République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 - Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

<u>Mémoire</u>

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MAGISTER en Mathématiques

Option : **Équation aux Dérivées Partielles**

Par :

M^{me}. REZGUI Nassima

<u>Intitulé :</u>

Étude de l'équation des ondes dans un milieu stratifié

<u>Dirigé par :</u> L. ALEM M.C.A U. ANNABA

Devant le jury :

PRESIDENT	**:**	**L. CHORFI**	**Professeur**	**U. ANNABA**
RAPPORTEUR	**:**	**L. ALEM**	**M. C. A.**	**U. ANNABA**
EXAMINATEUR	**:**	**S. BADRAOUI**	**Professeur**	**U. GUELMA**
EXAMINATEUR	**:**	**N. BOUSSETILA**	**M. C. A.**	**U. GUELMA**

Soutenu le 03 Juillet 2013

ملخص

في هذه الأطروحة نقوم بالتحليل الطيفي لشريط صوتي، طبقي و مضطرب

$\Omega = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 / \, 0 < z < h = \frac{\pi}{2}\right\}$. نعتبر المؤثر الصوتي $\mathbf{A} = -\mathbf{div}(\mathbf{c}^2\nabla)$ في Ω مع الشروط الحدية لديريخلي (Dirichlet) عند $z = h$ و نيومان (Neumann) عند $z = 0$.

السرعة $c(x,z)$ تعبر عن التقسيم الطبقي للشريط، و هي مرتبطة فقط بـ z لما $|x| > M$.

أولا ندرس حالة الطبقات الأفقية $(c = c_0(z))$، نعين $\mathbf{A_0}$ المؤثر الغير مضطرب المرفق، نقوم بالتحليل الطيفي له، ثم نستنتج مبدأ الامتصاص الحدي في نقاط من الطيف، بعدها نبحث عن دالة قرين التي تسمح بحل المشكل ذا منبع.

بعدها نوسع دراستنا لشريط مضطرب، نعطي بعض النتائج المتعلقة بالتحليل الطيفي و مبدأ الامتصاص الحدي للمؤثر المضطرب $\mathbf{A}$.

في الأخير نقدم بعض الشروط اللازمة و الكافية لوجود القيم الذاتية، و نكمل دراستنا بتعيين بعض الدوال الذاتية المعممة.

الكلمات المفتاحية: وسط طبقي، موجات صوتية، تحليل طيفي، مبدأ الامتصاص الحدي، دالة قرين.

Abstract

This dissertation is devoted to the spectral analysis of a layered disturbed acoustic strip $\Omega = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 < z < h = \frac{\pi}{2}\right\}$. We consider the operator $A = -div(c^2\nabla)$ in Ω with boundary conditions of Dirichlet at $z = h$ and Neumann at $z = 0$.

The velocity $c(x, z)$ describes the stratification of the medium; which depends only on z when $|x| > M$.

First, we treat the case of horizontal stratification $\big(c = c_0(z)\big)$; we denote by A_0 the associated undisturbed operator. We conduct its spectral analysis. We deduce the limiting absorption principle at some point of the spectrum, and then we seek the Green's function that solves the problem with source.

After, we extend our study to a disturbed strip, we give some results concerning the spectral analysis and the limiting absorption principle for the perturbed operator A.

Finally, we give some necessary and sufficient conditions for the existence of eigenvalues and we finish the work by the determination of some generalized eigenmodes.

Keywords: stratified medium, acoustics waves, spectral analysis, limiting absorption principle, Green's function.

Remerciement

J'adresse mes sincères remerciements au Professeur Lahcène CHORFI, du département de Mathématiques de l'université d'Annaba, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Je remercie également Docteur L. ALEM du département de Mathématiques de l'université d'Annaba, pour m'avoir proposé (avec la collaboration du Professeur L. CHORFI) le sujet de ce mémoire. Leurs remarques ont toujours été pertinentes et ils m'ont témoigné leur confiance tout au long de ces deux années de travail; je leur suis profondément reconnaissante.

Je remercie encore mon encadreur Dr. L. ALEM pour son soutient durant ces deux années. Son dynamisme, sa gentillesse et sa disponibilité m'ont permis d'orienter au mieux mes travaux.

Je tiens également à exprimer mes profonds remerciements au Professeur Salah BADRAOUI du département de Mathématiques de l'université de Guelma, de m'avoir fait l'honneur de juger ce travail en qualité d'examinateur.

Je tiens à remercier vivement le Docteur Nadjib BOUSSETILA du département de Mathématiques de l'université de Guelma, pour avoir accepté d'être membre du jury. Je lui suis très reconnaissante d'avoir accepté de juger ce travail.

Mes vifs remerciements aux responsables de l'école doctorale Dr. Y. LASKRI du pôle Annaba, Dr. N. BOUSSETILA du pôle Guelma et Dr. A. DEHICI du pôle Souk-Ahras, sans oublier tous les enseignants de l'année théorique.

Mes remerciements à tous les responsables des deux départements de Mathématiques de l'université d'Annaba et de l'université de Guelma.

Mes remerciements et mes souhaits de succès à mes collègues de l'école doctorale.

Sommaire

Introduction

Introduction

Les phénomènes de propagation d'ondes se rencontrent dans de nombreuses applications. On rencontre essentiellement trois types d'ondes : les ondes acoustiques, c'est-à-dire les ondes qui se propagent dans un fluide (ondes sonores), les ondes élastiques qui se propagent dans un solide (ondes sismiques) et les ondes électromagnétiques (la lumière; ondes radio).

Etudier la propagation d'une onde acoustique, c'est étudier la transmission du son entre différents endroits de l'espace. L'onde acoustique est une onde mécanique associée au déplacement des particules matérielles du milieu. Ainsi l'étude de la propagation acoustique présente évidemment des aspects de recherche fondamentale, mais elle est souvent intimement liée à une motivation d'application directe.

L'étude de la propagation des ondes acoustiques dans un milieu stratifié est importante et actuelle. L'analyse de la propagation du son dans un milieu stratifié dont la vitesse de propagation ne dépend que de la profondeur est désormais connue [17, 23-24].
La propagation des ondes électromagnétiques dans une couche diélectrique a été étudiée dans [16]. Le cas d'un demi-espace élastique a été considéré dans [15, 21].
Or, les milieux rencontrés dans la pratique sont tous des milieux stratifiés perturbés, ce qui a justifié le choix de notre thème.

Dans notre mémoire, nous nous intéressons à la propagation des ondes acoustiques dans un milieu stratifié perturbé modélisé par la bande $\Omega = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 / \, 0 < z < h\}$, nous allons lui associé l'équation des ondes suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - div(c^2(x,z)\nabla u) = f$$

où f est la source.

Ce mémoire est une synthèse d'articles consacrés à ce modèle [7-8, 19-20]. Toutefois, nous avons détaillé certaines démonstrations et donné des exemples numériques.

Notre mémoire est répartie en quatre chapitres.
Au premier chapitre, nous rappelons des notions d'analyse fonctionnelle liées à l'analyse spectrale des opérateurs autoadjoints.

Dans le deuxième chapitre, nous faisons l'analyse spectrale de l'opérateur A_0 correspondant à un milieu stratifié dans une seule direction. La vitesse ne dépend donc que de la variable z et la stratification sera dite horizontale. On construit explicitement un système complet de fonctions propres généralisées pour l'opérateur A_0. On déduit un principe d'absorption limite en des points du spectre. Après nous calculons la fonction de Green qui nous permettra de résoudre un problème avec second membre. A la fin de ce chapitre, nous introduisons l'opérateur $T(\mu)$ de Dirichlet-Neumann qui sera employé le long du chapitre suivant.

Au troisième chapitre, nous étudions le cas des stratifications générales, le problème sera dit perturbé et l'opérateur correspondant sera noté A. Nous étudions son analyse spectrale, nous présentons quelques résultats concernant l'existence des valeurs propres et nous établissons un principe d'absorption limite.
Nous complétons ce chapitre en définissant quelques fonctions propres généralisés associés à une fréquence donnée μ et qui peuvent être physiquement interprété.

Dans le dernier chapitre, nous développons une méthode proposée par les auteurs de [18]. L'idée est de réduire l'équation linéaire suivante

$$Au - \mu u = f \qquad (1)$$

à un problème équivalent sur un certain sous-ensemble borné $\mathcal{O}$ de Ω. Ce dernier problème sera met sous forme variationnelle, basé sur une certaine forme sesquilinéaire $b(\mu;.)$, qui nous permettra de satisfaire des motivations évidentes pour le calcul numérique. En fait, en utilisant cette méthode, nous serons capable de calculer les valeurs propres, les vecteurs propres (généralisés) de A, et les solutions de l'équation (1). De plus, quelques résultats, par exemple le spectre ponctuel $\sigma_p(A)$ de A est discret.

Chapitre I

Rappel sur la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints

Chapitre I
Rappel sur la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints

Dans ce rappel nous avons utilisé les ouvrages suivants [1-3].

1.1 Introduction aux opérateurs non bornés

1.1.1 Opérateurs bornés, non bornés

On considère deux espaces de Hilbert E et F dont les normes et produits scalaires sont notés :

$\|.\|_E, (.,.)_E, \|.\|_F, (.,.)_F.$

Définition 1.1. *Un operateur linéaire A est une application linéaire définie sur un sous-espace $D(A)$ dans F. Le sous-espace $D(A)$ est appelé domaine de A.*

Soit $A: D(A) \subset E \longrightarrow F$

$D(A) = \{u \in E, \ \|Au\|_F < \infty\}$

Si $D(A)$ est dense dans E, A est dit à domaine dense (où densément défini).

Définition 1.2. *On dit que A est un opérateur* ***borné*** *de E dans F si $D(A) = E$ et s'il existe un scalaire $C > 0$ tel que :*

$$\|Au\|_F \leq C\|u\|_E \qquad \forall\, u \in E. \tag{1.1}$$

On pose alors :

$$\|A\| = \sup_{\substack{u\in E\\ u\neq 0}} \frac{\|Au\|_F}{\|u\|_E}.$$

Si $D(A) \neq E$ et s'il existe une constante C telle que :

$$\|Au\|_F \leq C\|u\|_E \qquad \forall\, u \in D(A), \tag{1.2}$$

Alors l'opérateur A se prolonge en un opérateur borné de $\overline{D(A)}$ dans F, où $\overline{D(A)}$ désigne l'adhérence de $D(A)$ dans E.

Proposition 1.1. *Si A est un opérateur de domaine dense $D(A)$ vérifiant (1.2) alors A se prolonge en un opérateur borné sur E.*

- On désigne par $\mathcal{L}(E,F)$(resp. $\mathcal{L}(E)$) l'ensemble des opérateurs bornés de E dans F (resp.de E dans E). C'est un espace vectoriel muni de la norme $\|.\|$, c'est un espace de Banach.
- Une caractérisation très utile de $\|A\|$ est la suivante :

$$\forall\, A \in \mathcal{L}(E,F), \quad \|A\| = \sup_{\substack{u\in E\\ v\in F}} \frac{(Au,v)_F}{\|u\|_E\|v\|_F}.$$

Définition 1.3. *On dit que A est un opérateur* ***non borné,*** *s'il n'existe pas de constante C telle que (1.2) soit satisfaite. En d'autres termes, A est non borné, si et seulement s'il existe une suite $(u_n) \in D(A)$ telle que :*

$$\|u_n\|_E = 1 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \|Au_n\|_F = +\infty.$$

Remarque 1.1. *En fait, la propriété (1.1) signifie exactement que A est continu de E dans F. Autrement dit, un opérateur borné de E dans F est continu de E dans F.*

Exemple 1.1. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $E = F = L^2(\Omega)\ et\ f \in L^\infty(\Omega)$. L'opérateur A défini par :

$$Au = fu \qquad \forall u \in L^2(\Omega),$$

est borné de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ puisque :

$$\|fu\|_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}, \ \ \forall u \in L^2(\Omega).$$

Exemple 1.2. On suppose $E = F = L^2(\mathbb{R})$. Alors, l'opérateur A défini par :

$$Au(x) = xu(x),$$

de domaine

$$D(A) = \{u \in L^2(\mathbb{R})\ tel\ que\ xu \in L^2(\mathbb{R})\}$$

est non borné. Il suffit pour s'en convaincre de considérer la suite (u_n) de $D(A)$ donnée par :

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x < n\ \ ou\ \ x > n+1 \\ 1 & sinon \end{cases}$$

En effet : $\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ et $\|Au_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{\frac{3n^2+3n+1}{3}}$

1.1.2. Opérateurs fermés

Précisons quelques notations et définitions importantes.

$$Graphe\ de\ A = G(A) = \{(u, Au);\ u \in D(A)\} \subset E \times F.$$

$$Image\ de\ A = Im\ A = \{Au;\ u \in D(A)\} \subset F.$$

$$Noyau\ de\ A = Ker(A) = \{u \in D(A); Au = 0\} \subset E.$$

Définition 1.4. *Un opérateur* $A: D(A) \subset E \to F$ *est dit fermé si son graphe* $G(A)$ *est fermé dans* $E \times F$.

- On a implicitement muni $E \times F$ de la norme produit :

  $\forall (u, v) \in E \times F : \|(u, v)\|_{E\times F}^2 = \|u\|_E^2 + \|v\|_F^2$

- A est fermé équivaut à dire que $D(A)$ muni de la norme dite « du graphe ».

  $\|u\|_{D(A)}^2 = \|u\|_E^2 + \|Au\|_F^2$ est un espace de Hilbert.

- Un opérateur A est fermé si et seulement si, pour toute suite (u_n) de $D(A)$ telle que $u_n \to u$ dans E et $Au_n \to v$ dans F, alors on a : $u \in D(A)\ et\ Au = v$.

En particulier, tout opérateur borné est fermé.

Exemple 1.3. $D(A) = \left\{u \text{ absolument continue sur } (0,1)\ tq: \frac{du}{dx} \in L^2(0,1) et\ u(0) = 0\right\}$

$$D(A) = \{u \in H^1(0,1), u(0) = 0\} \qquad Au = \frac{du}{dx}$$

$D(A)$ est dense car $C_0^1(0,1)$est dense dans $L^2(0,1)$.

A est un opérateur non borné (on peut considérer la suite $u_n(x) = e^{inx}$).

A est fermé car :

Si: $\left\{\begin{matrix} u_n \to u\ dans\ L^2(0,1) \\ Au_n = \frac{du_n}{dx} \to v\ dans\ L^2(0,1)\end{matrix}\right\}$ alors $\left\{\begin{matrix} u \in D(A) \\ et\ \frac{du}{dx} = v\end{matrix}\right.$

Si on considère: $$u_n(x) = u_n(0) + \int_0^x \frac{du_n(t)}{dx} dt$$

Quand n→+∞ on aura: $$u(x) = \int_0^x v(t)dt \Rightarrow \begin{cases} \frac{du(x)}{dx} = v(x) \quad p.p\ sur\ [0,1] \\ u \in D(A)\end{cases}$$

Si on modifie $D(A)$, A peut devenir non fermé.

On peut par exemple choisir $D(A) = C^1(0,1)$ alors la suite $(u_n) \in D(A)$ définie par :

$$u_n(x) = \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}$$

converge dans $H^1(0,1)$ vers $u(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$. Cela signifie que les suites $(u_n)\ et\ (Au_n)$ convergent dans E et pourtant $u \notin C^1(0,1)$. Donc A n'est pas fermé, car le domaine a été choisi « trop petit ».

Lemme 1.1. *Si $A: D(A) \subset E \to F$ est un opérateur fermé, alors $Ker\ A$ est fermé.*

Preuve. Soit $(u_n) \in Ker\ A$ une suite qui converge vers u dans E. Alors la suite (Au_n) est convergente puisqu'elle est identiquement nulle. Comme A est fermé, on en déduit que $u \in D(A)\ et\ Au = 0.$ ■

Lemme 1.2. *Si $A: D(A) \subset E \to F$ est un opérateur fermé et bijectif de $D(A)$ sur F, alors A^{-1} est également fermé.*

Preuve. Soit $(u_n) \in F$ telle que $u_n \to u$ dans F et $A^{-1}u_n \to v$ dans E. Posons : $w_n = A^{-1}u_n$. Alors $w_n \to v$ dans E et $Aw_n \to u$ dans F. Comme A est fermé, il en résulte que $v \in D(A)\ et\ Av = u,\ soit\ v = A^{-1}u.$ ■

Théorème 1.1 (Théorème du graphe fermé)

Soit A un opérateur de E dans F dont le domaine est égal à E et qui est un opérateur fermé, alors A est borné de E dans F.

Autrement dit, si $A: D(A) \subset E \to F$ est un opérateur non borné et fermé, alors on a nécessairement $D(A) \neq E$ [2].

Le lemme 1.2 et le théorème du graphe fermé entraine le :

Théorème 1.2. *Soit $A: D(A) \subset E \to F$ un opérateur fermé et bijectif de $D(A)$ sur F, alors A^{-1} est borné de F dans E [2].*

1.2 Opérateurs autoadjoints

1.2.1 Opérateur adjoint

Définition 1.5. *Soit A un opérateur non borné $A: D(A) \subset E \to F$ tel que : $D(A)$ est dense dans E.On appelle adjoint de l'opérateur A, l'opérateur :*

$A^*: D(A^*) \subset F \to E$ *défini par :*

$$D(A^*) = \{v \in F, \text{tel que} \quad \exists\, w \in E;\ (v, Au)_F = (w, u)_E \quad \forall\, u \in D(A)\}$$

$$A^* v = w.$$

$D(A^*)$ *est un sous espace vectoriel de F et* A^* *est un opérateur linéaire.*

Par définition, on a toujours :

$$(v, Au)_F = (A^* v, u)_E \ \ \forall\, u \in D(A), \quad \forall\, v \in D(A^*) \tag{1.3}$$

Remarque 1.2. *On peut aussi définir $D(A^*)$ de la façon suivante :*

$$D(A^*) = \{v \in F, \exists\, C > 0 \ \ \text{tel que} \quad |(v, Au)_F| \leq C\|u\|_E \quad \forall\, u \in D(A)\}$$

Lemme 1.3. *Soit $A: D(A) \subset E \to F$ un opérateur non borné, alors A^* est fermé.*

Lemme 1.4. *Soit $A: D(A) \subset E \to F$ un opérateur à domaine dense et fermé. Alors $D(A^*)$ est dense dans E et A^{**} est une extension de A.*

Lemme 1.5. *Soit $A: D(A) \subset E \to F$. Alors :*

1. $Ker\ A^* = (Im\ (A))^{\perp}$ *et* $(Ker\ A^*)^{\perp} = \overline{Im\ (A)}$;
2. *Si de plus l'opérateur A est fermé :* $Ker\ A = (Im(A^*))^{\perp}$ *et* $(Ker\ A)^{\perp} = \overline{Im\ (A^*)}$.

1.2.2. Opérateurs symétriques, opérateurs autoadjoints.

A partir de maintenant, nous supposerons que $E = F$;

Définition 1.6. *On dit qu'un opérateur $A: D(A) \subset E \to E$ est symétrique si :*

$$(Au, v)_E = (u, Av)_E \ \ \forall\, u, v \in D(A). \tag{1.4}$$

Lemme 1.6. *Soit A un opérateur de domaine dense et A^* son adjoint :*

On a : si A est symétrique alors $A \subset A^*$ de plus si A est borné, alors $A = A^*$.

Définition 1.7. *Un opérateur* $A: D(A) \subset E \to E$ *de domaine dense est dit autoadjoint si* $A = A^*$.

