UNIVERSITÉ DE GUELMA

FACULTÉ DES SCIENCES ET D'INGÉNIERIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER EN MATHÉMATIQUES

Par

DJEMOUI SEBTI

SUR UNE CLASSE DE PROBLÈMES NON-LINÉAIRES MAL POSÉS

Jury :

BOUSSETILA NADJIB	**Président**	**M.C.**	**Univ. GUELMA**
ZOUYED FAIROUZ	**Rapporteur**	**M.C.**	**Univ. Annaba**
REBBANI FAOUZIA	**Examinateur**	**Prof.**	**Univ. Annaba**
ALEM LEILA	**Examinateur**	**M.C.**	**Univ. Annaba**

Abstract

In this work we treat certain classes of ill-posed problems in Hilbert space. In the first part we study the homogeneous ill-posed Cauchy problem. The second one is devoted to the regularization of the nonlinear ill-posed Cauchy problem. The study is based on the quasi-reversibility method.

2000 Mathematics subjec t classification : 35K90, 47D06, 47A52.

Key words : *ill-posed problem, regularization, non-linear problem, quasi-reversibility method.*

Résumé

Dans le présent travail on étudie deux classes de problèmes mal posés. La première classe est consacrée à l'étude d'un problème de Cauchy homogène mal posé. Dans la deuxième est étudié un problème mal posé non-linéaire. L'approche utilisée repose sur la méthode de quasi-réversibilité.

2000 Mathematics subject classification : 35K90, 47D06, 47A52.

Mots clés : *problème mal posé, problème non-linéaire, régularisation, méthode de quasi-réversibilité.*

Remerciements

Je tiens à adresser ma profonde reconnaissance à mon directeur de mémoire le docteur $\mathscr{F}$AIROUZ $\mathscr{Z}$OUYED, dont ses conseils, ses qualités mathématiques ainsi que sa patience m'ont permis de bien mener ce travail.

J'adresse également mes plus sincères remerciements au docteur $\mathscr{B}$OUSSETILA $\mathscr{N}$ADJIB qui a mis sa documentation sous ma disposition jusqu'au dernier moment, je le remercie aussi de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie tout particulièrement le professeur $\mathscr{R}$EBBANI $\mathscr{F}$AOUZIA responsable de l'école doctorale et le docteur $\mathscr{A}$LEM $\mathscr{L}$EILA, d'avoir accepté d'examiner ce mémoire et de participer à ce jury.

Notations

$\mathcal{X}$: espace de Banach.

$\mathcal{H}$: espace de Hilbert.

A : opérateur linéaire.

A^{-1} : opérateur inverse de A.

A^{*} : adjoint de A.

$\mathcal{D}(A)$: domaine de l'opérateur A.

$G(A)$: graphe de l'opérateur A.

$\mathrm{Im}(A)$: image de l'opérateur A.

$\rho(A)$: ensemble résolvant de A.

$\sigma(A)$: spectre de A.

$R_{\lambda}(A)$: résolvante de A.

$\mathscr{L}(E,F)$: espace des opérateurs linéaires continus de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F.

$\mathscr{L}(E)$: espace des opérateurs linéaires continus de E dans lui même.

E^{*} : espace dual de E.

$\overline{X}$: fermeture de l'ensemble X.

$\mathrm{Re}(z)$: partie réelle du nombre complexe

$L^{1}(]0,T[,\mathcal{D})$: espace des fonctions intégrables à valeurs dans $\mathcal{H}$.

$T(t)$: semigroupe d'opérateurs bornés.

Table des matières

Notations **i**

INTRODUCTION **1**

0.1 Problématique . . . 1

0.2 Contenu du mémoire . . . 4

1 Rappels **8**

1.1 Opérateurs linéaires . . . 8

1.1.1 Opérateurs bornés . . . 8

1.1.2 Opérateurs non-bornés . . . 9

1.2 Elément de la théorie spectrale . . . 11

1.3 Famille spectrale . . . 12

1.4 Semigroupes d'opérateurs linéaires . . . 14

1.5 Rappels d'analyse complexe . . . 17

1.5.1 Fonctions analytiques . . . 17

1.5.2 Principe du maximum . . . 17

1.5.3 Théorème des trois cercles . . . 18

1.6 Lemme de S.Agmon & L.Nirenberg . . . 18

1.7 Théorème du point fixe . . . 18

1.8 Lemme de Gronwall . . . 19

2 Problème de Cauchy homogène mal posé **20**

2.1 Formulation du problème . . . 20

2.1.1 Problème de Cauchy mal posé . . . 20

2.1.2 Problème de Cauchy homogène bien posé 21
2.2 Régularisation 22
2.3 Analyse de la méthode de régularisation 23

3 Problème de Cauchy non-linéaire mal- posé 31

3.1 Formulation du problème 31
3.2 Problème de Cauchy non-linéaire bien posé 32
3.3 Régularisation 34

Application 53

Conclusion et perspectives 55

Introduction

0.1 Problématique

De nombreuses équations aux dérivées partielles, qui permettent de modéliser l'évolution d'un système au cours du temps, peuvent être reformulées sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait. Le fait qu'un modèle mathématique soit un problème de Cauchy n'implique pas automatiquement qu'il s'agisse d'un "bon" modèle. L'expression bon modèle n'est pas employée ici au sens de la pertinence physique du modèle et de ces résultats, mais au sens de sa cohérence mathématique. Cette cohérence est une condition nécessaire avant de pouvoir même envisager des simulations numériques et des interprétations physiques. Le mathématicien J. Hadamard [25] a donné une définition de ce qu'est un bon modèle, en parlant de problème bien posé.

Considérons l'équation opérationnelle suivante :

$$Au = z, \quad u \in E, \ z \in F, \tag{$\mathscr{P}$}$$

où E et F sont des espaces métriques et $A : E \to F$ est un opérateur.

On dit que le problème ($\mathscr{P}$) est **bien posé** au sens d'Hadamard si pour tout $u \in E$ la solution existe, elle est unique et elle dépend continûement du second membre. Si une de ces trois conditions n'est pas satisfaite le problème est dit **mal posé**.

La non-existence de la solution correspond à la situation où l'opérateur A n'est pas surjectif dans ce cas, il est possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution. En supposant qu'une solution existe, le problème d'unicité se pose, l'opérateur A peut ne pas être injectif, là il faut réfléchir à quelle solution parmi celles existantes sera privilégiée. En fin le dernier cas concerne la non-continuité de l'opérateur inverse $A^{-1} : F \to E$. Dans cette situation de petites perturbations dans la donnée z peuvent mener à des solutions radicalement

différentes. Ce comportement est particulièrement gênant puisque la donnée z est souvent obtenue par l'intermédiaire d'observations. La mesure de z est donc souvent entachée d'erreurs, plus au moins importantes suivant le domaine d'application. D'un point de vue pratique, il serait souhaitable que ce "bruit" ait un minimum d'influence sur la solution, ce n'est pas evidemment le cas si l'opérateur inverse A^{-1} n'est pas continu.
Quant aux problèmes inverses, résoudre un problème inverse consiste à reconstruire un signal, à partir des données obtenues de manière indirecte. Cette démarche s'oppose à l'approche classique consistant, à partir d'un signal ou d'une donnée initiale, à prédire le comportement de cette dernière après une transformation donnée. Considérant l'exemple bien connu de transmission de la chaleur à travers un objet solide. Connaissant la température u_t au temps $t > 0$ à n'importe quel endroit du solide correspond à la résolution directe du problème. Si maintenant, connaissant u_t à un moment précis t, on cherche à retrouver les conditions initiales, on parlera plutôt d'un problème inverse. D'un point de vue formel, un problème inverse s'exprime sous la forme d'une équation $Au = z$. On cherche à retrouver u à partir de z. Cette approche est beaucoup plus délicate que dans le cas direct où l'on cherche simplement à calculer z à partir de u. En effet résoudre $Au = z$ nécessite l'inversion de l'opérateur A. Cette opération n'est pas forcément évidente d'un point de vue numérique et peut souvent conduire à un problème mal posé (la plupart des problèmes inverses sont mal-posés).
L'analyse mathématique de cette classe de problèmes a connu un essor considérable ces dernières décennies par intérêt porté tant par les mathématiciens purs que par les mathématiciens appliqués à ce type de problèmes, qui sont d'origines variés et qui se rencontrent dans diverses disciplines par exemple la physique atmosphérique, l'ingénierie pétrolière, l'imagerie médicale, l'hydrogéologie et autres.
Dans ce qui suit on présente deux exemples de problèmes inverses mal posés.
.Exemple 1. Equation de la chaleur. On considère une tige en métal de longueur π dont les deux extrémités sont maintenues à la température 0. A chaque instant $t \in (0, T)$, la température de la baguette à la position x est présentée par $u(x, t)$. Etant donnée une température finale $u(x, T) = \varphi(x),\ x \in (0, \pi)$, on cherche à expliciter la distribution initiale $u_0 = u(x, 0)$. C'est le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur. Ce dernier s'écrit

sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<\pi, \quad 0\leq t<T, \\ u\left(0,t\right)=u\left(\pi,t\right)=0, \qquad\quad 0\leq t<T \\ u\left(x,T\right)=\varphi(x), \qquad\quad 0\leq x\leq \pi. \end{array}\right. \tag{$\mathcal{P}_1$}$$

Par séparation de variables, on peut montrer que la solution du problème $(\mathcal{P}_1)$ est donnée par :

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-tn^2)\psi_n sin(nx),$$

où $\psi_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_0(y)\sin(ny)dy$. Donc on doit déterminer $u_0=u(.,0)$ à partir de l'équation intégrale :

$$u(x,T)=\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi k(x,y)u_0(y)dy, \quad 0\leq x\leq\pi,$$

où $k(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-n^2T)\sin(nx)\sin(ny)$.

Ainsi u est solution du problème $(\mathcal{P}_1)$ si et seulement si φ satisfait l'équation de Fredholm de première espèce

$$(Lu_0=\varphi),$$

où L est l'opérateur intégral de noyau $k(.,.)$. Comme L est compact L^{-1} n'est pas borné [11]. Alors le problème $(\mathcal{P}_1)$ est mal posé.

Exemple 2. Problème de Cauchy pour l'équation de Laplace

Soit le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} \Delta u\left(x,y\right)=0, \quad (x,y)\in\mathbb{R}\times(0,\infty), \\ u\left(x,0\right)=0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right), \quad x\in\mathbb{R}, \end{array}\right. \tag{$\mathcal{P}_2$}$$

où $\varphi\left(x\right)=\frac{1}{a}\sin ax$, $a>0$. Le problème de Cauchy a pour solution la fonction

$$u\left(x,y\right)=\frac{1}{a^2}\sin ax.\sinh ay.$$

On a $\varphi\to 0$ lorsque $a\to\infty$ tandis que $u(x,y)$ peut être arbitrairement grand quand a prend des valeurs suffisamment élevées.

La solution du problème $(\mathcal{P}_2)$ ne dépend pas continûment des données initiales, donc le problème est mal posé.

Il existe plusieurs approches pour résoudre les problèmes mal posés, les plus principales sont :

• La méthode de moindres carrées qui repose sur l'outil fondamental "la décomposition en valeurs singulières de l'opérateur considéré."

• La méthode de régularisation due initialement à Tikhonov [44] qui cherche à redéfinir les notions d'inversion et de solution (quasi-solution, solution approchée) de façon que la solution régularisée dépende continûment des données et soit proche de la solution exacte. En d'autre termes, on remplace le problème initial mal posé par un autre proche du premier et bien posé de sorte que l'erreur comise soit compensée par le gain de la stabilité.

0.2 Contenu du mémoire

Le présent travail est une synthèse de certains travaux établis par A.K. Ames et R.J. Hughes ([9], 2005) et B.M. Campbell Hetrick et R.J. Hughes ([24], 2008). Il est composé d'une introduction et de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on rapelle quelques résultats d'analyse fonctionnelle ainsi que les outils mathématiques nécessaires pour l'étude des problèmes posés. Les chapitres deux et trois constituent les parties principales.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un problème de Cauchy homogène mal posé. On considère dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au\,(t)\,, \;\; 0 < t < T \\ u\,(0) = \chi, \end{cases} \tag{1}$$

où A est un opérateur linéaire, non-borné, positif et auto-adjoint et de domaine dense dans $\mathcal{H}$, dont sa résolution de l'identité est noté par $\{E_\lambda,\, \lambda \geq 0\}$. Un tel problème n'est pas bien posé au sens d'Hadamard même si la solution existe pour des conditions extrêmement restrictives le problème est instable (voir section 2.2). Ce type de problème a été traité par plusieurs auteurs en utilisant plusieurs approches. Parmi ces approches, on cite la méthode de *quasi-réversibilité* $(M.Q.R)$ proposée par Lions et Lattes [30], la méthode de la valeur aux limites auxiliaire ($Q.B.V$ *method*) dans les travaux de Showalter [42] et G.W. Clark [15], la procédure itérative introduite par V.A. Kozlov et V.G. Maz'ya [29] et la méthode de quasi-solution (*Q.S.-method*) de Tikhonov [44]. Introduisant quelques méthodes parmi celles citées ci dessus.

La méthode de quasi-réversibilité. L'idée principale de cette approche consiste à perturber l'équation du problème (1) en lui ajoutant un terme correcteur pour obtenir un problème bien posé, puis établir les résultats de convergence.

R. Lattes et J.L. Lions ([30], 1969) ont proposé comme perturbation l'équation :

$$v_t + Av - \alpha A^2 v = 0, \quad \alpha > 0.$$

Dans ([42], 1974) R. E. Showalter a proposé la perturbation

$$v_t + Av + \alpha A v_t = 0, \quad \alpha > 0.$$

Pour ces deux méthodes la stabilité est d'ordre $e^{\alpha^{-1}}$.

Dans [32] K. Miller a introduit une approximation plus générale, en remplaçant l'opérateur A par $f(A)$ et a imposé certaines conditions sur la fonction f pour améliorer l'ordre de stabilité.

Récemment N. Boussetila et F. Rebbani ([12], 2007) ont considéré le problème régularisé

$$v_t - \frac{1}{pT} ln(\alpha + e^{-pTA}) Av = 0, \quad p \geq 1, \ \alpha > 0.$$

Avec un ordre de stabilité égale à $(\frac{1}{\alpha})^{p^{-1}}$ $p \geq 1$. Ce qui montre que cette approche a un effet régularisant meilleur par rapport aux méthodes précédentes.

Régularisation avec conditions non-locales

Cette méthode a été introduite par R. E. Showalter ([42], 1983), elle consiste à perturber la condition aux limites en lui ajoutant un terme correcteur. Elle a été devellopée dans les travaux de G. W. Clark- S. F. Oppenheimer ([15], 1994) et M. Denche- K. Bessila ([17], 2005) qui ont proposé respectivement les perturbations suivantes :

$$v(T) - \alpha v(0) = \chi,$$

$$v(T) - \alpha v'(0) = \chi.$$

Et ont obtenu un ordre de stabilité meilleur par rapport aux résultats obtenus dans [30], [42].

♦ Dans le présent travail est adaptée la régularisation de Miller, l'opérateur A dans (1) est remplacé par $f(A)$ pour obtenir le problème perturbé :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = f(A)v(t), \ 0 < t < T, \\ v(0) = \chi, \end{cases} \tag{2}$$

où f est une fonction vérifiant certaines propriétés permettant de construire une régularisation et de neutraliser le caractère mal posé du problème.

L'étude est composée de deux étapes :

La première consiste à montrer que le problème régularisé (2) est bien posé, la deuxième établir une estimation de type

$$\|u\,(t) - v\,(t)\| \leq C\beta^{1-\frac{t}{T}} M^{\frac{t}{T}},\ 0 < \beta < 1. \tag{3}$$

La démonstration de l'estimation (3) se base sur quelques propriétés des semi-groupes ainsi que le théorème des trois cercles d'HADAMARD [39].

On définit les fonctions $u_n(t) = E_\lambda(e_n)u(t)$ et $v_n(t) = E_\lambda(e_n)v(t)$ (e_n est un ensemble borélien). Pour pouvoir appliquer le théorème d'Hadamard, on doit prolonger les fonctions u_n et v_n sur une bande $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$. En établissant quelques propriétés tel que la continuité et l'analycité de la fonction

$$\phi_n(\alpha) = (u_n(\alpha) - v_n(\alpha)),\ \alpha \in \mathbb{S},$$

on arrive à établir l'estimation (3).

Dans le troisième chapitre, on étudie le problème de Cauchy non-linéaire mal posé suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au\,(t) + h\,(t, u\,(t))\,,\ 0 < t < T, \\ \qquad u\,(0) = \chi, \end{cases} \tag{4}$$

A est un opérateur auto-adjoint positif dans $\mathcal{H}$, $\chi \in \mathcal{H}$.

$h : [0, T[\, \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est une fonction lipschitzienne par rapport aux deux variables, i.e

$$\|h\,(t_1, u) - h\,(t_2, v)\| \leq k\,(|t_1 - t_2| + \|u - v\|)\,,$$

où k est une constante positive.

