Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière

Département de Mathématiques

POLYCOPIE DE COURS PEDAGOGIQUE :

Mathématiques 3

Destiné aux étudiants de 2ème année Licence Sciences et Technologies

Elaboré par : **Dr. BOUATTIA Yassine**

Année : 2025

Table des matières

Chapitre 1: Intégrales simples et multiples **02**

1.1- Rappels sur l'intégrale de Riemann et sur le calcul de primitives..... **03**

1.2- Intégrales doubles et triples..... **14**

1.3- Application au calcul d'aires, de volumes..... **21**

Chapitre 2- Intégrales impropres..... **24**

2.1- Intégrales de fonctions définies sur un intervalle non borné..... **25**

2.2- Intégrales de fonctions définies sur un intervalle borné, infinies à l'une des extrémités..... **27**

Chapitre 3 : Equations différentielles..... **31**

3.1- Rappel sur les équations différentielles ordinaires..... **32**

3.2- Equations aux dérivées partielles..... **44**

3.3- Fonctions spéciales..... **47**

Chapitre 4 : Séries..... **50**

4.1- Séries numériques..... **51**

4.2- Suites et séries de fonctions..... **58**

4.3- Séries entières, séries de Fourrier..... **64**

Chapitre 5 : Transformation de Fourier..... **72**

5.1- Définition et propriétés..... **73**

5.2- Application à la résolution des équations différentielles..... **76**

Chapitre 6: Transformation de Laplace..... **78**

6.1- Définition et propriétés..... **79**

6.2- Application à la résolution d'équations différentielles..... **83**

Exercices..... **86**

Bibliographie..... **123**

Chapitre 1

Intégrales simples et multiples

1.1- Rappels sur l'intégrale de Riemann et sur le calcul de primitives.

Définition 1.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou une réunion d'intervalles). On dit que la fonction $F: I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f si F est dérivable et si l'on a $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

On note:

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{dx} + \mathrm{c}, \text{ où } c = cte \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1.1. (Théorème fondamental du calcul intégral)

Soit $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $x \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, posons

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

La fonction F est définie sur $[a, b]$, elle est dérivable et $F'(x) = f(x)$.

Théorème 1.2.

Si f est continue sur $[a; b]$ et F une primitive de f alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

On dit que f est intégrable sur $[a, b]$.

Théorème 1.3. Soient f et g deux fonctions bornées sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$,

1) Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$, alors

- $f \pm g$ est intégrable sur $[a, b]$ et on a

$$\int_a^b (f \pm g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, (αf) est intégrable sur $[a, b]$ et on a

$$\int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

- Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

2) Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$ et on a

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

3) Si f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ avec $c \in [a,b]$, alors f est intégrable sur $[a,b]$ et on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \text{ (relation de Chasles).}$$

4) On a

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \text{ et } \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

5) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} f(x-\alpha)\,dx.$$

6) Si f est paire, alors

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Si f est impaire, alors

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

7) Si f est T −périodique sur $\mathbb{R}$, alors $\forall k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\int_{a+kT}^{b+kT} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

et

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

Méthodes de calcul des intégrales

Intégration par parties

Soit f et g deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, alors:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Exemple 1.1.

Calculer $\int_1^2 \ln x \, dx$.

On intègre par partie. On pose

$$\begin{cases} f(x) = \ln x \\ g'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1/x \\ g(x) = x, \end{cases}$$

d'où

$\int_1^2 \ln x \, dx = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \frac{1}{x} dx = 2 \ln 2 - 1.$

Changement de variable

Théorème 1.4.

Soit $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, continue et $\varphi: [\alpha, \beta] \to [a, b]$ de classe C^1 tel que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$, alors la fonction $t \mapsto f\big(\varphi(t)\big).\varphi'(t)$ est intégrable sur $[\alpha, \beta]$ et l'on a :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big).\varphi'(t) \, dt.$$

Exemple 1.2.

Calculer$\int_0^{\pi/2} \cos x \, e^{\sin x} \, dx$.

On pose $\sin x = t$ alors $d(\sin x) = \cos x \, dx = dt$,

donc $\cos x \, e^{\sin x} dx = e^t dt$.

De plus, si $x = 0 \Rightarrow t = \sin 0 = 0$ et si $x = \pi/2 \Rightarrow t = \sin \pi/2 = 1$.

On en déduit:

$\int_0^{\pi/2} \cos x \, e^{\sin x} \, dx = \int_0^1 e^t \, dt = [e^t]_0^1 = e - 1.$

Calcul de primitives

Tableau de primitives usuelles

$f(x)$	$F(x)$	**Domaine**
$x^{\alpha},\quad \alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$e^{ax},\ \ a \neq 0$	$\dfrac{1}{a}e^{ax}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$sh\, x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$	$ch\, x$	$\mathbb{R}$
$ch\, x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$	$sh\, x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2},\ \ a \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2-x^2},\ \ a \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{a}\arg th \dfrac{x}{a}$ $= \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x+a}{x-a}\right\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \{a,-a\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}},\ \ a \in \mathbb{R}_+^*$	$\arg sh \dfrac{x}{a}$	$\mathbb{R}$

Primitives de $\sin^n x$, $\cos^m x$, n, $m \in \mathbb{N}$

Si n est impair, on pose $t = \cos x$ (donc $dt = -\sin x\ dx$).

Si m est impair, on pose $t = \sin x$ (donc $dt = \cos x\ dx$).

Si n et m sont pairs, on linéarise en utilisant la formule d'Euler

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\ \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Exemples.

1.3. Calculer $\int \sin^2 x \cos^5 x\, dx$.

On a $m = 5$ impair, on pose $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\, dx$, d'où

$$\int \sin^2 x \cos^5 x\, dx = \int \sin^2 x \cos x \cos^4 x\, dx$$

$$= \int \sin^2 x\,(1 - \sin^2 x)^2 \cos x\, dx$$

$$= \int t^2(1 - t^2)^2\, dt = \int (t^6 - 2t^4 + t^2)dt$$

$$= \frac{1}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + c$$

$$= \frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{3}\sin^3 x + c.$$

1.4. Calculer $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$.

On a $n = 3$ impair, on pose $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x\ dx$, d'où

$$\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = \int \sin x\,(1 - \cos^2 x) \cos^2 x\, dx$$

$$= \int (\cos^2 x - \cos^4 x) \sin x\, dx$$

$$= \int (t^2 - t^4)(-\, dt) = \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 + c$$

$$= \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + c.$$

1.5. Calculer $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$.

On a $n = m = 2$ pairs, alors

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Donc

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{-1}{16}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^2\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^2 = \frac{-1}{16}\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)^2$$

$$= \frac{-1}{16}\left(e^{4ix} + e^{-4ix} - 2\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x.$$

d'où

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c.$$

Primitive de $P(x)e^{ax}$ où P est un polynôme

On peut utiliser l'intégration par parties répétées ou la méthode des coefficients indéterminées qui se base à chercher la primitive de $P(x)e^{ax}$ sous la forme $Q(x)e^{ax}$, où $Q(x)$ est un polynôme de x de même degré que $P(x)$.

Exemple 1.6.

Calculer $\int (2x^2+3)e^{2x}dx$.

On pose $\int (2x^2+3)e^{2x}dx = Q(x)e^{2x} + c$, où $Q(x) = ax^2 + bx + d$.

On dérive et on identifie : $(Q(x)e^{2x})' = P(x)e^{2x}$,

alors

$$[(ax^2+bx+d)e^{2x}]' = (2x^2+3)e^{2x}$$

ou

$$2ax^2 + 2(a+b)x + b + 2d = 2x^2 + 3,$$

donc

$$a = 1, \qquad b = -1, \qquad d = 2.$$

D'où

$$\int (2x^2+3)e^{2x}dx = (x^2 - x + 2)e^{2x} + c.$$

Primitives de $P(x)\sin ax$, $P(x)\cos ax$, $P(x)\,sh\,ax$ et $P(x)\,ch\,ax$.

En utilisant les formules d'Euler $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ et les formules $\mathrm{ch}\, x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}\, x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$, on se ramène au cas précédent $P(x)e^{ax}$.

Dans les deux premiers cas, on aura à intégrer des fonctions à valeurs complexes, et lorsque les coefficients de $P(x)$ sont réels, il vaut mieux écrire

$$\int P(x)\cos ax\,dx = \mathcal{R}e\left(\int P(x)e^{iax}dx\right),$$

$$\int P(x)\sin ax\,dx = \mathfrak{Im}\left(\int P(x)e^{iax}dx\right).$$

Exemple 1.7.

Calculer $\int(x^2+x+1)\cos x\,dx$ et $\int(x^2+x+1)\sin x\,dx$.

On a $\int(x^2+x+1)\cos x\,dx = \mathcal{R}e\left(\int(x^2+x+1)e^{ix}dx\right)$

et $\int(x^2+x+1)\sin x\,dx = \mathfrak{Im}\left(\int(x^2+x+1)e^{ix}dx\right)$.

$\exists\ a, b\ \ et\ d\ \in \mathbb{C}$: $\int(x^2+x+1)e^{ix}dx = (ax^2+bx+d)e^{ix}+c$,

$\left[(ax^2+bx+d)e^{ix}\right]' = (iax^2+(2a+ib)x+b+id)e^{ix} = (x^2+x+1)e^{ix}$,

alors :

$$\begin{cases} ia = 1 \\ 2a+ib = 1 \\ b+id = 1, \end{cases} \text{ donc } a=-i,\ b=2-i \text{ et } d=1+i$$

d'où $\int(x^2+x+1)e^{ix}dx = \left(-ix^2+(2-i)x+(1+i)\right)e^{ix}+c$

$$= [(x^2+x-1)\sin x+(2x+1)\cos x]$$

$$+i[(-x^2-x+1)\cos x+(2x+1)\sin x]+c.$$

Finalement

$$\int(x^2+x+1)\cos x\,dx = (x^2+x-1)\sin x+(2x+1)\cos x+c$$

et

$$\int(x^2+x+1)\sin x\,dx = (-x^2-x+1)\cos x+(2x+1)\sin x+c$$

Intégration des fonctions rationnelles

Fonctions rationnelles

Définition 1.2.

Une fonction ou fraction rationnelle F sur $\mathbb{R}$ est le quotient de deux fonctions polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, Q étant non identiquement nulle. On a donc $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $Q(x) \neq 0$. On pose $F = \frac{P}{Q}$.

1- On note $\mathbb{R}(\mathrm{X})$ l'ensemble des fonctions rationnelles sur $\mathbb{R}$.
2- On dit que la fraction F est ***réductible*** lorsque les polynômes P et Q admettent un facteur commun de degré plus grand ou égale 1, i.e. lorsqu'il existe un polynôme R de degré plus grand ou égale 1 et des polynômes P_1 et Q_1 tels que $P = P_1R$ et $Q = Q_1R$. On a alors $F = \frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1}$.

Dans le cas contraire, on dit que F est ***irréductible***.

Définition 1.3.

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(\mathrm{X})$ une ***fraction irréductible***.

1- On appelle ***partie entière*** de F la fonction polynôme ***quotient*** de la division euclidienne de P par Q.
2- On appelle ***pôle*** de F toute racine du dénominateur Q dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle alors ***multiplicité*** d'un pôle de F, sa multiplicité en tant que racine de Q.

Décomposition en éléments simples

Notations 1.1.

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(\mathrm{X})$ une fraction rationnelle ***réelle irréductible***. On note:

- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ses pôles réels distincts de multiplicités respectives $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$;

- $\xi_1, \overline{\xi}_1, \xi_2, \overline{\xi}_2, \dots, \xi_q, \overline{\xi}_q$ ses pôles complexes non réels deux à deux conjugués distincts de multiplicités respectives $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q$.

Le dénominateur Q se ***factorise*** donc sur $\mathbb{R}$ (en le choisissant de coefficient dominant égal à 1) selon

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{p} (x - \alpha_i)^{\mu_i} \prod_{j=1}^{q} \left(x^2 + \beta_j x + \gamma_j\right)^{\nu_j}$$

où $\beta_j = -2\,\mathcal{R}e\left(\xi_j\right)$ et $\gamma_j = \left|\xi_j\right|^2$ sont des réels tels que $\beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$.

Théorème 1.5. (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$)

La fraction rationnelle F se décompose de manière unique sous la forme suivante :

$$F(x) = E(x) + \sum_{i=1}^{p} G_i\,(x) + \sum_{j=1}^{q} H_j\,(x),$$

où

- E est la partie entière de F;
- $G_i = \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{a_{ik}}{(x-\alpha_i)^k}$ est la partie polaire relative au pôle réel α_i;
- $H_j(x) = \sum_{l=1}^{\nu_j} \frac{b_{jl}x + c_{jl}}{\left(x^2+\beta_j x+\gamma_j\right)^l}$ est la partie polaire relative aux pôles complexes conjugués ξ_j et $\overline{\xi}_j$.

Dans les quantités précédentes:

- les coefficients $a_{ik},\ b_{jl},\ c_{jl}$ sont des nombres réels;
- les fractions élémentaires $\frac{a_{ik}}{(x-\alpha_i)^k}$ s'appellent ***éléments simples de* $\mathbf{1}^{\text{ère}}$ *espèce***;
- les fractions élémentaires $\frac{b_{jl}x + c_{jl}}{\left(x^2+\beta_j x+\gamma_j\right)^l}$ s'appellent ***éléments simples de* $\mathbf{2}^{\text{ème}}$ *espèce.***

Autrement dit, toute fraction rationnelle réelle se décompose en somme d'un polynôme et d'éléments simples de $\mathbf{1}^{\text{è}re}$ et de $\mathbf{2}^{\text{è}me}$ espèce.

Exemples

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes

$$\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)},\quad \frac{3x^3-2}{x^3(x-1)},\quad \frac{3x^4+4x^3+x+1}{(x+1)^2}.$$

1.8. $\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{(a+b)x-(b+2a)}{(x-1)(x-2)} \Longrightarrow \begin{cases} a+b &= 2 \\ b+2a &= 3 \end{cases} \Longrightarrow a = b = 1$,

alors $\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$

1.9. $\frac{3x^3-2}{x^3(x-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} = \frac{(a+b_1)x^3+(b_2-b_1)x^2+(b_3-b_2)x-b_3}{x^3(x-1)} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} a+b_1 = 3 \\ b_2 - b_1 = 0 \\ b_3 - b_2 = 0 \\ -b_3 = -2 \end{cases}$$

donc $b_3 = b_2 = b_1 = 2$ et $a = 1$, d'où $\frac{3x^3-2}{x^3(x-1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}$.

- $\frac{3x^4+4x^3+x+1}{(x+1)^2} = 3x^2 - 2x + 1 + \frac{x}{(x+1)^2} = 3x^2 - 2x + 1 + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$

$$\lim_{x\to-1}\left((x+1)^2\frac{3x^4+4x^3+x+1}{(x+1)^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to-1}((x+1)^2(3x^2-2x+1) + a(x+1) + b) \Longrightarrow b = -1$$

pour $x = 0$ on obtient $1 = 1 + a + b \Longrightarrow a = 1$, d'où $\frac{3x^4+4x^3+x+1}{(x+1)^2} = 3x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$.

Calculer les intégrales suivantes $\int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}dx$, $\int \frac{3x^3-2}{x^3(x-1)}dx$, $\int \frac{3x^4+4x^3+x+1}{(x+1)^2}dx$.

$\int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} = \ln|x-1| + \ln|x-2| + c.$

$\int \frac{3x^3-2}{x^3(x-1)}dx = \int \left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)dx = \ln|x-1| + 2\ln|x| - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + c.$

$\int \frac{3x^4+4x^3+x+1}{(x+1)^2}dx = \int \left(3x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = x^3 - x^2 + x + \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c.$

Intégration de certaines classes de fonctions trigonométriques

Soit une intégrale de la forme $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Montrons que cette intégrale peut toujours être ramenée à une intégrale d'une fonction rationnelle par le changement de variable $tg\ \frac{x}{2} = t$.

Exprimons $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de $tg\ \frac{x}{2}$ et, partant, en fonction de t:

$$\sin x = \frac{2\ \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\ \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\ \mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2\ t}{t^2+1},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\ \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

En outre,

$$x = 2\ arctg\ t, \qquad dx = \frac{2\ dt}{1+t^2}.$$

D'où

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\ dt}{1+t^2}.$$

- Soit les intégrales $\int \cos mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \sin nx\, dx$ et $\int \sin mx \cos nx\, dx$

On peut les calculer en utilisant les formules suivantes ($m \neq n$):

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x].$$

Exemple 1.10. Calculer $\int cos\, 3x\, cos\, x\, dx$.

$$\int \cos 3x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int [\cos 4x + \cos 2x]dx = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + c.$$

1.2- Intégrales doubles et triples

Notion de pavé.

Définition 1.4. On appelle pavé de $\mathbb{R}^n$ tout sous ensemble de $\mathbb{R}^n$de la forme

$$P = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i),$$

où a_i et b_i sont des constantes réelles données.

Les intervalles (a_i, b_i) considérés peuvent être fermés, ouverts, ou semi-ouverts.

Pour $n = 1$, P est un intervalle de $\mathbb{R}$, pour $n = 2$, P est un rectangle de $\mathbb{R}^2$ et pour $n = 3$, Pest un parallélépipède de $\mathbb{R}^3$.

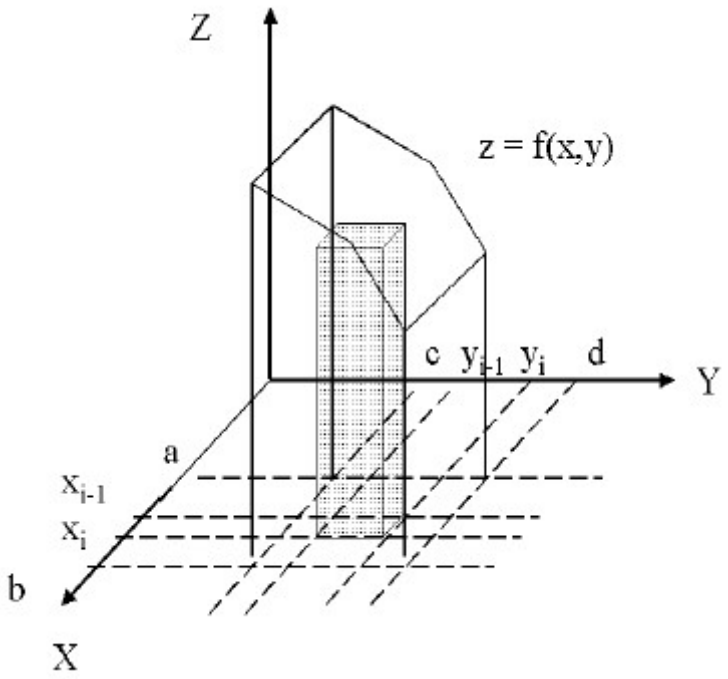
Définition 1.5. Soit P un pavé de $\mathbb{R}^n$.

$m(P) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n) \in \mathbb{R}_+$ est appelé mesure de P.

Intégrales doubles.

Principe de l'intégrale double sur un pavé.