Remarque 1.3. *Si A est borné et symétrique, alors il est autoadjoint.*

Lemme 1.7. *Si* $A: D(A) \subset E \to E$ *est un opérateur autoadjoint et si* $A - \lambda I$ *est bijectif pour un réel* λ *alors :* $(A - \lambda I)^{-1}$ *est un opérateur autoadjoint borné.*

Nous allons établir une caractérisation de la norme des opérateurs autoadjoints bornés :

Théorème 1.3. *Si* $A \in \mathcal{L}(E)$ *est autoadjoints alors :*

$$\|A\| = \sup_{u \neq 0} \frac{|(Au, u)_E|}{\|u\|_E^2} = \sup_{\|u\|_E = 1} |(Au, u)_E|$$

Lemme 1.8. *Soit* $A: D(A) \subset E \to E$ *un opérateur autoadjoint. Alors A est fermé et l'on a :*

$$\begin{cases} Ker\ A = (Im\ (A))^{\perp} \\ \overline{Im\ (A)} = (Ker\ A)^{\perp} \end{cases}$$

On a donc la décomposition orthogonale suivante :

$$E = KerA \oplus \overline{Im\ (A)}$$

Théorème 1.4. *Soit* $A: D(A) \subset E \to E$ *un opérateur symétrique tel que :*

$Im\ (A + I) = E$, *alors le domaine de A est dense dans E et A est autoadjoint [3].*

1.2.3. Formes hermitiennes et opérateurs autoadjoints

Les problèmes auxquels nous nous intéressons dans la suite seront souvent posés sous forme variationnelle. Il nous faut donc préciser le lien qui existe entre les opérateurs et les formes sesquilinéaires.

Soit E un espace de Hilbert et $D(a)$ un sous-espace de E dense dans E. Soit alors a une forme sesquilinéaire définie sur $D(a)$. Autrement dit : pour tout $v \in D(a), u \longmapsto a(u, v)$ est une forme linéaire sur $D(a)$, et pour tout $u \in D(a), v \longmapsto a(u, v)$ est une forme antilinéaire sur $D(a)$.

Définition 1.8. *On appelle opérateur* A *associé à la forme* a *l'opérateur de* E *défini par :*

$u \in D(A) \Leftrightarrow u \in D(a)\ et\ \exists w \in E\ tel\ que\ a(u, v) = (w, v)_E \quad \forall v \in D(a)$

$Au = w$

Exemple 1.4. Soit Ω un domaine régulier de $\mathbb{R}^n$ et posons $E = L^2(\Omega), D(a) = H^1(\Omega)$,

et $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx$ pour tous $u, v \in D(a)$. L'opérateur associé à a est l'opérateur de Neumann défini par :

$$D(A) = \left\{u \in H^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\right\}$$

$$Au = -\Delta u \qquad \forall u \in D(A)$$

Il est clair que A est symétrique dès que a est hermitienne (c.à.d. $a(u,v) = \overline{a(v,u)}$).

Nous allons maintenant donner une condition suffisante portant sur a pour que A soit autoadjoint.

Théorème 1.5. *Soit a une forme hermitienne de domaine $D(a)$ dense dans E. On suppose qu'il existe C tel que :*

$$a(u,u) + C\|u\|_E^2 \geq 0, \qquad \forall u \in D(a), \tag{1.5}$$

et que $D(a)$ muni de la norme $\|u\|_{D(a)} = \sqrt{a(u,u) + C\|u\|_E^2}$ est un espace de Hilbert. Alors A est un opérateur de domaine dense dans E et est autoadjoint [3].

Définition 1.9. *On dit qu'une forme sesquilinéaire $a(u,v): E \times E \to \mathbb{C}$ est*

(i) ***continue*** *s'il existe une constante C telle que*

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\| \qquad \forall u, v \in E,$$

(ii) ***coercive*** *s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2 \qquad \forall v \in E.$$

1.3 Spectre d'un opérateur autoadjoint

1.3.1. Spectre d'un opérateur

Soit $A\colon D(A) \subset E \to E$ un opérateur fermé de domaine dense.

Définition 1.10. *On pose :*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda I \ est\ inversible\}$$

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

On dit que $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant et $\sigma(A)$ le spectre de A. Si $\lambda \in \rho(A)$, on pose

$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ est appelée la résolvante de A au point λ.

Définition 1.11. *Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans E:*

Le point λ du plan complexe $\mathbb{C}$ est appelé point régulier de A si la résolvante

$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ existe, définie sur tout E et borné.

L'ensemble des points réguliers de A est appelé ensemble résolvant ($\rho(A)$).

Théorème 1.6. *L'application : $(A - \lambda I) : D(A) \to R(A - \lambda I)$ détermine un opérateur bijectif si et seulement si : λ n'est pas une valeur propre de l'opérateur A [2].*

Proposition 1.2.

- *L'ensemble résolvant $\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, sur lequel : $\lambda \to R_\lambda(A)$ est analytique et vérifie l'équation :*

$$\forall \lambda \in \rho(A), \forall \xi \in \rho(A), R_\lambda(A) - R_\xi(A) = (\lambda - \xi) R_\lambda(A) R_\xi(A) \tag{1.6}$$

Cette identité est appelée l'identité résolvante.

- *Le spectre de A est fermé.*

Si λ appartient au spectre de A, alors :

- Soit $A - \lambda I$ n'est pas injectif. Cela signifie que

  $\exists u \in D(A),\ u \neq 0 \qquad Au = \lambda u.$

On dit alors que λ est une valeur propre de A. On appelle sous espace propre associé à λ l'espace $E(\lambda)$ donné par :

$$E(\lambda) = \{u \in D(A);\ Au = \lambda u\}.$$

La dimension de $E(\lambda)$ est appelée la multiplicité de λ. Enfin, l'ensemble des valeurs propres de A noté $\sigma_p(A)$ est appelé le spectre ponctuel de A.

- Soit $A - \lambda I$ est injectif mais non surjectif (ceci n'est possible que si $\dim E = +\infty$).

  On distingue dans ce cas le spectre continu $\sigma_c(A)$ et le spectre résiduel $\sigma_r(A)$. On dit que $\lambda \in \sigma_c(A)$ si $Im(A - \lambda I\ )$ est dense dans E et $\lambda \in \sigma_r(A)$ sinon.

  Notons que λ est dans le spectre résiduel de A si et seulement si il existe $v \in E, v \neq 0$, tel que :

$$\forall u \in D(A)\ \ \big((A - \lambda I)u, v\big)_E = 0$$

  Ce qui équivaut à dire que $Ker\ \left(A^* - \bar{\lambda} I\right) \neq 0$. En d'autres termes, on a :

$$\forall \lambda \notin \sigma_p(A) \quad \lambda \in \sigma_r(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*).$$

Propriétés 1.1. *Soit A: $D(A) \subset E \to E$ un opérateur autoadjoint alors on a :*

1. $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ *;*
2. *les fonctions propres sont orthogonaux ;*
3. $\sigma_r(A) = \emptyset$ *;*
4. *le spectre de A admet la caractérisation suivante :*

$\lambda \in\ \sigma(A) \Leftrightarrow$ *il existe une suite* $u_n \in D(A)$ *telle que* $\|u_n\|_E = 1\ \ et\ \ \|Au_n - \lambda u_n\|_E \longrightarrow 0.$

5. *si* $\lambda \in\ \rho(A)$ *:*

$$\xi \in\ \sigma((A - \lambda I)^{-1}) \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{\xi} \in\ \sigma(A).$$

6. *Le spectre d'un opérateur autoadjoint est non vide.*
7. $\forall u \in D(A), \quad (Au, u) \geq \alpha \|u\|^2 \Rightarrow \sigma(A) \subset [\alpha, +\infty[$

1.3.2. Spectre essentiel et spectre discret

Les résultats suivant peuvent être trouvés dans le livre de Schechter [3]

Définition 1.12. *Soit A: $D(A) \subset E \to E$ un opérateur autoadjoint. On appelle spectre essentiel de A et on note $\sigma_{ess}(A)$ le sous-ensemble du spectre défini ainsi :* $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$

si et seulement si, il existe une suite $(u_n) \in D(A)$ *telle que* $\|u_n\|_E = 1, \|Au_n - \lambda u_n\|_E \to 0$ *et* $u_n \rightharpoonup 0$ *dans E faiblement. La suite* (u_n) *est appelée une suite singulière.*

Lemme 1.9. *Soit* $A: D(A) \subset E \to E$ *un opérateur autoadjoint. Si* $\lambda \in \sigma(A)$ *et* $\lambda \notin \sigma_{ess}(A)$*, alors* λ *est une valeur propre de A.*

Lemme 1.10. *Soit* $A: D(A) \subset E \to E$ *un opérateur autoadjoint. Si* λ *est une valeur propre de A de multiplicité infinie, alors* $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$.

Lemme 1.11. *Soit* $A: D(A) \subset E \to E$ *un opérateur autoadjoint. Soit* $(\lambda_n) \in \sigma(A)$ *une suite de points du spectre tels que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda \quad et \quad \lambda_n \neq \lambda$$

pour tout n. Alors $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$.

Corollaire 1.1. *Soit* $A: D(A) \subset E \to E$ *un opérateur autoadjoint. Alors le spectre essentiel* $\sigma_{ess}(A)$ *est fermé.*

En résumé :

$\lambda \in \sigma(A)$ et $\lambda \notin \sigma_{ess}(A) \quad \Rightarrow \quad \lambda$ est une valeur propre de multiplicité finie et isolée dans le spectre.

Définition 1.13. *On appelle spectre discret de A et on note* $\sigma_{disc}(A)$ *l'ensemble des valeurs propres de A de multiplicité finie et isolées dans le spectre.*

D'après ce qui précède, on a :

$$\sigma_{ess}(A) \cup \sigma_{disc}(A) = \sigma(A) \quad et \quad \sigma_{ess}(A) \cap \sigma_{disc}(A) = \emptyset.$$

Exemple 1.5. Soit A l'opérateur non borné de $L^2(\mathbb{R})$ donné par :

$$D(A) = H^2(\mathbb{R}) \ , \ Au = -\frac{d^2u}{dx^2} \qquad \forall u \in D(A).$$

Déterminons son spectre ;

L'opérateur A est de domaine dense et autoadjoint car A est symétrique et $A + I$ est inversible. De plus :

$$\forall u \in D(A) \quad (Au, u)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{du}{dx}\right|^2 dx \geq 0$$

on a donc : $\sigma(A) \subset \mathbb{R}^+$.

Par ailleurs, il est clair que A n'admet pas de valeur propre, donc :

$$\sigma(A) = \sigma_{ess}(A).$$

Nous allons démontrer que :

$$\sigma(A) = \sigma_{ess}(A) = \mathbb{R}^+$$

Comme $\sigma_{ess}(A)$ est fermé, il suffit d'établir l'inclusion suivante :

$$\mathbb{R}^{+*} \subset \sigma_{ess}(A)$$

Soit $\lambda > 0 \;\; et \;\; \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \varphi \neq 0$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi^2 dx = 1$. Posons :

$$\forall n \geq 1 \;\; \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi\left(\frac{x}{n}\right) e^{i\sqrt{\lambda}x}$$

ψ_n est une suite singulière associée à la valeur λ. Car :

- $\int_{\mathbb{R}} \psi_n^2(x)dx = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(y)dy = 1 \qquad \forall n.$
- $\left|-\frac{d^2\,\psi_n}{dx^2}(x) - \lambda\,\psi_n(x)\right| \leq n^{-5/2}\left|\varphi''\left(\frac{x}{n}\right)\right| + 2n^{-3/2}\left|\varphi'\left(\frac{x}{n}\right)\right|\sqrt{\lambda}$ et par conséquent :

$$\|A\psi_n - \lambda\psi_n\|_E \to 0.$$

- De plus, $\int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)\xi(x)dx \to 0$ pour toute fonction ξ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par conséquent, (ψ_n) tend faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$.

1.3.3 Le principe du Min-Max

Le principe de Min-Max s'applique aux opérateurs autoadjoints bornés inférieurement ; il permet de caractériser les valeurs propres situées au dessous de la borne inférieure du spectre essentiel. On trouve dans la littérature plusieurs énoncés de ce principe.

Soit A un opérateur autoadjoint non borné de E et $D(A)$ son domaine. On suppose que A est borné inférieurement c.à.d.

$$\exists C > 0 \text{ tel que } (Au, u)_E + C\|u\|_E^2 \geq 0, \qquad \forall u \in D(A).$$

D'après les résultats de la section précédente, tout point du spectre de A qui n'appartient pas au spectre essentiel est une valeur propre isolée de multiplicité finie.

On définit le quotient de Rayleigh suivant :

$$\mathcal{R}_A(u) = \frac{(Au,u)_E}{\|u\|_E^2} \qquad \forall u \in D(A), u \neq 0$$

On pose alors, pour tout entier $m, m \geq 1$:

$$\mu_m(A) = \inf_{V_m \in \mathcal{V}_m(D(A))} \sup_{u \in V_m, u \neq 0} \mathcal{R}_A(u) \tag{1.7}$$

Où $\mathcal{V}_m(E)$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension m.

On pose également pour tout entier $m > 1$:

$$\tilde{\mu}_m(A) = \sup_{v^{(1)},\dots v^{(m-1)} \in E} \inf_{u \in [v^{(1)},\dots v^{(m-1)}]_{D(A)}^{\perp}, u \neq 0} \mathcal{R}_A(u) \tag{1.8}$$

Où on note :

$$\left[v^{(1)}, \dots v^{(m-1)}\right]_{D(A)}^{\perp} = \left\{u \in D(A);\ \left(u, v^{(i)}\right)_E = 0, i = 1, m-1\right\}$$

On démontre alors les résultats suivants :

Théorème 1.7. [2]

1) L'égalité suivante est satisfaite :

$$\mu_m(A) = \tilde{\mu}_m(A) \text{ pour tout } m > 1.$$

2) Notons $\lambda_e(A)$ la borne inférieure du spectre essentiel de l'opérateur A et $\mathcal{N}(A)$ le nombre de valeurs propres de A strictement inférieures à $\lambda_e(A)$ (comptées avec leur ordre de multiplicité). Alors :

- *$\mu_m(A) < \lambda_e(A)$ si et seulement si $\mathcal{N}(A) \geq m$. Dans ce cas, $\mu_1(A)$, $\mu_2(A) \dots \mu_m(A)$ sont exactement les m premières valeurs propres de l'opérateur A.*
- *$\mu_m(A) = \lambda_e(A)$ si et seulement si $\mathcal{N}(A) < m$. Dans ce cas, $\mu_n(A) = \lambda_e(A)$ pour tout entier $n \geq m$.*

Soit a une forme hermitienne de domaine $D(a)$, dense dans E. On suppose qu'il existe une constante C telle que :

$$a(u,u) + C\|u\|_E^2 \geq 0, \qquad \forall u \in D(a),$$

et que $D(a)$ muni de la norme $\|u\|_{D(a)} = \sqrt{a(u,u) + C\|u\|_E^2}$ est un espace de Hilbert. Soit A l'opérateur non borné de E, associé à la forme a et $D(A)$ son domaine. Il existe dans ce cas une version du Principe du Min-Max qui n'utilise que l'expression de la forme a. En effet, posons :

$$\mathcal{R}_a(u) = \frac{a(u,u)}{\|u\|_E^2} \quad \forall u \in D(a), u \neq 0$$

Et
$$\mu_m(a) = \inf_{V_m \in \mathcal{V}_m(D(a))} \sup_{u \in V_m, u \neq 0} \mathcal{R}_a(u) \tag{1.9}$$

$$\tilde{\mu}_m(a) = \sup_{v^{(1)},\dots v^{(m-1)} \in E} \inf_{u \in [v^{(1)},\dots v^{(m-1)}]^{\perp}_{D(a)}, u \neq 0} \mathcal{R}_a(u) \tag{1.10}$$

Alors on a le :

Théorème 1.8. [2]

Les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \mu_1(a) = \mu_1(A) \\ \mu_m(a) = \tilde{\mu}_m(a) = \mu_m(A) \ \ \forall m > 1, \end{cases} \tag{1.11}$$

Où $\mu_m(A)$ est défini par l'une des deux formules (1.7) ou (1.8).

1.4 Opérateurs autoadjoints compacts

1.4.1. Opérateurs Compacts

Définition 1.14. *Un opérateur A linéaire borné de E dans F est dit compact si et seulement si l'une de ces deux propositions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *L'image par A de la boule unité fermé de E, notée $B_E(0,1)$ est d'adhérence compacte.*
2. *De toute suite (u_n) bornée dans E, on peut extraire une sous-suite $(u_n^{'})$ telle que la suite $(Au_n^{'})$ converge dans F.*

Désignons par $\mathcal{K}(E;F)$ $\left(resp. \mathcal{K}(E)\right)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F (resp. dans E). On démontre que $\mathcal{K}(E;F)$ est un sous espace fermé, donc de Banach, de $\mathcal{L}(E;F)$.

Exemple 1.6. On sait que dans un espace de dimension finie, les ensembles fermés bornés sont compacts. Il est clair que si l'image de A, $Im\ A$, est de dimension finie, A est compact. On dit alors que A est de rang fini.

Théorème 1.9. *Tout opérateur $A \in \mathcal{K}(E;F)$ est limite au sens de $\mathcal{L}(E;F)$ d'une suite d'opérateurs de rang fini [2].*

Exemple 1.7. Soit E un espace de Hilbert séparable, (e_n) une base hilbertienne de E et (λ_n) une suite de scalaires tels que $\lambda_n \to 0$. Alors l'opérateur A défini par :

$$Ae_n = \lambda_n e_n$$

est compact. En effet, soit A_N l'opérateur de rang fini défini par :

$$A_N e_n = Ae_n \quad si \ \ n \leq N$$

$$A_N e_n = 0 \qquad sinon.$$

Alors on a, pour tout $u \in E$:

$$\|(A - A_N)u\|_E^2 = \sum_{n>N}^{+\infty} |\lambda_n|^2 |(u, e_n)_E|^2 \leq |\lambda_{N+1}|^2 \|u\|_E^2.$$

Donc :

$$\|A - A_N\| \leq |\lambda_{N+1}|.$$

Par conséquent, $A \to A_N$ dans $\mathcal{L}(E)$.

Remarque 1.4. *Un opérateur compact transforme les suites faiblement convergentes en suites fortement convergentes c.à.d.* $u_n \rightharpoonup u$ *dans E implique* $Au_n \to Au$ *dans E.*

1.4.2. Perturbation compacte

Il n'est pas toujours facile de déterminer directement le spectre essentiel d'un opérateur autoadjoint A. Souvent, on essaie de montrer que A peut s'écrire sous la forme $A = B + K$ où B est un opérateur autoadjoint dont on sait calculer le spectre essentiel par des techniques simples et K est un opérateur symétrique admettant certaines propriétés de compacité. On dit que A et B diffèrent d'une perturbation compacte. Généralement, on sait alors montrer que :

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B).$$

Théorème 1.10. *Soit* $B: D(B) \subset E \to E$ *un opérateur autoadjoint et* $K: E \to E$ *un opérateur autoadjoint compact. Alors l'opérateur A :* $D(A) \subset E \to E$ *défini par :*

$$\begin{cases} D(A) = D(B) \\ \forall u \in D(A) \qquad Au = Bu + Ku \end{cases}$$

est autoadjoint et $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$ *[3].*

Définition 1.15. *Soit* $B: D(B) \subset E \to E$ *un opérateur autoadjoint et* $K: D(K) \subset E \to E$ *un opérateur tel que :* $D(B) \subset D(K)$. *On dit que K est B-compact si l'on a la propriété suivante : Si* (u_n) *est une suite de* $D(B)$ *telle que* $(\|u_n\|_E + \|Bu_n\|_E)$ *reste borné, alors la suite* (Ku_n) *admet une sous-suite convergente.*

Exemple 1.8. Soit B l'opérateur défini par :

$$\begin{cases} D(B) = H^2(\mathbb{R}^n) \\ \\ \quad Bu = -\Delta u \end{cases}$$

K l'opérateur suivant :

$$Ku(x) = V(x)u(x)$$

Où V est une fonction à valeurs réelles et à support compact Ω dans $\mathbb{R}^n$ telle que $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors on sait que B est autoadjoint et borné inférieurement. De plus, il est clair, grâce à l'injection compacte de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, que K et B-compact. Il en résulte que l'opérateur A suivant :

$$D(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \quad et \quad Au = -\Delta u + Vu$$

est autoadjoint et que :

$$\sigma_{ess}(A) = \mathbb{R}^+.$$

1.4.3. Opérateur autoadjoints compacts

Nous considérons dans cette section le cas particulier des opérateurs autoadjoints et compacts de E dans E. nous allons montrer que pour de tels opérateurs, les vecteurs propres forment une base de E. il s'agit donc d'un résultat de diagonalisation. Il généralise à la dimension infinie le résultat qui exprime que toute matrice hermitienne est diagonalisable dans une base orthonormée.

