gamma_0^b)(w)\| + \|a\mathcal{R}(a, \Gamma_0^b)\|\|p(x^a) - w\| \\ &\leq \|a\mathcal{R}(a, \Gamma_0^b)(w)\| + \|p(x^a) - w\| \\ &\to 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, le système (3.1) est approximativement contrôlable sur J. La preuve est terminée.

3.4 Application

Comme application de nos résultats, nous considérons l'inclusion différentielle fractionnaire

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\gamma,\frac{3}{4}}(x(t,y) - x_{yy}(t,y)) \in x_{yy}(t,y) \\ +\overline{F}\,(t, x(t-r,y)) + Bu(t,y), t \in (0,b], \\ x(t,0) = x(t,\pi) = 0, \quad t \in J = [0,b], \\ I_{0^+}^{(\frac{1}{4})(1-\mu)}(x(0,y)) = 0, y \in [0,\pi], \end{cases} \tag{3.6}$$

où $D_{0^+}^{\gamma,\frac{3}{4}}$ est la dérivée fractionnelle de Hilfer d'ordre $\frac{3}{4}$ et de type γ, $I_{0^+}^{(\frac{1}{4})(1-\mu)}$ est l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre $\frac{1}{4}(1-\mu)$, $\overline{F}\,(t, x(t-r,y))$ et $Bu(t,y)$ sont des fonctions données.

Soit $U = X = Z = L^2([0,\pi], R)$ et Définir $A : D(A) \subset X \to Z$ par $Ax = x_{yy}$ et $E : D(E) \subset X \to Z$ par $Ex = x - x_{yy}$ où chaque domaine, $D(A)$ et $D(E)$, est donné par $\{x \in X : x, x_y$ sont absolument continues, $x_{yy} \in X, x(t,0) = x(t,\pi) = 0\}$. A et E peut être écrit comme suit :

$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \langle x, x_n \rangle x_n, x \in D(A)$,
$Ex = \sum_{n=1}^{\infty}(1+n^2) \langle x, x_n \rangle x_n, x \in D(E)$, respectivement, où $x_n(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin ny, n = 1, 2, ...$ est l'ensemble orthonormé de valeurs propres de A.

De plus, pour tout $x \in X$, nous avons

$$E^{-1}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \langle x, x_n \rangle x_n,$$
$$AE^{-1}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n^2}{(1+n^2)} \langle x, x_n \rangle x_n,$$
$$Q(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-n^2}{(1+n^2)} t\right) \langle x, x_n \rangle x_n.$$

Il est facile de voir que E^{-1} est compact, borné avec $\|E^{-1}\| \leq 1$ et AE^{-1} génère le semigroupe fortement continu ci-dessus $Q(t)$ sur$Z$ avec $Q\|(t)\| \leq e^{-t} \leq 1$. Par conséquent, avec les choix ci-dessus, le système (3.6) peut être écrit comme une formulation abstraite de (3.1) et donc le théorème 3.3.1 peut être appliquée pour garantir l'existence d'une solution douce de (3.6). De plus, on peut facilement voir que le système de contrôle fractionnaire linéaire déterministe de type Sobolev correspondant à (3.6) est approximativement contrôlable sur J,ce qui signifie que toutes les conditions du théorème 3.3.1 sont satisfait. Par conséquent, (3.6) est approximativement contrôlable sur J.

Chapitre 4

Equation Fractionnaire Impulsive avec Retard de Type Sobolev avec la familles Résolvante Alpha-Sobolev et des Conditions Intégrales

Dans ce chapitre on introduit un nouvel outil qui s'appelle la famille résolvante alpha-sobolev pour établir l'éxistance et l'unicité des solutions d'une classe d'équations intégro-différentielle quasilinéaire avec retard d'ordre fractionnaire avec des condition nonlocales et impulsives. On utilise le calcul fractionnaire, la famille résolvante et le théorème du point fixe de Banach pour les résultats principaux. De plus, on donne un exemple pour illustrer les résultats abstraits.

4.1 Introduction

Nous sommes concernés par le système à retard impulsif non local d'ordre fractionnaire et de type Sobolev suivants :

$$^{C}D_t^{\alpha}[B(t)u(t)] + A(t)u(t) = f(t, u(\beta(t))) + \int_0^t g(t, s, u(\gamma(s)))ds, t \neq t_k \quad (4.1)$$

$$u(0) + \int_0^a h(u(\sigma(t)))dt = u_0 \quad (4.2)$$

$$\triangle u|_{t=t_k} = I_k(u(t_k^-)), \quad (4.3)$$

Dans un espace de Banach X, où $^{C}D_t^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $0 < \alpha < 1$, u est une fonction de $[0, a]$ à valeur dans X et $u_0 \in X$. Soit $A(t)$ et $B(t)$ deux opérateurs linéaires avec des domaines contenus dans X et des images contenues dans un espace de Banach Y. $f : J \times X \to Y$, $g : \Lambda \times X \to Y$ et $h : PC(J, X) \to Y$ sont des fonctions abstraites donnés, $\beta, \gamma, \sigma : J \to J'$ sont les arguments de retard. $I_k : X \to X, k = 1, 2, ..., m, 0 < t_1 < t_2 < ... < t_m < a, \Delta|_{t=t_k} = u(t_k^+) - u(t_k^-)$ constitues la condition impulsive. Ici $J = [0, a]$, $J' = [0, t]$ et $\Lambda = (t, s) : 0 \leq s \leq t \leq a$.
Pour $k = 1, 2, ..., m$,on considère l'ensemble des fonctions

$$PC(J, X) = \big\{u : j \to X : u \in C((t_{k-1}, t_k], X) \text{ and there exist } u(t_k^+) \text{ and } u(t_k^-) \text{ with } u(t_k^-) = u(t_k)\big\}$$

Muni de la norme $\| u \|_{PC} = \sup\limits_{t \in J} \| u(t) \|$.
Clairement $(PC(J, X), \| \, . \, \|_{PC})$ est un espace de Banach.
Grâce à ses résultats précis et meilleures applications dans diverses sciences, telles que la physique, la mécanique, la chimie, l'ingénierie, etc., le calcul fractionnaire a pris une importance considérable. Pendant trois siècles, les

