

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Mémoire de Master

Présenté à l'Université 8 Mai 1945 de Guelma

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de : Génie Civil & Hydraulique

Spécialité : hydraulique urbaine

Option : hydraulique urbaine

Présenté par : Taabni Mohamed Lamine

Thème : Résolution des équations de l'écoulement transitoire par la méthode de Maccormack et optimisation des paramètres hydrauliques

Sous la direction de : Pr Toumi Abdelouaheb

Juin 2024

Remerciement

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Tout d'abord, je remercie Dieu Tout-Puissant de m'avoir accordé la santé et la détermination nécessaires pour mener à bien cette étude.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance sincère à mon encadreur Pr. TOUMI Abedlouaheb pour ses conseils précieux, sa patience et son soutien constant qui ont été d'une grande aide pour l'accomplissement de ce travail.

Je tiens également à remercier les membres du jury pour le temps qu'ils ont consacré à lire et évaluer ce mémoire et pour leurs remarques constructives.

Un grand merci à tous les professeurs et enseignants de Département de Génie Civil & Hydraulique pour leur enseignement et leur savoir tout au long de mes études.

Je n'oublie pas de remercier chaleureusement ma famille, qui a été un soutien indéfectible durant toute cette période.

Merci à mes parents pour leur encouragement et leur soutien inconditionnels, ainsi qu'à mes frères et sœurs et amis pour leur compréhension et leur patience durant les moments difficiles.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire, en particulier mes camarades de classe pour leur coopération et leur soutien.

Que Dieu bénisse les efforts de chacun et les récompense de la meilleure manière.

Dédicace

À moi-même

À cet esprit qui n'a jamais abandonné malgré toutes les difficultés, et à ce cœur qui a battu avec espoir et détermination.

Je dédie ce travail à moi-même, pour chaque moment d'effort, de fatigue et de veille. Pour tous les défis que j'ai affrontés et surmontés, et pour tous les moments de désespoir où j'ai persévéré.

À chaque pas que j'ai fait dans ce long voyage, à chaque larme versée et chaque sourire dessiné, à la détermination qui m'a permis d'aller jusqu'au bout.

À moi-même, je dédie ce succès, car il est le fruit de mon combat et de ma persévérance.

À ma chère famille ...

À ma mère adorée, qui a toujours été une source de soutien et de tendresse. Merci pour chaque moment d'amour et de sacrifice que tu m'as offert.

À mon père cher, qui m'a inculqué les valeurs de travail acharné et de persévérance. Merci pour tes conseils précieux et ton encouragement constant.

À mes frères et sœurs bien-aimés, qui ont toujours été un soutien constant tout au long de mon parcours. Merci pour votre compréhension, votre patience et votre soutien inébranlable.

Je vous dédie ce travail en signe de ma profonde gratitude et de mon appréciation pour tout ce que vous avez fait pour moi.

Sommaire

Titre	Page
Sommaire	
Introduction générale	1
Chapitre I : Equations de l'écoulement de transitoire dans les conduites sous-pression	
1.1 Introduction	3
1.2 Modèle mathématique de l'écoulement transitoire	3
1.2.1 équation de continuité	3
1.2.2 équation dynamique	6
1.3 Conclusion	10
Chapitre II : Résolution des équations de l'écoulement transitoire par la méthode des différences finies	
2.1 Introduction	12
2.2 transformation des équations de l'écoulement transitoire	12
2.3 méthode des différences finies	15
2.3.1 Application du schéma explicite en différences finies aux équations de l'écoulement transitoire	15
2.3.2 Application du schéma implicite en différences finies aux équations de l'écoulement transitoire	16
2.3.3 Application du schéma de (Crank-Nicolson) ou mixte en différences finies aux équations de l'écoulement transitoire	18
2.3.4 Application du schéma de Lax-Friedrichs aux équations de l'écoulement transitoire	19
2.3.5 Méthode de Richtmayer	20
2.3.6 Méthode de MacCormack	21
2.3.7 Méthode alternative	22
2.3.8 Les nœuds aux limites (frontières)	22
a) Au niveau du réservoir	22
b) Au niveau de la vanne	23
2.3.9 Analyse de l'approximation par la méthode des différences finies	23
2.3.9.1 Erreur de troncature	23
2.3.9.2 Erreur d'arrondi	23
2.3.9.3 Consistance d'un schéma aux différences finies	24
2.3.9.4 Stabilité du schéma explicite	24
2.3.9.5 Critère de stabilité et choix des pas d'espace et de temps	24
2.3.9.6 Convergence du schéma explicite	25
2.4 Méthode des caractéristiques ou (MDC)	25
2.5 Méthode des Eléments Finis (MEF)	30
2.6 Méthode des Volumes Finis (MVF)	30
2.7 Conclusion	31
Chapitre III : Présentation de la méthode de MacCormack	
3.1 Introduction	33
3.2 Transformation des équations de flux transitoire	33
3.3 Méthode de résolution	34
a) Etape de prédiction	35
b) Etape de correction	35
3.4 Les avantages et les limitations de la méthode macCormack par rapport à d'autres approches	38

Sommaire

3.4.1 Avantages de la méthode MacCormack	38
3.4.2 Limitations de la méthode MacCormack	38
3.5 Conclusion	39
Chapitre IV : Application, résultats et discussion	
4.1 Introduction	41
4.2 Position du problème et conditions aux limites	41
4.2.1 Position du problème	41
4.2.2 Conditions aux limites	42
4.2.2.1 Conditions aux limites au niveau d'un réservoir d'alimentation à niveau constant	42
4.2.2.2 Conditions aux limites au niveau de la vanne	42
4.3 Type de vannes	44
4.3.1 Vanne sphérique	45
4.3.2 Vanne carrée	45
4.3.3 Vanne à bille	46
4.3.4 Vanne papillon	47
4.3.5 Vanne à pointeau	47
4.3.6 Vanne circulaire	48
4.3.7 Vanne à clapet simple	49
4.3.8 Vanne à clapet double	49
4.3.9 Vanne à cage	50
4.3.10 Vanne à clapet rotatif excentré	50
4.4 Equations de l'écoulement transitoire	51
a) cas d'une conduite libre	51
b) cas d'une conduite enterrée	52
4.5 Effet de l'angle d'inclinaison sur la loi de fermeture	55
4.6 Effet de l'angle d'inclinaison sur la pression optimale	56
4.7 Effet de la longueur de la conduite sur la loi de fermeture et la pression optimale	56
4.8 Effet de la profondeur d'enterrement de la conduite sur la loi de fermeture	58
4.9 Cas de fermeture rapide	59
4.10 Cas de fermeture lente	60
4.10.1 Lois de fermeture linéaire et quadratique	60
4.10.2 Recherche de lois optimales pour éviter la surpression	62
4.11 Conclusion	65
Conclusion générale	67