Nous allons déduire quelques propriétés du spectre d'un opérateur autoadjoint compact à l'aide du principe de Min-Max.

Propriétés 1.2. *Soit $A \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur autoadjoint, alors on a :*

1- $0 \in \sigma(A)$ *;*

2- $\sigma_{ess}(A) = \{0\}$ *;*

3- *Toute valeur propre non nulle de A est de multiplicité finie.*

4- *Le seul point d'accumulation possible des valeurs propres est 0.*

Dans la suite, afin de simplifier la présentation, nous considérons des opérateurs positifs c.à.d. tels que :

$$(Au, u)_E \geq 0 \quad \forall u \in E.$$

Cette hypothèse ne restreint pas la généralité de notre propos, tous les résultats s'étendent au cas quelconque. Soit donc $A \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur positif. L'opérateur $-A$ est donc borné inférieurement par $-\|A\|$. D'après les propriétés 1.2, la borne inférieure du spectre essentiel de $-A$ est égale à zéro : $\lambda_e(-A) = 0$.

En appliquant le principe du min-max à $-A$, on obtient les résultats ci-dessous portant sur l'opérateur A. Pour *m* = 1, 2…3, on pose :

$$\lambda_m(A) = \sup_{V_m \in \mathcal{V}_m(E)} \inf_{u \in V_m, u \neq 0} \frac{(Au,u)_E}{\|u\|_E^2} \tag{1.12}$$

La suite $\left(\lambda_m(A)\right)_{m\geq 1}$ est décroissante, positive ou nulle, et tend vers 0 quand $m \to +\infty$.

D'après le théorème 1.7, on a :

Théorème 1.11. [2]

Soit $A \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur autoadjoint positif. Alors on a :

- *Soit A est de rang fini. Alors, si M désigne le rang de A,*

  $\lambda_1(A),\ \lambda_2(A) \dots \lambda_m(A), \dots \lambda_M(A)$ sont les M valeurs propres strictement positives de A, ordonnées de la plus grande à la plus petite et répétées un nombre de fois égal à leur multiplicité. De plus :

$$\lambda_m(A) = 0 \quad \forall m > M.$$

- *Soit A n'est pas de rang fini. Alors, A admet une infinité dénombrable de valeurs propres strictement positives et de multiplicité finie qui peuvent être ordonnées en suite décroissante convergeant vers 0. De plus, si chaque valeur propre est répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité, cette suite coïncide avec la suite $\left(\lambda_m(A)\right)$.*

Notons que; pour tout $m \leq M$ si A est de rang M fini et pour tout $m \geq 1$ sinon, les sup et inf dans la formule 1.12 sont atteints et l'on peut donc écrire

$$\lambda_m(A) = \max_{V_m \in \mathcal{V}_m(E)} \min_{u \in V_m, u \neq 0} \frac{(Au,u)_E}{\|u\|_E^2} \tag{1.13}$$

On a aussi d'après la formule (1.8) :

$$\lambda_m(A) = \min_{V_{m-1} \in \mathcal{V}_{m-1}(E)} \max_{u \in V_{m-1}^{\perp}, u \neq 0} \frac{(Au,u)_E}{\|u\|_E^2} \tag{1.14}$$

Théorème 1.12.

Soit $A \in \mathcal{K}(E)$ *un opérateur autoadjoint positif qui n'est pas de rang fini et soit* $\left(\lambda_m(A)\right)_{m\geq 1}$ *la suite ordonnée de ses valeurs propres. Notons* $(w_m)_{m\geq 1}$ *une famille orthonormale de* E *telle que :*

$$Aw_n = \lambda_n w_n.$$

Alors la famille (w_m) *est une base hilbertienne de* $(Ker\ A)^{\perp}$*. Autrement dit, tout* $u \in E$ *se décompose de manière unique sous la forme :*

$$u = u_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} (u, w_m)_E\, w_m \tag{1.15}$$

(la série converge au sens de E*) où* $u_0 \in Ker\ A$ *et l'on a :*

$$\|u\|_E^2 = \|u_0\|_E^2 + \sum_{m=1}^{+\infty} |(u, w_m)_E|^2.$$

De plus, la famille (w_m) *diagonalise l'opérateur* A *au sens où :*

$$Au = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m (u, w_m)_E\, w_m.$$

(la série converge au sens de E) [1].

Corollaire 1.2. *Soit* $A \in \mathcal{K}(E)$ *un opérateur autoadjoint positif et injectif. Alors A admet une suite de valeurs propres strictement positives décroissant vers 0 et il existe une base hilbertienne de* E *formée de vecteurs propres associés.*

Remarque 1.5. *On déduit en particulier de ce corollaire que dans un espace de Hilbert non séparable, il ne peut pas exister d'opérateur autoadjoint compact positif et injectif.*

1.4.4. Opérateurs autoadjoints à résolvante compacte

Définition 1.16. *Soit $A: D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur non borné. Alors A est dit à résolvante compacte si :*

$$\forall \lambda \in \rho(A) \quad (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{K}(E). \tag{1.16}$$

Théorème 1.13.

- *Un opérateur $A: D(A) \subset E \rightarrow E$ est à résolvante compacte si et seulement si il existe λ tel que $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{K}(E)$.*
- *Si A est à résolvante compacte, A est nécessairement non borné [1].*

Nous allons maintenant déduire des résultats de la section précédente la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints à résolvante compacte. Nous nous restreindrons au cas des opérateurs bornés inférieurement

Théorème 1.14. [1] *Soit $A: D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur autoadjoint borné inférieurement et à résolvante compacte. Alors il existe une base hilbertienne de E, $\{w_m \in D(A); m \geq 1\}$, et une suite de réels $(\lambda_m)_{m\geq 1}$ telles que :*

$$\begin{cases} \lambda_1 \leq \lambda_2 \dots \leq \lambda_m \leq \cdots < +\infty \\ \lim\limits_{m\to+\infty} \lambda_m = +\infty \\ Aw_m = \lambda_m w_m, \qquad m = 1; 2 \dots \end{cases}$$

De plus, les valeurs λ_m admettent les caractérisations suivantes :

$$\lambda_m = \min_{V_m \in \mathcal{V}_m(D(A))} \max_{u \in V_m, u\neq 0} \frac{(Au, u)_E}{\|u\|_E^2} \tag{1.17}$$

$$\lambda_m = \max_{V_{m-1} \in \mathcal{V}_{m-1}(E)} \min_{u \in V_{m-1}^{\perp} \cap D(A), u\neq 0} \frac{(Au, u)_E}{\|u\|_E^2} \tag{1.18}$$

Corollaire 1.3. *Avec les notations du théorème 1.14, on a :*

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n w_n \in D(A) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 |u_n|^2 < +\infty.$$

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n w_n \in D(A) \Rightarrow Au = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n w_n.$$

Par ailleurs, supposons que A est associé à une forme bilinéaire a *de domaine* $D(a)$. *Alors, on a :*

$$\lambda_m = \min_{V_m \in \mathcal{V}_m(D(a))} \max_{u \in V_m, u \neq 0} \frac{a(u,u)}{\|u\|_E^2} \tag{1.19}$$

Et

$$\lambda_m = \max_{V_{m-1} \in \mathcal{V}_{m-1}(E)} \min_{u \in V_{m-1}^{\perp} \cap D(a), u \neq 0} \frac{a(u,u)}{\|u\|_E^2} \tag{1.20}$$

Références.

[1] T. KATO. *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag, 1966.

[2] M. REED, B. SIMON. *Methods of modern mathematical physics*. Tome 1: Functional Analysis, Academic Press (1978).

[3] M. Schechter. *Operator Methods in Quantum Mechanics*. North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, San Francisco, London (1978).

Chapitre II
Stratification horizontale

Chapitre II
Stratification horizontale

2.1. Position du problème

La modélisation d'un problème particulier de sismique conduit à étudier l'équation d'ondes scalaire suivante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - div(c^2(x,z)\nabla u) = f \tag{2.1}$$

Où $t > 0$ (le temps) et le domaine de propagation (en 2D) est la bande infinie :

$$\Omega = \left\{(x,z) \in R^2 \;/\; 0 < z < h = \frac{\pi}{2}\;\right\}$$

Ce domaine est représenté par la figure 2.1 ci-dessous. La fonction u représente la pression.

La source f est donnée telle que $f \in L_0^2(\Omega)$ (a support compact)

La fonction c tient compte de la stratification du milieu : c'est une fonction réelle strictement positive et mesurable de x et z qui satisfait les conditions suivantes :

c est borné avec $0 < c_{min} \leq c(x,z) \leq c_{max} < \infty$, et $c(x,z) = c_{\pm}(z)$ quand $|x| > M$, où M est une constante réelle positive. Si $c(x,z) = c_{\pm}(z) = c_0(z)$ presque partout dans Ω, le milieu est dit non perturbé et l'opérateur correspondant sera noté $A_0 = A_{\pm}$.

Les ondes doivent vérifiées les conditions de :

$$\begin{cases} \text{Dirichlet homogène sur } \sum_h = \{(x,h)\} \\ \text{Neumann homogène sur } \sum_0 = \{(x,0)\} \end{cases} \tag{2.2}$$

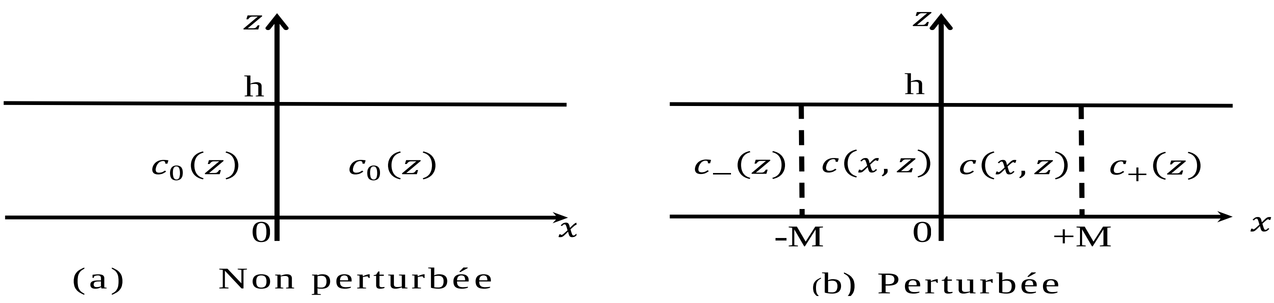

Fig. 2.1. Domaine pour une bande

Dans notre étude nous nous intéressons au cas où la source $f(x,z,t)$ est une excitation harmonique en temps, c'est-à-dire :

$$f(x,z,t) = f(x,z)e^{-i\omega t} \quad \omega > 0 \tag{2.3}$$

On considère des sources harmoniques (2.3), il est naturel de chercher des solutions de (2.1) qui soient-elles mêmes harmoniques c'est-à-dire de la forme :

$$u(x,z,t) = u(x,z)e^{-i\omega t} \tag{2.4}$$

Si on injecte (2.4) dans l'équation (2.1), on voit que la fonction $u(x,z)$ doit être solution de l'équation :

$$-div(c^2(x,z)\nabla u) - \omega^2 u = f \tag{2.5}$$

On remarque que :

Dans (2.5), la dépendance en fonction du temps a été remplacée par l'introduction du paramètre $\omega > 0$ (qui lui impose la dépendance en temps). Notons que l'on peut résoudre (2.5) à ω fixé, alors que cela n'avait pas de sens de résoudre (2.1) à t fixé.

2.2. Formulation mathématique

Dans ce qui suit, $c(x,z)$ dépend uniquement de z, alors : $c(x,z) = c_0(z)$ (presque partout), ainsi le milieu est dit non perturbé et l'opérateur corespondant sera noté par A_0. Cet opérateur a été étudié dans [8] en utilisant la transformé de Fourier en x.

Nous allons reprendre l'équation (2.5) avec $c(x,z) = c_0(z)$ et $\omega^2 = \mu$, on aura :

$$-div(c_0^2(z)\nabla u) - \mu u = f \tag{2.6}$$

Pour mieux analyser (2.6) nous allons situer le problème dans le cadre fonctionnel L^2.

Nous considérons l'espace de Hilbert : $H = L^2(\Omega, \mathbb{C})$.

Muni du produit scalaire usuel : $(u,v) = \int_\Omega u\bar{v}\, dxdz$

On note par : $\|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$ la norme associée.

Posons : $H_\Omega = \{v \in H^1(\Omega)/v(x,h) = 0\}$, où $H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \,/\, \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial z} \in L^2(\Omega)\right\}$ désigne l'espace de Sobolev.

Introduisons l'opérateur $\mathcal{A}_0 = -div(c_0^2\nabla)$ modélisant la propagation dans Ω ; il est précisément défini par la forme sesquilinéaire hermitienne $a_0(.,.)$ sur $(H_\Omega)^2$ par :

Pour tout $u \in H_\Omega, \mathcal{A}_0 u$ appartient à l'espace antidual H_Ω', avec :

$$\forall v \in H_\Omega, \langle \mathcal{A}_0 u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla \bar{v} c_0^2\,(z) dxdz \equiv a_0(u,v)$$

Remarque 2.1. *En général, $\mathcal{A}_0$ sera considéré comme un opérateur symétrique de H_Ω^s dans $(H_\Omega^{-s})'$, où le paramètre « s » signifie que la mesure $dxdz$ dans Ω est remplacée par : $(1+x^2)^s dxdz$; de cette façon nous posons :*

$$L^{2,s}(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega);\quad (1+x^2)^{\frac{s}{2}}\, u(x,z) \in L^2(\Omega)\right\}$$

$$H^{1,s}(\Omega) = \left\{u \in L^{2,s}(\Omega); \nabla\, u \in \left(L^{2,s}(\Omega)\right)^2\right\}$$

Ces deux espaces sont associés aux normes hilbertiennes suivantes :

$$\|u\|_{L^{2,s}(\Omega)} = \left\|(1+x^2)^{s/2}u\right\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega (1+x^2)^s|u(x,z)|^2 dxdz\right)^{1/2}.$$

$$\|u\|_{H^{1,s}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^{2,s}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^{2,s}(\Omega)}\right)^{1/2}$$

Nous sommes concernés par l'opérateur non borné A_0, défini comme suit :

$$\left|\begin{array}{l} D(A_0) = \left\{u \in H_\Omega;\ A_0 u \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial z}\big|_{z=0} = 0\right\} \\ \quad A_0 u = \mathcal{A}_0 u \equiv -div(c_0^2 \nabla u)\ si\ u \in D(A_0) \end{array}\right. \tag{2.7}$$

Ainsi, pour chaque $u \in D(A_0)$, $\forall v \in H_\Omega$, on a :

$$(A_0 u, v) = a_0(u,v)$$

Où (. , .) est le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

Généralement $\|.\|_{s,X}$ sera notée comme la norme usuelle dans l'espace de Sobolev $H^s(X), où\ X \subset \mathbb{R}^n$.

Lemme 2.1. *La forme sesquilinéaire $a_0(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla \bar{v} c_0^2\,(z) dx\, dz$ vérifie :*

$$\forall u \in H_\Omega, \quad c_{min}^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \, dz \leq a_0(u,u) \leq c_{max}^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \, dz$$

Par conséquent, la forme sesquilinéaire $a_0(.,.)$ est positive, continue sur $H_\Omega \times H_\Omega$ et coercive.

Preuve. L'encadrement vient du fait que $0 < c_{min} \leq c(x,z) \leq c_{max} < \infty$.

La coercivité résulte de l'inégalité de Poincaré :

$$\int_0^h |p'(z)|^2 dz \geq \int_0^h |p(z)|^2 dz,$$

vérifiée pour tout $p \in H^1(]0,h[)$, tel que $p(h) = 0$.

En effet :

$$a_0(u,u) \geq c_{min}^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \, dz \geq c_{min}^2 \, \|u\|^2$$

D'où la coercivité. ■

Corollaire 2.1. *L'opérateur A_0 défini par (2.7) est autoadjoint positif sur $L^2(\Omega)$ et son spectre $\sigma(A_0)$ est inclus dans l'intervalle $[c_{min}^2, +\infty[$.*

Preuve. L'opérateur A_0 est symétrique car A_0 est hermitienne. Il sera autoadjoint s'il est surjectif. La surjectivité découle du lemme de Lax-Milgram.

De plus, A_0 est positif car : $(A_0 u, u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, c_0^2(z) dx \, dz = a_0(u,u) > 0$.

L'inclusion découle du lemme 2.1. ■

2.3 Analyse spectrale de l'opérateur A_0

D'après le corollaire 2.1, l'opérateur $A_0 = -div(c_0^2(z)\nabla)$ est autoadjoint positif ; de plus son spectre est inclus dans l'intervalle $[c_{min}^2, +\infty[$.

2.3.1. Opérateur réduit $\mathbf{c_0^2 Q_0}$

Considérons l'opérateur transverse (puisqu'il prend en compte la coordonnée transverse z) $c_0^2 Q_0$ tel que :

$$Q_0 = -\frac{1}{c_0^2}\frac{d}{dz}\left(c_0^2\frac{d}{dz}.\right)$$

Cet opérateur est autoadjoint et positif sur $L^2(]0,h[)$ de domaine :

$$D(c_0^2 Q_0) = \{u \in H^1(]0,h[); c_0^2 Q_0 u \in L^2(]0,h[), c_0^2 u'(0) = u(h) = 0\}$$

il est à résolvante compacte, alors son spectre est discret et constitué d'une suite de valeurs propres positives : $S_1 < S_2 < \cdots < S_n$ ... appelés seuils.

On considère, pour $\mu \in \mathbb{R}$, l'opérateur Q défini par :

$$\left|\begin{array}{l} D(Q) = \{u \in H^1(]0,h[); Qu \in L^2(]0,h[), c_0^2 u'(0) = u(h) = 0\} \subset L^2(]0,h[; c_0^2(z)dz) \\ \quad Q = Q_0 - \dfrac{\mu}{c_0^2}. \end{array}\right. \tag{2.8}$$

Le domaine $D(Q)$ ne dépend pas de μ.

Proposition 2.1. *Q est un opérateur fermé, de domaine dense dans $L^2(]0,h[)$ et autoadjoint pour le produit scalaire $(c_0^2.,.)_{L^2(]0,h[)}$.*

Preuve. Remarquons que le problème suivant « étant donné $f \in L^2(]0,h[)$, trouver $u \in D(Q)$ tel que $Qu + ((c_0^2)^{-1}\mu + 1)u = f$ » admet une unique solution.

En effet, écrivons la formulation variationnelle de ce problème. Pour cela, nous multiplions par $c_0^2\bar{v}$ et par l'application de la formule de Green, on obtient le problème suivant :

Trouver $u \in H^1(]0,h[)$ tel que pour tout $v \in H^1(]0,h[)$

$$\int_0^h (c_0^2 u'\overline{v'} + c_0^2 u\bar{v})dz = \int_0^h c_0^2 f\bar{v}dz$$

- Le premier membre de l'équation précédente définit une forme sesquilinéaire continue et coercive qu'on note $q(.,.)$. Le théorème de Lax-Milgram permet donc de montrer qu'il y a existence et unicité au problème variationnel. Ensuite, par un argument de dualité la solution faible est une solution forte c.à.d. u est bien dans le domaine de Q. Donc l'opérateur $Q + ((c_0^2)^{-1}\mu + 1)$ est inversible, en particulier d'image égale à $L^2(]0,h[)$ (surjectif).
- L'opérateur Q est symétrique car :

$$(c_0^2 Qu, v)_{L^2(]0,h[)} = \int_0^h (c_0^2 u'\overline{v'} - \mu u\bar{v})dz = (u, c_0^2 Qv)_{L^2(]0,h[)} \quad , \quad \forall u, v \in D(Q)$$

Alors on conclut que $D(Q)$ est dense dans $L^2(]0,h[)$ et que Q est autoadjoint.