Soit$f$ la fonction réelle des deux variables x et y, continue sur un pavé (rectangle) $D = [a, b] \times [c, d]$ de $\mathbb{R}^2$. Sa représentation est une surface S dans l'espace muni du repère$\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.



On partage D en sous-rectangles, dans chaque sous-rectangle$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ on choisit un point $M(x, y)$ et on calcule l'image de (x, y) pour la fonction f. La somme des volumes des colonnes dont la base est des sous-rectangles et la hauteur $f(x, y)$ est une approximation du volume compris entre le plan $Z = 0$ et la surface S. Lorsque le quadrillage devient suffisamment «fin» pour que la diagonale de chaque sous-rectangle tende vers 0, ce volume sera la limite des sommes de Riemann et on le note

$$\iint_D f(x, y)\ dx\, dy$$

$$= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{1 \le i \le n; 1 \le j \le n} f(a + i\frac{b-a}{n}, c + j\frac{d-c}{n}).$$

Exemple 1.11. En utilisant la définition, calculer $\iint_{[0,1]\times[0,1]}(x + 2y)\ dx\, dy$.

Théorème de Fubini.

Théorème 1.6. Soient φ et ψ deux applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $\varphi \le \psi$. Notons

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } a \le x \le b \text{ et } \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}.$$

Soit $f : \Delta \to \mathbb{R}$, continue, alors

$$\iint_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Cas particuliers.

Si $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ alors

$$\iint_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Si $f(x,y) = g(x).h(y)$ où g et h sont continues, alors

$$\iint_{\Delta} f(x,y)dxdy = \left(\int_a^b g(x)\, dx \right) \left(\int_c^d h(y)\, dy \right).$$

Changement de variables en coordonnées polaires.

Soit $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta\, , r\sin\theta)$. Alors φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Et donc

$$I = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{\Delta} g(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta,$$

tel que

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta\, , r\sin\theta).$$

Exemple 1.12. Calculer en passant en coordonnées polaires

$I = \iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\, dx\, dy$, où

$$D = \{(x,y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

Intégrales triples. Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}^3$ et $f: A \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur A. On notera l'intégrale triple de f sur A par

$\iiint_A f(x,y,z)\ dxdydz$. Le principe des intégrales triples est le même que pour les intégrales doubles,

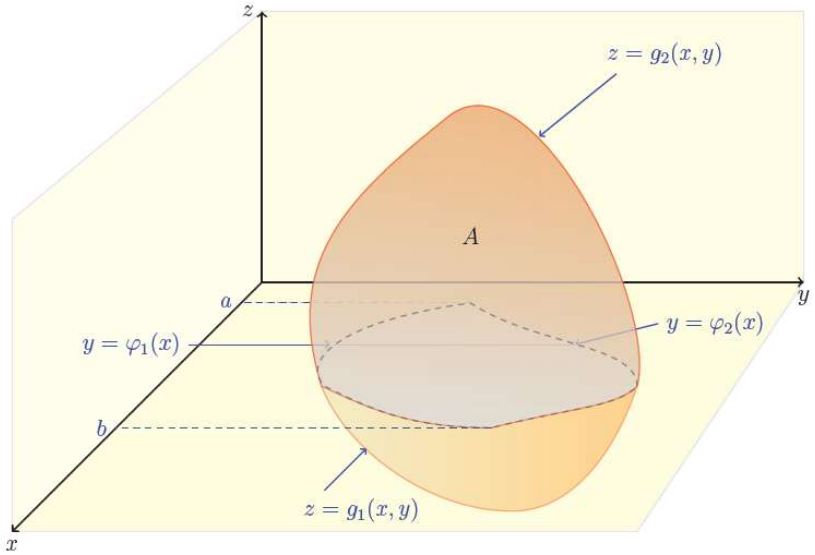
Théorème de Fubini dans $\mathbb{R}^3$. Soit $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)$ et $(x,y) \in B \subset \mathbb{R}^2\}$, où B est une partie mesurable de $\mathbb{R}^2$ et les fonctions g_1 et g_2 sont continues sur B. Si f est une fonction intégrable sur A alors

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_B \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right) dxdy.$$

De plus, si $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \text{ et } a \leq x \leq b\}$ alors

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right) dy\right) dx.$$

En particulier, si $f(x,y,z) = 1$ sur A, l'intégral $\iiint_A 1\,dxdydz$ représente alors le volume de A.

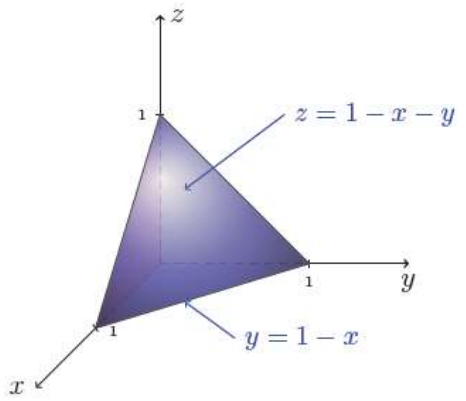


Remarque 1.1.

- Noter que l'ensemble B est la projection de A sur le plan xOy et l'intervalle $[a,b]$ est la projection de B sur l'axe des x.
- Pour calculer l'intégrale triple d'une fonction intégrable sur un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^3$, on peut procéder dans l'ordre des variables que l'on veut, toutes donnant le même résultat.

Exemple 1.13.

Soit $A = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3;\ x + y + z \leq 1\}$.



Calculons l'intégrale $\iiint_A \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^2}$.

Le domaine de l'intégration A peut être exprimé comme

$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ \begin{matrix} 0 \leq z \leq 1 - x - y, \\ 0 \leq y \leq 1 - x \text{ et } 0 \leq x \leq 1 \end{matrix}\right\}$.

D'après le théorème de Fubini, on a

$$\iiint_A \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^2} = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^2} \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{x+y+1} \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\ln 2 - \frac{1}{2}(1-x) - ln(1+x) \right) dx$$

$$= \frac{3}{4} - \ln 2.$$

Changement de variables dans $\mathbb{R}^3$.

Théorème 1.7. Soit $f(x, y, z)$ une fonction continue sur un domaine borné V de $\mathbb{R}^3$. Soit $\varphi: (x, y, z) \mapsto (u, v, w)$ un C^1-difféomorphisme sur Vet $V' = \varphi(V)$. On a alors

$$\iiint_V f(x, y, z) dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} f(u, v, w)|J|\,du\,dv\,dw,$$

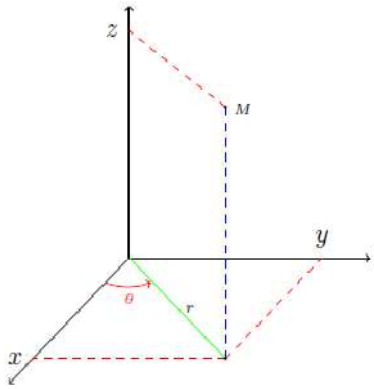
où J est le jacobien tel que

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Cas particuliers

1) Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques d'un point $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sont définies par le changement de variables



$$\begin{cases} \varphi: \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \qquad (r, \theta, z) \longmapsto (x, y, z) = (r\cos\theta\,, r\sin\theta\,, z) \end{cases}$$

donc $\iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_A f(r\cos\theta\,, r\sin\theta\,, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz,$

où $A = \varphi^{-1}(D)$, et $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$

Exemple 1.14.

Calculons $I = \iiint_D z^{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz,$

où

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}.$$

On utilise le changement de variables en coordonnées cylindriques. On a

$A = \varphi^{-1}(D) = \{(r, \theta, z);\ 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi \text{ et } 0 \leq z \leq 1\},$

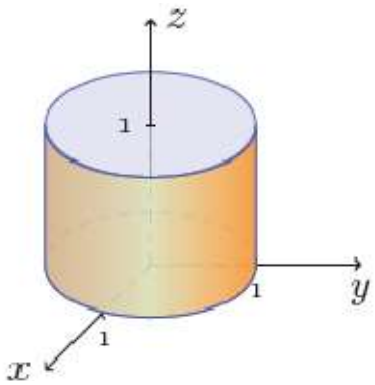
et alors

$$I = \iiint_A z^{r^2} r\, dr\, d\theta\, dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 r\, z^{r^2}\, dz \right) dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{r}{r^2+1}\, dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\ln 2\right) d\theta$$

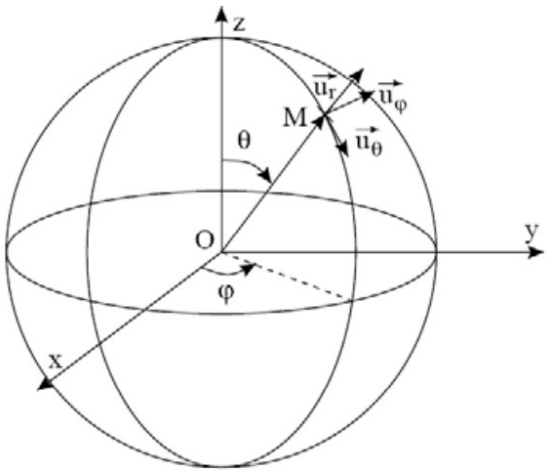
$$= \pi \ln 2.$$



2) Coordonnées sphériques

Étant donné un repère cartésien (O, x, y, z), les coordonnées sphériques (r, φ, θ) d'un point M sont définies par

- r est la distance du point M au centre O et donc $r > 0$.
- Si H est le projeté orthogonal de M dans le plan (O, x, y), alors φ peut être défini comme l'angle formé par les vecteurs x et OH.
- θ est l'angle formé par les vecteurs z et OM.



Un changement de variables en coordonnées sphériques est donné par

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \text{ où } (r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi] \times [0,\pi] \text{ et } |J| = r^2|\sin\theta|. \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Exemple 1.15. Calculons $I = \iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$,

où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ y \geq 0 \text{ et } z \geq 0\}$.

On pose

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \text{ où } (r,\varphi,\theta) \in [1,2] \times [0,\pi] \times \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \text{ et } |J| = r^2\sin\theta.$$

Donc

$$\begin{aligned} I &= \left(\int_1^2 r^3\, dr\right)\left(\int_0^\pi d\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta\right) \\ &= \left(\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2\right)([\varphi]_0^\pi)\left([-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= \frac{15}{4}\pi. \end{aligned}$$

1.3- Application au calcul d'aires, de volumes

Calcul d'aire.

L'aire de D est $\iint_D 1 \times\ dx\, dy$.

Exemple 1.16.

Calculer l'aire de D, où

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\right\},$$

$\sqrt{x}$ définie donc $x \geq 0$, $x^2 \leq \sqrt{x} \Longrightarrow x^4 \leq x \Longrightarrow x(x-1)(x^2+x+1) \leq 0$

$\Longrightarrow x-1 \leq 0 \Longrightarrow x \leq 1$.

D'où, l'aire de D est

$$\iint_D 1 \times\ dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Calcul de volume.

Le volume de Ω est l'intégrale $\iiint_\Omega \ 1 \times dx\, dy\, dz$.

Exemple 1.17.

Calculer le volume de Ω, où

$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 1 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 4, \text{où } y \geq 0, z \geq 0 \text{ et } a > 0, b > 0, c > 0\right\}.$

On pose : $\begin{cases} x = ar\cos\varphi\sin\theta \\ y = br\sin\varphi\sin\theta \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$, où $(r, \varphi, \theta) \in [1,2] \times [0, \pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

et

$$|J| = abcr^2 \sin\theta.$$

Donc

$$V = \iiint_\Omega \ 1 \times dx\, dy\, dz$$

$$= abc\left(\int_1^2 r^2\, dr\right)\left(\int_0^\pi d\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta\right)$$

$$= \frac{7}{3}abc\pi.$$

Calcul des aires de surfaces.

L'aire de la surface $z = f(x, y)$ délimitée par sa projection D sur le plan XOY

est donnée par la formule

$$\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Exemple 1.18.

Calculer l'aire de la surface $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ délimité par sa projection D sur le plan (xoy), où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 4\}$.

$$A = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$= \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

$$= \left(\int_0^2 \sqrt{1+4r^2}\,rdr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right).$$

Chapitre 2

Intégrales impropres

Intégrales de fonctions définies sur un intervalle non borné

Une fonction définie sur un intervalle I est dite localement intégrable sur I si f est Riemann intégrable sur tout intervalle $[a, b] \subseteq I$.

Définition 2.1. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [a, b[$ (on peut avoir $b = +\infty$) et localement intégrable sur I. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente en b si la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, définie sur $[a, b[$ admet une limite finie quand x tend vers b (Cette limite finie est appelée l'intégrale de f sur $[a, b[$ et est notée $\int_a^b f(t)\, dt$). Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ est divergente.

Définition 2.2. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I =]a, b]$ (on peut avoir $a = -\infty$) et localement intégrable sur I. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente en a si la fonction $F(x) = \int_x^b f(t)\, dt$, définie sur $]a, b]$ admet une limite finie quand x tend vers a (Cette limite finie est appelée l'intégrale de f sur $]a, b]$ et est notée $\int_a^b f(t)\, dt$). Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ est divergente.

Exemple 2.1. On a $\int_0^x e^{-t}\, dt = 1 - e^{-x}$. Comme $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$ est convergente et vaut 1.

Exemple 2.2. On a $\int_0^x \cos t\, dt = \sin x$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ n'existe pas, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos t\, dt$ est divergente.

Exemple 2.3. On a $\int_x^2 \frac{1}{t-1} dt = -\ln(x-1)$, pour $x > 1$. Comme $\lim_{x\to1} ln(x-1) = -\infty$, l'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{t-1} dt$ est divergente.

Exemple 2.4. On a $\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2 - 2\sqrt{x}$. Comme $\lim_{x\to0} \sqrt{x} = 0$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ est convergente.

Définition 2.3. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I =]a, b[$ (on peut avoir $a = -\infty, b = +\infty$) et localement intégrable sur I. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente (en a et b) s'il existe $c \in]a, b[$ (ou d'une facon équivalente si pour tout $c \in]a, b[$) l'intégrale $\int_a^c f(t)\,dt$ est convergente en a et l'intégrale $\int_c^b f(t)\,dt$ est convergente en b. Par définition on pose

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Exemple 2.5. Montrons que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est convergente. La fonction $\frac{1}{1+t^2}$ est définie et continue (donc localement intégrable) sur $\mathbb{R}$, donc il faut (et il suffit) de montrer que les intégrales $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,dt$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ sont convergentes.

On a $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan(x)$, $(x \geq 0)$, $\int_x^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = -\arctan(x)$, $(x \leq 0)$.
Comme $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$, les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ et $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ sont convergentes et par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est convergente et vaut π.

Exemple 2.6. Montrons que l'intégrale $\int_0^2 \frac{1}{t-1}\,dt$ est divergente. La fonction $\frac{1}{t-1}$ est définie sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$. Donc on étudie les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{t-1}\,dt$ et $\int_1^2 \frac{1}{t-1}\,dt$. D'après ce qui précède, $\int_1^2 \frac{1}{t-1}\,dt$ est divergente et par conséquent $\int_0^2 \frac{1}{t-1}\,dt$ est divergente.

On considère dans la suite une fonction f définie et localement intégrable sur $I = [a, b[$ et on étudie la convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$. Toutes les autres intégrales se ramènent à ce cas.

Convergence absolue.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est *absolument convergente* (en b) si

l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente (en b).

Théorème 2.1. Une intégrale absolument convergente est convergente.

Intégrale semi-convergente

Définition 2.4. Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ tel que $a < b \leq +\infty$. On dit que $\int_a^b f(t)\, dt$ est semi-convergente si elle est convergente mais elle n'est pas absolument convergente.

Exemple 2.7. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi- convergente.

En effet, l'intégrale est convergente:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

Or, $\lim_{x\to+\infty} \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x = \cos 1$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos}{t^2} dt$ est absolument convergente donc convergente, d'où la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin}{t} dt$.

En revanche, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ n'est pas absolument convergente. En effet,

$|\sin t| \leq 1 \Rightarrow |\sin t|^2 \leq |\sin t|$ ou $|\sin t| \geq \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$.

Alors $\frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{1-\cos}{2t}$. De plus $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos}{2t} dt = \underbrace{\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt}_{div} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{2t} dt}_{cov}$.

D'après le théorème de comparaison, la divergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2t}{2t} dt$ implique la divergence de $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ n'est pas absolument convergente, donc elle est semi-convergente.

Critère d'Abel.

Théorème 2.2. (Théorème d'Abel) Soit f une fonction continument dérivable sur $[a, +\infty[$, positive, décroissante, ayant une limite nulle en $+\infty$. Soit g une fonction continue sur $[a, +\infty[$, telle que la primitive $\int_a^x \mathrm{g(t)}\, dt$ soit bornée, pour tous x. Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)\, dt$ est converge.

Exemple 2.8. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ est convergente.

En effet, $\frac{1}{t}$ est continument dérivable sur $[1, +\infty[$, positive, décroissante et $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0$. De plus $\left|\int_a^b \cos t\, dt\right| = |\sin b - \sin a| \leq |\sin b| + |\sin a| \leq 2$ et d'après le théorème d'Abel $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ est convergente.

Intégrales impropres des fonctions à signe constant

Si f est négative sur I, alors $-f$ est positive sur I et la convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ se ramène à celle de l'intégrale $\int_a^b -f(t)dt$. Par conséquent, dans la suite on ne considère que le cas des fonctions positives.

Critère de la convergence majorée. Si f est positive alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente (en b) si et seulement si la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est bornée sur $[a, b[$.

Critère de comparaison. Soit f et g deux fonctions positives, définies et localement intégrables sur $[a, b[$. S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq Mg(x)$ pour

tout $x \in [a, b[$, alors la convergence de l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ entraine celle de $\int_a^b f(t)dt$.

Proposition 2.1. Soient f et g deux fonctions intégrables sur tout intervalle de la forme $[a, b[$ tel que $a < b \leq +\infty$. On suppose que $0 \leq f \leq g$, alors

1) Si l'intégrale impropre de g est convergente sur $[a, b[$, il en est de même de l'intégrale impropre de f et on a
$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$
2) Si l'intégrale impropre de f est divergente sur $[a, b[$, il en sera de même de l'intégrale impropre de g.

Critère de la convergence dominée. Soit f et g deux fonctions positives, définies et localement intégrables sur $[a, b[$.

(1) Si $f = O_b(g)$ alors la convergence de l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ entraine celle de $\int_a^b f(t)dt$.

(2) Si $f = o_b(g)$ alors la convergence de l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ entraine celle de $\int_a^b f(t)dt$.

Exemple 2.9. Pour tout $t \geq 1$, on a $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ et donc $e^{-t^2} = O_{+\infty}(e^{-t})$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ est aussi convergente.

Exemple 2.10. Montrons que l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ est convergente où $\alpha > 0$. Cherchons une fonction $g(t)$ devant laquelle f est négligeable au voisinage de $+\infty$. On a $\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{e^t} = 0$.

Donc $t^{\alpha-1}e^{-t} = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$ et d'après le critère de la convergence dominée, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ est convergente.

Critère des équivalents. Soit f et g deux fonctions positives, définies et localement intégrables sur $[a, b[$. Si f est équivalente à g au voisinage b, alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt, \int_a^b g(t)dt$ sont de la même nature.