De manière analogue à celle utilisée pour approcher le problème (1), on remplace l'opérateur A dans (4) par $f(A)$ pour obtenir le problème régularisé suivant :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = f(A)v\,(t) + h\,(t, v\,(t))\,,\ 0 < t < T, \\ \qquad v\,(0) = \chi, \end{cases} \tag{5}$$

On montre que le problème (4) est bien posé, puis on définit la fonction

$$\phi_n(\alpha) = u_n(\alpha) - v_n(\alpha),\ \ \alpha \in \mathbb{S}.$$

Comme le terme non-linéaire intervient dans la fonction $\phi_n(\alpha)$, elle n'est pas analytique. Dans ce cas le théorème d'Hadamard ne peut pas être appliqué. Pour surmonter cette difficulté et en se basant sur le lemme 1.5.2 ([2], 1963), on définit une deuxième fonction qui répond aux conditions du théorème d'Hadamard :

$$\omega_n(\zeta) = e^{\zeta^2}\phi_n(\zeta) - \Phi_n(\zeta),$$

où

$$\Phi_n(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_S e^{\gamma^2}\overline{\partial}\phi_n(\gamma)\left(\frac{1}{\gamma-\zeta} + \frac{1}{\overline{\gamma}+\zeta+1}\right)dxdy, \quad \zeta \in \overline{\mathbb{S}}.$$

Et par une étude détaillée des propriétés des fonctions $\Phi_n(\alpha)$ et $\phi_n(\alpha)$, en se basant sur quelques résultats d'analyse complexe ainsi que les propriétés des semi-groupes, on établit pour le problème non-linéaire (4) une estimation analogue à l'estimation (3).

Notant ici que dans la littérature mathématique et contrairement au cas homogène, on ne trouve pas beaucoup de travaux concernant le cas non-linéaire, et plus précisément ceux qui sont traités par la méthode de quasi-reversibilité (la plupart des problèmes étudiés sont à une dimension, [49], [24], [43], [20], [34], [40], [28]). Ceci est dû à la complexité que soulève cette classe de problèmes, ce qui souligne l'importance de cette étude.

Chapitre 1

Rappels

On désigne par $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert sur ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), muni du produit scalaire $(.,.)$ et de la norme $\|.\|$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ deux espaces de Banach et $\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ muni de la norme : $\|A\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \sup\limits_{\|x\|_{\mathcal{X}}\leq 1} \|Ax\|_{\mathcal{Y}}$.

1.1 Opérateurs linéaires

1.1.1 Opérateurs bornés

Définition 1.1.1 *On appelle opérateur borné toute application linéaire continue de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$.*

Théorème 1.1.1 (Banach steinhaus) *Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de Banach. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs linéaires continus de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$. On suppose que*

$$\sup_{i\in I} \|A_i x\| < \infty, \qquad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Alors :

$$\sup_{i\in I} \|A_i\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} < \infty,$$

autrement dit, il existe une constante c telle que :

$$\|A_i x\| < c\,\|x\|\,, \qquad \forall x \in \mathcal{X},\ \forall i \in I.$$

Théorème 1.1.2 *Soit A un opérateur linéaire continu et bijectif de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$. Alors A^{-1} est continu de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{X}$.*

Théorème 1.1.3 *Soit A un opérateur linéaire continu de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$. A^{-1} existe et est continu si et seulement si il existe une constante $m > 0$ tel que :*

$$\|Ax\| \geq m \|x\|, \ \forall x \in \mathcal{X}.$$

1.1.2 Opérateurs non-bornés

Définition 1.1.2 *On appelle opérateur linéaire non borné de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ toute application linéaire A défini sur un sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X}$, à valeurs dans $\mathcal{Y}$. $\mathcal{D}(A)$ est le domaine de A.*

Tout opérateur A est complètement défini par son graphe qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, défini par :

$$G(A) = \{(u, Au) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \, u \in \mathcal{D}(A)\}$$

Définition 1.1.3 *On dit qu'un opérateur A est fermé si son graphe est fermé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.*

Théorème 1.1.4 (Théorème du graphe fermé) *Soit A un opérateur linéaire de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$. Supposons que le grahpe de A est fermé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Alors A est continu.*

Définition 1.1.4 *Soit A un opérateur linéaire de domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{D}(A^*)$ l'ensemble des vecteurs $v \in \mathcal{H}$ pour lesquels il existe $f \in \mathcal{H}$ tel que :*

$$(Au, v) = (u, f), \ \text{pour tout } u \in \mathcal{D}(A).$$

Pour tout $v \in \mathcal{D}(A^*)$, on pose

$$A^* v = f.$$

On appelle A^* l'opérateur adjoint de A.

Définition 1.1.5 *Soit A un opérateur dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on dit que A est symétrique si :*

$$A \subset A^*, \ i.e; \ \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*), \quad Au = A^* u, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A).$$

Définition 1.1.6 *Soit A un opérateur linéaire de domaine de définition dense dans $\mathcal{H}$.On dit que A est auto-adjoint si $A = A^*$ i.e ;*

$$\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) \text{ et } (Ax, y) = (x, Ay), \ \forall x, y \in \mathcal{D}(A).$$

Proposition 1.1.1 *Un opérateur auto-adjoint est fermé.*

Proposition 1.1.2 *Soit A un opérateur auto-adjoint inversible. Alors A^{-1} est auto-adjoint.*

Définition 1.1.7 *On dit qu'un opérateur auto-adjoint est positif si :*

$$\forall x \in \mathcal{D}(A), \ (Ax, x) \geq 0.$$

Théorème 1.1.5 *Soit A un opérateur auto-adjoint positif, pour $Re\lambda > 0$, on a :*

$$(A + \lambda I)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathcal{H}) \text{ et } \left\|(A + \lambda I)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{1}{Re\lambda}.$$

Définition 1.1.8 *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur linéaire dans un espace de Banach $\mathcal{X}$. A est dit dissipatif si pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in \mathcal{D}(A)$ on a :*

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda \|x\|.$$

Définition 1.1.9 *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur linéaire dissipatif dans un espace de Banach $\mathcal{X}$, tel que $Im(\lambda - A)\mathcal{D}(A) = \mathcal{X}$, pour tout $\lambda > 0$. Alors A est dit m-dissipatif.*

Proposition 1.1.3 *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors A est dissipatif si et seulement si $Re(Ax, x) \leq 0$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$.*

Proposition 1.1.4 *Soit A un opérateur auto-adjoint négatif dans $\mathcal{H}$. Alors A est m-dissipatif.*

Définition 1.1.10 *Soit A :$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur positif. On pose*
$J_\alpha = (I + \alpha A)^{-1}$, $A_\alpha = A(I + \alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}(I - J_\alpha)$, $\quad \alpha > 0$,
On appelle A_α l'approximation de Yosida de l'opérateur A .

Théorème 1.1.6 **1)** *J_α est auto-adjoint et commute avec A;*

2) *A_α est un opérateur auto-adjoint positif ;*

3) *$\|A_\alpha u\| \leq \|Au\|$, pour tout $\alpha > 0$, et pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$;*

4) $|A_\alpha u| \leq \frac{1}{\alpha}|u|, \ \forall u \in H, \ \forall \alpha > 0;$

5) $\lim\limits_{\alpha \to 0} J_\alpha u = u \ \forall u \in \mathcal{H}$ *et* $\lim\limits_{\alpha \to 0} A_\alpha u = Au; \ \forall u \in \mathcal{D}(A).$

1.2 Elément de la théorie spectrale

Définition 1.2.1 *Soit A un opérateur linéaire fermé dans $\mathcal{H}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On appelle ensemble résolvant de A, l'ensemble*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - A \text{ est bijectif}\}.$$

Le complémentaire de $\rho(A)$ dans $\mathbb{C}$ est appelé spectre de A et est noté $\sigma(A)$. Le spectre de A est un fermé de $\mathbb{C}$.

·L'opérateur $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelé la résolvante de A.

·L'application $\lambda \in \rho(A) \to R_\lambda(A) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ est analytique.

·Le spectre de A est la reunion des ensembles suivants :

- Le spectre ponctuel :

$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ n'est pas injectif}\}.$

Un élément λ de $\sigma_p(A)$ est dit valeur propre de A.

- Si $\lambda \in \sigma(A) - \sigma_p(A)$ donc $\lambda I - A$ est injectif, mais non surjectif, $Im(\lambda I - A) \neq \mathcal{X}$, deux cas se présentent :

- Si $Im(\lambda I - A)$ n'est pas dense, on dit que $\lambda \in \sigma_r(A)$ le spectre résiduel.

- Si $Im(\lambda I - A)$ est dense, on dit alors que $\lambda \in \sigma_c(A)$ le spectre continu.

Théorème 1.2.1 *Soit A :$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur auto-adjoint. Alors le spectre de A est réel. De plus A est positif si et seulement si $\sigma(A) \subset [0, \infty[$.*

Définition 1.2.2 *On dit qu'un opérateur $A \in \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est compact si $A(B_\mathcal{X})$ est relativement compact pour la topologie forte. $B_\mathcal{X}$ est l'ensemble $\{x \in \mathcal{X}; \|x\| \leq 1\}$.*

Théorème 1.2.2 *Soit A un opérateur borné. Alors A est compact si et seulement si A^* est compact.*

Théorème 1.2.3 *Soit A un opérateur compact, on a alors :*

$(i) 0 \in \sigma(A)$,

$(ii) \sigma(A) - \{0\} = \sigma_p(A) - \{0\}$,

(iii) les points de $\sigma(A) - \{0\}$ sont isolés,

(iv) l'une des situations suivantes :

-ou bien $\sigma(A) = \{0\}$,

-ou bien $\sigma(A) - \{0\}$ *est fini,*

-ou bien $\sigma(A) - \{0\}$ *est une suite qui tend vers 0.*

1.3 Famille spectrale

Définition 1.3.1 *Une famille de projections* $E(\lambda)$, $-\infty < \lambda < +\infty$ *dans un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$, *est appelée résolution de l'identité ou famille spectrale si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i)$E(\lambda) E(\mu) = E(\min(\lambda, \mu))$, $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$

(ii)$E(-\infty) = 0 \quad ;\ E(+\infty) = I$,

où

$$E(-\infty) x = \lim_{\lambda \longrightarrow -\infty} E(\lambda) x,$$

et

$$E(+\infty) x = \lim_{\mu \longrightarrow \infty} E(\mu) x \quad , \quad x \in \mathcal{H},$$

(iii)$E(\lambda + 0) = E(\lambda)$, *où* $E(\lambda + 0) x = \lim_{\varepsilon \to 0} E(\lambda + \varepsilon) x$, $x \in \mathcal{H}$.

Théorème 1.3.1 *Soit* A *un opérateur auto-adjoint dans* $\mathcal{H}$. *Alors il existe une famille spectrale unique* $\{E(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ *telle que :*

$$(Ax, y) = \int_{\mathbb{R}} \lambda d(E(\lambda) x, y) \ \text{ et } Ax = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda) x,$$

De plus :

$$\|Ax\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d(E(\lambda) x, x)$$

où $\quad x \in \mathcal{D}(A) = \left\{ x : \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d(E_\lambda x, x) < \infty \right\}$.

Pour tout $p \in \mathbb{R}$, on définit la puissance de A par :

$$A^p = \int_{\mathbb{R}} \lambda^p dE_\lambda$$

$x \in \mathcal{D}(A^p) \Longleftrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^{2p} d(E_\lambda x, x) < \infty.$

Pour tout $p \geq 0$, $\mathcal{D}(A^p)$ muni de la norme $\|x\|_p^2 = \|A^p x\|^2$, $x \in \mathcal{D}(A^p)$ est un espace de Hilbert.

Si $0 \leq p_1 \leq p_2$, $\mathcal{D}(A^{p_2})$ est dense dans $\mathcal{D}(A^{p_1})$.

Définition 1.3.2 *Soit* f :$(X, \sum) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \tau)$, *$f$ est dite mesurable si* $f^{-1}(]a, \infty]) \in \sum$, *pour* $a \in \mathbb{R}$.
où τ est la topologie usuelle de $\overline{\mathbb{R}}$, et $\sum$ est une $\sigma-$ algèbre de parties de X.

Définition 1.3.3 *Dans la définition 1·3·2, si $\sum$ est la tribu borélienne sur $\mathcal{X}$, f est appelée fonction borélienne.*

Théorème 1.3.2 ([19]) *Soit $E(\lambda)$ la résolution de l'identité de l'opérateur auto-adjoint A, et soit f une fonction borélìènne complexe définie p. p sur $\mathbb{R}$, alors $f(A)$ est un opérateur fermé de domaine dense de plus on a :*

(a)$\mathcal{D}(f(A)) = \left\{ x : \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d(E(\lambda)x, x) < \infty \right\}$;

(b)$(f(A)x, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(E(\lambda)x, y)$, $x \in \mathcal{D}(f(A))$, $y \in H$;

(c)$|f(\lambda)x|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d(E(\lambda)x, x)$, $x \in \mathcal{D}(f(A))$;

(d)$f(A)^* = \overline{f}(A)$;

(e)$R_\alpha(A) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE_\lambda}{\alpha - \lambda}$, $\alpha \in \rho(A)$.

Théorème 1.3.3 ([19]) *Soit A un opérateur auto-adjoint, et soient f et g deux fonctions borélìènnes complexes définies p.p sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, et pour tout ensemble borélien e, les opérateurs $f(A)$, $g(A)$ possèdent les propriétés suivantes :*

(i) $(\alpha f)(A) = \alpha f(A)$;

(ii) $(f + g)(A) \supseteq f(A) + g(A)$;

(iii) $\mathcal{D}[f(A) g(A)] = \mathcal{D}[(fg)(A)] \cap \mathcal{D}(g(A))$; $(fg)(A) \supseteqq f(A) g(A)$;

(iv)$f(A) E(e) \supseteqq E(e) f(A)$.

1.4 Semigroupes d'opérateurs linéaires

Définition 1.4.1 *On dit que la famille d'opérateurs bornés* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ *sur* $\mathcal{X}$ *est un semi-groupe si :*

(i)$T(0) = I;$

(ii)$\forall t \geq 0,\ s \geq 0\ T(t+s) = T(t)\,T(s);$

Si de plus

$$\lim_{t\to 0} T(t)\,x = x,\ \forall x \in \mathcal{X},$$

on dit que $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ *est un semigroupe fortement continu ou (un* C_0*-semigroupe).*
On dit que $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ *est un semigroupe uniformement continu si*

$$\lim_{t\to 0}\|T(t) - I\|_{\mathscr{L}(X)} = 0$$

On définit le générateur infinitésimal $(A, \mathcal{D}(A))$ *d'un semigroupe* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ *comme l'opérateur non borné*

$$A : D(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X},$$

où :

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \mathcal{X} : \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(T(t)\,x - x\right)\ \ existe \right\},$$

et

$$\forall x \in \mathcal{D}(A),\ Ax = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(T(t)\,x - x\right).$$

Certaines propriétés des semigroupes sont citées dans la proposition suivante :

Proposition 1.4.1 *Soit* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*- semigroupe dans* $\mathcal{X}$ *et* A *son générateur. Alors :*

(i) *A est un opérateur fermé à domaine dense ;*

(ii) *il existe* $M \geq 1$*, et* $\omega \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X})} \leq M\ e^{t\omega},\ \ pour\ tout\ t \geq 0,$$

dans ce cas $T(t)$ *est dit de type* (ω, M)*;*

(iii) $\forall x \in \mathcal{X},\ lim\frac{1}{h}\int\limits_{t}^{t+h} T(\tau)\,xd\tau = T(t)\,x;$

(iv) *pour tout* $x \in \mathcal{X}$ *et* $t \geq 0$ *on a :*

$$\int_0^t T(\tau)\, x d\tau \in D(A), \quad et \quad A\int_0^t T(\tau)\, x d\tau = T(t)\, x - x;$$

(v) *pour tout* $x \in D(A)$, *et tous* $0 \leq s \leq t < \infty$ *on a :*

$$\int_s^t AT(\tau)\, x d\tau = \int_s^t T(\tau)\, Ax d\tau = T(t)\, x - T(s)\, x;$$

(vi) *pour tout* $x \in D(A)$, $T(t)\, x \in D(A)$ *et*

$$\frac{d}{dt}(T(t)\, x) = AT(t)\, x = T(t)\, Ax;$$

Définition 1.4.2 *Un semigroupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *est dit un semigroupe de contractions si pour tout* $t \geq 0$ *on a :*

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X})} \leq 1.$$

Théorème 1.4.1 *Un opérateur linéaire A est un générateur infinitésimal d'un semigroupe uniformement continu si et seulement s'il est continu.*

Théorème 1.4.2 *Un opérateur* $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ *est un générateur infinitésimal d'un* C_0-*semigroupe de contractions si et seulement si :*

(i)A est fermé et de domaine dense ;

(ii) $]0, \infty[\subseteq \rho(A)$ *et pour tout* $\lambda > 0$, *on a* $\|R_\lambda(A)\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X})} \leq \frac{1}{\lambda}$.

Proposition 1.4.2 *Soit* $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ *un opérateur linéaire qui vérifie i) et ii) du théorème* $1 \cdot 4 \cdot 2$ *et soit* $\lambda > 0$, *alors l'opérateur* A_λ *(l'approximation de Yosida) est le générateur infinitésimal d'un semigroupe uniformement continu* $\left\{e^{tA_\lambda}; t \geq 0\right\}$, *vérifiant* $\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X})} \leq 1$.

Théorème 1.4.3 (Hille-Yosida) *Soit A un opérateur fermé de domaine dense dans un espace de Banach* $\mathcal{X}$ *. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A engendre un* C_0-*semigroupe* $\{T(t)\,; t \geq 0\}$ *vérifiant, pour tout* $t \geq 0$

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X})} \leq M\ e^{t\omega};$$

(ii) *pour tout* $\lambda > \omega$, *on a :* $\lambda \in \rho(A)$ *et*

$$\|(\lambda - \omega)^m R_\lambda^m (A)\| \leq M, \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}.$$

Proposition 1.4.3 *Soit A un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$, *tel que*

$$\exists \omega \in \mathbb{R} : (Ax, x) \leq \omega |x|^2, \quad \forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Alors A engendre un C_0-*semigroupe vérifiant* $\|T(t)\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X})} \leq e^{t\omega}$.