■

On déduit en particulier que le spectre résiduel de Q est vide et que le spectre de Q est réel. Plus précisément on a :

Lemme 2.2. *L'opérateur Q est à résolvante compacte.*

Preuve. Notons que $-((c_0^2)^{-1}\mu + 1)$ appartient à l'ensemble résolvant de Q. Il suffit donc de montrer que $(Q + (c_0^2)^{-1}\mu + 1)^{-1}$ est un opérateur compact.

Soit (f_n) une suite bornée de $L^2(]0,h[)$.

Posons :

$u_n = (Q + (c_0^2)^{-1}\mu + 1)^{-1} f_n$, de l'égalité $(Q + (c_0^2)^{-1}\mu + 1)u_n = f_n$ découle l'identité:

$$q(u_n, u_n) = (f_n, u_n)$$

Ce qui implique que :

$$c_{min}^2 \|u_n\|_{H^1(]0,h[)}^2 \leq q(u_n, u_n) \leq \|f_n\|_{L^2(]0,h[)} \|u_n\|_{H^1(]0,h[)}$$

Donc :$\|u_n\|_{H^1(]0,h[)} \leq (c_{min}^2)^{-1} \|f_n\|_{L^2(]0,h[)}$

Par conséquent, la suite (f_n) étant bornée dans $L^2(]0,h[)$, la suite (u_n) est bornée dans $H^1(]0,h[)$. D'après le théorème de Rellich-Kondrashov [4], l'injection de $H^1(]0,h[)$ dans

$L^2(]0,h[)$ est compacte car $(]0,h[)$ est borné. On peut donc extraire de (u_n) une sous suite convergente dans $L^2(]0,h[)$ et c'est ce qu'il fallait démontrer. ■

Théorème 2.1. *Le spectre de Q est purement ponctuel et constitué par une suite $\{K_n(\mu)\}_{n\geq 1}$:*

$$-\mu(c_{min}^2)^{-1} \leq K_1(\mu) < K_2(\mu) \ldots < K_n(\mu) \ldots < +\infty \quad \text{tel que} \quad \lim_{n\to+\infty} K_n(\mu) = +\infty,$$

chaque valeur propre étant répétée autant de fois que son ordre de multiplicité. De plus il existe une base hilbertienne de $L^2(]0,h[)$ constituée de vecteurs propres $\{U_n(\mu,.)\}_{n\geq 1}$ qui satisfait

$$\begin{cases} QU_n(\mu;z) = K_n(\mu)U_n(\mu;z), \qquad n \geq 1, \\ U_n(\mu;.) \in D(Q), \\ \|U_n(\mu;.)\|_{L^2(]0,h[)} = \left(\int_0^h |U_n(\mu;.)|^2 dz\right)^{1/2} = 1 \end{cases}$$

Remarque 2.2. *L'appartenance de u dans $D(Q)$ est caractérisée par :*

$$u \in D(Q) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} K_n(\mu)\left(u, U_n(\mu,.)\right)_{L^2(]0,h[)} U_n(\mu,.) \in L^2(]0,h[).$$

(Dans ce qui suit l'indice « μ » sera omis dans la notation pour simplifier).

Proposition 2.2. *Soit $\left(U_n(z)\right)_{n\geq 1}$ une base orthonormée de $L^2(]0,h[)$. On peut caractériser l'espace $L^2(\Omega)$ par :*

$$u \in L^2(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} u(x,z) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)U_n(z) \quad avec\ u_n(x) = (u(x,.),U_n)_{L^2(]0,h[;dz)} \\ \qquad\qquad et\ \|u\|^2_{L^2(\Omega;dxdz)} = \sum_{n\geq 1} \|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R};dx)}, \end{cases}$$

la convergence de la série $\left(u_n(x)U_n(z)\right)_{n\geq 1}$ ayant lieu dans $L^2(\Omega; dxdz)$.

La séparation des variables x et z dans l'espace $H = L^{2,s}(\Omega)$ permet de ramener l'analyse spectrale de l'opérateur A_0 à celle d'une suite d'opérateurs de Sturm-Liouville A_n sur $L^{2,s}(\mathbb{R}\,; dx)$. En identifiant l'espace de Hilbert $L^{2,s}(\Omega; dxdz)$ au produit tensoriel hilbertien $L^{2,s}(\mathbb{R}\,; dx) \otimes L^{2,s}(]0,h[; c_0^2(z)dz)$.

Proposition 2.3. *Tout $u \in L^{2,s}(\Omega)$ admet la représentation suivante :*

$$u(x,z) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)\, U_n(z) \tag{2.9}$$

Cette somme converge fortement dans $L^{2,s}(\Omega)$. Pour $u \in H_\Omega^s$, les deux sommes suivantes sont convergentes dans $\mathrm{L}^{2,s}(\Omega)$:

$$\sum_{n\geq 1} u_n'(x)\, U_n(z) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \sum_{n\geq 1} u_n(x)\, U_n'(z) = \frac{\partial u}{\partial z} \tag{2.10}$$

Proposition 2.4. *Quand $u \in H_\Omega^{-s}$ tel que $(A_0 - \mu)u \in L^{2,s}(\Omega)$, alors la somme suivante converge fortement dans $L^{2,s}(\Omega)$:*

$$\sum_{n\geq 1} \left(-\frac{d^2 u_n}{dx^2} + K_n u_n \right) c_0^2 U_n = (A_0 - \mu)u \tag{2.11}$$

Preuve. Nous allons prouver cette dernière propriété pour $s = 0$ et de là on peut conclure pour le cas général.

On a : $(A_0 - \mu)u(x,z) = -div\big(c_0^2(z)\nabla u(x,z)\big) - \mu u(x,z)$

$$= -div\left(c_0^2(z)\frac{\partial u}{\partial x}u(x,z), c_0^2(z)\frac{\partial u}{\partial z}u(x,z) \right) - \mu u(x,z)$$

$$= -c_0^2(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{u}(x,z) - \frac{\partial}{\partial z}\left(c_0^2(z)\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{u}(x,z) \right) - \mu \mathrm{u}(x,z)$$

Comme
$$\begin{cases} \mathrm{u}(x,z) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)\, U_n(z) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,z) = \sum_{n\geq 1} u_n''(x)\, U_n(z) \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}\left(c_0^2(z)\dfrac{\partial u}{\partial z} \right) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)\dfrac{d}{dz}c_0^2(z)\dfrac{d}{dz}U_n(z) \end{cases}$$

On obtient

$$\boldsymbol{A_0 u(x,z) - \mu u(x,z) = c_0^2\left[\left(-\sum_{n\geq 1} u_n''(x)\, U_n(z)\right) + \sum_{n\geq 1}\left(-\frac{1}{c_0^2}\left(\frac{d}{dz}c_0^2\frac{d}{dz}U_n(z)\right)u_n(x) - \frac{\mu}{c_0^2}u_n(x)U_n(z)\right)\right]}$$

$$= c_0^2 \sum_{n\geq 1} -u_n''(x)\, U_n(z) + \sum_{n\geq 1} QU_n(z)u_n(x)$$

$$= c_0^2 \sum_{n\geq 1}\big(-u_n''(x) + K_n u_n(x)\big)U_n(z)$$

Alors :

$$A_0 u - \mu u = \sum_{n\geq 1}(-u_n'' + K_n u_n)c_0^2 u_n \qquad \blacksquare$$

Ainsi :

$$(A_0 - \mu)u = \sum_{n\geq 1} A_n c_0^2 u_n$$

où $A_n u_n = -u_n'' + K_n u_n$, de domaine : $D(A_n) = \{u \in H^1(\mathbb{R}) \,/ A_n u \in L^2(\mathbb{R})\}$

$(A_n)_{n\geq 1}$ est une famille d'opérateurs de Sturm-Liouville.

Maintenant, on peut utiliser ces propriétés pour résoudre l'équation : $A_0 u - \mu u = f$.

Où f est donnée dans certain espace $L^{2,s}(\Omega), s \geq 0$ et $u \in H_\Omega^{-s}$.

Ecrivons

$$c_0^{-2} f \equiv g = \sum_{n\geq 1} g_n(x)\, U_n(z).$$

On obtient le système infini d'équations linéaires suivant avec u_n inconnu et $u_n \in H^{2,-s}(\mathbb{R})$.

$$-u_n'' + K_n u_n = g_n \in L^{2,s}(\mathbb{R}) \text{ pour tout } n \geq 1. \qquad (2.12)$$

- $g_n \in L^{2,s}(\mathbb{R})$, car :

$$\|g\|_{L^{2,s}(\Omega)}^2 = \sum_{n\geq 1} \|g_n\|_{L^{2,s}(\mathbb{R})}^2 < \infty$$

Proposition 2.5.

1- *L'opérateur A_0 n'a pas de valeurs propres.*

2- *Le spectre de A_0 se réduit au spectre essentiel $\sigma_{ess}(A_0) = [S_1(A_0), +\infty[$*

où S_1 est la première valeur propre de l'opérateur $c_0^2 Q_0$.

Preuve.

1- μ valeur propre de A_0:

$$A_0 u - \mu u = 0 \;\Rightarrow\; -u_n'' + K_n u_n = 0 \qquad \forall n \geq 1$$

Les solutions de : $-u_n'' + K_n u_n = 0$ est une combinaison linéaire de $e^{\pm i k_n x}$, elles n'appartiennent pas à $L^2(\mathbb{R})$ car : $e^{ik_n x} \notin L^2(\mathbb{R})$, donc $u_n = 0 \;\; \forall n$. Par conséquent $u = 0$.

Il n'y a pas de solution $u \in L^2(\Omega)$ de (2.12), sauf $u = 0$.

2- $\sigma_p = \emptyset \Longrightarrow \sigma = \sigma_{ess}$. La borne inférieure de σ_{ess} découle du principe de Min-Max. ■

2.3.2. Solution de l'équation (2.12)

Si $K_n = 0$ est une valeur propre de Q, μ est appelée un seuil de A_0 qui correspond à une valeur propre de $c_0^2 Q_0$ [8]. A$_0$ change de multiplicité lorsque μ passe par μ_n.

En effet, on a : $QU_n(z) = K_n U_n(z)$.

Si $K_n = 0$, alors $QU_n(z) = 0$. Ce qui donne : $c_0^2 Q_0 U_n = \mu U_n$.

Notons par $S(A_0)$ l'ensemble des seuils de A_0 qui est constitué d'une suite strictement croissante $\{S_n(A_0)\}_{n\geq 1}$: on a $S(A_0) \subset [c_{min}^2, +\infty]$.

Si $K_n \neq 0$.

On pose $N(\mu) = max\ (\{0\} \cup \{n \geq 1; K_n \leq 0\})$, alors,

$K_n \leq 0$ ssi $1 \leq n \leq N(\mu)$, et on pose : $k_n = \sqrt{-K_n}$ quand $n \leq N(\mu)$

et $k_n = i\sqrt{K_n} = i\theta_n$ quand $n > N(\mu)$.

Proposition 2.6. *La solution de l'équation (2.12) est donnée par :*

$$u_n(x) = \begin{cases} (-2ik_n)^{-1} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_n(x') e^{ik_n|x-x'|} dx' + a_n e^{ik_n x} + b_n e^{-ik_n x} & quand\ n \leq N(\mu) \\ (2\theta_n)^{-1} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_n(x') e^{-\theta_n|x-x'|} dx' + a_n e^{-\theta_n x} + b_n e^{\theta_n x} & quand\ n > N(\mu) \end{cases} \tag{2.13}$$

Preuve.

$$-u_n''(x) + K_n u_n(x) = g_n(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_n \in L^{2,s}(\mathbb{R}).$$

Pour résoudre cette équation on utilise la méthode de la variation des constantes arbitraires.

$$u_n(x) = u_p(x) + u_g(x).$$

u_g : est la solution de l'équation $-u_n^{''}(x) + K_n u_n(x) = 0$ et qui est la combinaison linéaire de $e^{ik_n x}$ et $e^{-ik_n x}$, $K_n = -k_n^2$.

Donc : $u_g(x) = a_n e^{ik_n x} + b_n e^{-ik_n x}$.

Calculons u_p :

La résolution du système : $\begin{cases} a_n^{'}(x)e^{ik_n x} + b_n^{'}(x)e^{-ik_n x} = 0 \\ a_n^{'}(x)ik_n e^{ik_n x} + b_n^{'}(x)(-ik_n)e^{-ik_n x} = g_n(x) \end{cases}$

nous donne :

$$a_n(x) = -\int_{\mathbb{R}} (-2ik_n)^{-1} e^{-ik_n x'} g_n(x')dx' \;\; et \;\; b_n(x) = \int_{\mathbb{R}} (-2ik_n)^{-1} e^{-ik_n x'} g_n(x')dx'$$

Ainsi, $$u_p(x) = (-2ik_n)^{-1} \int_{\mathbb{R}} g_n(x')e^{ik_n|x-x'|}dx'$$

Enfin :

$$u_n(x) = (-2ik_n)^{-1} \int_{\mathbb{R}} g_n(x')e^{ik_n|x-x'|}dx^{'} + a_n e^{ik_n x} + b_n e^{-ik_n x} \qquad si\ n \leq N(\mu)$$

De la même façon nous trouvons que :

$$u_n(x) = (2\theta_n)^{-1} \int_{\mathbb{R}} g_n(x')e^{-\theta_n|x-x'|}dx^{'} + a_n e^{-\theta_n x} + b_n e^{\theta_n x} \qquad si\ n > N(\mu)$$

D'où la solution de l'équation (2.12). ■

On cherche les solutions « sortantes », dans le sens ou $u(x,z)$ aura un comportement précis quand $|x|$ est grand. C'est exactement le sens donné par le P.A.L prouvé dans [8] partie I (où la transformé de Fourier en x est utilisée).

2.4. Principe d'Absorption Limite (P.A.L)

Lorsque $\zeta \in \mathbb{C}/\sigma(A_0)$, la résolvante $R_{A_0}(\zeta) = (\mathrm{A}_0 - \zeta\mathrm{I})^{-1}$ est un opérateur borné de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. L'application $\left(\zeta \to R_{A_0}(\zeta)\right)$ est analytique sur $\mathbb{C}/\sigma(A_0)$, à valeurs dans $\mathcal{L}\left(L^2(\Omega), L^2(\Omega)\right)$, mais elle n'a pas de prolongement à $\sigma(A_0)$ car la norme de $R_{A_0}(\zeta)$ est en $|Im(\zeta)|^{-1}$ lorsque ζ tend vers $\mu \in \sigma(A_0)$.

En se plaçant dans un sous-espace de $L^2(\Omega)$, où la décroissance à l'infini est plus forte, on peut « absorber » la modification du comportement de $R_{A_0}(\zeta)f$ lorsque ζ tend vers $\mu \in \sigma(A_0)$: c'est le principe d'absorption limite qui permet de donner un sens à la résolvante en des points μ du spectre de A_0. Il consiste à estimer la résolvante $R_{A_0}(\zeta)$ de manière uniforme au voisinage de $\mu \in \sigma(A_0)$ et à montrer l'existence d'un opérateur limite quand ζ tend vers μ.

Pour établir un principe d'absorption limite, on introduit les espaces de Hilbert $L^{2,s}(\Omega)$, s réel, déjà défini dans la sous section (2.1).

Alors, pour résoudre l'équation $A_0 u - \mu u = f$, dans $L^{2,s}(\Omega)$, prenons le cas où $\mu \in \sigma(A_0)$ et $\mu \notin \mathrm{S}(A_0)$.

Théorème 2.2. (P.A.L) *Soit* $s > \frac{1}{2}$ *et* $\mu \in \mathbb{R} - S(A_0)$. *Alors, quand* $\zeta \to \mu$ *avec* $\pm\Im m(\zeta) > 0$, *l'opérateur* $(A_0 - \zeta)^{-1}$ *converge dans* $\mathcal{L}(L^{2,s}(\Omega), H_\Omega^{-s})$ *(avec la topologie des normes) à une certaine limite notée* $R_{A_0}^{\pm}(\mu)$.

Ici, la solution sortante est $u = R_{A_0}^{+}(\mu)f \in H_\Omega^{-s}$, sous la condition $s > \frac{1}{2}$.

De manière équivalente, ça nécessite $a_n = b_n = 0$, pour tout n.

Remarque 2.3. *La formule (2.13) nous fournit l'interprétation suivante de* $\sigma_{ess}(A_0)$. *Quand* $K_n > 0$, $u_n(x) = (2\theta_n)^{-1} \int_{\mathbb{R}} g_n(x') e^{-\theta_n |x-x'|} dx' + a_n e^{-\theta_n x} + b_n e^{\theta_n x}$ *décroît de manière exponentielle quand* $|x|$ *est grand. Alors, la différence entre* $R_{A_0}^{+}(\mu)f$ *et* $R_{A_0}^{-}(\mu)f$ *vient des* *termes indicés par* $n \leq N(\mu)$*, puisque on a* $R^{-}_{A_0}(\mu)\bar{f} = \overline{R^{+}_{A_0}(\mu)f}$ *([8] partie I). Ceci montre que quand* $n > N(\mu)$*, alors* $\mu \in \sigma_{ess}(A_0)$*, et quand* $\mu < S_1$ *alors*

$R^{\pm}_{A_0}(\mu) = (A_0 - \mu)^{-1} \in \mathcal{L}\big(L^2(\Omega)\big)$*. Ainsi,* $\sigma(A_0) = \sigma_{ess}(A_0) = [S_1, +\infty[$.

2.5. Fonctions propres généralisées

Soit $\mu \notin S(A_0)$, Supposons que $s > \frac{1}{2}$.

Les fonctions propres généralisées de A_0 sont les fonctions $\phi = \phi(x,z)$vérifiant

$$\begin{cases} A_0\phi = \mu\phi \text{ dans } H^{1,-s}(\Omega), \text{ avec } \mu \text{ convenable dans } \mathbb{R}^+ \\ \phi \text{ est localement dans } D(A_0), \\ \phi \text{ est bornée et non identiquement nulle dans } \Omega. \end{cases}$$

Comme on a défini les éléments propres K_n et $U_n(z)$ pour $n \geq 1$, les fonctions propres généralisées de l'opérateur A_0 sont données par : $\phi_n(\mu, x, z) = e^{\pm i k_n x} U_n(z)$, où $1 \leq n \leq N(\mu)$.

Introduisons le sous espace suivant de $L^{2,-s}(\Omega)$, que nous appelons l'espace propre généralisé de A_0 associé à μ (ou à $(A_0 - \mu)$)

$$\mathcal{E}_{A_0}(\mu) = \{\phi \in H^{1,-s}(\Omega) | \phi \in D(A_0)_{loc} \cap H^{1,-s}(\Omega), (A_0 - \mu)\phi = 0 \text{ dans } \ \Omega\},$$

où $D(A_0)_{loc}$ est l'ensemble des fonctions ϕ tel que pour tout $\psi(x) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ $on\ a$ $\psi(x).\phi(x,z) \in D(A_0)$. La résolution du système homogène associé à (2.12) montre que $\mathcal{E}_{A_0}(\mu)$ est généré par des fonctions de la forme : $R^{+}_{A_0}(\mu)f - R^{-}_{A_0}(\mu)f$, où f est dans $L^{2,s}(\Omega)$ et plus précisément pour n'importe quel $\mu \in]S_N, S_{N+1}[$

Nous avons :

$$\mathcal{E}_{A_0}(\mu) = \mathcal{E}^{+}_{A_0}(\mu) \oplus \mathcal{E}^{-}_{A_0}(\mu) \tag{2.14}$$

Où $\mathcal{E}^{\pm}_{A_0}(\mu)$ est l'espace de dimension finie engendré par les bases :

$\mathcal{B}a(\mu)^{\pm} = \{exp(\pm i k_n x) U_n(z) /\ 1 \leq n \leq N\}$. Ainsi, $\mathcal{E}_{A_0}(\mu)$ ne dépend pas de $s > \frac{1}{2}$ et il est de dimension $2N$ (voir que $N(\mu) = N$).

Dans [3], il a été prouvé que la famille $\{\phi_n(\mu, x, z), \mu \geq S_1, 1 \leq n \leq N(\mu)\}$ est un système complet de fonctions propres généralisées.