Listes des figures

Figure	Page
Chapitre I : équations de l'écoulement transitoire dans les conduite sous pression	
Figure (1.1): Déplacement d'un élément liquide	3
Figure (1.2) : Façons d'assemblage et d'encrage d'une conduite	5
Figure (1.3) : Les forces exercées sur un élément liquide en déplacement dans une conduite sous pression	6
Chapitre II : Résolution des équations de l'écoulement transitoire par la méthode de des différences finies	
Figure (2 .1) : Maillage en temps et en espace de la méthode explicite en différences finies	19
Chapitre III : présentation de la méthode MacCormack	
Figure (3.1) : Maillage dans le temps et dans l'espace des méthodes MacCormack et MOC	38
Chapitre IV : Application, résultats et discussion	
Figure (4.1): Schéma du système hydraulique 'une vanne motorisée alimentée en eau à partir d'un réservoir	41
Figure (4.2) : Sortie de l'eau à partir d'un réservoir à charge constante	42
Figure (4.3): Fonctions de fermeture pour différentes valeurs de l'exposant m	44
Figure (4.4) : Représentation schématique du robinet d'arrêt sphérique	45
Figure (4.5) : Représentation schématique du robinet-vanne carré	46
Figure (4.6) : Représentation schématique du robinet à tournant sphérique	46
Figure (4.7) : Représentation schématique de la vanne papillon	47
Figure (4.8) : Représentation schématique de la vanne à pointeau	48
Figure (4.9) : Représentation schématique du robinet-vanne circulaire	49
Figure (4.10): Vanne à clapet simple	49
Figure (4.11) : Vanne à clapet double	50
Figure (4.12) : Vanne à cage	50
Figure (4.13) : Vanne à clapet rotatif excentré	51
Figure (4.14) : Coupe transversale de la conduite	53
Figure (4.15) : Organigramme de calcul des paramètres hydrauliques en écoulement transitoire	54
Figure (4.16) : Variation de l'exposant de la loi de fermeture en fonction de l'angle d'inclinaison de la conduite pour les temps de fermeture de la vanne égaux à $1t_4$ et $2t_4$	55
Figure (4.17) : Variation de la pression optimale en fonction de l'angle d'inclinaison de la conduite pour les temps de fermeture de la vanne égaux à $1t_4$ et $2t_4$	56
Figure (4.18) : Variation de l'exposant de la loi de fermeture en fonction de la longueur de la conduite pour les temps de fermeture de la vanne égaux à $1t_4$ et $2t_4$	57
Figure (4.19) : Variation de la pression optimale en fonction de la longueur de la conduite pour les temps de fermeture de la vanne égaux à $1t_4$ et $2t_4$	57
Figure (4.20) : Variation de l'exposant de la loi de fermeture en fonction de la profondeur d'enterrement de la conduite pour les temps de fermeture de la vanne égaux à $1t_4$ et $2t_4$	58
Figure (4.21) : Variation de la pression optimale en fonction de la profondeur d'enterrement de la conduite pour les temps de fermeture de la vanne égaux à $1t_4$ et $2t_4$	59
Figure. (4.22): Résultat de simulation de pression en fonction du temps pour les lois de fermeture linéaires et quadratiques	60

Listes des figures

Figure (4.23) (a): Résultat de simulation de la pression au niveau de la vanne en fonction du temps pour la loi linéaire quadratique	61
Figure (4.23) (b): Résultat de simulation de la pression au niveau de la vanne en fonction du temps pour la loi de fermeture quadratique	61
Figure (4.24): Résultat de simulation de surpression au niveau de la vanne en fonction du temps pour les lois de fermeture linéaire et quadratique	62
Figure (4.25): Résultat de simulation de la dépression au niveau de la vanne en fonction du temps pour les lois de fermeture linéaire et quadratique	62
Figure (4.26): Résultat de simulation de la valeur optimale de l'exposant m en fonction du temps de fermeture de la vanne dans le cas d'une protection contre les surpressions	63
Figure (4.27) (a): Variation de la surpression en fonction du temps de fermeture pour un m optimal	64
Figure (4.27) (b): Variation de la dépression correspondante.	64

Listes des tableaux

Tableau	page
Tableau 1 : Caractéristiques des matériaux utilisés	53
Tableau 2 : Caractéristiques du réservoir, du débit et du fluide	54

Résumé

Résumé :

Ce travail a pour objectif d'analyser les écoulements transitoires dans les réseaux sous pression. Il présente les équations fondamentales qui régissent ces écoulements, les méthodes de résolution employées, et l'implémentation pratique des modèles obtenus.

Le schéma en différences finies de MacCormack est utilisé pour résoudre les équations hyperboliques associées.

Un système hydraulique composé d'un grand réservoir, d'une conduite et d'une vanne automatisée (R – C – V) a été utilisé pour calculer les paramètres hydrauliques en régime transitoire. Les résultats démontrent que les paramètres hydrauliques subissent des variations abruptes en un laps de temps très court, ce qui peut engendrer des effets significatifs sur le système étudié.

Par ailleurs, des courbes représentant les variations temporelles de la surpression et de la dépression ont été tracées selon les lois linéaire, quadratique et optimale. Ces courbes sont cruciales pour déterminer le temps de fermeture optimal, permettant d'éviter les surpressions excessives et les risques de cavitation et elles permettent de choisir la pression nominale du moyen de protection en fonction du temps de fermeture de la vanne .

Mots Clés : Ecoulement transitoire – Modèle mathématique – Méthodes de résolution - Méthode de MacCormack – Surpression et dépression – temps et lois optimaux de fermeture.

Abstract :

This study aims to analyze transient flows in pressurized networks. It presents the fundamental equations governing these flows, the methods used to solve them, and the practical implementation of the obtained models.

The MacCormack finite difference scheme is employed to solve the associated hyperbolic equations.

A hydraulic system comprising a large reservoir, a pipe, and an automated valve (R – C – V) was used to calculate the hydraulic parameters in transient conditions. The results showed that the hydraulic parameters undergo abrupt changes within a very short time, which can significantly affect the studied system.

Additionally, curves representing the temporal variations of overpressure and under pressure were plotted according to linear, quadratic, and optimal laws. These curves are crucial for determining the optimal closing time, helping to avoid excessive pressures and cavitation risks.

Keywords: Transient flow - Mathematical model - Solution methods - MacCormack method - Overpressure and under pressure - Optimal closing time and laws.

Résumé

ملخص:

يهدف هذا العمل إلى تحليل التدفقات العابرة في الشبكات المضغوطة. يعرض المعادلات الأساسية التي تحكم هذه التدفقات، الطرق المستخدمة لحلها، والتطبيق العملي للنماذج المتحصلة. يتم استخدام طريقة ماكورماك في الفروقات المحدودة لحل المعادلات الزائدية المرتبطة.

لحساب المعايير الهيدروليكية في $(R - C - V)$ تم استخدام نظام هيدروليكي يتكون من خزان كبير، أنبوب، وصمام آلي النظام العابر. أظهرت النتائج أن المعايير الهيدروليكية تتعرض لتغيرات حادة في فترة زمنية قصيرة، مما يمكن أن يسبب تأثيرات كبيرة على النظام المدروس. بالإضافة إلى ذلك، تم رسم منحنيات تمثل التغيرات الزمنية للضغط الزائد والضغط المنخفض وفقاً للقوانين الخطية، التربيعية، والمثلثية. تعتبر هذه المنحنيات ضرورية لتحديد الوقت الأمثل للإغلاق، مما يساعد في تجنب الضغوط الزائدة والمخاطر الناتجة عن التجويف.