Exemple 2.11. Montrons que l'intégrale $\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ est convergente où $\alpha > 0$ (Rappelons que $t^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)lnt}$ et donc la fonction $f(t) = t^{\alpha-1}e^{-t}$ n'est pas définie en 0). Cherchons une fonction $g(t)$ équivalente à f au voisinage de 0. On a

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{t^{\alpha-1}} = \lim_{t\to 0} e^{-t} = 1.$$

Donc $t^{\alpha-1}e^{-t} \sim_0 t^{\alpha-1}$ et d'après le critère des équivalents, l'intégrale $\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ est convergente car l'intégrale $\int_0^1 t^{\alpha-1}dt$ est convergente.

Intégrales de références.

(a) (**Intégrales de Riemann**). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$, $(a > 0)$, est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

$\int_0^a \frac{1}{t^\alpha} dt$, $(a > 0)$, est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

(b) (**Intégrales de Bertrand**). Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$, $(a > 0)$, est convergente si et seulement si $(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

(c) (**Intégrale de Gauss**). L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(d) (**Intégrale de Dirichlet**). L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente et vaut $\frac{\pi}{2}$.

Chapitre 3

Equations différentielles

Définition 3.1. (**Equation différentielle ordinaire**)

Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, d'ordre n est une relation entre la variable réelle t, une fonction inconnue $t \mapsto x(t)$ et ses dérivées $x', x'', \ldots, x^{(n)}$ au point t définie par

$$F(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n)}) = 0, \qquad (1)$$

où F n'est pas indépendante à dernière variable $x^{(n)}$. On prendra t dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ (I peut être $\mathbb{R}$ tout entier).

La solution x en général sera à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ où N sera le plus souvent égal à $1, 2$ ou 3. On dit que cette équation est scalaire si F est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.2. (**Equation différentielle normale**)

On appelle équation différentielle normale d'ordre n toute équation de la forme

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}). \qquad (2)$$

Définition 3.3. (**Equation différentielle autonome**)

On appelle équation différentielle autonome d'ordre n toute équation de la forme

$$x^{(n)} = f(x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}). \qquad (3)$$

Autrement dit, f ne dépend pas explicitement de t.

Exemple 3.1. Equation du premier ordre sous la forme normale :

$$x' = f(t, x).$$

Equation du premier ordre autonome :

$$x' = f(x).$$

Equation linéaire

Définition 3.4. (**Equation différentielle linéaire**)

Une EDO de type (1) d'ordre n est linéaire si elle est de la forme

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = g(t), \qquad (4)$$

avec tous les $x^{(i)}$ de degré 1 et tous les coefficients dépendant au plus de t.

Solutions

Définition 3.5.

On appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle d'ordre n sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$, toute fonction x définie sur cet intervalle I, n fois dérivable en tout point de I et qui vérifie cette équation différentielle sur I.

On notera en général cette solution (x, I).

Si I contient sa borne inférieure notée a (respectivement sa borne supérieure b), ce sont des dérivées à droite (respectivement à gauche) qui interviennent au point $t = a$ (respectivement $t = b$).

Intégrer une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions.

Solutions maximales et globales

Définition 3.6. (**Prolongement**)

Soient (x, I) et $(\tilde{x}, \tilde{I})$ deux solutions d'une même équation différentielle. On dira que $(\tilde{x}, \tilde{I})$ est un prolongement de (x, I) si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{x}|I = x$.

Définition 3.7. (**Solution maximale**)

Soient I_1 et I_2, deux intervalles sur $\mathbb{R}$, tels que $I_1 \subset I_2$.

On dit qu'une solution (x, I_1) est maximale dans I_2 si et seulement si x n'admet pas de prolongement $(\tilde{x}, \tilde{I})$ solution de l'équation différentielle telle que $I_1 \nsubseteq \tilde{I} \subset I_2$ (on verra même plus tard que I_1 est nécessairement ouvert).

Définition 3.8. (**Solution globale**)

Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$. Une solution (x, I) est dite globale dans I si elle est définie sur l'intervalle I tout entier.

Quelques techniques de résolution

Equations à variables séparées

Exemple 3.2.

Considérons l'EDO d'ordre 1 sous forme normale données par l'équation

$$x' = f(t, x).$$

L'idée est d'exprimer $f(t, x)$ sous la forme $g(t)h(x)$, où $g: I \to \mathbb{R}$ et $h: J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ce qui permettra de résoudre une équation du type

$$x' = g(t)h(x).$$

Cas particulier :

Les équations les plus simples sont de la forme

$$x' = f(t).$$

Equations linéaires.

Nous restons toujours sur les EDO d'ordre 1. Nous nous intéressons ici aux équations différentielles ordinaires linéaires.

Définition 3.9. (**EDO linéaire**)

Une équation différentielle du premier ordre est dite linéaire si elle est linéaire par rapport à la fonction inconnue x et par rapport à sa dérivée x'. Une telle équation peut toujours s'écrire sous la forme

$$a(t)x' + b(t)x = d(t). \qquad (6)$$

Dans toute la suite, on supposera que a, b et d sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

EDO linéaire sans second membre.

Commençons par résoudre une équation linéaire d'ordre 1 sans second membre, on l'appelle EDO linéaire du premier ordre homogène. C'est une équation de la forme

$$a(t)x' + b(t)x = 0. \qquad (7)$$

C'est une équation à variables séparables sur $I \times J$ tel que $a(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Proposition 3.1. (**Solution de l'équation homogène**)

L'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène

$$a(t)x' + b(t)x = 0,$$

sur le domaine I, avec pour un certain t_0 dans I tel que $x(t_0) = x_0$ est définie pour tout $t \in I$ par

$$x(t) = x_0 e^{F(t)},$$

avec $F(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{-\mathrm{b(s)}}{\mathrm{a(s)}} ds$.

EDO linéaire avec second membre

Considérons l'équation

$$a(t)x' + b(t)x = d(t),$$

sur l'intervalle I où ne s'annule pas.

Soit x_h une solution particulière non dégénérée de l'équation homogène associée à l'équation ci-dessus sur I.

Proposition 3.2. (**Solution générale**)

La solution générale de l'équation

$$a(t)x' + b(t)x = d(t),$$

sur I avec pour un certain t_0 dans I tel que $x(t_0) = x_0$ est donnée par

$$x(t) = exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{b(s)}}{\mathrm{a(s)}} ds\right)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d(s)}}{\mathrm{a(s)}} exp\left(\int_{t_0}^{s} \frac{\mathrm{b}(\sigma)}{\mathrm{a}(\sigma)} d\sigma\right) ds\right).$$

Remarque 3.1.

La méthode fréquemment utilisée pour trouver une solution de l'équation linéaire non homogène à partir de l'équation homogène est appelée méthode de variation de la constante.

Equations de Bernoulli.

Définition 3.10. (**Equations de Bernoulli**)

Une équation de Bernoulli est une équation différentielle scalaire non linéaire de la forme

$$x' + P(t)x + Q(t)x^{\alpha} = 0, \qquad (8)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^*/\{1\}$, P et Q sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Exemple 3.3. $tx' + x - x^2 \ln t = 0$.

Exemple 3.4. $-\frac{x}{2}y' + y = \sqrt{y}$.

Exemple 3.5. $y' - y = xy^6$.

Théorème 3.1. (**Solution Bernoulli**)

Une fonction dérivable strictement positive (au cas où $\alpha = \frac{1}{2}$ par exemple, où $\alpha \leq 0$) x sur I est solution de l'équation de Bernoulli si et seulement si $u = x^{1-\alpha}$ est une solution strictement positive de l'équation linéaire

$$u' + (1-\alpha)P(t)u + (1-\alpha)Q(t) = 0. \qquad (9)$$

Remarque 3.2. Connaissant la solution u de l'équation linéaire associée à l'équation de Bernoulli, on en déduire les solutions strictement positives de l'équation de Bernoulli.

Remarque 3.3. Nous pouvons trouver quelques propriétés sur les solutions suivant les valeurs de α:

a. Si $\alpha > 0$ l'équation de Bernoulli admet la solution triviale $x \equiv 0$.

b. Si $\alpha > 1$ toute solution de l'équation de Bernoulli qui prend la valeur 0 en un point, est partout nulle.

c. Si $0 < \alpha < 1$, la fonction nulle n'est pas nécessairement la seule solution qui prenne la valeur 0 en un point.

Remarque 3.4. L'équation particulière

$$t^2x' + x + x^2 = 0, \qquad (10)$$

est appelée équation de Riccati.

Equations différentielles linéaires du second ordre

Une *équation différentielle du second ordre* est une équation portant sur une fonction inconnue x, dans laquelle intervient sa dérivée seconde x''. Sa forme la plus générale est $F(t, x, x', x'') = 0$. On n'étudiera ici qu'un type particulier d'équations: les équations linéaires à coefficients constants.

Equations linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants

Il s'agit des équations de la forme:

$$ax'' + bx' + cx = 0$$

avec a, b, c réels ($a \neq 0$).

On les appelle aussi *équation sans second membre*.

Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Définition 3.11. On appelle ***équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants*** une équation de la forme $y'' + ay' + by = f$ où a, b sont des réels ou des complexes et f est une fonction continue sur un intervalle I. Résoudre cette équation, c'est déterminer toutes les fonctions y définies sur I deux fois dérivables et vérifiant, pour tout $x \in I$, $y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$.

Définition 3.12. L'équation homogène associée à l'équation $y'' + ay' + by = f(x)$ est l'équation $y'' + ay' + by = 0$.

Théorème 3.2. Pour tout $x_0 \in I$ et tout $y_0, y_1 \in K$, il existe une unique solution à l'équation différentielle $y'' + ay' + by = f$ vérifiant $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

Proposition 3.3. (Structure de l'ensemble des solutions) : Soit y_P une solution de $y'' + ay' + by = f$, appelée solution particulière de l'équation. Alors toute solution y s'écrit $y_P + z$, où z est une solution de l'équation homogène. Réciproquement, toute fonction s'écrivant $y_P + z$, où z est une solution de l'équation homogène, est solution de l'équation différentielle.

Résolution de l'équation homogène, cas complexe: Soit $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique associée.

- Si l'équation caractéristique admet deux racines r_1 et r_2, alors les solutions de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions $x \mapsto c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

- Si l'équation caractéristique admet une racine double r, alors les solutions de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions $x \mapsto (c_1x+c_2)e^{rx}$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Résolution de l'équation homogène, cas réel: Soit $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique associée.

- Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2, alors les solutions de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions $x \mapsto c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
- Si l'équation caractéristique admet une racine double r, alors les solutions de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions $x \mapsto (c_1x+c_2)e^{rx}$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
- Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées, $\alpha \pm i\beta$, alors les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto (c_1cos(\beta x) + c_2sin(\beta x))e^{\alpha x}$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Equations linéaires non homogènes du second ordre à coefficients constants

Solution particulière y_p.

Si $f(x) = (P_n(x)\cos\alpha x + Q_m(x)\sin\alpha x)e^{\gamma x}$ alors

$$y_p = x^d\big(\tilde{P}_N(x)\cos\alpha x + \tilde{Q}_N(x)\sin\alpha x\big)e^{\gamma x},$$

où

$d = 0$ si $\gamma + i\alpha$ n'est pas racine de l'équation caractéristique,

$d = 1$ si $\gamma + i\alpha$ est racine simple de l'équation caractéristique,

$d = 2$ si $\gamma + i\alpha$ est racine double de l'équation caractéristique,

et $N = \max(n, m)$.

Cas particulier.

° Si $f(x) = P_n(x)$ est un polynôme, on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme $x^d\tilde{P}_n(x)$

où

$d = 0$ si 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique,

$d = 1$ si 0 est racine simple de l'équation caractéristique,

$d = 2$ si 0 est racine double de l'équation caractéristique.

° Si $f(x) = P_n(x)e^{\gamma x}$ alors

$$y_p = x^d \tilde{P}_n(x)e^{\gamma x},$$

où

$d = 0$ si γ n'est pas racine de l'équation caractéristique,

$d = 1$ si γ est racine simple de l'équation caractéristique,

$d = 2$ si γ est racine double de l'équation caractéristique.

° Si $f(x) = P_n(x)\cos\alpha x$ ou $f(x) = P_n(x)\sin\alpha x$ alors

$$y_p = x^d\left(\tilde{P}_n(x)\cos\alpha x + \tilde{Q}_n(x)\sin\alpha x\right),$$

où

$d = 0$ si $i\alpha$ n'est pas racine de l'équation caractéristique,

$d = 1$ si $i\alpha$ est racine simple de l'équation caractéristique.

Equations de Riccati.

Définition 3.13. (**Equations de Riccati**)

Une équation différentielle de Riccati est de la forme :

$$a(t)x' + b(t)x = c(t)x^2 + d(t) \qquad (11)$$

où a, b, c et d sont des fonctions continues de t.

Pour les valeurs de t où le coefficient $a(t)$ ne s'annule jamais, nous obtenons après simplification :

$$x' + A(t)x = B(t)x^2 + C(t). \qquad (12)$$

Si $C(t) = 0$, nous retrouvons un cas particulier d'équation de Bernoulli ($\alpha = 2$).

Résolution

- L'intégration d'une équation différentielle de Riccati nécessite la connaissance d'une solution particulière y_p de cette équation

- Le changement de fonction inconnue $z(t) = x(t) - x_p(t)$ transforme l'équation différentielle (12) en

$$(z + x_p)' + A(t)(z + x_p) = B(t)(z + x_p)^2 + C(t)$$

$$z' + A(t)z + x_p{}' + A(t)x_p = B(t)z^2 + 2B(t)zx_p + B(t)x_p^2 + C(t)$$

Or x_p solution particulière de l'équation de Riccati vérifie :

$$x_p' + A(t)x_p = B(t)x_p^2 + C(t).$$

- Cette simplification nous conduit à l'équation de Bernoulli ($\alpha = 2$)

$$z' + \left[A(t) - 2B(t)x_p\right]z = B(t)z^2. \qquad (13)$$

On posera un nouveau changement de fonction $u(t) = \frac{1}{z(t)}$ pour se ramener à une équation différentielle linéaire en $u(t)$

$$-u' + \left[A(t) - 2B(t)x_p\right]u = B(t). \qquad (14)$$

Après résolution de cette dernière équation, la solution $x(t)$ de l'équation de Riccati sera obtenue par

$$x(t) = z(t) + x_p(t)$$

avec $z(t) = \frac{1}{u(t)}$ et où $x_p(t)$ est donné.

Exemple 3.6. $t^3x' + x^2 + t^2x + 2t^4 = 0, \quad \left(x_p(t) = -t^2\right).$

Exemple 3.7. $\cos t\,(x' - x^2) + (2\,cos^2 t + \sin t)x = \cos^3 t, \quad \left(x_p(t) = \cos t\right).$

Exemple 3.8. $(x^2 + 1)y' = y^2 - 1, \quad \left(y_p(t) = 1\right).$

Equations de Lagrange et Clairaut

Définition 3.14. (**Equations de Clairaut**)

On appelle équation de Clairaut toute équation différentielle de la forme:

$$x = tx' + g(x'), \qquad (15)$$

où $g(x')$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Exemple 3.9. $x = tx' + (x')^2$.

Exemple 3.10. $y = xy' + y' \ln y'$.

Exemple 3.11. $y = xy' + \sqrt{y' + 4}$.

Définition 3.15. (**Equation de Lagrange**)

On appelle équation de Lagrange toute équation du premier ordre scalaire non linéaire de la forme

$$x = tf(x') + g(x'), \qquad (16)$$

où f et g sont définies, dérivables sur un certain intervalle J de $\mathbb{R}$.

Exemple 3.12. $x = t(x')^2 - \frac{1}{x'}$.

Exemple 3.13. $y = x(2 + y') + (y')^2$.

Exemple 3.14. $y = -xy' - \ln y'$.

Proposition 3.4. (**Solutions Lagrange**)

Les seules solutions affines de l'équation de Lagrange sont les fonctions de la forme

$$x(t) = mt + g(m), \qquad (17)$$

où m est une racine de l'équation $m = f(m)$ avec $m \in J$.

Méthode de résolution.

On pose $p = x' = \frac{dx}{dt}$. L'équation (16) devient

$$x = tf(p) + g(p). \qquad (18)$$

On la dérive par rapport à p

$$\frac{dx}{dp} = t'f(p) + tf'(p) + g'(p),$$

or

$$\frac{dx}{dp} = \frac{dx}{dt} \times \frac{dt}{dp} = pt'.$$

Donc

$$pt' = t'f(p) + tf'(p) + g'(p) \text{ou} \big(p - f(p)\big)t' - tf'(p) = g'(p). \qquad (19)$$

On ramène l'équation (18) à une équation linéaire de premier ordre en prenant pour la variable p et pour la fonction t. En recherchant la solution de (19) $t = r(p, c)$, on obtient la solution générale de l'équation (16) sous une forme paramétrique

$$t = r(p, c), \qquad x = r(p, c)f(p) + g(p) \text{ (} p \text{ est un paramètre).}$$

Exemple 3.15. Résoudre l'équation

$$x = t(x')^2 - \frac{1}{x'}.$$

On pose $x' = p$. L'équation devient

$$x = tp^2 - \frac{1}{p}.$$

D'où

$$\frac{dx}{dp} = pt' = t'p^2 + 2pt + \frac{1}{p^2} \text{ ou } p(1-p)t' - 2pt = \frac{1}{p^2}.$$

Nous avons obtenu une équation du premier ordre, linéaire en t, en la résolvant, on a

$$t = \frac{c}{(p-1)^2} + \frac{2p-1}{2p^2(p-1)^2}, \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

En portant la valeur trouvée de t dans l'expression de x, on obtient en définitive

$$t = \frac{2p-1}{2p^2(p-1)^2} + \frac{c}{(p-1)^2}, \quad x = \frac{2p-1}{2(p-1)^2} - \frac{1}{p} + \frac{cp^2}{(p-1)^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Equations aux dérivées partielles

Fonctions à plusieurs variables.

Définition 3.16. Soient E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ et G une partie de $E \times \mathbb{R}$ telle que pour tout vecteur $x \in E$, il existe un nombre réel y et un seul tel que le couple (x, y) appartienne à G. Alors le triplet $(f, E, \mathbb{R})$ s'appelle fonction définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- On dit que E est l'ensemble de départ de f (ou le domaine de définition), et on le désigne par D_f.
- Le sous-ensemble $\{y \in \mathbb{R},\ \exists x \in E,\ f(x) = y\}$ est appelé l'image de E par f et il est noté $Im(f)$.
- L'unique nombre réel y correspondant à l'élément $x \in E$ par f s'appelle l'image de x par f et se note $f(x)$.
- La notation $f = (G, E, \mathbb{R})$ n'est pas utilisée en pratique. On lui préfère la notation

$$f : E \to \mathbb{R}.$$

Exemple 3.16. $\begin{cases} f: & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \mapsto f(x, y) = xye^{x-y}, \end{cases}$

Exemple 3.16. $f(x, y, z) = x^2 - \cos(y + z)$.

Définition 3.17. (Graphes d'une fonction $f : \mathrm{E} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$).

Soient E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables.

1- L'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x, y) \in E,\ z = f(x, y)\}$$

est appelé surface représentative de f. S est également appelé graphe de la fonction f.