Théorème 1.4.4 (Lumer-Phillips) *Soit A un opérateur fermé à domaine dense. A est le générateur d'un* C_0*-semi-groupe de contractions si et seulement A est dissipatif et il existe* $\lambda > 0$ *tel que* $(\lambda I - A)$ *est surjectif.*

Corollaire 1.4.1 *Soit A un opérateur fermé dénsement défini dans un espace de Banach* $\mathcal{X}$. *Si A et* A^* *sont dissipatifs alors A engendre un* C_0*-semi-groupe de contractions.*

Corollaire 1.4.2 *Soit A un opérateur densément défini dans un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$. *Alors A est m-dissipatif si et seulement si A engendre un* C_0-*semigroupe de contractions.*

Définition 1.4.3 *La famille* $\{T(t)^*\}_{t\geq 0} \subseteq \mathscr{L}(\mathcal{X}^*)$, *tel que pour tout* $t \geq 0$, $T(t)^*$ *est l'adjoint de l'opérateur* $T(t)$, *est appelée adjointe du semigroupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Théorème 1.4.5 *Soit A le générateur infinitésimal d'un* C_0*- semigroupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *dans un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$. *Alors* $\{T(t)^*\}_{t\geq 0}$ *est un* C_0*- semigroupe de générateur* A^* *adjoint de A. Si* $A = A^*$, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *est auto-adjoint.*

Définition 1.4.4 *On dit que* $T(t)$ *est un groupe unitaire fortement continu si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $T(t)$ *est un opérateur unitaire pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *et*

$$T(t+s) = T(t)\,T(s)\,, \text{ pour tous } s, t \in \mathbb{R}$$

(ii) $T(t)\varphi \to T(t_0)\varphi$ *quand* $t \to t_0$, *pour tout* $\varphi \in \mathcal{H}$

Théorème 1.4.6 (Stone) *Soit A un opérateur linéaire dans un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$. *A engendre un groupe unitaire fortement continu*

$$T(t) = e^{itA},$$

si et seulement il est auto-adjoint.

1.5 Rappels d'analyse complexe

1.5.1 Fonctions analytiques

Définition 1.5.1 *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est holomorphe sur U si f est dérivable en tout point de U .*

Définition 1.5.2 *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est analytique sur U, s'il existe pour tout $z_0 \in U$ un disque ouvert $D(z_0, r) \subset \mathbb{C}$ et des coefficients complèxes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $\forall z \in D(z_0, r)$.*

Proposition 1.5.1 *Toute fonction analytique sur un ouvert U est holomorphe sur U.*

Théorème 1.5.1 *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction.*
On pose : $P(x, y) = Ref(x + iy)$, $Q(x, y) = Imf(x + iy)$ et $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$.
Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) *f est dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$;*

(2) *F est differentiable en (x_0, y_0) et vérifie les conditions de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x} = -\frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

1.5.2 Principe du maximum

Théorème 1.5.2 *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, f est une fonction holomorphe sur U.Si $|f|$ possède un maximum local sur U alors f est constante.*

Corollaire 1.5.1 *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe borné et f :$\overline{U} \to \mathbb{C}$ continue. Si f est holomorphe sur U, alors :*

$$\underset{z\in U}{sup} |f(z)| = \sup_{z\in\partial U} |f(z)|$$

1.5.3 Théorème des trois cercles

Lemme 1.5.1 ([39]) *(Hadamard)*

Soit $\varphi(z)$ *une fonction à valeurs complexes, bornée et continue sur la bande fermée* $S = \{z\ : 0 \leq Re(z) \leq 1\}$ *et analytique à l'intérieur, vérifiant ;*

$$|\varphi(z)| \leq M_0, \ \ si \ \ Re(z) = 0 \ \ et \ \ |\varphi(z)| \leq M_1, \ \ si \ \ Re(z) = 1.$$

Alors

$$|\varphi(z)| \leq M_0^{1-Re(z)} M_1^{Re(z)}.$$

pour tout $z \in S$.

1.6 Lemme de S.Agmon & L.Nirenberg

Lemme 1.6.1 ([4], 1963)

Soit $\psi(\gamma)$ *une fonction à valeurs complexes,* $\gamma = x + iy$. *On suppose que* $\psi(\gamma)$ *est continue est bornée sur* $S = \{\gamma = x + iy : 0 < x < T,\ y \in \mathbb{R}\}$.

On définit :

$$\Phi(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_S \psi(\gamma) \left(\frac{1}{\gamma - \zeta} + \frac{1}{\overline{\gamma} + \zeta + 1} \right) dxdy.$$

Alors $\Phi(\zeta)$ *est absolument convergente,* $\overline{\partial}\Phi(\zeta) = \psi(\zeta)$ *, et*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\gamma - \zeta} + \frac{1}{\overline{\gamma} + \zeta + 1} \right| dy \leq k_1 \left(1 + \log \frac{1}{|x - t|} \right),\ x \neq t.$$

1.7 Théorème du point fixe

Théorème 1.7.1 *Soit* $(X, \|.\|)$ *un espace normé, et soit* $\mathcal{F} : X \to X$ *une application telle que :*

$$\|\mathcal{F}u_1 - \mathcal{F}u_2\| \leq k \|u_1 - u_2\|$$

$\forall u_1,\ u_2 \in X$ *et* $k \leq 1$. *Alors* $\mathcal{F}$ *possède un point fixe unique* $u = \mathcal{F}u$.

Corollaire 1.7.1 *On suppose que* $\mathcal{F}(X) \subset X$ *, et qu'il existe un entier* $p \geq 1$ *tel que* $\mathcal{F}^p$ *est contractante . Alors* $\mathcal{F}$ *admet un unique point fixe, et pour tout point* $x_0 \in X$*, la suite* $\mathcal{F}^p(x_0)$ *converge vers ce point fixe.*

1.8 Lemme de Gronwall

Lemme 1.8.1 *Soit φ une fonction non négative, continue vérifiant l'inégalité :*

$$\varphi(t) \leq a + b \int_0^t \varphi(s)\, ds, \quad t > 0,$$

où a et b sont des constantes positives. Alors

$$\varphi(t) \leq a e^{bt}.$$

Chapitre 2

Problème de Cauchy homogène mal posé

2.1 Formulation du problème

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, où la norme et le produit scalaire sont notés respectivement par $\|.\|$ et $(.,.)$. On considère dans $\mathcal{H}$ le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au\,(t)\,, \; 0 < t < T, \\ u\,(0) = \chi, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\chi \in \mathcal{H}$ et A est un opérateur linéaire non-borné de domaine de définition dense dans $\mathcal{H}$. De plus A est positif et auto-adjoint. Notant par E_λ, $\lambda \geq 0$, la résolution de l'identité de l'opérateur A et par $S(t) = e^{-tA} = \int_0^\infty e^{-t\lambda} dE_\lambda, \; t \geq 0$ le C_0-semigroupe engendré par $-A$.

2.1.1 Problème de Cauchy mal posé

Dans ce paragraphe on montre que le problème (2.1) n'est pas bien posé au sens d'Hadamard. Soit le problème inverse correspondant à (2.1)

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -Av\,(t)\,, \; 0 < t < T, \\ v\,(0) = y. \end{cases} \tag{2.2}$$

Théorème 2.1.1 *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $-A$ un opérateur auto-adjoint négatif et $S(t)$ le semi-groupe engendré par A. Alors, pour tout $y \in \mathcal{H}$, $v(t) = S(t)y$ est l'unique solution du problème :*

$$\begin{cases} v \in C([0,\infty[, \mathcal{H}) \cap C(]0,\infty[, \mathcal{D}(A)) \cap C^1(]0,\infty[, \mathcal{H}), \\ \frac{dv}{dt} = -Av\,(t)\,, \; t > 0, \\ v\,(0) = y. \end{cases}$$

De plus, on a :

$$\|Av\| \leq \frac{1}{t\sqrt{2}}\|y\|, \ \ \textit{pour tout } t > 0.$$

$\diamond$ D'après le théorème 2.1.1, le problème (2.2) est bien posé, i.e pour tout $y \in \mathcal{H}$, il existe une solution unique du problème (2.2) donnée par $v(t) = S(t)y, \ \ 0 \leq t < T$.

Soit $u(t)$ une solution de (2.1), alors $u(T-t)$ est une solution de (2.2) avec la valeur initiale $u(T)$. D'après l'unicité de la solution du problème (2.2), on déduit que

$$S(t)u(T) = u(T-t), \ \ 0 \leq t < T.$$

Ce qui implique que

$$S(T)u(T) = u(0) = x.$$

On a :

$$S(t)u(t) = S(t)S(T-t)u(T) = S(T)u(T) = x, \ \ 0 \leq t \leq T.$$

Comme $S(t)$ est inversible pour $t \geq 0$, [50], on obtient $u(t) = S(t)^{-1}x$ pour $t \geq 0$. Mais $S(t)^{-1}, \ t \geq 0$ n'est pas une famille d'opérateurs bornés ($\mathrm{Im}S(t)$ n'est pas fermé dans $\mathcal{H}$). D'où (2.1) n'est pas stable.

2.1.2 Problème de Cauchy homogène bien posé

Dans cette section on introduit la condition suffisante pour que le problème de Cauchy soit bien posé.

Considérant dans $\mathcal{H}$ le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = Bw(t), & 0 < t \leq T, \\ w(0) = \chi. \end{cases} \tag{2.3}$$

où $B : \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est un opérateur linéaire et $\chi \in \mathcal{H}$.

Définition 2.1.1 *Une solution classique du problème* (2.3) *est une fonction* $w(t) \in C([0,T];\mathcal{H}) \cap C^1(]0,T[;\mathcal{H})$ *telle que pour tout* $t \in]0,T[$, $w(t) \in \mathcal{D}(B)$ *et vérifie* (2.3).

Définition 2.1.2 *Une fonction continue* $w : [0,T] \to \mathcal{H}$ *est appelée solution mild du problème* (2.3) *si* $\int_0^t w(s)ds \in \mathcal{D}(B)$ *pour tout* $0 \leq t \leq T$ *et* $w(t) = B\int_0^t w(s)ds + \chi$.

Théorème 2.1.2 *Soit B un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$. Alors pour tout $\chi \in \mathcal{D}(B)$, le problème* (2.3) *admet une unique solution classique donnée par :* $w(t) = T(t)\chi$.

Théorème 2.1.3 *Soit B un générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $(T(t))_{t\geq 0}$. Alors pour tout $\chi \in \mathcal{H}$, le problème* (2.3) *admet une unique solution mild donnée par :*
$w(t) = T(t)\chi$.

2.2 Régularisation

Dans cette section, on introduit la stratégie de régularisation établie par K.A.Ames et R.J.Hughes, qui permet de donner une approximation stable du problème $(2 \cdot 1)$. Cette méthode est composée de deux étapes :

<u>$\mathscr{E}'$*tape 1*</u> On construit une approximation du problème $(2 \cdot 1)$. Par approximation nous entendons une fonction υ vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{d\upsilon}{dt} = f(A)\,\upsilon(t), & 0 < t \leq T, \\ \upsilon(0) = \chi, \end{cases} \tag{2.4}$$

où $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne, vérifiant la condition suivante :

Condition $(\mathscr{A})$:

- Il existe $\omega \in \mathbb{R}$, tel que $f(\lambda) \leq \omega$ pour tout $\lambda \in [0, \infty[$;
- Il existe des constantes positives δ et β, avec $0 < \beta < 1$ pour lesquelles

  $\mathcal{D}(A^{1+\delta}) \subseteq \mathcal{D}(f(A))$, et pour tout $\psi \in \mathcal{D}\left(A^{1+\delta}\right)$ on a :

$$\|(-A + f(A)\,\psi)\| \leq \beta \left\|A^{1+\delta}\psi\right\|,$$

où $f(A)x = \int\limits_0^{+\infty} f(\lambda)dE_\lambda x$, pour $x \in \mathcal{D}(f(A)) = \left\{x \in \mathcal{H} : \int\limits_0^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d(E(\lambda)x, x) < \infty\right\}$.
Puis, On montre que le problème $(2 \cdot 4)$ est bien posé.

<u>$\mathscr{E}'$*tape* 2</u> On établit une estimation de type :

$$\|u(t) - \upsilon(t)\| \leq C\beta^{1-\frac{t}{T}} M^{\frac{t}{T}}, \tag{2.5}$$

où $u(t) = e^{tA}\chi$ est la solution formelle de (2.1), υ est la solution du problème $(2 \cdot 4)$ et C et M sont des constantes positives.

2.3 Analyse de la méthode de régularisation

Définition 2.3.1 *On définit :* $g(\lambda) = -\lambda + f(\lambda)$, *pour* $\lambda \in [0, \infty)$
$g(A)$ *est l'opérateur de domaine de définition :*

$$\mathcal{D}(g(A)) = \{\psi \in \mathcal{H} : \int_0^\infty |g(\lambda)|^2 d(E_\lambda \psi, \psi) < \infty\}.$$

D'après le théorème spectral on a :

$$-A + f(A) \subseteq g(A), \text{ i.e.}$$

$$\mathcal{D}(-A + f(A)) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(f(A)) \subseteq \mathcal{D}(g(A)),$$

$$\text{et } g(A)x = (-A + f(A))x, \ \forall x \in \mathcal{D}(-A + f(A)).$$

De plus, l'opérateur $g(A)$ *vérifie :*

$$(g(A)\, x, x) \leq \omega\, (x, x)\, , \ \forall x \in \mathcal{D}(g(A)).$$

En se basant sur le théorème 1.3.3, la proposition 1.4.3 ainsi que le théorème de Stone, on peut facilement établir les propriétés suivantes :

$\mathscr{P}1$: L'opérateur $f(A)$ est auto-adjoint ;

$\mathscr{P}2$: $f(A)$ engendre un C_0-semigroupe $\left\{e^{tf(A)}\right\}_{t\geq 0}$ vérifiant $\|e^{tf(A)}\| \leq e^{wt}$, pour tout $t \geq 0$;

$\mathscr{P}3$: $\left\{e^{itf(A)}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe fortement continu vérifiant $\|e^{itf(A)}\| = 1$;

$\mathscr{P}4$: $g(A)$ est auto-adjoint ;

$\mathscr{P}5$: $g(A)$ engendre un semigroupe fortement continu $\left\{e^{tg(A)}\right\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs bornés, vérifiant $\left\|e^{tg(A)}\right\| \leq e^{\omega t}$, pour tout $t \geq 0$;

$\mathscr{P}6$: $\left\{e^{itg(A)}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe fortement continu, vérifiant $\|e^{itg(A)}\| = 1$.

Première étape

En vertu du théorème 2.1.3 et de la propriété $\mathscr{P}2$, on établit le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 *Le problème* $(2 \cdot 4)$ *admet une solution unique donnée par :*

$$\upsilon\,(t) = e^{tf(A)}\chi, \tag{2.6}$$

et elle dépend continûment de χ.

Deuxième étape

Tout d'abord, on va introduire quelques notations, définitions et lemmes nécessaires pour l'analyse de la méthode.

Définition 2.3.2 *On définit :*

$$e_n = \{\lambda \in [0, \infty[\,:\, |g(\lambda)| \leq n\}, \qquad E_n = E_\lambda(e_n), \; \chi_n = E_n \chi,$$

$$u_n(t) = E_n u(t) \; \text{ et } v_n(t) = E_n v(t).$$

Lemme 2.3.1 [19] *Pour tout $\tau \in \mathcal{H}$, on a :*
$E_n \tau \in \mathcal{D}(A^m)$, *où* $m \in \mathbb{N}$;
$E_n \tau \in \mathcal{D}(f(A))$.

Lemme 2.3.2 *Soit la condition $(\mathscr{A})$ satisfaite. Alors, on a :*

(i) $v_n(t) = e^{tf(A)}\chi_n$;

(ii) $u_n(t) = e^{tA}\chi_n$.

Preuve

(i) Appliquant E_n à (2.6) on obtient :

$$E_n(v(t)) = E_n(e^{tf(A)}\chi) = e^{tf(A)}E_n\chi = e^{tf(A)}\chi_n.$$

(ii) Considérant le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = AE_n u(t), & 0 < t \leq T, \\ u(0) = \chi_n. \end{cases} \tag{2.7}$$

AE_n est un opérateur borné, alors il engendre un C_0-semigroupe et comme $\chi_n \in \mathcal{D}(A)$ on en déduit que le problème (2.7) admet une solution unique :

$$u_n(t) = e^{tAE_n}\chi_n = e^{tA}\chi_n.$$

Montrant que $E_n u(t)$ est une solution du problème (2.5). En effet appliquant l'opérateur E_n à l'égalité :

$$\frac{du}{dt} = Au(t),$$

on a :

$$E_n\left(\frac{du}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(E_n u\right)=E_n A u\left(t\right)=AE_n u(t)=AE_n\left(E_n u\left(t\right)\right).$$

D'où

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(E_n u\right)=AE_n\left(E_n u\left(t\right)\right), & 0<t\leq T, \\ E_n u\left(0\right)=E_n\chi=\chi_n. \end{cases} \tag{2.8}$$

On en déduit donc que $E_n u\left(t\right)$ est une solution du problème (2.7). D'aprés l'unicité de la solution, il s'ensuit :

$$u_n\left(t\right)=E_n u\left(t\right)=e^{tA}\chi_n. \quad \square$$

Lemme 2.3.3 *Soit la condition* $(\mathscr{A})$ *vérifieé. Alors, pour tout* $t\geq 0$, *on a :*

$$e^{tg(A)}=e^{-tA}e^{tf(A)}. \tag{2.9}$$

De plus, pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$, *on a :*

$$e^{\alpha g(A)}E_n=e^{-\alpha A}e^{\alpha f(A)}E_n. \tag{2.10}$$

Démonstration. Posant

$h_1(A)=e^{-tA}$ et $h_2(A)=e^{tf(A)}$.