الكلمات المفتاحية: التدفق العابر - النموذج الرياضي - طرق الحل - طريقة ماكورماك - الضغط الزائد والضغط المنخفض - الوقت والقوانين المثلى للإغلاق



INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

Introduction générale

Le phénomène transitoire dans une conduite sous pression, souvent désigné sous le terme coup de bélier ou choc hydraulique, se produit lorsque l'écoulement du fluide est soudainement modifié par des actions telles que la fermeture rapide d'une vanne ou l'arrêt brusque d'une pompe. Cette perturbation entraîne des variations rapides de pression et de débit, générant des ondes de choc qui se propagent le long de la conduite. Les conséquences peuvent être graves, incluant des surpressions et des dépressions susceptibles de provoquer des dommages structuraux, tels que des fissurations ou des déformations des canalisations.

La modélisation et la simulation de ce phénomène hydraulique sont essentielles pour comprendre et anticiper les effets des transitoires hydrauliques. Ces techniques permettent de prévoir les variations de pression et de débit dans le système, et d'évaluer les impacts potentiels sur l'infrastructure. En utilisant des modèles mathématiques basés sur les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

Les concepteurs peuvent simuler différentes conditions et scénarios pour optimiser la conception des systèmes de conduites et mettre en place des mesures de protection adéquates.

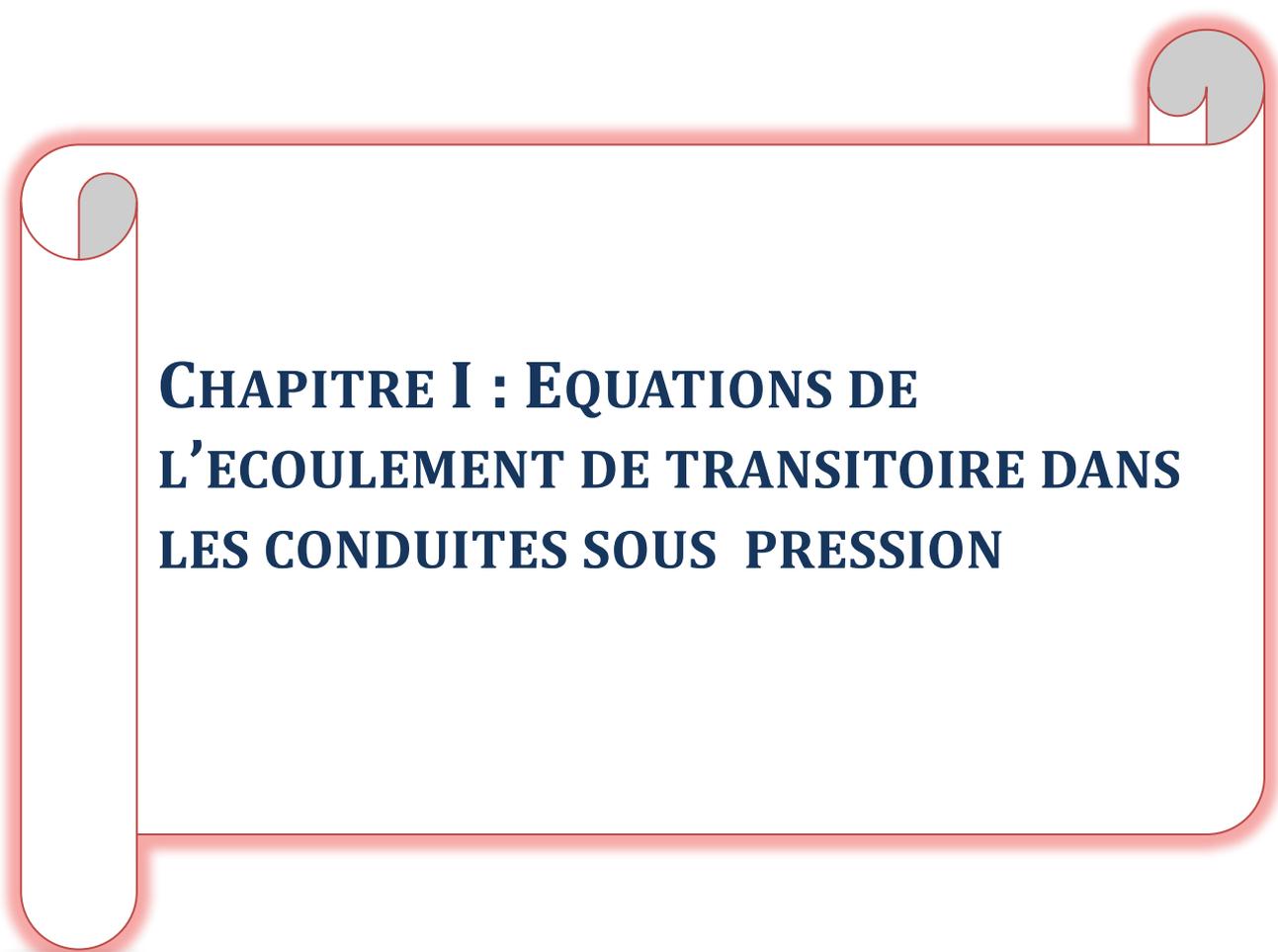
Dans ce travail, nous présenterons une contribution à l'analyse de l'écoulement transitoire dans une conduite sous pression.

Nous entamerons ce travail par une démonstration du modèle mathématique régissant les équations de l'écoulement transitoire dans les conduites sous pression.

Nous aborderons par la suite, une description méticuleuse de quelques méthodes permettant de résoudre les équations de l'écoulement transitoire.

Le troisième chapitre sera consacré à la méthode choisie pour traiter un cas pratique de l'écoulement transitoire.

Le quatrième chapitre, qui est la colonne vertébrale de ce travail, a pour objectif de mettre en application, la méthode choisie pour résoudre le modèle mathématique régissant le phénomène transitoire engendré et entamer une procédure d'optimisation des paramètres hydrauliques générés.



**CHAPITRE I : EQUATIONS DE
L'ÉCOULEMENT DE TRANSITOIRE DANS
LES CONDUITES SOUS PRESSION**

Chapitre I Equations de l'écoulement transitoire dans les conduites sous pression

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la démonstration des équations de l'écoulement transitoire dans les conduites sous pression tout en détaillant les paramètres de base de ces équations.

1.2 Modèle mathématique de l'écoulement transitoire

Il est primordial lors de l'étude des écoulements transitoires de présenter les modèles mathématiques pouvant aider le concepteur des systèmes d'adduction à fournir les moyens optimaux de protection contre les effets nocifs de l'augmentation brutale des paramètres de cet écoulement. Ces modèles sont décrites fidèlement par les équations de base établies par Saint-Venant démontrées successivement à partir des équations de la continuité et de la dynamique.