équations différentielles fractionnaires ont attiré l'attention de nombreux mathématiciens et physiciens, voir par exemple [13, 14, 30, 58, 69, 95] et les références qui y sont contenues. Ceci est principalement parce qu'ils décrivent efficacement de nombreux phénomènes qui se produisent dans l'ingénierie, la physique, l'économie et la science. En effet, on peut trouver de nombreuses applications en viscoélasticité, électrochimie, contrôle, milieux poreux, électromagnétiques. Au cours des dernières décennies, il y a eu un développement important dans les équations différentielles ordinaires et partielles impliquant des dérivés fractionnaires, voir les monographies de Kilbas et al. [57], Lakshmikantham et al. [62], Miller et Ross [71]Podlubny [74] et les documents.
Pour comprendre les progrès de la théorie des équations différentielles non locales et impulsifs, les lecteurs peuvent se référer à : Byszewski [5, 9]. Au cours des années récentes, de nombreuses activités ont été présentées pour établir les résultats d'existence des équations d'évolution fractionnaire, Benchohra et al. [10] ont considéré l'IVP pour une classe d'équations différentielles fonctionnelles fractionnaires avec un retard infini, Araya et Lizama [13] ont introduit l'idée de la famille α-resolvent afin de construire la représentation de la solution. Cependant, de nombreux problèmes restent sans formes explicites de solutions.

Nous introduisons un nouveau concept appelé famille résolvante alpha-Sobolev pour discuter des résultats d'existence d'une classe de système à retard impulsif non local fractionnaire de type Sobolev.

4.2 Préliminaires

Soit X et Y deux espaces de Banach tel que Yest continuement dense et inclus dans X. Pour tout espace de Banach Z, la norme de Z est désigné par $\| \, . \, \|_z$. L'espace de tous les opérateurs linéaires bornés de X à Y est noté $B(X,Y)$ et $B(X,X)$ s'écrit $B(X)$. Nous rappelons quelques définitions du calcul fractionnaire de [57, 71, 74], puis quelques faits connus de la théorie des semigroupes de [52, 72, 100].

En utilisant la Définition 2.1 et la Proposition 2.1. (iv), le système (4.1)-(4.3) est équivalent à l'équation intégrale :

$$\begin{aligned} B(t)u(t) =& B(0)u(0) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \Big[-A(s)u(s) + f(s,u(\beta(s))) + \int_0^s g(s,\eta,u(\gamma(\eta)))d\eta \Big] ds \\ &+ \sum_{0<t_i<t} I_i(u(t_i)), t \in J \end{aligned} \tag{4.4}$$

Nous supposons que les opérateurs $A(t) : D(A) \subset X \to Y$ et $B(t) : D(B) \subset X \to Y$ vérifiant les hypothèses suivantes :

(a) $A(t)$ and $B(t)$ sont des opérateurs linéaires, et $A(t)$ est fermé

(b) $D(B) \subset D(A)$ et $B(t)$ est bijective,

(c) $B^{-1}(t) : Y \to D(B)$ est compact,

Remarque 4.2.1 *De (c), nous déduisons que $B^{-1}(t)$ est un opérateur borné. Note (c) implique aussi que $B(t)$ est fermé puisque en fait : $B^{-1}(t)$ est fermé et injectif, alors son inverse est également fermé. Il vient de (a)-(c) et le théorème du graphe fermé, on obtient le bornitude de l'opérateur linéaire $E(t) = A(t)B^{-1}(t) : Y \to Y$. Par conséquent, $-E(t)$ génère un opérateur d'évolution à spécifier ultérieurement.*

Définition 4.2.1 *Une famille d'opérateurs linéaires bornés à deux paramètres $U(t,s), 0 \leq s \leq t \leq a$, sur X est appelée un système d'évolution si les deux conditions suivantes sont satisfaites*

(1) $U(t,t) = I,\ U(t,\ r)U(r,s) = U(t,s)$ for $0 \leq s \leq r \leq t \leq a$,

(2) $(t,\ s) \to U(t,\ s)$ is strongly continuous for $0 \leq s \leq t \leq a$.

More detail about evolution system can be found in Pazy [72].

Définition 4.2.2 *Soit $\mathrm{p}[E(t)]$ l'ensemble résoluante de $E(t)$. Nous appelons $E(t)$ le générateur d'une famille résolvante alpha -Sobolev s'il existe $\omega \geq 0$ et une fonction fortement continue $W_\alpha : \mathbb{R}_+^2 \to \mathcal{L}(X)$ tel que $\{\lambda^\alpha : \mathfrak{Re}(\lambda) > \omega\} \subset \mathrm{p}[E(t)]$ et pour $0 \leq s \leq t < \infty$,*

$$\left[\lambda^\alpha I - E(s)\right]^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda(t-s)} B^{-1}(s) W_\alpha(t,s) B(s) x dt,\ \mathfrak{Re}(\lambda) > \omega,\ x \in X. \tag{4.5}$$

Dans ce cas, $W_\alpha(t,s)$ est appelée la famille résolvante α-Sobolev générée par $E(t)$.

Remarque 4.2.2 .

1. *Si $B(.) = I$ et $A(.) = A$, alors (4.5) sera réduite au concept introduit par [5].*
2. *On peut déduire que (4.1)-(4.3) est bien posé si et seulement si, $-E(t)$ est le générateur de la famille résolvante α-Sobolev.*
3. *Ici, $W_\alpha(t,s)$ peut être extrait de l'opérateur d'évolution du générateur $-E(t)$*
4. *La famille résolvante α-Sobolev est similaire à l'opérateur d'évolution pour les équations différentielles non autonomes dans un espace de Banach.*

Soit Ω un sous-ensemble de X.

Définition 4.2.3 *(Motivé par [23, 25]) Une fonction $u \in PC(J:X)$ est dite une solution mild de (4.1)-(4.3) avec des valeurs dans Ω si elle satisfait l'équation intégrale :*

$$
\begin{aligned}
u(t) =& B^{-1}(t)W_\alpha(t,0)B(0)u_0 - B^{-1}(t)W_\alpha(t,0)B(0)\int_0^a h(u(\sigma(t)))dt \\
&+ \int_0^t B^{-1}(s)W_\alpha(t,s)[f(s,\ u(\beta(s))) + \int_0^s g(s,\eta,\ u(\gamma(\eta)))d\eta]ds \\
&+ \sum_{0<t_i<t} B^{-1}(t)W_\alpha(t,t_i)I_i(u(t_i)),
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

for all $u_0 \in X$.