D'après la propriété (iii) du théorème 1.3.3 on a :

$$h_1\left(A\right)h_2\left(A\right)\subseteq\left(h_1h_2\right)\left(A\right),$$

$$\text{avec }\ \mathcal{D}\left[h_1\left(A\right)h_2\left(A\right)\right]=\mathcal{D}\left[\left(h_1h_2\right)\left(A\right)\right]\cap\mathcal{D}\left(h_2\left(A\right)\right).$$

D'où on a :

$$e^{-tA}e^{tf(A)}\subseteq e^{tg(A)},\ \text{ avec }\ \mathcal{D}(e^{-tA}e^{tf(A)})=\mathcal{D}(e^{tg(A)})\cap\mathcal{D}(e^{tf(A)}),\ \text{ pour tout }\ t\geq 0.$$

Comme $(e^{tf(A)})_{t\geq 0}$ est une famille d'opérateurs bornés, $\mathcal{D}(e^{tf(A)})=\mathcal{H}$, donc

$$\mathcal{D}(e^{-tA}e^{tf(A)})=\mathcal{D}(e^{tg(A)}),$$

alors, l'égalité (2.9) est ainsi établie.

Comme $\left\{e^{\alpha A}E_n\right\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$, $\left\{e^{\alpha f(A)}E_n\right\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$ et $\left\{e^{\alpha g(A)}E_n\right\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$ sont des groupes d'opérateurs bornés dans $\mathcal{H}$, par une procédure analogue à celle utilisée pour avoir (2.9), on peut établir l'égalité :

$$e^{\alpha g(A)}E_n = e^{-\alpha A}E_n e^{\alpha f(A)}E_n = e^{-\alpha A}e^{\alpha f(A)}E_n, \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{C}. \qquad \square$$

Théorème 2.3.2 *Soit la condition* $(\mathscr{A})$ *vérifiée. Supposant qu'il existe des constantes* $\widetilde{M} > 0$ *et* γ *indépendantes de* β *et* ω*, telles que* $\|u(T)\| \leq \widetilde{M}$ *et pour tout* $\psi \in \mathcal{D}(g(A))$*,*

$$(g(A)\psi, \psi) \leq \gamma(\psi, \psi).$$

Alors

$$\|u(t) - \upsilon(t)\| \leq C\beta^{1-\frac{t}{T}}M^{\frac{t}{T}}, \qquad \textit{pour tout } 0 \leq t < T,$$

où C *et* M *sont des constantes positives indépendantes de* β *.*

► La démonstration du théorème 2.3.2 est basée sur le théorème des trois cerles d'Hadamard [39], donc pour pouvoir appliquer ce dernier, on prolonge les fonctions $u(t)$ et $v(t)$ à une partie du plan complexe.

Définition 2.3.3 *Pour* $\alpha \in \overline{\mathbb{S}} = \{t + i\eta \in \mathbb{C} : 0 \leq t \leq T\}$*, on définit :*

$$u_n(\alpha) = e^{i\eta A}u_n(t), \;\; v_n(\alpha) = e^{i\eta f(A)}v_n(t),$$
$$\phi_n(\alpha) = e^{\alpha^2}(u_n(\alpha) - v_n(\alpha)), \textit{ et } \phi_n(\alpha) = (\phi_n(\alpha),\, h),$$

où h *est un élément arbitraire de* $\mathcal{H}$*.*

Remarque. D'après la propriété (2.10) du lemme 2.3.3 on a :

$$u_n(\alpha) = e^{i\eta A}e^{tA}\chi_n = e^{\alpha A}\chi_n, \;\;\; v_n(\alpha) = e^{\alpha f(A)}\chi_n.$$

Lemme 2.3.4 *La fonction* $\phi_n(\alpha)$ *est analytique sur* $\mathbb{S} = \{t + i\eta \in \mathbb{C} : 0 < t < T\}$ *et est continue et bornée sur la bande* $\overline{\mathbb{S}}$*.*

Démonstration

On a $\overline{\partial}\phi_n(\alpha)=0$, alors $\phi_n(\alpha)$ est analytique.

Etablissant la continuité. Comme $\{e^{i\eta A}\}_{\eta\in\mathbb{R}}$ et $\{e^{i\eta f(A)}\}_{\eta\in\mathbb{R}}$ sont des groupes fortement continus et $u_n(t)$ et $\upsilon_n(t)$ sont continues sur $[0,T]$, on en déduit la continuité de $\phi_n(\alpha)$ sur $\overline{\mathbb{S}}$.

En effet, soient h, $\tau>0$ et posant $S(\eta)=e^{i\eta A}$ (resp. $S(\eta)=e^{i\eta f(A)}$), on a :

$$\begin{aligned}
\|S(\eta+h)u(t+\tau)-S(\eta)u(t)\| &\leq \|S(\eta+h)u_n(t+\tau)-S(\eta+h)u_n(t)\| \\
&+ \|S(\eta+h)u_n(t)-S(\eta)u_n(t)\| \\
&\leq \|S(\eta+h)\|_{\mathscr{L}(\mathcal{H})}\|u_n(t+\tau)-u_n(t)\| \\
&+ \|S(\eta)\|_{\mathscr{L}(\mathcal{H})}\|S(h)u_n(t)-u_n(t)\|,
\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$S(\eta)u_n(t)\to S(\eta_0)u_n(t_0)\ \text{quand}(\eta,t)\to(\eta_0^+,t_0^+).$$

De manière analogue, on montre que

$$S(\eta)u_n(t)\to S(\eta_0)u_n(t_0)\ \text{quand}(\eta,t)\to(\eta_0^-,t_0^-).$$

D'où, on déduit que $\lim\phi_n(\alpha)=\phi_n(\alpha_0)$ quand $\alpha=\eta+it\to\alpha_0=\eta_0+it_0$ dans $\overline{\mathbb{S}}$.

Montrant que $\phi_n(\alpha)$ est bornée pour $0\leq\operatorname{Re}\alpha\leq T$:

$$\begin{aligned}
|\phi_n(\alpha)| &\leq \left\|e^{\alpha^2}\left[e^{\alpha A}-e^{\alpha f(A)}\right]\chi_n\right\|\cdot\|h\| \\
&= \left\|e^{(t+i\eta)^2}\left[e^{(t+i\eta)A}-e^{(t+i\eta)f(A)}\right]\chi_n\right\|\cdot\|h\| \\
&= \left\|e^{\left(t^2-\eta^2\right)}e^{i2\eta t}\left[e^{tA}e^{i\eta A}-e^{tf(A)}.e^{i\eta f(A)}\right]\chi_n\right\|\cdot\|h\| \\
&\leq e^{t^2-\eta^2}\left\|e^{i2\eta t}\right\|\left\|\left[e^{tA}e^{i\eta A}-e^{tf(A)}.e^{i\eta f(A)}\right]\chi_n\right\|\cdot\|h\| \\
&= e^{t^2-\eta^2}.\left\|\left[e^{tA}e^{i\eta A}-e^{tf(A)}.e^{i\eta f(A)}\right]\chi_n\right\|\cdot\|h\|.
\end{aligned}$$

En utilisant $\left\|e^{i\eta f(A)}\right\| = \left\|e^{i\eta A}\right\| = 1$, ainsi que quelques estimations élémentaires, on obtient :

$$\begin{aligned}
|\phi_n(\alpha)| &\leq e^{t^2-\eta^2}.\|[e^{tA}e^{i\eta A} - e^{t(g(A)+A)}.e^{i\eta(g(A)+A)}]\chi_n\|.\|h\| \\
&= e^{t^2-\eta^2}.\|[e^{(t+i\eta)A}\chi_n - e^{(t+i\eta)A}.e^{(t+i\eta)g(A)}\chi_n\|.\|h\| \\
&\leq e^{t^2-\eta^2}.\{\|e^{(t+i\eta)A}\chi_n - e^{(t+i\eta)A}.e^{i\eta g(A)}\chi_n\| \\
&+ \|e^{(t+i\eta)A}.e^{i\eta g(A)}\chi_n - e^{(t+i\eta)A}.e^{(t+i\eta)g(A)}\chi_n\|\}.\|h\| \\
&\leq e^{t^2-\eta^2}.\{\|e^{tA}\chi_n - e^{tA}.e^{i\eta g(A)}\chi_n\| + \|e^{tA}\chi_n - e^{tA}.e^{tg(A)}\chi_n\|\}.\|h\| \\
&= e^{t^2-\eta^2}\left\{\left\|\left(I - e^{i\eta g(A)}\right)e^{tA}\chi_n\right\| + \left\|\left(I - e^{tg(A)}\right)e^{tA}\chi_n\right\|\right\}.\|h\|.
\end{aligned}$$

Estimant le terme $\left\|\left(I - e^{i\eta g(A)}\right)e^{tA}\chi_n\right\|$, en utilisant la propriété (iv) de la proposition 1.4.1. Pour $\psi \in \mathcal{D}((g(A)))$ et $\eta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\left(I - e^{i\eta g(A)}\right)\psi = -i\int_0^\eta e^{isg(A)}g(A)\,\psi ds,$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\left\|\left(I - e^{i\eta g(A)}\right)\psi\right\| &= \left\|-i\int_0^\eta e^{isg(A)}g(A)\,\psi ds\right\| \\
&\leq \int_0^\eta \left\|e^{isg(A)}\right\|\|g(A)\,\psi\|\,ds \\
&\leq |\eta|\,\|g(A)\,\psi\|.
\end{aligned}$$

Comme $e^{tA}\chi_n \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(f(A)) \subseteq \mathcal{D}(g(A))$, pour tout $t \geq 0$, et $e^{tA}\chi_n \in \mathcal{D}\left(A^{1+\delta}\right)$, alors d'aprés la condition $(\mathscr{A})$, on a l'inégalité suivante :

$$\left\|\left(I - e^{i\eta g(A)}\right)e^{tA}\chi_n\right\| \leq |\eta|\left\|g(A)\,e^{tA}\chi_n\right\| \leq |\eta|\,.\beta.\left\|A^{1+\delta}e^{tA}\chi_n\right\|. \tag{2.11}$$

D'une manière analogue, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\|\left(I - e^{tg(A)}\right)e^{tA}\chi_n\right\| &= \left\|-\int_0^t e^{sg(A)}g(A)\,e^{tA}\chi_n ds\right\| \\
&\leq \int_0^t \left\|e^{sg(A)}\right\|\left\|g(A)\,e^{tA}\chi_n\right\|ds \\
&\leq t.e^{\gamma t}\left\|g(A)\,e^{tA}\chi_n\right\|
\end{aligned}$$

$$\leq t.\beta.e^{\gamma t}.\left\|A^{1+\delta}e^{tA}\chi_n\right\|. \tag{2.12}$$

Sommant les inégalités $(2\cdot 11)$ et $(2\cdot 12)$ membre à membre, on obtient :

$$\begin{aligned}\left\|\left(I-e^{i\eta g(A)}\right)e^{tA}\chi_n\right\|+\left\|\left(I-e^{tg(A)}\right)e^{tA}\chi_n\right\| &\leq |\eta|.\beta.\left\|A^{1+\delta}e^{tA}\chi_n\right\|+t.\beta.e^{\gamma t}.\left\|A^{1+\delta}e^{tA}\chi_n\right\| \\ &= \beta\left[|\eta|+t.e^{\gamma t}\right]\left\|A^{1+\delta}e^{tA}\chi_n\right\| \\ &\leq \beta\left[|\eta|+T.e^{\gamma T}\right]\left\|A^{1+\delta}e^{tA}\chi_n\right\|.\end{aligned}$$

D'où, on a :

$$\begin{aligned}|\phi_n(\alpha)| &\leq e^{t^2-\eta^2}\beta\left(|\eta|+te^{\gamma t}\right)\left\|A^{1+\delta}e^{tA}\chi_n\right\|\|h\| \\ &\leq e^{T^2}e^{-\eta^2}\beta\left(|\eta|+T.e^{\gamma T}\right)\left\|A^{1+\delta}e^{tA}\chi_n\right\|\|h\| \\ &\leq e^{T^2}\beta\left(1+T.e^{\gamma T}\right)\left\|A^{1+\delta}e^{tA}\chi_n\right\|\|h\|. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Comme $\left\{A^{1+\delta}e^{tA}E_n\right\}$ est borné, il en résulte que ϕ_n est bornée sur $\overline{\mathbb{S}}$. $\square$

Démonstration du théorème 2·3·2

D'aprés le lemme 2·3·4, les conditions du théorème d'Hadamard sont satisfaites, on a donc :

$$|\phi_n(t)| \leq M(0)^{1-\frac{t}{T}}M(T)^{\frac{t}{T}}, \quad \text{pour} \ \ 0\leq t\leq T. \tag{2.14}$$

où $M(t)=\max\limits_{\substack{\alpha=t+i\eta\\ \eta\in\mathbb{R}}}|\phi_n(\alpha)|$.

A partir de $(2\cdot 13)$, il s'ensuit :

$$M(0)\leq\beta\left\|A^{1+\delta}\chi_n\right\|\|h\|. \tag{2.15}$$

Pour $t=T$, on a :

$$\begin{aligned}|\phi_n(T+i\eta)| &\leq e^{T^2}\left\{\left\|\left(I-e^{i\eta g(A)}\right)e^{TA}\chi_n\right\|+\left\|\left(I-e^{Tg(A)}\right)e^{TA}\chi_n\right\|\right\}.\|h\| \\ &\leq e^{T^2}\left\{\left\|e^{i\eta g(A)}e^{TA}\chi_n\right\|+\left\|e^{Tg(A)}e^{TA}\chi_n\right\|\right\}.\|h\| \\ &\leq e^{T^2}\left\{\left\|e^{TA}\chi_n\right\|+\left\|e^{Tg(A)}\right\|\left\|e^{TA}\chi_n\right\|\right\}\|h\| \\ &\leq e^{T^2}\left\{\left\|e^{TA}\chi_n\right\|+e^{\gamma T}\left\|e^{TA}\chi_n\right\|\right\}\|h\| \\ &\leq e^{T^2}(1+e^{\gamma T})\left\|e^{TA}\chi_n\right\|\|h\| \\ &\leq C_1\left\|e^{TA}\chi_n\right\|\|h\|. \end{aligned} \tag{2.16}$$

De $(2 \cdot 15)$ et $(2 \cdot 16)$, il résulte :

$$|\phi_n (t)| \leq \left\{\beta \left\|A^{1+\delta}\chi_n\right\| \|h\|\right\}^{1-\frac{t}{T}} \left\{C_1 \left\|e^{TA}\chi_n\right\| \|h\|\right\}^{\frac{t}{T}} . \tag{2.17}$$

Par passage à la limite quand $n \rightarrow \infty$ on obtient :

$$|\phi (t)| \leq \left\{\beta \left\|A^{1+\delta}\chi\right\| \|h\|\right\}^{1-\frac{t}{T}} \left\{C_1 \left\|e^{TA}\chi\right\| \|h\|\right\}^{\frac{t}{T}} .$$

On a par hypothèse $\left\|e^{TA}\chi\right\| \leq \widetilde{M}$, il s'ensuit que :

$$\left\|A^{1+\delta}\chi\right\| \leq \widetilde{M}.$$

Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} |\phi (t)| &\leq \left\{\beta\widetilde{M} \|h\|\right\}^{1-\frac{t}{T}} \left\{C_1\widetilde{M} \|h\|\right\}^{\frac{t}{T}} \\ &\leq \beta^{1-\frac{t}{T}} \left\{C_1\widetilde{M}\right\}^{\frac{t}{T}} \|h\| \left(\widetilde{M}\right)^{1-\frac{t}{T}} \\ &\leq C\beta^{1-\frac{t}{T}} M^{\frac{t}{T}} \ \ \|h\| , \end{aligned}$$

où $C_1\widetilde{M} = M$ et C est une constante positive independande de β.

Prenant le supremum sur $h \in \mathcal{H}$, avec $\|h\| \leq 1$, on obtient :

$$|\phi (t)| \leq C\beta^{1-\frac{t}{T}} M^{\frac{t}{T}} .$$

D'où :

$$\|u (t) - \upsilon (t)\| \leq C\beta^{1-\frac{t}{T}} M^{\frac{t}{T}} ,$$

pour tout $0 \leq t \leq T$. $\square$

Chapitre 3

Problème de Cauchy non-linéaire mal-posé

3.1 Formulation du problème

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, où la norme et le produit scalaire sont notés respectivement par $\|.\|$ et $(.,.)$. On considère dans $\mathcal{H}$ le problème de Cauchy nonlinéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au\,(t) + h\,(t, u\,(t))\,, & 0 < t < T, \\ u\,(0) = \chi, \end{cases} \tag{3.1}$$

où A est un opérateur auto-adjoint positif, non-borné de domaine de définition dense dans$\mathcal{H}$ $\chi \in \mathcal{H}$ et $h : [0, T] \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est une fonction lipschitzienne par rapport aux deux variables, i.e ;

$$\|h\,(t_1, u) - h\,(t_2, \upsilon)\| \leq k\,(|t_1 - t_2| + \|u - \upsilon\|)\,, \tag{3.2}$$

où k est une constante positive. De plus h vérifie la condition suivante :

condition $(\mathscr{H})$: $H(t) = h(t, u(t))$ est différentiable sur l'intervalle $]0, T[$ et

$$\frac{d}{dt} h\,(t, u\,(t)) \in L^1\,(]0, T[\,; \mathcal{H})\,.$$

▶ La solution du problème (3.1) repose sur la solution du problème homogène associé, et comme ce dernier est instable (voir la section 2.1.1), alors le problème (3.1) est mal posé. Sa solution formelle est donnée par :

$$u(t) = e^{tA}\chi + \int\limits_0^t e^{(t-s)A} h\,(s, u\,(s))\,ds.$$

3.2 Problème de Cauchy non-linéaire bien posé

Dans ce qui suit, on introduit les théorèmes d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy nonlinéaire. Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = Bw(t) + h(t, w(t)), & 0 < t \leq T, \\ w(0) = \chi, \end{cases} \tag{3.3}$$

où $B : \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est un opérateur linéaire, $h(t, w(t))$ est une fonction définie de $[0, T] \times \mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ et $\chi \in \mathcal{H}$.

