REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 GUELMA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière

Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER EN MATHÉMATIQUES

Option : EDP

SUR UNE CLASSE DE PROBLÈMES INVERSES SEMI-LINÉAIRES

Par :

Debbouche Souheyla

Jury :

BOUSSETILA NADJIB	**Président**	**M.C.**	**Univ. Guelma**
ZOUYED FAIROUZ	**Rapporteur**	**M.C.**	**Univ. Annaba**
REBBANI FAOUZIA	**Examinateur**	**Prof.**	**Univ. Annaba**
BADRAOUI SALAH	**Examinateur**	**M.C.**	**Univ. Guelma**
AMIAR RACHIDA	**Examinateur**	**M.C.**	**Univ. Annaba**

Abstract

In this work, we treat a class of identification problems in a Banach space. Under the additional assumption that the semigroup generated by the linear part has a sufficiently fast exponential decay, we prove the existence and uniqueness of the strict solution and also its dependence on the data.

Key words : *inverse problem, semi-linear problem, semi-groups, Volterra's equation.*

Résumé

Dans le présent travail, on étudie une classe de problèmes inverses qui consiste à l'identification du terme source. En introduisant quelques hypothèses liées à la nature du semi-groupe engendré par la partie linéaire de l'équation du problème en question, on établit l'existence et l'unicité de la solution ainsi que sa dépendance continue par rapport aux données. L'approche utilisée dans cette étude repose sur la théorie des semi-groupes ainsi que les équations intégrales.

Mots clés : *problème inverse, problème semi-linéaire, semi-groupes, équation de Volterra.*

Remerciements

Je tiens à adresse ma profonde reconnaissance à mon directeur de mémoire le docteur FAIROUZ ZOUYED, dont ses conseils, ses qualités mathématiques ainsi que sa patience m'ont permis de bien mener ce travail.

J'adresse également mes plus sincères remerciements à monsieur le docteur BOUSSETILA NADJIB qui a mis sa documentations sous ma disposition jusqu'au dernier moment, je le remercie aussi de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie tout particulièrement le professeur REBBANI FAOUZIA, le docteur BADRAOUI SALAH et le docteur AMIAR RACHIDA, d'avoir accepté d'examiner ce mémoir et de participer à ce jury.

Enfin, que toute personne ayant contribué à la réalisation de ce travail, soit persuadée de ma totale reconnaissance.

Notations

$\mathbb{R}$: corps des nombres réels.

$\mathbb{C}$: corps des nombres complexes.

A : opérateur linéaire.

$\mathcal{D}(A)$: domaine de définition de l'opérateur A.

$\mathcal{R}(A)$: image de A.

$\mathcal{G}(A)$: graphe de A.

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$: espaces de Banach de normes respectives $\|.\|_{\mathcal{X}},\ \|.\|_{\mathcal{Y}}$.

$\mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$: espace des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$,muni de la norme $\|\mathcal{B}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \sup\limits_{u\neq 0} \dfrac{\|\mathcal{B}u\|_{\mathcal{Y}}}{\|u\|_{\mathcal{X}}}$.

$\mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$: espace des opérateurs compacts de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$.

$\rho(A)$: ensemble résolvant de l'opérateur A.

$\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$: spectre de l'opérateur A.

$\mathcal{R}_\lambda(A)$: résolvante de A.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$: ouvert borné.

$\overline{\Omega}$ fermeture de Ω.

$D(\Omega)$: espace des fonctions de classe C^∞ a support compact dans Ω.

μ : mesure de Lebesgue.

$L^2(\Omega)$: espace des fonctions mesurable v sur Ω telles que $|v|^2$ est intégrable.

$\|v\|_{L^2(\Omega)} = (\int_\Omega |v|^2)^{\frac{1}{2}},$ pour $v \in L^2(\Omega)$.

$D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}_{x_1}....\partial^{\alpha_N}_{x_N}},\ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ et $|\alpha| = \Sigma_{i=1}^N \alpha_i$.

$\mathcal{H}^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega),\ D^\alpha v \in L^2(\Omega),\ \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m\}$.

$\|v\|_{\mathcal{H}^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} (\|D^\alpha v\|_{L^2})^2\right)^{\frac{1}{2}}$, pour $v \in \mathcal{H}^m(\Omega)$.

$\mathcal{H}^m_0(\Omega)$: l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $\mathcal{H}^m(\Omega)$.

Table des matières

Introduction

0.1 Généralités et contextes

0.1.1 Problèmes inverses

De nombreux problèmes de la physique, chimie, biologie et de la géophysique sont modélisés par des systèmes d'équations différentielles ou aux dérivées partielles qui décrivent le comportement temporel ou spatio-temporel des inconnus du modèle. La résolution de ces équations constitue ce que l'on appelle le problème direct. Cela ne peut se faire que si tous les paramètres du systèmes sont connus, les conditions initiales et aux limites, les coefficients intervenant dans les équations, ainsi que le domaine spatial. Lorsque l'une (ou plusieurs) des composantes du problème est manquante l'équation ne peut plus être résolue sans informations complémentaires et la résolution de l'équation n'est plus directe mais inverse.

D'aprés J.B.Keller [39], deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre si la formulation de l'un met l'autre en cause. Une définition plus opérationnelle est qu'un problème inverse consiste à déterminer des causes connaissant des effets. Ainsi, ce problème est l'inverse de celui appelé problème direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues. On peut citer pour les effets : potentiel, déplacement, température, champ électrique et pour les causes : force, condition limite, c'est pourquoi suivant le contexte, le terme "causes" est subordonné par le terme "entrées", tandis que le terme "effets" est subordonné par le terme "sorties"." D'un point de vue pratique les problèmes inverses exigent souvent une bonne connaissance du modèle direct afin d'apprèhender les entrées.

► L'étude des problèmes inverses a connu un développement très important au cours des dernières années. Cela est du à la richesse du sujet et au fait que ces problèmes sont réellement présents dans de nombreux domaines. Les mathématiques bien sûr, avec la base fondamentale que forme la théorie des opérateurs, et les équations aux dérivées partielles. La physique, où naturellement les chercheurs se sont trouvés confrontés à des observations indirectes, les amenant à résoudre des problèmes inverses. En particulier, en optique et en géophysique où apparaissent de nombreux modèles de stéréologies et autres. L'imagerie médicale est aussi l'un des domaines les plus impliqués dans ce type de problème. La tomographie, notamment est un sujet récurrent en radiologie, scanner, IRM. Les problèmes inverses constituent donc l'un des sujet où le lien entre la théorie mathématique et la pratique est le plus fort.

0.1.2 Identification de sources et de paramètres

Pour un modèle physique, on peut envisager divers problèmes inverses. Associés à l'équation de la chaleur par exemple, on peut distinguer un certain nombre de problèmes inverses classiques :

- estimation de géométrie du domaine,
- estimation de paramètre,
- reconstitution de l'état initial,
- estimation de sources,
- estimation de conditions aux limites.

La reconstitution de sources ou de paramètres est un problème d'importance pratique. Les problèmes qui visent à déterminer les sources inconnues apparaîssent dès que la mesure directe de la grandeur physique étudiée n'est pas possible en pratique. Les hautes températures et la difficulté d'accès dans la chambre de combustion d'un moteur [24], dans une enceinte contenant un feu ou sur les faces actives d'outils d'usinage [63] sont des cas où le recourt à ce type de problèmes est nécessaire.
Pour la catégorie des problèmes liés à l'estimation de paramètres intrinsèques d'un système, l'objectif fixé est de déterminer, à partir d'une connaissance partielle de son évolution, les paramètres de modèle inconnus. Ces problèmes se rencontrent dans de nombreux domaines allant de la géoméchanique aux mathématiques financières.

0.1.3 Caractère mal posé des problèmes inverses

Les problèmes inverses sont souvent classés dans la catégorie des problèmes mal-posés introduite par Hadamard [33] au début du sciècle dernier [1]. Un problème bien posé au sens d'Hadamard doit satisfaire les trois conditions suivantes : la solution existe, elle est unique et elle est stable. Dès lors que l'une de ces conditions est violée le problème est considéré comme mal-posé.

1. Le premier problème mal-posé date en fait de 1932 d'un fameux article d'Hadamard, il s'agissait de reconstruire la solution d'un problème de Cauchy à partir de la condition initiale.

La réalité expérimentale montre que les problèmes inverses sont le plus souvent mal-posés car ils ne répondent pas à la troisième condition (la stabilité). Le problème est instable quand de petites variations sur les données entraînent de grandes variations sur la solution. Cette stabilité est liée au système étudié et va indiquer la robustesse de l'inversion face aux problèmes de bruits de mesures.
⋄ Expliquons sur un exemple simple le caractère mal-pose d'un problème inverse. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' = f(x), & -1 < x < 1, \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{$\mathcal{E}$}$$

Le problème direct consiste a calculer u, étant donné a et f. Pour le problème inverse, nous considérons que f est connue, et nous cherchons à retrouver le coefficient a à partir d'une mesure de u.
En intégrant l'équation de $(\mathcal{E})$, et en divisant par u', nous obtenons l'expression suivante pour a (en supposant que u' ne s'annulle pas,)

$$a(x) = \frac{C}{u'(x)} + \frac{1}{u'(x)} \int_0^x f(\xi) d\xi.$$

Pour pouvoir discriminer parmi les différentes solutions possibles, nous devons faire appel à une information supplémentaire. De plus il y'a dans ce problème deux sources d'instabilité, d'abord l'équation fait intervenir u', et on sait que le passage de u à u' est source d'instabilité [2]. Si u' s'annule, la division est impossible, si u' est simplement "petit," la division sera cause d'instabilité.
► Pour traiter les problèmes inverses, ces derniers sont parfois formulés comme étant des problèmes d'optimisation, où les inconnues sont déterminées de telle sorte qu'elles minimisent l'écart (en un sens à préciser) entre les mesures issues de l'observation des systèmes physiques et les mesures calculées.
Essayons de donner une formulation abstraite à cette problèmatique. Considérons un problème inverse qui consiste à identifier les paramètres (ou le terme source) a d'un modèle à partir des mesures y pour des sollicitations $\mathcal{F}$ données. En règle générale, le problème direct est résolu sous la forme $L(u_{(a)}, a) = \mathcal{F}$, où L est un opérateur aux dérivées partielles. Il est possible de représenter le problème à l'aide d'un opérateur reliant les paramètres inconnus a du problème inverse aux mesures réalisées y :

$$\mathcal{T} : \mathcal{E}_{ad} \to \mathcal{Y},$$

$$a \to y = \mathcal{T}(a),$$

2. La différentiation est le prototype du problème mal-posé voir Engl et al [27].

$\mathcal{E}_{ad}$ est l'espace des paramètres admissibles a, inconnus du problème inverse, $\mathcal{Y}$ représente l'espace des mesures. Le problème inverse alors est le suivant :

$$\text{trouver } \ a \in \mathcal{E}_{ad}, \ \text{ tel que } \ \mathcal{T}(a) = y, \ \ \text{connaissant } y \in \mathcal{Y}.$$

Si l'opérateur $\mathcal{T}$ est linéaire, inversible d'inverse continu l'identification des paramètres est triviale, le problème inverse est bien posé au sens d'Hadamard (pour toutes les valeurs admissibles des données disponibles une solution existe, et est unique et dépend continùment des données). Cependant, ce n'est que rarement le cas, ce qui rend l'identification difficile.

Lorsque l'opérateur $\mathcal{T}$ n'est pas linéaire, on recherchera des quasi-solutions du système $\mathcal{T}(a) = y$ en un certain sens. Le problème d'identification se raméne donc à un problème de minimisation d'une fonctionnelle $\mathcal{J}(a)$ dite fonctionnelle coût mesurant la distance entre les mesures y les prédictions $\mathcal{T}(a)$

$$\min_{a \in \mathcal{E}_{ad}} \mathcal{J}(a)$$

$$\mathcal{J}(a) = \| \mathcal{T}(a) - y \| .$$

En règle générale, rien ne garantit que le minimum soit atteint en un point $a \in \mathcal{E}_{ad}$, une autre question essentielle liée à la convexité de la fonctionnelle $\mathcal{J}$, est celle de l'unicité, la fonction coût peut posséder plusieurs minima, et le minimum global n'est pas forcément la solution. Ces instabiltés (liées au caractère mal-posé du problème) ont donné lieu à des méthodes dites de régularisation. Les méthodes de régularisation initiées par les travaux de Tikhonov et Arsenine [72] sont toutes fondées sur le même principe : augmenter la stabilité de l'inversion en proposant des solutions approchées de la solution exacte. En quelques sorte, ces méthodes consistent à remplacer le problème mal-posé par un problème bien posé (proche de celui-ci), pour lequel la procédure de résolution est stable.

► Dans le présent travail, on laissera de côté la théorie d'optimisation ainsi que la régularisation et on se contentera d'introduire les conditions nécessaires permettant de résoudre le problème d'identification et d'assurer sa stabilité.

0.2 Organisation du mémoire

Le présent travail est une synthèse d'un travail établi par Ioan.I.Vrabie et Alfredo Lorenzi [49]. Il est composé d'une introduction et de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on rapelle quelques résultats d'analyse fonctionnelle ainsi que les outils mathématiques nécessaires pour l'étude du problème inverse. Le chapitre trois constitue les parties principales.

Dans le deuxième chapitre on traite deux classes de problèmes directs bien posés dans un espace de Banach $\mathcal{X}$.

◇ Dans la Première classe, on étudie le problème de Cauchy non homogène abstrait suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & 0 < t \leq T, \\ u(0) = \xi, \end{cases} \tag{$\mathscr{P}\mathscr{D}_1$}$$

où $\xi \in \mathcal{X}$, A est un opérateur linéaire non-borné de domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ et $f \in L^1(0,T;\mathcal{X})$.

◇ Dans la deuxième, on traite le problème de Cauchy semi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + g(t, u(t)), & 0 < t \leq T, \\ u(0) = \xi, \end{cases} \tag{$\mathscr{P}\mathscr{D}_2$}$$

pour $\xi \in \mathcal{X}$, A est toujours un opérateur linéaire non borné et $g(t, u(t))$ est une fonction définie de $[0,T] \times \mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$.

Pour ces deux problèmes, on introduit les théorèmes d'existence et d'unicité de la solution. Ainsi que quelques propriétés de l'opérateur solution du problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_1)$ qui jouent un rôle important dans l'étude du problème inverse.

Le chapitre trois est consacré au problème d'identification $(\mathscr{P}\mathscr{I}1)$ suivant :

déterminer $z \in \mathcal{X}$ et $u : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$ solution stricte du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) + \varphi(u(t))z, & 0 < t < 1, \\ u(0) = \xi_0, \end{cases} \tag{0.1}$$

avec u vérifiant la condition supplémentaire

$$\int_0^1 u(t)\, dt = \xi_1, \tag{0.2}$$

$A : D(A) \subseteq \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ est un opérateur linéaire non borné qui engendre un C_0-semigroupe compact de contractions $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, $f \in C^1([0,1];\mathcal{X})$, ξ_0, $\xi_1 \in \mathcal{X}$ et $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonctionnelle de classe C^1.

Ce type de problème rentre dans la classe des problèmes inverses qui consiste à l'identification du terme source totalement ou partiellement inconnu, il se rencontre dans de nombreux domaines par exemple la recherche d'une intensité de la source de pollution à partir d'un nombre de mesures de concentrations.

• Lors de l'étude du problème $(\mathscr{P}\mathscr{I}1)$, une question naturelle se pose peut-on interpréter $(\mathscr{P}\mathscr{I}1)$ comme étant un problème de contrôle optimale ? la réponse à cette question n'est pas aussi évidente.

En effet, commençons par introduire la fonctionnelle suivante : $\Phi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\Phi(z) = \left\| \int_0^1 u_z(t)dt - \xi_1 \right\|^2,$$

où u_z est l'unique solution stricte du problème (0.1).

On remarque clairement que si le problème d'identification ($\mathscr{P}\mathscr{I}1$) admet une solution z, alors z est aussi solution du problème de contrôle suivant :

$$\min\{\Phi(z),\ z \in \mathcal{X}\}. \tag{$\mathscr{P}\mathscr{C}$}$$

Mais l'inverse n'est pas vrai simplement, parce qu'il peut arriver que ($\mathscr{P}\mathscr{C}$) admet une solution z, par contre le minimum est strictement positif et donc z ne résout pas ($\mathscr{P}\mathscr{I}1$). De plus le problème ($\mathscr{P}\mathscr{C}$) n'est pas un problème de contrôle standard pour aux moins deux raisons la première est que ($\mathscr{P}\mathscr{C}$) est indépendant de t c'est à dire, on est entrain de chercher une constante par rapport au controle t, la deuxième réside dans le fait que la fonctionnelle Φ n'est pas convexe [3]. En raison de tous ces points cette démarche (au moins sous sa forme standard) n'est pas applicable pour notre problème.

$\mathscr{D}$ans le présent travail, on essayera d'évoquer certaines conditions liées à la nature du semi-groupes qui assureront l'existence et l'unicité de la solution ainsi que sa dépendance continue par rapport aux données.

♣ $\mathscr{U}$**n peu de** $\mathscr{L}$**ittérature...** En raison de son interêt pratique, le problème d'identification de source dans le cas linéaire a été intensivement étudié ses dernières années, parmi les travaux établis, on cite les problèmes suivants

Soit à déterminer une fonction $u : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$ et $z \in \mathcal{X}$ satisfaisant :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t)z, \quad 0 \le t \le 1, \\ u(0) = \xi_0, \\ \mu([0,1])^{-1} \displaystyle\int_0^1 u(t)\, d\mu(t) = \xi_1, \end{cases} \tag{$\mathscr{P}\mathscr{I}\mathscr{L}$}$$

où A est un générateur d'un C_0-semigroupe de contraction, $f \in C^1([0,1], \mathcal{L}(\mathcal{X}))$, μ est un vecteur mesure défini de Σ ($\sigma-$algèbre sur $[0,1]$) dans $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ comme suit :

$$\text{pour } x \in X,\ \mu(.)x : \Sigma \to X$$

$$\mu(E)x = \mu(E)(x),\ \text{pour tout } E \in \Sigma.$$

3. à cause du fait que $z \mapsto u_z$ est non-linéaire.

avec $\mu([0,1])$ inversible.

• Prilepko et Kostin(1993, [56]) ont considéré le problème d'identification $(\mathscr{P}\mathscr{I}\mathscr{L})$ dans le cas où $\mu = d\psi I$, avec ψ est une fonction de Heaviside. Ils ont montré l'existence et l'unicité de la solution pour tout $\xi_0, \xi_1 \in D(A)$.

• Prilepko et Tikhonov(1994, [55]) ont traité le problème ci-dessus avec $\mu = d\psi I$ où ψ est une fonction à variation bornée. Ils ont montré que $(\mathscr{P}\mathscr{I}\mathscr{L})$ est bien posé pour tout $\xi_0, \xi_1 \in D(A)$.

• Tikhonov et Eidel'man (1994, [68]) ont considéré le problème d'identification $(\mathscr{P}\mathscr{I}\mathscr{L})$, avec $f(t) = g(t)I$, g continu et à variation borné ψ est absolument continu, ils ont introduit les conditions nécessaires et suffisantes pour que $(\mathscr{P}\mathscr{I}\mathscr{L})$ soit bien posé pour tout $\xi_0, \xi_1 \in D(A)$.

• Prilepko, Piskareva et Shaw(2007, [54]) ont utilisé une méthode d'approximation itérative pour traiter un problème de la forme $(\mathscr{P}\mathscr{I}\mathscr{L})$ sujette à une conditin finale.

• Anikonov Yu et Lorenzi A(2007, [1]) ont étudié $(\mathscr{P}\mathscr{I}\mathscr{L})$ dans le cas où A est un générateur d'un C_0-semigroupe analytique, $f = g.I$, $g \in C^{\alpha}([0,1];\mathbb{R})$, $\alpha \in (0,\ 1)$, $\mu = \lambda.I$ et λ est une mesure positive finie de Borel dans $(0,1)$. Ils ont montré que pour tout $\xi_0, \xi_1 \in \mathcal{D}(A)$ le problème $(\mathscr{P}\mathscr{I}\mathscr{L})$ admet une unique solution.

• Vrabie I I et Lorenzi A (2008, [48]) ont étudié le problème $(\mathscr{P}\mathscr{I}\mathscr{L})$ dans sa forme générale.

▶ Enfin, on cite quelques ouvrages traitant d'autres classes de problèmes inverses : Prilepko A I, Orlovesky D J, Vastin A I [57], Mourad Choulli [17] et les document établis par Isakov V [34], Romanov V [60], et Cannon J and Hornung U [16].

$\mathscr{N}$otant ici que dans la littérature mathématique et contrairement au cas linéaire, on ne trouve pas beaucoup de travaux concernant l'identification de source dans le cas non-linéaire. Ceci est dû à la complexité que soulève cette classe de problèmes, ce qui souligne l'importance de cette étude.

Chapitre 1

Rappels

Dans ce chapitre, on introduit certains outils nécessaires pour l'étude du problème considéré.