2- Soit $A = (a, b)$ un point intérieur de E. Les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $x \to f(x, b)$ et $y \to f(a, y)$ définies sur des intervalles ouverts contenant respectivement a et b sont appelées fonctions partielles associées à f au point A.

3- Soit $k \in \mathbb{R}$. L'ensemble $L_k = \{(x, y) \in E;\ f(x, y) = k\}$ est appelé ligne de niveau k de la fonction f.

Dérivées partielles.

Rappel. (Dérivée). Soit $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. La dérivée de f au point $a \in I$ est donnée par:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $a \in E$. Une expression du type du rappel précédent n'a pas de sens parce que l'on ne peut pas diviser par un vecteur. Par contre, si on fixe toutes les composantes du vecteur x sauf une, on peut définir les dérivées partielles de cette fonction f de la façon suivante.

Définition 3.18. (Dérivée partielle)

Soient $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $a \in E$. Pour $i = 1, \dots, p$, on appelle dérivée partielle par rapport à x_i de f en $a = (a_1, \dots, a_n)$, et on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ la dérivée de la fonction partielle de f prise en a_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{x_i - a_i}.$$

Pour une fonction de deux variables $f: \mathrm{E} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en un point $a = (a_1, a_2) \in E$les dérivées partielles de f en (a_1, a_2) sont les dérivées des fonctions partielles $x_1 \to f(x_1, a_2)$ et $x_2 \to f(a_1, x_2)$, où x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$ qui se calculent de la façon suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h},$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + k) - f(a_1, a_2)}{k}.$$

On les note parfois $f'_{x_1}(a_1, a_2)$ et $f'_{x_2}(a_1, a_2)$.

Différentielles.

Définition 3.19. On dit que f est différentiable en a s'il existe une fonction linéaire $D_a f$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1, a_2) - D_a f(a_1, a_2)(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Proposition 3.5. On suppose que f est différentiable en a. Alors toutes les dérivées partielles de f existent au point a et pour tout $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$D_a f(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) v_2.$$

Exemple 3.18.

$f(x, y) = e^x \cos y$, calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ et $D_{(a,b)} f(v_1, v_2)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = e^a \cos b$

$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h} = -e^a \sin b$

$D_{(a,b)} f(v_1, v_2) = e^a \cos b \, v_1 - e^a \sin b \, v_2.$

Équations aux dérivées partielles du 1er ordre

Définition 3.20. Une équation dans laquelle figure une fonction f de plusieurs variables indépendantes $x_1, \dots, x_n$ et des dérivées partielles du 1er ordre de f par rapport à ces variables, c'est-à-dire une équation de la forme

$$F\left(x_1, \dots, x_n, f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = 0$$

est dite une équation aux dérivées partielles (en abrégé : EDP) du 1er ordre.

Toute fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ qui satisfait identiquement à cette équation est une solution de celle-ci.

Dans la suite, on utilisera souvent à la place de f les notations u ou z.

Dans le cas de deux variables x, y, on a

$$F\left(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Exemple 3.19. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff f(x, y) = \varphi(y)$.

Exemple 3.20. $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff f(x, y) = \varphi(x)$.

Exemple 3.21. $\frac{\partial f}{\partial x} = g(x)$.

Si g est intégrable et G est l'une de ses primitives, alors

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y) - G(x)) = 0,$$

d'où

$$f(x, y) = G(x) + \varphi(y).$$

Fonctions spéciales

Fonctions Γ et β

Fonction Gamma d'Euler

En mathématique, la fonction Gamma est une fonction complexe. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe.

Définition. La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\, e^{-t} dt, (\mathrm{z} \in \mathbb{C}, \qquad \mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{z}) > 0).$$

Exemple 3.22. Pour $z = 1$, on a

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$$

$$= [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1.$$

Exemple 3.23. Soit $z = \frac{1}{2}$, pour calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ on utilise le changement de variable $s = \sqrt{t}$, on obtient

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1}\, e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\, ds = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

Lemme 3.1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(z) > 0, n \in \mathbb{N}$, on a

1- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2- $\Gamma(n+1) = n!$.
3- $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

Fonction Bêta

Définition 3.21. La fonction Bêta est une type d'intégrale d'Euler définie par

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}\,(1-t)^{q-1} dt,$$

$$(p, q \in \mathbb{C}, \qquad \mathcal{R}e(p) > 0, \qquad \mathcal{R}e(q) > 0\ ).$$

Proposition 3.6. La fonction β est exprimée l'aide de la fonction *Gamma* par la relation suivante:

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Propriétés.

1- $\beta(p,q) = \beta(q,p)$, (Symétrique).

2- $\beta(p,1) = \frac{1}{p}$.

Chapitre 4

Séries

Séries numériques

Définition 4.1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ la somme de $(n+1)$ premiers termes de cette suite.

- La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée série de terme général u_n, cette série sera notée $\sum_n u_n$ ou $\sum u_n$.
- $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est dite somme partielle d'ordre n de la série.
- On dit que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, dans ce cas $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelée somme de la série $\sum u_n$, et désignée par $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Une série est dite divergente si elle n'est pas convergente.

Exemple 4.1. Série géométrique: $\sum_n r^n$, sa somme partielle

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \begin{cases} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} & pour \quad r \neq 1, \\ n+1 & pour \quad r = 1. \end{cases}$$

Et sa somme $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & si \quad |r| < 1, \\ \text{pas de limite} & si \quad r \leq -1, \\ +\infty & si \quad r \geq 1. \end{cases}$

D'où la série géométrique converge pour $|r| < 1$.

Exemple 4.2. Séries à termes positifs.

Définition 4.2. On appelle $\sum u_n$ une série à termes réels positifs toute série vérifiant: $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Reste d'une série convergente.

Si la série du terme général u_n est convergente, et de somme $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, la différence $S - S_n$ s'appelle reste d'ordre n de la série. On le note:

$$\begin{aligned} R_n &= S - S_n \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k. \end{aligned}$$

Proposition 4.1. Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

En effet, $R_n = S - S_n$ donc $\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty}(S - S_n) = S - S = 0$.

Proposition 4.2. Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Donc si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

En effet: On a $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = S_{n-1} + u_n$ d'où $u_n = S_n - S_{n-1}$. Si la série converge la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$.

Remarque 4.1. Cette condition est une condition nécessaire qui n'est pas suffisante, car il existe des séries divergentes et dont les termes généraux tendent vers 0 à l'infinie.

Proposition 4.3. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques et α un scalaire non nul:

- Si $\sum u_n$ converge vers s, et $\sum v_n$ converge vers l alors la série $\sum(u_n + v_n)$ converge vers $s + l$.
- Si $\sum u_n$ converge vers s alors $\sum \alpha . u_n$ converge vers αs.
- Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors la série $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

Remarque 4.2. Si les deux séries sont divergentes, on ne peut rien dire sur la nature de leur somme.

Théorème de comparaison de deux séries à termes positifs.

Théorème 4.1. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries vérifiant $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_0.

- Si la série $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$.
- Si la série $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Règle de D'Alembert. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

Notons $l = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ tel que $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

- Si $l < 1$ la série $\sum u_n$ converge.
- Si $l > 1$ la série $\sum u_n$ diverge.

- Si $l = 1$ on ne peut rien conclure.

Règle de Cauchy. Soit la série positive de terme général u_n.

Notons $l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$ tel que $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

- Si $l < 1$ la série $\sum u_n$ converge.
- Si $l > 1$ la série $\sum u_n$ diverge.
- Si $l = 1$ on ne peut rien conclure.

Série de Riemann.

Une série dite de Riemann est de la forme: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

- Si $\alpha \leq 1$ alors la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
- Si $\alpha > 1$ alors la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Exemple 4.2. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ série convergente.

Exemple 4.3. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ série divergente.

Exemple 4.4. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ série divergente malgré que le terme général tend vers zéro.

Séries à termes de signes quelconques

Théorème des séries alternées

Théorème

On considère une série dont le terme général s'écrit, pour tout entier n, sous la forme $u_n = (-1)^n v_n$ avec $v_n \geq 0$ On suppose réalisées les conditions suivantes

(i) la suite (v_n) est décroissante,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.

Alors la série de terme général u_n est convergente.

Bien évidemment le théorème s'applique, dans les mêmes conditions, pour une série dont le terme général s'écrit $u_n = (-1)^{n+1} v_n$ avec $v_n \geq 0$. Le théorème qui concerne la majoration du reste et l'encadrement de la somme est énoncé pour le cas d'une série de terme général $u_n = (-1)^n v_n$ avec $v_n \geq 0$, le passage à l'autre cas étant immédiat.

Preuve

Méthode. On montre que les suites des sommes partielles (s_{2p}) et (s_{2p+1}) sont adjacentes.

La décroissance de la suite (v_n) entraîne les inégalités :

$$s_{2p+2} - s_{2p} = v_{2p+2} - v_{2p+1} \leq 0 \text{ et } s_{2p+1} - s_{2p-1} = v_{2p} - v_{2p+1} \geq 0.$$

La suite (s_{2p}) est décroissante et la suite (s_{2p+1}) est croissante. On a également, pour tout entier p, $s_{2p+1} - s_{2p} = -v_{2p+1} \leq 0$.

On en déduit, d'une part $s_{2p+1} \leq s_{2p}$ et d'autre part $\lim\limits_{p\to\infty}(s_{2p+1} - s_{2p}) = 0$.

Les suites (s_{2p}) et (s_{2p+1}) sont adjacentes. Elles sont donc convergentes, de même limite, et la suite (s_n) est convergente.

Remarque

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = |u_n|$. On énonce parfois le critère en rassemblant les deux conditions (i) et (ii) sous la forme abrégée : la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant.

Théorème. (Majoration du reste d'une série satisfaisant aux hypothèses du théorème des séries alternées).

Soit $\sum u_n$ une série qui satisfait aux hypothèses du théorème des séries alternées.

Alors, pour tout entier n, le reste d'ordre n, r_n, vérifie les propriétés suivantes :

1. r_n est du signe de u_{n+1};
2. $|r_n| \leq |\, u_{n+1}|$.

Preuve

C'est une conséquence du théorème précédent.

D'après la démonstration précédente, on a, pour tout entier p, $s_{2p+1} \leq s \leq s_{2p}$, d'où

$$r_{2p} = s - s_{2p} \leq 0 \text{ et } r_{2p+1} = s - s_{2p+1} \geq 0.$$

On en déduit:

$$|r_{2p}| = s_{2p} - s \leq s_{2p} - s_{2p+1} = v_{2p+1}$$

et

$$r_{2p+1} = s - s_{2p+1} \leq s_{2p+2} - s_{2p+1} = v_{2p+2}.$$

Majoration du reste et approximation de la somme

Théorème. Soit $\sum u_n$ une série numérique réelle.

1- Si $\sum u_n$ est absolument convergente, et si sa convergence découle du fait que $|u_n| \leq v_n$ pour $n > n_0$, où $\sum v_n$ est convergente, alors

$$\forall N \geq n_0, |R_N| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} v_n.$$

2- Si $\sum u_n$ est absolument convergente, et si sa convergence est établie par le critère de d'Alembert: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_0,\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq k < 1$, alors

$$\forall N \geq n_0, |R_N| \leq |u_N| \frac{k}{1-k}.$$

3- Si $\sum u_n$ est absolument convergente, et si sa convergence est prouvée par le critère de Cauchy: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_0,\ \sqrt[n]{|u_n|} \leq k < 1$, alors

$$\forall N \geq n_0, |R_N| \leq \frac{k^{N+1}}{1-k}.$$

4- Si $\sum u_n$ est absolument convergente, et si $|u_n| = f(n)$ où f est une fonction décroissante sur $[n_0, \infty[$, Riemann-intégrable sur tout intervalle $[n_0, t]$, alors

$$\forall N \geq n_0, |R_N| \leq \int_N^{\infty} f(x)dx.$$

5- Si $\sum u_n$ est alternée, et si $(|u_n|)_n$ tend vers zéro en décroissant, alors

$$\forall N \in \mathbb{N}\,, |R_N| \leq |u_{N+1}|.$$

Remarque.

1. Le théorème des séries alternées permet de montrer que des séries comme les séries de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $(-1)^n \sin\frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ et $\frac{(-1)^n}{\ln}$ $(n \geq 2)$, qui ne sont pas absolument convergentes, sont convergentes.

Mais il faut insister sur le fait que, pour des séries comme les séries de terme général $\left(\frac{(-1)^n}{n^s}\right)$, avec $s > 1$, qui sont absolument convergentes, on n'utilise pas le théorème des séries alternées pour les étudier. Celui-ci ne permet de conclure qu'à la convergence de la série et non l'absolue convergence.

Rappelons que, pour une série à termes qui ne sont pas tous de même signe, on commence toujours par étudier la série des valeurs absolues.

En revanche, pour une telle série, on peut utiliser la majoration du reste déduite du théorème des séries alternées.

2. L'hypothèse concernant la décroissance de la suite v_n est indispensable pour appliquer le théorème.

Considérons, par exemple, la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n \quad (-1)^n}$ $(n \geq 2)$.

Le terme général s'écrit : $u_n = (-1)^n\, v_n$ avec $v_n > 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$, mais la suite (v_n) n'est pas décroissante.

On a : $u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\ln n}$. On pose: $\forall n \geq 2,\ w_n = \frac{(-1)^n}{\ln} - u_n = \frac{1}{\ln^2 n + (-1)^n \ln n}$.

La série de terme général w_n est à termes positifs et $w_n \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{\ln^2 n}$.

Comme nw_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini, la série de terme général w_n est donc divergente (cf. les séries de Bertrand). La série $\sum u_n$ est la différence d'une série convergente $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln}$ et d'une série divergente $\sum_{n\geq 2} w_n$.

Elle est donc divergente.

Cet exemple présente aussi l'intérêt de mettre en évidence deux séries, l'une convergente, l'autre divergente, dont les termes généraux sont équivalents. Il montre que le théorème de comparaison ne s'applique qu'à des séries à termes tous de même signe.

Suites et séries de fonctions

Suite de fonctions

Définition 4.3. On appelle suite de fonctions sur $\mathbb{R}$, et on note (f_n), toute application$n \mapsto f_n$ de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$\mathcal{F}(E, F)$ désigne l'ensemble des fonctions de E vers F.

Exemple 4.5. $f_n: \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f_n(x) = \frac{2nx^2-1}{nx+\ ^2}. \end{array} \right.$

Exemple 4.6. $f_n: \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f_n(x) = \cos(nx). \end{array} \right.$

Exemple 4.7. $f_n: \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f_n(x) = x^n. \end{array} \right.$

Convergence simple d'une suite de fonctions

Définition 4.4.

On dit qu'une suite de fonctions (f_n) converge simplement sur E si, pour tout x de E, la suite numérique $\left(f_n(x)\right)_n$ est convergente dans F.

Exemple 4.8. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $f_n(x) = \begin{cases} n \sin\frac{x}{n} & si\ \ x \neq 0 \\ 0 & si\ \ x = 0. \end{cases}$

- Si $x = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.
- Si $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x \frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = x$.

Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\left(f_n(x)\right)$ converge, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Si (f_n) converge simplement sur I, pour tout x de I, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ est unique; On note ce nombre $f(x)$ et on définit ainsi une fonction $\begin{array}{l} f: I \to F \\ x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x) \end{array}$

Définition 4.5.

Lorsque la suite (f_n) converge simplement sur I, alors la fonction f définie, pour tout $x \in I$, par $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ est appelée « limite simple sur I» de la suite de fonctions (f_n).

On note: $(f_n) \underset{x \in I}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$.

Remarque 4.3.

En général, on ne connaît pas d'avance la fonction f. On la construit point par point en étudiant la limite de $\left(f_n(x)\right)_n$.

Exemple 4.9. $f_n: \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f_n(x) = \frac{2nx^2-1}{nx+x^2} \end{array} \right.$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 2x$, $(f_n) \underset{x \in \mathbb{R}_+^*}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$ où $f(x) = 2x$.

Exemple 4.10. $f_n(x) = \begin{cases} n \sin\frac{x}{n} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} x & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$,

$(f_n) \underset{x \in \mathbb{R}}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} (x \mapsto x)$.

Convergence uniforme

Définition 4.6. Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement sur I vers f. On dit que (f_n) converge uniformément sur I vers f et on note

$(f_n) \underset{x \in I}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ lorsque :

1- $m_n = \underset{x \in I}{sup}\ (|f_n - f(x)|)$ existe;

2- $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = 0$.

Séries de fonctions

Introduction.

Comme pour les séries numériques, nous procédons par sommes successives pour obtenir, à partir d'une suite (f_n) de fonctions, la série de fonctions $(\sum f_n)$.

Pour étudier la série $(\sum f_n)$, nous définirons la suite (S_n) des sommes partielles:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

(S_n) est une suite de fonctions, dont nous savons (voir la partie sur les suites de fonctions) définir et étudier la convergence simple ou uniforme.

Définition 4.7. Soit (f_n) une suite de fonctions d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ (ou d'une partie de $\mathbb{C}$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On notera $(\sum f_n)$ la série de fonctions associée et (S_n) la suite des fonctions somme partielle associée,

pour $x \in I,\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x)$.

Convergence simple.

Définition 4.8. La série $(\sum f_n)$ converge simplement sur I si la suite de fonctions (S_n) converge simplement sur I.

Méthode

Définition 4.9. La fonction limite sera alors notée S ou $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, et appelée somme de la série $(\sum f_n)$. On notera $(\sum f_n) \underset{x \in \mathrm{I}}{\overset{\mathrm{CVS}}{\longrightarrow}} \mathrm{S}$.

À la différence des suites de fonctions, la fonction limite de la série sera en général difficile à exprimer, S a en général une existence «théorique».

Remarque 4.4.

La fonction R_n, (reste partiel au rang n) est définie sur I si et seulement si la série de fonctions $(\sum f_n)$ converge simplement sur I.

En désignant par S sa somme, $R_n = S - S_n$ soit $(\forall x \in I)\ R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$

$(\sum f_n)$ converge simplement sur I vers S si et seulement si la suite (R_n) converge simplement sur I vers 0.

$$(\sum f_n) \underset{x \in I}{\overset{CVS}{\rightarrow}} S \iff (R_n) \underset{x \in I}{\overset{CVS}{\rightarrow}} 0$$

Exemple 4.11. Série géométrique: $(\sum x_n)$

La somme partielle S_n est définie par $S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ pour tout $x \neq 1$ et $S_n(1) = n + 1$.

La série numérique $(\sum x^n)$ converge si et seulement si $|x| < 1$, donc pour $x \in]-1,1[$.

La somme de la série géométrique est la fonction S définie sur $]-1,1[$ par: $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

La fonction reste d'ordre n est ici explicitable : $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

Exemple 4.12. Série $(\sum \frac{sin(nx)}{n^2})$.

Pour tout x réel : $\left|\frac{sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$.

La série numérique $(\frac{sin(nx)}{n^2})$ est donc convergente pour x fixé.

La série de fonctions $(\frac{sin(nx)}{n^2})$ est donc simplement convergente sur $\mathbb{R}$. On ne sait pas exprimer sa somme pour l'instant.