Commençant par introduire les définitions suivantes :

Définition 3.2.1 *Une solution continue w de l'équation intégrale*

$$w(t) = e^{tB}\chi + \int_0^t e^{(t-s)B} h(s, w(s))\, ds, \tag{s}$$

est appelée solution mild du problème (3.3).

Définition 3.2.2 *Une fonction w différentiable presque par tout sur $[0, T]$ telle que $w' \in L^1(]0, T[\,; \mathcal{H})$ est dite solution forte du problème* (3.3) *si $w(0) = \chi$ et $\frac{dw}{dt} = Bw(t) + h(t, w(t))$, p.p sur $[0, T]$.*

Théorème 3.2.1 *Soient $\mathcal{X}$ un espace de Banach et $h : [0, T] \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ une fonction continue par rapport à la variable t et uniformement lipschitzienne sur $\mathcal{X}$. Si B est le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $T(t)$, alors pour tout $\chi \in \mathcal{X}$ le problème* (3.3) *admet une seule solution mild $w \in C([0, T]; \mathcal{X})$ et elle dépend continûment de χ.*

Preuve. Comme $T(t)$ est un semigroupe fortement continu et h est continue par rapport à t et uniformement lipschitzienne sur $\mathcal{X}$, on a les estimations suivantes :

$$\|T(t)\| \leq \delta_1, \quad \|h(t, w) - h(t, v)\| \leq \delta_2 \|w - v\|_\infty, \quad \|h(t, w)\| \leq \delta_3, \tag{3.4}$$

pour $0 \leq t \leq T$, où δ_1 et δ_2 et δ_3 sont des constantes positives.

Commençant par établir l'existence de la solution

pour $\chi \in \mathcal{X}$ (donnée), on définit l'application $\mathcal{F} : C([0, T]; \mathcal{X}) \to C([0, T]; \mathcal{X})$ par :

$$(\mathcal{F}w)(t) = T(t)\chi + \int_0^t T(t-s) h(s, w(s))\, ds \quad , \qquad 0 \leq t \leq T,$$

On a :

$$\|(\mathcal{F}u)(t) - (\mathcal{F}\upsilon)(t)\| = \left\| \int_0^t T(t-s)\, h(s, u(s))\, ds - \int_0^t T(t-s)\, h(s, \upsilon(s))\, ds \right\|. \tag{3.5}$$

Majorant le membre droit de l'égalité $(3 \cdot 5)$, en utilisant les estimations $(3 \cdot 4)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{F}u)(t) - (\mathcal{F}\upsilon)(t)\| &= \left\| \int_0^t T(t-s)\left[h(s, u(s)) - h(s, \upsilon(s))\right] ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \|T(t-s)\left[h(s, u(s)) - h(s, \upsilon(s))\right]\| \, ds \\
&\leq \int_0^t \|T(t-s)\| \, \|h(s, u(s)) - h(s, \upsilon(s))\| \, ds \\
&\leq \delta_1.\delta_2.t. \|u - \upsilon\|_\infty .
\end{aligned} \tag{3.6}$$

où $\|u\|_\infty = \sup_{t\in[0,T)} \| u(t) \|$.

En remplaçant w et υ dans (3.5) par $\mathcal{F}w$ et $\mathcal{F}\upsilon$ respectivement on a :

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{F}(\mathcal{F}u))(t) - (\mathcal{F}(\mathcal{F}\upsilon))(t)\| &= \left\|\left(\mathcal{F}^2u\right)(t) - \left(\mathcal{F}^2\upsilon\right)(t)\right\| \\
&\leq \delta_1 \int_0^t \|h(s, (\mathcal{F}u)(s)) - h(s, (\mathcal{F}\upsilon)(s))\| \, ds \\
&\leq \delta_1.\delta_2 \int_0^t \|(\mathcal{F}u)(s) - (\mathcal{F}\upsilon)(s)\| \, ds \\
&\leq \delta_1.\delta_2 \int_0^t \delta_1.\delta_2 s. \|u - \upsilon\|_\infty \, ds \\
&= \delta_1^2.\delta_2^2 \frac{t^2}{2} \|u - \upsilon\|_\infty .
\end{aligned} \tag{3.7}$$

En réiterant cette opération $(n-1)$ fois, on obtient :

$$\|(\mathcal{F}^n u)(t) - (\mathcal{F}^n \upsilon)(t)\| \leq \frac{(\delta_1.\delta_2.t)^n}{n!} \|u - \upsilon\|_\infty ,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0, T]$ on a donc :

$$\|\mathcal{F}^n u - \mathcal{F}^n \upsilon\|_{C([0,T[;X)} \leq \frac{(\delta_1.\delta_2.t)^n}{n!} \|u - \upsilon\|_\infty . \tag{3.8}$$

Comme $\frac{(\delta_1.\delta_2.t)^n}{n!} \to 0$ quand $n \to \infty$, on peut admettre que $\frac{(\delta_1.\delta_2.t)^n}{n!} < 1$, alors $\mathcal{F}^n$ est contractante, donc elle possède un unique point fixe w. En vertu du corollaire 1.5.3, $\mathcal{F}$ admet un unique point fixe $w = \mathcal{F}w$, ce point fixe est la solution désirée du problème (3.3).

L'unicité et la dépendance continue sont des conséquences du résultat suivant :

Soit υ une solution du problème (3.3) sur $[0, T]$, et soit υ_0 sa valeur initiale, on pose ici $\chi = w_0$.

$$\begin{aligned}
\|w(t) - \upsilon(t)\| &\leq \|T(t) w_0 - T(t) \upsilon_0\| + \left\| \int_0^t T(t-s) [h(s, w(s)) - h(s, \upsilon(s))] \, ds \right\| \\
&\leq \|T(t)\| . \|w_0 - \upsilon_0\| + \int_0^t \|T(t-s)\| \|h(s, w(s)) - h(s, \upsilon(s))\| \, ds \\
&\leq \delta_1 . \|w_0 - \upsilon_0\| + \delta_1 . \delta_2 . \int_0^t \|w(s) - \upsilon(s)\| \, ds. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall à l'inégalité (3.9), on obtient :

$$\|w(t) - \upsilon(t)\| \leq \delta_1 e^{\delta_1 . \delta_2 . T} \|w_0 - \upsilon_0\| . \quad \square$$

Théorème 3.2.2 ([37]) *Soient $\mathcal{X}$ un espace de Banach réflexif, $h : [0, T] \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ une fonction lipschitzienne par rapport aux deux variables et $\chi \in \mathcal{D}(B)$. Si B est le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $T(t)$ alors, la solution mild w du problème* (3.3) *est une solution forte.*

Théorème 3.2.3 ([37]) *Soient $\mathcal{X}$ un espace de Banach, $H(t) = h(t, u(t))$ différentiable p.p sur $[0, T]$, $H'(t) \in L^1(]0, T[\,; \mathcal{H})$ et $\chi \in \mathcal{D}(B)$. Si B est le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $T(t)$ alors, le problème* (3.3) *admet une solution forte unique donnée par (s).*

3.3 Régularisation

Pour l'étude du problème (3.1) est adaptée la même stratégie de régularisation utilisée dans le chapitre 2.

On construit une approximation du problème (3.1) , en remplaçant l'opérateur A par $f(A)$:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = f(A)\,\upsilon(t) + h(t, \upsilon(t)), \\ \upsilon(0) = \chi, \end{cases} \tag{3.10}$$

où f est une fonction boréliènne à valeurs réelles, vérifiant

Condition $(\mathscr{A})$:

- Il existe $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $f(\lambda) \leq \omega$ pour tout $\lambda \in [0, \infty[$;
- Il existe des constantes positives δ et β, avec $0 < \beta < 1$ pour lesquelles

  $\mathcal{D}(A^{1+\delta}) \subseteq \mathcal{D}(f(A))$, et pour tout $\psi \in \mathcal{D}\left(A^{1+\delta}\right)$ on a :

$$\|(-A + f(A)\,\psi)\| \leq \beta \left\|A^{1+\delta}\psi\right\|.$$

On montre que le problème (3.10) est bien posé, puis on établit l'estimation :

$$\|u(t) - \upsilon(t)\| \leq C\beta^{1-\frac{t}{T}} M^{\frac{t}{T}},$$

où $u(t)$ est la solution formelle du problème $(3 \cdot 1)$ et $\upsilon(t)$ est la solution du problème (3.10), C et M sont des constantes indépendantes de β.

Théorème 3.3.1 *Soient les la conditions* $(\mathscr{H})$ *et* $(\mathscr{A})$ *vérifiées. Alors le problème* (3.10) *est bien posé et sa solution mild est donnée par :*

$$\upsilon(t) = e^{tf(A)}\chi + \int_0^t e^{(t-s)f(A)} h(s, \upsilon(s))\, ds. \tag{3.11}$$

Preuve. L'opérateur $f(A)$ engendre un C_0-semigroupe, donc en vertu du théorème $3 \cdot 2 \cdot 1$, le problème (3.10) admet une solution unique donnée par (3.11) et elle dépend continûment de χ.

Définition 3.3.1 *On définit :*

$$e_n = \{\lambda \in [0, \infty[: |g(\lambda)| \leq n\}, \quad E_n = E(e_n),\ \chi_n = E_n\chi,$$

$$h_n(t, u(t)) = E_n h(t, u(t)),\ \ H(t) = h(t, u(t)),\ \ H_n(t) = E_n H(t),$$

$$u_n(t) = E_n u(t) \ \ et\ v_n(t) = E_n v(t).$$

Remarques.

◇ Comme $f(\lambda) = e^{t\lambda}$ est une fonction borélienne bornée sur les ensembles bornés, on a :

$\chi_n,\ h_n \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}\left(e^{tA}\right).$

◇ $H_n(t)$ est différentiable sur $]0,T[$ et $H_n'(t) \in L^1(]0,T[\,;\mathcal{H})$. (Puisque $H'(t) \in L^1(]0,T[\,;\mathcal{H})$ et E_n est un opérateur borné).

Lemme 3.3.1 *Soit la condition* $(\mathscr{H})$ *satisfaite. Alors :*

$$u_n(t) = e^{tA}\chi_n + \int_0^t e^{(t-s)A} h_n(s, u(s))\, ds.$$

Preuve. Tout d'abord montrant que le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = AE_n u(t) + E_n H(t), \\ u(0) = \chi_n, \end{cases} \tag{3.12}$$

est bien posé.

AE_n est un opérateur borné, alors il engendre un C_0-semigroupe. Comme $H_n(t)$ est différentiable sur $]0,T[$ et $H_n'(t) \in L^1(]0,T[\,;\mathcal{H})$, on déduit, d'après le théorème 3.2.3 que le problème (3.12) admet une unique solution forte donnée par :

$$w(t) = e^{tA}\chi_n + \int_0^t e^{(t-s)A} h_n(s, u(s))\, ds.$$

Montrant que $E_n u(t)$ est une solution du problème (3.12). En appliquant l'opérateur E_n à l'égalité :

$$\frac{du}{dt} = Au(t) + h(t, u(t)),$$

on a :

$$E_n\left(\frac{du}{dt}\right) = E_n(Au(t) + h(t, u(t))) = E_n Au(t) + E_n h(t, u(t)).$$

Utilisant les propriétés de E_n on obtient :

$E_n\left(\frac{du}{dt}\right) = AE_n u(t) + E_n h(t, u(t)) = AE_n(E_n u(t)) + H_n(t) = \frac{d}{dt}(E_n u)$

et $E_n u(0) = E_n \chi = \chi_n$.

On en déduit donc que $E_n u(t)$ est une solution du problème (3.12). D'aprés l'unicité de la solution, il s'ensuit :

$$\omega(t) = E_n u(t) = e^{tA}\chi_n + \int_0^t e^{(t-s)A} H_n(s)\, ds = e^{tA}\chi_n + \int_0^t e^{(t-s)A} h_n(s, u(s))\, ds. \quad \square$$

Lemme 3.3.2 *Soient les conditions* ($\mathscr{H}$) *et* ($\mathscr{A}$) *satisfaites. Alors :*

$$\upsilon_n(t) = e^{tf(A)}\chi_n + \int_0^t e^{(t-s)f(A)} h_n(s, \upsilon(s))\, ds.$$

Preuve. Appliquant E_n à (3.10) on obtient :

$$\begin{aligned} E_n(\upsilon(t)) &= E_n\left(e^{tf(A)}\chi + \int_0^t e^{(t-s)f(A)} h(s, \upsilon(s))\, ds\right) \\ &= e^{tf(A)} E_n\chi + \int_0^t e^{(t-s)f(A)} E_n h(s, \upsilon(s))\, ds \\ &= e^{tf(A)}\chi_n + \int_0^t e^{(t-s)f(A)} h_n(s, \upsilon(s))\, ds. \quad \square \end{aligned}$$

Introduisant à présent les conditions suivantes :

Condition ($\mathscr{H}1$)

$h(t, u(t)) = H(t) : [0, T[\to \mathcal{H}$ est continûement différentiable, $H'(t) \in L^1(]0, T[)$, et $h(t, u(t)) \in \mathcal{D}\left(e^{TA}\right)$, pour tout $t \in [0, T[$.

Condition ($\mathscr{C}$)

($\mathscr{C}_1$) Il existe une constante γ, indépendante de β telle que :

$$(g(A)\psi, \psi) \leq \gamma(\psi, \psi), \quad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{D}(g(A));$$

($\mathscr{C}_2$) $\|u(T)\| \leq M_1$;

($\mathscr{C}_3$) $\left\|A^{1+\delta} e^{TA}\chi\right\| \leq L,$ pour tout $\psi \in \mathcal{H}$;

($\mathscr{C}_4$) $\left\|A^{1+\delta} e^{TA} h(t, \psi)\right\| \leq N$, pour tout $t \in [0, T[$ et pour tout $\psi \in \mathcal{H}$.

Théorème 3.3.2 *Soient les conditions* ($\mathscr{A}$), ($\mathscr{H}1$) *et* ($\mathscr{C}$) *satisfaites. Alors, il existe des constantes C et M independantes de β telles que pour $0 \leq t < T$, on a :*

$$\|u(t) - \upsilon(t)\| \leq C\beta^{1-\frac{t}{T}} M^{\frac{t}{T}}.$$

où $u(t)$ *et la solution formelle de* (3.1) *et* $v(t)$ *est la solution du problème* (3.10) *.*

▶ La démonstration du théorème 3.3.2 se base sur le théorème des trois cercles d'Hadamard (the three lines theorem). Pour ce but , on définit les fonctions suivantes :

Définition 3.3.2 *On définit :*

$$u_n(\zeta) = e^{i\eta A} u_n(t) = e^{i\eta A} u_n(t),$$

$$\upsilon_n(\zeta) = e^{i\eta f(A)} E_n v(t) = e^{i\eta f(A)} \upsilon_n(t),$$

$$\phi_n(\zeta) = u_n(\zeta) - \upsilon_n(\zeta),$$

où $\zeta \in \overline{\mathbb{S}} = \{t + i\eta,\ 0 \leq t \leq T,\ \eta \in \mathbb{R}\}$.

Remarque : Notant que d'aprés le lemme 2·3·1 $e^{i\eta f(A)} \upsilon_n(t) \in \mathcal{D}(f(A))$ et $e^{i\eta A} u_n(t) \in \mathcal{D}(A)$ et on a :

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}\phi_n(\zeta) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_n(\zeta)}{\partial t} + i\frac{\partial \phi_n(\zeta)}{\partial \eta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left[u_n(\zeta) - \upsilon_n(\zeta)\right] + i\frac{\partial}{\partial \eta}\left[u_n(\zeta) - \upsilon_n(\zeta)\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{i\eta A} u_n(t) - e^{i\eta f(A)}(\upsilon)_n(t)\right] + i\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{i\eta A} u_n(t) - e^{i\eta f(A)} \upsilon_n(t)\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[e^{i\eta A}\frac{du_n(t)}{dt} - e^{i\eta f(A)}\frac{d\upsilon_n(t)}{dt}\right] + i\left[iAe^{i\eta A} u_n(t) - if(A)\, e^{i\eta f(A)} \upsilon_n(t)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{e^{i\eta A}\left[Au_n(t) + h_n(t, u(t)) - e^{i\eta f(A)}\left[f(A)\,\upsilon_n(t) + h_n(t, \upsilon(t))\right]\right]\right. \\
&\quad \left. + \left(-Ae^{i\eta A} u_n(t) + f(A)\, e^{i\eta f(A)} \upsilon_n(t)\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{e^{i\eta A} h_n(t, u(t)) - e^{i\eta f(A)} h_n(t, \upsilon\ \ (t))\right\}. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Comme cette quantité n'est pas identiquement nulle (à cause du terme non-linéaire), la fonction $\phi_n(\zeta)$ n'est pas analytique, donc on ne pourra pas appliquer le théorème d'Hadamard directement à ϕ_n. Pour cela et en se basant sur le lemme 1.5.2 (S.Agmon & L. Nirenberg), on introduit la fonction suivante :

Définition 3.3.3 *On définit*

$$\omega_n(\zeta) = e^{\zeta^2}\phi_n(\zeta) - \Phi_n(\zeta),$$

où

$$\Phi_n(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{S}} e^{\gamma^2} \overline{\partial} \phi_n(\gamma) \left(\frac{1}{\gamma - \zeta} + \frac{1}{\overline{\gamma} + \zeta + 1} \right) dxdy,$$

et $\zeta = t + i\eta$, $\mathbb{S} = \{\gamma = x + iy,\ 0 < x < T,\ y \in \mathbb{R}\}$.