1.1 Compacité

Dans la suite $\mathcal{X}$ désigne un espace de Banach muni de la norme $\| \, . \, \|$.

$C([a,b],\mathcal{X})$ est un l'espace des fonctions continues définies de $[a,b]$ dans $\mathcal{X}$.

Muni de la norme $\| \, f \, \|_{C([a,b],\mathcal{X})} = \{sup\| \, f(t) \, \|; t \in [a,b]\}$, $C([a,b],\mathcal{X})$ est un espace de Banach.

1.1.1 Compacité dans un espace de Banach

Définition 1.1.1 *Un sous ensemble $\mathscr{U}$ d'un espace Banach $\mathcal{X}$*[1] *est dit compact si de tout recouvrement ouvert de $\mathscr{U}$, on peut extraire un sous-recouvrement fini i.e pour toute famille $V_{i, \ (i\in I)}$, d'ouvert vérifiant :*

$$\mathscr{U} \subset \bigcup_{i\in I} V_i,$$

il existe une sous famille $V_{i(k), \ (i(k)\in I)}$, $k = 1, ..., n$ telle que

$$\mathscr{U} \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{i(k)}.$$

Théorème 1.1.1 *Un sous-ensemble $\mathscr{U}$ d'un espace Banach $\mathcal{X}$ est compact si de toute suite d'éléments de $\mathscr{U}$, on peut extraire une sous-suite convergente dans $\mathscr{U}$.*

- Soit $\mathscr{U} \subset \mathcal{X}$, $\mathscr{U}$ est compact $\Longrightarrow \mathscr{U}$ est fermé et borné.

Définition 1.1.2 *Un sous-ensemble $\mathscr{U}$ d'un espace Banach $\mathcal{X}$ est dit relativement compacte si sa fermeture $\bar{\mathscr{U}}$ est compacte i.e. de toute suite de $\mathscr{U}$, on peut extraire une sous-suite convergente.*

1. Les résultats de ce paragraphe restent vrai si $\mathcal{X}$ est seulement un espace vectoriel normé.

• Tout sous-ensemble borné de dimention finie de $\mathcal{X}$ est relativement compact.

1.1.2 Compacité dans $C([a,b],\mathcal{X})$

Définition 1.1.3 *Un sous-ensemble* $\Im$ *de* $C([a,b];\mathcal{X})$ *est équicontinu en* t *dans* $[a,b]$ *si* $\forall\varepsilon>0,\ \exists\varrho(\varepsilon,t)>0$ *tel que* $\forall s\in[a,b]$ *avec* $|t-s|<\varrho(\varepsilon,t)$, *on a*

$$\|h(t)-h(s)\|<\varepsilon,$$

uniformément par rapport à $h\in\Im$.

On dit que $\Im$ *est équicontinu dans* $[a,b]$, *si il est équicontinu en tout point* $t\in[a,b]$.

Théorème 1.1.2 ***(Arzelà-Ascoli)*** *Un sous-ensemble* $\Im$ *de* $C([a,b];\mathcal{X})$ *est relativement compact si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(***i***) $\Im$ *est équicontinu dans* $[a,b]$,

(***ii***) *il existe une partie* D *dense dans* $[a,b]$ *tel que pour tout* $t\in D$,

$$\Im(t)=\{h(t);\ h\in\Im\}.$$

est relativement compact dans $\mathcal{X}$.

1.2 Opérateurs linéaires

1.2.1 Généralités

$\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ designent deux espaces de Banach.

Définition 1.2.1 *Toute application linéaire* $A:\mathcal{D}(A)\subseteq\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{Y}$ *s'appelle opérateur linéaire.*
On note

$$\bullet\ \ker(A)=\{x\in\mathcal{X}:Ax=0\}\subseteq\mathcal{X}\quad \textit{le noyau de}\, A,$$

$$\bullet\mathcal{R}(A)=\{Ax\in\mathcal{Y}:x\in\mathcal{X}\}\subseteq\mathcal{Y}\ \textit{l'image de}\, A,$$

$$\bullet\mathcal{G}(A)=\{(u,Au)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}:u\in D(A)\}\ \textit{le graphe de}\, A.$$

Définition 1.2.2 *On dit qu'un opérateur* A *est fermé si son graphe est fermé dans* $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.

1.2.2 Opérateurs bornés

Définition 1.2.3 *Un opérateur $A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est dit borné s'il existe une constante positive c telle que*

$$\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq c\,\|x\|_{\mathcal{X}}\, ;\ \forall x \in \mathcal{X}.$$

Théorème 1.2.1 *Un opérateur linéaire est continu si et seulement s'il est borné.*

• *On note par $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ l'espace des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{X}$ dans l'espace de Banach $\mathcal{Y}$ muni de la norme :*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}} \leq 1} \|Ax\|_{\mathcal{Y}}\,.$$

$\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ est un espace de Banach.
Si $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, on note $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{X}) = \mathcal{L}(\mathcal{X})$.

Théorème 1.2.2 ***(Banach-Steinhauss)*** *Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de Banach. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs linéaires continus de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$. On suppose que*

$$\sup_{i\in I} \|A_i x\| < \infty, \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Alors :

$$\sup_{i\in I} \|A_i\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} < \infty,$$

autrement dit, il existe une constante c telle que :

$$\|A_i x\| < c\,\|x\|\,,\ \forall x \in \mathcal{X},\ \forall i \in I.$$

Théorème 1.2.3 *Soit A un opérateur linéaire continu et bijectif de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$. Alors A^{-1} est continu de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{X}$.*

Théorème 1.2.4 *Soit A un opérateur linéaire continu de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$. A^{-1} existe et est continu si et seulement si il existe une constante $m > 0$ tel que :*

$$\|Ax\| \geq m\,\|x\|\,,\ \forall x \in \mathcal{X}.$$

Théorème 1.2.5 ***(Théorème du graphe fermé)*** *Soit A un opérateur linéaire de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$. Supposons que le graphe de A est fermé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Alors A est continu.*

Théorème 1.2.6 *Soit $A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach $\mathcal{X}$ avec $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} < 1$. Alors $(I - A)^{-1}$ existe, (I designe l'opérateur identité), il est borné et il admet la représentation suivante :*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n \geq 0} A^n.$$

1.2.3 Opérateurs compacts

Définition 1.2.4 *Un opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est dit de rang fini si $dim(\mathcal{R}(A)) < \infty$.*

Définition 1.2.5 *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. On dit que A est compact si l'image de toute partie bornée de $\mathcal{X}$ est une partie relativement compacte dans $\mathcal{Y}$.*

• On designe par $\mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ l'espace des opérateurs compacts de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$.
$\mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.
Si $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, on notera $\mathcal{K}(\mathcal{X})$.

Théorème 1.2.7 *Un opérateur $A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée (x_n) dans $\mathcal{X}$, la suite (Ax_n) contient une sous-suite convergente dans $\mathcal{Y}$.*

Théorème 1.2.8 *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Si A est de rang fini alors A est compact.*

Théorème 1.2.9 *Soit (A_n) une suite d'opérateurs continus de rangs finis de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ et soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ tels que $\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \to 0$. Alors $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.*

► L'opérateur identité $I : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ est compact ssi $\dim \mathcal{X} < \infty$.

Théorème 1.2.10 *Soit $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ des espaces de Banach et soit $A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ et $B : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$ des opérateurs linéaires bornés. Alors $BA : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Z}$ est compact si l'un des deux opérateurs A ou B est compact.*

Corollaire 1.2.1 *Si $dim\mathcal{X} = \infty$ et $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$, alors $A^{-1} \notin \mathcal{L}(\mathcal{X})$.*

Lemme 1.2.1 *Soient $\mathcal{R}$ une partie non vide de $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, κ un point d'accumulation de $\mathcal{R}$ et $\{\mathcal{A}_\lambda;\ \lambda \in \mathcal{R}\}$ une famille d'opérateurs de $\mathcal{D} \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$.*
Si $\mathcal{A}_\lambda \mathcal{D}$ est relativement compacte, $\forall \lambda \in \mathcal{R}$ et

$$\lim_{\lambda \to \kappa} \mathcal{A}_\lambda x = \mathcal{A}x,$$

uniformément pour $x \in \mathcal{D}$, alors $\mathcal{A}\mathcal{D}$ est relativement compacte.

Spectre d'un opérateur compact

Définition 1.2.6 *Soit A un opérateur linéaire fermé dans $\mathcal{X}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On appelle ensemble résolvant de A, l'ensemble*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ est bijectif}\}.$$

• *Le complémentaire de $\rho(A)$ dans $\mathbb{C}$ est appelé spectre de A et est noté $\sigma(A)$. Le spectre de A est un fermé de $\mathbb{C}$.*

• *L'opérateur $\mathcal{R}_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelé la résolvante de A.*

▶ *Le spectre de A est la reunion des ensembles suivants :*

- Le spectre ponctuel :

$$\sigma_P(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \quad \text{n'est pas injectif}\}.$$

Un élément λ de $\sigma_P(A)$ est dit valeur propre de A.

-Si $\lambda \in \sigma(A) - \sigma_P(A)$ donc $\lambda I - A$ est injectif, mais non surjectif, $\mathrm{Im}(\lambda I - A) \neq \mathcal{X}$, deux cas se présentent :

-Si $\mathrm{Im}(\lambda I - A)$ n'est pas dense, on dit que $\lambda \in \sigma_r(A)$ le spectre résiduel.

-Si $\mathrm{Im}(\lambda I - A)$ est dense, on dit que $\lambda \in \sigma_c(A)$ le spectre continu.

Théorème 1.2.11 *Soit A un opérateur compact, on a alors :*

(***i***) $0 \in \sigma(A)$,

(***ii***) $\sigma(A) - \{0\} = \sigma_p(A) - \{0\}$,

(***iii***) *les points de $\sigma(A) - \{0\}$ sont isolés,*

(***iv***) *l'une des situations suivantes :*

-ou bien $\sigma(A) = \{0\}$,

-ou bien $\sigma(A) - \{0\}$ *est fini,*

-ou bien $\sigma(A) - \{0\}$ *est une suite qui tend vers* 0.

1.3 Différentiabilité au sens de Fréchet

Définition 1.3.1 *Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces vectoriels et f une application de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$.*

On dit que f est Fréchet-Différentiable en un point $x \in \mathcal{X}$ s'il existe un opérateur $\mathscr{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ tel que :

$$\lim_{\|h\|_{\mathcal{X}} \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - \mathscr{L}h\|_{\mathcal{Y}}}{\|h\|_{\mathcal{X}}} = 0.$$

• *Si f est Fréchet-Différentiable en x alors l'opérateur $\mathscr{L}$ intervenant dans la définition précédente est unique.*

• *Si f est Fréchet-Différentiable en x alors elle est continue en ce point.*

1.4 Semigroupes d'opérateurs linéaires

Définition 1.4.1 *On dit que la famille d'opérateurs bornés $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur $\mathcal{X}$ est un semigroupe si :*

(***i***) $T(0) = I$;

(***ii***) $\forall t \geq 0,\ s \geq 0 : T(t+s) = T(t)T(s)$;

Si de plus

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x,\ \forall x \in \mathcal{X},$$

on dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semigroupe fortement continu ou un C_0-semigroupe.

• *On dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semigroupe uniformément continu si*

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} = 0.$$

• *On définit le générateur infinitésimal $(A, D(A))$ d'un semigroupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ comme étant l'opérateur*

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X},$$

où

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \mathcal{X} : \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(T(t)x - x) \ \textit{existe} \right\},$$

et

$$\forall x \in \mathcal{D}(A),\ Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(T(t)x - x).$$

• *Certaines propriétés des semigroupes sont citées dans la proposition suivante :*

Proposition 1.4.1 *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigroupe dans $\mathcal{X}$ et A son générateur. Alors :*

(***i***) *A est un opérateur fermé à domaine dense ;*

(***ii***) *il existe $M \geq 1$, et $w \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq Me^{wt}, \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

dans ce cas $T(t)$ est dit de type (w, M) ;

(***iii***) $\forall x \in \mathcal{X},\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_t^{t+h} T(\tau)xd\tau = T(t)x;$

(***iv***) *pour tout* $x \in \mathcal{X}$, *et* $t \geq 0$ *on a :*

$$\int_0^t T(\tau)xd\tau \in \mathcal{D}(A),\ \text{ et }\ A\int_0^t T(\tau)xd\tau = T(t)x - x;$$

(***v***) *pour tout* $x \in \mathcal{D}(A)$, *et tous* $0 \leq s \leq t < \infty$ *on a :*

$$\int_s^t AT(\tau)xd\tau = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = T(t)x - T(s)x;$$

(***vi***) *pour tout* $x \in \mathcal{D}(A)$, $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ *et*

$$\frac{d}{dt}(T(t)x) = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Définition 1.4.2 *Un semigroupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *est dit de contractions si pour tout* $t \geq 0$ *on a :*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq 1.$$

Théorème 1.4.1 *Un opérateur linéaire* A *est un générateur infinitésimal d'un semigroupe uniformément continu si et seulement s'il est continu.*

Théorème 1.4.2 *Un opérateur* $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ *est un générateur infinitésimal d'un* C_0*-semigroupe de contractions si et seulement si :*
(***i***) A *est fermé et de domaine dense ;*
(***ii***) $]0,\infty[\ \subseteq \rho(A)$ *et pour tout* $\lambda > 0$, *on a* $\|\mathcal{R}_\lambda(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq \dfrac{1}{\lambda}$.

Théorème 1.4.3 *(**Hille -Yosida**) Soit* A *un opérateur fermé de domaine dence* $\mathcal{D}(A)$ *dans un espace de Banach* $\mathcal{X}$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(***i***) A *engendre un* C_0*-semigroupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *vérifiant,*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq Me^{wt},\ \text{ pour tout } t \geq 0$$

(***ii***) *pour tout* $\lambda > 0$, $\lambda \in \rho(A)$ *et*

$$\|(\lambda - w)^m \mathcal{R}_\lambda^m(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq M,\ \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}.$$

1.4.1 Semigroupes compacts

Définition 1.4.3 *Un C_0-semigroupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ dans un espace de Banach $\mathcal{X}$ est dit compact pour $t > t_0 \geq 0$ si pour chaque $t > t_0$, l'opérateur $T(t)$ est compact dans $\mathcal{X}$. Le semigroupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est dit compact s'il est compact pour $t > 0$.*

Remarque.

• Si $T(t)$ est compact pour $t \geq 0$, alors en particulier l'identité I est un opérateur compact et $\mathcal{X}$ nécessairement de dimension finie.

• Si pour $t_0 > 0$ l'opérateur $T(t_0)$ est compact, alors $T(t)$ est compact pour $t \geq t_0$.

Proposition 1.4.2 *Si $T(t)$ est compact pour un $t > t_0$, alors l'application $t \to T(t)$ est continue de $]t_0, +\infty[$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{X})$, pour $t > t_0$.*

Théorème 1.4.4 *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigroupe et $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{X}$ son générateur infinitésimal. Alors, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est compact si et seulement si :*

i) *l'application $t \to T(t)$ est continue de $]0, +\infty[$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{X})$,*

ii) *la résolvante $\mathcal{R}_\lambda(A)$ est compacte pour tout $\lambda \in \rho(A)$.*

Corollaire 1.4.1 *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigroupe uniformément continu. Alors $T(t)$ est compact si et seulement si $\mathcal{R}_\lambda(A)$ est compacte pour tout $\lambda \in \rho(A)$.*

1.4.2 Semigroupes analytiques

Définition 1.4.4 *Soient $\theta_1,\ \theta_2 \in \mathbb{R} : \frac{-\Pi}{2} \leq \theta_1 < 0 \leq \theta_2 \leq \frac{\Pi}{2}$ et le secteur*

$$\Delta_{\theta_1}^{\theta_2} = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\},$$

Une famille d'opérateurs linéaires bornés $\{T(z)\}_{z\in\Delta_{\theta_1}^{\theta_2}}$ dans un espace de Banach $\mathcal{X}$ est dite semi-groupe analytique si :

(i) *l'application $z \longrightarrow T(z)$ est analytique de $\Delta_{\theta_1}^{\theta_2} \longrightarrow \mathcal{X},$ pour tout $x \in \mathcal{X}$,*

(ii) *$T(0) = I$ (identité) et $\lim\limits_{z\to 0, z\in\Delta_{\theta_1}^{\theta_2}} T(z)x = x,$ pour tout $x \in \mathcal{X}$,*

(iii) *$T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2),\ \forall (z_1, z_2) \in \Delta_{\theta_1}^{\theta_2}$.*

• *Un semigroupe est dit analytique s'il est analytique dans un certain secteur du type* Δ *qui contient* $\mathbb{R}_+$.

Théorème 1.4.5 *Soit* $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *un générateur infinitésimal d'un* C_0*-semigroupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *tel que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq Me^{wt}, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Alors, $T(t)$ *est analytique si et seulement s'il existe* $C > 0$ *et* λ_0 *tel que*

$$\left\|A\mathcal{R}_\lambda^{n+1}(A)\right\| \leq \frac{C}{n\lambda^n}, \quad \textit{pour tout } \lambda > n\lambda_0 \textit{ et pour } n = 1, 2, ...$$

Théorème 1.4.6

Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semigroupe d'un générateur infinitésimal* $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. *Si*

$$\limsup_{t\to 0} \|T(t) - I\| \leq 2,$$

alors, $T(t)$ *est prolongeable en un semigroupe analytique.*

1.5 Équations intégrales de Volterra

1.5.1 Équations intégrales de Volterra

Définition 1.5.1 *Soit* $\mathcal{X}$ *un espace de Banach et* $\aleph(s,t)$ *une fonction définie de*

$$\Delta = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t \leq T\},$$

à valeurs dans $\mathbb{R}$. *Les équations intégrales suivantes :*

$$\phi(t) = \int_0^t \aleph(t,s)\Psi(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.1}$$

$$\Psi(t) = \phi(t) + \int_0^t \aleph(t,s)\Psi(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.2}$$

où Ψ *est la fonction inconnue et* ϕ *est une fonction donnée, sont appelées les équations intégrales de Volterra de première et de deuxième espèce respectivement.*

• $\aleph$ *est appelée le noyau.*

1.5.2 Méthode des approximations successives

Une approche classique qui établit l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce (1.2), est la méthode des approximations successives appelée aussi méthode de Picard, elle consiste à définir la suite itérative suivante

$$\Psi_n(t) = \int_0^t \aleph(t,s)\Psi_{n-1}(s)ds \ + \phi(t), \ \ n = 1, 2.... \tag{1.3}$$

avec

$$\Psi_0(t) = \phi(t).$$

Pour la simplicité, on note

$$\varphi_n(t) = \Psi_n(t) - \Psi_{n-1}(t), \ \ n = 1, 2... \tag{1.4}$$

d'où

$$\varphi_n(t) = \int_0^t \aleph(t,s)\varphi_{n-1}(s)ds, \ n = 1, 2, ... \tag{1.5}$$

avec

$$\varphi_0(t) = \phi(t).$$

Ainsi à partir (1.4), on a :

$$\Psi_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(t). \tag{1.6}$$

Par induction, on obtient

$$\varphi_n(t) = \int_0^t \aleph_n(t,s)\phi(s)ds,$$

où

$$\aleph_n(t,s) = \int_s^t \aleph(t,\tau)\aleph_{n-1}(\tau,s)d\tau, \tag{1.7}$$

et $\aleph_1(t,s) = \aleph(t,s)$,

⋄ Les $\aleph_n$ sont appelés les noyaux itérés.

Si $\aleph(t,s)$, on note

$$M = \sup_{(t,s)\in\Delta} |\aleph(t,s)|,$$

d'où

$$|\aleph(t,s)| \leq M, \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

alors, par induction de (1.7) on obtient

$$|\aleph_n(t,s)| \leq \frac{M^n(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{M^nT^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{1.8}$$

pour tout $n \geq 1$ et $(t,s) \in \Delta$, ce qui montre que :

$$\mathcal{H}(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \aleph_i(t,s) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} \aleph_i(t,s). \tag{1.9}$$

est uniformément convergente pour $(t,s) \in \Delta$.

◇ La fonction $\mathcal{H}$ ainsi définie est appelée le noyau résolvant de $\aleph(t,s)$.

• Introduisons à présent le théorème suivant :

Théorème 1.5.1 *Si* $\aleph(t,s)$ *et* $\phi(t)$ *sont continues. Alors, l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce* (1.2) *admet une unique solution continue donnée par*

$$\Psi(t) = \int_0^t \mathcal{H}(t,s)\phi(s)ds + \phi(t). \tag{1.10}$$

Preuve. D'après (1.6), (1.3) est équivalente à

$$\Psi_n(t) = \int_0^t \mathcal{H}_n(t,s)\phi(s)ds + \phi(s), \tag{1.11}$$

où

$$\mathcal{H}_n(t,s) = \sum_{i=1}^{n} \aleph_i(t,s). \tag{1.12}$$

Alors, d'après (1.9)

$$\Psi(t) = \int_0^t \mathcal{H}(t,s)\phi(s)ds + \phi(t),$$

est une solution continue de (1.2).

• Montrons l'unicité de la solution.