1.2.1 Equation de continuité

L'expression de l'équation de continuité sera examinée en analysant les déformations de masse d'un volume de liquide entre les instants t et $t+dt$. Comme l'indique la figure (3.1), considérons comme constante cette masse exprimée par, $\rho.V = \rho.S \Delta x$, reste constante (Munier 1980; Ouragh 1971). [1] [2]

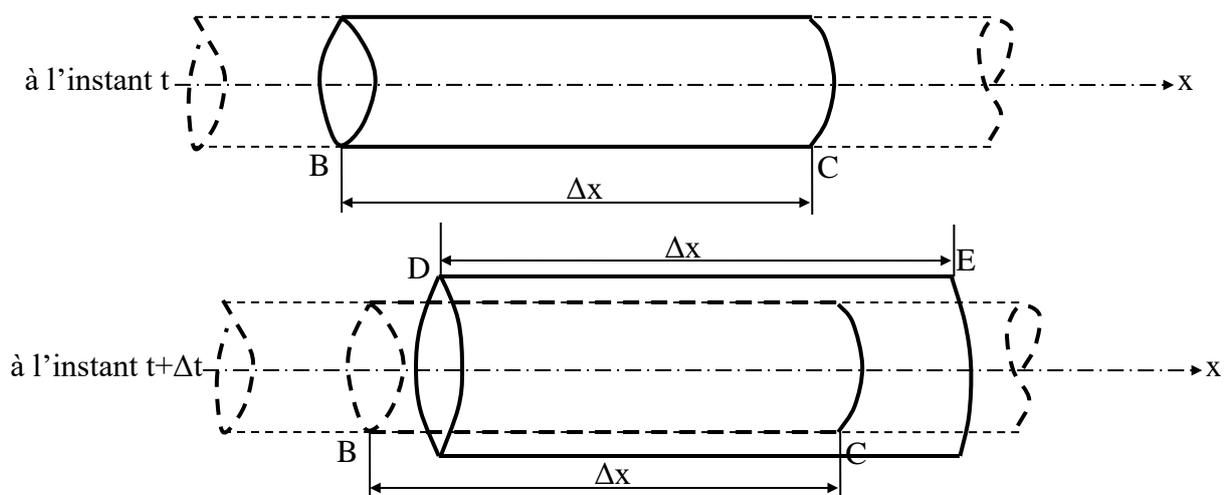


Fig. (1.1): Déplacement d'un élément liquide

La variation de la masse au cours du temps est nulle, ce qui permet d'écrire.

$$dM = 0 \Rightarrow d(\rho.S.\Delta x) = 0$$

Avec :

- ρ : la masse volumique du liquide.
- S : la section radiale.
- Δx : la variation de longueur de l'élément liquide.

D'où

Chapitre I Equations de l'écoulement transitoire dans les conduites sous pression

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{ds}{s} + \frac{d(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \quad (1.1)$$

Variation de longueur de l'élément liquide

$$\frac{d(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dt \quad (1.2)$$

Où u est la vitesse d'écoulement dans la direction x.

Variation de la masse volumique de l'élément liquide

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{K} \quad (1.3)$$

où : K est la compressibilité du liquide et dp la variation de la pression

Variation de section de l'élément liquide

$$\frac{dS}{S} = \frac{D \cdot C}{E \cdot e} \cdot dP \quad (1.4)$$

avec :

D : diamètre intérieur de la conduite;

e : Epaisseur de la conduite;

C : coefficient d'ancrage

E : Module de Young du matériau.

Il suffit de remplacer chaque terme de l'équation (1.1) par les expressions données dans les équations (1.2), (1.3) et (1.4) pour obtenir l'expression de l'équation de continuité en régime transitoire.

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{D \cdot C}{E \cdot e} \cdot dP + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dt = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{K} + \frac{D \cdot C}{E \cdot e} \right) \cdot dP + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dt = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{K} + \frac{D \cdot C}{E \cdot e} \right) \cdot \frac{dP}{dt} = 0 \quad (1.5)$$

On voit que le coefficient de déformabilité $\left(\frac{1}{K} + \frac{D \cdot C}{E \cdot e} \right)$ dépend d'une part de la compressibilité du liquide, K, et d'autre part des caractéristiques du tuyau $\frac{D}{E \cdot e}$ (mince ou épais) et de la façon dont il est assemblé et ancré représenté par le coefficient C .[1] [2]

Le coefficient C qui dépend de la façon d'assemblage et d'ancrage de la conduite s'écrit comme suit :

Chapitre I Equations de l'écoulement transitoire dans les conduites sous pression

$$C = \left(1 - \frac{\nu K'}{2}\right) \frac{d}{d+e} + 2(1+\nu) \frac{e}{d} \quad (1.6)$$

Où : ν est le coefficient de Poisson et K' dépend de l'ancrage. Si $C=1$, l'expression de la célérité devient celle obtenue par Allievi.

trois cas d'assemblage et d'ancrage sont illustrés dans la figure (1.2)

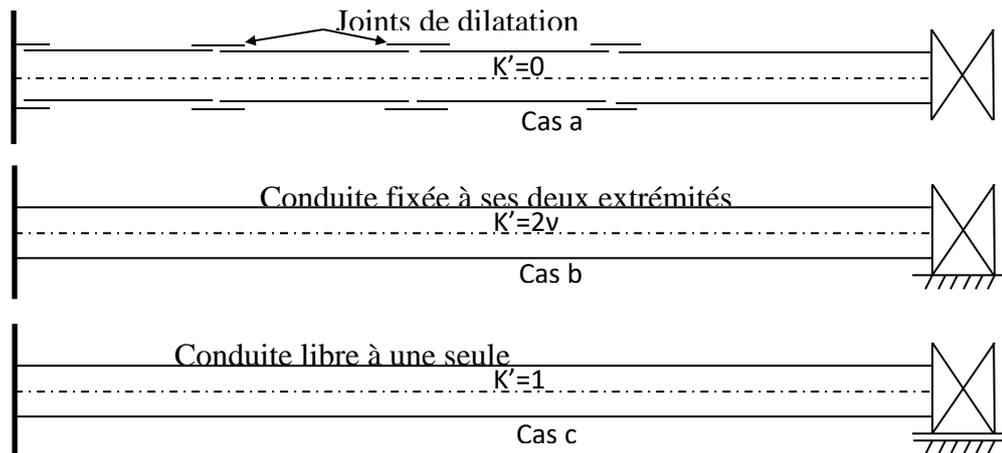


Figure (1.2) : Façons d'assemblage et d'encrage d'une conduite

L'application de cette expression pour différents cas d'ancrage permet d'écrire :

- a) $K'=0$ pour le cas d'une conduite équipée de joints de dilatation.
- b) $K'=2\nu$ pour le cas d'une conduite fixée à ses deux extrémités empêchant tout déplacement longitudinal.
- c) $K'=1$ pour une conduite libre à une seule extrémité.

Ce terme est donc une caractéristique de l'installation sur laquelle repose le phénomène du coup de bélier, par conséquent on pose :

$$\frac{1}{a^2} = \rho \left(\frac{1}{K} + \frac{D}{E \cdot e} \cdot C \right) \quad (1.7)$$

La constante « a » représente la vitesse de propagation de l'onde dans le liquide en régime transitoire.

Comme la dérivée totale de la pression dans une seule dimension, dans ce cas la direction x , s'écrit :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \quad (1.8)$$

L'équation (1.5) devient:

Chapitre I Equations de l'écoulement transitoire dans les conduites sous pression

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{K} + \frac{D.C}{E.e} \right) \cdot \frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a^2} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0$$

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.9)$$

L'expression (1.8) est la première équation de Saint Venant.