Définition 4.2.4 *([22, 24, 28]) Par une solution classique de (**??**)-(**??**) sur J, nous voulons dire une fonction u avec des valeurs dans X telles que :*
- *u est une fonction continue sur $J\backslash\{t_1, t_2,\ \ldots, t_m\}$ et $u(t) \in D(-E(t))$,*
- *${}^C D_t^\alpha[B(t)u(t)]$ existe et est continu dans $t \in J_0, 0 < \alpha < 1$,*
- *u satisfait (1.1) sur J_0, la condition non locale (4.2) et la condition impulsive (1.3),*

où $J_0 = (0,a]\backslash\{t_1, t_2,\ \ldots, t_m\}$.

Nous faisons les conditions suivantes

(H_1) L'argument de retard $\beta : J \to J'$ est bijectif absolument continu et satisfait

$$\beta \in C^1(J,\mathbb{R}),\ \beta(t) \le t,\ \beta'(t) \ge c_1.$$

De même pour γ et σ, we have $\gamma'(t) \ge c_2$ and $\sigma'(t) \ge c_3$, where $c_1, c_2, c_3 > 0$.
(H_2)$h : PC(J:\Omega) \to Y$ est Lipschitzienne en X et bornée dans Y, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ telles que

$$\|h(u)\|_Y \le k_1,$$

$$\|h(u) - h(v)\|_Y \leq k_2 \max_{t\in J} \|u - v\|_{PC}, \ u, v \in PC(J : X).$$

(H$_3$) L'opérateur $[B(t) + \lambda^\alpha I]^{-1}$ existe dans $L(X)$ pour tout λ with $\mathfrak{Re}\lambda \leq 0$ et

$$\|[B(t) + \lambda^\alpha I]^{-1}\| \leq \frac{C_\alpha}{|\lambda| + 1}, \ t \in J.$$

(H$_4$)$g : \Lambda \times X \to X$ est continu et il existe des constantes $k_3 > 0$ et $k_4 > 0$ telles que

$$\int_0^t \|g(t, s, u) - g(t, s, v)\|_X ds \leq k_3 \|u - v\|_X, \ u, v \in X.$$

$$k_4 = \max\{\int_0^t \|g(t, s, 0)\|_X ds : (t, s) \in \Lambda\}.$$

(H$_5$)$f : J \times X \to X$ est continu et il existe des constantes $k_5 > 0$ et $k_6 > 0$ telle que

$$\|f(t, \ ) - f(t, v)\|_X \leq k_5 \|u - v\|_X, \ u, v \in X,$$

$$k_6 = \max_{t\in J} \|f(t, 0)\|_X.$$

(H$_6$)$I_i : X \to X$ sont continus et il existe des constantes $l_i > 0, \ i = 1, 2, \ \ldots, \ m$ telle que

$$\|I_i(u) - I_i(v)\| \leq l_i \|u - v\|_X, \ u, v \in X.$$

Prenons $R = \|B(0)\|_Y$ et $M_0 = \max \|W_\alpha(t, s)\|_{\mathcal{L}(X)}, \ 0 \leq s \leq t \leq a$.

(H$_7$) Il existe des constantes positives $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in (0, \delta/3]$ et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, \ \frac{1}{3})$ tel que

$$\delta_1 = C_\alpha M_0 R\Big[\|u_0\|_Y + \frac{k_1 a}{c_3}\Big], \ \delta_2 = C_\alpha M_0 \Big[\frac{k_5 a}{c_1}\{\delta + k_6\} + \frac{k_3 a}{c_2}\{\delta + k_4\}\Big], \ \delta_3 = C_\alpha M_0 \xi,$$

et

$$\lambda_1 = C_\alpha M_0 R \frac{k_2 a}{c_3}, \lambda_2 = C_\alpha M_0 a\Big(\frac{k_5}{c_1} + \frac{k_3}{c_2}\Big), \lambda_3 = C_\alpha M_0 \sum_{i=1}^m l_i,$$

où $\xi = \sum_{i=1}^{m}(l_i\delta + \|I_i(0)\|)$.

4.3 Résultats d'existence

Soit $S_\delta = \{u : u \in PC(J : X),\ u(0)+h(u) = u_0, \Delta u(t_i) = I_i(u(t_i)),\ \|u\| \leq \delta\}$, pour $t \in J,\ \delta > 0,\ u_0 \in X$ et $i = 1,\ \dots,\ m$.

Théorème 4.3.1 *Supposons que l'opérateur $-E(t)$ génère une famille résolvante α-Sobolev $W_\alpha(t,s)$ avec $\|W_\alpha(t,\ s)\| \leq Me^{N(t-s)},\ M,N > 0$. Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_1) \sim (\mathrm{H}_7)$ *sont satisfaits, alors le système avec retard impulsif non local d'ordre fractionnire de type Sobolev* (4.1)-(4.3) *admet une solution mild unique on J pour tout $u_0 \in X$.*

Démonstration Considérons une application P sur S_δ défini par

$$\begin{aligned}(Pu)\ (t) =& B^{-1}(t)W_\alpha(t,0)B(0)u_0 - B^{-1}(t)W_\alpha(t,0)B(0)\int_0^a h(u(\sigma(t)))dt \\ &+ \int_0^t B^{-1}(s)W_\alpha(t,s)[f(s,u(\beta(s))) + \int_0^s g(s,\eta,u(\gamma(\eta)))d\eta]ds \\ &+ \sum_{0<t_i<t} B^{-1}(t)W_\alpha(t,t_i)I_i(u(t_i)),\end{aligned}$$

Nous allons montrer que $P : S_\delta \to S_\delta$. pour $u \in S_\delta$, on a

$$\begin{aligned}
\|Pu(t)\|_Y \leq & \Big\|B^{-1}(t)W_\alpha(t,0)B(0)u_0 - B^{-1}(t)W_\alpha(t,\ 0)B(0)\int_0^a h(u(\sigma(t)))dt\Big\| \\
& + \Big\| \int_0^t B^{-1}(s)W_\alpha(t,s)[f(s,u(\beta(s))) + \int_0^s g(s,\eta,u(\gamma(\eta)))d\eta]ds\Big\| \\
& + \sum_{0<t_i<t} \|B^{-1}(t)W_\alpha(t,t_i)I_i(u(t_i))\| \\
& \leq \|B^{-1}(t)W_\alpha(t,0)B(0)\Big[\|u_0\| + \int_0^a \|h(u(\sigma(t)))\|dt\Big] \\
& + \int_0^t \|B^{-1}(s)W_\alpha(t,s)\|\Big[\|f(s,u(\beta(s))) - f(s,0)\| + \|f(s,0)\| \\
& + \int_0^s \|g(s,\eta,\ u(\gamma(\eta))) - g(s,\eta,0)\|d\eta + \int_0^s \|g(s,\eta,0)\|d\eta\Big]ds \\
& + \sum_{0<t_i<t} \|B^{-1}(t)W_\alpha(t,t_i)\|\big(\|I_i(u(t_i)) - I_i(0)\| + \|I_i(0)\|\big)
\end{aligned}$$