On suppose que $\Psi'(t)$ est une autre solution de (1.2). Alors

$$\Psi(t) - \Psi'(t) = \int_0^t \aleph(t,s)(\Psi(s) - \Psi'(s))ds. \tag{1.13}$$

Comme $\Psi(t)$ et $\Psi'(t)$ sont continues, il existe une constante C tel que :

$$\left|\Psi(t) - \Psi'(t)\right| \leq C, \quad pour\ 0 \leq t \leq T, \tag{1.14}$$

En substituons (1.14) dans (1.13), on obtient

$$\left|\Psi(t) - \Psi'(t)\right| \leq MCt, \quad pour\ 0 \leq t \leq T,$$

en, réiterant le procédé $n-1$ fois, on obtient :

$$\left|\Psi(t)-\Psi'(t)\right| \leq \frac{C(Mt)^n}{n!}, \quad pour\ 0 \leq t \leq T, \tag{1.15}$$

pour tout n.

Pour n suffisament grand, le second membre de (1.15) est arbitrairement petit, d'où

$$\Psi(t)=\Psi'(t), \quad pour\ 0 \leq t \leq T.$$

$\square$

Théorème 1.5.2 *Soient les conditions du théorèmes 1.5.1 satisfaites. Alors le noyau resolvant $\mathcal{H}$ est la solution unique de l'équation intégrale*

$$\mathcal{H}(t)-\int_s^t \aleph(t,\tau)\mathcal{H}(\tau,s)d\tau=\aleph(t,s), \quad pour\ 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{1.16}$$

Preuve. D'après (1.9), on a :

$$\begin{aligned}
\int_s^t \aleph(t,\tau)\mathcal{H}(\tau,s)d\tau &= \int_s^t \aleph(t,\tau)\sum_{i=1}^{\infty}\aleph_i(\tau,s)d\tau \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\int_s^t \aleph(t,\tau)\aleph_i(\tau,s)d\tau \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\aleph_{i+1}(t,s) \\
&= \mathcal{H}(t,s)-\aleph(t,s).
\end{aligned}$$

$\square$

1.6 Théorèmes du point fixe

Théorème 1.6.1 (Schauder) *Soient $\mathcal{R}$ une partie non vide, convexe et fermée d'un espace de Banach $\mathcal{X}$ et $\mathcal{F}$ une application continue de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}$ telle que $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ est relativement compacte. Alors $\mathcal{F}$ admet un point fixe.*

Théorème 1.6.2 *Soient $(\mathcal{X},\|.\|)$ un espace Banach, et $\mathcal{F}:\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{X}$ une application contractante i.e. il existe $k<1$ tel que*

$$\|\mathcal{F}(u_1)-\mathcal{F}(u_2)\| \leq k\,\|u_1-u_2\|\,, \ pour\ tout\ u_1,\ u_2 \in \mathcal{X}$$

Alors l'équation

$$\mathcal{F}(u) = u,$$

admet une solution unique $u \in \mathcal{X}$.

Cette solution est appelée point fixe de $\mathcal{F}$.

Corollaire 1.6.1 *On suppose que* $\mathcal{F}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$, *et qu'il existe un entier* $p \geq 1$ *tel que* $\mathcal{F}^p$ *est contractante. Alors* $\mathcal{F}$ *admet un point fixe unique, et pour tout point* $x \in \mathcal{X}$, *la suite* $\mathcal{F}^p(x)$ *converge vers ce point fixe.*

1.7 Lemme de Gronwall

Lemme 1.7.1 *Soit* φ *une fonction non négative, continue vérifiant l'inégalité :*

$$\varphi(t) \leq a + b\int_0^t \varphi(s)\,ds, \quad t > 0,$$

où a *et* b *sont des constantes positives. Alors*

$$\varphi(t) \leq ae^{bt}.$$

Chapitre 2

Problèmes directs

2.1 Problème de Cauchy non homogène

2.1.1 Formulation du problème

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$. On considère dans $\mathcal{X}$ le problème suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & 0 < t \leq T, \\ u(0) = \xi, \end{cases} \tag{$\mathscr{P}\mathscr{D}_1$}$$

où $\xi \in \mathcal{X}$, A est un opérateur linéaire non-borné de domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ et $f \in L^1(0, T; \mathcal{X})$. Notant par $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ le C_0-semigroupe engendré par A.

Définition 2.1.1 *La fonction u est dite :*

i) *solution classique du problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_1)$ si $u \in C((0, T]; \mathcal{D}(A)) \cap C([0, T]; \mathcal{X}) \cap C^1((0, T]; \mathcal{X})$ et elle satisfait le problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_1)$.*

ii) *solution mild du problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_1)$ si $u \in C([0, T]; \mathcal{X})$ et elle satisfait :*

$$u(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s) f(s)\, ds, \tag{2.1}$$

pour tout $0 < t \leq T$.

iii) *solution stricte du problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_1)$ si $u \in C^1([0, T]; \mathcal{X}) \cap C([0, T]; \mathcal{D}(A))$ et elle satisfait le problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_1)$.*

2.1.2 Existence de la solution

Dans cette section on introduit quelques théorèmes importants qui établient l'existence de la solution du problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_1)$.

Théorème 2.1.1 ***(principe de Duhamel)*** *[77] Chaque solution classique du problème* $(\mathscr{P}\mathscr{D}_1)$ *est donnée par* (2.1).

Théorème 2.1.2 *Soient* $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ *un générateur infinitésimal d'un* C_0*-semigroupe* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, $f \in L^1(0,T;\mathcal{X})$ *et est continue sur* $(0,T)$ *et soit :*

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \ \forall t \in [0,T].$$

Si une des deux conditions suivantes est satisfaite :

(i) v *est continûment différentiable sur* $(0,T)$;

(ii) $v(t) \in \mathcal{D}(A)$ *pour* $t \in (0,T)$ *et l'application* $t \longrightarrow Av(t)$ *est continue sur* $(0,T)$;

alors, pour tout $\xi \in \mathcal{D}(A)$, *le problème* $(\mathscr{P}\mathscr{D}_1)$ *admet une solution classique unique.*

$\diamond$ *D'autre part s'il existe* $\xi \in \mathcal{D}(A)$ *tel que le problème* $(\mathscr{P}\mathscr{D}_1)$ *admet une solution classique, alors* v *satisfait les deux conditions* ***(i)*** *et* ***(ii)***.

Preuve. Remarquons que, pour tout $t \in (0,T)$ et $h > 0$:

$$\frac{1}{h}(S(h)-I)v(t) = \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds. \tag{2.2}$$

Supposons que ***(i)*** satisfaite, comme f est continue et v est continûment différentiable dans $(0,T)$ il s'ensuit que le membre droite de l'égalité (2.2) converge quand h tend vers 0, et donc le membre gauche converge aussi. Et par conséquent $v(t) \in \mathcal{D}(A)$ et :

$$v'(t) = Av(t) + f(t), \ \forall t \in (0,T). \tag{2.3}$$

Si ***(ii)*** est satisfaite, alors v est différentiable à droite dans $(0,T)$ et sa dérivée droite est continue dans $(0,T)$ et comme v est continue, il découle que v est continûment différentiable dans $(0,T)$ et vérifie (2.3).

Comme $v(0) = 0$, on déduit que dans les deux cas ***(i)*** et ***(ii)*** on a

$$u(t) = S(t)\xi + v(t), \ t \in [0,T],$$

est une solution classique de $(\mathscr{P}\mathscr{D}_1)$, pour tout $\xi \in \mathcal{D}(A)$.

$\diamond$ Supposons maintenant qu'il existe $\xi \in \mathcal{D}(A)$ tel que le problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_1)$ admet une solution classique u donnée par (2.1). Alors la fonction

$$v(t) = u(t) - S(t)\xi,$$

est différentiable dans $(0, T)$, de plus

$$v'(t) = u'(t) - S(t) A\xi,$$

est continue dans $(0, T)$, alors v satisfait ***(i)***.

Si $\xi \in \mathcal{D}(A)$, nous avons

$$S(t)\xi \in \mathcal{D}(A), \ \forall t \in [0, T],$$

et donc

$$v(t) = u(t) - S(t)\xi \in \mathcal{D}(A), \ \forall t \in (0, T),$$

et l'application

$$t \longrightarrow Av(t) = Au(t) - AS(t)\xi = u'(t) - f(t) - S(t) A\xi,$$

est continue dans $(0, T)$, alors v vérifie ***(ii)***. □

Corollaire 2.1.1 *Soient $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ et $f(t) \in C^1([0, T], \mathcal{X})$. Alors, $\forall \xi \in \mathcal{D}(A)$ le problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_1)$ admet une unique solution classique.*

Preuve. L'application

$$t \longrightarrow v(t) = \int_0^t S(t-s) f(s) \, ds = \int_0^t S(s) f(t-s) \, ds,$$

est continûment différentiable dans $(0, T)$. En effet, un calcul simple montre que

$$\begin{aligned} v'(t) &= S(t) f(0) + \int_0^t S(s) f'(t-s) \, ds \\ &= S(t) f(0) + \int_0^t S(t-s) f'(s) \, ds; \ \forall t \in (0, T), \end{aligned}$$

et le résultat s'ensuit de la condition (**i**) du théorème (2.1.2). □

2.1.3 Compacité de l'opérateur solution

Dans cette section, on introduit quelques propriétés concernant l'opérateur solution du problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_1)$ dans $C([0, T]; \mathcal{X})$.

Définition 2.1.2 *L'opérateur*

$$Q : X \times L^1(0, T; \mathcal{X}) \longrightarrow C([0, T]; \mathcal{X}),$$

défini par

$$Q(\xi, f) = u,$$

où u est l'unique solution mild de problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_1)$ correspondante aux données $\xi \in \mathcal{X}$ et $f \in L^1(0,T;\mathcal{X})$ i.e.

$$u(t) = S(t)\,\xi + \int_0^t S(t-s)\,f(s)\,ds,$$

pour tout $t \in [0,T]$, est appelé l'opérateur solution du problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_1)$.

Remarque 1. L'image de toute partie bornée de $\mathcal{X} \times \; L^1(0,T;\mathcal{X})$, par Q est une partie bornée

dans $C([0,T];\mathcal{X})$.

En effet, pour tout (ξ, f) et $(\eta, g) \in \mathcal{X} \times \; L^1(0,T;\mathcal{X})$ et pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\|Q(\xi,f)(t) - Q\;(\eta,g)(t)\| \leq \|S(t)\xi - S(t)\eta\| + \int_0^t \|S(t-s)(f(s) - g(s))\|\,ds$$

$$\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}\|\xi - \eta\| + \int_0^t \|S(t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}\|f(s) - g(s)\|\,ds$$

$$\leq \|\xi - \eta\| + \int_0^T \|f(s) - g(s)\|\,ds,$$

d'où

$$\|Q(\xi,f)(t) - Q\;(\eta,g)(t)\|_{C([0,T];\mathcal{X})} \leq \|\xi - \eta\| + \|f(s) - g(s)\|_{L^1(0,T;\mathcal{X})},$$

où $\|\psi\|_{C([0,T];\mathcal{X})} = \sup_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|$.

Définition 2.1.3 *Une famille $\mathscr{F}$ de $L^1(0,T;\mathcal{X})$ est dite uniformement intégrable si $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout sous-ensemble mesurable E de $[0,T]$ de mesure (mesure de Lebesgue) $\mu(E) < \delta(\varepsilon)$, on a*

$$\int_E \|f(t)\|\,dt < \varepsilon,$$

pour tout $f \in \mathscr{F}$.

Théorème 2.1.3 *Soient $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ un générateur d'un C_0-semigroupe de contractions $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, $\mathcal{R}$ une partie bornée de $\mathcal{X}$ et $\mathscr{F}$ une partie uniformément intégrable de $L^1(0,T;\mathcal{X})$. Alors $Q(\mathcal{R},\mathscr{F})$ est relativement compacte dans $C([s,T];\mathcal{X})$ pour tout $s \in (0,T)$, si et seulement s'il existe une partie $\mathscr{D}$ dense dans $[0,T]$ tel que, pour tout $t \in \mathscr{D}$ l'ensemble*

$$Q(\mathcal{R},\mathscr{F})(t) = \{Q(\xi,f)(t)\,;\ (\xi,f) \in \mathcal{R}\times\mathscr{F}\},$$

est relativement compact dans $\mathcal{X}$.

$\diamond$ *De plus, si la dernière condition est satisfaite et $0 \in \mathscr{D}$, alors $Q(\mathcal{R}, \mathscr{F})$ est relativement compacte dans $C([0,T];\mathcal{X})$.*

Preuve. D'après le théorème 1.1.2 **(Ascoli-Arzelà)** la nécessaité est évidente.

Montrons la suffisance, pour ce but, on montre d'abord que $Q(\mathcal{R}, \mathscr{F})$ est équicontinu sur $(0,T]$.

Soit $\varepsilon > 0$, comme $\mathscr{F}$ est uniformément intégrable, il existe $\varrho(\varepsilon)$ tel que

$$\int_\Lambda \|f(s)\| \, ds \le \varepsilon,$$

pour toute partie mesurable Λ de $[0,T]$ vérifiant $\mu(\Lambda) \le \varrho(\varepsilon)$, où μ est le mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Soit $t \in (0,T]$ et fixons $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 0$ tel que

$$t - \lambda > 0, \ 2\lambda \le \varrho(\varepsilon) \ \text{ et } \ t - \lambda \in \mathscr{D},$$

ce qui est toujours possible puisque $\mathscr{D}$ est dense dans $[0,T]$.

On a $Q(\mathcal{R}, \mathscr{F})(t-\lambda)$ est relativement compacte dans $\mathcal{X}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille finie $\{(\xi_1, f_1), (\xi_2, f_2), ..., (\xi_{k(\varepsilon)}, f_{k(\varepsilon)})\}$ dans $\mathcal{R} \times \mathscr{F}$ tel que pour tout $(\xi, f) \in \mathcal{R} \times \mathscr{F}$, il existe $i \in \{1, 2, ..., k(\varepsilon)\}$ vérifiant

$$\|Q(\xi, f)(t-\lambda) - Q(\xi_i, f_i)(t-\lambda)\| \le \varepsilon. \tag{2.4}$$

D'autre part, la famille $\{(\xi_1, f_1), (\xi_2, f_2), ..., (\xi_{k(\varepsilon)}, f_{k(\varepsilon)})\}$ est équicontinue en t, comme étant une famille finie de fonctions continues sur $[0,T]$.

Donc pour le même $\varepsilon > 0$, il existe $\varsigma(\varepsilon) \in (0, \lambda]$, tel que

$$\|Q(\xi_i, f_i)(t+h) - Q(\xi_i, f_i)(t)\| \le \varepsilon, \tag{2.5}$$

pour chaque $i = 1, 2, ..., k(\varepsilon)$, et chaque $h \in \mathbb{R}$ avec $|h| \le \varsigma(\varepsilon)$.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \|Q(\xi, f)(t+h) - Q(\xi, f)(t)\| &\le \|Q(\xi, f)(t+h) - Q(\xi_i, f_i)(t+h)\| \\ &+ \|Q(\xi_i, f_i)(t+h) - Q(\xi_i, f_i)(t)\| + \|Q(\xi_i, f_i)(t) - Q(\xi, f)(t)\|, \end{aligned} \tag{2.6}$$

et pour tout $(\eta, g) \in \mathcal{R} \times \mathscr{F}$ et tout $h \in (-\varsigma(\varepsilon), +\varsigma(\varepsilon))$, on a

$$Q(\eta, g)(t+h) = S(\lambda + h)Q(\eta, g)(t-\lambda) + \int_{t-\lambda}^{t+h} S(t+h-s)g(s)\, ds, \tag{2.7}$$

d'après (2.6) et (2.7), on obtient

$$\|Q(\xi,f)(t+h)-Q(\xi,f)(t)\| \leq \|S(\lambda+h)(Q(\xi,f)(t-\lambda)-Q(\xi_i,f_i)(t-\lambda))\|$$

$$+\int_{t-\lambda}^{t+h}\|S(t+h-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}\|f(s)-f_i(s)\|\,ds+\|Q(\xi_i,f_i)(t+h)-Q(\xi_i,f_i)(t)\|$$

$$+\|S(\lambda)(Q(\xi,f)(t-\lambda)-Q(\xi_i,f_i)(t-\lambda))\|+\int_{t-\lambda}^{t}\|S(t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}\|f(s)-f_i(s)\|\,ds$$

$$\leq \|S(\lambda+h)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}\|Q(\xi,f)(t-\lambda)-Q(\xi_i,f_i)(t-\lambda)\|$$

$$+\int_{t-\lambda}^{t+h}\|S(t+h-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}(\|f(s)\|+\|f_i(s)\|)ds+\|Q(\xi_i,f_i)(t+h)-Q(\xi_i,f_i)(t)\|$$

$$+\|S(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}\|Q(\xi,f)(t-\lambda)-Q(\xi_i,f_i)(t-\lambda)\|$$

$$+\int_{t-\lambda}^{t}\|S(t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}(\|f(s)\|+\|f_i(s)\|)ds$$

$$\leq 2\|Q(\xi,f)(t-\lambda)-Q(\xi_i,f_i)(t-\lambda)\|+2\int_{t-\lambda}^{t+\lambda}(\|f(s)\|+\|f_i(s)\|)ds$$

$$+\|Q(\xi_i,f_i)(t+h)-Q(\xi_i,f_i)(t)\|,$$

pour tout $(\xi,f)\in\mathcal{R}\times\mathscr{F}$ et tout $h\in(-\varsigma(\varepsilon),+\varsigma(\varepsilon))$.

D'après (2.4), (2.6), (2.7) et les choix de $\lambda>0$ et de $\varsigma(\varepsilon)>0$, il s'ensuit que

$$\|Q(\xi,f)(t+h)-Q(\xi,f)(t)\|\leq 7\varepsilon,$$

pour tout $(\xi,f)\in\mathcal{R}\times\mathscr{F}$ et tout $h\in\mathbb{R}$ avec $|h|\leq\varsigma(\varepsilon)$.

D'où $Q(\mathcal{R},\mathscr{F})$ est équicontinue sur $(0,T]$ et en vertu du théorème 1.1.2, elle est relativement compacte dans $C([s,T];\mathcal{X})$, pour tout $s\in(0,T)$.

⋄ Si $0\in\mathscr{D}$, alors $Q(\mathcal{R},\mathscr{F})$ est équicontinu en 0. Ce qui achève la preuve. □

Théorème 2.1.4 *Soient $A:\mathcal{D}(A)\subseteq\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{X}$ un générateur d'un C_0-semigroupe compact de contractions $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, $\xi\in\mathcal{X}$, $\mathcal{R}=\{\xi\}$ et $\mathscr{F}$ une partie uniformément intégrable de $L^1(0,T;\mathcal{X})$. Alors $Q(\mathcal{R},\mathscr{F})$ est relativement compacte dans $C([0,T];\mathcal{X})$.*

Preuve. En vertu de théorème 2.1.3, il suffit de montrer que pour tout $t \in (0,T)$, $Q(\mathcal{R},\mathscr{F})\,(t)$ est relativement compacte dans $\mathcal{X}$.

Soit $t \in (0,T)$ et $\lambda > 0$ avec $t - \lambda \geq 0$, on a

$$Q(\xi,f)\,(t) = S(t)\xi + S(\lambda)\int_0^{t-\lambda} S(t-\lambda-s)f\,(s)\,ds + \int_{t-\lambda}^{t} S(t-s)f\,(s)\,ds. \tag{2.8}$$

Comme $S(\lambda)$ est compact, d'après la remarque 1, on conclut que l'image de l'ensemble $Q(\mathcal{R},\mathscr{F})\,(t)$ par l'opérateur $P_\lambda : Q(\mathcal{R},\mathscr{F})\,(t) \longrightarrow \mathcal{X}$ défini par

$$P_\lambda Q(\xi,f)\,(t) = S(t)\xi + S(\lambda)\int_0^{t-\lambda} S(t-\lambda-s)f\,(s)\,ds, \tag{2.9}$$

est une partie relativement compacte dans $\mathcal{X}$. De plus d'après (2.8) et (2.9) et l'intégrabilité uniforme de $\mathscr{F}$, il vient que

$$\lim_{\lambda\to 0} \|P_\lambda Q(\xi,f)\,(t) - Q(\xi,f)\,(t)\| = 0,$$

uniformément pour $f \in \mathscr{F}$.

D'après le lemme 1.2.1, on conclut que $Q(\mathcal{R},\mathscr{F})\,(t)$ est relativement compact dans $\mathcal{X}$ pour tout, $t \in [0,T]$. Une application du théorème 2.1.3 achève la preuve. $\square$

2.2 Problème de Cauchy semi-linéaire

2.2.1 Formulation du problème

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach muni de la norme $\|\,.\,\|$. On considère dans $\mathcal{X}$ le problème suivant :

$$\begin{cases} u'\,(t) = Au\,(t) + g(t,u\,(t)), & 0 < t \leq T, \\ u\,(0) = \xi, \end{cases} \tag{$\mathscr{P}\mathscr{D}_2$}$$

où $\xi \in \mathcal{X},\ A$ est un opérateur linéaire non borné de domaine de définition $\mathcal{D}\,(A)$ et $g(t,u\,(t))$ est une fonction définie de $[0,T]{\times}\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$.