1.2.2 Equation dynamique

La deuxième équation de Saint Venant peut être obtenue en appliquant le théorème des quantités de mouvement sur un élément de petit volume se déplaçant à l'intérieur du tube pendant la propagation de l'onde [2]. La figure (1.3) montre les différentes forces exercées sur un élément liquide en mouvement dans une conduite forcée.

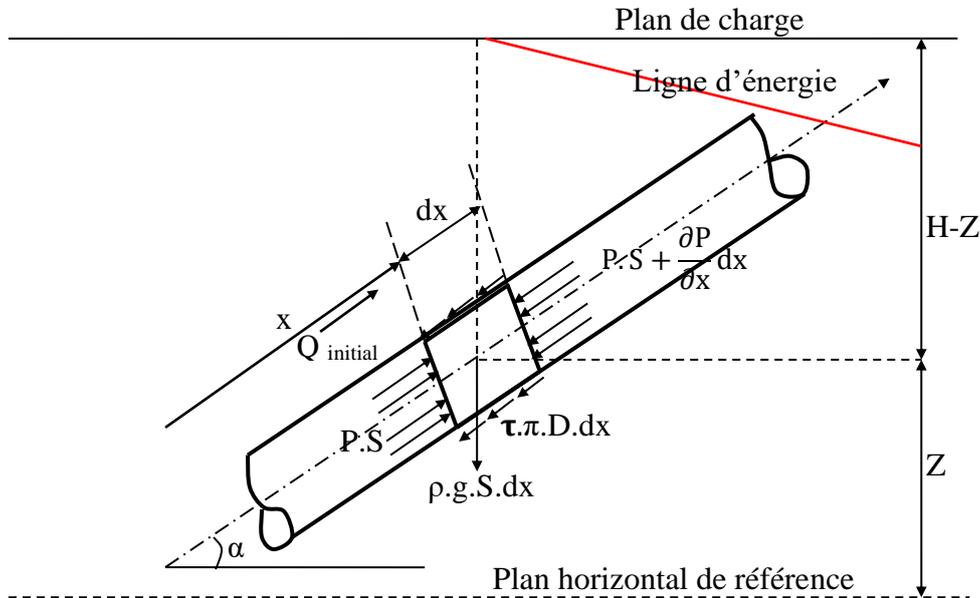


Fig. (1.3) : Les forces exercées sur un élément liquide en déplacement dans une conduite sous pression

$$\frac{d(M \cdot u)}{dt} = \sum F_{\text{extérieures}} \quad (1.10)$$

Avec :

$\sum F_{\text{extérieures}}$: La somme des forces extérieures,

M : La masse de l'élément liquide,

U : La vitesse moyenne d'écoulement.

Ce qui indique que la dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures appliquées à l'élément fluide.

Chapitre I Equations de l'écoulement transitoire dans les conduites sous pression

$$\frac{d(M.u)}{dt} = u \frac{dM}{dt} + M. \frac{du}{dt} \quad (1.11)$$

La masse de l'élément liquide ne varie pas dans son déplacement, on a donc $\frac{dM}{dt} = 0$, ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{d(M.u)}{dt} = M \frac{du}{dt} = \rho. S. dx. \frac{du}{dt} \quad (1.12)$$

Notons tout d'abord :

$$\frac{dZ}{dX} = \sin(\alpha) \text{ et } P = \rho g(H - Z) \text{ en négligeant les termes en } \frac{u^2}{2g}$$

Les forces extérieures appliquées et projetées sur l'axe de la conduite en prenant la direction de l'écoulement comme sens positif sont :

Les forces de pression hydrostatique

$$F_P = P. S - \left(P. S + \frac{\partial P}{\partial x} S. dx \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} S. dx$$

La force de gravité qui est représentée par le poids de l'élément liquide.

$$F_{\text{Poids}} = -\rho. g. S. dx. \sin(\alpha)$$

La force de frottement :

$$F_{\text{frottement}} = -\tau. \pi. D. dx$$

Où : τ est la contrainte tangentielle visqueuse (N/m^2).

Déterminons $\sum F_{\text{extérieures}}$ tout en se basant sur la figure 2.

$$\sum F_{\text{extérieures}} = - \frac{\partial P}{\partial x} S. dx - \rho. g. S. dx. \sin(\alpha) - \tau. \pi. D. dx \quad (1.13)$$

Dans cette dernière expression on a négligé le terme contenant la variation de la section le long de l'élément.

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

Déterminons l'expression $\tau. \pi. D$, si les pertes de charge sont représentées par la formule de Darcy-Weisbach.

$$\Delta H = \frac{\lambda L u^2}{D 2g}$$

Chapitre I Equations de l'écoulement transitoire dans les conduites sous pression

La variation de la pression s'écrit :

$$\Delta P = \rho \cdot g \cdot \Delta H = \rho \cdot g \cdot \frac{\lambda L u^2}{D \cdot 2g}$$

On peut écrire alors les forces de frottement F_r , sur un tronçon de longueur L , par l'une des deux formules suivantes :

$$F_{\text{frottement}} = \tau \cdot \pi \cdot D \cdot L \text{ ou } F_{\text{frottement}} = \Delta P \frac{\pi D^2}{4}$$

D'où l'ondéduit facilement

$$\tau \cdot \pi \cdot D \cdot L = \Delta P \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow \tau \cdot \pi \cdot D \cdot L = \rho \cdot g \cdot \frac{\lambda L u^2}{D \cdot 2g} \frac{\pi D^2}{4}$$

Le gradient hydraulique qui est le rapport entre la perte de charge et la longueur s'écrit :

$$I_{\text{Hydraulique}} = \frac{\Delta H}{L} = \frac{\frac{\lambda L u^2}{D \cdot 2g}}{L} = \frac{\lambda u^2}{D \cdot 2g}$$

Posons $j = I_{\text{Hydraulique}}$, nous aurons :

$$j = \frac{\lambda u^2}{D \cdot 2g}$$

$$\tau \cdot \pi \cdot D \cdot L = \rho \cdot g \cdot \frac{\lambda L u^2}{D \cdot 2g} \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow \tau \cdot \pi \cdot D = \rho \cdot g \cdot j \cdot S \quad (1.14)$$

Où :

τ : la tension unitaire de frottement à la paroi en (N/m²);

λ : coefficient de résistance ou de Darcy ;

D : diamètre intérieur de la conduite ;

U : Vitesse moyenne d'écoulement.

Portons l'expression de $\tau \cdot \pi \cdot D$ dans l'équation (1.14) on obtient :

$$\Sigma F_{\text{extérieures}} = \frac{-\partial P}{\partial x} S \cdot dx - \rho \cdot g \cdot S \cdot dx \cdot \sin(\alpha) - \rho \cdot g \cdot j \cdot S \cdot dx \quad (1.15)$$

En portant l'équation (1.15) dans l'équation (1.13) on aura :

$$\frac{d(M \cdot u)}{dt} = \Sigma F_{\text{extérieures}}$$

Chapitre I Equations de l'écoulement transitoire dans les conduites sous pression

$$\rho \cdot S \cdot dx \cdot \frac{du}{dt} = \frac{-\partial P}{\partial x} S \cdot dx - \rho \cdot g \cdot S \cdot dx \cdot \sin(\alpha) - \rho \cdot g \cdot j \cdot S \cdot dx$$

Simplifions par $\rho \cdot S \cdot dx$, nous obtenons :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - g \cdot \sin(\alpha) - j \cdot g \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - g(\sin(\alpha) + j)$$

Où autrement écrit :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin(\alpha) + j) \quad (1.16)$$

L'expression (1.16) est la seconde équation de Saint Venant.