En utilisant $(\mathrm{H}_1) \sim (\mathrm{H}_6)$, on a

$$\begin{aligned}
\|Pu(t)\|_Y \leq & C_\alpha M_0 R\Big[\|u_0\|_Y + \int_0^a \|h(u(\sigma(t)))\|(\sigma'(t)/c_3)dt\Big] \\
& + C_\alpha M_0 \int_0^t \Big[k_5\{\|u(\beta(s))\|(\beta'(s)/c_1)\} + k_6 + k_3\{\|u(\gamma(s))\|(\gamma'(s)/c_2)\} + k_4\Big]ds \\
& + C_\alpha M_0 \sum_{0<t_i<t} \|(\|I_i(u(t_i)) - I_i(0)\| + \|I_i(0)\|) \\
& \leq C_\alpha M_0 R\Big[\|u_0\|_Y + \frac{1}{c_3}\int_{\sigma(0)}^{\sigma(a)} \|h(u(\tau))\|d\tau\Big] \\
& + C_\alpha M_0\Big[\frac{k_5}{c_1}\int_{\beta(0)}^{\beta(t)} \{\|u(\eta)\| + k_6\}d\eta + \frac{k_3}{c_2}\int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} \{\|u(\theta)\| + k_4\}d\theta\Big] \\
& + C_\alpha M_0 \sum_{i=1}^m (l_i\delta + \|I_i(0)\|).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|Pu(t)\|_Y \leq C_\alpha M_0\Big[R(\|u_0\|_Y + \frac{k_1 a}{c_3}) + \frac{k_5 a}{c_1}(\delta + k6) + \frac{k_3 a}{c_2}(\delta\ \ + k_4) + \xi].$$

De l'hypothèse (H_7), on obtient $\|(Pu)(t)\|_Y \leq \delta$. Par conséquent, P applique S_δ en lui-même.

Maintenant pour $u, v \in S_\delta$, on a

$$\|Pu(t) - Pv(t)\| \leq I_1 + I_2 + I_3,$$

où

$$I_1 = \|B^{-1}(t)W_\alpha(t,0)B(0)\| \int_0^a \|h(u(\sigma(t))) - h(v(\sigma(t)))\|dt$$

$$I_2 = \int_0^t \|B^{-1}(s)W_\alpha(t,s)\|\{\|f(s,u(\beta(s))) - f(s,v(\beta(s)))\| + \int_0^s \|g(s,\eta,u(\gamma(\eta))) - g(s,\eta,v(\gamma(\eta)))\|d\eta\}ds$$

et

$$I_3 = \sum_{i=1}^m \|B^{-1}(t)W_\alpha(t,t_i)\|\|I_i(u(t_i)) - I_i(v(t_i))\|.$$

Appliquons (H_1), (H_2) et (H_3), on trouve

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq C_\alpha M_0 R \int_0^a \|h(u(\sigma(t))) - h(v(\sigma(t)))\|(\sigma'(t)/c_3)dt \\
&\leq C_\alpha M_0 R \frac{1}{c_3} \int_{\sigma(0)}^{\sigma(a)} \|h(u(\tau)) - h(v(\tau))\|d\tau \\
&\leq \left\{ C_\alpha M_0 R \frac{k_2 a}{c_3} \right\} \max_{\tau \in J} \|u(\tau) - v(\tau)\|.
\end{aligned}$$

On applique aussi (H_1), (H_3), (H_4) et (H_5), on obtient

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq C_\alpha M_0 \int_0^t \{k_5\|u(\beta(s)) - v(\beta(s))\|(\beta'(s)/c_1) + k_3\|u(\gamma(s)) - v(\gamma(s))\|(\gamma'(s)/c_2)\} \, ds \\
&\leq C_\alpha M_0 \left\{ \frac{k_5}{c_1} \int_{\beta(0)}^{\beta(t)} \|u(\eta) - v(\eta)\|d\eta + \frac{k_3}{c_2} \int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} \|u(\theta) - v(\theta)d\theta \right\} \\
&\leq \left\{ C_\alpha M_0 a (\frac{k_5}{c_1} + \frac{k_3}{c_2}) \right\} \max_{\tau \in J} \|u(\tau) - v(\tau)\|.
\end{aligned}$$

Encore, (H_3) et (H_6), nous avons

$$\begin{aligned} I_3 &\leq C_\alpha M_0 \sum_{i=1}^{m} \|I_i(u(t_i)) - I_i(v(t_i))\| \\ &\leq \left\{ C_\alpha M_0 \sum_{i=1}^{m} l_i \right\} \max_{\tau \in J} \|u(\tau) - v(\tau)\|. \end{aligned}$$

Il résulte de ces estimations que

$$\|Pu(t) - Pv(t)\| \leq \lambda \max_{\tau \in J} \|u(\tau) - v(\tau)\|,$$

où $0 \leq \lambda < 1(\mathrm{H}_7)$. Ainsi P est une contraction sur S_6.A partir du théorème de contraction, P a un point fixe unique u dans S_δ qui est la solution mild de (4.1)-(4.3) dans J.

Théorème 4.3.2 *Supposons que*

(i) Les conditions $(\mathrm{H}_1) \sim (\mathrm{H}_7)$ *tiennent*

(ii) Y *est un espace Banach réflexif avec la norme* $\|\cdot\|$,

(iii) Les fonctions f *et* g *sont uniformément Hölder continues en* $t \in J$, *i.e. Il y a des nombres* $L_1, L_2 > 0$ *et* $p, q \in (0, 1]$ *tels que*

$$\|f(t_1, u) - f(t_2, v)\| \leq L_1(|t_1 - t_2|^p + \|u - v\|),$$

$$\|g(s_1, \eta,\ u) - g(s_2, \eta, v)\| \leq L_2 |s_1 - s_2|^q$$

pour tout $t_1, t_2 \in J$ *et tout* $(s_1, \eta),\ (s_2, \eta) \in \Lambda$

Alors le problème (4.1)-(4.3) *a une solution classique unique sur* J.