Définition 2.2.1 *La fonction u est dite :*

i) *solution mild du problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_2)$ si $u \in C([0,T];\mathcal{X})$ et elle satisfait :*

$$u\,(t) = S\,(t)\,\xi + \int_0^t S\,(t-s)\,g\,(s,u\,(s))\,ds, \tag{s}$$

ii) *solution stricte du problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_2)$ si $u \in C^1([0,T];\mathcal{X}) \cap C([0,T];\mathcal{D}(A))$ et elle satisfait le problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_2)$.*

iii) *solution classique du problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_2)$ si $u \in C((0,T];\mathcal{D}(A)) \cap C([0,T];\mathcal{X}) \cap C^1((0,T];\mathcal{X})$ et elle satisfait le problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_2)$.*

2.2.2 Existence de la solution

Dans ce qui suit, on va introduire certains théorèmes qui nous donnent l'existence et l'unicité de la solution du problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_2)$.

Définition 2.2.2 *Soit $\mathcal{D}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$.*
Une fonction $g : \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ est dite :
• *globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, s'il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\|g(t,u) - g(t,v)\| \leq \delta \|u - v\|,$$

pour tout (t,u) et $(t,v) \in \mathcal{D}$;
• *localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, si pour tout $(0,\xi) \in \mathcal{D}$, il existe $s > 0,\ r > 0$ et $\delta(0,\xi) = \delta > 0$ tel que $[0,s] \times \mathcal{B}(\xi,r) \subset \mathcal{D}$ et*

$$\|g(t,u) - g(t,v)\| \leq \delta \|u - v\|,$$

pour tout (t,u) et $(t,v) \in [0,s] \times \mathcal{B}(\xi,r)$.

Théorème 2.2.1 *Soient $\mathcal{X}$ un espace de Banach, $\mathcal{D}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$ et $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{X}$ une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe de contractions $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, alors pour tout $(0,\xi) \in \mathcal{D}$ il existe $b > 0$ telle que le problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_2)$ admet une seule solution mild u définie dans $[0,b]$.*

$\diamond$ Pour montrer le théorème 2.2.1, on introduit le lemme suivant :

Lemme 2.2.1 *Soient $\mathcal{X}$ un espace de Banach, A le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe de contractions $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ et $g : [0,T] \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ une fonction continue, bornée et globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Alors pour tout $\xi \in \mathcal{X}$ le problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_2)$ admet une seule solution mild u définie sur $[0,T]$.*

Preuve. Comme $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semigroupe de contractions et g est continue et globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, on a les estimations suivantes :

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq 1,\ \|g(t,u) - g(t,v)\| \leq \delta_1 \|u - v\|_{C([0,T];\mathcal{X})},\ \|g(t,u)\| \leq \delta_2, \tag{2.10}$$

pour $0 \leq t \leq T$, où δ_1 et δ_2 sont des constantes positives.
Commençons par établir l'existence de la solution pour $\xi \in \mathcal{X}$ (donnée), on définit l'application $\mathcal{F} : C([0,T];\mathcal{X}) \longrightarrow C([0,T];\mathcal{X})$ par :

$$(\mathcal{F}u)(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)\, g(s,u(s))\, ds. \tag{2.11}$$

Pour tout $u,\ v \in C([0,T];\mathcal{X})$ et $0 \leq t \leq T$:

$$\|(\mathcal{F}u)(t) - (\mathcal{F}v)(t)\| = \left\| \int_0^t S(t-s)\, g(s, u(s))\, ds - \int_0^t S(t-s)\, g(s, v(s))\, ds \right\|. \tag{2.12}$$

Majorant le membre droit de l'égalité (2.12), en utilisant les estimations (2.10), on obtient :

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{F}u)(t) - \mathcal{F}v)(t)\| &= \left\| \int_0^t S(t-s)\left[g(s, u(s)) - g(s, v(s))\right] ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|S(t-s)\left[g(s, u(s)) - g(s, v(s))\right]\| \, ds \\ &\leq \int_0^t \|S(t-s)\| \, \|g(s, u(s)) - g(s, v(s))\| \, ds \\ &\leq \delta_1 . t \, \|u - v\|_{C([0,T];\mathcal{X})} \end{aligned} \tag{2.13}$$

où $\|u\|_{C([0,T];\mathcal{X})} = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|$.

En remplaçant u et v dans (2.12) par $\mathcal{F}u$ et $\mathcal{F}v$ respectivement on a :

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{F}(\mathcal{F}u))(t) - (\mathcal{F}(\mathcal{F}v))(t)\| &= \left\|(\mathcal{F}^2 u)(t) - (\mathcal{F}^2 v)(t)\right\| \\ &\leq \delta_1 \int_0^t \|g(s, (\mathcal{F}u)(s)) - g(s, (\mathcal{F}v)(s))\| \, ds \\ &\leq \delta_1 \int_0^t \|(\mathcal{F}u)(s) - (\mathcal{F}v)(s)\| \, ds \\ &\leq \delta_1 . \int_0^t \delta_1 . s \, \|u - v\|_{C([0,T];\mathcal{X})} \, ds \\ &= \delta_1^2 . \frac{t^2}{2} \|u - v\|_{C([0,T];\mathcal{X})} . \end{aligned} \tag{2.14}$$

En réiterant cette opération $(n-1)$ fois, on obtient

$$\|(\mathcal{F}^n u)(t) - (\mathcal{F}^n v)(t)\| \leq \frac{(\delta_1 t)^n}{n!} \|u - v\|_{C([0,T];\mathcal{X})} ,$$

pour tout $n \in N^*$ et pour tout $t \in [0,T]$ on a donc :

$$\|\mathcal{F}^n u - \mathcal{F}^n v\|_{C([0,T],X)} \leq \frac{(\delta_1 T)^n}{n!} \|u - v\|_{C([0,T];\mathcal{X})} . \tag{2.15}$$

Comme $\dfrac{(\delta_1 T)^n}{n!} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$, on peut admettre que $\dfrac{(\delta_1 T)^n}{n!} < 1$, alors $\mathcal{F}^n$ est contractante, donc elle possède un point fixe u. En vertu du corollaire 1.6.1, $\mathcal{F}$ admet un unique point fixe $u = \mathcal{F}u$, ce point est la solution désirée du problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_2)$.

• Etablissons l'unicité. Soit v une solution du problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_2)$ qui correspond à la valeur initiale ν_0. Alors

$$\begin{aligned}\|u(t)-v(t)\| &\leq \|S(t)\xi - S(t)\nu_0\| + \left\|\int_0^t S(t-s)\left[g(s,u(s)) - g(s,v(s))\right] ds\right\| \\ &\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} . \|\xi-\nu_0\| + \int_0^t \|S(t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \|g(s,u(s)) - g(s,v(s))\| \, ds \\ &\leq \|\xi-\nu_0\| + \delta_1 . \int_0^t \|u(s)-v(s)\| \, ds. \end{aligned} \tag{2.16}$$

En appliquant le lemme de Gronwall à l'inégalité (2.16), on obtient :

$$\|u\,(s) - v\,(s)\| \leq e^{\delta_1 T} \quad \|\xi - \nu_0\| \, .$$

□

Preuve du théorème 2.2.1. Soit $(0,\xi) \in \mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ est un ouvert, donc il existe $b>0$ et $r>0$ telle que $[0,b]\times\mathcal{B}(\xi,r)\subseteq\mathcal{D}$.

De plus, comme g est continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, alors il existe $C>0$ tel que

$$\|g(t,u)\| \leq C,$$

pour tout $(t,u)\in[0,b]\times\mathcal{B}(\xi,r)$, et

$$\|g(t,u) - g(t,v)\| \leq \delta \, \|u-v\| \, ,$$

pour tout $(t,u),(t,v)\in[0,b]\times\mathcal{B}(\xi,r)$.

On définit aussi l'application $\mathcal{J}:\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{X}$ par

$$\mathcal{J}(y) = \begin{cases} y, \quad \text{pour } y\in\mathcal{B}(\xi,r), \\ \\ \dfrac{r}{\|y-\xi\|}(y-\xi)+\xi, \quad \text{pour } y\in\mathcal{X}\backslash\mathcal{B}(\xi,r). \end{cases}$$

Il est clair que $\mathcal{J}(\mathcal{X})\subseteq\mathcal{B}(\xi,r)$, et que $\mathcal{J}$ est continûment lipschitzienne dans $\mathcal{X}$ avec une constante de Lipschitz égale à 2.

On définit à prèsent l'application $\mathcal{G}:[0,b]\times\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{X}$ par

$$\mathcal{G}(t,y) = g(t,\mathcal{J}(y)),$$

Comme g est continue et globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable dans $[0, b] \times \mathcal{B}(\xi, r)$, $\mathcal{G}$ l'est aussi.

D'après le lemme 2.2.1, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + \mathcal{G}(t, u(t)), \\ u(0) = \xi, \end{cases}$$

admet une solution mild unique $u : [0, b] \longrightarrow \mathcal{X}$.

Comme $u(0) = \xi$ et u est continue en $t = 0$ on a

$$u(t) \in \mathcal{B}(\xi, r), \ \textit{pour tout } t \in [0, b].$$

Donc $\mathcal{G}(t, u(t)) = g(t, u(t))$, d'où $u : [0, b] \longrightarrow \mathcal{X}$ est une solution mild du problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_2)$.

Théorème 2.2.2 *[59] Soient $\mathcal{X}$ un espace de Banach et A un générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.*

Si $g : [0, T] \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ est une fonction continûment différentiable de $[0, T] \times \mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$, alors la solution mild de problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_2)$ avec $\xi \in \mathcal{D}(A)$ est un solution classique de problème $(\mathscr{P}\mathscr{D}_2)$.

Chapitre 3

Problème inverse semi-linéaire

3.1 Formulation du problème

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$. On considère dans $\mathcal{X}$ le problème d'identification $(\mathscr{P}\mathscr{I}1)$ suivant :

pour $\xi_0,\, \xi_1 \in \mathcal{X}$, déterminer $z \in \mathcal{X}$ et $u : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$ solution stricte du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) + \varphi(u(t))z, \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = \xi_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

avec u vérifiant la condition

$$\int_0^1 u(t)\, dt = \xi_1, \tag{3.2}$$

où $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ est un opérateur linéaire non borné, de plus A engendre un C_0-semigroupe compact de contractions $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, $f \in C^1([0,1]\,; \mathcal{X})$ et $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonctionnelle de classe C^1 vérifiant la condition suivante :

$\diamond$ Condition $(\mathscr{C})$

il existe $L > 0$ tel que la dérivé de Fréchet de φ en $u \in \mathcal{X}$, $\varphi'(u)$, satisfait :

$$\left\|\varphi'(u)\right\|_{\mathcal{X}^*} \leq L; \; uniformément \;\; pour \; u \in \mathcal{X}.$$

3.2 Existence de la solution

Tout d'abord, commençons par introduire certains définitions et résultats nécessaires pour établir l'existence de la solution du problème $(\mathscr{P}\mathscr{I}1)$.

Définition 3.2.1 *Pour* $k = 0, 1$ *on définit l'ensemble* $C^k(\xi_0, \xi_1)$ *par*

$$C^k(\xi_0, \xi_1) = \{w \in C^k([0,1]; \mathcal{X}) : w(0) = \xi_0, \int_0^1 w(t) = \xi_1\}.$$

• $C^k(\xi_0, \xi_1)$ est un ensemble non vide, fermé et est convexe dans $C^k([0,1]; \mathcal{X})$.

En effet, la fonction $w : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$ définie par :

$$w(t) = \xi_0 + 2t(\xi_1 - \xi_0), \ t \in [0,1],$$

est un élément de $C^k(\xi_0, \xi_1)$.

Montrons que $C^k(\xi_0, \xi_1)$ est fermé.

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions appartenant à $C^k(\xi_0, \xi_1)$ telle que $w_n(t)$ converge vers $w(t)$ dans $C^k([0,1]; \mathcal{X})$, on a :

$$\sup_{t\in[0,1]} \|w_n(t) - w(t)\| \to 0, \text{ quand } n \to +\infty,$$

ce qui implique que $w(0) = \lim_{n\to+\infty} w_n(0)$ et $w_n(0) = \xi_0$.

D'autre part

$$\| \int_0^1 (w_n(t) - w(t))dt\| \leq \int_0^1 \sup_{t\in[0,1]} \|w_n(t) - w(t)\|dt,$$

d'après la continuité on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 w_n(t)\, dt = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} w_n(t)\, dt = \int_0^1 w(t)\, dt = \xi_1,$$

d'où $w(t) \in C^k(\xi_0, \xi_1)$.

Finalement, il est clair que :

$\forall w_1 \in C^k(\xi_0; \xi_1), \forall w_2 \in C^k(\xi_0, \xi_1)$ *et* $\forall \lambda \in [0,1]$, on a

$$\lambda w_1 + (1-\lambda) w_2 \in C^k(\xi_0, \xi_1).$$

• Pour la suite, on définit la famille d'opérateurs suivante :

Définition 3.2.2 *Pour* $\xi_0, \ \xi_1 \in \mathcal{D}(A)$, *on définit la famille d'opérateurs* $\{\mathcal{T}_w; \ w \in C^0(\xi_0, \xi_1)\}$ *par*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_w : \mathcal{X} &\longrightarrow \mathcal{X} \\ z &\longrightarrow \mathcal{T}_w z = \left\{ \int_0^1 \varphi(w(s))\, [I - S(1-s)]\, ds \right\} z. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Pour cette famille d'opérateurs, on introduit la condition suivante :

Condition$(\mathscr{H})$

La famille d'opérateurs $\{\mathcal{T}_w;\ w \in C^0(\xi_0, \xi_1)\}$ est uniformément inversible i.e.

pour tout $w \in C^0(\xi_0, \xi_1)$, on a

$$\mathcal{T}_w(\mathcal{X}) = \mathcal{X}, \qquad (\mathscr{H}_1)$$

et il existe $\gamma > 0$ telle que

$$\gamma \left\| \left\{ \int_0^1 \varphi(w(s)) \left[I - S(1-s)\right] ds \right\} z \right\| \geq \|z\|, \ \forall w \in C^0(\xi_0, \xi_1), \ \forall z \in \mathcal{X}. \qquad (\mathscr{H}_2)$$

Théorème 3.2.1 *Soient $\xi_0, \xi_1 \in \mathcal{D}(A)$ et $\{\mathcal{T}_w;\ w \in C^0(\xi_0, \xi_1)\}$ la famille d'opérateurs définie par* (3.3) *et vérifiant la condition $(\mathscr{H})$. De plus, on suppose que*

$$\gamma L \left\| S(1)\xi_0 - \xi_0 - A\xi_1 - \int_0^1 [I - S(1-s)] f(s)\, ds \right\| < 1. \tag{3.4}$$

Alors il existe une solution stricte (u, z) du problème d'identification $(\mathscr{P}\mathscr{I}1)$ admettant la représentation suivante :

$$u(t) = S(t)\xi_0 + \int_0^t S(t-s) f(s)\, ds + \int_0^t S(t-s)\varphi(u(s)) z ds, \tag{3.5}$$

$$z = \mathcal{T}_u^{-1}\left[S(1)\xi_0 - \xi_0 - A\xi_1 - \int_0^1 [I - S(1-s)] f(s)\, ds\right]. \tag{3.6}$$

Preuve.

La preuve se décompose en trois étapes :

$\mathcal{E}$tape 1.

On fixe une fonction arbitraire $v \in C^1(\xi_0, \xi_1)$ et on considère le problème d'identification $(\mathscr{P}\mathscr{I}1_v)$ suivant : déterminer $z_v \in \mathcal{X}$ et $u_v : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$ vérifiant le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u_v'(t) = Au_v(t) + f(t) + \varphi(v(t)) z_v, & 0 < t < 1, \\ u_v(t) = \xi_0, \end{cases} \tag{3.7}$$

et la condition supplémentaire :

$$\int_0^1 u_v(t)\, dt = \xi_1. \tag{3.8}$$

On montre que pour tout $v \in C^1(\xi_0, \xi_1)$ le problème $(\mathscr{P}\mathscr{I}1_v)$ admet une solution unique (u_v, z_v).

$\mathcal{E}$tape 2.

On montre que l'opérateur $\mathcal{N} : v \longrightarrow u_v$ est prolongeable à $C^0(\xi_0, \xi_1)$, et cette extension admet au moins un point fixe $u \in C^0(\xi_0, \xi_1)$, ce point fixe définit une solution mild (u, z) du problème $(\mathscr{P}\mathscr{I}1)$.

$\mathcal{E}$tape 3.

On montre que la solution mild (u, z) dont l'existence a été établie dans l'étape 2, est une solution stricte.

Maintenant on donne les détails de ces trois étapes.

$\mathcal{E}$tape 1.

Pour une fonction arbitraire $v \in C^1(\xi_0, \xi_1)$, on définit l'opérateur borné $\mathcal{T}_v : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ par

$$\mathcal{T}_v z = \left\{ \int_0^1 \varphi(v(s)) [I - S(I - s)] \, ds \right\} z, \; \textit{pour tout } z \in \mathcal{X}. \tag{3.9}$$

D'après la condition $(\mathscr{H})$, on a $\{\mathcal{T}_v;\ v \in C^1(\xi_0, \xi_1)\}$ est uniformément inversible, de plus

$$\left\| \mathcal{T}_v^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq \gamma, \;\; \forall v \in C^1(\xi_0; \xi_1), \tag{3.10}$$

Montrons à présent que le problème $(\mathscr{P}\mathscr{I}1_v)$ admet une solution unique (u_v, z_v) donnée par

$$u_v(t) = S(t)\xi_0 + \int_0^t S(t-s) f(s) \, ds + \left(\int_0^t S(t-s) \varphi(v(s)) \, ds \right) z_v, \tag{3.11}$$

$$z_v = \left\{ \int_0^1 [I - S(1-s)] \varphi(v(s)) ds \right\}^{-1} \circ \left[S(1)\xi_0 - \xi_0 - A\xi_1 - \int_0^1 [I - S(1-s)] f(s) \, ds \right]. \tag{3.12}$$

En effet, comme $\xi_0 \in \mathcal{D}(A)$, $f \in C^1([0,1]; \mathcal{X})$ et $\varphi(v) \in C^1([0,1]; \mathbb{R}_+)$, alors d'après le théorème 2.1.2 le problème (3.7) admet une solution classique unique donnée par (3.11).

Déterminons z_v.

Intégrons la première équation dans (3.7) de 0 à 1, on a

$$\int_0^1 u_v'(t) \, dt = \int_0^1 A u_v(t) \, dt + \int_0^1 f(t) \, dt + \int_0^1 \varphi(v(t)) z_v dt,$$

d'où

$$u_v(1) - u_v(0) = A \int_0^1 u_v(t) \, dt + \int_0^1 f(t) dt + \left(\int_0^1 \varphi(v(t)) \, dt \right) z_v,$$

en utilisant (3.11), on obtient

$$u_v(1) = S(1)\xi_0 + \int_0^1 S(1-s) f(s) \, ds + \left(\int_0^1 S(1-s) \varphi(v(s)) \, ds \right) z_v,$$

$$u_v(0) = S(0)\xi_0 + \int_0^0 S(0-s) f(s) \, ds + \left(\int_0^0 S(0-s) \varphi(v(s)) \, ds \right) z_v = \xi_0,$$

il s'ensuit

$$S(1)\xi_0 - \xi_0 - A\xi_1 - \int_0^1 [I - S(1-s)] f(s) \, ds = \left\{ \int_0^1 [I - S(1-s)] \varphi(v(s)) ds \right\} z_v,$$

d'où, on a

$$S(1)\,\xi_0 - \xi_0 - A\xi_1 - \int_0^1 [I - S(1-s)]\, f(s)\, ds = \mathcal{T}_v\; z_v,$$

finalement, on obtient

$$\begin{aligned} z_v &= \mathcal{T}_v^{-1} \circ \left[S(1)\,\xi_0 - \xi_0 - A\xi_1 - \int_0^1 [I - S(1-s)]\, f(s)\, ds \right] \\ &= \left\{ \int_0^1 [I - S(1-s)]\, \varphi(v(s)) ds \right\}^{-1} \circ \left[S(1)\,\xi_0 - \xi_0 - A\xi_1 - \int_0^1 [I - S(1-s)]\, f(s)\, ds \right]. \end{aligned}$$

En substituant la valeur de z_v dans u_v, on obtient la solution du problème (3.7)-(3.8).

Remarque. On remarque que d'après la représentation de la solution (u_v, z_v), il n'est pas nécessaire que v et u_v soit de classe C^1. Ce qui nous ramène à introduire la définition suivante :

Définition 3.2.3 *Soit* $v \in C([0,1]\,; \mathcal{X})$ *vérifiant* $v(0) = \xi_0$ *et* $\int_0^1 v(t)\, dt = \xi_1$. *Le couple* (u_v, z_v) *donné par* (3.11) *et* (3.12) *définit une solution mild du problème* $(\mathscr{P}\mathscr{I}1_v)$.