Proposition 3.3.1 *Soient les conditions du théorème* 3.3.2 *satisfaites. Alors*

(i) $\phi_n(\gamma)$ *est continue sur* $\overline{\mathbb{S}}$;

(ii) $\overline{\partial}\phi_n(\gamma)$ *est bornée et est continue sur* $\mathbb{S} = \{\gamma = x + iy,\ 0 < x < T,\ y \in \mathbb{R}\}$;

De plus pour tout $\gamma \in \mathbb{S}$, *on a :*

$$\left\| \overline{\partial}\phi_n(\gamma) \right\| \le \beta \left\{ \frac{1}{2} \left[|y| .N + K_2 \right] \right\}, \tag{3.14}$$

où K_2 *et* N *sont des constantes positives.*

Etablissant à présent le lemme suivant qui nous est nécessaire pour la démonstration de la proposition 3.3.1.

Lemme 3.3.3 *Soient les conditions du théorème* 3.3.2 *satisfaites. On a pour tout* $0 \le t < T$ *:*

$$\|u(t) - \upsilon(t)\| \le \left\{ \left\| e^{tA}\chi - e^{tf(A)}\chi \right\| + \left(Te^{\gamma T} \right) (\beta T N) \right\} e^{L_1 T}. \tag{3.15}$$

Preuve. On a :

$$\|u_n(t) - \upsilon_n(t)\| = \left\| e^{tA}\chi_n + \int\limits_0^t e^{(t-s)A} h_n(s, u(s))\, ds - e^{tf(A)}\chi_n - \int\limits_0^t e^{(t-s)f(A)} h_n(s, \upsilon(s))\, ds \right\|$$

$$\le \left\| \int\limits_0^t \left[e^{(t-s)A} h_n(s, u(s)) - e^{(t-s)f(A)} h_n(s, \upsilon(s)) \right] ds \right\|$$

$$+ \left\| e^{tA}\chi_n - e^{tf(A)}\chi_n \right\|. \tag{3.16}$$

Estimant le premier terme du membre droit de l'inégalité (3.16), on a :

$$\left\| \int\limits_0^t \left[e^{(t-s)A} h_n(s, u(s)) - e^{(t-s)f(A)} h_n(s, \upsilon(s)) \right] ds \right\|$$

$$= \left\| \int\limits_0^t \left[e^{(t-s)A} h_n(s, u(s)) - e^{(t-s)f(A)} h_n(s, u(s)) + e^{(t-s)f(A)} h_n(s, u(s)) - e^{(t-s)f(A)} h_n(s, \upsilon(s)) \right] ds \right\|$$

$$= \left\| \int_0^t \left[\left(e^{(t-s)A} - e^{(t-s)f(A)} \right) h_n(s,u(s)) + \left(h_n(s,u(s)) - h_n(s,\upsilon(s)) \right) e^{(t-s)f(A)} \right] ds \right\|$$

$$\leq \int_0^t \left\| \left(e^{(t-s)A} - e^{(t-s)f(A)} \right) h_n(s,u(s)) \right\| ds$$

$$+ \int_0^t \left\| \left(h_n(s,u(s)) - h_n(s,\upsilon(s)) \right) e^{(t-s)f(A)} \right\| ds. \tag{3.17}$$

Majorant le terme :

$$\int_0^t \left\| \left(e^{(t-s)A} - e^{(t-s)f(A)} \right) h_n(s,u(s)) \right\| ds.$$

on a :

$$\begin{aligned} \int_0^t \left\| \left(e^{(t-s)A} - e^{(t-s)f(A)} \right) h_n(s,u(s)) \right\| ds &= \int_0^t \left\| \left(e^{(t-s)A} - e^{(t-s)A} e^{(t-s)g(A)} \right) h_n(s,u(s)) \right\| ds \\ &= \int_0^t \left\| \left(I - e^{(t-s)g(A)} \right) e^{(t-s)A} h_n(s,u(s)) \right\| ds. \end{aligned} \tag{3.18}$$

D'aprés la condition $(\mathscr{C}_1)$ ainsi que les propriétés 2 et 3 du lemme 2.3.1, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(g(A))$, on a :

$$\begin{aligned} \left\| \left(I - e^{(t-s)g(A)} \right) \psi \right\| &= \left\| - \int_0^{t-s} e^{\omega g(A)} g(A) \psi d\omega \right\| \\ &\leq \int_0^{t-s} \left\| e^{\omega g(A)} g(A) \psi \right\| d\omega \\ &\leq \int_0^{t-s} \left\| e^{\omega g(A)} \right\| \left\| g(A) \psi \right\| d\omega \\ &\leq |t-s| \, e^{\gamma(t-s)} \left\| g(A) \psi \right\|. \end{aligned}$$

À partir de la condition $(\mathscr{A}_2)$, on obtient :

$$\left\| \left(I - e^{(t-s)g(A)} \right) \psi \right\| \leq |t-s| \, e^{\gamma(t-s)} \beta \left\| A^{1+\delta} \psi \right\|, \text{ pour tout } \psi \in \mathcal{D}\left(A^{1+\delta} \right). \tag{3.19}$$

En particulier, pour $\psi = e^{(t-s)A} h_n(s, u(s)) \in \mathcal{D}\left(A^{1+\delta}\right) \cap \mathcal{D}(g(A))$, en considérant l'estimation $(3 \cdot 18)$ et la condition $(\mathscr{C}4)$ de (3.17), on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left\| \left(e^{(t-s)A} - e^{(t-s)f(A)}\right) h_n(s, u(s)) \right\| ds &\leq \int_0^t |t-s|\, e^{\gamma(t-s)} \beta \left\| A^{1+\delta} e^{(t-s)A} h_n(s, u(s)) \right\| ds \\
&\leq \int_0^t T e^{\gamma T} \beta \left\| A^{1+\delta} e^{(t-s)A} h_n(s, u(s)) \right\| ds \\
&\leq \int_0^t T e^{\gamma T} \beta \left\| A^{1+\delta} e^{(T)A} h(s, u(s)) \right\| ds \\
&\leq \int_0^t T e^{\gamma T} \beta N ds \\
&\leq T^2 e^{\gamma T} \beta N. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Maintenant, revenant au terme :

$$\int_0^t \left\| \left(h_n(s, u(s)) - h_n(s, \upsilon(s))\right) e^{(t-s)f(A)} \right\| ds.$$

D'aprés la propriété $(\mathscr{P}_2)$, on a : $e^{(t-s)f(A)} \leq e^{\omega(t-s)} \leq k'$. D'oú

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left\| \left(h_n(s, u(s)) - h_n(s, \upsilon(s))\right) e^{(t-s)f(A)} \right\| ds &\leq \int_0^t \left\| h_n(s, u(s)) - h_n(s, \upsilon(s)) \right\| \left\| e^{(t-s)f(A)} \right\| ds \\
&\leq \int_0^t k \left\| u(s) - \upsilon(s) \right\| \left\| e^{(t-s)f(A)} \right\| ds \\
&\leq k.k' \int_0^{t'} \left\| u(s) - \upsilon(s) \right\| ds \\
&\leq L_1 \int_0^{t'} \left\| u(s) - \upsilon(s) \right\| ds, \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

où $L_1 = kk\acute{}$.

En combinant (3.20) et (3.21), (3.16) devient :

$$\left\| u_n(t) - \upsilon_n(t) \right\| \leq \left\| e^{tA} \chi_n - e^{tf(A)} \chi_n \right\| + T^2 e^{\gamma T} \beta.N + L_1 \int_0^{t'} \left\| u(s) - \upsilon(s) \right\| ds. \qquad (3.22)$$

Par passage à la limite dans (3.22) quand $n \to \infty$, on obtient :

$$\|u(t) - \upsilon(t)\| \leq \left\|e^{tA}\chi - e^{tf(A)}\chi\right\| + T^2 e^{\gamma T}\beta.N + L_1 \int_0^{t'} \|u(s) - \upsilon(s)\| \, ds. \tag{3.23}$$

Appliquant le lemme de Gronwall à $(3 \cdot 23)$, il résulte

$$\|u(t) - \upsilon(t)\| \leq \left\{\left\|e^{tA}\chi - e^{tf(A)}\chi\right\| + T^2 e^{\gamma T}\beta.N\right\} e^{L_1 T}.$$

Pour tout $0 \leq t < T$ $\square$

Preuve de la proposition 3.3.1.

(**i**) la démonstration est analogue à celle du lemme 2.3.4.

(**ii**)A partir de (3.13), on a :

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}\phi_n(\gamma) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_n(\gamma)}{\partial x} + i\frac{\partial\phi_n(\gamma)}{\partial y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left[u_n(\gamma) - \upsilon_n(\gamma)\right] + i\frac{\partial}{\partial y}\left[u_n(\gamma) - \upsilon_n(\gamma)\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{iyA}u_n(x) - e^{iyf(A)}(\upsilon)_n(t)\right] + i\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{iyA}u_n(x) - e^{iyf(A)}\upsilon_n(x)\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[e^{iyA}\frac{du_n(x)}{dx} - e^{iyf(A)}\frac{d\upsilon_n(x)}{dx}\right] + i\left[iAe^{iyA}u_n(x) - if(A)e^{iyf(A)}\upsilon_n(x)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{e^{iyA}\left[Au_n(x) + h_n(x, u(x)) - e^{iyf(A)}\left[f(A)\upsilon_n(x) + h_n(x, \upsilon(x))\right]\right]\right. \\
&\quad \left. + \left(-Ae^{iyA}u_n(x) + f(A)e^{iyf(A)}\upsilon_n(x)\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{e^{iyA}h_n(x, u(x)) - e^{iyf(A)}h_n(x, (\upsilon)(x))\right\}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\left\|\overline{\partial}\phi_n(\gamma)\right\| &= \left\|\frac{1}{2}\left\{e^{iyA}h_n(x, u(x)) - e^{iyf(A)}h_n(x, \upsilon(x))\right\}\right\| \\
&\leq \frac{1}{2}\left\{\left\|e^{iyA}\right\|\|h_n(x, u(x))\| + \left\|e^{iyf(A)}\right\|\|h_n(x, \upsilon(x))\|\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\|h_n(x, u(x))\| + \|h_n(x, \upsilon(x))\|\right\}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

D'aprés la condition $(\mathscr{C}_4)$, on a :

$$\|h_n(x, u(x))\| \leq \left\|A^{1+\delta}e^{TA}h(x, u(x))\right\| \leq N,$$

d'où, on en déduit que $\overline{\partial}\phi_n(\gamma)$ est bornée sur $\mathbb{S}$.

A partir de l'égalité $(3\cdot 24)$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|\overline{\partial}\phi_n(\gamma)\right\| &= \left\|\frac{1}{2}\left[e^{iyA}h_n(x,u(x))-e^{iyf(A)}h_n(x,\upsilon(x))\right]\right\| \\
&= \frac{1}{2}\left\|e^{iyA}h_n(x,u(x))-e^{iyf(A)}h_n(x,u(x))+e^{iyf(A)}h_n(x,u(x))-e^{iyf(A)}h_n(x,\upsilon(x))\right\| \\
&= \frac{1}{2}\left\|\left[e^{iyA}-e^{iyf(A)}\right]h_n(x,u(x))+e^{iyf(A)}\left[h_n(x,u(x))-h_n(x,\upsilon(x))\right]\right\| \\
&\leq \frac{1}{2}\left\{\left\|\left[e^{iyA}-e^{iyf(A)}\right]h_n(x,u(x))\right\|+\left\|e^{iyf(A)}\left[h_n(x,u(x))-h_n(x,\upsilon(x))\right]\right\|\right\}. \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Estimant le membre droit de l'inégalité $(3\cdot 26)$.

$$\begin{aligned}
\left\|\left[e^{iyA}-e^{iyf(A)}\right]h_n(x,u(x))\right\| &= \left\|\left[e^{iyA}-e^{iyA}e^{iyg(A)}\right]h_n(x,u(x))\right\| \\
&= \left\|e^{iyA}\left[I-e^{iyg(A)}\right]h_n(x,u(x))\right\| \\
&\leq \left\|e^{iyA}\right\|\left\|\left(I-e^{iyg(A)}\right)h_n(x,u(x))\right\|. \quad (3.27)
\end{aligned}$$

On a, $h_n(x,u(x))\in\mathcal{D}(A)\cap\mathcal{D}(f(A))\subset\mathcal{D}(g(A))$ et $h_n(x,u(x))\in\mathcal{D}\left(A^{1+\delta}\right)$.

Utilisant :

$$\left\|e^{iyf(A)}\right\|=1 \text{ et } \left(I-e^{iyg(A)}\right)\psi=-\int_0^y e^{i\omega g(A)}g(A)\psi d\omega \text{ , pour } \psi\in\mathcal{D}(g(A)),$$

ainsi que la condition $(\mathscr{A}_2)$, alors (3.27) devient :

$$\left\|\left[e^{iyA}-e^{iyf(A)}\right]h_n(x,u(x))\right\|\leq\beta|y|\left\|A^{1+\delta}h_n(x,u(x))\right\|. \quad (3.28)$$

Majorant maintenant le second terme du membre droit du $(3\cdot 26)$. Utilisant $(3\cdot 2)$ et (3.15), on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\|e^{iyf(A)}\left[h_n(x,u(x))-h_n(x,\upsilon(x))\right]\right\| &\leq \left\|e^{iyf(A)}\right\|\left\|h_n(x,u(x))-h_n(x,\upsilon(x))\right\| \\
&\leq \left\|h_n(x,u(x))-h_n(x,\upsilon(x))\right\| \\
&\leq k\left\|u(x)-\upsilon(x)\right\| \\
&\leq k\left\{\left\|e^{xA}\chi-e^{xf(A)}\chi\right\|+T^2e^{\gamma T}\beta N\right\}e^{L_1T} \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Estimant le premier terme de l'égalité (3.29) , on a :

$$\begin{aligned}\left\|e^{xA}\chi - e^{xf(A)}\chi\right\| = \left\|e^{xA}\chi - e^{xA}e^{xg(A)}\chi\right\| &= \left\|e^{xA}\left(I - e^{xg(A)}\right)\chi\right\| \\ &= \left\|-\int_0^x e^{\theta g(A)} g(A)\, e^{xA}\chi d\theta\right\| \\ &\leq \int_0^x \left\|e^{\theta g(A)} g(A)\, e^{xA}\chi\right\| d\theta \\ &\leq \beta x e^{\gamma x}\left\|A^{1+\delta}e^{xA}\chi\right\|. \qquad (3.30)\end{aligned}$$

En combinant $(3\cdot 29)$ et $(3\cdot 30)$, on obtient :

$$\left\|e^{iyf(A)}\left[h_n(x,u(x)) - h_n(x,\upsilon(x))\right]\right\| \leq k\left\{\beta x e^{\gamma x}\left\|A^{1+\delta}e^{xA}\chi\right\| + T^2 e^{\gamma T}\beta N\right\} e^{L_1 T}. \qquad (3.31)$$

Revenant maintenant à l'inégalité $(3\cdot 26)$. En utilisant $(3\cdot 28)$ et $(3\cdot 31)$ on a :

$$\begin{aligned}\left\|\overline{\partial}\phi_n(\gamma)\right\| &\leq \frac{1}{2}\left\{\beta\,|y|\left\|A^{1+\delta}h_n(x,u(x))\right\| + k\left(\beta x e^{\gamma x}\left\|A^{1+\delta}e^{xA}\chi\right\| + Te^{\gamma T}\beta.T.N\right)e^{L_1 T}\right\} \\ &= \beta\left\{\frac{1}{2}\left[|y|\left\|A^{1+\delta}h_n(x,u(x))\right\| + k\left(xe^{\gamma x}\left\|A^{1+\delta}e^{xA}\chi\right\| + Te^{\gamma T}.T.N\right)e^{L_1 T}\right]\right\} \\ &\leq \beta\left\{\frac{1}{2}\left[|y|\left\|A^{1+\delta}h_n(x,u(x))\right\| + kTe^{\gamma T}\left(\left\|A^{1+\delta}e^{xA}\chi\right\| + .T.N\right)e^{L_1 T}\right]\right\} \\ &\leq \beta\left\{\frac{1}{2}\left[|y|\left\|A^{1+\delta}h_n(x,u(x))\right\| + kTe^{\gamma T}\left(\left\|A^{1+\delta}e^{xA}\chi\right\| + .T.N\right)e^{L_1 T}\right]\right\}. (3.32)\end{aligned}$$

D'après les conditions $(\mathscr{C}_3)$ et $(\mathscr{C}4)$, on obtient :

$$\left\|A^{1+\delta}h_n(x,u(x))\right\| \leq \left\|A^{1+\delta}e^{TA}h(x,\psi(x))\right\| \leq N,$$

$$\left\|A^{1+\delta}e^{xA}\chi\right\| \leq L.$$

D'où pour $\gamma \in S$, on obtient :

$$\begin{aligned}\left\|\overline{\partial}\phi_n(\gamma)\right\| &\leq \beta\left\{\frac{1}{2}\left[|y|.N + kTe^{\gamma T}(L + .T.N)\,e^{L_1 T}\right]\right\} \\ &\leq \beta\left\{\frac{1}{2}\left[|y|.N + K_2\right]\right\},\end{aligned}$$

où $K_2 = kTe^{\gamma T}(L + TN)\,e^{L_1 T}$ et k est la constante de Lipschitz.

Concernant la continuité, comme $\{e^{iyA}\}_{y\in\mathbb{R}}$ et $\{e^{iyf(A)}\}_{y\in\mathbb{R}}$ sont des groupes fortement continus et h est continue de $[0,T]\times\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$, on déduit la continuité de la fonction $\overline{\partial}\phi_n(\gamma)$ sur $\mathbb{S}$. $\square$

Proposition 3.3.2 *Soient les conditions du théorème* 3.3.2 *satisfaites. Alors*

(i) *La fonction* $\Phi_n(\zeta)$ *est continue sur* $\overline{\mathbb{S}}$.