Théorème 2.3. *Soit K un sous ensemble compact de $\overline{\mathbb{C}_+}$. Si $K \cap S(A_0) = \emptyset$, considérons $R^+_{A_0}(\zeta)$ appartenant à $\mathcal{L}(L^{2,s}, H^{-s}_{\Omega})$ avec un paramètre arbitraire $s > \frac{1}{2}$, alors, l'application $R^+_{A_0}(.)$ est holderienne continue sur K [20].*

2.6. Fonction de Green

Il s'agit de calculer le noyau G_0 de la résolvante $R_{A_0}(\mu) = (A_0 - \mu)^{-1}$. L'équation intégrale qui définie G_0 est :

$$(A_0 - \mu)^{-1} f(x, z) = \int_{\Omega} G_0(x, z, x', z') f(x', z') dx' dz'$$

Où : $\mu \in \mathbb{C}, (x, z) \in \Omega \ et \ f$ dans $L^2(\Omega)$, l'espace de définition de la résolvante.

D'après l'étude du paragraphe 2.3.1, on a :

$$(A_0 - \mu) u = \sum_{n \geq 1} A_n \, c_0^2 U_n$$

Pour calculer la fonction de Green de l'opérateur $(A_0 - \mu)^{-1}$, il suffit de connaitre celle de l'opérateur A_n notée G_n.

Pour calculer la fonction de Green de l'opérateur A_n, on résout l'équation homogène $-u_n'' + K_n u_n = 0$ pour tout $n \geq 1$

$$-u_n'' + K_n u_n = 0 \Leftrightarrow u_n(x) = \begin{cases} a_n e^{-ik_n x} + b_n e^{ik_n x} & K_n \leq 0 \\ a_n e^{-\theta_n x} + b_n e^{\theta_n x} & K_n > 0 \end{cases}$$

$$\phi_1 = e^{-ik_n x}, \qquad \phi_2 = e^{ik_n x}$$

$$G_0(x, x') = \begin{cases} \dfrac{\phi_1(x')\phi_2(x)}{[\phi_1, \phi_2]} & si \ \ x \geq x' \\ \dfrac{\phi_1(x)\phi_2(x')}{[\phi_1, \phi_2]} & si \ \ x \leq x' \end{cases}$$

où : $[\phi_1, \phi_2]$ est le wronskien défini par :

$$[\phi_1, \phi_2] = \phi_1'(x)\phi_2(x) - \phi_2'(x)\phi_1(x)$$

$$= -ik_n e^{ik_n x} e^{-ik_n x} - ik_n e^{ik_n x} e^{-ik_n x}$$

$$= -2ik_n$$

$$G_n(x, x') = \begin{cases} \dfrac{e^{-ik_n x'} . e^{ik_n x}}{-2ik_n} & si \;\; x \geq x' \\ \dfrac{e^{ik_n x'} . e^{-ik_n x}}{-2ik_n} & si \;\; x \leq x' \end{cases}$$

$$G_n(x, x') = \frac{e^{ik_n |x - x'|}}{-2ik_n}$$

Et
$$G_0(x, z, x', z') = \sum_{n \geq 1} G_n(x, x') U_n(z) U_n(z')$$

ce qui donne
$$G_0(x, z, x', z') = -\sum_{n \geq 1} \frac{e^{ik_n |x - x'|}}{2ik_n} U_n(z) U_n(z')$$

Cela nous permet de déduire la formule de la résolvante suivante :

$$R_{A_0}(\mu) = -\int_{\Omega} \sum_{n \geq 1} \frac{e^{ik_n |x - x'|}}{2ik_n} U_n(z) U_n(z') \, f(x', z') dx' dz'$$

2.6.1. Application numérique

Nous allons donner une représentation graphique (isovaleurs) dans le cas d'un milieu homogène (une seule stratification) de la fonction de Green G_0, on choisit pour base de $L^2(]0,h[)$, une base orthonormée de vecteurs propres pour l'opérateur $A_2 = -\frac{d^2}{dz^2}$, de domaine $D(A_2) = \{v \in H^1(]0,h[) \ / \ \ v'' \in L^2(]0,h[) \ et \ v'(0) = v(h) = 0\}$.

Cet opérateur est autoadjoint dans $L^2(]0,h[)$ et à inverse compact, une telle base existe et le calcul des fonctions et des valeurs propres donne :

$$\begin{cases} U_n(z) = \sqrt{\frac{2}{h}}\, sin[K_n(h-z)], \qquad n \in \mathbb{N}^* \\ -U_n'' = K_n^2 U_n \quad avec\ K_n = \frac{1}{h}\left(\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi\right) \end{cases}$$

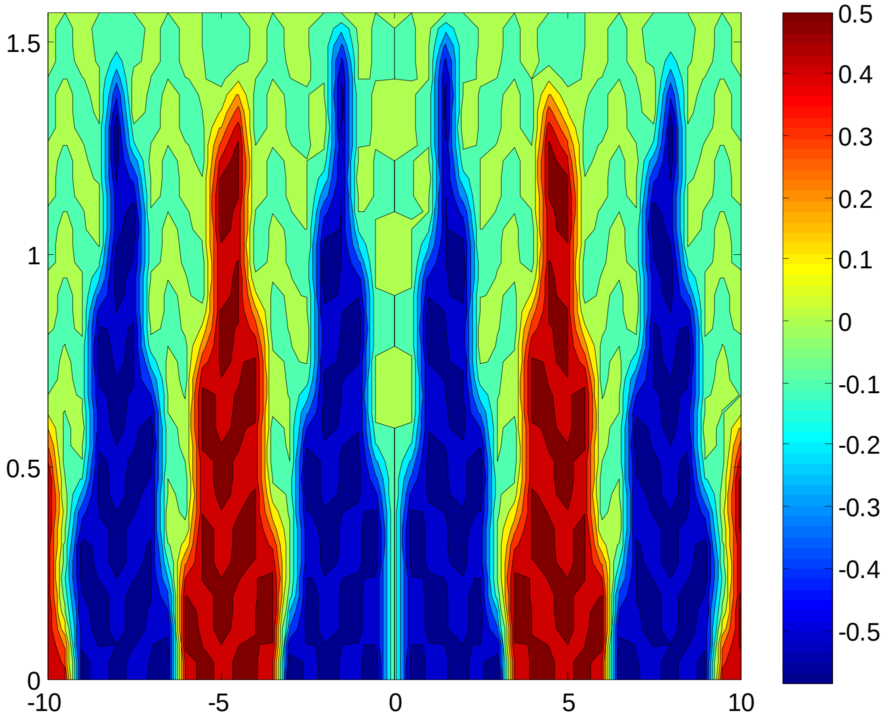

Figure 2.2. Représentation graphique de G_0 : (lignes de niveaux)

2.7. Construction des opérateurs de Dirichlet-Neumann

Dans cette partie nous allons définir et analyser une famille d'opérateurs $\{T(\mu)\}_\mu$ (qui servira par la suite), nommée opérateurs de transmissions associés à une stratification horizontale.

Nous sommes intéressés par la propagation acoustique dans la demi bande $\Omega^+ =]0, +\infty[\times]0, h[$. On note par $\sum = \{0\} \times]0, h[$, l'interface entre $\Omega^- =]-\infty, 0[\times]0, h[$ *et* Ω^+.

2.7.1. Etude de la propagation acoustique dans une demi-bande infinie

On rappelle d'abord les théorèmes de traces dans le cadre classique des espaces de fonctions différentiables de $C^s(\Omega)$ et $C^s(\Sigma)$.

Pour $s \geq 0$, la restriction de $u \in C^s(\overline{\Omega})$ sur le bord Σ est appelée la trace de u sur Σ. Elle sera notée par $\gamma(u) \in C^s(\Sigma)$.

Ces résultats de traces sont étendus dans le cadre des espaces de Sobolev $H^s(\Omega)$ et $H^s(\Sigma)$.

Ainsi étant donné un réel $s \geq 1/2$, l'espace $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans l'espace $H^s(\Omega)$ et l'application trace sur Σ de $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ dans $C_0^\infty(\Sigma)$ se prolonge en une application linéaire continue et surjective de $H^s(\Omega)$ sur $H^{s-1/2}(\Sigma)$, notée γ ce qui définit la trace d'une fonction $u \in H^s(\Omega)$ avec $s > 1/2$ [9].

Définition 2.1. *Fixons $\mu \in \mathbb{R}$ et mettons :*

$$\widetilde{H} := \left\{ \varphi = \sum_{n \geq 1} \varphi_n U_n\,(z); \sum_{n \geq 1} |k_n \varphi_n^2| < +\infty \right\}$$

$$(\varphi, \psi)_\Sigma := \sum_{n \geq 1} (1 + |k_n|)\, \varphi_n \overline{\psi_n}$$

$\widetilde{H}$ associé au produit scalaire $(.,.)_\Sigma$ est un espace de Hilbert, qui est dense dans $L^2(\Sigma)$.

Quand $L^2(\Sigma)$ et son espace anti dual sont identifiés, l'espace topologique anti dual de $\widetilde{H}$ peut être identifié avec l'espace de Hilbert suivant :

$$\widetilde{H}' := \left\{ g = \sum_{n\geq 1} g_n U_n\,(z); \sum_{n\geq 1} |g_n^2|/(1+|k_n|) < +\infty \right\}$$

Notons par H_Ω^+ l'espace de $u \in H^1(\Omega^+)$ tel que $u(x,h) = 0$, on a :

Théorème 2.4. *L'opérateur de trace sur Σ noté γ, est une application continue de H_Ω^+ dans $\widetilde{H}$.*

De plus, tout $u \in H_\Omega^+$ a la représentation $u(x,z) = \sum_{n\geq 1} u_n(x) U_n\,(z)$,

où $\forall n, u_n \in H^1(]0,+\infty[)$, et finalement :

$$\gamma u(z) = \sum_{n\geq 1} u_n(0) U_n(z) \tag{2.15}$$

Preuve. En fait, comme conséquence des égalités (2.10), les deux quantités équivalentes

$$\sum_{n\geq 1} \left\{ \|u_n\|_{1,\mathbb{R}_+}^2 + |K_n| \|u_n\|_{0,\mathbb{R}_+}^2 \right\} \; et \; \sum_{n\geq 1} \left\{ \|u_n'\|_{0,\mathbb{R}_+}^2 + (1+|k_n|)^2 \|u_n\|_{0,\mathbb{R}_+}^2 \right\}$$

sont finies et leurs racines carrés définissent des normes dans H_Ω^+, qui sont équivalent à $\|.\|_{1,\Omega^+}$. De plus, l'égalité (2.15) est vérifiée quand u_n a un support compact quelque soit *n*, et $u_n = 0$ pour n suffisamment grand. Alors, on a :

$$\|\gamma u\|_{\widetilde{H}}^2 = \sum_{n=1}^{N} (1+|k_n|) \left| \int_0^{+\infty} 2 u_n u_n' \, dx \right| \leq \sum_{n\geq 1} \left\{ \|u_n'\|_{0,\mathbb{R}_+}^2 + (1+|k_n|)^2 \|u_n\|_{0,\mathbb{R}_+}^2 \right\}$$

Ainsi, cette inégalité peut être prolongée par densité pour tout $u \in H_\Omega^+$. Ce qui prouve que γ est bien défini, continue et donc l'égalité (2.15) est vraie.

■

Ce théorème implique que la définition de $\widetilde{H}$ ne dépend pas de la valeur donnée μ. En fait, $\widetilde{H}$ est un sous espace fermé de l'espace de Sobolev $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$.

Remarque 2.4. *L'application γ est continue de* $H_{\Omega,loc}^+ \equiv \left\{ \phi_{|\Omega^+}; \phi \in H_{\Omega,loc} \right\}$ *dans $\widetilde{H}$, et que l'égalité (2.15) est toujours valable (mais avec $u_n \in H_{loc}^1(\mathbb{R}_+)$).*

Proposition 2.7. *Soit* $\varphi = \sum_{n\geq 1} \varphi_n U_n\,(z) \in \widetilde{H}$; *alors la somme suivante*

$\sum_{n\geq 1} \varphi_n e^{ik_n x} U_n\,(z)$ *est bien définie dans* $H_{\Omega,loc}$, *qui est pour tout* $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

la somme $\sum_{n\geq 1} \varphi_n \psi(x) e^{ik_n x} U_n\,(z)$ *converge fortement dans* H_Ω. *Alors, on pose* :

$P(\mu)\varphi(x,z) := \sum_{n\geq 1} \varphi_n e^{ik_n x} U_n\,(z).$

De plus, comme somme de fonctions définie dans Ω^+, *cette somme converge fortement dans* $H_\Omega^{+,-s}$ *pour tout* $s > \frac{1}{2}$.

La dernière affirmation est vraie dès que la suite $\left\{\sum_{n\geq 1} \varphi_n e^{ik_n x} U_n\,(z)\right\}_{k>N(\mu)}$ converge fortement vers 0 dans H_Ω^+, tandis que $P(\mu)\varphi \in H_\Omega^{+,-s}$.

La première partie du théorème 2.4 et la remarque 2.4 prouve que $\gamma(P(\mu)\varphi) = \varphi$, et ainsi, pour tout $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\psi = 1$ dans un voisinage de x = 0, on a $\gamma(\psi P(\mu)\varphi) = \varphi$, qui complète la démonstration du théorème 2.4.

Définition 2.2. *Soit* $\zeta \in \mathbb{C}_+$. *Choisissons une fonction* $R_\varphi \in D(A_0)$ *de tel sorte que* $\gamma R_\varphi = \varphi$. *Par exemple* $R_\varphi = \psi P(\mu)\varphi$, *où* μ *est un réel, et* ψ *est comme ci-dessus. Introduisons* $f_\zeta \in L_i^2$ ($L_i^2 := \{u \in L^2(\Omega) \setminus u(-x,z) = -u(x,z)$ *presque partout dans* Ω $\}$), *qui est égale à* $(A_0 - \zeta)R_\varphi$ *dans* Ω^+, *et* $v_\zeta := (A_0 - \zeta)^{-1} f_\zeta$. *On voit que* $R_\varphi - v_\zeta \in D(A_0)$, *alors, nous mettons :*

$$P(\zeta)\varphi := R_\varphi - v_\zeta \text{ dans } \Omega^+ , \tag{2.16}$$

qui définit l'opérateur $P(\zeta) \in \mathcal{L}(\widetilde{H}, H_\Omega^+)$.

Proposition 2.7. *La définition de* $P(\zeta)$ *ne dépend pas du choix de* R_φ. *De plus, on a :* $\gamma P(\zeta)\varphi = \varphi$, *et* $(A_0 - \zeta)P(\zeta)\varphi = 0$ *dans* Ω^+.

Preuve. Premièrement, les égalités $(A_0-\zeta)P(\zeta)\varphi = 0$ dans Ω^+, et $\gamma P(\zeta)\varphi = \varphi$ sont vérifiés. Puis, soit ϕ la différence des deux fonctions définies dans (2.16), selon les deux différents choix de R_φ. Ainsi, on a $\phi \in D(A_0)$ avec $(A_0-\zeta)\phi = 0$ dans Ω^+, et $\gamma\phi = 0$. Considérons $u \in L_i^2$ définie par $u = \phi\ pour\ x > 0$. Alors, on a $u \in D(A_0)$ et $A_0 u = \zeta u$, qui implique $u = 0\ et$ ainsi $\phi = 0$ dans Ω^+. ■

La définition de $P(\zeta)$ est motivée par :

Théorème 2.5. *Quand $\zeta \to \mu \in \mathbb{R}$, alors $P(\zeta)$ converge vers $P(\mu)$ dans la topologie forte de $\mathcal{L}\left(\widetilde{H}, H^{1,-s}(\Omega^+)\right)$, où $s > 1$, et $s > \frac{1}{2}$ quand $\mu \notin S(A_0)$.*

Preuve. Nous avons encore utilisé les notations de la définition 2.2. Comme $f_\zeta \in L_i^2$ et en vue des théorèmes 2.1 et 2.2, il est suffisant de prouver que dans Ω^+, on a $P(\mu)\varphi = R_\varphi - v_\mu$ avec $v_\mu = R_{A_0}^+ f,\ \ f = lim\ f_\zeta$. Notons par q la fonction $P(\mu)\varphi - R_\varphi + v_\mu$. Alors q appartient à $D(A_0)_{loc}$ et on peut vérifier que $(A_0-\mu)q = 0$ dans Ω^+, et $\gamma q = 0$. Soit $u \in L_{i,loc}^2$ de tel sorte que $u = q$ dans Ω^+. Ainsi u appartient à $D(A_0)_{loc} \cap H_\Omega^{-s}$, et en fait $u \in \mathcal{E}_{A_0}(\mu)$. En utilisant la représentation (2.9), on a $u_n = 0$ pour tout $n > N(\mu)$, et $u_n(x) = a_n sin(k_n x)$ $pour\ 1 \le n \le N(\mu)$, ou éventuellement pour la cas $n = N(\mu)$ et $\mu = S_N(A_0)$, on doit avoir $u_N(x) = ax$. Pour R_φ choisi a support compact, on peut voir que ces conditions sont incompatibles quand $x \to +\infty$ avec le comportement asymptotique de $P(\mu)\varphi$ et v_μ (voir la formule (2.13) de v_μ), exepté quand $u = 0$, ainsi le théorème est démontré. ■

Maintenant, définissons pour $\mu \in \mathbb{R}$, l'opérateur $T(\mu)$ par :

$$T(\mu)\varphi = \sum_{n\ge 1} ik_n(\mu)\,\varphi_n c_0^2(z) U_n(\mu; z)$$

Alors, $T(\mu)$ est borné de $\widetilde{H}$ dans $\widetilde{H}'$ et inversible ssi $\mu \notin S(A_0)$.

Théorème 2.6. *Soit $\varphi \in \widetilde{H}$ et u_μ notée $P(\mu)\varphi$. Alors on a :*

$$T(\mu)\varphi = \left(c_0^2 \frac{\partial u_\mu}{\partial x}\right)_{|x=0}$$

Preuve. Rappelons que pour u appartenant à $D(A_0)_{loc}$, la distribution $g \equiv \left(c_0^2 \frac{\partial u_\mu}{\partial x}\right)_{|x=0}$ est définie sur $\widetilde{H}$ par :

$\forall v \in H_\Omega$ avec un support compact dans $\overline{\Omega^+}$,

$$\langle g, \gamma v\rangle = \int_{\Omega^+} \{A_0 u\bar{v} - c_0^2 \nabla u . \nabla\bar{v}\}\, dxdz$$

Quand $\varphi = \varphi_n U_n(.)$, le calcul direct prouve le résultat exigé. La conclusion suit, dès que $T(\mu)$ et $\left(c_0^2 \frac{\partial P(\mu)}{\partial x}\right)_{|x=0}$ sont continus de $\widetilde{H}$ dans $\widetilde{H}'$. ■

Cette propriété nous permet d'étendre la définition de $T(\zeta)$ pour $\Im m(\zeta) > 0$. En vue du théorème 2.5, on a $T(\zeta) \to T(\mu)$ quand $\zeta \to \mu \in \mathbb{R}$

Théorème 2.7. *Soit $\zeta \in \overline{\mathbb{C}_+}$; alors $T(0) - T(\zeta)$ est une perturbation relativement compacte de $T(0)$.*

Preuve. Notons (pour tout ζ) par u_ζ la fonction $P(\mu)\varphi$, et ψ comme dans la définition 2.2, on définie $v \in L_i^2$ par $v = \psi(u_\zeta - u_0)$ quand $x > 0$. On peut vérifier que $v \in D(A_0)$ quand $\gamma(u_\zeta - u_0) = 0$, et ainsi, $c_0^2 \nabla v \in \left(H^1(\Omega)\right)^2$. Plus précisément, la fonction $c_0^2 \frac{\partial v}{\partial x}$ appartient à H_Ω, qui implique que ça trace sur Σ appartient à $\widetilde{H}$ (théorème 2.4). Comme cette trace est égale à $(T(\zeta) - T(0))\varphi$, la preuve est complète dès que l'injection de $\widetilde{H}$ dans $\widetilde{H}'$ est compacte, et $T(0)$ est bornée de $\widetilde{H}$ dans $\widetilde{H}'$. ■

Théorème 2.8. *Pour tout ensemble compact $K \in \overline{\mathbb{C}_+} - S(A_0)$, $\forall s > \frac{1}{2}$, $\zeta \to P(\zeta)$ est une application Hölderienne continue de K dans $\mathcal{L}(\widetilde{H}, H_\Omega^{+,-s})$. Ça reste vraie quand K est un sous ensemble compact de $\overline{\mathbb{C}_+}$ sous la condition $s > 1$.*

Preuve. Soit f_ζ et v_ζ définis comme dans la définition 2.2 pour tout $\varphi \in \widetilde{H}$ donnée. Quand R_φ est choisie avec un support compact, alors f_ζ appartient à $L^{2,s}(\Omega)$. En vue du théorème 2.5, et si f_ζ et v_ζ sont des fonctions impaires en x, l'application , $\zeta \to v_\zeta$ est Hölderienne continue de $K \cap \mathbb{C}_+$ dans H_Ω^{-s}. Il montre que $P(.)$ est Hölderienne continue sur $K \cap \mathbb{C}_+$. La conclusion vient du théorème 2.5. ■

Corollaire 2.2. *Pour tout ensemble compact* $K \in \overline{\mathbb{C}_+}$, $\zeta \to T(\zeta)$ *est une application Hölderienne continue de* K *dans* $\mathcal{L}\left(\widetilde{H}, \widetilde{H}'\right)$.