$\mathcal{E}$tape 2. Dans cette étape, on considère seulement les solutions milds.

Soit u_v une solution mild du problème (3.7),

$$u_v(t) = S(t)\,\xi_0 + \int_0^t S(t-s)\, f(s)\, ds + \left(\int_0^t S(t-s)\, \varphi(v(s))\, ds \right) z_v,$$

Estimons la norme de u_v dans $\mathcal{X}$, on a

$$\begin{aligned} \|u_v(t)\| &\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \|\xi_0\| + \int_0^t \|S(t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \|f(s)\|\, ds \\ &\quad + \left(\int_0^t \|S(t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \|\varphi(v(s))\|\, ds \right) \|z_v\| \\ &\leq \|\xi_0\| + \int_0^t \|f(s)\|\, ds + \left(\int_0^t \|\varphi(v(s))\|\, ds \right) \|z_v\|. \end{aligned} \tag{3.13}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \|z_v\| &\leq \left\|T_v^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \cdot \left\| S(1)\,\xi_0 - \xi_0 - A\xi_1 - \int_0^1 [I - S(1-s)] f(s)\, ds \right\| \\ &\leq \gamma \left\| S(1)\,\xi_0 - \xi_0 - A\xi_1 - \int_0^1 [I - S(1-s)] f(s)\, ds \right\| := c_0(\xi_0, \xi_1, f) = c_0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

De (3.13) et (3.14) on a :

$$\|u_v(t)\| \leq \xi_0 + \int_0^t \|f(s)\|\, ds + \left(\int_0^t \varphi(v(s)) ds \right) c_0. \tag{3.15}$$

D'après la condition ($\mathscr{C}$), φ est une fonctionnelle continûment lipschitzienne dans $\mathcal{X}$, donc de (3.15) il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\|u_v(t)\| &\leq \|\xi_0\| + \int_0^t \|f(s)\|\, ds + \left[\int_0^t \varphi(v(s))ds - \int_0^t \varphi(v(0))ds + \int_0^t \varphi(v(0))ds\right] c_0 \\
&\leq \|\xi_0\| + \int_0^t \|f(s)\|\, ds + c_0 \left[\int_0^t |\varphi(v(s)) - \varphi(v(0))|\, ds + \int_0^t \varphi(v(0))ds\right] \\
&\leq \|\xi_0\| + \int_0^t \|f(s)\|\, ds + c_0 \left[\int_0^t L\,\|v(s) - v(0)\|_{C([0,1];\mathcal{X})}\, ds + \varphi(v(0))\right] \\
&\leq \|\xi_0\| + \int_0^t \|f(s)\|\, ds + c_0 \left[\int_0^t L\left(\|v(s)\|_{C([0,1];\mathcal{X})} + \|\xi_0\|\right) ds + \varphi(\xi_0)\right],
\end{aligned}$$

pour chaque $t \in [0,1]$.

Remarquons que d'après (3.4) et (3.14) on a :

$$c_0 L < 1, \tag{3.16}$$

cette dernière inégalité affirme qu'il existe $r_0 > 0$ telle que pour tout $r \geq r_0$, on a :

$$\|\xi_0\| + \int_0^1 \|f(s)\|\, ds + c_0\left[L\left(r + \|\xi_0\|\right) + \varphi(\xi_0)\right] \leq r. \tag{3.17}$$

En effet (3.17) est équivalente à

$$\|\xi_0\| + \int_0^1 \|f(s)\|\, ds + c_0\left[\|\xi_0\| + \varphi(\xi_0)\right] \leq (1 - c_0 L) r,$$

donc l'existence de r_0 est assuré puisque $1 - c_0 L > 0$.

$\diamond$ Fixons $r \geq r_0$ et définissons $\mathcal{K}$ par :

$$\mathcal{K} = \left\{ w \in C(\xi_0, \xi_1) : \|w\|_{C([0,1];\mathcal{X})} \leq r \right\},\ \textit{avec } r \in \mathbb{R}_+.$$

• $\mathcal{K}$ est un ensemble non vide, convexe et est fermé dans $C^0(\xi_0, \xi_1)$.

En effet, si (w_n) une suite d'éléments de $\mathcal{K}$ convergente vers w dans $C([0,T];\mathcal{X})$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \|w_n\|_{C([0,T],\mathcal{X})} \leq r,$$

par passage à la limite, on déduit que

$$\|w\|_{C([0,T];\mathcal{X})} \leq r.$$

$\diamond$ De plus on définit l'opérateur $\mathcal{N}$ par

$$\mathcal{N} : \mathcal{K} \longrightarrow C([0,1]\,;\mathcal{X})$$

$$v \longrightarrow \mathcal{N}(v) = u_v.$$

• D'après (3.17), on a $\mathcal{N}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$.

Lemme 3.2.1 *Pour l'opérateur $\mathcal{N}$, on a les propriétés suivantes :*

(i) *$\mathcal{N}$ est continue.*

(ii) *$\mathcal{N}(\mathcal{K})$ est relativement compacte dans $C([0,1]\,;\mathcal{X})$.*

Preuve.

(i) Pour montrer la continuité de $v \mapsto \mathcal{N}(v)$, il suffit de montrer la continuité de l'application $v \mapsto \mathcal{T}_v^{-1}$. En effet d'après l'inégalité

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{T}_v - \mathcal{T}_w)z\| &\leq \int_0^1 \|\varphi(v\,(s)) - \varphi(w\,(s))\|\, \|[I - S\,(1-s)]\|\, \|z\|\, ds \\ &\leq \int_0^1 2L\, \|\varphi(v\,(s)) - \varphi(w\,(s))\|\, \|z\|\, ds \\ &\leq 2L\, \|\, v - w\, \|_{C([0,1];\mathcal{X})}\, \|z\|\,,\end{aligned}$$

on deduit la continuité de l'opérateur $v \to \mathcal{T}_v$ de $C([0,1]\,;\mathcal{X})$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{X})$, ce qui entraine la continuité de l'application $v \to \mathcal{T}_v^{-1}$ (puisque $\mathcal{B} \to \mathcal{B}^{-1}$ est continue de Isom$(\mathcal{X})$ [1] dans lui même).

(ii) Tout d'abord montrons que $\{\varphi\,(v)\, z_v;\ v \in \mathcal{K}\}$ est uniformement intégrable dans $L^1(0,T;\mathcal{X})$. Pour ce but, il suffit de montrer qu'il est uniformément borné dans $C([0,1];\mathcal{X})$.

Comme φ est continûment lipschitzienne, alors l'image de tout ensemble borné de $\mathcal{X}$ par φ est borné dans $\mathbb{R}_+$, donc l'ensemble $\{\varphi\,(v(t))\,;\ v \in \mathcal{K}\}$ est borné dans $C\,([0,1]\,;\mathbb{R}_+)\,.$

D'autre part, d'après (3.14), $\{z_v;\ v \in \mathcal{K}\}$ est majoré dans $\mathcal{X}$ par c_0, d'où, on en déduit que $\{\varphi\,(v)\, z_v;\ v \in \mathcal{K}\}$ est uniformément borné dans $C([0,1]\,;\mathcal{X})$.

Alors, Pour $\varepsilon > 0$ on a :

$$\begin{aligned}\int_E \|\varphi\,(v(t))\, z_v\|\, dt &\leq \int_E \|\varphi\,(v(t))\|\, \|z_v\|\, dt \\ &\leq \mu(E) c c_0 \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

pour tout sous ensemble mesurable E de $[0,1]$ vérifiant $\mu(E) \leq \gamma(\varepsilon)$ (il suffit de prendre $\gamma(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{c c_0}$).

• D'après le théorème 2.1.4, pour montrer que $\mathcal{N}(\mathcal{K})$ est relativement compacte dans $C([0,1];\mathcal{X})$, il suffit de montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $\mathcal{N}(\mathcal{K})(t) = \{\mathcal{N}(v)(t),\ v \in \mathcal{K}\}$ est relativement compact dans $\mathcal{X}$.

En effet, on définit pour $0 < \lambda \leq 1$, l'opérateur $\mathcal{P}_\lambda : \mathcal{N}(\mathcal{K})(t) \to \mathcal{X}$ par

$$\mathcal{P}_\lambda \mathcal{N}(v)(t) = S(t)\xi_0 + S(\lambda)\left(\int_0^{t-\lambda} S(t-s-\lambda) f(s) ds + \int_0^{t-\lambda} S(t-s-\lambda)\varphi(v(s)) z_v ds\right).$$

1. Espace des isomorphismes définis de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$ muni de la topologie uniforme.

Comme le semigroupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est compact, alors l'image de $\mathcal{N}(\mathcal{K})(t)$ par $\mathcal{P}_\lambda$ est relativement compacte dans $\mathcal{X}$.

D'autre part, on a

$$\| \mathcal{P}_\lambda \mathcal{N}(v)(t) - \mathcal{N}(v)(t) \| \leq \left\| \int_t^{t-\lambda} S(t-s)f(s)ds \right\| + \left\| \int_t^{t-\lambda} S(t-s)\varphi(v(s))z_v ds \right\|$$

comme $f \in C^1([0,1];\mathcal{X})$ $\{\varphi(v)\, z_v;\ v \in \mathcal{K}\}$ est uniformement intégrable dans $L^1(0,T;\mathcal{X})$ on déduit que

$$\lim_{\lambda\to 0} \| \mathcal{P}_\lambda \mathcal{N}(v)(t) - \mathcal{N}(v)(t) \| = 0,$$

uniformément pour tout $v \in \mathcal{K}$.

Alors, d'après le lemme 1.2.1, on a $\mathcal{N}(\mathcal{K})(t)$ est relativement compacte dans $\mathcal{X}$. Une application du théorème 2.1.3 achève la preuve. □

Revenons à la démonstration de l'étape 2.

En veru du lemme 3.2.1 et du théorème 1.6.1 (théorème du point fixe de Schauder), on déduit que $\mathcal{N}$ admet au moins un point fixe $u \in C^0(\xi_0, \xi_1)$, de toute évidence le couple (u_v, z_v), avec $v = u$, est un solution mild de $(\mathscr{P}\mathscr{I}1)$.

$\mathcal{E}$tape 3.

Montrons que, pour chaque $z \in \mathcal{X}$ fixé, le problème de Cauchy (3.1) admet une unique solution mild qui est en fait une solution stricte.

► Comme φ est localement lipschitzienne sur $\mathcal{X}$, on a d'après le théorème 2.2.1, le problème (3.1) admet une solution mild locale, à partir du fait que $u \longrightarrow \varphi(u)\, z$ a une croissance linéaire, u peut être prolongée en une solution globale définie sur $[0,+\infty)$.

Soit $h \in (0,1)$ arbitraire, introduisons la fonctions $v_h : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$, définie par :

$$v_h(t) = \frac{1}{h}\left(u(t+h) - u(t)\right), \quad pour\ t \in [0,1].$$

Pour établir l'étape 3, il suffit de montrer l'existence de

$$\lim_{h\longrightarrow 0} v_h(t) = v(t) = u'(t),$$

uniformément pour $t \in [0,1]$, où v est l'unique solution mild du problème de Cauchy

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + f'(t) + \varphi'(u(t))v(t)\, z, \\ v(0) = A\xi_0 + f(0) + \varphi(\xi_0)\, z. \end{cases} \tag{3.18}$$

Par un calcul simple basé sur la formule de variation des constantes, on a

$$u(t) = S(t)\,\xi_0 + \int_0^t S(t-s)\, f(s)\, ds + \left(\int_0^t S(t-s)\,\varphi(u(s))ds\right) z,$$

d'où

$$v_h(t) = \frac{1}{h} S(t+h)\xi_0 + \frac{1}{h}\int_0^{t+h} S(t+h-s) f(s)\,ds + \frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h} S(t+h-s)\varphi(u(s))ds\right)z$$

$$-\frac{1}{h} S(t)\xi_0 - \frac{1}{h}\int_0^{t} S(t-s) f(s)\,ds - \frac{1}{h}\left(\int_0^{t} S(t-s)\varphi(u(s))ds\right)z$$

$$= \frac{1}{h}(S(t+h)-S(t))\xi_0 + \frac{1}{h}\int_0^{h} S(t+h-s) f(s)\,ds + \frac{1}{h}\int_h^{t+h} S(t+h-s) f(s)\,ds$$

$$+\frac{1}{h}\left(\int_0^{h} S(t+h-s)\varphi(u(s))ds\right)z + \frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} S(t+h-s)\varphi(u(s))ds\right)z$$

$$-\frac{1}{h}\int_0^{t} S(t-s) f(s)\,ds - \frac{1}{h}\left(\int_0^{t} S(t-s)\varphi(u(s))ds\right)z,$$

il vient que,

$$v_h(t) = \frac{1}{h}(S(t+h)-S(t))\xi_0 + \frac{1}{h}\int_0^{h} S(t+s) f(h-s)\,ds + \frac{1}{h}\int_0^{t} S(t-s) f(s+h)\,ds$$

$$+\frac{1}{h}\left(\int_0^{h} S(t+s)\varphi(u(h-s))ds\right)z + \frac{1}{h}\left(\int_0^{t} S(t-s)\varphi(u(s+h))ds\right)z$$

$$-\frac{1}{h}\int_0^{t} S(t-s) f(s)\,ds - \frac{1}{h}\left(\int_0^{t} S(t-s)\varphi(u(s))ds\right)z$$

$$= S(t)\frac{1}{h}\left[(S(h)\xi_0 - \xi_0) + \int_0^{h} S(s) f(h-s)\,ds + \int_0^{h} S(s)\varphi(u(h-s))z ds\right]$$

$$+\frac{1}{h}\int_0^{t} S(t-s)(f\ \ (s+h) - f(s))\,ds + \frac{1}{h}\int_0^{t} S(t-s)(\varphi(u(h+s)) - \varphi(u(s)))\,ds$$

$$= S(t)\frac{1}{h}\left[(S(h)\xi_0 - \xi_0) + \int_0^{h} S(s) f(h-s)\,ds + \int_0^{h} S(s)\varphi(u(h-s))z ds\right]$$

$$+\frac{1}{h}\int_0^{t} S(t-s)(f\ \ (s+h) - f(s))\,ds + \frac{1}{h}\int_0^{t} S(t-s)$$

$$\times\left(\int_0^{1} \varphi'(\sigma u(s+h) + (1-\sigma)u(s))(u(s+h)-u(s))z d\sigma\right)ds.$$

Donc, v_h est une solution mild du problème de Cauchy

$$\begin{cases} v_h'(t) = Av(t) + f_h(t) + g_h(t)[v_h(t)], \\ v(0) = v_{h_0}, \end{cases} \tag{$\mathscr{P}\mathscr{D}_h$}$$

où

$$\begin{cases} f_h(t) = \dfrac{1}{h}\left(f\ \ (t+h) - f(t)\right), \\ g_h(t)[.] = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^1 \varphi'\left(\sigma u(t+h) + (1-\sigma)u(t)\right)[.]\, z d\sigma, \\ v_{h_0} = \dfrac{1}{h}\left(S(h)\xi_0 - \xi_0\right) + \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h S(s) f(h-s)\, ds + \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h S(s)\varphi(u(h-s))\, z ds, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \lim\limits_{h\longrightarrow 0} f_h(t) = f'(t), \quad \text{ pour } \ t \in [0,1], \\ \lim\limits_{h\longrightarrow 0} g_h(t)[.] = \varphi'(u(t))[.]\, z, \quad \text{pour } \ t \in [0,1], \\ \lim\limits_{h\longrightarrow 0} v_{h_0} = A\xi_0 + f(0) + \varphi(\xi_0)\, z. \end{cases} \tag{3.19}$$

En utilisant la formule de variation des constantes, la solution du problème direct ($\mathscr{P}\mathscr{D}_h$) prend la forme :

$$v_h(t) = S(t)\, v_{h_0} + \int_0^t S(t-s)\left(f_{\ h}(s) + g_h(s)\left[v_h(s)\right]\right) ds. \tag{3.20}$$

Montrons que $\{v_h\}_{h\downarrow 0}$est une suite de Cauchy i.e

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall p, q > 0 \text{ tels que } \ p, q > \eta,\ on\ a\ \ \|v_p(t) - v_q(t)\| < \varepsilon.$$

De (3.20), nous obtenons

$$\|v_p(t) - v_q(t)\| \le \|v_{p_0} - v_{q_0}\| + \|f_p(s) - f_q(s)\|_{C([0,1];\mathcal{X})} + \int_0^t \|g_p[v_p(s)] - g_q[v_q(s)]\|\, ds.$$

d'où

$$\begin{aligned} \|v_p(t) - v_q(t)\| \le{}& \|v_{p_0} - v_{q_0}\| + \|f_p(s) - f_q(s)\|_{C([0,1];\mathcal{X})} \\ &+ \int_0^t \|g_p[v_p(s)] - g_q[v_q(s)] + g_p[v_q(s)] - g_p[v_q(s)]\|\, ds \\ \le{}& \|v_{p_0} - v_{q_0}\| + \|f_p(s) - f_q(s)\|_{C([0,1];\mathcal{X})} + \int_0^t \|g_p[v_q(s)] - g_q[v_q(s)]\|\, ds \\ &+ \int_0^t \|g_p(s)[v_p(s) - v_q(s)]\|\, ds \\ \le{}& \|v_{p_0} - v_{q_0}\| + \|f_p(s) - f_q(s)\|_{C([0,1];\mathcal{X})} + \int_0^t \|g_p[v_q(s)] - g_q[v_q(s)]\|\, ds \\ &+ \int_0^t Lc_0\, \|v_p(s) - v_q(s)\|\, ds. \end{aligned}$$

Remarquons que d'après (3.19), $\{v_{h0}\}_{h\downarrow 0}$, $\{f_h(t)\}_{h\downarrow 0}$ et $\{g_h(t)[.]\}_{h\downarrow 0}$ sont des suites de Cauchy, alors

$$\|v_p(t) - v_q(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + Lc_0 \int_0^t \|v_p(s) - v_q(s)\| \, ds,$$

en appliquant l'inégalité de Gronwall, on a

$$\|v_p(t) - v_q(t)\| \leq \varepsilon . e^{tLc_0},$$

d'où, il s'ensuit que $\{v_h\}_{h\downarrow 0}$ est une suite de Cauchy . Ainsi, $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} v_h\ (t) = v\ (t) = u'(t)$ existe. Donc v est une solution mild de (3.18) et $u \in C^1([0,1]; \mathcal{X}])$, d'où u est une solution stricte de $(\mathscr{P}\mathscr{I}1)$, ce qui achève la preuve de l'étape 3. □

► La proposition suivante joue un rôle important dans l'étude du problème inverse, elle introduit les conditions qui garantient l'inversibilité de l'opérateur $\mathcal{T}_u$, donc l'existence de la solution.

Proposition 3.2.1 *On suppose qu'il existe* $\alpha \in (0, 1)$, $0 < q < 1$ *et* $m > 0$ *tel que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq q, \qquad t \in [\alpha, 1], \tag{$\mathcal{E}_1$}$$

et

$$\int_0^{1-\alpha} \varphi(u(s))ds \geq m, \qquad u \in C^0(\xi_0, \xi_1). \tag{$\mathcal{E}_2$}$$

Alors, la famille d'opérateurs linéaires donnée par $(3, 3)$ *est uniformément inversible dans* $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ *avec*

$$\gamma = 1/(1 - q)m.$$

Preuve. Montrons que pour tout $w \in C^0(\xi_0, \xi_1)$, $\mathcal{T}_w(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$. Ceci revient à montrer que pour tout $w \in \mathcal{X}$, l'équation

$$\mathcal{T}_w z = y, \tag{$\mathscr{E}$}$$

admet au moins une solution. L'équation $(\mathscr{E})$ est équivalente à :

$$(I - L_w)z = \frac{1}{\displaystyle\int_0^1 \varphi(w(s))ds} y,$$

où L_w est l'opérateur linéaire défini de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$ par

$$L_w z = \frac{1}{\displaystyle\int_0^1 \varphi(w(s))ds} \int_0^1 \varphi(w(s))S(1-s)zds,$$

pour tout $w \in C^0(\xi_0, \xi_1)$.

Estimons la norme de L_w,

$$\| L_w z \| \leq \frac{1}{\displaystyle\int_0^1 \varphi(w(s))ds} \int_0^1 \varphi(w(s)) \|S(1-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \|z\| \, ds$$

$$= \frac{1}{\displaystyle\int_0^1 \varphi(w(s))ds} \int_0^1 \varphi(w(1-s)) \|S(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \|z\| \, ds,$$

d'après $(\mathcal{E}_1)$, on a :

$$\|L_w\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq \frac{\displaystyle\int_0^\alpha \varphi(w(1-s))ds + q\int_\alpha^1 \varphi(w(1-s))ds}{\displaystyle\int_0^{1-\alpha} \varphi(w(s))ds + \int_{1-\alpha}^1 \varphi(w(s))ds} < 1,$$

d'où, on déduit que $(I - L_w)$ est uniformément inversible, ce qui implique que $T_w(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$, pour tout $w \in C^0(\xi_0, \xi_1)$.