Comme la pression appliquée sur l'élément liquide s'écrit :

$$P = \rho g(H - Z) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \rho \cdot g \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right)$$

Puisque

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \sin(\alpha)$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \left(\rho \cdot g \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \sin(\alpha) \right) \right) = -g(\sin(\alpha) + j)$$

$$\frac{du}{dt} + g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} - g \cdot \sin(\alpha) = -g \cdot (\sin(\alpha) + j) \Rightarrow \frac{du}{dt} + g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = -g \cdot j$$

Ecrivons la dérivée totale par rapport au temps de la vitesse en fonction des dérivées partielles sans oublier que :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

Portons cette dernière dans la précédente on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = -g \cdot j \quad (1.17)$$

Nous pouvons également remplacer, la dérivée totale de la vitesse, dans la seconde équation de Saint Venant, nous aurons :

Chapitre I Equations de l'écoulement transitoire dans les conduites sous pression

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin(\alpha) + j) \quad (1.18)$$

L'équation (1.17) est la deuxième équation de Saint Venant.

Donc, les équations qui décrivent les phénomènes des écoulements transitoires en charge dans les réseaux d'adduction hydrauliques, sont les équations (1.9) et (1.18) formant le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (1.19)$$

Ces deux équations expriment la variation de deux paramètres à savoir : la vitesse et la pression dans le temps, t, et dans la direction de l'écoulement, x [1] [2].

1.3 Conclusion

Les deux équations de l'écoulement transitoire dans les conduites sous pression sont obtenues, en appliquant les équations de la continuité et de la quantité de mouvement, permettent de traduire tous les mouvements transitoires dans les conduites sous pression. Elles permettent également de fournir certaines grandeurs physiques, tels que les relations de la célérité d'onde de la vitesse et de la pression en fonction du temps.



**CHAPITRE II: RESOLUTION DES
EQUATIONS DE L'ECOULEMENT
TRANSITOIRE PAR LA METHODE DES
DIFFERENCES FINIES**



2.1 Introduction

Ce chapitre aura pour objectif de réaliser la transformation des équations de l'écoulement transitoire dans les conduites sous pression, écrites en fonction de la vitesse et de la pression, à des équations écrites en fonction de la charge piézométrique (charge de pression) et du débit sans négliger aucun terme d'une part et d'autre part de mettre en évidence quelques techniques basées sur la méthode des différences finies pour résoudre les équations du système obtenu.

2.2 Transformation des équations de l'écoulement transitoire

Les équations gouvernant les écoulements transitoires dans les conduites sous pression sont données par les deux équations représentées par le système (2.1).

$$\begin{cases} a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (2.1)$$

Dans un objectif de réécrire le système précédent en fonction du débit et de la charge de pression, on ne néglige pas les termes $u(\partial u/\partial x)$ et $u(\partial P/\partial x)$ devant les termes $\partial u/\partial t$ et $\partial P/\partial t$ et la conduite est considérée inclinée c'est-à-dire $\sin(\alpha) \neq 0$, les opérations suivantes seront effectuées.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial(\rho g(H - Z))}{\partial t} = \rho g \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(\rho g(H - Z))}{\partial x} = \rho g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \quad (2.3)$$

$$u \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{Q}{S} \frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{Q}{S} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{Q}{S} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{Q}{S} \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \left(\frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \left(\rho g \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \right) + \rho g \frac{Q}{S} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right) = 0 \\ \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\rho g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right) = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{g}{a} \cdot \left(\left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \right) + \frac{Q}{S} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right) = 0 \\ \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial x} + g \left(\left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right) = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (2.8)$$

Multiplions la première équation par a/g et la deuxième par S, nous obtenons :

$$\begin{cases} \left(\frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \right) + \frac{Q}{S} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} + gS \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = -gS(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{Q}{S} \frac{\partial Z}{\partial x} - \left(\frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) - \frac{Q}{S} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial t} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} - gS \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) - gS(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (2.10)$$

$\partial Z/\partial t=0$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{Q}{S} \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{S} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} - gS \frac{\partial H}{\partial x} + gS \frac{\partial Z}{\partial x} - gS \sin(\alpha) - gSj \end{cases} \quad (2.11)$$

$\partial Z/\partial X=\sin(\alpha)$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{Q}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{S} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} - gS \frac{\partial H}{\partial x} - gSj \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (2.13)$$

Dans notre cas, on néglige pas les termes $u(\partial u/\partial x)$ et $u(\partial P/\partial x)$ devant les termes $\partial u/\partial t$ et $\partial P/\partial t$. ainsi que la conduite est considérée inclinée c'est-à-dire $\sin(\alpha) \neq 0$.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial(\rho g(H - Z))}{\partial t} = \rho g \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \right) \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(\rho g(H - Z))}{\partial x} = \rho g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \quad (2.15)$$

$$u \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{Q}{S} \frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{Q}{S} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (2.17)$$

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{Q}{S} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{Q}{S} \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \left(\frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \left(\rho g \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \right) + \rho g \frac{Q}{S} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right) = 0 \\ \left(\frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\rho g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right) \right) = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{g}{a} \cdot \left(\left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \right) + \frac{Q}{S} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right) = 0 \\ \left(\frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial x} + g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right) = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (2.21)$$

Multiplions la première équation par a/g et la deuxième par S, nous obtenons :

$$\begin{cases} \left(\frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \right) + \frac{Q}{S} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} + gS \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right) = -gS(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{Q}{S} \frac{\partial Z}{\partial x} - \left(\frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) - \frac{Q}{S} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial t} \\ \left(\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} - gS \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) - gS(\sin(\alpha) + j) \right) \end{cases} \quad (2.23)$$

$\partial Z/\partial t=0$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{Q}{S} \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{S} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} - gS \frac{\partial H}{\partial x} + gS \frac{\partial Z}{\partial x} - gS \sin(\alpha) - gSj \right) \end{cases} \quad (2.24)$$

$\partial Z/\partial X = \sin(\alpha)$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{Q}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{S} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} - gS \frac{\partial H}{\partial x} \pm gSj \end{cases} \quad (2.25)$$

2.3 Méthode des différences finies

2.3.1 Application du schéma explicite en différences finies aux équations de l'écoulement transitoire

L'utilisation du schéma explicite en différences finies permet d'écrire les schémas suivants.