Proof En appliquant le théorème 3.1, le problème $(1.1)-(1.3)$ a une solution mild $u \in S_6$. Maintenant, nous montrerons que u est une solution classique unique du problème considéré sur J.

([36]) Selon (ii), $\|u-v\|$ est uniformément Hölder continu en $t \in J$, aussi (iii) implique que $t \to f(t,\ u)$ et $t \to \int_0^t g(t, s,\ u)ds$ sont uniformément Hölder continues sur J.

On pose

$$V(t) = f(t, u(\beta(t))) + \int_0^t g(t, s, u(\gamma(s)))ds.$$

Clairement $V(t)$ est uniformément Hölder continue sur $t \in J$.

Considérons le problème de Cauchy non local impulsif suivant

$$^C D_t^{\alpha}[B(t)v(t)] + A(t)u(t) = V(t), \tag{4.7}$$

$$v(0) + \int_0^a h(u(\sigma(t)))dt = u_0, \tag{4.8}$$

$$\Delta u|_{t=t_k} = I_k(u(t_k^-)), \tag{4.9}$$

De Pazy [?] ; (3.1) − (3.3) a une solution unique v sur J donnée par

$$\begin{aligned} v(t) =& B^{-1}(t)W_{\alpha}(t,0)B(0)u_0 - B^{-1}(t)W_{\alpha}(t,0)B(0)\int_0^a h(u(\sigma(t)))dt \\ &+ \int_0^t B^{-1}(s)W_{\alpha}(t,s)V(s)ds \\ &+ \sum_{0<t_i<t} B^{-1}(t)W_{\alpha}(t,t_i)I_i(u(t_i)) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Notant que, chaque terme sur le côté droit de (3.4) appartient à $D(-E)$, donc $v(t) \in D(-E)$, en utilisant l l'unicité de $V(t)$, nous avons $u(t) = v(t)$. Donc u est la solution classique unique de (4.1)-(4.3) sur J.

Pour illustrer les résultats abstraits, nous donnons l'exemple suivant.

4.4 Exemple

Considérons le système partiel avec retard impulsif non local fractionnaire de type Sobolev

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}\left[\sum_{|q|\leq 2m} b_q(x,t)D_x^q u(x,t)\right]+\sum_{|q|\leq 2m} a_q(x,t)D_x^q u(x,t)=F(x,t,\ u(x,\sin t))$$
$$+\int_0^t G(x,t,s,u(x,\sin s))ds, \tag{4.11}$$

$$u(x,0)+\sum_{k=1}^{p} c_k\int_0^a u(x,\sin t_k)dt_k=g(x), \tag{4.12}$$

$$\Delta u(t_i)(x)=\int_0^{t_i}\zeta_i(t_i-s)u(x,s)ds, \tag{4.13}$$

où $0<\alpha\leq 1, 0\leq t_1<\ldots<t_p\leq a,\ x\in\mathbb{R}^n, D_x^q=D_{x_1}^{q_1}\ldots D_{x_n}^{q_n},\ D_{x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i},\ q=(q_1,\ \ldots,q_n)$ est un multi-index n-dimensionnel, $|q|=q_1+\ldots+q_n$.

Soit $L_2(\mathbb{R}^n)$ be l'ensemble de toutes les fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}^n$. On note par $C^m(\mathbb{R}^n)$ L'ensemble de toutes les fonctions continues à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}^n$ qui ont des dérivées partielles continues d'ordre inférieur ou égal à m. Par $C_0^m(\mathbb{R}^n)$ on note l'ensemble de toutes les fonctions $f\in C^m(\mathbb{R}^n)$ avec des supports compacts. Soit $H^m(\mathbb{R}^n)$ le complémentaire de $C_0^m(\mathbb{R}^n)$ par rapport à la norme

$$\|f\|_m^2=\sum_{|q|\leq m}\int_{\mathbb{R}^n}|D_x^q f(x)|^2dx.$$

On suppose que

(i) L'opérateur $E=-\sum_{|q|=2m} e_q(x,t)D_X^q$ est uniformément elliptique sur $\mathbb{R}^n$.

En d'autres termes, tous les coefficients $e_q, \ |q| = 2m$, sont continues et bornées dans $\mathbb{R}^n$ et il y a un nombre positif c tel que

$$(-1)^{m+1} \sum_{|q|=2m} e_q(x)\xi^q \geq c|\xi|^{2m},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\xi \neq 0, \ \xi \in \mathbb{R}^n$, où $e_q = a_q b_q^{-1}, \ \xi^q = \xi_1^{q_1} \ldots \xi_n^q$. et $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$.

(ii) Tous les coefficients $e_q(x,t), \ |q| = 2m$, satisfaire la condition uniforme de Hölder sur $\mathbb{R}^n$. Sous ces conditions, l'opérateur E avec le domaine de définition $D(E) = H^{2m}(R^n)$ génère un opérateur d'évolution défini sur $L_2(\mathbb{R}^n)$, et il est bien connu que $H^{2m}(\mathbb{R}^n)$ Est dense dans $X = L_2(\mathbb{R}^n)$ et la fonction nonlocale $g(x)$ est un élément dans l'espace de Hilbert $H^{2m}(\mathbb{R}^n)$, voir [13, 16]. En appliquant les théorèmes 3.1, ceci apporte la preuve de l'existence de la solutions mild du problème (4.11)-(4.13). De plus, si les opérateurs F et G satisfont

(iii) Il y a des nombres $L_1, L_2 \geq 0$ et $0 < p, q \leq 1$ tels que

$$\|F(x,t,u) - F(x,s,v)\|^2 \leq L_1(|t-s|^p + \|u-v\|^2)$$

$$\|G(x,t,\eta,u) - G(x,s,\eta,v)\|^2 \leq L_2|t-s|^q,$$

pour tout $t, s \in J, \ (t,\eta), (s,\eta) \in \Lambda, \ u, v \in H^{2m}(\mathbb{R}^n)$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$. En appliquant le Théorème 3.2, nous déduisons que (4.11)-(4.13) a une unique solution classique.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Nos principales contributions scientifiques dans ce projet de doctorat ont porté sur l'existence, la contrôlabilité approchée, ainsi que le contrôle optimal, pour différentes classes d'équations différentielles et inclusions fractionnaires. Nous avons montré l 'intérêt de la dérivée fractionnaire de Hilfer, pour différentes classes de systèmes différentiels dans la modélisation de plusieurs phénomènes complexes, pour lesquels, il peut être considéré comme un interpolant entre les dérivés de Riemann - Liouville et de Caputo.