Montrons à présent que l'estimation $(\mathscr{H}_2)$ est satisfaite, avec $\gamma = \dfrac{1}{[(1-q)m]}$.

En effet, comme

$$\|S(1-s)z\| \leq \|z\|,$$

pour chaque $z \in \mathcal{X}$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^1 \varphi(w(s)) \left[z - S\left(1-s\right)z\right] ds \right\| &\geq \int_0^1 \varphi(w(s)) \left[\|z\| - \|S\left(1-s\right)z\|\right] ds \\
&\geq \int_0^{1-\alpha} \varphi(w(s)) \left[\|z\| - \|S(1-s)z\|\right] ds \\
&\geq \|z\| \int_0^{1-\alpha} \varphi(w(s)) \left[1 - \|S(1-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}\right] ds \\
&\geq (1-q) \left(\int_0^{1-\alpha} \varphi(w(s))ds \right) \|z\| \geq (1-q)\, m \, \|z\|,
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{(1-q)m} \left\| \int_0^1 \varphi(w(s)) \left[z - S\left(1-s\right)z\right] ds \right\| \geq \|z\|.$$

□

Remarque.

• Notons que la condition $(\mathcal{E}_1)$ est saisfaite pour tout semigroupe pour lequel il existe $M \geq 1$, $\rho > 0$ et $\alpha \in (0,1)$ tels que $q = Me^{-\alpha\rho} < 1$ et

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq Me^{-\rho t}, \quad t \in [0, +\infty).$$

• Pour que la condition $(\mathcal{E}_2,)$ soit satisfaite, il suffit qu'il existe $m_0 > 0$ telle que $\varphi(u) \geq m_0$ pour tout $u \in \mathcal{X}$. En effet, dans ce cas nous avons

$$\int_0^{1-\alpha} \varphi(u(s))ds \geq m_0\,(1-\alpha) = m.$$

Corollaire 3.2.1 *Soient les hypothèses de la proposition 3.2.1 vérifiées. Alors, pour chaque ξ_0 et ξ_1 dans $\mathcal{D}(A)$ vérifiant* (3.4), *il existe une solution stricte (u, z) du problème $(\mathscr{P}\mathscr{I}1)$ admettant la représentation* $(3.5) - (3.6)$.

3.3 Unicité de la solution

Dans cette section, on établit l'unicité de la solution. Pour ce but, on commence par établir certaines estimations nécessaires pour la suite.
Comme φ est lipschitzienne, on a

$$\varphi(u(t)) \leq \varphi(0) + L\,\|u(t)\|\,,\; t \in [0,1] \text{ et } u \in C^0\,(\xi_0, \xi_1)\,. \tag{3.21}$$

Soit u une solution du problème $(\mathscr{P}\mathscr{I}1)$, on a :

$$u(t) = S(t)\xi_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds + \int_0^t S(t-s)\varphi(u(s))zds.$$

On estime la norme de u dans $C([0,1];\mathcal{X})$,

$$\begin{aligned} \| \, u(t) \, \| \leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}\,\|\xi_0\| + \int_0^t \|S(t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}\,\|f(s)\|\,ds \\ +(\int_0^t \|S(t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}\,\|\varphi(u(s))\|\,ds)\,\|z\| \\ \leq \|\xi_0\| + \int_0^t \|f(s)\|\,ds + (\int_0^t \|\varphi(u(s))\|\,ds)\,\|z\|\,, \quad \text{pour tout } \; t \in [0,1]. \end{aligned}$$

De (3.21) et (3.14) on a :

$$\|u(t)\| \leq \|\xi_0\| + \|f\|_{L^1([0,1];\mathcal{X})} + \left(\varphi(0) \; + \int_0^t L\,\|u(s)\|\,ds\right)c_0,$$

en appliquant l'inégalité de Gronwall, on obtient :

$$\|u(t)\| \leq \left[\|\xi_0\| + \|f\|_{L^1([0,1];\mathcal{X})} + \varphi\,(0)\,c_0\right]e^{tLc_0}, \quad \forall t \in [0,1]\,,$$

finalement, on a :

$$\|u\|_{\mathcal{C}([0,1];\mathcal{X})} \leq \left[\|\xi_0\| + \|f\|_{L^1([0,1];\mathcal{X})} + \varphi(0)c_0\right]e^{Lc_0} = c_1\,(\xi_0, \xi_1, f) = c_1, \tag{3.22}$$

de (3.21) et (3.22), il resulte que :

$$\varphi(u(t)) \leq \varphi(0) + Lc_1 := c_2(\xi_0, \xi_1, f) = c_2, \quad \forall t \in [0,1]. \tag{3.23}$$

• Introduisons le théorème suivant qui établit l'unicité de la solution.

Théorème 3.3.1 *Soient les conditions du théorème* 3.2.1 *satisfaites. De plus on suppose qu'il existe* $\rho > 0$ *telle que*

$$\rho > Lc_0 \max\{1, 4\gamma c_2\}, \tag{$\mathscr{I}_1$}$$

et

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq e^{-t\rho}, \quad \textit{pour tout} \ \ t \geq 0, \tag{$\mathscr{I}_2$}$$

où c_2 *est la constante donnée dans* (3.23). *Alors la solution stricte du problème* $(\mathscr{P}\mathscr{I}1)$ *est unique.*

Preuve. Supposons que (u_j, z_j), $j = 1, 2$ sont deux solutions du problème $(\mathscr{P}\mathscr{I}1)$. Posons

$$\bar{u}(t) = u_2(t) - u_1(t) \quad \text{et} \quad \bar{z} = z_2 - z_1.$$

Donc, le couple $(\bar{u}, \bar{z})$ résoud le problème d'identification $(\mathscr{P}\mathscr{I}_2)$ suivant :
déterminer $\bar{u} : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$ et $\bar{z} \in \mathcal{X}$ vérifiant

$$\begin{cases} \bar{u}'(t) = A\bar{u}(t) + \varphi(u_2(t)) z_2 - \varphi(u_1(t)) z_1, & 0 < t < 1, \\ \bar{u}(0) = 0, \end{cases}$$

et la condition supplémentaire

$$\int_0^1 \bar{u}(t)\, dt = 0.$$

Remarquons que pour tous $u, v \in \mathcal{X}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(v) - \varphi(u) &= \int_0^1 D_\sigma [\varphi(\sigma v + (1-\sigma) u)]\, d\sigma \\ &= \left(\int_0^1 \varphi'(\sigma v + (1-\sigma) u)\, d\sigma \right)(v - u) = \phi(u,v)(v-u). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Alors, d'après la condition $(\mathscr{C})$, $\phi(u,v)$ ainsi définie est une fonctionnelle linéaire bornée i.e.

$$\phi(u,v) \in \mathcal{X}^*,$$

et on a :

$$\|\phi(u,v)\|_{\mathcal{X}^*} \leq L. \tag{3.25}$$

Posons $u = u_1$ et $v = u_2$ dans $(3,24)$, on obtient

$$\varphi(u_2) - \varphi(u_1) = \phi(u_1, u_2)\,\bar{u}. \tag{3.26}$$

$\diamond$ Définissons la fonction α par

$$\begin{aligned} \alpha : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = \phi(u_1(t), u_2(t))\,\bar{u}(t),\ \ t \in (0,1). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Alors, en tenant compte de (3.27), $(\mathscr{P}\mathscr{I}_2)$ devient le problème d'identification $(\mathscr{P}\mathscr{I}_3)$ suivant : déterminer $\bar{u} : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}$ et $\bar{z} \in \mathcal{X}$ vérifiant

$$\begin{cases} \bar{u}'(t) = A\bar{u}(t) + \alpha(t) z_2 - \varphi(u_1(t))\,\bar{z}, & 0 < t < 1, \\ \bar{u}(0) = 0, \end{cases} \tag{3.28}$$

et la condition supplémentaire

$$\int_0^1 \bar{u}(t)\,dt = 0. \tag{3.29}$$

De tout évidence, la solution du problème direct (3.28) est donnée par :

$$\bar{u}(t) = \int_0^t \varphi(u_1(s)) S(t-s)\,\bar{z} ds + \int_0^t \alpha(s) S(t-s)\,z_2 ds, \quad \forall t \in [0,1]. \tag{3.30}$$

Pour déterminer $\bar{z}$, on intégre les deux côtés de la permière équation dans (3.28) entre 0 et 1, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \bar{u}'(t)\,dt &= \int_0^1 A\bar{u}(t)\,dt + \int_0^1 \alpha(t)\,z_2 dt - \int_0^1 \varphi(u_1(t))\bar{z} dt, \\ &= A\int_0^1 \bar{u}(t)\,dt + \int_0^1 \alpha(t)\,z_2 dt - \int_0^1 \varphi(u_1(t))\bar{z} dt, \end{aligned}$$

posons $t = 1$ dans (3.30), on a :

$$\bar{u}(1) = \int_0^1 \alpha(t)\,z_2 dt + \int_0^1 \varphi(u_1(t))\bar{z} dt = \int_0^1 \varphi(u_1(s)) S(1-s)\,\bar{z} dt + \int_0^1 \alpha(s)\,S(1-s)\,z_2 dt,$$

il vient

$$-\left(\int_0^1 \varphi(u_1(s))\,[I - S(1-s)]\,ds\right)\bar{z} = \int_0^1 \alpha(s)\,[I - S(1-s)]\,z_2 ds, \tag{3.31}$$

d'où

$$\mathcal{T}_{u_1}\bar{z} = -\int_0^1 \alpha(s)\,[I - S(1-s)]\,z_2 ds.$$

D'après les hypothèses du théorème 3.2.1, $\left\{\mathcal{T}_w, w \in C^0(\xi_0;\xi_1)\right\}$ est inversible, donc on obtient

$$\bar{z} = -\mathcal{T}_{u_1}^{-1}\int_0^1 \alpha(s)\,[I - S(1-s)]\,z_2 ds. \tag{3.32}$$

• Notre but à présent est de montrer que $(\overline{u}, \overline{z}) = (0,0)$, pour cela, il suffit de montrer que $\alpha \equiv 0$.
On revient à l'équation (3.30).

Appliquons $\phi(u_1(t), u_2(t))$ aux deux membres de l'égalité (3.30), on obtient

$$\alpha(t) = \int_0^t \varphi(u_1(s))\,\phi(u_1(t), u_2(t))\,S(t-s)\,\bar{z}ds + \int_0^t \alpha(s)\,\phi(u_1(t), u_2(t))\,S(t-s)\,z_2 ds, \quad (3.33)$$

pour tout $t \in [0,1]$.

En substituant (3.32) dans (3.33), on a :

$$\alpha(t) = \int_0^t b(t)\,k(t-s)\,\alpha(s)\,ds - J(t)\int_0^1 \alpha(\sigma)\,[I - S(t-\sigma)]\,z_2 d\sigma, \quad (3.34)$$

où

$$\begin{cases} b(t) = \phi(u_1(t), u_2(t)), \\ k(t) = S(t)z_2, \\ J(t) = \displaystyle\int_0^t \varphi(u_1(s))\,b(t)S(t-s)\,\mathcal{T}_{u_1}^{-1} ds. \end{cases} \quad (3.35)$$

Soit $\omega = \left\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t \leq 1\right\}$.

L'équation intégrale (3.34) est équivalente au système suivant

$$\begin{cases} \alpha(t) = -J(t)\,\mathcal{W} + \displaystyle\int_0^t K(t-s)\alpha(s)\,ds, \\ \mathcal{W} = \displaystyle\int_0^1 \alpha(\sigma)\,[I - S(t-\sigma)]\,z_2 d\sigma, \end{cases} \quad (3.36)$$

où

$$\begin{cases} K : \omega \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \quad (t,s) \longmapsto K(t-s) = b(t)k(t-s), \quad \text{pour } (t,s) \in \omega. \end{cases} \quad (3.37)$$

• Comme $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe fortement continu et $b(t)$ est continue, on déduit la continuité de $J(t)\mathcal{W}$.

• Tout d'abord, on résoud l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce dans (3.36) dont l'inconnue est α en utilisant la méthode des approximations successives, puis on évalue la valeur de $\mathcal{W}$. Pour ce but on introduit les définitions et les lemmes suivants.

Définition 3.3.1 *On définit la suite suivante :*

$$\begin{cases} \|k(t)\|_1 = \|k(t)\|, \quad \textit{pour } t \in [0,1] \\ \|k(t)\|_n = \left[\|k(.)\|_{n-1} * \|k(.)\|\right](t), \quad \textit{pour } n = 2,3,\ldots.. \quad \textit{et} \quad t \in [0,1]. \end{cases}$$

où '$*$' est la convolution usuelle c'est à dire :

$$(g * h)(t) = \int_0^t g(t-s)\,h(s)\,ds, \quad \textit{pour } t \in [0,1].$$

Lemme 3.3.1 *Soient les conditions du théorème 3.3.1 satisfaites, alors on a l'estimation suivante :*

$$\|k(t)\|_n \leq \frac{c_0^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\rho t}, \tag{3.38}$$

pour tout $t \in [0,1]$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$.

Preuve. Pour établir l'estimation (3.38), on introduit la suite suivante :

$$\begin{cases} E_1(t) = e^{-\rho t}, \quad \textit{pour } t \in [0,1], \\ E_n(t) = (E_{n-1} * E_1)(t), \quad \textit{pour } n = 2,3,\ldots\ldots \text{ et } \ t \in [0,1], \end{cases}$$

et en utilisant un raisonnement par récurrence, on montre que

$$E_n(t) \leq \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t\rho}, \tag{3.39}$$

pour tout $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

En effet, pour $n = 2$ on a

$$\begin{aligned} E_2(t) &= (E_1 * E_1)(t) \\ &= \int_0^t E_1(t-s) E_1(s)\, ds \\ &= \int_0^t e^{-\rho(t-s)} e^{-\rho s} ds \\ &= t e^{-\rho t}. \end{aligned}$$

On suppose maintenant que l'inégalité (3.39) est vraie pour n, et on montre qu'elle est vraie pour $n+1$. On a

$$\begin{aligned} E_{n+1}(t) &= (E_n * E_1)(t) \\ &= \int_0^t E_n(t-s) E_1(s)\, ds \\ &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(t-s)\rho} e^{-\rho s} ds, \\ &\leq \frac{e^{-t\rho}}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} ds, \\ &\leq \frac{t^n e^{-t\rho}}{n!}, \end{aligned}$$

par conséquent, (3.39) est satisfaite.

• On établit à présent (3.38), en utilisant de même un raisonnement par récurrence.

D'après (3.35), $(\mathscr{I}_2)$ et (3.14), on a

$$\|k(t)\|_1 = \|k(t)\| = \|S(t) z_2\| \leq c_0 e^{-\rho t}, \text{ pour tout } \ t \in [0,1]. \tag{3.40}$$

Pour $n = 2$, on a

$$\begin{aligned}\|k(t)\|_2 &= [\|k(.)\|_1 * \|k(.)\|](t), \\ &= \int_0^t \|k(t-s)\|_1 \|k(s)\| \, ds,\end{aligned}$$

en utilisant (3.39) et (3.40), il vient que

$$\begin{aligned}\int_0^t [\|k(t-s)\|_1 \|k(s)\|] \, ds &\leq \int_0^t c_0 e^{-\rho(t-s)} c_0 e^{-\rho s} ds \\ &= c_0^2 \int_0^t E_1(t-s) E_1(s) ds \\ &= c_0^2 E_2(t) \leq c_0^2 t e^{-\rho t}.\end{aligned}$$

On suppose que l'inégalité est vraie pour n, on a

$$\begin{aligned}\|k(t)\|_{n+1} &= [\|k(.)\|_1 * \|k(.)\|](t), \\ &= \int_0^t \|k(t-s)\|_n \|k(s)\| \, ds,\end{aligned}$$

utilisant de nouveau (3.39) et (3.40), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^t \|k(t-s)\|_n \|k(s)\| \, ds &\leq \int_0^t \frac{c_0^n (t-s)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\rho(t-s)} c_0 e^{-\rho s} ds \\ &= c_0^{n+1} [E_n * E_1](t) \\ &= c_0^{n+1} E_{n+1}(t) \leq \frac{c_0^{n+1} t^n}{n!} e^{-t\rho},\end{aligned}$$

d'où le résultat est vrai pour $n + 1$, ce qui achève la démonstration du lemme 3.3.1.

Définition 3.3.2 *Pour tout couple de fonctions mesurables*

$$\mathcal{M}, \mathcal{N} : \omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

avec

$$\sigma \longrightarrow \mathcal{M}(t,\sigma) \mathcal{N}(\sigma, s) \in L^1(s, t, \mathbb{R}), \text{ pour } 0 < s < t < 1,$$

on définit la convolution généralisée '★' par

$$(\mathcal{M} \bigstar \mathcal{N})(t,s) = \int_s^t m(t,\sigma) \, n(\sigma, s) \, d\sigma.$$

• *On introduit*

◇ *la suite des noyaux itérés suivante :*

$$\begin{cases} K_1(t,s) = K(t,s), \\ K_n(t,s) = (K_{n-1} \bigstar K)(t,s), \quad \text{pour } n = 2, 3, ... \end{cases} \tag{3.41}$$

où K est le noyau défini par (3.37) *.*

$\diamond$ $\mathcal{H} : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$\mathcal{H}(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(t,s). \tag{3.42}$$

Lemme 3.3.2 *Soient les conditions du théorème 3.3.1 satisfaites. Alors, on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |K_n(t,s)| \leq \exp\left[-(t-s)(\rho - Lc_0)\right], \tag{3.43}$$

pour tout $(t,s) \in \omega$.

Preuve. Tout d'abord, on montre par récurrence que

$$\forall (t,s) \in \omega,\ |K_n(t,s)| \leq \frac{(c_0L)^n (t-s)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(t-s)\rho}. \tag{3.44}$$

En effet, pour $n = 2$ on a

$$\begin{aligned} |K_2(t,s)| &= |(K_1 \bigstar K)(t,s)| \\ &= \left| \int_s^t K(t,\sigma) K(\sigma,s)\, d\sigma \right| \leq \int_s^t |K(t,\sigma)|\ |K(\sigma,s)|\, d\sigma \\ &\leq \int_s^t \|b(t)\|_{\mathcal{X}^*} \|k(t-\sigma)\| \|b(\sigma)\|_{\mathcal{X}^*} \|k(\sigma - s)\|\, d\sigma, \end{aligned}$$

d'après (3.35) et (3.25), on a

$$\|b(t)\|_{\mathcal{X}^*} \leq L,\ \textit{pour tout}\ t \in [0,1], \tag{3.45}$$

en utilisant (3.45), on obtient

$$\int_s^t \|b(t)\|_{\mathcal{X}^*} \|k(t-\sigma)\| \|b(\sigma)\|_{\mathcal{X}^*} \|k(\sigma-s)\|\, d\sigma \leq L^2 \int_s^t \|k(t-\sigma)\| \|k(\sigma-s)\|\, d\sigma,$$

avec le changement de variable $\sigma - s = h$, on trouve

$$\begin{aligned} L^2 \int_s^t \|k(t-\sigma)\| \|k(\sigma-s)\|\, d\sigma &= L^2 \int_0^{t-s} \|k(t-s-h)\| \|k(h)\|\, dh \\ &= L^2 [\|k(.)\| * \|k(.)\|](t-s) = L^2 \|k(t-s)\|_2, \end{aligned}$$

utilisant (3.38), on a

$$L^2 \|k(t-s)\|_2 \leq c_0 t e^{-\rho t}.$$

Maintenant, on suppose que l'inégalité est vraie pour n et on montre qu'elle est vraie pour $n+1$. On a

$$|K_{n+1}(t,s)| = |(K_n \bigstar K)(t,s)|$$

$$= \left| \int_s^t K_n(t,\sigma) K(\sigma,s)\, d\sigma \right| \leq \int_s^t |K_n(t,\sigma)| \, |K(\sigma,s)| \, d\sigma$$

$$\leq \int_s^t L^n \, \|k(t-\sigma)\|_n \, \|b(\sigma)\|_{\mathcal{X}^*} \, \|k(\sigma-s)\| \, d\sigma,$$

de (3.45), il vient que

$$\int_s^t L^n \, \| \, k(t-\sigma)\|_n \, \|b(\sigma)\|_{\mathcal{X}^*} \, \|k(\sigma-s)\| \, d\sigma \leq L^{n+1} \int_s^t \|k(t-\sigma)\|_n \, \|k(\sigma-s)\| \, d\sigma,$$

avec le changement de variable $\sigma - s = h$, on obtient

$$L^{n+1} \int_s^t \|k(t-\sigma)\|_n \, \|k(\sigma-s)\| \, d\sigma = L^{n+1}[\|k(.)\|_n * \|k(.)\|](t-s)$$

$$= L^{n+1} \, \| \, k(t-s)\|_{n+1},$$

de (3.38), il s'ensuit :

$$L^{n+1} \|k(t-s)\|_{n+1} \leq L^{n+1} \frac{c_0^{n+1} t^n}{n!} e^{-t\rho}.$$

• On établit (3.43), de (3.44), on déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |K_n(t,s)| \leq e^{-\rho(t-s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} (Lc_0)^n (t-s)^{n-1},$$

$$\leq e^{-\rho(t-s)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (Lc_0)^n (t-s)^n = \exp\left[-(t-s)(\rho - Lc_0)\right],$$

pour $(t,s) \in \omega$. Ce qui achève la démonstration du lemme 3.3.2.