Exemple 4.13. Série alternée $(\sum \frac{(-1)^n}{x+n})$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Soit $x \geq 0$ fixé, $\frac{1}{x+n} \geq 0$. La série est donc bien une série alternée.

De plus, la suite (positive) $(\frac{1}{x+n})_n$ décroît vers 0.

La série numérique est donc convergente pour tout x réel, d'après le critère de convergence des séries alternées.

Si on ne sait pas exprimer simplement le reste, on sait en revanche le majorer d'après le même critère de convergence, c.à.d. $|R_{n+1}| \leq |u_{n+1}|$

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+) \ |R_n(x)| \leq \frac{1}{x+n+1}.$$

La série de fonctions $(\sum \frac{(-1)^n}{x+n})$ est donc simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

Convergence uniforme

Définition 4.10. La série $(\sum f_n)$ converge uniformément sur I si la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur I.

Toute série de fonctions qui converge uniformément sur I converge simplement sur I.

Théorème 4.2. (Convergence simple et convergence uniforme)

Soit $(\sum f_n)$ une série de fonctions qui converge simplement. Alors elle converge uniformément si et seulement si la suite des restes partiels (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

Cela est évident car $R_n = S - S_n$.

Dans le cadre des séries de fonctions, la convergence uniforme sera plus difficile à établir directement, car en général, nous ne disposerons pas d'une expression simple de R_n.

Exemple 4.14. Série géométrique: ($\sum x^n$)

Dans le cas de la série géométrique, nous savons qu'elle converge simplement sur $]-1,1[$ et nous disposons d'une expression explicite du reste R_n:

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

$lim_{x\to 1^-} R_n(x) = +\infty$, donc $\sup\limits_{x \in]-1,1[} \{|R_n(x)|\} = +\infty$.

La série ne converge donc pas uniformément sur $]-1,1[$.

Exemple 4.15. Série alternée: $\left(\sum \frac{(-1)^n}{x+n}\right)$

Reprenons l'exemple: $\left(\sum \frac{(-1)^n}{x+n}\right)$, $x \in \mathbb{R}_+$.

On dispose d'une majoration de R_n:

$|R_n(x)| \leq \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ donc, $m_n = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}_+} \{R_n(x)\} \leq \frac{1}{n+1}$.

$\lim_{n\to\infty} m_n = 0$, donc la série $\left(\sum \frac{(-1)^n}{x+n}\right)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Convergence normale

Définition 4.11.

Soit $(\sum f_n)$ une série de fonctions définies sur I et $m_n = \sup\limits_{x \in I} \{|f_n(x)|\}$

($m_n \in \mathbb{R}_+$ ou $m_n = +\infty$).

On dit que la série de fonctions $(\sum f_n)$ est normalement convergente sur I lorsque la série numérique $\sum m_n$ est convergente.

Théorème 4.3. (*Un critère de convergence normale*)

Soit (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La série $(\sum f_n)$ converge normalement sur I si et seulement si:

1. il existe une série numérique à termes positifs convergente $(\sum a_n)$;
2. $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (\forall x \in I) \quad |f_n(x)| \leq a_n$.

Exemple 4.16.

$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}$.

La série $(\sum f_n)$ est normalement convergente.

En effet, $\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Remarque. 4.5

Si la série $(\sum f_n)$ converge normalement, elle converge en particulier absolument pour tout x de I.

Théorème 4.4. (*Lien entre convergence normale et convergence uniforme*)

Soit (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{R}$. Si $(\sum f_n)$ est normalement convergente sur I, alors $(\sum f_n)$ est uniformément convergente sur I.

Résumé.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{CN} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\mathbf{CU} \arrow[dr, Rightarrow] & & \mathbf{CA} \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & \mathbf{CS} &
\end{tikzcd}$$

Toutes les réciproques sont fausses.

Séries entières

Définition 4.12.

On appelle série entière définie par la suite de coefficients (a_n), la série des fonctions

$$u_n\colon\ x \in \mathbb{R} \longmapsto a_n x^n.$$

Par abus, cette série de fonctions $\sum u_n$ est notée $\sum a_n x^n$.

L'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels la série numérique $\sum a_n x^n$ converge est appelé domaine de convergence de la série entière et la fonction $S: D \to \mathbb{R}$ définie par

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est appelée somme de cette série entière.

Exemple 4.17.

La série entière $\sum x^n$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$ et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Exemple 4.18.

La série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et par définition

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} := e^x.$$

Rayon de convergence

Lemme 4.1. (Lemme d'Abel)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < |x_0|$, la série numérique $\sum a_n x^n$ est absolument convergente.

Définition 4.13.

On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$, le nombre

$$R = sup\{r \geq 0 \ / \ (a_n r^n) \ est \ bornée\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Exemple 4.19.

Rayon de convergence de $\sum x^n$.

$$\{r \geq 0/(r^n) \ est \ bornée\} = [0,1] \ \ donc \ R = 1.$$

Exemple 4.20.

Rayon de convergence de $\sum \frac{x^n}{n!}$.

$$\{r \geq 0 \ / \ \left(\frac{r^n}{n!}\right) \ est\ bornée\} = \mathbb{R}_+ \ \ donc \ \ R = +\infty.$$

Exemple 4.21.

Rayon de convergence $\sum n!\, x^n$.

$$\{r \geq 0 \ / \ (n!\, r^n) \ est\ bornée\} = \{0\} \ \ donc\ R = 0.$$

Convergence simple.

Théorème 4.5. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et $x \in \mathbb{R}$.

Si $|x| < R$ alors la série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente.

Si $|x| > R$ alors la série $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement (plus précisément la suite $(a_n x^n)$ n'est même pas bornée).

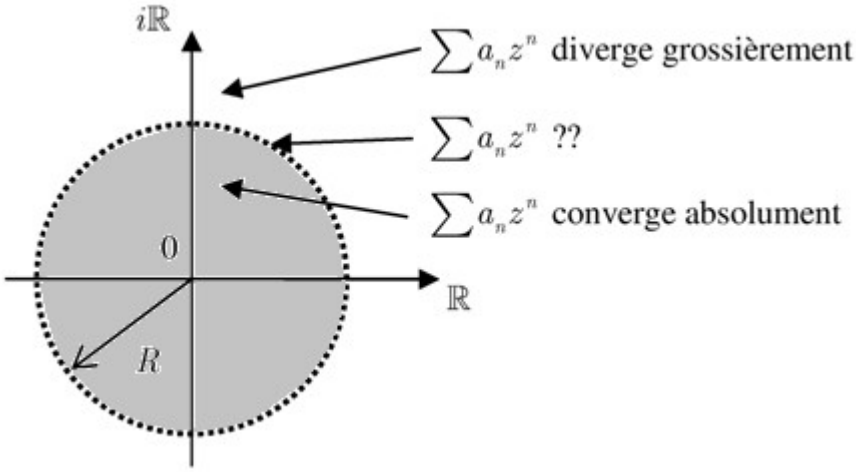
Corollaire. Soit D le domaine de convergence d'une série entière de rayon de convergence R.

Si $R = 0$ alors $D = \{0\}$.

Si $R = +\infty$ alors $D = \mathbb{R}$.

Si $R \in]0, +\infty[$ alors $B(0, R) \subset D \subset \overline{B(0, R)}$ en notant $B(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < R\}$

Sur le cercle de centre 0 et de rayon R, les natures de $\sum a_n x^n$ peuvent être diverses.



Définition 4.14.

Le disque

$$B(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < R\}$$

est appelé disque ouvert de convergence de la série entière.

Remarque 4.6.

Sur ce disque, la série entière converge assurément. Elle peut aussi converger en certains points du cercle limite, qu'il faut étudier cas par cas.

Calcul du rayon de convergence

Idée: On sait

$|x| < R \Rightarrow \sum a_n x^n$ converge

$|x| > R \Rightarrow \sum a_n x^n$ diverge.

Par contraposition:

Si $\sum a_n x^n$ converge alors $|x| \leq R$.

Si $\sum a_n x^n$ diverge alors $R \leq |x|$.

Exploitation de la règle de d'Alembert

Rappel:

Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes non nuls à partir d'un certain rang.

On suppose

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

En exploitant ce critère, on étudie la convergence de $\sum u_n x^n$ et précise le rayon de convergence R.

Exemple 4.22.

Rayon de convergence de

$$\sum (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n x^n.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Posons $u_n(x) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n x^n$.

Pour $x \neq 0$ et $n \geq 2$, on a $u_n \neq 0$.

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-1}\frac{2^{\mathrm{n}+1}}{2^{\mathrm{n}}}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| \to 2|x|.$$

Si $|x| < \frac{1}{2}$ alors $\sum u_n(x)$ est absolument convergente.

Si $|x| > \frac{1}{2}$ alors $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement.

On en déduit $R = \frac{1}{2}$.

Séries de Fourier: Définitions et Résultats

Définition 4.15. L'expression mathématique

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx))$$

s'appelle une série de Fourier.

On peut commencer par définir une expression semblable quand la somme est finie:

Définition 4.16. Un **polynôme de Fourier** (ou **polynôme trigonométrique**) est une expression de la forme

$$F_n(x) = a_0 + (a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x)) + \cdots + (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

qui s'écrite aussi

$$F_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Les constantes a_0, a_i et b_i, $i = 1, \dots, n$, s'appellent les coefficients de $F_n(x)$.

Les polynômes de Fourier sont des fonctions 2π −périodiques.

On utilise les identités trigonométriques

$$\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\sin\big((m+n)x\big) + \sin\big((m-n)x\big)\right]$$

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos\big((m+n)x\big) + \cos\big((m-n)x\big)\right]$$

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos\big((m-n)x\big) - \cos\big((m+n)x\big)\right]$$

pour prouver les formules intégrales

1) pour $n \geq 0$ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, dx = 0$,
2) pour m et n $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\, dx = 0$,
3) pour $n \neq m$ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\, dx = 0$,
4) pour $n \geq 1$ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\, dx = \pi$.

En utilisant les formules ci-dessus, on déduit le résultat suivant :

Théorème 4.6.

$$F_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

On a

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\, dx, \\ a_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) \cos(kx)\, dx, \quad 1 \leq k \leq n \\ b_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) \sin(kx)\, dx, \quad 1 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Ce théorème permet d'associer une série de Fourier à une fonction 2π-périodique.

Définition 4.17. Soit f une fonction 2π-périodique intégrable sur $[-\pi, \pi]$. On définit

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \\ a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \quad n \geq 1 \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

La série trigonométrique

$$a_0 + \sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

s'appelle *la série de Fourier* associée à la fonction f. Nous utiliserons la notation

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Remarque. Si la fonction f est paire alors $b_n = 0$, pour $n \geq 1$ **et si** f est impaire alors $a_n = 0$, pour $n \geq 0$.

Exemple 4.23. Trouver la série de Fourier de la fonction

$$f(x) = x, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Réponse. Puisque $f(x)$ est impair on a $a_n = 0$, pour $n \geq 0$. On cherche les coefficients b_n. Pour $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}.$$

On déduit

$$b_n = -\frac{2}{n}\cos(n\pi) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Par conséquent

$$f(x) \sim 2\left(\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \cdots\right).$$

Exemple 4.24. Trouver la série de Fourier de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ \pi, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Réponse. On a

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_0^{\pi} \pi dx\right) = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi\cos(nx)\,dx = 0, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi sin(nx)\,dx = \frac{1}{n}(1 - \cos(n\pi)) = \frac{1}{n}(1 - (-1)^n), \; n \geq 1.$$

Nous obtenons $b_{2n} = 0$ et $b_{2n+1} = \frac{2}{2n+1}$.

Par conséquent, la série de Fourier de $f(x)$ est

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + 2\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\right).$$

Chapitre 5

Transformation de Fourier

Transformée de Fourier

5.1- Définition et propriétés.

Définition 5.1.

Soit f une fonction intégrable c.-à-d $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt < +\infty$. On appelle *transformée de Fourier* de f, qu'on note $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega t}\,dt, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Cette intégrale est bien définie puisque $\left|f(t)e^{-2\pi i\omega t}\right| = |f(t)|$ et f est une fonction intégrable.

Exemple 5.1. Soit la fonction suivante

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & si \quad t \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \end{cases} \qquad \text{(fonction porte)}$$

$$(\mathcal{F}\Pi)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t)e^{-2\pi i\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} \Pi(t)e^{-2\pi i\omega t}\,dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Pi(t)e^{-2\pi} \quad dt + \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \Pi(t)e^{-2\pi i\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i\omega t}\,dt$$

Si $\omega \neq 0$ alors

$$(\mathcal{F}\Pi)(\omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i\omega t}\,dt = \left[\frac{e^{-2\pi i\omega t}}{-2\pi i\omega}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi i\omega}\left(e^{\pi i\omega} - e^{-\pi i\omega}\right) = \frac{\sin \pi\omega}{\pi\omega}.$$

Si $\omega = 0$ alors

$$(\mathcal{F}\Pi)(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dt = [t]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Propriétés.

1- $\mathcal{F}f$ est continue, bornée, $\lim_{|\omega|\to+\infty} (\mathcal{F}f)(\omega) = 0$.

2- $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}f + \beta\mathcal{F}g$.

3- $\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}f(\omega) = -2\pi i\mathcal{F}\big(tf(t)\big)(\omega)$.

4- $\frac{d^n}{d\omega^n}\mathcal{F}f(\omega) = (-2\pi i)^n\mathcal{F}\big(t^n f(t)\big)(\omega)$.

5- $\mathcal{F}\big(f'(t)\big) = 2\pi i\omega\mathcal{F}\big(f(t)\big) = 2\pi i\omega(\mathcal{F}f)(\omega)$.

6- $\mathcal{F}\left(f^{(n)}(t)\right) = (2\pi i\omega)^n\mathcal{F}\big(f(t)\big) = (2\pi i\omega)^n(\mathcal{F}f)(\omega)$.

7- $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}|\mathcal{F}f(\omega)|^2\,d\omega$.

8- $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}(\mathcal{F}f)(\omega)e^{2\pi i\omega t}\,d\omega$.

9- $\mathcal{F}\big(f(t-a)\big) = e^{-2\pi i\omega a}\mathcal{F}f(\omega)$.

10- $\mathcal{F}\left(e^{2\pi i\omega_0 t}f(t)\right) = \mathcal{F}f(\omega-\omega_0)$.

11- $\mathcal{F}\big(f(at)\big) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}f\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

12- $\mathcal{F}\left(\bar{f}(t)\right) = \overline{\mathcal{F}f}(-\omega)$.

Proposition 5.1. Soient f, g deux fonctions intégrables. Alors $f * g$ est intégrable et

$$\mathcal{F}\big((f*g)(t)\big) = \mathcal{F}\big(f(t)\big).\mathcal{F}\big(g(t)\big).$$

Autrement dit, la transformée de Fourier d'un produit de convolution est égale au produit ordinaire des transformées de Fourier de chaque facteur.

Démonstration. On a

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(t-x)\, dx, \quad t \in \mathbb{R}$$

Donc

$$\mathcal{F}\big((f * g)(t)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t)\, e^{-2\pi i\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(t-x)\, e^{-2\pi i\omega t} dxdt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i\omega x}\, g(t-x)\, e^{-2\pi i\omega (t-x)} dxdt.$$

On pose $u = x$ et $v = t - x$ alors $x = u$, $t = u + v$ et

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial t}{\partial u} & \dfrac{\partial t}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

D'où

$$\mathcal{F}\big((f * g)(t)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2\pi i\omega u} du \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) e^{-2\pi i\omega v} dv$$

$$= \mathcal{F}\big(f(t)\big)\mathcal{F}\big(g(t)\big).$$

Transformée de Fourier inverse

Définition 5.2. En tout point où f est continue on peut définir la transformée inverse qui permet connaissant $\mathcal{F}f$ de déterminer $f(t)$.

$$\mathcal{F}f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega t}\, dt \Leftrightarrow f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f(\omega)e^{2\pi i\omega t}\, d\omega$$

On notera $f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)$.

Application à la résolution d'équations différentielles.

Exemple 5.2. On cherche une fonction $x(t)$ intégrable et solution de l'équation différentielle

$$-y" + y = e^{-2|t|}, \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Montrons que si $x(t)$ vérifie cette équation différentielle, alors

$$(\mathcal{F}x)(\omega) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{1+4\pi^2\omega^2} - \frac{1}{4+4\pi^2\omega^2}\right)$$

Soit $x(t)$ solution de l'équation alors $-x"(t) + x(t) = e^{-2|t|}$

donc

$$\mathcal{F}\big(-x"(t) + x(t)\big)(\omega) = \mathcal{F}\big(e^{-2|t|}\big)(\omega)$$

$$\Updownarrow$$

$$-\mathcal{F}\big(x"(t)\big)(\omega) + \mathcal{F}\big(x(t)\big)(\omega) = \mathcal{F}\big(e^{-2|t|}\big)(\omega)$$

On a

$$\mathcal{F}\big(x'(t)\big)(\omega) = 2i\pi\mathcal{F}\big(x(t)\big)(\omega),$$

$$\mathcal{F}\big(x"(t)\big)(\omega) = (2i\pi)^2\mathcal{F}\big(x(t)\big)(\omega),$$

$$\mathcal{F}\big(e^{-2|t|}\big)(\omega) = \frac{2a}{a^2+4\pi^2\omega^2}.$$

Donc

$$-\Big(-4\pi^2\omega^2\mathcal{F}\big(x(t)\big)(\omega)\Big) + \mathcal{F}\big(x(t)\big)(\omega) = \frac{2\times 2}{2^2+4\pi^2\omega^2},$$

alors

$$(1+4\pi^2\omega^2)\mathcal{F}\big(x(t)\big)(\omega) = \frac{4}{4+4\pi^2\omega^2}.$$

D'où

$$\mathcal{F}\big(x(t)\big)(\omega) = \frac{1}{(1+\pi^2\omega^2)(1+4\pi^2\omega^2)}$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{1+\pi^2\omega^2} - \frac{1}{1+4\pi^2\omega^2}\right),$$

donc

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{4}{3}\frac{1}{1+4\pi^2\omega^2} - \frac{4}{3}\frac{1}{4+4\pi^2\omega^2}\right)(t)$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2}{3}\frac{2\times 1}{1^2+4\pi^2\omega^2} - \frac{1}{3}\frac{2\times 2}{2^2+4\pi^2\omega^2}\right)(t)$$

$$= \frac{2}{3}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2\times 1}{1^2+4\pi^2\omega^2}\right)(t) - \frac{1}{3}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2\times 2}{2^2+4\pi^2\omega^2}\right)(t)$$

$$= \frac{2}{3}e^{-|t|} - \frac{1}{3}e^{-2|t|}.$$

Chapitre 6

Transformation de Laplace

Transformation de Laplace

Définition 6.1.

Soit $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

(1) f est continue par morceaux

(2) f est d'ordre exponentiel ($\exists M,\ \alpha > 0$ et t_0 tq: $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \forall t \geq t_0$).

On appelle transformation de Laplace de f, la fonction

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big)(p) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-p}\ dt, \qquad p \in \mathbb{C}.$$

Remarque 6.1.

Si f vérifie les conditions (1) et (2), alors $\mathcal{L}\big(f(t)\big)(p)$ existe (l'intégrale converge).