(ii) *De plus, on a l'estimation suivante :*

$$\|\Phi_n(\zeta)\| \leq R\int_0^T \left(1+\log\frac{1}{|x-t|}\right)\left(\|h_n(x,u(x))\|+\|h_n(x,\upsilon(x))\|\right)dx, \quad x\neq t, \tag{3.33}$$

où R *est une constante positive.*

Preuve.

(i) Comme $\Phi_n(\zeta)$ est absolument convergente, $e^{\gamma^2}\overline{\partial}\phi_n(\gamma)$ est continue sur $\overline{\mathbb{S}}$ et $F(\zeta,\gamma)=\left(\frac{1}{\gamma-\zeta}+\frac{1}{\overline{\gamma}+\zeta+1}\right), \ (\gamma\neq\zeta)$ est continue sur $\overline{\mathbb{S}}\times\overline{\mathbb{S}}$, on déduit que la continuité de $\Phi_n(\zeta)$ sur $\overline{\mathbb{S}}$.

(ii) On a :

$$\begin{aligned}\|\Phi_n(\zeta)\| &= \left\|-\frac{1}{\pi}\int_S e^{\gamma^2}\overline{\partial}\phi_n(\gamma)\left(\frac{1}{\gamma-\zeta}+\frac{1}{\overline{\gamma}+\zeta+1}\right)dxdy\right\| \\ &\leq \frac{1}{\pi}\int_S \left\|e^{\gamma^2}\overline{\partial}\phi_n(\gamma)\left(\frac{1}{\gamma-\zeta}+\frac{1}{\overline{\gamma}+\zeta+1}\right)\right\|dxdy \\ &\leq \frac{1}{\pi}\int_S \left\|e^{\gamma^2}\overline{\partial}\phi_n(\gamma)\right\|\left|\frac{1}{\gamma-\zeta}+\frac{1}{\overline{\gamma}+\zeta+1}\right|dxdy.\end{aligned}$$

D'aprés le lemme 1.6.1 et l'inégalité (3.25), on obtient pour $x\neq t$:

$$\begin{aligned}\|\Phi_n(\zeta)\| &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^T k_1\left(1+\log\frac{1}{|x-t|}\right)\left(\frac{1}{2}e^{T^2}\left\{\|h_n(x,u(x))\|+\|h_n(x,\upsilon(x))\|\right\}\right)dx \\ &= \frac{k_1}{2\pi}e^{T^2}\int_0^T\left(1+\log\frac{1}{|x-t|}\right)\left(\|h_n(x,u(x))\|+\|h_n(x,\upsilon(x))\|\right)dx \\ &= R\int_0^T\left(1+\log\frac{1}{|x-t|}\right)\left(\|h_n(x,u(x))\|+\|h_n(x,\upsilon(x))\|\right)dx, \quad x\neq t, \end{aligned} \tag{3.34}$$

où $R=\frac{k_1}{2\pi}e^{T^2}$. $\square$

Lemme 3.3.4 *Soient les conditions du théorème* 3.3.2 *satisfaites. Alors* $\omega_n(\zeta)$ *est analytique sur* $\mathbb{S}$ *et est continue et bornée sur* $\overline{\mathbb{S}}$.

Preuve.

$\omega_n(\zeta)$ est analytique. En effet :

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}\omega_n(\zeta) &= \overline{\partial}\left(e^{\zeta^2}\phi_n(\zeta) - \Phi_n(\zeta)\right) \\
&= \left(\overline{\partial}e^{\zeta^2}\right)\phi_n(\zeta) + e^{\zeta^2}\overline{\partial}\phi_n(\zeta) - \overline{\partial}\Phi_n(\zeta) \\
&= e^{\zeta^2}\overline{\partial}\phi_n(\zeta) - \overline{\partial}\Phi_n(\zeta) \\
&= e^{\zeta^2}\overline{\partial}\phi_n(\zeta) - e^{\zeta^2}\overline{\partial}\phi_n(\zeta) = 0.
\end{aligned}$$

Comme $e^{\zeta^2}\phi_n(\zeta)$ et $\Phi_n(\zeta)$ sont continues sur $\overline{\mathbb{S}}$, il en est de même pour $\omega_n(\zeta)$.

Montrant maintenant que $\omega_n(\zeta)$ est bornée sur la bande fermée $0 \leq \mathrm{Re}\zeta \leq T$,

On a :

$$\|\omega_n(\zeta)\| = \left\|e^{\zeta^2}\phi_n(\zeta) - \Phi_n(\zeta)\right\| \leq \left\|e^{\zeta^2}\phi_n(\zeta)\right\| + \|\Phi_n(\zeta)\|. \tag{3.35}$$

Majorant $\left\|e^{\zeta^2}\phi_n(\zeta)\right\|$ aux deux extrémités de la bande $\mathbb{S}$.

Pour $t = 0$, $\zeta = i\eta$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|e^{\zeta^2}\phi_n(\zeta)\right\| &= \left\|e^{\zeta^2}(u_n(\zeta) - \upsilon_n(\zeta))\right\| \\
&\leq \| e^{i\eta A}u_n(0) \| + \| e^{i\eta f(A)}\upsilon_n(0) \| \\
&\leq \left\|e^{i\eta A}\right\| \|\chi_n\| + \left\|e^{i\eta f(A)}\right\| \|\chi_n\| \\
&\leq 2\|\chi_n\|.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Pour $t = T$, $\zeta = T + i\eta$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|e^{\zeta^2}\phi_n(\zeta)\right\| &= \left\|e^{\zeta^2}(u_n(\zeta) - \upsilon_n(\zeta))\right\| \\
&= \left\|e^{(T+i\eta)^2}\left(e^{i\eta A}u_n(T) - e^{i\eta f(A)}\upsilon_n(T)\right)\right\| \\
&\leq e^{T^2-\eta^2}\left(\left\|e^{i\eta A}u_n(T)\right\| + \left\|e^{i\eta f(A)}\upsilon_n(T)\right\|\right) \\
&\leq e^{T^2-\eta^2}\left(\left\|e^{i\eta A}\right\| \|u_n(T)\| + \left\|e^{i\eta f(A)}\right\| \|\upsilon_n(T)\|\right) \\
&\leq e^{T^2}(\|u_n(T)\| + \|\upsilon_n(T)\|).
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Sur les extrémités de $\mathbb{S}$, on obtient alors :

$$\left\| e^{\zeta^2}\phi_n(\zeta) \right\| \leq e^{T^2}\left(\|u_n(T)\| + \|\upsilon_n(T)\|\right) + 2\|\chi_n\|. \tag{3.38}$$

Revenant à $(3 \cdot 35)$, d'aprés les estimations (3.38) et (3.33) on obtient :

$$\begin{aligned} \|\omega_n(\zeta)\| &\leq \left\| e^{\zeta^2}\phi_n(\zeta) \right\| + \|\Phi_n(\zeta)\| \\ &\leq e^{T^2}\left(\|u_n(T)\| + \|\upsilon_n(T)\|\right) + 2\|\chi_n\| + \\ &\max_{0\leq t\leq T} k_1 \int_0^T \left(1 + \log\frac{1}{|x-t|}\right)\left(\|h_n(x,u(x))\| + \|h_n(x,\upsilon(x))\|\right)dx, \end{aligned} \tag{3.39}$$

pour tout $t \neq x$.

Alors cela nous montre que $\omega_n(\zeta)$, est bornée sur $\overline{\mathbb{S}}$.

Comme $\omega_n(\zeta)$ est continue sur $\overline{\mathbb{S}}$ et holomorphe sur $\mathbb{S}$, alors d'aprés le principe du maximum l'inégalité $(3 \cdot 39)$ est satisfaite pour tout $\zeta \in \overline{\mathbb{S}}$. $\square$

Démonstration du théorème 3·3·2

D'aprés le lemme 3.3.4, $(\omega_n(\zeta), \tau)$ est continue et bornée sur $\overline{\mathbb{S}}$ et est analytique sur $\mathbb{S}$, en appliquant le théorème d'Hadamard, on obtient :

$$|(\omega_n(\zeta), \tau)| \leq M(0)^{1-\frac{t}{T}} M(T)^{\frac{t}{T}}, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{3.40}$$

où

$$M(t) = \max_{\substack{\zeta = t + i\eta \\ \eta \in \mathbb{R}}} |(\omega_n(\zeta), \tau)|.$$

Majorant maintenant $(\omega_n(i\eta), \tau)$ et $(\omega_n(T + i\eta), \tau)$.

Pour $t = 0$, $\zeta = i\eta$, On a :

$$(\omega_n(i\eta), \tau) = \left(e^{(i\eta)^2}\phi_n(i\eta) - \Phi_n(i\eta), \tau\right).$$

Estimant $|(\omega_n(i\eta), \tau)|$, en utilisant (3.28) :

$$\begin{aligned}
|(\omega_n(i\eta), \tau)| &\leq \left\| e^{-\eta^2}\phi_n(i\eta) - \Phi_n(i\eta) \right\| \|\tau\| \\
&= \| \, e^{-\eta^2} \left[\left(e^{i\eta A} u_n(0) - e^{i\eta f(A)} \upsilon_n(0) \right) \right] + \\
&\quad \frac{1}{\pi} \int_S e^{\gamma^2} \overline{\partial} \phi_n(\gamma) \left(\frac{1}{\gamma - i\eta} + \frac{1}{\overline{\gamma} + i\eta + 1} \right) dxdy \, \| \, \|\tau\| \\
&\leq (e^{-\eta^2} \left\| \left(e^{i\eta A}\chi_n - e^{i\eta f(A)}\chi_n \right) \right\| + \\
&\quad \left\| \frac{1}{\pi} \int_S e^{\gamma^2} \overline{\partial} \phi_n(\gamma) \left(\frac{1}{\gamma - i\eta} + \frac{1}{\overline{\gamma} + i\eta + 1} \right) dxdy \right\| \|\tau\| \\
&\leq [\, e^{-\eta^2} \beta |\eta| \left\| A^{1+\delta}\chi_n \right\| + \\
&\quad \frac{1}{\pi} \int_S \left\| e^{\gamma^2} \overline{\partial} \phi_n(\gamma) \left(\frac{1}{\gamma - i\eta} + \frac{1}{\overline{\gamma} + i\eta + 1} \right) \right\| dxdy \,] \, \|\tau\| \\
&\leq [\, e^{-\eta^2} \beta |\eta| \left\| A^{1+\delta}\chi_n \right\| + \\
&\quad \frac{1}{\pi} \int_S \left| e^{\gamma^2} \right| \left\| \overline{\partial} \phi_n(\gamma) \right\| \left| \left(\frac{1}{\gamma - i\eta} + \frac{1}{\overline{\gamma} + i\eta + 1} \right) \right| dxdy \,] \, \|\tau\| . \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

De (3.14) on obtient :

$$|(\omega_n(i\eta), \tau)| \leq \left[e^{-\eta^2} \beta |\eta| \left\| A^{1+\delta}\chi_n \right\| + \frac{1}{\pi} \int_S e^{x^2 - y^2} \beta \left[\frac{1}{2} [|y| .N + K_2] \right] \left| \frac{1}{\gamma - i\eta} + \frac{1}{\overline{\gamma} + i\eta + 1} \right| dxdy \right] \|\tau\| .$$

À partir du lemme 1·6·1 on obtient :

$$\begin{aligned}
|(\omega_n(i\eta), \tau)| &\leq \left[e^{-\eta^2} \beta |\eta| \left\| A^{1+\delta}\chi_n \right\| + M_2 \beta \int_0^T \left(1 + \log \frac{1}{|x|} \right) dx \right] \|\tau\| \\
&\leq \beta \left[e^{-\eta^2} |\eta| \left\| A^{1+\delta}\chi_n \right\| + M_2 \int_0^T \left(1 + \log \frac{1}{|x|} \right) dx \right] \|\tau\| , \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

où $M_2 = \frac{e^{T^2}}{2\pi}(N + 2K_2)k_1$.

D'aprés la condition $(\mathscr{C}_3)$, on a :

$$\left\| A^{1+\delta}\chi_n \right\| \leq \left\| A^{1+\delta} e^{TA} \chi \right\| \leq L.$$

D'où l'inégalité $(3 \cdot 42)$ devient :

$$|(\omega_n(i\eta), \tau)| \leq \beta \left[e^{-\eta^2} |\eta| L + M_2 \int_0^T \left(1 + \log \frac{1}{|x|} \right) dx \right] \|\tau\| .$$

On a alors :

$$\begin{aligned} M(0) &\leq \beta\left(L+M_2\int_0^T\left(1+\log\frac{1}{|x|}\right)dx\right)\|\tau\| \\ &\leq \beta C_1\|\tau\|, \end{aligned} \tag{3.43}$$

où C_1 est une constante positive independante de β.

D'une manière analogue majorant $(\omega_n(T+i\eta),\tau)$.

On a :

$$\begin{aligned} |(\omega_n(T+i\eta),\tau)| &= \left|\left(e^{(T+i\eta)^2}\phi_n(T+i\eta)-\Phi_n(T+i\eta),\tau\right)\right| \\ &\leq \left\|e^{T^2-\eta^2+i2T\eta}\phi_n(T+i\eta)-\Phi_n(T+i\eta)\right\|\|\tau\| \\ &\leq \left[\left\|e^{T^2-\eta^2+i2T\eta}\left(e^{i\eta A}u_n(T)-e^{i\eta f(A)}\upsilon_n(T)\right)\right\|+\|\Phi_n(T+i\eta)\|\right]\|\tau\| \\ &\leq \left[e^{T^2-\eta^2}(\|u_n(T)\|+\|\upsilon_n(T)\|)+\|\Phi_n(T+i\eta)\|\right]\|\tau\| \\ &\quad \left\|-\frac{1}{\pi}\int_S e^{\gamma^2}\overline{\partial}\phi_n(\gamma)\left(\frac{1}{\gamma-T-i\eta}+\frac{1}{\overline{\gamma}+T+i\eta+1}\right)dxdy\right\|]\,\|\tau\| \\ &\leq [\,e^{T^2-\eta^2}(\|u_n(T)\|+\|\upsilon_n(T)\|)+ \\ &\quad \frac{1}{\pi}\int_S\left\|e^{\gamma^2}\overline{\partial}\phi_n(\gamma)\left(\frac{1}{\gamma-T-i\eta}+\frac{1}{\overline{\gamma}+T+i\eta+1}\right)\right\|dxdy\,]\,\|\tau\| \\ &\leq [\,e^{T^2-\eta^2}(\|u_n(T)\|+\|\upsilon_n(T)\|)+ \\ &\quad \frac{1}{\pi}\int_S\left|e^{\gamma^2}\right|\left\|\overline{\partial}\phi_n(\gamma)\right\|\left|\frac{1}{\gamma-T-i\eta}+\frac{1}{\overline{\gamma}+T+i\eta+1}\right|dxdy\,]\,\|\tau\| \end{aligned} \tag{3.44}$$

Àpartir du lemme 1·6·1 et les inégalités (3.25) et $(3\cdot 44)$, on a :

$$\begin{aligned} |(\omega_n(T+i\eta),\tau)| &\leq [\,e^{T^2-\eta^2}(\|u_n(T)\|+\|\upsilon_n(T)\|)+ \\ &\quad \frac{k_1e^{T^2}}{2\pi}\int_0^T(\|h_n(x,u(x))\|+\|h_n(x,\upsilon(x))\|)\left(1+\log\frac{1}{|x-T|}\right)dx\,]\,\|\tau\| \\ &\leq [e^{T^2-\eta^2}(\|u_n(T)\|+\|\upsilon_n(T)\|)+ \\ &\quad \frac{k_1e^{T^2}}{2\pi}2N\int_0^T(1+\log\frac{1}{\|x-T\|})dx].\|\tau\| \\ &\leq [e^{T^2}e^{-\eta^2}(\|u_n(T)\|+\|\upsilon_n(T)\|)+R_1]\|\tau\|, \end{aligned} \tag{3.45}$$

où

$$R_1 = 2RN \int_0^T \left(1 + \log \frac{1}{|x - T|}\right) dx, \quad x \neq T.$$

Pour $t = T$ on a :

$$\upsilon(T) = e^{Tf(A)}\chi + \int_0^T e^{(T-s)f(A)} h_n(s, \upsilon(s))\, ds,$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|\upsilon(T)\| &= \left\| e^{Tf(A)}\chi + \int_0^t e^{(T-s)f(A)} h_n(s, \upsilon(s))\, ds \right\| \\
&\leq \left\| e^{Tf(A)}\chi \right\| + \left\| \int_0^T e^{(T-s)f(A)} h_n(s, \upsilon(s))\, ds \right\| \\
&\leq \left\| e^{Tf(A)}\chi \right\| + \int_0^t \left\| e^{(T-s)f(A)} h_n(s, \upsilon(s)) \right\| ds \\
&= \left\| e^{TA} e^{Tg(A)}\chi \right\| + \int_0^T \left\| e^{(T-s)A} e^{(T-s)g(A)} h_n(s, \upsilon(s)) \right\| ds \\
&\leq \left\| e^{TA}\chi \right\| \left\| e^{Tg(A)} \right\| + \int_0^T \left\| e^{(T-s)g(A)} \right\| \left\| e^{(T-s)A} h_n(s, \upsilon(s)) \right\| ds.
\end{aligned}$$

Grâce aux conditions $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_3)$ et $(\mathscr{C}_4)$ on a :

$$\|\upsilon(T)\| \leq Le^{T\gamma} + \int_0^T e^{T\gamma}.N ds = Le^{T\gamma} + e^{T\gamma}NT, \tag{3.46}$$

Utilisant $(3 \cdot 46)$ et la condition $(\mathscr{C}_2)$ dans $(3 \cdot 45)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
|(\omega_n(T + i\eta), \tau)| &\leq \left[e^{T^2 - \eta^2} \left(M_1 + Le^{T\gamma} + TNe^{T\gamma} \right) + R_1 \right] \|\tau\| \\
&\leq M \|\tau\|,
\end{aligned}$$

où M est une constante positive.