Proposition 3.3.1 *Soient les conditions du théorème 3.3.1 satisfaites. Alors le système* (3.36) *n'admet que la solution triviale* $\alpha \equiv 0$.

Preuve. Comme $K(t,s)$ et $J(t)\mathcal{W}$ sont continues, La solution de l'équation intégrale dans (3.36) est donnée par

$$\alpha(t) = -J(t)\mathcal{W} - \int_0^t \mathcal{H}(t,s) J(s) \mathcal{W} ds, \quad t \in [0,1], \tag{3.46}$$

où $\mathcal{H}(t,s)$ est le noyau résolvant de $K(t,s)$, vérifiant l'équation

$$\mathcal{H}(t,s) = K(t,s) + \int_s^t K(t,\sigma)\mathcal{H}(\sigma,s) d\sigma, \text{ pour } (t,s) \in \omega.$$

• En substituant (3.46) dans

$$\mathcal{W} = \int_0^1 \alpha(\sigma) \left[I - S(t-\sigma)\right] z_2 d\sigma,$$

on obtient

$$\mathcal{W} = -\left[(J\mathcal{W} + \mathcal{H} \bigstar J\mathcal{W}) * (I - S)\right](1)\, z_2.$$

Estimons la valeur de $\mathcal{W}$.

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{W}\| &= \|-[(J\mathcal{W}+\mathcal{H}\bigstar J\mathcal{W})*(I-S)](1)\,z_2\| \\
&= \left\|-\int_0^1 (J\mathcal{W}+\mathcal{H}\bigstar\ J\mathcal{W})(s)(I-S)(1-s)\,z_2 ds\right\| \\
&\le \int_0^1 \|J(s)\mathcal{W}+(\mathcal{H}\bigstar J\mathcal{W})(s)\|\,\|(I-S(1-s))\,z_2\|\,ds \\
&= \int_0^1 |J(s)\mathcal{W}+(\mathcal{H}\bigstar J\mathcal{W})(s)|\,\|I-S(1-s)\|\,\|z_2\|\,ds \\
&\le 2\|z_2\|\left[\int_0^1 |J(s)\mathcal{W}|\,ds+\int_0^1 |(\mathcal{H}\bigstar J\mathcal{W})(s)|\,ds\right] \\
&= 2\|z_2\|\left[\int_0^1 |J(s)\mathcal{W}|\,ds+\int_0^1 \left|\int_0^s \mathcal{H}(s,\sigma)\,J(\sigma)\,\mathcal{W}d\sigma\right| ds\right] \\
&\le 2c_0\left[\int_0^1 |J(s)\mathcal{W}|\,ds+\int_0^1 \left(\int_0^s |\mathcal{H}(s,\sigma)|\,|J(\sigma)\mathcal{W}|\,d\sigma\right) ds\right],
\end{aligned}
$$

utilisant l'inégalité (3.43)

$2c_0\left[\int_0^1 |J(s)\mathcal{W}|\,ds+\int_0^1 \left(\int_0^s |\mathcal{H}(s,\sigma)|\,|J(\sigma)\mathcal{W}|\,d\sigma\right) ds\right]$

$$
\begin{aligned}
&\le 2c_0\left[\int_0^1 |J(s)\mathcal{W}|\,ds+\int_0^1 \left(\int_0^s \exp[-(s-\sigma)(\rho-Lc_0)]\,|J(\sigma)\mathcal{W}|\,d\sigma\right) ds\right] \\
&= 2c_0\left[\int_0^1 |J(s)\mathcal{W}|\,ds+\int_0^1 (\exp[-s(\rho-Lc_0)]*J\mathcal{W})(\sigma)ds\right] \\
&= 2c_0\left[\int_0^1 |J\ \ (s)\mathcal{W}|\,ds+\|\exp[-s(\rho-Lc_0)]*J\mathcal{W}\|_{L^1([0,1],\mathbb{R})}\right],
\end{aligned}
$$

comme

$$
\|\exp[-s(\rho-Lc_0)]*J\mathcal{W}\|_{L^1([0,1],\mathbb{R})} \le \|\exp[-s(\rho-Lc_0)]\|_{L^1([0,1],\mathbb{R})}\,\|J\mathcal{W}\|_{L^1([0,1],\mathbb{R})},
$$

nous obtenons :

$2c_0\left[\int_0^1 |J(s)\mathcal{W}|\,ds+\|\exp[-s(\rho-Lc_0)]*J\mathcal{W}\|_{L^1([0,1],\mathbb{R})}\right]$

$$
\le 2c_0\int_0^1 |J(s)\mathcal{W}|\,ds\left[1+\int_0^1 \exp[-s(\rho-Lc_0)]\,ds\right].
$$

D'autre part, d'après $(\mathscr{I}_1)$ on a :

$$
\rho-Lc_0>0,
$$

ce qui donne

$$
\|\mathcal{W}\| \le 4c_0\int_0^1 |J(s)\mathcal{W}|\,ds. \tag{3.47}
$$

Estimons $J(t)\mathcal{W}$ dans $\mathbb{R}$. On a

$$J(t)\mathcal{W} = \left(\int_0^t \varphi(u_1(s))b(t)S(t-s)\mathcal{T}_{u_1}^{-1}ds\right)\mathcal{W},$$

alors

$$|J(t)\mathcal{W}| = \left|\left(\int_0^t \varphi(u_1(s))b(t)S(t-s)\mathcal{T}_{u_1}^{-1}ds\right)\mathcal{W}\right|$$

$$\leq \left(\int_0^t |\varphi(u_1(s))| \, \|b(t)\|_{\mathcal{X}^*} \|S(t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \left\|\mathcal{T}_u^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} ds\right) \|\mathcal{W}\|,$$

d'après (3.10), (3.23), (3.45) et la condition $(\mathscr{I}_2)$, on a :

$$\left(\int_0^t |\varphi(u_1(s))| \, \|b(t)\|_{\mathcal{X}^*} \|S(t-s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \left\|\mathcal{T}_u^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} ds\right) \|\mathcal{W}\|$$

$$\leq \gamma\rho^{-1}Lc_2 \|\mathcal{W}\|,$$

alors

$$|J(t)\mathcal{W}| \leq \gamma\rho^{-1}Lc_2 \|\mathcal{W}\|, \ \forall t \in [0,1]. \tag{3.48}$$

Revenons maintenant à (3.47), de (3.48) on déduit que

$$\|\mathcal{W}\| \leq 4c_0 \int_0^1 \gamma\rho^{-1}Lc_2 \|\mathcal{W}\| \, ds$$

$$= 4\gamma\rho^{-1}Lc_0c_2 \|\mathcal{W}\|. \tag{3.49}$$

D'après la condition $(\mathscr{I}_1)$, on a

$$4\gamma\rho^{-1}Lc_0c_2 < 1,$$

et donc de (3.49) on obtient

$$\|\mathcal{W}\| < \|\mathcal{W}\|,$$

d'où il s'ensuit que

$$\mathcal{W} = 0. \tag{3.50}$$

De (3.46) et (3.50), on obtient

$$\alpha(t) = 0, \ \textit{pout tout } t \in [0,1]. \tag{3.51}$$

Ce qui achève la preuve de la proposition 3.3.1.

Revenons maitenant à la démonstration du théorème 3.3.1, à partir de (3.32) et (3.51) on obtient

$$\bar{z} \equiv 0, \ \textit{donc } z_1 \equiv z_2,$$

enfin, d'après (3.30) on déduit que :

$$\bar{u}(t) = 0, \ \forall t \in [0,1],$$

d'où

$$u_1(t) = u_2(t), \ \forall t \in [0,1].$$

Ce qui achève la démonstration de l'unicité. □

3.4 Continuité de la solution par rapport aux données

Dans cette section on montre que la solution stricte unique du problème $(\mathscr{P}\mathscr{I}1)$ est continue par rapport aux données.

Proposition 3.4.1 *Supposons que toutes les hypothèses du théorème* 3.3.1 *sont satisfaites, soit* (u, z) *la solution stricte du problème* $(\mathscr{P}\mathscr{I}1)$*. Alors il existe un voisinage ouvert* $\mathcal{V}$ *de* (ξ_0, ξ_1, f) *dans l'espace* $\mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A) \times C^1([0,1];\mathcal{X})$ *avec* $\mathcal{D}(A)$ *muni de la norme graphe*[2]*, telle que pour tout* $(\eta_0, \eta_1, g) \in \mathcal{V}$:

(i) *il existe* $\theta > 0$ *vérifiant :*

$$\theta \left\| \left\{ \int_0^1 \varphi(v(s)) \left[I - S(1-s) \right] ds \right\} z \right\| \geq \|z\|, \ \forall v \in C^0(\eta_0, \eta_1), \ \forall z \in \mathcal{X}, \tag{3.52}$$

et

$$\theta L \left\| S(1)\eta_0 - \eta_0 - A\eta_1 - \int_0^1 [I - S(1-s)] g(s)\, ds \right\| < 1. \tag{3.53}$$

(ii) *De plus, la famille d'opérateur* $\{\mathcal{T}_v; \ v \in C^0(\eta_0, \eta_1)\}$ *vérifie*

$$\mathcal{T}_v(\mathcal{X}) = \mathcal{X}, \ \textit{pour tout } v \in C^0(\eta_0, \eta_1). \tag{3.54}$$

Preuve. Soit $\mathcal{V}(\varepsilon)$ un voisinage de (ξ_0, ξ_1, f) défini pour $\varepsilon \in (0, (2L\gamma)^{-1})$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\varepsilon) = \{(\eta_0, \eta_1, g) \ &\in \mathcal{D}(A) \times D(A) \times C([0,1];\mathcal{X}) : \\ &\|\eta_0 - \xi_0\|_{\mathcal{D}(A)} + \|\eta_1 - \xi_1\|_{\mathcal{D}(A)} + \|g - f\|_{C([0,1];\mathcal{X})} \leq \varepsilon\}, \end{aligned} \tag{3.55}$$

et soit $\{\mathcal{T}_u; \ u \in C^0(\xi_0, \xi_1)\}$ la famille d'opérateurs définie par (3.3).

2. La norme du graphe est défini par $\| u \|_{\mathcal{D}(A)} = \| u \| + \| Au \|$.

(i) Etablissons (3.52).

Pour ce but, nous estimons tout d'abord la différence entre les opérateurs $\|(\mathcal{T}_v - \mathcal{T}_u)\|$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{X})$, pour tout $u \in C^0(\xi_0, \xi_1)$ et $v \in C^0(\eta_0, \eta_1)$.

$\forall z \in \mathcal{X}$ on a

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{T}_v - \mathcal{T}_u) z\| &= \left\| \left\{ \int_0^1 [\varphi(v(s)) - \varphi(u(s))][I - S(1-s)]ds \right\} z \right\| \\
&\leq \int_0^1 \|\varphi(v(s)) - \varphi(u(s))\| \, \|I - S(1-s)\| \, \|z\| \, ds \\
&\leq L \|v - u\|_{C([0,1];X)} \|z\| \int_0^1 \|I - S(1-s)\| \, ds \leq 2L\varepsilon \|z\|,
\end{aligned}$$

on conclut que

$$\|(\mathcal{T}_v - \mathcal{T}_u)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq 2L\varepsilon. \tag{3.56}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\left\| \left\{ \int_0^1 \varphi(u(s))[I - S(1-s)]ds \right\} z \right\| &= \left\| \left\{ \int_0^1 \varphi(u(s))[I - S(1-s)]ds \right\} z \right. \\
&\quad \left. - \left\{ \int_0^1 \varphi(v(s))[I - S(1-s)]ds \right\} z + \left\{ \int_0^1 \varphi(v(s))[I - S(1-s)]ds \right\} z \right\| \\
&\leq \left\| \left\{ \int_0^1 \varphi(u(s))[I - S(1-s)]ds \right\} z - \left\{ \int_0^1 \varphi(v(s))[I - S(1-s)]ds \right\} z \right\| \\
&\quad + \left\| \left\{ \int_0^1 \varphi(v(s))[I - S(1-s)]ds \right\} z \right\|,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left\| \left\{ \int_0^1 \varphi(v(s))[I - S(1-s)]ds \right\} z \right\| &\geq \left\| \left\{ \int_0^1 \varphi(u(s))[I - S(1-s)]ds \right\} z \right\| \\
&\quad - \left\| \left\{ \int_0^1 [\varphi(v(s)) - \varphi(u(s))] [I - S(1-s)] \, ds \right\} z \right\|,
\end{aligned}$$

d'après (3.56) on a

$$\left\| \left\{ \int_0^1 \varphi(v(s)) [I - S(1-s)] \, ds \right\} z \right\| \geq \left\| \left\{ \int_0^1 \varphi(u(s)) [I - S(1-s)] \, ds \right\} z \right\| - 2L\varepsilon \|z\|,$$

utilisant la condition $(\mathscr{H}_2)$, on trouve

$$\left\| \left\{ \int_0^1 \varphi(v(s)) [I - S(1-s)] \, ds \right\} z \right\| \geq \left(\frac{1}{\gamma} - 2L\varepsilon \right) \|z\|,$$

par conséquent la condition $(\mathscr{H}_2)$ est satisfaite aussi pour tout $v \in C^0(\eta_0, \eta_1)$ et pour tout $z \in \mathcal{X}$ avec

$$\theta = \gamma (1 - 2L\varepsilon\gamma)^{-1}.$$

On établit (3.53). On a

$$\left\| S(1)\,\xi_0 - \xi_0 - A\xi_1 - \int_0^1 [I - S(1-s)] f(s)\, ds \right\|$$

$$\leq \left\| S(1)(\eta_0 - \xi_0) - (\eta_0 - \xi_0) - A(\eta_1 - \xi_1) - \int_0^1 [I - S(1-s)](g-f)(s)\, ds \right\|$$

$$+ \left\| S(1)\,\eta_0 - \eta_0 - A\eta_1 - \int_0^1 [I - S(1-s)] g(s)\, ds \right\|$$

$$\leq \|S(1)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \|\eta_0 - \xi_0\| + \|\eta_0 - \xi_0\| + \|A\eta_1 - \xi_1\| + \int_0^1 \|I - S(1-s)\| \, \|g - f\|_{C([0,1];\mathcal{X})}\, ds$$

$$+ \left\| S(1)\,\eta_0 - \eta_0 - A\eta_1 - \int_0^1 [I - S(1-s)] g(s)\, ds \right\|$$

$$\leq 2\|\eta_0 - \xi_0\| + \|A\eta_1 - \xi_1\| + \int_0^1 2\|g - f\|_{C([0,1];\mathcal{X})}\, ds$$

$$+ \left\| S(1)\,\eta_0 - \eta_0 - A\eta_1 - \int_0^1 [I - S(1-s)] g(s)\, ds \right\|$$

$$\leq 2\|\eta_0 - \xi_0\|_{\mathcal{D}(A)} + \|\eta_1 - \xi_1\|_{\mathcal{D}(A)} + 2\|g - f\|_{C([0,1];\mathcal{X})}\, ds$$

$$+ \left\| S(1)\,\eta_0 - \eta_0 - A\eta_1 - \int_0^1 [I - S(1-s)] g(s)\, ds \right\|$$

$$\leq 2\varepsilon + \left\| S(1)\,\eta_0 - \eta_0 - A\eta_1 - \int_0^1 [I - S(1-s)] g(s)\, ds \right\| \leq \frac{1}{\gamma L},$$

d'où

$$\left\| S(1)\,\eta_0 - \eta_0 - A\eta_1 - \int_0^1 [I - S(1-s)] g(s)\, ds \right\| \leq \frac{1}{\gamma L} - 2\varepsilon,$$

alors (3.53) est satisfaite pour $\theta = \gamma(1 - 2L\varepsilon\gamma)^{-1}$.

(**ii**) Soit $y \in \mathcal{X}$ et $v \in C^0(\eta_0, \eta_1)$ un élément arbitraire fixé. Considérons l'équation

$$y = \mathcal{T}_v w. \tag{$\mathscr{S}$}$$

Remarquons que pour tout $u \in C^0(\xi_0, \xi_1)$, les deux relations suivantes sont équivalentes :

$$\diamond\ y = \mathcal{T}_v z = \mathcal{T}_u z + (\mathcal{T}_v - \mathcal{T}_u)\, z,$$

$$\diamond\ z + \mathcal{T}_u^{-1}(\mathcal{T}_v - \mathcal{T}_u)\, z = \mathcal{T}_u^{-1} y,$$

d'où

$$y = \mathcal{T}_v w \Longleftrightarrow w + \mathcal{T}_u^{-1}(\mathcal{T}_v - \mathcal{T}_u)\, w = \mathcal{T}_u^{-1} y.$$

Utilisons (3.10) et (3.56), nous trouvons

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{T}_u^{-1}(\mathcal{T}_v - \mathcal{T}_u)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} &\leq \gamma \left\|(\mathcal{T}_v - \mathcal{T}_u)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \\ &\leq 2L\varepsilon\gamma < 1.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $y \in \mathcal{X}$ l'équation $(\mathscr{S})$ admet une solution, ce qui montre que

$$\mathcal{T}_v(\mathcal{X}) = \mathcal{X},\ \forall v \in C^0(\eta_0, \eta_1).$$

□

Théorème 3.4.1 *Supposons que les hypothèses du théorème* 3.3.1 *sont satisfaites. Soit* (v, w) *la solution stricte du problème* $(\mathscr{P}\mathscr{I}1)$ *correspondante à la donnée* (η_0, η_1, g).
Alors l'application définie par :

$$\mathcal{Q} : \mathcal{V}(\varepsilon) \longrightarrow C([0,1]\,; \mathcal{X}) \times \mathcal{X}$$

$$(\eta_0, \eta_1, g) \longmapsto (v, w)\,,$$

où $\mathcal{V}(\varepsilon)$ *définie dans* (3.55), *est bien définie et est continue de* $\mathcal{V}(\varepsilon)$ *dans* $C([0,1]; \mathcal{X}) \times \mathcal{X}$.

Preuve. Pour montrer que l'application $\mathcal{Q}$ est bien définie, il suffit de montrer que pour chaque $(\eta_0, \eta_1, g) \in \mathcal{V}(\varepsilon)$, le problème

$$\begin{cases} v(t) = S(t)\eta_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-s)\, g(s)\, ds + \left(\int_0^t S(t-s)\, \varphi(v(s))\, ds\right) w, & (3.57) \\ w(t) = \left\{\displaystyle\int_0^1 \varphi(v(s))\,[I - S(1-s)]\, ds\right\}^{-1} & \\ \qquad\qquad \circ \left[S(1)\eta_0 - \eta_0 - A\eta_1 - \displaystyle\int_0^1 [I - S(1-s)] g(s)\, ds\right], & (3.58) \end{cases}$$

admet une solution $(v, w) \in C([0,1]; \mathcal{X}) \times \mathcal{X}$.
En effet, de la proposition 3.4.1, on déduit que la famille d'opérateurs $\{\mathcal{T}_v;\ v \in C^0(\eta_0, \eta_1)\}$ est uniformément inversible et que toutes les conditions du théorème 3.2.1 sont satisfaites, alors pour tout $(\eta_0, \eta_1, g) \in \mathcal{V}(\varepsilon)$, il existe une solution $(v, w) \in C([0,T]; \mathcal{X}) \times \mathcal{X}$ du problème (3.57) – (3.58), d'où l'application $\mathcal{Q}$ est bien définie.

• Enfin, établissons la continuité de l'application $\mathcal{Q}$.

Soit $(\eta_{0,n}, \eta_{1,n}, g_n)_n$ une suite de $\mathcal{V}(\varepsilon)$ qui converge vers (η_0, η_1, g) et soit $(v_n, w_n)_n$ la suite des solutions strictes du problème d'identification

$$\begin{cases} v_n'(t) = Av_n(t) + g_n(t) + \varphi(v_n(t))w_n, \quad 0 < t < 1, \\ v_n(0) = \eta_{0,n}, \end{cases} \tag{3.59}$$

avec la condition supplémentaire

$$\int_0^1 \upsilon_n(t)dt = \eta_{1,n}. \tag{3.60}$$

La solution du problème (3.59) − (3.60) est donnée par

$$\upsilon_n(t) = S(t)\eta_{0,n} + \int_0^t S(t-s)\, g_n(s)\, ds + \left(\int_0^t S(t-s)\, \varphi(\upsilon_n(s))\, ds\right) w_n, \tag{3.61}$$

et

$$w_n = \mathcal{T}_{\upsilon_n}^{-1} \circ \left[S(1)\,\eta_{0,n} - \eta_{0,n} - A\eta_{1,n} - \int_0^1 [I - S(1-s)] g_n(s)\, ds\right]. \tag{3.62}$$

Montrons que $(\upsilon_n, w_n)_n$ converge vers la solution stricte du problème (3.57) − (3.58).