Exemple 6.1. Soit la fonction de Heaviside

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \qquad \text{(fonction echelon unité)}$$

$\mathcal{L}\big(U(t)\big)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p},\ si\ \mathcal{R}e(p) > 0.$

Exemple 6.2. $f(t) = U(t)e^{\alpha t} = \begin{cases} e^{\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases},\ \alpha \in \mathbb{C}.$

$\mathcal{L}\big(f(t)\big)(p) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p-\alpha},\ si\ \mathcal{R}e(p) > Re(\alpha).$

Exemple 6.3. $f(t) = \begin{cases} t^{\alpha} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases},\ \alpha > -1$

$\mathcal{L}\big(f(t)\big)(p) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha} e^{-pt}\, dt,$

on pose $u = pt$ alors $dt = \frac{du}{p}$, donc

$\mathcal{L}\big(f(t)\big)(p) = \frac{1}{p^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty} u^{\alpha}e^{-u}\,du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}},\ (\mathcal{R}e(p) > 0).$

Propriétés.

1- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ admettant des transformées de Laplace, on a:

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(p) = \alpha\mathcal{L}(f)(p) + \beta\mathcal{L}(g)(p).$$

Exemple 6.4. Calculer $\mathcal{L}(\cos at)$ et $\mathcal{L}(\sin at)$

On a:

$\cos at = \frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2} \Rightarrow \mathcal{L}(\cos at) = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{L}\big(e^{iat}\big) + \mathcal{L}\big(e^{-iat}\big)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+ia}\Big) = \frac{p}{p^2+a^2}.$

$\sin at = \frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i} \Rightarrow \mathcal{L}(\sin at) = \frac{1}{2i}\Big(\mathcal{L}\big(e^{iat}\big) - \mathcal{L}\big(e^{-ia}\ \big)\Big) = \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{p-ia} - \frac{1}{p+ia}\Big) = \frac{a}{p^2+a^2}.$

Exemple 6.5. Soit $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, on pose $f_a(t) = \begin{cases} f(t-a) & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases}$, alors:

$\mathcal{L}\big(f_a(t)\big)(p) = \int_0^{+\infty} f(t-a)e^{-pt}\,dt = e^{-ap}F(p), (u = t-a).$

Exemple 6.6. $\forall k > 0$: $\mathcal{L}\big(f(kt)\big)(p) = \int_0^{+\infty} f(kt)e^{-pt}\,dt = \frac{1}{k}F\left(\frac{p}{k}\right), (u = kt).$

Exemple 6.7. $\lim_{p\to+\infty} F(p) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$,
$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\to+\infty} pF(p)$.

Exemple 6.8. $\mathcal{L}\big(f'(t)\big)(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}\,dt$

$$= [f(t)e^{-pt}]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$$

$$= pF(p) - f(0^+).$$

$\mathcal{L}\big(f''(t)\big)(p) = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+).$

$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right)(p) = p^nF(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{k-1} f^{(n-k)}(0^+).$

Exemple 6.9. $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)\,du\right)(p) = \frac{F(p)}{p}$.

Exemple 6.10. $\mathcal{L}\big(t^n f(t)\big)(p) = (-1)^n F^{(n)}(p)$.

Exemple 6.11. $\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(p) = \int_p^{+\infty} F(u)\,du$.

Exemple 6.12. Soit $(f * g)(t) = \int_0^{+\infty} f(u)g(t-u)\,du$, alors:

$$\mathcal{L}(f * g)(t)(p) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)(p).\mathcal{L}\big(g(t)\big)(p).$$

Exemple 6.13. $\forall n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{L}\big(t^n U(t)\big)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Exemple 6.14. $\mathcal{L}(ch\ at)(p) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right)(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p+a}\right) = \frac{p}{p^2-a^2}$.

$$\mathcal{L}(sh\ at)(p) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right)(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+a}\right) = \frac{a}{p^2-a^2}.$$

Exemple 6.15. $\mathcal{L}\big(e^{-at} f(t)\big)(p) = F(p+a)$.

Exemple 6.16. $\mathcal{L}(t^n e^{\alpha t})(p) = \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$, $\mathcal{R}e(p) > \mathcal{R}e(\alpha)$.

Exemple 6.17. $\mathcal{L}\big(\sqrt{t}\big)(p) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p^3}}$. $\mathcal{R}e(p) > 0$, $\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)(p) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$. $\mathcal{R}e(p) > 0$.

Table des transformées de Laplace.

$f(t)$	$\mathcal{L}\big(f(t)\big)(p) = F(p)$
$U(t)$ échelon unitaire	$\frac{1}{p}$
t (rampe unitaire) si $t \geq 0$	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$f(t-a)$ (retard)	$e^{-pa}F(p)$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$

te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$	$\frac{1}{(p+\alpha)(p+\beta)}$
$\frac{\beta e^{-\beta t}-\alpha e^{-\alpha t}}{\beta-\alpha}$	$\frac{p}{(p+\alpha)(p+\beta)}$

Exemple 6.18.

$$\mathcal{L}(t^3 - t + 5 + e^{-2t} + \sin 4t) = \mathcal{L}(t^3) - \mathcal{L}(t) + 5\mathcal{L}(1) + \mathcal{L}(e^{-2t}) + \mathcal{L}(\sin 4t)$$

$$= \frac{3!}{p^{3+1}} - \frac{1!}{p^{1+1}} + \frac{5}{p} + \frac{1}{p-(-2)} + \frac{4}{p^2+4^2}$$

$$= \frac{6}{p^4} - \frac{1}{p^2} + \frac{5}{p} + \frac{1}{p+2} + \frac{4}{p^2+16}, \mathcal{R}e(p) > 2.$$

Exemple 6.19. $\mathcal{L}(e^{-at}\sin bt)(p) = \mathcal{L}(\sin bt)(p+a)$

$$= \frac{1}{b}\mathcal{L}(\sin t)\left(\frac{p+a}{b}\right) = \frac{b}{(p+a)^2+b^2}.$$

Exemple 6.20. $\mathcal{L}(\sin(t-a))(p) = e^{-ap}\mathcal{L}(\sin t)(p) = \frac{e^{-ap}}{p^2+1}$.

Transformée inverse

Définition 6.2.

On défini une transformation inverse, notée $\mathcal{L}^{-1}$, telle que:

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big)(p) = F(p) \Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\big(F(p)\big) = f(t).$$

Cette transformation inverse est définie comme suit :

Définition 6.3.

La transformée inverse de Laplace de la fonction $F(p)$, notée $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(F(p)\big)$ est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, e^{pt} dp,$$

où p, appelé variable de Laplace, est telle que l'intégrale existe.

Exemples.

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^m}\right) = \frac{1}{(m-1)!}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(m-1)!}{p^m}\right) = \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1},\ m \geq 1.$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-a}\right) = e^{at},\ \mathcal{R}e(p) > \mathcal{R}e(a).$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p-a)^n}\right) = \frac{1}{(n-1)!}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(n-1)!}{(p-a)^{(n-1)+1}}\right) = \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at},\quad \mathcal{R}e(p) > \mathcal{R}e(a).$

$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-pb}\frac{p}{p^2+a^2}\right) = \cos a(t-b),\ \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-pb}\frac{1}{p^2+a^2}\right) = \frac{1}{a}\sin a(t-b).$

Résolution d'une équation différentielle linéaire

On cherche la solution $y(x)$ de l'équation différentielle :

$$y'' + 4y' + 3y = 2e^{-2x},$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$y(0) = 0\ \ et\ \ y'(0) = 1.$$

Prenons la transformée de Laplace de chaque membre de l'égalité. Le terme forcé est une exponentielle, dont on a déjà calculé la transformée de Laplace.

Donc la transformée du membre de droite est :

$$\mathcal{L}(2e^{-2x}) = \frac{2}{p+2}.$$

Notons $F(p)$ (la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$. Par linéarité, la transformée de Laplace du premier membre est :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y'' + 4y' + 3y) &= \mathcal{L}(y'') + 4\mathcal{L}(y') + 3\mathcal{L}(y)\\ &= p\mathcal{L}(y') - y'(0) + 4\big(p\mathcal{L}(y) - y(0)\big) + 3\mathcal{L}(y)\\ &= p^2\mathcal{L}(y) - py(0) - y'(0) + 4p\mathcal{L}(y) - 4y(0) + 3\mathcal{L}(y)\\ &= (p^2 + 4p + 3)F(p) - 1.\end{aligned}$$

on obtient l'équation suivante, donnant l'expression de $F(p)$ (en fonction de p :

$$(p^2 + 4p + 3)F(p) - 1 = \frac{2}{p+2} \Rightarrow F(p) = \frac{p+4}{(p+2)(p+1)(p+3)} = \frac{-2}{p+2} + \frac{3/2}{p+1} + \frac{1/2}{p+3}.$$

Reste à déterminer la transformée inverse de cette expression, par linéarité on sait que :

$$\begin{aligned}y(x) &= -2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+2}\right) + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+3}\right)\\ &= -2e^{-2x} + \frac{3}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-3x}. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Soit le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases}-2x' + y' - 2x + 4y = 1 - 2t^2\\ x' + 2y' + x - 3y = t^2 - t + 2\end{cases}, \quad \begin{pmatrix}x(0)\\ y(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-2\mathcal{L}(x') + \mathcal{L}(y') - 2\mathcal{L}(x) + 4\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(1 - 2t^2)\\ \mathcal{L}(x') + 2\mathcal{L}(y') + \mathcal{L}(x) - 3\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(t^2 - t + 2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-2\big(pX - x(0)\big) + \big(pY - y(0)\big) - 2X + 4Y = \frac{1}{p} - 2\frac{2}{p^3}\\ \big(pX - x(0)\big) + 2\big(pY - y(0)\big) + X - 3Y = \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-2(p+1)X + (p+4)Y = \frac{p^2-4}{p^3}\\ (p+1)X + (2p-3)Y = \frac{2-p+2p^2}{p^3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow X = \frac{2}{p^3} \text{ et } Y = \frac{1}{p^2} \Rightarrow \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \mathcal{L}^{-1}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}(p) = \begin{pmatrix}t^2\\ t\end{pmatrix}.$$

Lien avec la transformée de Fourier

On a :

$$\mathcal{F}\big(f(t)\big)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2\pi i\omega t} dt$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{0} f(t)\, e^{-2\pi i\omega t} dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-2\pi i\omega}\ dt\right)$$

$$= \left(\int_{0}^{+\infty} f(-t)\, e^{2\pi i\omega t} dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-2\pi i\omega t} dt\right)$$

D'où :

$$\mathcal{F}\big(f(t)\big)(\omega) = \Big(\mathcal{L}\big(f(-t)\big)(-2\pi i\omega) + \mathcal{L}\big(f(t)\big)(2\pi i\omega)\Big).$$

On peut dire que la transformation de Laplace est une généralisation de la transformation de Fourier.

Exercices

Série 1

Ex 1. (Intégrales simples)

Calculer les intégrales suivantes

1) $\int_0^1 \arcsin x\, dx$, 2) $\int_0^1 2x\, arctg\, x\, dx$, 3) $\int_5^{12} \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$, 4) $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\, dx$,

5) $\int \frac{dx}{x^2+4}$, 6) $\int \frac{\mathrm{tg}^4 x}{\cos^2 x} dx$, 7) $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1} dx$, 8) $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8} dx$,

9) $\int \cos 2x \sin 4x\, dx$, 10) $\int_{1/2}^{3/2} \sqrt{4x^2-4x+5}\, dx$.

Ex 2. (Intégrales doubles)

1- Calculer l'intégrale double suivante $\iint_D x^2\, y\, dxdy$, où D est le domaine étant délimité par les courbes: $y = x^2$ et $y = \frac{2}{1+x^2}$.

2- Calculer l'intégrale double suivante $\iint_D \frac{xy}{4x^2+9y^2}\, dxdy$, telle que

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \geq 0, \qquad x \geq 0, \qquad 4 \leq \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 9\right\}.$$

3- Calculer l'intégrale suivante en passant en coordonnées polaires

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dydx.$$

4- Calculer l'aire de la figure délimitée par la parabole $y^2 = 2x$ et la droite $y = x$.

5- ***i-*** Calculer $\iint_\Delta dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

ii- Calculer l'aire de la surface $z = f(x,y) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2$ délimité par sa projection Δ sur le plan (xoy).

Ex 3. (Intégrales triples)

- Calculer $\iiint \frac{4dxdy}{(1+x+y+z)^3}$ sachant que le domaine d'intégration est borné par les plans de coordonnées et le plan $x+y+z=1$.
- Calculer $\iiint_D \frac{6dxdydz}{\sqrt{x^2+4y^2+9z^2}}$ telle que :

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \ 1 \leq x^2+4y^2+9z^2 \ \leq 4\}.$$

Ex 4. (Intégrales impropres)

- Calculer les intégrales impropres suivantes et déduire la nature de chacune

1) $\int_0^2 \ln x \, dx$, 2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$, 3) $\int_0^{+\infty} xe^{-x} \, dx$, 4) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$.

- Etudier la nature des intégrales impropres suivantes

1) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$, 2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(x^3+1)\sqrt{x}} dx$, 3) $\int_2^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{x}\right) dx$,

4) $\int_0^{\pi} \ln(\sin x) \, dx$, 5) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$.

Série 2

Ex 1. Résoudre les équations différentielles suivantes

1) $y\frac{dx}{dy} = \frac{x^3+x}{1-x^2}$,

2) $y' + 2xy = 0$,

3) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$,

4) $y'\sin^2 x - y\, tgx = tgx$,

5) $y'' - 3y' + 2y = 0$,

6) $y'' - 6y' + 9y = 0$,

7) $y'' - 2y' + 5y = 0$,

8) $y'' - 3y' + 2y = 2 - 6x + 2x^2$,

9) $y'' - 6y' + 9y = \cos x + e^{3x}$,

10) $y'' - 2y' + 5y = e^{-x}$.

Ex 2. Calculer les dérivées partielles du premier ordre des fonctions suivantes

1) $f(x,y) = \ln xy - \frac{1}{xy}$,
2) $g(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + e^{x-2\sqrt{y}}$,
3) $h(x,y) = \sin\frac{x}{y} - \cos\frac{y}{x}$.

Ex 3. Soit $g(x,y,z) = f(\frac{x}{y},\frac{y}{z},\frac{z}{x})$ Calculer

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} + z\frac{\partial g}{\partial z}.$$

Ex 4. Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes

1) $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - \frac{2xy}{1+y^2}$,
2) $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Série 3

Ex 1. (Fonctions spéciales) Simplifier

$\Gamma(6)$, $\Gamma(\frac{5}{2})$, $\beta(4,3)$, $\beta(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$, $\Gamma(\frac{-5}{2})$. $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\right)$.

Ex 2. (Séries numériques) Etudier la nature des séries numériques $\sum u_n$ suivantes

$u_n=\frac{1}{n^{3/2}}$, $u_n=\frac{1}{n(\ln n)^3}$, $u_n=\frac{n+1}{n}$, $u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, $u_n=\frac{2^{-n}}{n}$, $u_n=\frac{2^n}{n^n}$.

Ex 3. Etudier la suite de fonctions suivante (convergence simple, convergence uniforme)

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2},\quad I=]0,+\infty[.$$

Ex 4. Etudier (convergence simple, convergence uniforme, convergence normale) la série de fonctions de terme général

$$f_n(x)=nx^2e^{-x\sqrt{n}}\qquad \text{sur } \mathbb{R}_+.$$

Ex 5. (Séries entières) Déterminer le rayon de convergence de la série entière proposée dans chacun des cas suivants:

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n}\right)^n x^n$; $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{1+b^n}x^n$, $a,b\in\mathbb{R}_+^*$; $\sum_{n=0}^{+\infty}n\,2^{n+1}x^n$; $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n$.

Ex 6. (Séries de Fourrier)

Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π–périodique définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(x)=|x|$. En déduire la valeur de la somme suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Série 4

Ex 1. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction f définie par:

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & si \;\; t \in [-1,1], \\ 0 & si \;\; t \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Ex 2. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction porte Π définie par:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & si \;\; t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \\ 0 & si \;\; t \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \end{cases}$$

Déduire $\mathcal{F}\left(\Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)\right)$, $\mathcal{F}\big(t\Pi(t)\big)$, $\mathcal{F}\big(t^2\Pi(t)\big)$.

Ex 3. Calculer

$\mathcal{L}(5t^3 + 3 + 4e^{5t} + \cos 3t + \sin 4t)$, $\mathcal{L}(t^2 e^{3t})$, $\mathcal{L}(e^{-2t} \sin 4t)$, $\mathcal{L}(e^{4t} \operatorname{ch} 5t)$.

Ex 4. Résoudre l'équation différentielle linéaire suivante

$$y'' + 4y' + 3y = 2e^{-2x}$$

avec les conditions initiales suivantes:

$$y(0) = 0 \;\; et \;\; y'(0) = 1.$$

Solution (série 1)

Ex 1. 1) $\int_0^1 \arcsin x\, dx = [x \arcsin x]_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 + \int_0^1 \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} + \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

2) $\int_0^1 2x\, arctg\, x\, dx = [x^2\, arctg\, x]_0^1 - \int_0^1 x^2 \frac{1}{1+x^2} dx$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi}{4} + [-x + arctg\, x]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left(-1 + \frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

3) $\int_5^{12} \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$, on pose

$$x + 4 = t^2,$$

donc

$$x = t^2 - 4 \text{ et } dx = 2t\, dt.$$

Si $x = 5$ alors $t = 3$ et si $x = 12$ alors $t = 4$.

D'où $\int_5^{12} \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx = \int_3^4 \frac{t}{t^2-4} 2tdt = 2\int_3^4 \left(1 + \frac{4}{(t-2)(t+2)}\right) dt$

$$= 2\int_3^4 \left(1 + \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right) dt = 2\left[t + \ln\frac{t-2}{t+2}\right]_3^4$$

$$= 2(4 - \ln 3 - 3 + \ln 5) = 2 + 2\ln\frac{5}{3}.$$

Remarque. Pour $t < 0$ on obtient $\int_5^{12} \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx = \int_{-3}^{-4} \frac{-t}{t^2-4} 2tdt = 2 + 2\ln\frac{5}{3}$.

3) $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\, dx = 16\int_0^2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\, d\frac{x}{2}$,

on pose $\frac{x}{2} = \sin t$ alors $dx = 2\cos t\, dt$,

si $x = 0$ alors $t = 0$ et si $x = 2$ alors $t = \frac{\pi}{2}$.