Chapitre III
Stratification générale (Problème perturbé)

Chapitre III
Stratification générale (Problème perturbé)

3.1. Définitions et notations

Premièrement, nous allons introduire quelques notations pour définir le problème réduit (P_g) et sa formule variationnelle équivalente basée sur la forme sesquilinéaire $b(\zeta;.,.)$.

Les propriétés de $b(\zeta;.,.)$ sont directement utilisées pour obtenir quelques résultats sur les valeurs propres et d'indiquer le principe d'absorption limite (P.A.L.).

Nous revenons à la situation générale de la partie précédente. Introduisons les notations suivantes :

$\Sigma_0 =]-M, M[\times \{0\}$ $\; et \;$ $\Sigma_h =]-M, M[\times \{h\}$.

$\mathcal{O} =]-M, M[\times]0, h[\subset \Omega;$ $\quad \Omega_M^+ =]M, +\infty[\times]0, h[$ et $\Omega_M^- =]-\infty, -M[\times]0, h[$.

La vitesse des ondes dans $\mathcal{O}$ (resp. $\Omega_M^{\pm}$) est notée par c (resp. $c_{\pm}$).

L'interface Σ entre $\mathcal{O}$ et $\Omega - \mathcal{O}$ est composée de deux parties liées :

$$\Sigma = \Sigma^- \cup \Sigma^+, \text{ où } \Sigma^{\pm} = \{\pm M\} \times]0, h[.$$

A partir de maintenant l'opérateur de trace sur $\Sigma^{\pm}$ (resp. Σ) est noté $\gamma^{\pm}$ (resp. γ).

Comme dans la partie 2.7 du chapitre précédent, on introduit les espaces suivants :

$H_\Sigma^{\pm}$ correspond à $\widetilde{H}$, respectivement pour les interfaces $\Sigma^{\pm}$. $H_\Sigma^{\pm\prime}$ sont respectivement les espaces antidual. Ainsi, on pose :

$$H_\Sigma := H_\Sigma^- \times H_\Sigma^+ \text{ , et } (H_\Sigma)' := (H_\Sigma^-)' \times (H_\Sigma^+)'.$$

On défini pour $\mu \in \overline{\mathbb{C}_+}$ l'opérateur de transmission $T^+(\mu)$ associé à la vitesse $c_+(z)$ et l'interface Σ^+, comme nous l'avons fait pour l'opérateur $T(\mu)$ de la partie 2.7. Ainsi, $T^+(\mu) \in \mathcal{L}(H_\Sigma^+, (H_\Sigma^+)')$. La même chose est faite en remplaçant « + » par « - » ceci définit $T^-(\mu) \in \mathcal{L}(H_\Sigma^-, (H_\Sigma^-)')$. Plus précisément, on a :

$$T^{\pm}(\mu)\varphi^{\pm} = \left(c_{\pm}^2 \frac{\partial u^{\pm}}{\partial(\pm x)}\right)_{|x=\pm M} , \tag{3.1}$$

où

$$u^{\pm} = P_{\pm}(\mu)\varphi^{\pm} \equiv \sum_{n\geq 1} \varphi_n^{\pm} e^{ik_n^{\pm}(|x|-M)} U_n^{\pm}(z) \qquad \text{pour } \pm x > M$$

Où la notation U_n^+ (resp. U_n^-) sont plutôt de $U_{A_+,n}$ (resp. $U_{A_-,n}$); de même avec $k_n^{\pm}$ et $K_n^{\pm}$.

Pour simplifier, nous mettons :

$$T^D(\mu)\varphi = (T^-(\mu)\varphi^-, T^+(\mu)\varphi^+) \in (H_\Sigma)', \text{ où } \varphi = (\varphi^-, \varphi^+).$$

3.2. Formulation variationnelle

Introduisons l'opérateur $\mathcal{A} = -div(c^2(x,z)\nabla)$ modélisant la propagation dans Ω ; il est précisément défini par la forme sesquilinéaire $a(.,.)$ sur $(H_\Omega)^2$ par :

Pour tout $u \in H_\Omega$, $\mathcal{A}u$ appartient à l'espace antidual $H_\Omega^{'}$, avec :

$$\forall v \in H_\Omega, \langle \mathcal{A}u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla \bar{v} c^2(x,z)\, dxdz \equiv a(u,v)$$

Nous sommes concernés par l'opérateur non borné A, défini comme suit :

$$\left| \begin{array}{l} D(A) = \left\{ u \in H_\Omega; Au \in L^2(\Omega), \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \right\} \\ \qquad Au = \mathcal{A}u \equiv -div(c^2(x,z)\nabla u)\; si\; u \in D(A) \end{array} \right. \tag{3.2}$$

Ainsi, pour chaque $u \in D(A)$, $\forall v \in H_\Omega$, on a :

$$(Au, v) = a(u,v)$$

Où (. , .) est le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

Remarque 3.1. *En général, $\mathcal{A}$ sera considéré comme un opérateur symétrique de H_Ω^s dans $(H_\Omega^{-s})'$.*

Lemme 3.1. *La forme sesquilinéaire $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla \bar{v} c^2\,(x,z) dx\, dz$ vérifie :*

$$\forall u \in H_\Omega, c_{min}^2 \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\, dz \leq a(u,u) \leq c_{max}^2 \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\, dz$$

Par conséquent, la forme sesquilinéaire $a(.,.)$ est positive, continue sur $H_\Omega \times H_\Omega$ et coercive.

Corollaire 3.1. *L'opérateur A défini par (3.2) est autoadjoint positif sur* $L^2(\Omega)$ *et son spectre* $\sigma(A)$ *vérifie :*

$$\sigma(A) \subset [c_{min}^2, +\infty[. \qquad (3.3)$$

Preuve. Pour chaque $u \in D(A)$, $\forall v \in H_\Omega$, on a :

$$(Au, v) = a(u, v)$$

La forme sesquilinéaire $a(.,.)$ sur $(H_\Omega)^2$ est hermitienne, donc l'opérateur A est symétrique, il sera autoadjoint s'il est surjectif. Comme la forme sesquilinéaire $a(.,.)$ est continue sur $\mathrm{H}_\Omega \times \mathrm{H}_\Omega$ et coercive, l'application du lemme de Lax-Milgram nous donne la surjectivité.

De plus, A est positif car $a(.,.)$ est positive.

Pour établir l'inclusion, il suffit de remarquer que pour tout $u \in H_\Omega$:

$$a(u, u) \geq c_{min}^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \, dz \geq c_{min}^2 \|u\|^2. \qquad \blacksquare$$

3.3. Problème réduit

On note par $\langle .,. \rangle$ le produit de dualité de $(H_\Sigma)' \times H_\Sigma$.

Posons l'espace de Hilbert $H_0 = \left\{ v \in H^1(\mathcal{O}) / \ v_{|z=h} = 0 \right\}$ muni du produit scalaire $(.,.)_1$ de $H^1(\mathcal{O})$, introduisons la forme sesquilinéaire continue $b(\mu; .,.)$ dans $H_0 \times H_0$:

$$b(\mu; u, v) \equiv \int_\mathcal{O} \{c^2 \nabla u \nabla \bar{v} - \mu u \bar{v}\} dx dz - < T^D(\mu)\gamma u, \gamma v >.$$

Nous sommes concernés par le problème suivant :

Trouver $u \in H_0$ tel que $\forall v \in H_0$, $b(\mu; u, v) = \langle g, \gamma v \rangle$.

Qui est la formule variationnelle du problème (P_g) suivant où la donnée $g \in H_\Sigma'$:

(P_g) : Trouver $u \in V_\mu$ solution de

$$\left(c^2 \frac{\partial u}{\partial |x|}\right)_{|\Sigma} - T^D(\mu)(\gamma u) = g, \qquad (3.4)$$

où

$$V_\mu = \left\{u \in H^1(\mathcal{O}), (\mathcal{A}-\mu)u = 0 \text{ dans } \mathcal{O}, \left(c^2 \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0 \text{ dans } \Sigma_0, u = 0 \text{ dans } \Sigma_\mathrm{h}\right\}.$$

Remarquons que V_μ est un sous espace fermé de H_0.

Théorème 3.1 *L'application $\mu \to b(\mu;.,.)$, définie de $\overline{\mathbb{C}_+}$ dans l'espace normé des formes sesquilinéaires bornées sur H_0, est localement Holderienne continue. De plus, l'alternative de Fredholm s'applique pour résoudre (P_g).*

Preuve. En vue du corollaire 2.2, $b(\mu;.,.)$ est localement Holderienne continue, même dans le voisinage d'un seuil. Introduisons l'opérateur $L(\mu)$ dans $\mathcal{L}(H_0)$ défini par

$\forall u, v \in H_0,\ \ (L(\mu)u, v)_1 = b(\mu; u, v)$. On a:

$$r := \left|\Big(\big(L(\mu) - L(-1)\big)u, v\Big)_1\right|$$
$$\leq |\mu + 1| \|u\|_{0,\mathcal{O}} \|v\|_{0,\mathcal{O}} + \left\|\big(T^D(\mu) - T^D(-1)\big)\gamma u\right\|_{0,\Sigma} \|\gamma v\|_{0,\Sigma} .$$

La preuve du théorème 2.7 montre que $T^D(\mu) - T^D(-1)$ transforme (continument) H_Σ dans $L^2(\Sigma)$. Ainsi on peut trouver deux constantes positives C_1 et C_2 tel que :

$$\left\|\big(T^D(\mu) - T^D(-1)\big)\gamma u\right\|_{0,\Sigma} \leq \mathrm{C}_1 \|\gamma u\|_{0,\Sigma} \leq C_2 \|u\|_{1,\mathcal{O}}$$

D'autre part, pour $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, γ transforme $H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathcal{O})$ dans $H^\varepsilon(\Sigma) \subset L^2(\Sigma)$, ainsi il existe une constante C_3 tel que :

$$\|\gamma v\|_{0,\Sigma} \leq C_3 \|v\|_{\frac{1}{2}+\varepsilon,\mathcal{O}}$$

alors :

$$r \leq C(\mu) \|u\|_{1,\mathcal{O}} \|v\|_{\frac{1}{2}+\varepsilon,\mathcal{O}}$$

Comme $\mathcal{O}$ est rectangulaire et borné, l'injection de $H^1(\mathcal{O})$ dans $H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathcal{O})$ est compacte. Par conséquent $L(-1) - L(\mu)$ est une perturbation compacte de $L(-1)$ qui est coercive dans H_0.

Finalement, on peut décomposer $L(\mu)$ de la façon suivante :

$L(\mu) = L(-1)(K + I)$, où $K = L(-1)^{-1}\{L(\mu) - L(-1)\}$ est compact.

Ce qui montre que l'alternative de Fredholm s'applique à l'équation $L(\mu)u = G$ (G est donné dans $H_0^{'}$). ■

Remarque 3.2. *$L(\mu)$ est localement Holderienne continue dans $\overline{\mathbb{C}_+}$ et la famille d'inverses a les mêmes propriétés dans un domaine complexe ouvert où $L(\mu)^{-1}$ est défini.*

3.4. Analyse spectrale de l'opérateur perturbé A

3.4.1. Caractérisation du spectre ponctuel de A $\sigma_p(A)$

Théorème 3.2. *Soit $\mu \in \sigma_p(A)$ et $\phi \in ker(A-\mu)$. Alors, pour $|x| > M, \phi(x,.)$ admet le développement suivant :*

$$\phi(x,z) = \sum_{n>N^{\pm}} \varphi_n^{\pm} e^{-\theta_n^{\pm}(|x|-M)} U_n^{\pm}(z), \qquad quand \left| \begin{matrix} x > M \\ x < -M \end{matrix} \right. \tag{3.5}$$

Qui implique l'égalité suivante :

$$\left(c^2 \frac{\partial \phi}{\partial |x|}\right) = T^D(\mu)\gamma\phi \quad dans\ \Sigma \tag{3.6}$$

Preuve. On peut se limiter au cas $x > M$, et continuer les calculs comme si $M = 0$ (c'est la translation), et $\Sigma = \{x = 0\}$. Posons $\varphi = \gamma\phi$, définissons $u \in L^2_{i,loc}$ tel que $u = \phi - P^+(\mu)\varphi$ pour $x > 0$. On a $u \in D(A_+)_{loc}$ $si\ \gamma u = 0$. En fait, $u \in \mathcal{E}_{A_+}(\mu)$ qui est explicitement connue. Ecrivons pour $x > 0$: $\phi = u + P^+(\mu)\varphi \in L^2(\Omega^+)$, alors $u = 0$ (c'est comme la preuve du théorème 2.5). L'égalité (3.6) est la conséquence de la formule (3.1).

Remarque 3.3. *Pour tout $\mu \in \sigma_p(A), \forall s \in \mathbb{R}$, on a $ker(A-\mu) \subset L^{2,s}(\Omega)$, puisque $\phi \in ker(A-\mu)$ a une décroissance exponentiel quant $|x| \to +\infty$.*

3.4.2. Spectre essentiel de A

Proposition 3.1. *Le spectre essentiel de l'opérateur A est égal à $[S_1(A), +\infty[$.*

Preuve. Nous avons vu au chapitre II que $\sigma_{ess}(A_\pm) = [S_1^{\pm}(A_\pm), +\infty[$, où le nombre $S_1^{\pm}(A_\pm)$ est la borne inférieure de $S(A_\pm)$, l'ensemble discret des seuils ([8] partie I).

On considère l'opérateur acoustique $A = -div(c^2(x,z)\,\nabla)$ dans Ω comme une perturbation des opérateurs libres $A_+ \; et \; A_-$ couplés entre eux, dans ce cas, leurs spectres essentiels coïncident et on aura :

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A_+) \cup \sigma_{ess}(A_-) = [S_1(A), +\infty[$$

Où $S_1(A) := min\left(S_1^+(A_+), S_1^-(A_-)\right)$

Théorème 3.3. *Notons par $Z^{'}$ l'ensemble des μ où (P_g) est mal posé, c'est-à-dire $(P_{g=0})$ admet une solution non trivial. Alors on a : $\sigma_p(A) \subset Z^{'} \subset Z = \sigma_p(A) \cup S(A)$, de plus, si $\mu \in Z^{'} - S(A)$, alors tout $\phi \in Ker(A-\mu)$ peut être caractérisé par $\phi_{|O}$, qui est une solution de (P_0).*

Preuve. Soit $\mu \in \sigma_p(A)$, associé à un mode propre non triviale $\phi \in D(A)$, et soit $u = \phi_{|O}$. Premièrement, prouvons que $u \neq 0$. Supposons que $u = 0$, on pose :

$$\phi_{A_-} = \chi_{]-\infty,-M[}\phi \;, et \; \phi_{A_+} = \chi_{]M,+\infty[}\phi$$

Où $\chi(x)$ est la fonction caractéristique. On a $\phi_{A_-} \in ker(A_- - \mu)$, et $\phi_{A_+} \in ker(A_+ - \mu)$. Ainsi, $\phi_{A_-} = \phi_{A_+} = 0$, si $\sigma_p(A_-) = \sigma_p(A_+) = \emptyset$. Ça contredit $\emptyset \neq 0$, alors, $u \neq 0$. En revanche, l'égalité (3.6) est valable pour u remplaçant ϕ, puisque les quantités $\left(c^2 \frac{\partial \phi}{\partial |x|}\right)$ et ϕ n'ont pas de saut sur Σ. Ce qui mène à prouver que u est une solution non nul de $(P_{g=0})$, et ainsi $\sigma_p(A) \subset Z^{'}$.

Maintenant, supposons que $\mu \in Z^{'} - S(A)$, et il existe une solution $u \neq 0$ de $(P_{g=0})$. Ecrivons $\gamma u = \sum_{n\geq 1} \varphi_n^{\pm} U_n^{\pm} \in H_\Sigma$, et ensuite, définissons ϕ de la façon suivante :

$$\phi(x,z) = \left|\begin{array}{ll} P_{\pm}(\mu)(\gamma^{\pm}u) \equiv \displaystyle\sum_{n\geq 1} \varphi_n^{\pm} e^{ik_n^{\pm}(|x|-M)} U_n^{\pm}(z) & quand \begin{cases} x > M \\ x < -M \end{cases} \\ (u(x,z) & quand \; |x| < M) \end{array}\right.$$

Cette fonction est localement dans $D(A)$, sauf, peut être au voisinage de Σ. Cependant, le saut sur Σ de ϕ et de $\left(c^2 \frac{\partial\phi}{\partial|x|}\right)$ (de l'égalité (3.4)) sont tous les deux nuls; alors $\phi \in D(A)_{loc}$, et l'égalité $\mathcal{A}\phi = \mu\phi$ est vérifiée. En outre, on a $b(\mu; u, u) = 0$,

$\Im m\big(b(\mu; u, u)\big) = 0,$ et alors, $\sum_{1\leq n\leq N^\pm} k_n^\pm|\varphi_n^\pm| = 0,$ qui implique $\phi_n^\pm = 0$ quand $n \geq N^\pm(\mu)$.

Ainsi, ϕ appartient à $D(A)$ et c'est un mode propre de A associé à la valeur propre μ. ■

Théorème 3.4. *Les valeurs propres de A comptés avec leurs multiplicités, ne peuvent être accumulées à un point fini μ, sauf peut être quand μ est un seuil de A. Dans ce cas, l'accumulation prend place à gauche de ce point.*

Preuve. Pour simplifier, nous allons traiter le cas $A_- = A_+$ (qui est $c_- = c_+$), qui ne peut pas restreindre la validité de la preuve. Supposons qu'il existe une suite de valeurs propres bornée μ_k de A, chacun d'entre eux étant associé à un mode propre ϕ^k, et la famille $\{\phi^k\}_{k\geq 0}$ est orthonormale dans $L^2(\Omega)$. De plus, on peut assumer que $\mu_k \in [S_N, S_{N+1}[$, où $N \geq 0$ est fixé. L'égalité $a(\phi^k, \phi^l) = \mu_k \delta_{k,l}$ montre que la famille $\{c\nabla\phi^k\}$ est aussi orthogonale, et bornée, si μ_k est bornée. Ainsi, la suite ϕ^kest faiblement convergente dans $H^1(\Omega)$ vers certains ϕ. L'orthogonalité de $\{\phi^k\}_k$ implique que $\phi = 0$.