Schéma de la dérivée première de la charge par rapport au temps

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} \quad (2.26)$$

Schéma de la dérivée première du débit par rapport au temps

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} \quad (2.27)$$

Schéma central de la dérivée première de la charge dans la direction x

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.28)$$

Schéma central de la dérivée première du débit dans la direction du mouvement x

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.29)$$

$$\bar{Q}_i = \frac{1}{2} (Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^n)$$

$$j = \frac{\lambda \bar{Q}_i |\bar{Q}_i|}{2gdS^2} \quad (2.30)$$

Où : (n) correspond à $t=t$ et (n+1) correspond à $(t+\Delta t)$.

$$\begin{cases} \frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} = \frac{\bar{Q}_i}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2}{gS} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} \\ \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} = -\frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} - gS \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\lambda \bar{Q}_i |\bar{Q}_i|}{2Sd} \end{cases} \quad (2.31)$$

Multiplions les deux équations par Δt , nous aurons :

$$\begin{cases} H_i^{n+1} - H_i^n = \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{S} \sin(\alpha) - \frac{\Delta t a^2}{gS} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{S} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} \\ Q_i^{n+1} - Q_i^n = -\frac{\bar{Q}_i \Delta t}{S} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} - gS \Delta t \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} - \Delta t \frac{\lambda \bar{Q}_i |\bar{Q}_i|}{2Sd} \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\begin{cases} H_i^{n+1} = H_i^n - \frac{\Delta t}{S} \sin(\alpha) \bar{Q}_i - \frac{\Delta t a^2}{2\Delta x gS} (Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{2S\Delta x} (H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) \\ Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \frac{\bar{Q}_i}{S} (Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - \frac{gS \Delta t}{2\Delta x} (H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) - \frac{\Delta t \lambda}{2Sd} \bar{Q}_i |\bar{Q}_i| \end{cases} \quad (2.33)$$

Posons :

$$\frac{\Delta t}{S} \sin(\alpha) \bar{Q}_i = C_1; \frac{\Delta t a^2}{2\Delta x gS} = C_2; \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{2S\Delta x} = C_3$$

$$\frac{\Delta t}{2\Delta x} \frac{\bar{Q}_i}{S} = d_1; \frac{gS \Delta t}{2\Delta x} = d_2; \frac{\Delta t \lambda}{2Sd} \bar{Q}_i |\bar{Q}_i| = d_3$$

$$\begin{cases} H_i^{n+1} = H_i^n - C_1 - C_2(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - C_3(H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) \\ Q_i^{n+1} = Q_i^n - d_1(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - d_2(H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) - d_3 \end{cases} \quad (2.34)$$

Où

$$x_i = i \Delta x \quad (2.35)$$

$$t_i = n \Delta t \quad (2.36)$$

L'utilisation de la méthode des différences pour la résolution du système d'équation régissant l'écoulement transitoire permettent de soulever les remarques suivantes :

- Méthode des différences finies simple à mettre en œuvre (développement limité en série de Taylor);
- Convergence quadratique si les solutions sont régulières;
- Permet de traiter la plupart des conditions limites;
- Mais limitée à des géométries rectangulaires.

C'est pourquoi, il est important d'être vigilant lors de l'utilisation de cette technique.

Si la conduite est horizontale $\sin \alpha = \sin 0^\circ = 0$, $C_1=0$ et le système précédent devient :

$$\begin{cases} H_i^{n+1} = H_i^n - C_2(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - C_3(H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) \\ Q_i^{n+1} = Q_i^n - d_1(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - d_2(H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) - d_3 \end{cases} \quad (2.37)$$

2.3.2 Application du schéma implicite en différences finies aux équations de l'écoulement transitoire

L'utilisation du schéma implicite en différences finies permet d'écrire.

Schéma de la dérivée première de la charge para rapport au temps

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} \quad (2.38)$$

Schéma de la dérivée première du débit par rapport au temps

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} \quad (2.39)$$

Schéma implicite central de la dérivée première de la charge dans la direction du mouvement x

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \quad (2.40)$$

Schéma implicite central de la dérivée première du débit dans la direction du mouvement x

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \quad (2.41)$$

$$\begin{cases} \frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} = \frac{\bar{Q}_i}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2}{gS} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} - \frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \\ \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} = -\frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} - gS \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} - \frac{\lambda \bar{Q}_i |\bar{Q}_i|}{2Sd} \end{cases} \quad (2.42)$$

Multiplions les deux équations par Δt , nous aurons :

$$\begin{cases} H_i^{n+1} - H_i^n = \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{S} \sin(\alpha) - \frac{\Delta t a^2}{gS} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} - \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{S} \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \\ Q_i^{n+1} - Q_i^n = -\Delta t \frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} - gS \Delta t \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} - \Delta t \frac{\lambda \bar{Q}_i |\bar{Q}_i|}{2Sd} \end{cases} \quad (2.43)$$

$$\begin{cases} H_i^{n+1} = H_i^n - \frac{\Delta t}{S} \sin(\alpha) \bar{Q}_i - \frac{\Delta t a^2}{2\Delta x gS} (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}) - \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{2S\Delta x} (H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}) \\ Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{2\Delta x S} (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}) - \frac{gS \Delta t}{2\Delta x} (H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}) - \frac{\Delta t \lambda}{2Sd} \bar{Q}_i |\bar{Q}_i| \end{cases} \quad (2.44)$$

Posons :

$$\frac{\Delta t}{S} \sin(\alpha) \bar{Q}_i = C_1; \frac{\Delta t a^2}{2\Delta x gS} = C_2; \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{2S\Delta x} = C_3$$

$$\frac{\Delta t \bar{Q}_i}{2\Delta x S} = d_1; \frac{gS \Delta t}{2\Delta x} = d_2; \frac{\Delta t \lambda}{2Sd} \bar{Q}_i |\bar{Q}_i| = d_3$$

$$\begin{cases} H_i^{n+1} = H_i^n - C_1 - C_2 (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}) - C_3 (H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}) \\ Q_i^{n+1} = Q_i^n - d_1 (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}) - d_2 (H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}) - d_3 \end{cases} \quad (2.45)$$

$$\begin{cases} -C_3 H_{i-1}^{n+1} + H_i^{n+1} + C_3 H_{i+1}^{n+1} = C_2 Q_{i-1}^{n+1} - C_2 Q_{i+1}^{n+1} + H_i^n - C_1 \\ -d_1 Q_{i-1}^{n+1} + Q_i^{n+1} + d_1 Q_{i+1}^{n+1} = Q_i^n + d_2 H_{i-1}^{n+1} - d_2 H_{i+1}^{n+1} - d_3 \end{cases} \quad (2.46)$$

2.3.3 Application du schéma de (Crank-Nicolson) ou mixte en différences finies aux équations de l'écoulement transitoire

L'utilisation du schéma mixte en différences finies de John-Crank et Phyllis Nicolson permet d'écrire :

Schéma de la dérivée première de la charge para rapport au temps

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} \quad (2.47)$$

Schéma de la dérivée première du débit par rapport au temps

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} \quad (2.48)$$

Schéma mixte central de la dérivée première de la charge dans la direction du mouvement x

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \quad (2.49)$$

Schéma mixte central de la dérivée première du débit dans la direction du mouvement x

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \quad (2.50)$$

$$\begin{cases} \frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} = \frac{Q_i^n}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2}{gS} \left(\frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) - \frac{Q_i^n}{S} \left(\frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \\ \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} = -\frac{Q_i^n}{S} \left(\frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) - gS \left(\frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) - \frac{\lambda Q_i^n |Q_i^n|}{2Sd} \end{cases} \quad (2.51)$$