Afin de décrire les divers problèmes du monde réel en sciences physiques et en ingénierie, soumis à des changements brusques pour certains instants durant le processus d'évolution, les équations différentielles fractionnaires impulsives sont devenues importantes ces dernières années comme modèles mathématiques pour de nombreux phénomènes physiques et sociaux. Ce constat, nous a motivé à utiliser cette condition, où nous l'avons consacré une partie importante dans de cette thèse.

Un autre domaine récent et actif est la notion de dérivée fractionnaire d'ordre variable, où la dérivée fractionnaire peut être considérée aussi comme une fonction. Cette notion a été exploitée avec succès dans certains cas pratiques.

Comme perspectives, nous projetons l'étude des modèles dynamiques du cancer en utilisant des équations différentielles fractionnées d'ordres variables.

Bibliographie

[1] S. Abbas, M. Benchohra, A. Petrusel, Ulam stability for Hilfer type fractional differential inclusions via the weakly Picard operators theory, Fractional Calculus and Applied Analysis, **20**(2) (2017) 384–398.

[2] Ahmed H., Controllability for Sobolev type fractional integrodifferential systems in a Banach space, *Advances in Difference Equations*, **2012** (2012), 167.

[3] H.M. Ahmed, M.M. El-Borai, Hilfer fractional stochastic integro-differential equations, Applied Mathematics and Computation, **331** (2018) 182–189.

[4] R.P. Agarwal, D. Baleanu, J.J. Nieto, D.F.M. Torres, Y. Zhou, A survey on fuzzy fractional differential and optimal control nonlocal evolution equations, Journal of Computational and Applied Mathematics, **339** (2017) 3–29.

[5] D. Araya, C. Lizama, Almost automorphic mild solutions to fractional differential equations, Nonlinear Analysis 69 (2008) 3692-3705

[6] D. Baleanu, Fractional calculus : models and numerical methods. Vol. 3, World Scientific, 2012.

[7] Bashirov A.E., Mahmudov N.I., On concepts of controllability for deterministic and stochastic systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **37**(1999), 1808-1821.

[8] A. Benchaabane, R. Sakthivel, Sobolev-type fractional stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients, Journal of Computational and Applied Mathematics, **312** (2017) 65–73.

[9] M. Benchohra, J. Henderson, S.K. Ntouyas, A. Ouahab, Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay, J. Math. Anal. Appl. 338 (2008) 1340-1350

[10] M. Benchohra, J. Henderson, S.K. Ntouyas, Impulsive Differential Equations and Inclusions, Hindawi Publ. Corp., New York, 2006

[11] C. Burgos, J. Calatayud, J.C. Cortés, L. Villafuerte, Solving a class of random non-autonomous linear fractional differential equations by means of a generalized mean square convergent power series, Applied Mathematics Letters, **78** (2018) 95–104.

[12] C. Burgos, J.C. Cortés, L. Villafuerte, R.J. Villanueva, Solving random mean square fractional linear differential equations by generalized power series : Analysis and computing, Journal of Computational and Applied Mathematics, **339** (2018) 94–110.

[13] M. Bragdi, A. Debbouche, Controllability of fractional evolution integro-differential equations with almost sectorial operators, Nonlinear Studies, 20(2) (2013) 193-202

[14] M. Bragdi, A. Debbouche, D. Baleanu, Existence of Solutions for Fractional Differential Inclusions with Separated Boundary Conditions in Banach Space, Advances in Mathematical Physics, 2013 (2013), Article ID 426061, 5 pages

[15] Brill H., A semilinear Sobolev evolution equation in Banach space, *J. Differential Equations*, **24**(1977), 412-425.

[16] L. Byszewski, Theorems about the existence and uniqueness of continuous solutions of nonlocal problem for nonlinear hyperbolic equation, Applicable Analysis 40 (1991) 173-180

[17] L. Byszewski, Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem, Joumal of Mathematical Analysis and Applications 162 (1991) 494-505

[18] F.H. Clarke, Optimization and Nonsmooth Analysis, Wiley : New York, 1983.

[19] Colli P., Gilardi G., Sprekels J., Distributed optimal control of a nonstandard nonlocal phase field system with double obstacle potential, *Evolution Equations and Control Theory*, **6**(1) (2017), 35-58.

[20] A. Debbouche, V. Antonov, Approximate controllability of semilinear Hilfer fractional differential inclusions with impulsive control inclusion conditions in Banach spaces, Chaos, Solitons & Fractals, **102** (2017) 140–148.

[21] Debbouche A., Baleanu D., Controllability of fractional evolution nonlocal impulsive quasilinear delay integro-differential systems, *Comput. Math. Appl.*, **62**(2011), 1442-1450.

[22] A. Debbouche, D. Baleanu, Exact Null Controllability for Fractional Nonlocal Integrodifferential Equations via Implicit Evolution System, Joumal of Applied Mathematics, (2012) 1-17.

[23] A. Debbouche, D. Baleanu and R. P. Agarwal, Nonlocal Nonlinear Integro-Differential Equations of Fractional Or- ders, Boundary Value Problems, (2012) no. 78, 1-10

[24] A. Debbouche, Fractional Nonlocal Impulsive Quasilinear Multi-Delay Integro-Differential Systems, Advances in Difference Equations, (2011) no 5, 1-10

[25] A. Debbouche, D. Baleanu, Controllability of Fractional Evolution Nonlocal Impulsive Quasilinear Delay Integro- Differential Systems, Computers and Mathematics with Applications, 62 (2011) 1442-1450

[26] A. Debbouche, J.J. Nieto, D.F.M. Torres, Optimal solutions to relaxation in multiple control problems of Sobolev type with nonlocal nonlinear fractional differential equations, Journal of Optimization Theory and Applications, **174**(1) (2017) 7–31.

[27] A. Debbouche, J.J. Nieto, Sobolev type fractional abstract evolution equations with nonlocal conditions and optimal multi-controls, Applied Mathematics and Computation, **245** (2014) 74–85.