Finalement, on trouve

$$M(T) \leq M \|\tau\|. \tag{3.47}$$

En tenant compte de $(3 \cdot 40)$, $(3 \cdot 43)$ et $(3 \cdot 47)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
|(\omega_n(t), \tau)| &\leq (\beta C_1 \|\tau\|)^{1-\frac{t}{T}} (M \|\tau\|)^{\frac{t}{T}} \\
&= \beta^{1-\frac{t}{T}} C_1^{1-\frac{t}{T}} M^{\frac{t}{T}} \|\tau\| \\
&\leq C_2 \beta^{1-\frac{t}{T}} M^{\frac{t}{T}} \|\tau\|,
\end{aligned}$$

où C_2 est une constante positive.

Prenant le supremum sur $h \in \mathcal{H}$, avec $h \leq 1$, on obtient :

$$|(\omega_n(t), \tau)| \leq C_2 \beta^{1-\frac{t}{T}} M^{\frac{t}{T}}, 0 \leq t < T.$$

En utilisant des techniques analogues à celles utilisées pour avoir (3.42), on peut établir l'estimation suivante :

$$\|\Phi_n(t)\| \leq \beta M_2 \int_0^T \left(1 + \log \frac{1}{|x-t|}\right) dx, x \neq t.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\left\| e^{\zeta^2} \phi_n(t) \right\| &= \|\omega_n(t) + \Phi_n(t)\| \\
&\leq \|\omega_n(t)\| + \|\Phi_n(t)\| \\
&\leq C_2 \beta^{1-\frac{t}{T}} M^{\frac{t}{T}} + \beta M_2 \int_0^T \left(1 + \log \frac{1}{|x-t|}\right) dx \\
&= \beta^{1-\frac{t}{T}} \left(C_2 M^{\frac{t}{T}} + \beta^{\frac{t}{T}} M_2 \int_0^T \left(1 + \log \frac{1}{|x-t|}\right) dx \right) \\
&\leq \beta^{1-\frac{t}{T}} M^{\frac{t}{T}} \left(C_2 + M^{-\frac{t}{T}} M_2 \int_0^T \left(1 + \log \frac{1}{|x-t|}\right) dx \right) \\
&\leq \beta^{1-\frac{t}{T}} M^{\frac{t}{T}} C_3, \qquad (3.48)
\end{aligned}$$

où C_3 est une constante positive.

On alors :

$$\|\phi_n(t)\| \leq \beta^{1-\frac{t}{T}} M^{\frac{t}{T}} C. \qquad (3.49)$$

D'où

$$\|u_n(t) - \upsilon_n(t)\| \leq \beta^{1-\frac{t}{T}} M^{\frac{t}{T}} C, \quad 0 \leq t < T, \tag{3.50}$$

C et M sont des constantes positives.

Comme le membre droit de l'égalité (3.50) est independant de n, par passage à la limite, on obtient :

$$\|u(t) - \upsilon(t)\| \leq \beta^{1-\frac{t}{T}} M^{\frac{t}{T}} C.$$

Pour $0 \leq t < T$ $\square$

Application

Comme application de cette méthode, on se propose la perturbation de Yosida. Soit l'opérateur $f_\alpha : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ défini par :

$$f_\alpha(\lambda) = \lambda(1+\alpha\lambda)^{-1}, \quad 0<\alpha<1.$$

Donc le problème perturbé s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t v_\alpha = A(I+\alpha A)^{-1} v_\alpha + h(t, v_\alpha(t)), & 0<t<T \\ v_\alpha(0) = \chi, & \end{cases} \qquad (\mathscr{P}_\alpha)$$

Condition $(\mathscr{A})$

• La fonction f_α est bornée. En effet :

$$\begin{aligned} |f_\alpha(\lambda)| &= \left|\lambda(1+\alpha\lambda)^{-1}\right| \\ &= \frac{\lambda}{1+\alpha\lambda} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\lambda}+\alpha} \\ &\leq \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Donc il suffit de prendre $\omega = \frac{1}{\alpha}$

•D'autre part :

$$\begin{aligned} -A + f_\alpha(A) &= -A + A(I+\alpha A)^{-1} \\ &= A\left(-I + (I+\alpha A)^{-1}\right) \\ &= A\left(-(I+\alpha A)(I+\alpha A)^{-1} + (I+\alpha A)^{-1}\right) \\ &= A(I+\alpha A)^{-1}(-I-\alpha A+I) \\ &= -\alpha A^2 (I+\alpha A)^{-1}, \end{aligned}$$

d'où, on a :

$$\|(-A+f_\alpha(A))\,u\| \le \alpha \left\|A^2u\right\|, \forall u \in \mathcal{D}(A^2).$$

De plus, $\mathcal{D}(A^2) \subset \mathcal{D}(f_\alpha(A)) = \mathcal{H}$, donc on prend $\delta = 1,\ \ et\, \beta = \alpha$.

D'après ce qui précede, on conclut que l'opérateur $f_\alpha(A)$ vérifie la condition $(\mathscr{A})$.

L'opérateur $g_\alpha(A)$ vérifie :

$$(g_\alpha(A)\psi,\psi) \le 0, \text{ pour tout } \quad \psi \in \mathcal{D}(g_\alpha(A)) = \mathcal{D}(A).$$

D'où, on peut prendre $\gamma \le 0$.

Pour les semi-groupes engendrés par $f_\alpha(A)$ et $g_\alpha(A)$, on a les les propriétés suivantes :

- $\mathscr{P}1_\alpha$: $f_\alpha(A)$ engendre un C_0-semigroupe $\left\{e^{tf_\alpha(A)}\right\}_{t\ge 0}$ vérifiant $\|e^{tf_\alpha(A)}\| \le e^{\frac{t}{\alpha}}$, pour tout $t \ge 0$;
- $\mathscr{P}2_\alpha$: l'opérateur $g_\alpha(A)$ engendre un semigroupe de contractions.

Théorème 1 Soit la condition $(\mathscr{H})$ satisfaite. Alors, le problème $(\mathscr{P}_\alpha)$ est bien posé et sa solution est donnée par :

$$\upsilon_\alpha(t) = e^{tf_\alpha(A)}\chi + \int_0^t e^{(t-s)f_\alpha(A)} h(s,\upsilon_\alpha(s))\,ds. \qquad (\mathscr{S})$$

Preuve : En vertu de la propriété $\mathscr{P}1_\alpha$ et du théorème 3.2.1, le problème $(\mathscr{P}_\alpha)$, admet une solution unique donnée par $(\mathscr{S})$.

Soit à présent $\omega_\alpha(t)$ une solution du problème $(\mathscr{P}_\alpha)$, qui correspend à la valeur initiale φ, on a :

$$\begin{aligned}\|\upsilon_\alpha(t)-\omega_\alpha(t)\| &\le \|e^{tf_\alpha(A)}\|\|\chi-\varphi\| + k\int_0^t \|e^{(t-s)f_\alpha(A)}\|\|\upsilon_\alpha(s)-\omega_\alpha(s)\|ds \\ &\le e^{\frac{T}{\alpha}}\|\chi-\varphi\| + ke^{\frac{T}{\alpha}}\int_0^t \|\upsilon_\alpha(s)-\omega_\alpha(s)\|ds.\end{aligned}$$

Appliquant le lemme de Gronwall, on obtient :

$$\|\upsilon_\alpha(t)-\omega_\alpha(t)\| \le e^{\frac{T}{\alpha}}e^{Tke^{\frac{T}{\alpha}}}\|\chi-\varphi\|. \quad \square$$

Théorème 2 Soient les conditions $(\mathscr{A})$, $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{H}_1)$ satifaites. Alors on a :

$$\|u(t)-\upsilon_\alpha(t)\| \le C\alpha^{1-\frac{t}{T}}M^{\frac{t}{T}}, \quad 0 \le t \le T,$$

où $u(t)$ est la solution formelle du problème (3.1).

Conclusion et perspectives

• Dans le présent travail, on a traité deux classes de problèmes mal posés vu l'interêt de ce type de problèmes dans beaucoup de domaines. Dans la première partie on a étudié le problème de Cauchy homogène. Quant à la deuxième partie, elle comporte l'étude d'un problème mal posé non-linéaire. L'approche utilisée dans cette analyse repose sur la méthode de quasi-réversibilité et plus précisément la régularisation de Miller qui a permis de construire une approximation du problème étudié et de réccupérer la stabilité.

Notant que malgré que les problèmes mal posés font l'objet d'une étude intensive, on ne trouve pas beaucoup de résultats concernant le cas non-linéaire ce qui nous incite à consacrer notre futur objectif à ce type de problèmes , en utilisant d'autres approches par exemple la régularisation avec des conditions non locales tel que le problème :

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = h(t, u(t)), & 0 < t < T \\ u\,(T) - \alpha\Gamma(u(0)) = \chi, & \end{cases}$$

Où encore en utilisant la méthode itérative

$$\begin{cases} \partial_t u_k + Au_k = h(t, u_k(t)), & 0 < t < T \\ u_k\,(0) = u_{k-1}(0) - \gamma(u_{k-1}(T)) - \chi), & \end{cases}$$

avec $u_0(t)$ est solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t u_0 + Au_0 = h(t, u_0(t)), & 0 < t < T \\ u_0(0) = \xi, & \end{cases}$$

ξ est un élément arbitraire de $\mathcal{H}$.

Et ça sera intéressant de faire une étude comparative entre les résultats établis par chaque méthode.

Bibliographie

[1] L.Adelson ,*Singular perturbation of an improperly posed cauchy problem*, SIAM J. Math. Anal. 5 (1974), 417-424.

[2] S.Agmon and L. Nirenberg, *Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space*, Comm. Pure appl. Math. 16 (1963), 121-151.

[3] S.Agmon,*Unicité et convexité dans les problèmes différentiels*, Sem. Math. Sup., Univ. Monreal press, Monreal, (1966).

[4] S.Agmon and L. Nirenberg,*Lower bounds and uniqueness theorems for solutions of differential equations in a Hilbert space*, Comm ; pure.Appl. Math. 20 (1967), 207-229.

[5] K. A.Ames, *On the comparaison of solutions of related properly and improperly posed Cauchy problems for first order operator equations*, SIAM J. Math. Anal. 13 (1982), 594-606.

[6] K. A.Ames, *Some remarks on ill-posed problems for partial differential equations*, Alabama J. Math. 15 (1991), 3-11.

[7] K. A.Ames , G. W.Clark and J.F.Oppenheimer, *A comparaison of regularizations for an ill-posed problem*, Math. Comp. 67 (1998), 1451-1471.

[8] K.A.Ames and R.J.Hughes, *Continuous dependence results for ill-posed problems, Semigroups of operators : Theory and applications*, Second international conference, Rio de janeiro, Brazil, September 10-14, 2001, optimization software, Inc. Publications, New York-Los Angeles, (2002), 1-8.

[9] K.A.Ames and R.J.Hughes, *Structural stability for ill-posed problems in Banach space*, semigroup 70 (2005), 127-145.

[10] J. Baumeister and A. Leitao, *On iterative methods for solving ill-posed problems modled by partial differential equations*, J. Inv. Ill-posed problems. Vol 9. (2001), 1-17

[11] N.Boccara, *Analyse fonctionnelle* Ellipses. (1984)

[12] N.Boussetilla and F.Rebbani, *A modified quasi-reversibility method for a class of ill-posed Cauchy problems* G.mathematic.J, vol 14 (2007) n 4, 627-642

[13] H.Brezis, *Analyse fonctionnelle, thorie et applications.*Masson, Paris.1983

[14] P.R.Bryan et A.Y.Martin, *Linear fonctional analysis*, Springer-varlag, second edition (2008).

[15] G.W. Clark and S. F. Oppenheimer, *quasi-reversibility methods for non well-posed problems*, Electron. J. Differential equations (1994), 1-9.

[16] R. Delaubenfels, *Entire solutions of the abstract Cauchy problem*, Semigroup Forum 42(1993), 44-61

[17] M. Denche and K. Bassila, *A modified quasi-boundary value method for ill-posed problems*, J. Math. Anal. Appl, Vol 301, (2005), 419-426.

[18] H.Denise, *Décomposition spectrale et opérateurs.* Presses universitaires de France, (1976).

[19] N.Dunford and J.Schwartz, *Linear operators*, part I and II , John Wiley and sons, Inc, New York, (1967).

[20] J.K Engel, *A short course on operator semigroups*,springer. (2006).

[21] H.O.Fattorini, *The Cauchy problem*, Addisson -Wesley, Reading, (1983).

[22] J. A.Goldstein, *Semigroups of linear operators and applications*, Oxford University press, New York, (1985).

[23] C.M. Hetrick and R.J.Hughes, *Continuous dependence results for inhomogeneous ill-posed problems in Banach space*, J.math.anal.appl. 331 (2007) 342-357.

[24] C.M.Hetrick and R.J.Hughes, *Continuous dependence on modeling for nonlinear ill-posed problems* J.math.anal.appl (2008).

[25] J. Hadamard, *Le probleme de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Hermann, (1932).

[26] E.Hille, *Functional analysis and semigroups*, AMS Colloquium publications Vol 31, AMS, New York (1948).

[27] F.John, *Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bounded*, Comm. Pure.Appl. Math. 13 (1960), 551-585.

[28] R.Kowar and O.Scherzer, *Convergence analysis of a landweber-Kaczmarz method for Solving nonlinear ill-posed problems*, Ill posed and inverse problems, (book series), 23(2002), 69-90

[29] V.A. Kozlov and V. G. Maz'ya, *On the iterative method for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations*, Liningrad Math. J. 1(1990), n5, 1207-1228.

[30] R. Lattes and J. Lions, *The method of quasi-reversibility, Applications to partial differential equations*, Americain Elsevier, New York (1969).

[31] K.Miller, *Stabilized quasi-reversibility and other nearly-best possible methods for non-well-posed problems*, "Simposuim on Non-Well-posed problems and Logarithmic convexity", 161-167, Springer Lecture Notes in Mathematics 316, Springer Berlin, (1973).

[32] K.Miller, *Logarithmic convexity results for holomorphic semigroups*, Pacific J. Math. 58 (1975), 549-551.

[33] I. V.Milnikova and A. I.Filinkov, *Abstract Cauchy problems : Three Approches*, Chapman and Hall-CRC Monographs and Surveys in pure and Applied Mathematics, 120, Chapman and Hall, Boca Raton, FL, (2001).

[34] A. Neubauer, *Tikhonov regularization for nonlinear ill posed problems, Optimal rates and finite dimensional approximation*. Inverse problems, 5(1989), 541-557.

[35] L.E.Payne, *Improperly posed problems in partial differential equations*,CBMS Regional Conference Series in Applied Mathematics, 22, Society of industrial and app.Math, Philadephia, (1975).

[36] L.E.Payne, *On stabilizing ill-posed problems against errors in geometry and modeling*, Inverse and Ill-Posed Problems, Academic Press, San Diego, (1987), 399-416.

[37] A.Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-varlag, New York. (1983).

[38] P.H. Quan and D.D. Trong, *A nonlinearly backward heat problem : uniqueness, regularization and error estimate*, Applicable analysis, Vol 85, Nos. 6-7, (2006), pp 641-657.

[39] M.Reed and B.Simon, textitMethods of modern mathematical physics, vol II ;Fourier analysis, self-adjointness, Academic press, New York, (1975).

[40] O. Scherzer, textitConvergence rates of iterated Tikhonov regularized solutions of nonlinear ill-posed problems. Numer. Math. (1993), 66-259.

[41] R.E.Showater, *The final value problem for evolution equation*, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974), 563-572

[42] R.E.Showater, *Cauchy problem for hyper-parabolic partial differential equation, in tends in the Théory and practice of Non-Linear Analysis*, Elsevier (1983).

[43] U. Tautenhahn, *Error estimates for regularized solutions of nonlinear ill-posed problems*, Inverse problems, 10(1994), 485-500

[44] A.Tikhonov and V.Arsnine, *Méthodes de résolution de problèmes mal posés.* traduction française, Edition Mir. (1976).

[45] D.D.Trong and N.H.Tuan, *Regularization and error estimate for nonhomogeneous backward heat problems*, Elect. J. Diff. Eqs, 2006, N 04, PP 1-10.

[46] D.D.Trong, P.H. quan, N.H.Tuan and T. V. Khanh, *A nonlinear case of the 1-D backward heat problem : Regularization and error estimate*, Zeitschrift analysis und ihre Anwendungen, Vol 26, Issue 2, (2007), pp 1-14.

[47] D.D.Trong and N.H.Tuan, *Stabilized quasi-reversibility method for a class of nonlinear ill-posed problems*, Elect. J. Diff. Eqs, 2008, N.84, 1-12.

[48] D.D.Trong and N.H.Tuan, *A nonhomogeneous backward heat problem : Regularization and error estimates*, Electron. J. Diff. Equ. Vol. 2008, N 33, 1-14.

[49] D.D.Trong, P.H. quan and N.H.Tuan, *A quasi-boundary value Method for regularizing nonlinear ill-posed problems*, Electronic, J of differential equations, vol 1(2009), N109, P 1-16.

[50] I.I.Vrabie, *C_0-semigroups and applications*, Elsevier science .B.V (2003).

[51] YOSIDA, *Functional analysis*, Springer-varlag, New york, (1980).