Posons $v^k = \phi^k_{|\mathcal{O}}$, alors nous avons :

$$v^k \rightharpoonup 0 \quad \text{(faiblement) dans } H^1(\mathcal{O}).$$

Ainsi, il y a une sous suite de $\{v^k\}_k$, notée encore $\{v^k\}_k$, qui converge fortement vers 0 dans $L^2(\mathcal{O})$. D'autre part, on peut écrire (comme dans le théorème 3.3) :

$$\gamma v^k = \sum_{n\geq N+1} \varphi_n^k U_n(\mu_k; z) \in H_\Sigma \ .$$

De l'égalité $b(\mu_k; v^k, v^k) = 0$, on déduit que les deux quantités positives $\|c\nabla v^k\|_{0,\mathcal{O}}$ et $\langle T^D(\mu_k)\varphi^k, \varphi^k\rangle$ tendent vers 0. Ainsi, v^k converge fortement vers 0 dans $H^1(\mathcal{O})$, $\|\phi^k\|_{0,\Omega-\mathcal{O}}$ converge vers 1, et finalement, de l'égalité (3.5), on a :

$$\int_{x>M}\int_{z=0}^{h}|\phi(x,z)|^2 c_{\pm}^2(z)dzdx=\frac{1}{2}\sum_{n\geq N+1}\left|\varphi_n^{+,k}\right|^2/\theta_n^{+}(\mu_k)$$

Et ainsi,

(i) $\quad \sum_{n\geq N+1}|\varphi_n^k|^2\,\theta_n(\mu_k)$ tend vers 0.

(ii) $\quad \sum_{n\geq N+1}|\varphi_n^k|^2\,/\theta_n(\mu_k)>\frac{1}{2}c_{min}^2$ pour k suffisamment grand.

Maintenant, remarquons que pour $n>N+1$, on a $\theta_n(\mu_k)>\theta_{N+2}(S_{N+1})>0$. Alors, (i) et (ii) sont compatibles ssi $\{\theta_{N+1}(\mu_k)\}_k$ admet une sous suite qui converge vers 0. Ce qui implique que $\lim sup(\mu_k)=S_{N+1}$. De cette façon, on peut aussi prouver que tout point limite de la suite $\{\mu_k\}_k$ doit être égale à S_{N+1}. Ainsi, $\{\mu_k\}_k$ tend vers S_{N+1}. ■

3.4.3. Spectre discret de l'opérateur A

Proposition 3.2. *Le spectre discret de l'opérateur A est inclus dans* $[c_{min}^2, S_1(A)[$.

Preuve. Comme le spectre de A est inclus dans $[c_{min}^2,+\infty[$ et que le spectre essentiel est égal à $[S_1(A),+\infty[$, on déduit directement que le spectre discret est inclus dans $[c_{min}^2, S_1(A)[$. ■

Le spectre essentiel de A ayant été déterminé, nous sommes maintenant en mesure d'étudier les valeurs propres situées en dessous du spectre essentiel à l'aide du principe de Min-Max. Nous introduisons donc la suite des min-max $\left(\lambda_m(\mu)\right)_{m\geq 1}$ associés à l'opérateur A et définie par une formule analogue à la formule (1.17).

On a donc par exemple :

$$\lambda_1(\mu)=\inf_{u\in V, u\neq 0}\frac{a(u,u)}{\|u\|^2}$$

et plus généralement pour $m\geq 1$:

$$\lambda_m(\mu)=\inf_{V_m\in\mathcal{V}_m(V)}\sup_{u\in V,u\neq 0}\frac{a(u,u)}{\|u\|^2}$$

3.4.4. Conditions d'existences des valeurs propres de A

On établira dans ce paragraphe une condition suffisante portant sur la fonction c afin de permettre la propagation d'au moins un mode guidé dans le milieu considéré.

Théorème 3.5. *Supposons que $c(x,z) = c_-(z)$ (presque) partout, sauf sur un ensemble ouvert non vide, borné, $G \subset \Omega$ dans lequel $c(x,z) = c_o(x,z)$ et $sup(ess)c_o < inf(ess)c_-$. Alors, $\sigma_d(A)$ est non vide.*

Preuve. Soit t un petit paramètre non négatif, et définissons $\phi_t \in H_\Omega$ par

$\phi_t(x,z) = e^{-t|x|}U(z)$, où U représente $U_{A_-,1}(S_1(A_-);.)$. Posons $K = \|U\|^2_{0,]0,h[} > 0$, on a :

$$\|\phi_t\|^2_{0,\Omega} = K/t = O\left(\frac{1}{t}\right) ;$$

$$\left\|\frac{\partial \phi_t}{\partial x}\right\|^2_{0,\Omega} = O(\mathrm{t}) ;$$

$$\left\|c_- \frac{\partial \phi_t}{\partial z}\right\|^2_{0,\Omega} = S_1(A_-)K/t.$$

Le quotient de Rayleigh $E(\phi_t)$ est calculé par un développement du second ordre dans t, qui nous donne $E(\phi_t) = S_1(A_-) - \theta t + O(t^2)$, où θ vérifie

$$K\theta = \int_G (c_-^2 - c_0^2)\left|\frac{\partial \phi_{t=0}}{\partial z}\right|^2 dx\, dz \geq (inf(ess)c_-^2 - sup(ess)c_0^2)\int_G |U'(z)|^2 dx\, dz\ .$$

Puisque G est ouvert, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $G_x = \{z \in]0,h[\ /\ (x,z) \in G\}$ contient un intervalle ouvert non vide J. Supposons que $U'(z) = 0$ dans J ; alors, $-\mu^{-1}(c_-^2U')' = U = 0$ dans J, tandis que le couple (U, c_-^2U') n'est pas une solution triviale dans $]0,h[$ pour le système linéaire homogène suivant :

$X'(z) = S(z)X(z)$ avec $S(z) \equiv \begin{pmatrix} 0 & c_-^{-2}(z) \\ -\mu & 0 \end{pmatrix}$

Ce genre de problème est connu ([6]). Ça implique $U \equiv 0$ dans $]0,h[$ qui est absurde. Par conséquence, θ est positive. Alors, quand t est suffisamment petit, on a $E(\phi_t) < S_1(A_-)$. Finalement, le principe du min-max implique que $\sigma_d(A)$ est non vide. ■

Remarque 3.4. *Rappelons que le spectre ponctuel de* A, $\sigma_p(A)$ *est vide pour toute stratification horizontale. Par ailleurs, dans d'autre cas, on peut prouver que le spectre discret* $\sigma_d(A) \equiv \sigma_p(A) \cap \,]-\infty, S_1(A)[$ *n'est pas vide. Le problème d'existence de valeurs propres plongées dans le spectre essentiel n'est encore résolu, mais WITSCH a fourni des résultats connexes ([25]). Le cas d'une bande courbée, avec l'opérateur Laplacien, est développé dans [22], et peut être étendue à une bande stratifié : l'existence des valeurs propres est prouvé sous certaines hypothèses, comme dans [10, 12, 11,5].*

Nous allons présenter quelques cas où l'opérateur A n'a pas de valeurs propres.

Théorème 3.6. *On considère le cas de deux stratifications horizontales juxtaposées :*

$c(x,z) = c_-(z)$ *dans* $\Omega_-: x < 0$, *et* $c(x,z) = c_+(z)$ *dans* $\Omega_+: x > 0$.

Alors, l'opérateur A n'a pas de valeurs propres.

Preuve. Considérons $\phi \in ker(A-\mu)$. De l'équation (3.5), on a :

$$\phi(x,z) = \sum_{n>N^\pm} \varphi_n^\pm e^{-\theta_n^\pm |x|} U_{\pm,n}(z) \text{ pour } \pm x > M$$

Ecrivons que le saut de $\left(c^2 \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$ sur Σ est nul, on obtient l'égalité suivante :

$$\int_\Sigma \left(c^2 \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \overline{\phi(0,z)}\, dz = \sum_n |\varphi_n^-|^2 \theta_n^- = -\sum_n |\varphi_n^+|^2 \theta_n^+ .$$

Ce qui donne $\varphi_n^+ = \varphi_n^- = 0$ pour tout n, et enfin $\phi = 0$. ■

Théorème 3.7. *Supposons que* $S_1(A_-) \leq S_1(A_+)$, *et* $\forall z, \forall x, |x| < M \Rightarrow c_-(z) \leq c(x,z)$.

Alors, A n'a pas de valeurs propres dans $[0, S_1(A)]$.

Preuve. Introduisons le quotient de Rayleigh

$$E(\phi) := \frac{\int_\Omega c^2 |\nabla\phi|^2 dx\, dz}{\int_\Omega |\phi|^2 dx\, dz}, \qquad \text{quand } \phi \in H_\Omega - \{0\}$$

Nous savons que $inf\{E(\phi)/\ \phi \in H_\Omega - \{0\}\} \leq S_1(A) = S_1(A_-)$. Nous avons prouvé qu'il y a une égalité ainsi, $\sigma_d(A) = \emptyset$ et la limite inferieure n'est pas atteinte alors, $S_1(A_-) \notin \sigma_p(A)$.

Définissons l'opérateur A_1 (resp. la fonction E_1) comme A (resp. comme E), où $c(.,.)|_{|x|<M}$ est remplacée par c_-. Nous avons $inf\{E_1(\phi)/\ \phi \in H_\Omega - \{0\}\} = S_1(A_-)$, et sa limite inferieure n'est pas atteinte, puisque A_1 n'a pas de valeurs propres (théorème 3.7). Ceci termine la conclusion, car $E \geq E_1$. ■

3.5. Principe d'Absorption Limite P.A.L.

Rappelons que Z' est le sous ensemble de $Z = \sigma_p(A) \cup S(A)$ où (P_g) est mal posé, alors $\sigma_p(A) \subset Z'$. On peut énoncer le P.A.L suivant :

Théorème 3.8. (P.A.L) *Soit $\mu \in \mathbb{R} - Z'$, fixons $s > \frac{1}{2}$. Si $\mu \notin S(A)$, et $s > 1$ si $\mu \in S(A)$.*

Alors quand $\zeta \to \mu$ et $\pm \Im m(\zeta) > 0$, la résolvante $(A - \zeta)^{-1}$ converge dans $\mathcal{L}\big(L^{2,s}(\Omega), H^{1,-s}(\Omega)\big)$ vers une certaine limite notée $R_A^{\pm}(\mu)$. De plus, pour tout $f \in L^{2,s}(\Omega), \phi \equiv R_A^{\pm}(\mu) f$ appartient à $D(A)_{loc}$ et $(\mathcal{A} - \mu)\phi = f$.

Preuve. Pour démontrer le théorème on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2. *Pour tout $\phi \in H^{1,-s}(\Omega) \cap D(A)_{loc}$ tel que $\mathcal{A}\phi \in L^{2,-s}(\Omega)$ alors $g = \left(c_A^2 \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x=0}$ appartient à H'_Σ, et satisfait pour une constante convenable $C_s > 0$:*

$$\|g\|_{H'_\Sigma} \leq C_s\{\|\mathcal{A}\phi\|_{L^{2,-s}(\Omega)} + \|\phi\|_{H^{1,-s}(\Omega)}\}.$$

Soit $f \in L^{2,s}(\Omega)$, et définissons $f^+ \in L^{2,s}(\Omega)$ par $f^+ = f$ dans $\Omega_M^+ =]M, +\infty[\times]0, h[$ et $f^+(x + M, z)$ est impaire en x. Alors, on pose pour $\Im m(\zeta) > 0$:

$$\left|\begin{array}{ll} \phi^\zeta := (A - \zeta)^{-1} f & dans\ \Omega \\ \phi_\zeta^+ := (A_+ - \zeta)^{-1} f^+ & dans\ \Omega \\ g_\zeta^+ := \left(c_+^2 \dfrac{\partial \phi_\zeta^+}{\partial |x|}\right)_{\Sigma^+} & \\ u^\zeta := \phi^\zeta & dans\ \mathcal{O} \\ \varphi_\zeta^+ := \gamma^+ u^\zeta & \end{array}\right.$$

On définit de même $\phi_\zeta^-, g_\zeta^-, \varphi_\zeta^-$, relative à $\Omega_M^-, \Sigma^-, c_-(z)$ et γ^- (ici, nous devons supposer que M≠0). Les opérateurs $P_\pm(\mu)$ gardent les propriétés de $P(\mu)$ (section 2.7), et de cette manière, ils peuvent être prolongés dans $\mathbb{C}_+$.

Soit, $q \equiv \phi^\zeta - \phi_\zeta^- - P_-(\zeta)\varphi_\zeta^-$ vérifiant $\gamma^- q = 0\ et\ (A_- - \zeta)q = 0$ dans Ω_{-M} . Ainsi, en adaptant les résultats de la section 2.7, on a $q = 0$ dans Ω_{-M}.

Ceci montre que $\phi^{\zeta} = \phi_{\zeta}^{-} + P_{-}(\zeta)\varphi_{\zeta}^{-}$ quand $x < -M$, et $\phi^{\zeta} = \phi_{\zeta}^{+} + P_{+}(\zeta)\varphi_{\zeta}^{+}$ quand $x > M$. Posons $g_{\zeta} = \left(g_{\zeta}^{-}, g_{\zeta}^{+}\right)$ (et aussi $\varphi_{\zeta} = \left(\varphi_{\zeta}^{-}, \varphi_{\zeta}^{+}\right)$), ainsi u^{ζ} appartient à H_0 est la solution unique de :

$$\forall v \in H_0 \, , b\left(\zeta; u^{\zeta}, v\right) = \int_{\mathcal{O}} f\bar{v}dxdz + \langle g_{\zeta}, \gamma v\rangle.$$

Maintenant, appliquons le P.A.L connu pour la stratification horizontale qui est valable même pour un seuil (avec $s > 1$) puisque $f^{+}(x+M, z)$ est impaire en x. Ainsi, il existe $\phi^{\pm}, g, \varphi$ respectivement en $H^{1,-s}(\Omega), H_{\Sigma}^{'}, H_{\Sigma}$, tel que (voir lemme 3.2) :

$$\left|\begin{array}{lll} \left\|\phi_{\zeta}^{\pm} - \phi^{\pm}\right\|_{H^{1,-s}(\Omega)} & \leq & C(s,\mu,\zeta)\|f^{\pm}\|_{L^{2,-s}(\Omega)} \leq C(s,\mu,\zeta)\|f\|_{L^{2,-s}(\Omega)} \\ \left\|g_{\zeta} - g\right\|_{H_{\Sigma}^{'}} \leq C_s \left\{\left\|\mathcal{A}\left(\phi_{\zeta}^{\pm} - \phi^{\pm}\right)\right\|_{L^{2,-s}(\Omega)} + \left\|\phi_{\zeta}^{\pm} - \phi^{\pm}\right\|_{H^{1,-s}(\Omega)}\right\} & & \leq C(s,\mu,\zeta)\|f\|_{L^{2,-s}(\Omega)} \\ \left\|\varphi_{\zeta} - \varphi\right\|_{H_{\Sigma}} \leq & & C_s\left\|\phi_{\zeta}^{\pm} - \phi^{\pm}\right\|_{H^{1,-s}(\Omega)} \leq C(s,\zeta)\|f\|_{L^{2,-s}(\Omega)} \end{array}\right. \quad (3.7)$$

Où $C(s,\zeta)$ tend vers 0 quand $\zeta \to \mu$. $L(\zeta)$ est inversible et la même chose pour $L(\mu)$ par hypothèse. Comme l'application $\lambda \to L(\lambda)$ est continue (théorème 3.1), alors l'application $\lambda \to L(\lambda)^{-1}$est continue dans un certain voisinage de $V \subset \mathbb{C}$ de μ (voir aussi la remarque 3.2). Ainsi u^{ζ}converge vers la fonction $u \in H_0$ définie comme la solution unique de :

$$\forall v \in H_0, \qquad b(\mu; u, v) = \int_{\mathcal{O}} f\bar{v}dxdz + \langle g, \gamma v\rangle$$

Ainsi, ϕ^{ζ} tend vers certain $\phi \in H^{1,-s}(\Omega)$ tel que :

$$\left|\begin{array}{l} \phi = u \quad \text{dans } \mathcal{O} \\ \phi = \phi^{\pm} + P_{\pm}(\mu)\varphi^{\pm} \ \text{ dans } \Omega_{\pm M} \end{array}\right.$$

Et $\left(c_A^2 \frac{\partial \phi}{\partial |x|}\right)_{\Sigma}$ est bien définie dans $H_{\Sigma}^{'}$, avec la valeur $g + T^{D}(\mu)\varphi$. Ainsi, $\phi \in D(A)_{loc}$, avec $(\mathcal{A} - \mu)\phi = f$, et les inégalités dans (3.7) montrent que :

$$\left\|\phi^{\zeta} - \phi\right\|_{H^{1,-s}(\Omega)} \leq C(s,\zeta)\|f\|_{L^{2,-s}(\Omega)}$$

■

Pour étendre le théorème précédent au cas $M = 0$, on doit modifier légèrement cette preuve. Nous n'avons pas besoin de prendre en considération $u^\zeta et\ u$. Cependant, $\varphi^+ \ et\ \varphi^-$ d'une part, $g^+ \ et\ g^-$ d'autre part, doivent être égaux sur Σ, et ces deux conditions sont suffisantes pour avoir le P.A.L. En fait, posons $\varphi \equiv \varphi^+ = \varphi^-$, il reste une seule contrainte. Ainsi on a :

Théorème 3.9 *Soit* $\mu \in S(A_-) - S(A_+),\ ou\ \mu = S_N(A_-) = S_M(A_+)$ *tel que* $U_N^-(\mu;)\ et\ U_M^+(\mu;)$ *sont linéairement indépendant, alors, le P.A.L exprimé dans le théorème 3.8 est valable en* μ.

Preuve.

Pour démonter ce théorème on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.3 *Les suppositions précédentes sur* $\mu \in \mathbb{R}$ *sont équivalentes à la propriété suivante : l'opérateur* $T^+(\mu) + T^-(\mu)$ *défini sur* $\widetilde{H}$ *est inversible.*

Preuve. Comme $\left(T^+(\mu) + T^-(\mu)\right) - \left(T^+(0) + T^-(0)\right)$ est une perturbation compacte de $T^+(0) + T^-(0)$ qui est inversible, on peut appliquer l'alternative de Fredholm : $T^+(\mu) + T^-(\mu)$ est inversible ssi son espace nul est $\{0\}$. Ainsi, soit φ tel que $\left(T^+(\mu) + T^-(\mu)\right)\varphi = 0$. Alors, on a :

$$0 = \langle \left(T^+(\mu) + T^-(\mu)\right)\varphi, \varphi\rangle = \sum_{n\geq 1} ik_n^- |\varphi_n^-|^2 + \sum_{m\geq 1} ik_n^+ |\varphi_m^+|^2$$

Avec $\varphi_n^\pm = \int_0^h \varphi U_n^\pm c_\pm^2 dz$. Alors, $\forall n, \varphi_n^\pm = 0$ dès que $k_n^\pm \neq 0$, et par conséquent φ est linéairement dépendant de $U_N^-(\mu;)\ et\ U_M^+(\mu;)$. Ce qui termine la preuve. ∎

Le P.A.L est valable ssi $g^- = g^+$, c'est-à-dire : il existe $\varphi \in \widetilde{H}$ tel que

$$T^+(\mu)\varphi + g^+ = -T^-(\mu)\varphi - g^-$$

Cette égalité est équivalente à dire que $T^+(\mu) + T^-(\mu)$ est inversible, qui est caractérisée par le lemme 3.3. La conclusion est immédiate. ∎

Remarque 3.5 *Un tel résultat est prouvé dans [8] partie I, avec la stratification particulière* $c_-(z) = c_1 \neq c_2 = c_+(z)$ *(et* $M = 0$*).*

Remarque 3.6 *Soit $M > 0$, $c_-(z) = c_1$, $c_+(z) = c_2$. Alors, si $c_1 = c_2$, il est possible de choisir $c(z)$ constante dans $\mathcal{O}$ tel que le P.A.L est valable à tout seuil, tandis que si $c_1 \neq c_2$, il est possible de choisir $c(z)$ constante dans $\mathcal{O}$ tel que le P.A.L échoue à un certain seuil (qui n'est pas une valeur propre).*

Pour conclure cette partie, notre méthode peut être directement utilisée pour calculer numériquement la solution sortante ϕ de $\mathcal{A}\phi - \mu\phi = f$ donnée avec un support compact par exemple. En fait, l'ensemble $\mathcal{O}$ peut être étendu pour contenir le support de f. Alors, $\phi = R_A^+(\mu)f$ est donnée par :

$$\phi(x,z) = \left| \begin{array}{ll} P_\pm(\mu)(\gamma^\pm u) \equiv \sum_{n\geq 1} \varphi_n^\pm e^{ik_n^\pm(|x|-M)} U_n^\pm(z) & \text{quand} \begin{cases} x > M \\ x < -M \end{cases} \\ (u(x,z) & \text{quand } |x| < M) \end{array} \right. \tag{3.8}$$

où $\gamma^\pm u(z) = \sum_{n\geq 1} \varphi_n^\pm U_n^\pm(z)$ et $u = \phi_{|\mathcal{O}}$ est la solution unique dans H_0 du problème variationnel suivant :

$$\forall v \in H_0, b(\mu; u, v) = \int_{\mathcal{O}} f\bar{v}\, dx\, dz \quad . \tag{3.9}$$

3.6. Résultats d'existences des fonctions propres généralisées

Dans cette section, μ représente un nombre réel quelconque qui appartient à $Z^C \equiv]S_1(A); +\infty[- Z$.