[28] A. Debbouche, M. M. El-Borai, Weak almost periodic and optimal mild solutions of fractional evolution equations, Electronic Joumal of Differential Equations, (2009) no. 46, 1-8

[29] Debbouche A., Torres D.F.M, Approximate controllability of fractional delay dynamic inclusions with nonlocal control conditions, *Applied Mathematics and Computation*, **243** (2014), 161-175.

[30] A. Debbouche, Delfim F. M. Torres, Approximate controllability of fractional nonlocal delay semilinear systems in Hilbert spaces, Intemational Joumal of Control, 86(9) (2013) 1577-1585

[31] A. Debbouche, D.F.M. Torres, Sobolev type fractional dynamic equations and optimal multi-integral controls with fractional nonlocal conditions, Fractional Calculus and Applied Analysis, **18**(1) (2015) 95–121.

[32] Debbouche A., Torres D.F.M., Sobolev type Fractional dynamic equations and optimal multi-integral controls with Fractional Nonlocal conditions, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **18**(2015), 95-121.

[33] K. Deimling, Multivalued Differential Equations, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 1, de Gruyter, Berlin, 1992.

[34] K. Deng, Exponential decay of solutions of semilinear parabolic equations with nonlocal initial conditions, Joumal of Mathematical Analysis and Applications 179 (1993) 630-637

[35] K. Diethelm, Analysis of fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 265 (2002) 229-248

[36] M. M. El-Borai, Some probability densities and fundamental solutions of fractional evolution equations, Chaos, Soli- tons and Fractals, 14 (2002) 433-440

[37] M. A. A. El-Sayeed, Fractional order diffusion wave equation, Intemational Joumal of Theoretical Physics, 35 (1966) 311-322

[38] V.E. Fedorov, E.A. Romanova, A. Debbouche, Analytic in a sector resolving families of operators for degenerate evolution equations of a fractional order, Journal of Mathematical Sciences, **228**(4) (2018) 380–394.

[39] Fečkan M., Wang J., Zhou Y., Controllability of fractional functional evolution equations of Sobolev type via characteristic solution operators, *J. Optim. Theory Appl.*, **156**(2013), 79-95.

[40] K.M. Furati, M.D. Kassim, N.E. Tatar, Existence and uniqueness for a problem involving Hilfer fractional derivative, Computers & Mathematics with Applications, **64**(6) (2012) 1616–1626.

[41] Furati K.M., Kassim M.D., Tatar N.E., Existence and uniqueness for a problem involving Hilfer fractional derivative,*Comput. Math. Appl.*,**64**(2012), 1616-1626.

[42] Furati K.M., Kassim M.D., Tatar N.E., Non-existence of global solutions for a differential equation involving Hilfer fractional derivative, *Electron. J. Diff. Eq.*, **2013**(2013), 1-10. (1965) 781–786.

[43] J.F Gòmez–Aguilar, Analytical and Numerical solutions of a nonlinear alcoholism model via variable-order fractional differential equations, Physica A : Statistical Mechanics and its Applications, **494** (2018) 52–75.

[44] A. Granas and J. Dugundji, Fixed point theory, Springer-Verlas, New York. 2003.

[45] Gu H.B., Trujillo J.J., Existence of mild solution for evolution equation with Hilfer fractional derivative, *Applied Mathematics and Computation*, **257**(2015), 344-354.

[46] H. Gu, J.J. Trujillo, Existence of mild solution for evolution equation with Hilfer fractional derivative, Applied Mathematics and Computation, **257** (2015) 344–354.

[47] A. Harrat, A. Debbouche, Sobolev type fractional delay impulsive equations with Alpha-Sobolev resolvent families and integral conditions. Nonlinear Studies, 2013 Vol. 20 Issue 4, p549-558. 10p.

[48] A. Harrat, A. Debbouche, Solvability and optimal controls of impulsive Hilfer fractional delay evolution inclusions with Clarke subdifferential. 2018, Volume 344, Pages 725-737

[49] M.H. Heydari, Z. Avazzadeh, An operational matrix method for solving variable-order fractional biharmonic equation, Computational and Applied Mathematics, (2018) 1–15.

[50] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, *World Scientific*, Singapore, 2000.

[51] Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Z., Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann-Liouville fractional derivatives, *Fract. Calc. Appl. Anal*, **12**(2009), 289-318.

[52] E. Hille, R. S. Phillips, Functional analysis and semi-groups, in : American Mathematical Society Colloquium Publi- cations, vol. 31, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 1957

[53] Y.R. Jiang, N.J. Huang, Solvability and optimal controls of fractional delay evolution inclusions with Clarke subdifferential, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **40**(8) (2017) 3026-3039.

[54] Y.R. Jiang, N.J. Huang, J.C. Yao, Solvability and optimal control of semilinear nonlocal fractional evolution inclusion with Clarke subdifferential, Applicable Analysis, **96**(14) (2017) 2349–2366.

[55] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca, Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 7, de Gruyter, Berlin, 2001.

[56] E. Keshavarz, Y. Ordokhani, M. Razzaghi, A numerical solution for fractional optimal control problems via Bernoulli polynomials, Journal of Vibration and Control, **22**(18) (2016) 3889–3903.

[57] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations, *North-Holland Mathematics Studies*, **204**(2006), Elsevier Science Amsterdam.

[58] M. Kirane, A. Kadem, A. Debbouche, Blowing-up Solutions to Two-times Fractional Differential Equations, Mathe- matische Nachrichten, to appear in 2013

[59] Lasota A., Opial Z., An application of the Kakutani-Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations, *Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math. Astron. Phys*, **13** (1965), 781-786.

[60] V. Lakshmikantham, D.D. Bainov, P.S. Simeonov, Theory of Impulsive Differential Equations, World Scientific, Sin- gapore, 1989

[61] Lakshmikantham V., Leela S., Devi J.V., Theory of Fractional Dynamic Systems, *Cambridge Scientific Publishers*, 2009.

[62] V. Lakshmikantham, S. Leela, J. Vasundhara Devi, Theory of Fractional Dynamic Systems, Cambridge Scientific Publishers, 2009

[63] Liu X.H., Liu Z.H., Bin M.J., Approximate controllability of impulsive fractional neutral evolution equations with Riemann-Liouville frac-

tional derivatives, *Journal of Computational Analysis and Applications*, **17**(2014), 468-485.

[64] L. Lu, Z. Liu, W. Jiang, J. Luo, Solvability and optimal controls for semilinear fractional evolution hemivariational inequalities, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **39**(18) (2016) 5452–5464.