Donc, $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t \cos t\,dt$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)\,dt$$

$$= \left[2t - \frac{1}{2}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

5) $\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{2d\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c.$

6) $\int \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}dx = \int \operatorname{tg}^4 x\, d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + c.$

7) $\int \sin 4x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 6x + \sin 2x)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\cos 6x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + c$$

$$= -\frac{1}{12}(\cos 6x + 3\cos 2x) + c.$$

8) $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{3x-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{4}{3}\int \frac{3x-1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx,$

on pose $\frac{2x-1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} t$ alors $x = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\operatorname{tg} t\right)$

et $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}(\operatorname{tg}^2 t + 1)dt$, donc

$$\frac{4}{3}\int \frac{3x-1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx = \frac{4}{3}\int \frac{\frac{3}{2}\left(1+\sqrt{3}\operatorname{tg} t\right)-1}{\operatorname{tg}^2 t+1}\frac{\sqrt{3}}{2}(\operatorname{tg}^2 t+1)dt$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int \left(1+3\sqrt{3}\operatorname{tg} t\right)dt = \frac{\sqrt{3}}{3}t - 3\ln|\cos t| + c$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{3}{2}\ln(\cos^2 t) + c$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{3}{2}\ln\frac{1}{\cos^2 t} + c$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{3}{2}\ln(\mathrm{tg}^2 t + 1) + c$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right) + c$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{3}{2}\ln\frac{4}{3}(x^2 - x + 1) + c$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{3}{2}\ln(x^2 - x + 1) + c'.$$

9) $\displaystyle\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx = \int \frac{x^3-6}{(x^2+2)(x^2+4)}dx = \int\left(\frac{2x+3}{x^2+4} - \frac{x+3}{x^2+2}\right)dx$

$$= \int\left(\frac{2x}{x^2+4} + \frac{3}{4}\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\right)dx - \int\left(\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{2}\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\right)dx$$

$$= \ln(x^2+4) + \frac{3}{4}\times 2arctg\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{3}{2}\times\sqrt{2}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{3}{2}arctg\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c.$$

$\int_{1/2}^{3/2}\sqrt{4x^2-4x+5}\,dx = 2\int_{1/2}^{3/2}\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1}\,dx,$

on pose $x - \frac{1}{2} = \mathrm{tg}\,t$ alors $dx = (\mathrm{tg}^2\,t + 1)dt = \frac{1}{\cos^2 t}dt,$

si $x = 1/2$ alors $t = 0$ et si $x = 3/2$ alors $t = \frac{\pi}{4}$.

Donc, $2\int_{1/2}^{3/2}\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\mathrm{tg}^2\,t+1}\,\frac{1}{\cos^2 t}dt$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^3 t}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{\cos^4 t}dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{(1-\sin^2 t)^2}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin t)}{(1-\sin^2 t)^2} = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dy}{(1-y^2)^2}$$

$$= 2\times\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{1+y}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{(1-y)^2}\right)dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\frac{1+y}{1-y}-\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1-y}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}.$$

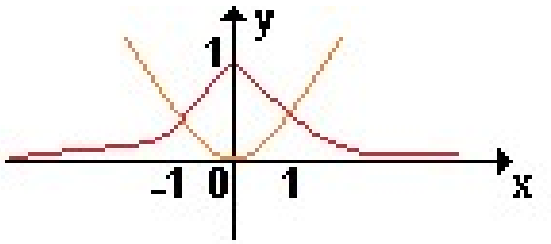
Ex 2. (Intégrales doubles)

1- On a : $y_1 = x^2$ et $y_2 = \frac{2}{1+x^2}$,

alors,

$$y_1 = y_2 \Longrightarrow x^2 = \frac{2}{1+x^2} \Longrightarrow x^4+x^2-2=0$$

$$\Longrightarrow (x^2-1)(x^2+2)=0 \Longrightarrow x=\pm 1.$$



Donc

$$\iint_D x^2\, y\, dxdy = \int_{-1}^{1} x^2\left(\int_{x^2}^{\frac{2}{1+x^2}} ydy\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2 \left(\left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{x^2}^{\frac{2}{1+x^2}} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{4x^2}{(1+x^2)^2} - x^6 \right) dx$$

$$= \int_{0}^{1} \left(\frac{4x^2}{(1+x^2)^2} - x^6 \right) dx = \int_{0}^{1} \left(\frac{4}{1+x^2} - \frac{4}{(1+x^2)^2} - x^6 \right) dx$$

$$= I_1 - I_2 - I_3,$$

où :

$I_1 = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = [4\ arctg\ x]_0^1 = \pi - 0 = \pi.$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{4}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4}{(1+tg^2\theta)^2} (1+tg^2\theta)\ d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\cos^2\theta\ \ d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\theta + 1)\ \ d\theta$$

$$= [\sin 2\theta + 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 + \frac{\pi}{2}.$$

Appliquer le changement $x = tg\theta$, avec $1 + tg^2\theta = \frac{1}{\cos^2}$ et $\cos^2 = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$.

$I_3 = \int_0^1 x^6\, dx = \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{7}.$

D'où, $\iint_D\ x^2\, y\, dxdy = \pi - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{7} = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{7}.$

2- $\iint_D \frac{xy}{4x^2+9y^2}\ dxdy, D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \geq 0,\ \ y \geq 0, 4 \leq \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 9\right\}$

On pose : $\frac{x}{3} = \rho\cos\theta$, $\frac{y}{2} = \rho\sin\theta$ alors

$$4 \leq \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 9 \Rightarrow 4 \leq \rho^2 \leq 9$$

$\Rightarrow 2 \leq \rho \leq 3$ et

$x \geq 0,\ y \geq 0 \Rightarrow \sin\theta \geq 0$ et $\cos\theta \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$,

$J = 6\rho$. D'où

$$\iint_D \frac{xy}{4x^2+9y^2}\,dxdy = \frac{1}{36}\iint_D \frac{xy}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2}\,dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_2^3 \frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}\rho d\rho\right)d\theta$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_2^3 \rho\,d\rho\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_2^3 = \frac{5}{4}.$$

3- $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dydx.$

On pose : $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ alors $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow$ $0 \leq \rho\cos\theta \leq a$ et $0 \leq \rho\sin\theta \leq \sqrt{a^2-\rho^2\cos^2\theta} \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq \rho \leq a$

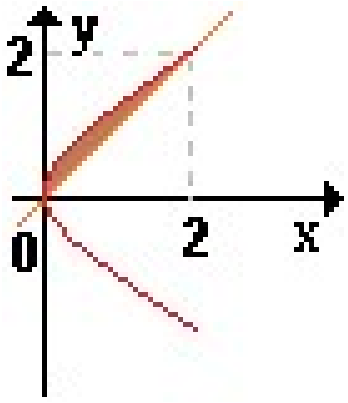
car $\rho\sin\theta \leq \sqrt{a^2-\rho^2\cos^2\theta} \Rightarrow \rho^2 \leq a^2 \Rightarrow \rho \leq a$

On a $J = \rho$ d'où

$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dydx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^a \sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho d\rho\right)d\theta =$

$[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \left[\frac{-1}{2}\times\frac{2}{3}(a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{3}a^3 = \frac{\pi}{6}a^3.$

4- Calculer l'aire de la figure délimitée par la parabole $y^2 = 2x$ et la droite $y = x$.



On a : $x_1 = \frac{1}{2}y^2$ et $x_2 = y$ alors $x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = y \Rightarrow y = 0$ ou $y = 2$ d'où

$$Aire(D) = \int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}y^2}^{y} dx \right) dy = \int_0^2 \left(y - \frac{1}{2}y^2 \right) dy = \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 \right]_0^2 = \frac{2}{3}.$$

5- ***i-*** $\iint_\Delta \ dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \ x^2 + y^2 \ \leq 4\}$

On pose : $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$ alors $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 2$, $J = \rho$

et $\iint_\Delta \ dxdy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \rho d\rho \right) d\theta = 4\pi.$

ii- L'aire de la surface $z = f(x,y) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2$ délimité par sa projection Δ sur le plan (xoy).

$$Aire(\Omega) = \iint_\Delta \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dxdy = \frac{1}{2} \iint_\Delta \sqrt{4 + x^2 + y^2} dxdy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \sqrt{4 + \rho^2} \, \rho d\rho \right) d\theta = \pi \left[\frac{1}{3} (4 + \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3}\pi\left(2\sqrt{2} - 1\right).$$

Ex 3. (Intégrales triples)

- $\iiint \frac{4dxdydz}{(1+x+y+z)^3} = ?$

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \ \text{ et } \ x+y+z \leq 1\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z$$

$$\leq 1-x-y\ \}.$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{4dxdydz}{(1+x+y+z)^3} = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{4dz}{(1+x+y+z)^3} \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[\frac{-2}{(1+x+y+z)^2} \right]_0^{1-x-y} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\frac{2}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{2} \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{-2}{1+x+y} - \frac{1}{2} y \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(-1 - \frac{1}{2}(1-x) + \frac{2}{1+x} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + 2\ln(1+x) \right]_0^1 = 2\ln 2 - \frac{5}{4}.$$

- $\iiint_D \frac{6dxdydz}{\sqrt{x^2+4y^2+9z^2}}$ tq: $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \ 1 \leq x^2+4y^2+9z^2 \ \leq 4\}$.

On pose $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \frac{1}{2}\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \frac{1}{3}\rho\cos\theta \end{cases}$ alors $1 \leq \rho^2 \ \leq 4 \Rightarrow 1 \leq \ \rho \leq 2$, $0 \leq \ \varphi \leq 2\pi$,

$0 \leq \ \theta \leq \pi$ et $J = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\rho^2\sin\theta = \frac{1}{6}\rho^2\sin\theta$, donc

$$\iiint_D \frac{6dxdydz}{\sqrt{x^2+4y^2+9z^2}} = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \right) \left(\int_1^2 \rho d\rho \right)$$

$$= [\varphi]_0^{2\pi}\ [-\cos\theta]_0^{\pi}\ \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_1^2$$

$$= 6\pi.$$

Ex 4. (Intégrales impropres)

1) $\displaystyle\int_0^2 \ln x\, dx = \lim_{a\to 0}\int_a^2 \ln x\, dx = \lim_{a\to 0}[x\ln x - x]_a^2$

$$= \lim_{a\to 0}(2\ln 2 - 2 - a\ln a + a)$$

$$= 2\ln 2 - 2 < \infty,$$

alors $\int_0^2 \ln x\, dx$ cov.

2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \lim_{b\to+\infty}\left(\int_1^b \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}\right)$, on pose $x^2+1=u$ alors $du = 2xdx$

donc,

$$\int_1^b \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int_2^{b^2+1} \frac{xdx}{(x^2+1-1)\sqrt{x^2+1}} = \int_2^{b^2+1} \frac{du}{2(u-1)\sqrt{u}},$$

on pose $u = v^2$ alors $du = 2vdv$

donc,

$$\int_2^{b^2+1} \frac{du}{2(u-1)\sqrt{u}} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{b^2+1}} \frac{2vdv}{2(v^2-1)\sqrt{v^2}} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{b^2+1}} \frac{dv}{(v-1)(v+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{b^2+1}} \left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1}\right) dv = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{v-1}{v+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{b^2+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{b^2+1}-1}{\sqrt{b^2+1}+1} - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}-\frac{1}{b}}{\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}+\frac{1}{b}} - \ln\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2}\right) \to -\ln\left(\sqrt{2}-1\right) < +\infty,$$

d'où, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ cov.

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b xe^{-x}dx\right) = \lim_{b\to+\infty}\left([(-x-1)e^{-x}]_0^b\right)$

$$= \lim_{b\to+\infty}(1-(b+1)e^{-b}) = 1 < +\infty,$$

d'où, $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ cov.

4) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\int_1^b \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx\right)$,

$$\int_1^b \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx = \left[\frac{-1}{x}\ln(1+x^2)\right]_1^b + \int_1^b \frac{1}{x}\frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{b}\ln(1+b^2) + 2[arctg\ x]_1^b$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{b}\ln(1+b^2) + 2arctg\ b - \frac{\pi}{2} \to \ln 2 + 2\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$= \ln 2 + \frac{\pi}{2} < +\infty,$$

d'où, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$ cov.

- Nature des intégrales impropres

1) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$, Il y a un problème en $+\infty$, d'après les règles de Riemann $x^\alpha f(x) \to 0$ avec $\alpha > 1$ entraine que la fonction est intégrable en $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-x^2}\right) = 0$, $\alpha = 2 > 1$ donc $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ cov.

2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(x^3+1)\sqrt{x}}dx$, Il y a un problème en $+\infty$ et en 0,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(x^3+1)\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{x^4}{(x^3+1)\sqrt{x}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^4}{(x^3+1)\sqrt{x}}dx,$$

$\frac{x^4}{(x^3+1)\sqrt{x}} \underset{0}{\sim} x^{\frac{7}{2}} = \frac{1}{x^{-\frac{7}{2}}}$, Il s'agit d'une fonction de Riemann avec $\alpha = -\frac{7}{2} < 1$ donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^4}{(x^3+1)\sqrt{x}} dx$ cov.

$\frac{x^4}{(x^3+1)\sqrt{x}} \underset{+\infty}{\sim} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{-\frac{1}{2}}}$, Il s'agit d'une fonction de Riemann avec $\alpha = -\frac{1}{2} \leq 1$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{x^4}{(x^3+1)\sqrt{x}} dx$ div.

D'où $\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(x^3+1)\sqrt{x}} dx$ div.

3) $\int_2^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) dx$, Il y a un problème en $+\infty$,

$1 - \cos\frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} 1 - \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) = \frac{1/2}{x^2}$, Il s'agit d'une fonction de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ intégrable en $+\infty$, d'où $\int_2^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) dx$ cov.

4) $\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\, dx$,

Il y a deux problèmes un en 0 et un autre en π,

$$\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\, dx = \int_0^1 \ln(\sin x)\, dx + \int_1^{\pi} \ln(\sin x)\, dx$$

En 0, $\ln(\sin x) \underset{0}{\sim} \ln x$, On applique les règles de Riemann en 0 avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

$x^{\frac{1}{2}} \ln x \to 0,\ x \to 0$, donc $\int_0^1 \ln(\sin x)\, dx$ cov.

En π, on pose $t = \pi - x \to 0,\ x \to \pi$, $\ln(\sin x) = \ln(\sin(\pi - t)) = \ln(\sin(t))$.

Comme précédemment l'intégrale $\int_1^{\pi} \ln(\sin x)\, dx$ cov, d'où $\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\, dx$ cov.

5) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \left(\int_2^b \frac{1}{x(\ln x)^2} dx\right)$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\int_2^b \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2}\right) = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{-1}{\ln x}\right]_2^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln b}\right) = \frac{1}{\ln 2} < +\infty,$$

d'où, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$ cov.

Solution (série 2)

1) $y\frac{dx}{dy} = \frac{x^3+x}{1-x^2}$, (Equ. à variable séparables) alors

$$\frac{dy}{y} = \frac{1-x^2}{x^3+x}dx = \left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$

$\Rightarrow$

$$\ln|y| = \ln|x| - \ln(x^2+1) + c$$

$$= \ln\frac{K|x|}{x^2+1}, \qquad c = \ln K \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$

$$y = \frac{\widetilde{K}x}{x^2+1} \text{où } \widetilde{K} = \pm K.$$

2) $y' + 2xy = 0$, (Equ. à variable séparable et homogène)

alors

$$\frac{dy}{y} = -2xdx \Rightarrow \ln|y| = -x^2 + c$$

donc

$$|y| = e^{-x^2+c} \Rightarrow y = Ke^{-x^2}, \quad K = \pm e^c \in \mathbb{R}.$$

3) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$, (Equation linéaire)

$y' + 2xy = 0$, (Equ. homogène) d'où $y_h = Ke^{-x^2}$où $K \in \mathbb{R}$.

On pose $y_p = K(x)e^{-x^2}$ (méthod de variation de la constante) alors

$$y'_p = K'(x)e^{-x^2} - 2xK(x)e^{-x^2},$$

donc

$$K'(x)e^{-x^2} - 2xK(x)e^{-x^2} + 2xK(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}$$

alors

$$K'(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2} \Rightarrow K(x) = x^2 \Rightarrow y_p = x^2e^{-x^2}$$

$\Rightarrow$

$$y_g = y_h + y_p = (K + x^2)e^{-x^2}.$$

4) $y' \sin^2 x - y\, tgx = tgx$, (Equation linéaire)

$y' \sin^2 x - y\, tgx = 0$, (Equ. homogène),

$\frac{dy}{y} = \frac{tgx}{\sin^2 x}dx = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)dx \Rightarrow$

$\ln|y| = (-\ln|\cos x| + \ln|\sin x|) = \ln|\, tgx| + c \Rightarrow y_h = K\, tgx,$

on pose $y_p = K(x)tgx$ alors $y'_p = K'(x)tgx + K(x)\frac{1}{\cos^2 x}$,

donc $\left(K'(x)tgx + K(x)\frac{1}{\cos^2 x}\right)\sin^2 x - K(x)tgx\, tgx = tgx \Rightarrow$

$K'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow K(x) = -cotg\, x \Rightarrow y_p = -cotg\, x\, tgx = -1 \Rightarrow$

$$y_g = K\, tgx - 1.$$

5) $y'' - 3y' + 2y = 0$, (Equations linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants)

L'équ. Caractéristique est: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1$ et $\lambda_1 = 2 \Longrightarrow$

$$y_h = c_1e^x + c_2e^{2x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

6) $y'' - 6y' + 9y = 0$, (Equ l. h. s. o. à c. c.), L'équ. Caractéristique est:

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \Longrightarrow$

$$y_h = (c_1x + c_2)e^{3x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

7) $y'' - 2y' + 5y = 0$, (Equ l. h. s. o. à c. c.), L'équ. Caractéristique est:

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 2i \Longrightarrow$

$$y_h = (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)e^x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

8) $y'' - 3y' + 2y = 2 - 6x + 2x^2$, (Equ l. h. s. o. à c. c. avec deuxième membre),

L'équ. hom. est $y'' - 3y' + 2y = 0 \Longrightarrow y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$, (L'équ. 5). 0 n'est pas sol de l'équ. car. alors $y_p = ax^2 + bx + c \Longrightarrow y'_p = 2ax + b$ et $y''_p = 2a$

donc

$$(2a) - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2 - 6x + 2$$

$$\Longrightarrow 2ax^2 + (2b - 6a)x + (2a - 3b + 2c) = 2x^2 - 6x + 2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ 2b - 6a = -6 \\ 2a - 3b + 2c = 2 \end{cases} \Longrightarrow a = 1, b = c = 0 \Longrightarrow y_p = x^2$$

$$\Longrightarrow y_g = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2.$$

9) $y'' - 6y' + 9y = \cos x + e^{3x}$, (Equ l. h. s. o. à c. c. avec deuxième membre),

L'équ. hom. est $y'' - 6y' + 9y = 0 \Longrightarrow y_h = (c_1 x + c_2)e^{3x}$, (L'équ. 6).

i n'est pas sol de l'équ. car. et 3 est sol double alors

$y_p = a\cos x + b\sin x + cx^2 e^{3x} \Longrightarrow y'_p = b\cos x - a\sin x + c(3x^2 + 2x)e^{3x}$ et $y''_p = -a\cos x - b\sin x + c(9x^2 + 12x + 2)e^{3x}$ donc

$$\begin{aligned}(-a\cos x - b\sin x + c(9x^2 + 12x + 2)e^{3x}) \\ - 6(b\cos x - a\sin x + c(3x^2 + 2x)e^{3x}) \\ + 9(a\cos x + b\sin x + cx^2 e^{3x}) = \cos x + e^{3x}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow (8a - 6b)\cos x + (6a + 8b)\sin x + 2ce^{3x} = \cos x + e^{3x}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 8a - 6b = 1 \\ 6a + 8b = 0 \\ 2c = 1 \end{cases} \Longrightarrow a = \frac{4}{25}, b = \frac{-3}{25} \text{ et } c = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow y_p = \frac{4}{25}\cos x - \frac{3}{25}\sin x + \frac{1}{2}x^2 e^{3x}$$

$$\Longrightarrow y_g = y_h + y_p = (c_1 x + c_2)e^{3x} + \frac{4}{25}\cos x - \frac{3}{25}\sin x + \frac{1}{2}x^2 e^{3x}.$$

10) $y'' - 2y' + 5y = e^{-x}$, $y_h = (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)e^x$ et

$y_p = ae^{-x} \Longrightarrow y'_p = -ae^{-x}$ et $y''_p = ae^{-x}$

donc $(ae^{-x}) - 2(-ae^{-x}) + 5(ae^{-x}) = e^{-x} \Longrightarrow 8ae^{-x} = e^{-x} \Longrightarrow a = \frac{1}{8}$

alors $y_p = \frac{1}{8}e^{-x}$

d'où $y_g = y_h + y_p = (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)e^x + \frac{1}{8}e^{-x}$.