Comme dans le chapitre 2, nous introduisons l'espace propre généralisé associé à $A - \mu$:

$$\mathcal{E}_A(\mu) = \{\phi \in D(A)_{loc} \cap H^{1,-s}(\Omega), \qquad (\mathcal{A} - \mu)\phi = 0\}$$

Théorème 3.10 *Soit $\mu \in Z^C$. Alors, l'espace propre généralisé associé à $A - \mu$ est $\mathcal{E}_A(\mu) = \mathcal{E}_A^+ \oplus \mathcal{E}_A^-$, où $\mathcal{E}_A^+$ et $\mathcal{E}_A^-$ sont construits pour être isomorphes respectivement à $\mathcal{E}_{A_-}^+$ et $\mathcal{E}_{A_+}^-$. En particulier, $\mathcal{E}_A(\mu)$ a la dimension $N_{A_-}(\mu) + N_{A_+}(\mu)$ [20].*

Chapitre IV

Méthode numérique pour le calcul des valeurs et des modes propres

Chapitre IV
Méthode numérique pour le calcul des valeurs propres et des modes propres

4.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude numérique des valeurs propres de l'opérateur A. Ce problème est posé sur un domaine non borné Ω, ce qui présente des difficultés. Dans notre cas il est possible d'obtenir un problème posé sur un domaine borné et équivalent au problème initial. Pour cela, on utilisera la méthode des éléments finis localisés et on suivra les mêmes techniques de [18].

La méthode consiste à relier deux représentations de la solution, l'une numérique sur le domaine : $\mathcal{O} =]-M, M[\times]0, h[$ et l'autre analytique sur le domaine : $\Omega \setminus \bar{\mathcal{O}}$. Pour simplifier la représentation de la méthode, rappelons quelques notations qui ont été introduites aux chapitres précédents.

$$\Omega \setminus \bar{\mathcal{O}} =]-\infty, -M[\cup]M, +\infty[$$

$$H_0 = \{v \in H^1(\mathcal{O}) / v(x, h) = 0\}$$

Dans la suite on cherche à résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver}\, u \in D(A), u \neq 0, et\ \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que} \\ Au = -div(c^2 \nabla u) = \mu u \end{cases} \tag{4.1}$$

Avec $D(A) = \left\{u \in H_\Omega; Au \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0\right\}$.

Nous avons vu au chapitre 3 que :

$(Au, v) = a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla \bar{v} c^2(x, z)\, dxdz, \forall u \in D(A), \forall v \in H_\Omega$ et que l'opérateur A est autoadjoint.

Le problème spectrale (4.1) est équivalent à la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver}\, \mu \in \mathbb{R}\ et\ v \in H_\Omega, u \neq 0, \text{tel que:} \\ a(u, v) = \mu(u, v); \quad \forall v \in H_\Omega \end{cases}$$

4.2. Réduction à un domaine borné

Avant d'exposer la méthode nous supposons qu'il existe $M > 0$ tel que: la vitesse

$c_{\pm}(z) = c_{\infty}$ constante, pour $|x| > M$.

Dans ce qui suit $\mu \in \mathbb{R}$ $\; et \;$ $N \geq 0$. Nous considérons l'opérateur $T_N(\mu)$ dans $\mathcal{L}(\widetilde{H}, \widetilde{H'})$:

$$T_N(\mu)\varphi = \sum_{n \geq N+1} ik_n(\mu)\varphi_n c_{\infty}^2 u_n(\mu; z)$$

qui lie la définition de deux opérateurs sur $\mathcal{L}(\mathrm{H}_{\Sigma}^{\pm}, \; \mathrm{H}_{\Sigma}^{\pm'})$ comme pour $T^{\pm}(\mu)$. Alors, on a un opérateur dans $\mathcal{L}(H_{\Sigma}, \; H_{\Sigma}^{'})$, noté encore $T_N(\mu)$.

Posons : $u(x,z) = \begin{cases} u_1(x,z) & \text{pour } \; (x,z) \in \mathcal{O} \\ u_2(x,z) & \text{pour } (x,z) \in \Omega \setminus \bar{\mathcal{O}} \end{cases}$

Si $u \in D(A)$ est une solution de (4.1), alors le couple (u_1, u_2) satisfait le problème de transmission :

$$\begin{cases} \mathcal{A}u_1 = \mu u_1 & pour \; (x,z) \in \mathcal{O} \\ \mathcal{A}u_2 = \mu u_2 & pour \; (x,z) \in \Omega \setminus \bar{\mathcal{O}} \\ u_1(\pm M, z) = u_2(\pm M, z) & pour \; 0 < z < h \\ \left(c^2 \dfrac{\partial u_1}{\partial \pm x}\right) |\pm x = M = \left(c_{\infty}^2 \dfrac{\partial u_2}{\partial \pm x}\right)_{|\pm x = M} & pour \; 0 < z < h \end{cases} \tag{4.2}$$

4.3. Problème extérieur

Maintenant nous exposons la forme analytique de la solution dans le domaine extérieur $\Omega \setminus \bar{\mathcal{O}}$.

On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{A}u_2 = \mu u_2 \quad dans \; \Omega \setminus \bar{\mathcal{O}} \\ u_2(\pm M, z) = \sum_{n \geq 1} u_n(\pm M)\, u_n(z) = \varphi(z) \quad pour \;\; z \in]0, h[\end{cases} \tag{4.3}$$

Le problème (4.3) a une solution unique u_2 qui a la représentation donnée au théorème 3.2. à savoir :

$$u_2(x,z) = \sum_{n \geq N+1} \varphi_n^{\pm} e^{-\theta_n^{\pm}(|x|-M)}\, U_n^{\pm}(z), \qquad \text{quand } |x| > M$$

Dans le paragraphe suivant, nous montrons que le problème (4.1) est équivalent à un problème (4.4) posé sur le domaine $\mathcal{O}$.

L'énoncé du problème (4.4) est comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u,\mu) \in H_0 \times \mathbb{R} \quad \text{tel que} \\ \mathcal{A}u = \mu u \ \text{ sur } \quad \mathcal{O} \\ c^2 \frac{\partial u}{\partial |x|} = T_N(\mu) \quad \text{ sur } \quad \Sigma \end{cases} \tag{4.4}$$

La formulation variationnelle de ce problème est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mu \in \mathbb{R} \; et \; u \in H_0, u \neq 0, \text{vérifiant:} \\ \int_{\mathcal{O}} \nabla u \nabla \bar{v} c^2 dxdz - \langle T_N(\mu)\gamma u, \gamma v \rangle = \mu (u, \gamma v)_{\mathcal{O}} \end{cases}$$

Théorème 4.1 *Si (μ, u) est une solution de (4.1), alors $(\mu, u_{|\mathcal{O}})$ est une solution de (4.4). Inversement, si (μ, u) est une solution de (4.4), alors il existe un prolongement unique $\tilde{u}$ tel que $(\mu, \tilde{u})$ est une solution de (4.1).*

Nous introduisons la forme sesquilinéaire suivante :

$$b_N(\mu; u, v) = \int_{\mathcal{O}} \nabla u \nabla \bar{v} c^2 dxdz - \langle T_N(\mu)\gamma u, \gamma v \rangle, \qquad u, v \in H_0.$$

Cette forme est hermitienne, continue et coercive sur $H_0 \times H_0$.

Notons A_μ l'opérateur engendré par la forme sesquilinéaire $b_N(\mu; .,.)$

A_μ est défini comme suit :

$$D(A_\mu) = \left\{ u \in \ H_0 \ / A_\mu u \in L^2(\mathcal{O}); c^2 \frac{\partial u}{\partial |x|} = T_N(\mu)\gamma u \text{ dans } \Sigma \right\}$$

$$A_\mu u = \mathcal{A}u$$

Où $N = N(\mu)$. Alors on a

Théorème 4.2 *L'opérateur A_μ est autoadjoint et positif, à résolvante compacte. Ces valeurs propres $\{\lambda_m(\mu)\}_{m\geq 1}$ forment une suite croissante qui converge vers $+\infty$.*

De plus, μ est une valeur propre de A ssi l'équation suivante :

$$\lambda_m(\mu) = \mu, \tag{4.5}$$

est satisfaite pour un certain $m \geq 1$, et il existe un mode propre ω_m, associé à λ_m de tel sorte que $\gamma^{\pm}\omega_m$ est orthogonale à $U_1(\mu;.), \dots U_N(\mu;.)$ (« propriété d'orthogonalité »).

Preuve. La forme sesquilinéaire $b_N(\mu;.,.)$ hermitienne et continue dans H_0, associée à l'opérateur A_μ définit par:

$$b_N(\mu; u, v) = \int_{\mathcal{O}} \nabla u \nabla \bar{v} c^2 dxdz - \langle T_N(\mu)\gamma u, \gamma v \rangle \tag{4.6}$$

est coercive dans H_0. Soit $f \in L^2(\mathcal{O}), \lambda \in \mathbb{C}$: le problème « trouver $u \in D(A_\mu)$ tel que $(A - \lambda)u = f$» est équivalent à la formulation variationnelle suivante : trouver $u \in H_0$ tel que $\forall v \in H_0$,

$$b_N(\mu; u, v) - \lambda \int_{\mathcal{O}} u\bar{v}dxdz = \int_{\mathcal{O}} f\bar{v}dxdz$$

De plus, l'injection canonique de H_0 dans $L^2(\mathcal{O})$ est compact : ce qui implique que A_μ est autoadjoint, strictement positif et à résolvante compacte.

Maintenant, supposons que μ est une valeur propre de A, associée à $\phi \in D(A) - \{0\}$. La preuve du théorème 3.3 montre que $\left(c_0^2 \frac{\partial \phi}{\partial |x|}\right) = T^D(\mu)\gamma\phi$, qui est égale à $T_N(\mu)\gamma\phi$, si

$$\int_0^h \phi(\pm M.z)U_n(\mu; z)c_0^2 dz = 0 \text{ quand } 1 \leq n \leq N.$$

Ainsi, la restriction $u = \phi_{|\mathcal{O}}$ appartient à $D(A_\mu)$, avec $A_\mu u = \mu u$, et γu a « la propriété d'orthogonalité » demandée. Inversement, quand μ est une valeur propre de A_μ, associé à u, on peut construire à partir de u et de ces propriétés de transmissions sur Σ, le mode propre $\phi \in D(A)$ où sa restriction sur $\mathcal{O}$ est u. ■

Remarque 4.1 *Quand $\mu < S_1(A)$, qui est équivalent à $N = 0$, la propriété d'orthogonalité est toujours vérifiée, et alors l'équation $\lambda_m(\mu) = \mu$ caractérise le spectre discret $\sigma_d(A)$.*

L'équation (4.5) peut être résolue numériquement par la méthode du point fixe, qui nécessite quelques propriétés de continuité et de dérivabilité de λ_m. La continuité locale Hölderienne de $T(\mu)$ est prouvée, entraine que les valeur propres λ_m possèdent les mêmes propriétés.

Théorème 4.3 *Pour tout $\mu_0 \in \mathbb{R}$, toute valeur propre $\lambda(\mu_0)$ de A_{μ_0} admet une extension continue $\lambda(\mu)$ au voisinage $\mathcal{V}$ de μ_0. $\lambda(\mu)$ devient une valeur propre de A_μ.*

Preuve. Remarquons que A_μ est l'unique opérateur m-sectoriel défini de $b_{N(\mu)}(\mu; .,.)$ [20]. La famille $\{b_{N(\mu)}(\mu; .,.)\}_\mu$ est continue en $\mu \in \mathbb{R}_+$ qui implique la continuité de $\mu \to \lambda(\mu)$.

■

Si on suppose que $\{T(\mu)\}_\mu$ est analytique, λ_m sera aussi analytique. Ce dernier point est seulement vrai pour $\mu \in \mathbb{R} - S(A)$. Plus précisément, pour tout N fixé, $T_N(\mu)$ défini pour $\mu \in [S_N, S_{N+1}[$ peut être étendu analytiquement au voisinage de S_N. Ce qui implique que toute valeur propre λ_m de A_μ pour $\mu = S_N$, admet une extension continue au voisinage de S_N et une dérivée à droite de S_N. Finalement, sous ces hypothèses on aura :

$$\lambda'(\mu) = \frac{\partial b_N}{\partial \mu}(\mu; u, u) = -\langle T_N'(\mu)\gamma u, \gamma u\rangle,$$

où $u = \omega_m$ est normalisé.

Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons étudié la propagation des ondes acoustiques dans un milieu stratifié Ω, avec des conditions aux limites de Dirichlet en $z = h$ et de Neumann en $z = 0$.

Nous avons commencé par l'étude du problème non perturbé, on a énoncé quelques résultats concernant l'analyse spectrale de l'opérateur A_0 (le spectre, les fonctions propres généralisées). Nous avons pu prolonger la résolvante en des points du spectre essentiel grâce au principe d'absorption limite dans des espaces particuliers. On a calculé la fonction de Green et on a donné une représentation graphique dans le cas d'un milieu homogène. Nous avons introduit l'opérateur $T(\mu)$ de Dirichlet-Neumann qu'on a employé dans l'étude du problème perturbé.

Les résultats principaux de cette partie, sont : le spectre ponctuel de A_0 est vide et son spectre se réduit au spectre essentiel, nous avons estimé la résolvante $R_{A_0}(\zeta)$ au voisinage de $\mu \in \sigma(A_0)$.

Ensuite, nous avons étudié l'opérateur perturbé A, on a donné quelques résultats concernant son analyse spectrale, l'existence des valeurs propres, le principe d'absorption limite et les fonctions propres généralisés associés à une fréquence donnée μ.

La fin de ce travail est consacrée à l'étude numérique du problème de valeurs propres sur Ω, nous avons suivi la même méthode que [18]. Le résultat essentiel de cette méthode nous a permet de lier deux représentations de la solution : solution analytique sur le domaine $\Omega/\bar{\mathcal{O}}$ et la solution numérique sur le domaine $\mathcal{O}$.

Maintenant que l'étude théorique est relativement complète, les résultats numériques sont incomplets, on a l'intention de continuer l'étude numérique des valeurs propres généralisées et des fonctions propres généralisées.

Notre problème repose sur l'étude de la propagation des ondes dans Ω en fonction de ces caractéristiques, c'est un problème direct. En perspective nous souhaitons entamer l'étude du problème inverse qui consiste à reconstruire la vitesse caractéristique $c(x,z)$ à partir de données sur le champ u (mesure sur la frontière $z=0$).

Bibliographie

RÉFÉRENCES

[1] M. BEN-ARTZI. *On spectral properties of the acoustic propagator in a layerd band*. Technical report, Institute of Mathematics Hebrew University, Jerusalem, 1995.

[2] J-L. BOELLE. Modélisation *numérique de la propagation sismique à partir d'un puits : méthode modale pour l'étude de la diffraction des ondes de tube*. Technical report CST 355 : F 35346, Rapport SNEA (P), Mars 1992.

[3] J-L. BOELLE, E. CROC, and Y. DERMENJIAN. *Spectral and numerical analysis of wave equation 2d in a stratified acoustical or elastical media with two welded stratifications*. In proceedings for the second international conference on mathematical and numerical aspects of wave propagation, pages 82-91, June 1993.

[4] H. BREZIS. *Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.

[5] M. CALLAN, C. M. LINTON, and V. EVANS. *Trapped modes in two dimensional waveguides*. J. Fluid Mech., 229:51-64, 1991.

[6] E. A. CODDINGTON and N. LEVINSON. *Theory of ordinary differential equations*. Teta Mc Gaw-Hill Publishing Company Limited, 1990.

[7] E. CROC, and Y. DERMENJIAN. *Principe d'absorption limite et fonctions de Green pour un problème de sismique dans un milieu stratifié borné dans une direction*. Technical report, n°2, J.E 180, Université de Provence, Marseille.

[8] E. CROC, and Y. DERMENJIAN. *Spectral analysis of multistratified acoustic strip*:

Part I «*PAL en acoustique dans une bande stratifiée*» (SIAM J. Math. Anal. Vol. 26, n°4, July 1995, pp. 880-920);

[9] O. DRIRA. *Sur un problème de diffusion inverse dans un demi espace stratifié : étude de l'opérateur de Dirichlet-Neumann*. Thèse Doctorat en Mathématique Appliquées, Université Paris 13, soutenue le 29 Septembre 1998.

[10] D. M. EIDUS. *The principle of limiting absorption principle*. Amer. Math. Soc. Transl., 47:157-191, 1965.

[11] D. V. EVANS and C. M. LINTON. *Trapped modes in open channels*. J. Fluid Mech., 225: 153-175, 1991.

[12] D. V. EVANS and P. MCIVER. *Trapped waves over symmetric thin bodies*. J. Fluid Mech., 223: 509-519, 1991.

[13] B. GOURSAUD. *Étude mathématique et numérique de guides d'ondes ouverts non uniformes, par approche modale*. Thèse Doctorat en Mathématique Appliquées, École Doctorale de l'école polytechnique, Paris, soutenue le 8 Décembre 2010.

[14] P. GRISVARD. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Pitman, Boston London Melbourne, 1985.

[15] J. C. GUILLOT. *Existence and uniqueness of a Rayleigh surface wave propagating along the free boundary of a transversely isotropic elastic half space.* Math. Meth. in the Appl. Sci. vol. 8, N° 2, pp. 289-310 1986.

[16] J. C. GUILLOT. *Complétude des modes T.E. et T.M. pour un guide d'ondes optique planaire*. Rapport I.N.R.I.A., Mars 1985.

[17] J. C. GUILLOT ET C. H. WILCOX. *Spectral analysis of the Epstein operator*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 80, 85-98, 1978.

[18] M. KARA, B. MEROUANI, and L. CHORFI. *Computation of the torsional modes in an axisymmetric elastic layer*. Electronic Transactions on Numerical Analysis, V. 38, pp. 303-316, 2011.

[19] O. POISSON. *Bound on the Counting Function for the Eigenvalues of an Infinite Acoustic Strip*. Math. Meth. Appl. Sci., 22, 773-790 (1999).

[20] O. POISSON. *Study of the operator associated with the propagation of seismic waves in a stratified acoustic medium*. Prépublication LATP 97-8, Université de Provence.

[21] J. R. SCHULENBERGER. *Elastic waves in the half space* $\mathbb{R}^2_+$. J. Differentiel Equations 20, 405-438, 1978.

[22] P. STOVICEK P. DUCLOS, P. EXNER. *Curvature induced resonances in a two-dimensional dirichlet tube*. Annales de l'I.H.P, Physique théorique, 62(1): 81-101, 1995.

[23] C. H. WILCOX. *Sound Propagation in Stratified Fluids*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 50, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[24] C. H. WILCOX. *Spectral analysis of the Pekeris operator*. Arch. Rational Mech. Anal. 60, 259-300, 1976.

[25] K. J. WITSCH. *Examples of embedded eigenvalues for Dirichlet-Laplacian in domains with infinite boundaries*. Math. Meth. In the applied Sciences, 12:177-182, 1990.