[65] L.D. LEMILE, Une étude Comparative Concernant les Semi-groupes de classe C_0 et les semi-groupes intégrés, Université Blaise Pascal, Aubière, France, 2005.

[66] Mahmudov N.I., McKibben M.A., On the approximate controllability of fractional evolution equations with generalized Riemann-Liouville fractional derivative, *Journal of Function Spaces*, (2015) Art. ID 263823, 9 pp.

[67] F. Mainardi, Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity, Imperial College Press, 2010.

[68] F. Mainardi, Fractional calculus : some basic problems in continuum and statistical mechanics, in : A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.), Fractals and Fractional calculus in Continuum Mechanics, Springer-Verlag, New York (1997) 291-348

[69] A. B. Malinowska, D. F. M. Torres, Introduction to the Fractional Calculus of Variations, Imperial College Press, London & World Scientific Publishing, Singapore, 2012

[70] S. Migorski, A. Ochal, M. Sofonea, Nonlinear Inclusions andHemivariational Inequalities, Models and Analysis of Contact Problems, Springer-Verlag : Berlin, 2013.

[71] K. S. Miller, B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York, 1993

[72] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Applied mathematical sciences, 44. New York : Springer ; 1983.

[73] L. Peng, A. Debbouche, Y. Zhou, Existence and approximations of solutions for time-fractional Navier-stokes equations, Mathematical Methods in the Applied Sciences, (2018) DOI : 10.1002/mma.4779.

[74] I. Podlubny, Fractional differential equations, Math. in Science and Eng., Vol. 198, Technical University of Kosice, Slovak Republic, 1999

[75] Rykaczewski K., Approximate controllability of differential inclusions in Hilbert spaces, *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, **75** (2012), 2701-2712.

[76] R. Sakthivel, Y. Ren, A. Debbouche, N.I. Mahmudov, Approximate controllability of fractional stochastic differential inclusions with nonlocal conditions. Applicable Analysis, **95**(11) (2016) 2361–2382.

[77] Sakthivel R., Ganesh R., Anthoni S.M., Approximate controllability of fractional nonlinear differential inclusions, *Applied Mathematics and Computation*,**225(1)**,2013, 708 ?17.

[78] Sakthivel R., Suganya S., Anthoni S.M., Approximate controllability of fractional stochastic evolution equations,*Comput. Math. Appl*, **63**(2012), 660-668.

[79] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach, Amsterdam, 1987,

Engl. Trans. from the Russian.

[80] Showalter R.E., Existence and representation theorem for a semilinear Sobolev equation in Banach space,*SIAM J. Math. Anal.*, **3**(1972), 527-543.

[81] Tamilalagan, P., Balasubramaniam P., Approximate controllability of fractional stochastic differential equations driven by mixed fractional Brownian motion via resolvent operators, International Journal of Control, **90**(8) (2017) 1713–1727.

[82] Vijayakumar, V., Approximate controllability results for abstract neutral integro-differential inclusions with infinite delay in Hilbert spaces, IMA Journal of Mathematical Control and Information, **35**(1) (2018) 297–314.

[83] D. Vivek, K. Kanagarajan, E.M. Elsayed, Some Existence and Stability Results for Hilfer-fractional Implicit Differential Equations with Nonlocal Conditions, Mediterranean Journal of Mathematics, **15**(1) (2018) 15.

[84] Wang J., Fečkan M., Zhou Y., Controllability of Sobolov type fractional evolution systems, *Dyn. Part. Differ. Equ.*, **11**(2014), 71-87.

[85] J.R. Wang, Y. Zhang, Nonlocal initial value problems for differential equations with Hilfer fractional derivative,*Applied Mathematics and Computation*, **266** (2015) 850–859.

[86] Wang J., Zhou Y., A class of fractional evolution equations and optimal controls, *Nonlinear Anal. :RWA*, **12**(2011), 262-272.

[87] Wang J., Zhou Y., Existence and controllability results for fractional semilinear differential inclusions, *Nonlinear Anal. :RWA,* **12**(2011), 3642-

3653.

[88] Wang J., Zhou Y., Analysis of nonlinear fractional control systems in Banach spaces, *Nonlinear Anal. :TMA,* **74**(2011), 5929-5942.

[89] Wang J., Zhou Y., Wei W., Fractional Schrödinger equations with potential and optimal controls, Nonlinear Anal. :RWA, **13**(2012), 2755-2766.

[90] Yan Z., Approximate controllability of partial neutral functional differential systems of fractional order with state-dependent delay, *Int. J. Control*, **85 (8)**,(2012), 1051-1062.

[91] J. Yang, Y. Huanmin, B. Wu, An efficient numerical method for variable order fractional functional differential equation, Applied Mathematics Letters, **76** (2018) 221–226.

[92] Yang M., Wang Q.M., Approximate controllability of Hilfer fractional differential inclusions with nonlocal conditions,*Math. Meth. Appl. Sci*, (2016) DOI : 10.1002/mma.4040

[93] D. Yang, J.R. Wang, D. O'Regan, A class of nonlinear non-instantaneous impulsive differential equations involving parameters and fractional order, Applied Mathematics and Computation, **321** (2018) 654–671.

[94] Zhou Y., Jiao F., Nonlocal cauchy problem for fractional evolution equations, *Nonlinear Anal. :RWA*, **11**(2010), 4465-4475.

[95] Zhou Y., Jiao F., Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations, *Comput. Math. Appl.*, **59**(2010), 1063-1077.

[96] Zhou Y., Jiao F., Li J., Existence and uniqueness for fractional neutral differential equations with infinite delay, *Nonlinear Anal :TMA*, **71**(2009), 3249-3256.

[97] Y. Zhou, L. Peng, Weak solutions of the time-fractional Navier ?Stokes equations and optimal control, Computers & Mathematics with Applications, **73**(6) (2017) 1016–1027.

[98] Zhou Y., Wang J., Zhang L., Basic Theory of Fractional Differential Equations, *World Scientific*, Singapore, 2016.

[99] Zhou Y., Zhang L., Shen X.H., Existence of mild solutions for fractional evolution equations, *J. Int. Equ. Appl.*, **25**(2013), 557-585.

[100] S. D. Zaidman, Abstract differential equations, Research Notes in Mathematics, Pitman Advanced Publishing Pro- gram, San Francisco, London Melboume, 1979