Ex 2. Les dérivées partielles du premier ordre

1) $f(x,y) = \ln xy - \frac{1}{xy}$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 y}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{y} + \frac{1}{xy^2}$$

2) $g(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + e^{x-2\sqrt{y}}$,

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{y}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} + e^{x-2\sqrt{y}} = \frac{y}{x^2+y^2} + e^{x-2\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{y}}e^{x-2\sqrt{y}} = \frac{-x}{x^2+y^2} - \frac{1}{\sqrt{y}}e^{x-2\sqrt{y}}$$

3) $h(x,y) = \sin\frac{x}{y} - \cos\frac{y}{x}$

$$\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial h(x,y)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y} + \frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}$$

Ex 3. $g(x,y,z) = f(\frac{x}{y},\frac{y}{z},\frac{z}{x})$

On pose $(u,v,w) = (\frac{x}{y},\frac{y}{z},\frac{z}{x})$ alors

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{1}{y} + \frac{\partial f}{\partial w}.\frac{-z}{x^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{-x}{y^2} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{-y}{z^2} + \frac{\partial f}{\partial w}.\frac{1}{x}$$

Donc:

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} + z\frac{\partial g}{\partial z} = x\left(\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{1}{y} + \frac{\partial f}{\partial w}.\frac{-z}{x^2}\right) + y\left(\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{-x}{y^2} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{1}{z}\right)$$

$$+z\left(\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{-y}{z^2} + \frac{\partial f}{\partial w}.\frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(\frac{x}{y} - \frac{xy}{y^2}\right)\frac{\partial f}{\partial u} + \left(\frac{y}{z} - \frac{yz}{z^2}\right)\frac{\partial f}{\partial v} + \left(\frac{z}{x} - \frac{xz}{x^2}\right)\frac{\partial f}{\partial w} = 0$$

Ex 4.

1) $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - \frac{2x}{1+y^2}, \Rightarrow f(x,y) = xy^2 - x\ln(1+y^2) + \varphi(x).$
2) $\frac{\partial f}{\partial x} = 0. \Rightarrow f(x,y) = \psi(y).$

Où φ et ψ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Solution (série 3)

Ex 1.

$\Gamma(6) = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120.$

$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$

$\beta(4,3) = \frac{\Gamma(4)\Gamma(3)}{\Gamma(4+3)} = \frac{3!\,2!}{6!} = \frac{12}{720} = \frac{1}{60},$

$\beta\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{6} = \frac{\pi}{16},$

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \Longrightarrow \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ alors

$$\Gamma\left(\frac{-5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{-3}{2}\right)}{\frac{-5}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)}{\frac{-5}{2} \times \frac{-3}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{-5}{2} \times \frac{-3}{2} \times \frac{-1}{2}} = -\frac{8\sqrt{\pi}}{15}.$$

Ex 2.

$u_n = \frac{1}{n^{3/2}}$, série de Riemann $\alpha = 3/2 > 1$ alors $\sum u_n$ convergente.

$u_n = \frac{1}{n(\ln n)^3}$, série de Bertrand $\alpha = 1$ et $\beta = 3 > 1$ donc $\sum u_n$ convergente.

$u_n = \frac{n+1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} u_n = 1 \neq 0$, alors $\sum u_n$ divergente.

$u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^{3/2}}\right) < \frac{1}{n^{3/2}}$, $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ cov d'où $\sum u_n$ cov (th. de comparaison).

$u_n = \frac{2^{-n}}{n}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow$

$\sum u_n$ cov (règle de d'Alembert).

$u_n = \frac{2^n}{n^n}$. $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 < 1 \Longrightarrow$

$\sum u_n$ cov (règle de Cauchy).

Ex 3. (convergence simple, convergence uniforme)

$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $I =]0, +\infty[$. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = 0$.

Donc, $f_n \underset{x \in I}{\overset{CVS}{\to}} (x \longmapsto 0)$.

On pose $g(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ alors $g'(x) = -n^3 \frac{x^2 - \frac{1}{n^2}}{(1+n^2x^2)^2}$, $\sup_I g(x) = g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.

$\sup_I(|f_n(x) - f(x)|) = \frac{1}{2} \overset{n \to \infty}{\to} \frac{1}{2} \neq 0$, donc $f_n \underset{x \in I}{\overset{CVU}{\nrightarrow}} (x \longmapsto 0)$.

Ex 4. (convergence simple, convergence uniforme, convergence normale)

$f_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}$, $I = \mathbb{R}_+$, $f_n(0) = 0$ alors $\sum f_n(0)$ cov,

si $x > 0$ alors $n^2 f_n(x) = n^3x^2e^{-x\sqrt{n}} \to 0$ donc $\sum f_n(x)$ cov (Règle $n^\alpha f_n$; $\alpha = 2 > 1$) d'où $\sum f_n \underset{x \in I}{\overset{CVS}{\to}} S$.

$\sup_I f_n(x) = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 4e^{-2} = u_n$; $\sum u_n$ div car $\lim_{n\to\infty} u_n = 4e^{-2} \neq 0$, donc $\sum f_n \underset{x \in I}{\overset{CVN}{\nrightarrow}} S$

$R_n = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots \geq f_{n+1}(x)$ car $f_n(x) \geq 0$ alors $\underset{I}{sup}(R_n) \geq \underset{I}{sup}\big(f_{n+1}(x)\big) = 4e^{-2} \nrightarrow 0$ donc $(R_n) \underset{x \in I}{\overset{CVU}{\nrightarrow}} (x \longmapsto 0)$ d'où $\sum f_n \underset{x \in I}{\overset{CVU}{\nrightarrow}} S$.

Ex 5.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n}\right)^n x^n$; $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\right) = +\infty$; $R = \frac{1}{l} = 0$.

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{1+b^n} x^n$, $a, b \in \mathbb{R}_+^*$; $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{a^n} \frac{1+b^n}{1+b^{n+1}} =$

$\begin{cases} \frac{a}{b} & si\ b > 1 \\ a & si\ b \leq 1 \end{cases}$, $R = \frac{1}{l} = \begin{cases} \frac{b}{a} & si\ b > 1 \\ \frac{1}{a} & si\ b \leq 1 \end{cases}$.

$\sum_{n=0}^{+\infty} n\, 2^{n+1} x^n$; $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} = 2$, $R = \frac{1}{l} = \frac{1}{2}$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$, $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{(n+1)n} = 1$, $R = \frac{1}{l} = 1$.

Ex 6.

$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

$f(x) = |x|$, fonction paire donc $b_n = 0, \forall n \geq 1$; $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{\pi}{2}$;

$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n} x \sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nx\, dx = \left[\frac{2}{\pi n^2} \cos nx\right]_0^{\pi} =$

$\frac{2}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^{\mathrm{n}} - 1) = \begin{cases} 0 & si\ \ n = 2m \\ \frac{-4}{\pi(2m+1)^2} & si\ \ n = 2m+1 \end{cases}$.

D'où $f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2n+1)^2} \cos(2n+1)x$.

$f(0) = 0 = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2n+1)^2}$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{-\pi}{2} \frac{\pi}{-4} = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercices supplémentaires

Examen final de Maths 3 (19-01-2023)

Ex 1. On pose $I_1 = \int_a^b \frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)}dx,\ I_2 = \int_a^b \frac{f(a+b-x)}{f(x)+f(a+b-x)}dx$

- Montrer que $I_1 = I_2$ (utiliser le changement $y = a + b - x$).
- Calculer $I_1 + I_2$, I_1 et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
- Déduire l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$.

Ex 2. Calculer l'intégrale double suivante $\iint_D \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dxdy$, telle que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 :\ \ y \leq x, \qquad x^2 + y^2\ \leq 4\}.$$

Ex 3. Soit l'équation différentielle suivante

$$y' - y\sin x = \sin x. \qquad (1)$$

- Trouver le type de cette l'équation.
- Résoudre l'équation (1).

Ex 4. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ où

$$f(x, y) = \cos x\, e^{\sin y}.$$

Examen de rattrapage de Maths 3 (13-06-2023)

Ex 1. Calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ suivante

V1: $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$ **V2:** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$ **V3:** $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{1-\cos x}\,dx$

On a: $f(x) =$ ....., $a =$..... et $b =$..... donc

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\dots\dots\dots\dots\Big]_{\dots}^{\dots} = (\dots\dots\dots) - (\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots$$

Ex 2. Calculer l'intégrale double suivante $\iint_D \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$, telle que

V1: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y,\ x^2+y^2 \le 1\}$,

V2: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x,\ x^2+y^2 \le 1\}$,

V3: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 0,\ y \ge 0 \text{ et } x^2+y^2 \le 1\}$.

On pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ donc $\mathbb{J} =$, $\dots \le \theta \le \cdots$, $\dots \le r \le \cdots$

et $\iint_D \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \left(\int (\dots\dots\dots)d\theta\right) \times \left(\int 2(\dots\dots\dots)dr\right) =$

$$\Big[\dots\dots\dots\Big]_{\dots}^{\dots} \times \Big[\dots\dots\Big]_{\dots}^{\dots} = \dots\dots\dots$$

Ex 3. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$, où

V1: $f(x,y,z) = xye^{\sin z} - \cos xy\ e^z$,

V2: $f(x,y,z) = xze^{\sin y} - \cos xz\ e^y$,

V3: $f(x,y,z) = yze^{\sin x} - \cos yz\ e^x$,

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) =$..... $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) =$..... $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) =$.....

Examen final de Maths 3 (25-01-2024)

Ex 1. On pose $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x + 4\sin x}{2\cos x - \sin} dx, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{2x}{1+x^4} dx.$

- Calculer I_1.
- Calculer I_2, (utiliser le changement $y = x^2$).

Ex 2. Calculer l'intégrale double suivante $\iint_D (2y-1)\, dxdy$, telle que

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, \quad 2x - 1 \leq y \leq 2x + 1\}.$$

Ex 3. Soit l'équation différentielle suivante

$$y'' - 2y' - 8y = -8x^2 - 4x - 6. \qquad (1)$$

- Trouver le type de cette équation.
- Résoudre l'équation homogène $y'' - 2y' - 8y = 0$.

Résoudre l'équation (1).

Examen de rattrapage de Maths 3 (10-06-2024)

Ex 1. Calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ suivante

V1: $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ **V2:** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\mathrm{tg}^2\,x}{1+\mathrm{tg}\,x}\,dx$ **V3:** $\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)}\,dx$

On a: $f(x) =$ ....., $a =$..... et $b =$..... donc

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]_{\ldots}^{\ldots} = (\ldots\ldots\ldots\ldots) - (\ldots\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots$$

Ex 2. Calculer l'intégrale double suivante $\iint_D f(x,y)\,dxdy$, telles que

V1: $f(x,y) = \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$

V2: $f(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$

V3: $f(x,y) = \frac{-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 0,\ y \ge 0 \text{ et } 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$

On pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ donc $\mathbb{J} = r$, $\ldots \le \theta \le \ldots$, $\ldots \le r \le \cdots$

$$\text{et } \iint_D f(x,y)\,dxdy = \left(\int_{\ldots}^{\ldots} (\ldots\ldots\ldots\ldots)d\theta\right) \times \left(\int_{\ldots}^{\ldots} (\ldots\ldots\ldots\ldots)dr\right)$$

$$= \Big[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]_{\ldots}^{\ldots} \times \Big[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]_{\ldots}^{\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ex 3. Soit l'équation différentielle suivante

V1: $y'' + 2y' - 3y = -3x^2 + 4x - 1,$ (E)

V2: $y'' - y' - 2y = -2x^2 - 2x - 2,$ (E)

V3: $y'' - y' - 6y = -6x^2 - 2x - 16,$ (E)

- Le type de cette équation est : .....
- L'équation caractéristique de l'équation homogène est : .....
- Les solutions de l'équation caractéristique est : $\lambda_1 =$ ....., $\lambda_2 =$ .....
- La solution de l'équation homogène est : $y_h =$.....
- La solution particulière de l'équation (E) est : $y_p =$.....
- La solution générale de l'équation (E) est : $y_g =$.....

Examen final de Maths 3 (30-01-2025)

Ex 1. On pose $I = \int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-2x+2} dx$.

- Calculer A et B où $\frac{2x-1}{x^2-2x+2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2+1}$.
- Calculer I. (utiliser le changement $y = x - 1$).

Ex 2. Calculer l'intégrale double suivante $\iint_D (2x+1)\, dxdy$, telle que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 0, \quad y + 1 \leq x \leq y + 2\}.$$

Ex 3. Soit l'équation différentielle suivante

$$y'' + y = 2x - 1 + 2\cos x. \qquad (E)$$

- Trouver le type de cette équation.
- Résoudre l'équation homogène $y'' + y = 0$.
- Résoudre l'équation (E).

Examen final de Maths 3 (endettés) (24-02-2025)

Ex 1. On pose $I = \int_0^1 \frac{2x^3-x^2+2x}{x^2+1}\,dx$.

- Calculer A, B et C où $\frac{2x^3-x^2+2x}{x^2+1} = Ax + B + \frac{C}{x^2+1}$.
- Calculer I.

Ex 2. Calculer l'intégrale double suivante $\iint_D (2x-2y)\,dxdy$, telle que

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2x-1\}.$$

Ex 3. Soit l'équation différentielle suivante

$$y'' + 3y' + 2y = 6x + 3, \qquad (E)$$

- Trouver le type de cette équation.
- Résoudre l'équation homogène $y'' + 3y' + 2y = 0$.
- Résoudre l'équation (E).

Ex 4. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ où

$$f(x,y) = e^{\cos x} \sin y.$$

Examen de Maths 3 (endettés) (24-02-2025)

Ex 1. Soit l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ suivantes

V1: $\int_{-1}^{0} \frac{3}{2x^2-5x+2}\,dx$ **V2:** $\int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{1}{6x^2-7x+2}\,dx$ **V3:** $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1-x^2}\,dx$

Calculer A et B tels que :

V1: $\frac{3}{2x^2-5x+2} = \frac{A}{x-2} - \frac{B}{2x-1}$ **V2:** $\frac{1}{6x^2-7x+2} = \frac{A}{3x-2} - \frac{B}{2x-1}$

V3: $\frac{2}{1-x^2} = \frac{A}{x+1} - \frac{B}{x-1}$

$A =$ ..... et $B =$ .....

Calculer l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\dots}^{\dots} \left(\frac{\dots}{\dots} - \frac{\dots}{\dots}\right) dx = \Big[\dots\dots\dots\dots\dots\dots\Big]_{\dots}^{\dots} = \dots$$

Ex 2. Calculer l'intégrale double suivante $\iint_D f(x,y)\,dxdy$, telle que

V1: $f(x,y) = 3x - 2$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ y \le x \le y+2\}$

V2: $f(x,y) = -2x + 2$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le y \le 0,\ y-2 \le x \le y-1\}$

V3: $f(x,y) = x + 2$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le y \le 2,\ y-1 \le x \le y+1\}$.

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int \left(\int (\dots\dots\dots\dots)dx\right) dy = \int (\dots\dots\dots\dots)dy$$

$$= \Big[\dots\dots\dots\dots\Big]_{\dots}^{\dots} = \dots\dots\dots\dots\dots$$

Ex 3. Soit l'équation différentielle suivante

V1: $y'' + 4y' + 3y = 4 + 3x + 8e^x$

V2: $y'' - y' - 2y = -1 - 2x + 2e^{x}$

V3: $y'' + y' - 2y = 2 - 4x - 4e^{2x}$

Le type de cette équation est : .....

L'équation caractéristique associée est : .....

Les solutions de l'équation caractéristique sont : $\lambda_1 =$ ..... et $\lambda_2 =$ .....

Donc $y_h =$ ....., $y_p =$ ..... et $y_g =$ .....

Ex 4. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ où

V1: $f(x, y) = \cos(x \sin y)$

V2: $f(x, y) = \sin(y \cos x)$

V3: $f(x, y) = \sin(x \sin y)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$.....

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$.....

Micro interrogation (Math 3)

Ex 1. (6 points) Calculer l'intégrale suivante

$$\int \frac{2\, tg\, x}{\cos^2 x}\, dx.$$

Ex 2. (7 points) Calculer l'intégrale suivante

$$\iint_{\Delta} 3\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy \text{ où } \Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Ex 3. (7 points) Etudier la nature des intégrales impropres suivantes

1) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx,$ 2) $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^2}\, dx.$

Micro interrogation (Math 3)

Ex 1. (6 points) Calculer l'intégrale suivante

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx.$$

Ex 2. (7 points) Calculer l'intégrale suivante

$$\iint_{\Delta} 4(x^2+y^2)\, dxdy \text{ où } \Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \,/\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}.$$

Ex 3. (7 points) Etudier la nature des intégrales impropres suivantes

1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}\, dx,$ 2) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\ln x)^4}\, dx.$

Bibliographie

[1] Aimé Lachal. « Intégrale de Riemann », Cours de mathématiques 1er cycle, 1re année. INSA.

[2] Ariel Dufetel. « Séries de Fourier et équation différentielles », Exercices et problèmes résolus avec rappels de cours. Vuibert 2010.

[3] Habouche Zakaria. « Résolution de certaines équations différentielles fractionnaire par la fonction généralisée de Mittag-Leffler E_(z) et la transformée de Laplace ». Mémoire de Master, Université Mohamed Boudiaf de M'sila.

[4] F. Pécastaings et J. Sevin. « Chemin vers l'analyse », Tome 1, Vuibert, 1979.

[5] J. Genet et G. Pupion. « Analyse Moderne », Tome 1. Vuibert. 1971.

[6] J. Genet et G. Pupion. « Analyse Moderne », Tome 2. Vuibert. 1974.

[7] Laurent Poinsot. « Outils Mathématiques », Chapitre VI : Transformée de Fourier. LIPN UMR CNRS 7030 Université Paris XIII & École de l'Air.

[8] Murray R. Spiegel, Ph.D. « Schaum's outline of theoty and probmems of Laplace transforms », New York San Francisco Washingtun. D.C. Auckland Rogoid Caracas Lisbon London Madrid Alexien City , Milan Aluntrcal New Delhi San Juan Singapore Sydney lbkva "lomnro.