En effet, de (3.14) on a $(w_n)_n$ est bornée dans $\mathcal{X}$, et de (3.23), $(\varphi(\upsilon_n))_n$ est uniformément bornée. Comme le semi groupe engendré par A est compact, en utilisant un argument analogue à celle utilisé pour montrer **(ii)** du lemme 3.2.1 on peut montrer qu'il existe au moins une sous-suite $(\upsilon_n)_n$ qui converge fortement vers une certaine fonction $\nu \in C([0,1]; X)$.

De (3.3) et de la continuité de φ on a

$$\lim_n \mathcal{T}_{\upsilon_n} = \mathcal{T}_\nu, \tag{3.63}$$

pour la topologie de la norme d'opérateurs. En outre, d'après la continuité de $\mathcal{T}_v \to \mathcal{T}_v^{-1}$ de $Isom(\mathcal{X})$ dans lui même, on obtient

$$\lim_n \mathcal{T}_{\upsilon_n}^{-1} = T_\nu^{-1}. \tag{3.64}$$

D'où, de (3.61) et (3.64) il s'ensuit qu'il existe une fonction ζ telle que

$$\lim_n w_n = \zeta. \tag{3.65}$$

De ce qui précède et par passage à la limite quand $n \to \infty$ dans (3.61), on conclut que ν vérifie le problème de Cauchy (3.1) avec la donnée (η_0, η_1, g).

Ainsi, par passage à la limite quand $n \to \infty$ dans (3.60), on conclut que, ν vérifie (3.2) avec ξ_1 remplacée par η_1.

D'autre part, par passage à la limite quand $n \to \infty$ dans

$$\left\|\varphi'(\upsilon_n)\right\|_{X^*} \leq L;$$

et

$$\mathcal{T}_{\upsilon_n} w_n = \left\{\int_0^1 \varphi(\upsilon_n(s))\, [I - S(1-s)]\, ds\right\} w_n,$$

on obtient,

$$\left\|\varphi'\left(\nu\right)\right\|_{\mathcal{X}^*} \leq L; \tag{3.66}$$

$$\mathcal{T}_\nu \zeta = \left\{ \int_0^1 \varphi(\nu\left(s\right))\left[I - S\left(1-s\right)\right] ds \right\} \zeta. \tag{3.67}$$

De (3.66) et (3.67), et par passage à la limite dans (3.4), on conclut que (ν, ζ) est une solution stricte du problème $(\mathscr{P}\mathscr{I}1)$ correspondante à la donnée (η_0, η_1, g). De l'unicité de la solution, (ν, ζ) coinside avec (v, w).

Alors $(\eta_0, \eta_1, g) \longmapsto (v, w)$ est continue de $\mathcal{V}\left(\varepsilon\right)$ dans $C([0,1]\,; \mathcal{X}) \times \mathcal{X}$, ce qui achève la preuve du théorème. $\square$

Application

Comme application on se propose un problème parabolique semi-linéaire.

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné dont la frontière $\partial\Omega$ est de classe $C^{1,1}$, $\mathcal{X} = L^2(\Omega)$ et $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ un opérateur différentielle linéaire défini par :

$$\mathcal{A}u = \sum_{i,j}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - a_0(x)\, u,$$

où $a_{i,j} \in C^{0,1}\left(\bar{\Omega}\right)$, $a_{i,j} = a_{j,i}$, $i, j = 1, \ldots.., n$, et $a_0 \in C\left(\bar{\Omega}\right)$ vérifiant

$$\sum_{i,j}^{n} a_{i,j}(x)\, \xi_i\, \xi_j \geq \upsilon\, |\xi|^2, \qquad a_0 \geq \rho > 0,$$

pour tout $(x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n$ et pour certaines constantes $\upsilon > 0$ et $\rho > 0$, et

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}_0^1(\Omega). \tag{4.1}$$

Proposition 1. *$\mathcal{A}$ est un générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe compact $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ dans $\mathcal{X}$ vérifiant :*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq e^{-\rho t}, \qquad t \geq 0. \tag{4.2}$$

Preuve. Rappelons qu'il existe deux suites $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ et $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ telles que

$$\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset (0, +\infty) \text{ est une suite croissante qui tend vers } (+\infty),$$

et

$$\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}_0^1(\Omega),$$

constituant les valeurs et les vecteurs propres de $-\mathcal{A}$ respectivement. Cette dernière suite forme une base orthonormée de $L^2(\Omega)$. Alors tout élément $u \in L^2(\Omega)$ admet la représentation :

$$u = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

où

$$\langle u, \varphi_k \rangle = \int_\Omega u(x) \varphi_k(x)\, dx.$$

De plus, u vérifie l'égalité de Parseval

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle u, \varphi_k \rangle|^2 .$$

• On sait que l'opérateur $\mathcal{A}$ engendre un C_0-semigroupe analytique de contractions $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ dans $\mathcal{X}$ vérifiant l'estimation (4.2).

• Pour tout $v \in L^2(\Omega)$ et $t \geq 0$ on a

$$[S(t)v](x) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\alpha_k t} \langle v, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

• Le semigroupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est compact.

En effet, on définit l'opérateur continu de projection $\mathcal{P}_N$ par

$$\mathcal{P}_N u = \sum_{k=1}^{N} \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k, \ \ u \in \mathcal{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}^1_0(\Omega),$$

d'où

$$\|S(t)u - \mathcal{P}_N S(t) u\|^2 = \sum_{k=N+1}^{+\infty} e^{-2\alpha_k t} |\langle u, \varphi_k \rangle|^2 \leq e^{-2\alpha_{N+1} t} \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle u, \varphi_k \rangle|^2 = e^{-2\alpha_{N+1} t} \|u\|^2,$$

ce qui donne

$$\|S(t) - \mathcal{P}_N S(t)\|^2_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq e^{-2\alpha_{N+1} t},$$

alors, on déduit que l'opérateur $S(t)$ est une limite uniforme d'une suite d'opérateurs de rangs finis, d'où $S(t)$ est un opérateur compact pour tout $t \geq 0$, donc $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semigroupe compact. □

⋄ Considérons le problème d'identification $(\mathscr{P}\mathscr{I})$ suivant :

Pour $\xi_0, \xi_1 \in L^2(\Omega)$, $f \in C^1([0,1];\mathbb{R})$ et $\varphi \in C^1(L^2(\Omega);\mathbb{R}_+)$, déterminer $z \in L^2(\Omega)$ et la fonction $u \in C^1([0,1]; L^2(\Omega)) \cap C([0,1]; \mathcal{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}^1_0(\Omega))$ vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum\limits_{i,j}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - a_0(x) u + f(t) + \varphi(u) z, & t \in [0,1] \ \ et \ x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, & (t,x) \in [0,1] \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = \xi_0(x), & x \in \Omega, \\ \int_0^1 u(t,x)\, dt = \xi_1(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Condition $(\mathscr{B})$.

$(\mathscr{B}_1)$ $\exists L > 0$ telle que la dérivée de Fréchet de φ en $u \in L^2(\Omega)$ i.e $\varphi'(u)$, satisfait :

$$\left\|\varphi'(u)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq L;$$

uniformément pour tout $u \in L^2(\Omega)$.

$(\mathscr{B}_2)$ $\exists m_0 > 0$ tels que

$$\varphi(u) \geq m_0, \quad \text{pour tout } u \in L^2(\Omega).$$

Théorème 1. *Soient* $f \in C^1([0,1];\mathbb{R})$ *et* $\varphi \in C^1\left(L^2(\Omega);\mathbb{R}_+\right)$ *vérifiant la condition* $(\mathscr{B})$. *Alors pour tout* $\xi_0, \xi_1 \in \mathcal{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ *et pour certaine* $\alpha \in (0,1)$ *satisfaisant*

$$\left[\left(1-e^{-\alpha\rho}\right)(1-\alpha)\, m_0\right]^{-1} L \left\| S(1)\,\xi_0 - \xi_0 - \mathcal{A}\xi_1 - \int_0^1 [I - S(1-s)] f(s)\, ds \right\| < 1, \tag{4.3}$$

le problème d'identification $(\mathscr{P}\mathscr{I})$ admet une solution stricte unique (u,z) admettant la représentation suivante :

$$u(t) = S(t)\,\xi_0 + \int_0^t S(t-s)\, f(s)\, ds + \int_0^t S(t-s)\,\varphi(u(s))\, z ds, \tag{4.4}$$

où z *est donné par*

$$z = \mathcal{T}_u^{-1}\left[S(1)\,\xi_0 - \xi_0 - \mathcal{A}\xi_1 - \int_0^1 [I - S(1-s)] f(s)\, ds\right], \tag{4.5}$$

avec $\mathcal{T}_u : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ *défini par*

$$\mathcal{T}_u z = \left\{\int_0^1 \varphi(u(s))\,[I - S(1-s)]\, ds\right\} z, \tag{4.6}$$

pour $z \in L^2(\Omega)$.

Preuve.

Comme $(\mathscr{B}_2)$ et (4.2) sont satisfaites pour $m = m_0$ et $q = e^{-\alpha\rho}$, alors d'après la proposition 3.2.1 la famille d'opérateurs linéaires $\{\mathcal{T}_u;\ u \in L^2(\Omega)\}$ est uniformément inversible dans $\mathcal{L}\left(L^2(\Omega)\right)$ avec

$$\gamma = \left[\left(1-e^{-\alpha\rho}\right)(1-\alpha)\, m_0\right]^{-1}.$$

En vertu du corollaire 3.2.1, pour chaque $\xi_0,\ \xi_1 \in \mathcal{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ pour lesquels (4.3) est satisfaite, il existe une solution stricte (u,z) du problème $(\mathscr{P}\mathscr{I})$ admettant la représentation $(4.4) - (4.5)$.

Conclusion et perspectives

• Dans le présent travail, on a traité une classe de problèmes inverses semi-linéaires. Dans cette étude on a montré que sous l'hypothèse que le semi-groupe engendré par la partie linéaire de l'équation décroit exponentiellement, le problème d'identification admet une solution stricte (u, z) unique, et que cette solution dépend continûment des données.

Comme perspectives on se propose d'étudier le problème inverse (d'identification) parabolique dans un cadre hilbertien en utilisant certaines méthodes de régularisation, ainsi que d'essayer d'étendre les résultats obtenus dans ce travail pour le cas elliptique.

Bibliographie

[1] Anikonov Yu and Alfredo Lorenzi, *Explicit representation for the solution to a parabolic differential identification problem in a Banach space*. Inverse ill-posed probl(2007), 15 709-34.

[2] Anikonov Yu, *Multidimensional Inverse and Ill-Posed Problems for Differential Equations*.VSP :Utrecht (1995).

[3] Alexander A Samarskii and Peter N.Vabishchevich, *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*.Walter de Gruyter GmbH and Co.KG,D-10785 Berlin,Germany (2007).

[4] Herbert Amann, Wolfgang Arendt, Matthias Hieber, Frank Neubrander, Serge Nicaise and Joachim von Below, *Functional Analysis and Evolution Equations*. Birkh user Verlag AG, Berlin (2008).

[5] Ahmed N U, *Semigroupe theory with applications to systems and control*. Longman group uk limited (1991).

[6] A Ames Karen and Straughan Brian, *Non-Standard and Improperly Posed Problems*. ACADEMIC PRESS (1997).

[7] A Ames K and R J Hughes, *Structural stability for ill-posed problems in Banach space*, semigroup 70 (2005), 127-145.

[8] Adams R, *Sobolev spaces*. Acad, Press (1975).

[9] Fred B Weissler, *Semilinear evolution equations in a Banach space*. Journal ef functional analysis 32, 277-296 (1979).

[10] Johansson B T and Lesnic D, *A variational method for identifying a spacewise-dependent heat source*. IMA. J.Appl Math, 7274860 (2007).

[11] Brezis H, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications.Masson*. Paris, (1983).

[12] Haim Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer, New York Dordreche Heidelberg London (2010).

[13] N.Boccara, *Analyse fonctionnelle.* Ellipses, (1984).

[14] Marc Bonnet, *problèmes inverses.* Laboratoire de Mècanique des Solides, UMRCNRS 7649 Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau cedex (2008).

[15] Cannon J R and DuChateau P, *Structural identifcation of an unknown source term in a heat equation.* Inverse Problems, 1453551 (1998).

[16] Cannon J and Hornung U, *Inverse Problems.* Birkhguser :Basel, Boston(1986).

[17] Mourad Choulli, *Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg(2009).

[18] Mourad Choulli, *An inverse problem for a semilinear parabolic equation.* Inverse Problems,v.10, p.1123-1132 (1994).

[19] Charles W Groetsch, *Stable Approximate Evaluation of Unbounded Operators.* Springer-Verlag, Berlin (2007).

[20] Thierry Cazenave and Alain Haraux, *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires.* ellipses, (1990).

[21] Corduneanu C, *Integral Equations and Applications.* Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York (1991).

[22] Dunford N and J Schwartz, *Linear operators, part II.* John Wiley and sons Inc, New York (1967).

[23] Damien Lamberton, *Equations d'évolution linéaires associées à des semigroupes de contractions dans les espaces L^p.* Journal of functional analysis 72, 252-262 (1987).

[24] B Dellattre, D Ivaldi et C Stolz, *Application du contrôle optimal à l'identification d'un chargement thermique.* Pages 393, 404 of REEF, Gien's 01 (2001).

[25] Eidelman Yu, *On the uniqueness of a solution of an inverse problem for a differential equation in a Banach space.* DifferEquations, Russian, v.23, N9, p.1647-1649(1987).

[26] Engel Klaus-Jochen and Nagel Rainer, *A short course on operator semigroups.* Springer, (2006).

[27] H W Engl, M Hanke and A Neubauer, *Regularization of Inverse Problems.* Kluwer, Dordrecht (1996).

[28] Angelo Favini, Alfredo Lorenzi, Hiroki Tanabe and Atsushi Yagi, *An L^p-aprroach to singular linear parabolic equations in bounded domains*. Osaka J math, 385-406, 42(2005).

[29] C W Groetsch, *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*. Vieweg, Wiesbaden, (1993).

[30] Goldstein J A, *Semigroups of linear operators and applications*. Oxford University press, New York, (1985).

[31] Graciel M Cerezo, *solution representation and identification for singular neutral functional differential equations*.Blacksburg, Virginia (1996).

[32] Guidetti D, *Partial reconstruction of the source term in a linear parabolic initial value problem*. J. Math Anal Appl, 355796810(2009).

[33] J Hadamard, *Le problème de Cauchy et les equation aux derivées partielles linéaires hyperboliques*. Hermann, (1932).

[34] Victor Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Springer Science and Business Media,Inc (2006).

[35] Victor Isakov, *Inverse parabolic problems with the final overdetermination*. CommPure and Appl Mathem, v.44, p.185-209 (1991).

[36] Victor Isakov, *On the uniqueness in inverse problems for semilinear parabolic equations*. Archive for Rat Mech and Anal,v.124, p.1-13 (1993).

[37] Irina V Melnikova and Alexei Filinkov, *Abstrect Cauchy problems : Three Approaches*. Chapmanand Hall/CRC (2001).

[38] Abdul J Jerri, *Introduction to integral equations with applications*. Willy, Cannada (1999).

[39] J. B. Keller, *Inverse problems*. Amer Math Monthly, 83 :107-118(1976).

[40] Michel KERN, *problèmes inverses*. Léonard De Vinci,(2002).

[41] Kato T, *On linear differential equations in Banach spaces*. Comm Pure and Appl Mathem, v.9, p.479-486 (1956).

[42] Kato T, *Abstract evolution equations of parabolic type in Banach and Hilbert spaces*. Nagoya Mathem 3, v.19, p.93-125 (1961).

[43] Kantorovitz Shmuel, *Topics in Operator Semigroups*. Birkhuser Boston, a part of Springer Science and Business Media, LLC (2010).

[44] Rainer Kress, *Integral equations and inverse boundry value problems*. Journal of integral equations and applications. Volume 19, nember 3, Fall (2007).

[45] Kabanikhin S I and Lorenzi A, *Identification problems of wave phenomena theory and numerics*. Tokyo, Japan (1999).

[46] Alfredo Lorenzi, *Recovering two constants in a linear parabolic equation*. Journal of Physics : Conference Series 73 (2007) 012014.

[47] Lorenzi A and Paparoni E, *An identification problem for a semilinear parabolic equation*. Annali di Matem. Pure e Applicata(IV), v.CLI, p.263-287 (1988).

[48] Lorenzi A and Vrabie I I, *An identifcation problem for a linear evolution equation in a Banach space*. Discrete contin. Dynamic syst to appear (2008).

[49] Lorenzi Alfredo and Vrabie Ioan I, *Identification for a semilinear evolution equation in a Banach space*. Inverse problems 26 085009 (2010).

[50] Lorenzi A and Paparoni E, *A continuous dependence result for parabolic free boundary problem*. Bullettino UMI(6) , N4-B, p. 191-210 (1985).

[51] Lavrentiev M M, *Some improperly posed problems of mathematical physics*. Springer Verlag, (1967).

[52] Peter Linz, *Analytical and numerical methds for Volterra equations*. Industrial and applied mathematics, Philadelphia (1985).

[53] Orlovsky D, *An inverse problem of determining a parameter of evolution equation*. Differ Equations,v.26, N9, p.1614-1621, Russian (1990).

[54] Prilepko A I, Piskarev S and Shaw S Y, *On approximation of inverse problem for abstract parabolic differential equation in Banach spaces*. J. Inverse Ill-Posed Probl, 1583151 (2007).

[55] Prilepko A I and Tikhonov I V, *Reconstruction of the inhomogeneous term in an abstract evolution equation*, Izv Ross Akad NaukSer Mat, 5816788, Russian (1994).

[56] Prilepko A I and Kostin A B, *An estimate for the spectral radius of an operator and the solvability of inverse problems for evolution equations*. Mat Zametki 538994, Russian (1993).

[57] Prilepko A I, Orlovesky D J and Vasin A I, *Methods of solving inverse problems in mathematical physics*. Dekker, New York (2000).

[58] Pilant M and Rundell W, *Fixed point methods for a nonlinear parabolic inverse coefficient problem*. Commun in PDE, v.13, N4, p.469-493 (1987).

[59] Pazy A, *Semigroups of linear operators and applications to differential equations*. Springer-varlag, New York (1983).

[60] Romanov V, *Inverse Problems in Mathematical Physics*. Nauka, Russian (1984).

[61] Romanov V, *Some classes of uniqueness for the solution of Volterra operator equations of the first kind*. Functional Analysis and Its Applications, v.9, issue1, p.81-82, Russian (1975).

[62] Rahman M, *Integral Equations and their Applications*. WIT Press (2007).

[63] M Raynaud et J Bransier, *A new finite-difference method for the nonlinear heat conduction problem*. Numerical Heat Transfer 27-42 (1986).

[64] Savateev E G, *On problems of determining the source function in a parabolic equation*. J, Inverse Ill-Posed Probl, 383102 (1995).

[65] Friedrich Sauvigny, *Partial differential equations 2*. Springer, Berlin Heidelberg New York (2000).

[66] Tanabe Hiroki, *Functional Analytic Methods for Partial Differential Equations*. NewYork, Dekker (1997).

[67] Tanabe Hiroki, *Equations of evolution*. Great Britain, Pitman press Bath (1979).

[68] Tikhonov I V and Eidel'man Yu S, *The question of well-posedness of direct and inverse problems for an evolution equation of specific type*. Mathem. Notes, v 56, p. 99-113, Russian (1994).

[69] Tikhonov I V, *An interrelation between inverse problems with the final and integral overdeterminations*. Uspekhi Matem. Nauk, v. 47, N 4, p. 211-212, Russian (1992).

[70] Tikhonov I V and Eidel'man Yu S, *The unique solvability of a two-point inverse problem for an abstract differential equation with unknown parameter Differential'nye*. Uravneniya 3611323, Russian (2000).

[71] Tikhonov I V and Eidel'man Yu S, *Theorems of the mapping point spectrum for C_0-semigroups and their application to uniqueness problems for abstract differential equations*. Dokl Akad Nauk, 394325 (2004).

[72] Tikhonov I V and Arsenin Y Y, *Solutions to ill-posed problems*. Winston Wiley, New York, (1977).

[73] Marie Thérèse and Lacroix Sonrier, *Distribution espaces de Sobolev applications*. Ellipsse, France (1998).

[74] Vrabie Ioan I, *Compactness of the solution operator for a linear evolution equation with distributed measures*. American mathematical society, 3181-3205 (2002).

[75] VRABIE I I AND DIAZ J I, *Compactness of the green associated to the porous media equation.* Analisis nolineal Y Mathematica aplicada, spain (1989).

[76] VRABIE I I, *Compactness Methods for Non linear Evolutions.* Pure and Applied Mathematics, vol 75, 2nd edn, NewYork, Longman and Wiley (1995).

[77] I.I.VRABIE, C_0*-semigroups and applications.* Amsterdam, North-Holland (2003).

[78] YAKOV ALBER AND IRINA RYAZANTSEVA, *Nonlinear ill posed problems of monotone type.* Springer, Dordrechet, the Netherlands (2010).

[79] ATSUSHI YAGI, *Abstract Parabolic Evolution Equations and their Applications.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2010).

[80] YOSIDA KOSAKU, *Functional analysis.* Springer-varlag, New york (1980).