Multiplications les deux équations par Δt , nous aurons :

$$\begin{cases} H_i^{n+1} - H_i^n = \frac{\Delta t Q_i^n}{S} \sin(\alpha) - \frac{\Delta t a^2}{gS} \left(\frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) - \frac{\Delta t Q_i^n}{S} \left(\frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \\ Q_i^{n+1} - Q_i^n = -\Delta t \frac{Q_i^n}{S} \left(\frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) - gS \Delta t \left(\frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) - \Delta t \frac{\lambda Q_i^n |Q_i^n|}{2Sd} \end{cases} \quad (2.52)$$

$$\begin{cases} H_i^{n+1} + \frac{\Delta t a^2}{gS} \left(\frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \frac{\Delta t Q_i^n}{S} \left(\frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) = H_i^n + \frac{\Delta t Q_i^n}{S} \sin(\alpha) - \frac{\Delta t a^2}{gS} \left(\frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) - \frac{\Delta t Q_i^n}{S} \left(\frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) \\ Q_i^{n+1} + \Delta t \frac{Q_i^n}{S} \left(\frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + gS \Delta t \left(\frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) = Q_i^n - \Delta t \frac{Q_i^n}{S} \left(\frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) - gS \Delta t \left(\frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) - \Delta t \frac{\lambda Q_i^n |Q_i^n|}{2Sd} \end{cases} \quad (2.53)$$

$$\begin{cases} H_i^{n+1} + \frac{\Delta t a^2}{4gS\Delta x} (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}) + \frac{\Delta t Q_i^n}{4S\Delta x} (H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}) = H_i^n + \frac{\Delta t Q_i^n}{S} \sin(\alpha) - \frac{\Delta t a^2}{4gS\Delta x} (Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - \frac{\Delta t Q_i^n}{4S\Delta x} (H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) \\ Q_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{4\Delta x} \frac{Q_i^n}{S} (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}) + \frac{gS\Delta t}{4\Delta x} (H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}) = Q_i^n - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \frac{Q_i^n}{S} (Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - \frac{gS\Delta t}{4\Delta x} (H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) - \Delta t \frac{\lambda Q_i^n |Q_i^n|}{2Sd} \end{cases} \quad (2.54)$$

Posons

$$\frac{\Delta t a^2}{4gS\Delta x} = C_1; \frac{\Delta t Q_i^n}{4S\Delta x} = C_2; \frac{\Delta t}{S} \sin(\alpha) = C_3$$

$$\frac{\Delta t}{4\Delta x} \frac{Q_i^n}{S} = d_1; \frac{gS\Delta t}{4\Delta x} = d_2; \frac{\Delta t \lambda Q_i^n |Q_i^n|}{2Sd} = d_3$$

$$\begin{cases} H_i^{n+1} + C_1(Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}) + C_2(H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}) = H_i^n + C_3 - C_1(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - C_2(H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) \\ Q_i^{n+1} + d_1(Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}) + d_2(H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}) = Q_i^n - d_1(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - d_2(H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) - d_3 \end{cases} \quad (2.55)$$

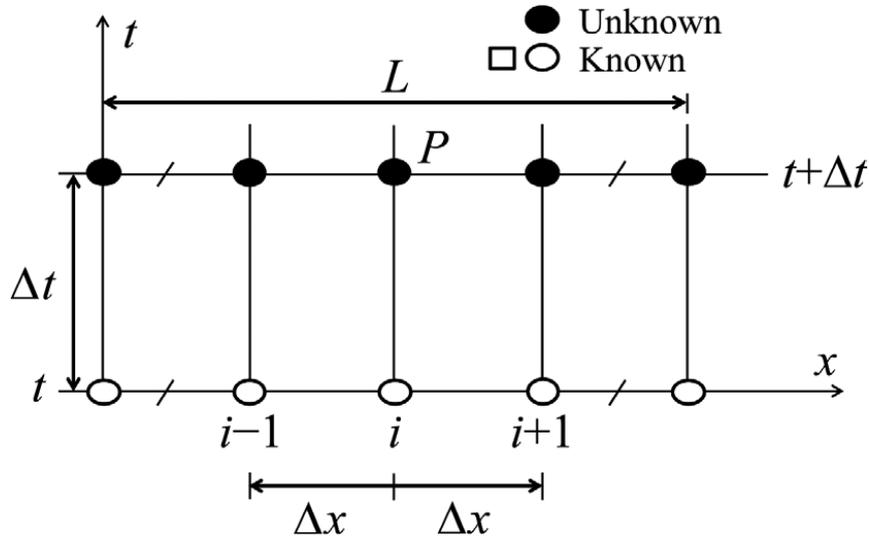


Figure (2.1) : Maillage en temps et en espace de la méthode explicite en différences finies

2.3.4 Application du schéma de Lax–Friedrichs aux équations de l'écoulement transitoire

Les équations de l'écoulement transitoire dans les conduites sous pression s'écrivent en fonction du débit et de la charge totale en une dimension s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{Q}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{S} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} - gS \frac{\partial H}{\partial x} - gSj \end{cases}$$

L'application des schémas de Lax sur les équations de l'écoulement transitoire donne ce qui suit :

- Schéma de différence finie décentrée en temps

La charge totale et le débit s'écrivent successivement:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_i = \frac{H_i^{n+1} - \frac{1}{2}(H_{i+1}^n + H_{i-1}^n)}{\Delta t} \quad (2.56)$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_i = \frac{Q_i^{n+1} - \frac{1}{2}(Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^n)}{\Delta t} \quad (2.57)$$

- Schéma central de la dérivée première en espace (1D)

La charge totale et le débit s'écrivent successivement :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_i = \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.58)$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i = \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.59)$$

L'indice i se réfère à l'espace et k au temps.

En remplaçant ces expressions dans les équations du système des équations de l'écoulement transitoire, on obtient les expressions de calcul suivantes:

$$\begin{cases} \frac{H_i^{n+1} - (H_{i+1}^n + H_{i-1}^n)/2}{\Delta t} = \frac{\bar{Q}_i}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2}{gS} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} \\ \frac{Q_i^{n+1} - (Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^n)/2}{\Delta t} = -\frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} - gS \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} - gSj \end{cases} \quad (2.60)$$

Où

$$\bar{Q}_i = \frac{1}{2} (Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^n) \quad (2.61)$$

$$j = \frac{\lambda \bar{Q}_i |\bar{Q}_i|}{2gdS^2} \quad (2.62)$$

$$\begin{cases} \frac{H_i^{n+1} - (H_{i+1}^n + H_{i-1}^n)/2}{\Delta t} = \frac{\bar{Q}_i}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2}{gS} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} \\ \frac{Q_i^{n+1} - (Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^n)/2}{\Delta t} = -\frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} - gS \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\lambda \bar{Q}_i |\bar{Q}_i|}{2dS} \end{cases} \quad (2.63)$$

Multiplions les deux membres par Δt

$$\begin{cases} H_i^{n+1} = \frac{(H_{i+1}^n + H_{i-1}^n)}{2} + \frac{\bar{Q}_i \Delta t}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2 \Delta t}{gS} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\bar{Q}_i \Delta t}{S} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} \\ Q_i^{n+1} = \frac{(Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^n)}{2} - \Delta t \frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} - \Delta t gS \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} - \Delta t \frac{\lambda \bar{Q}_i |\bar{Q}_i|}{2dS} \end{cases} \quad (2.64)$$

Posons

$$\frac{\bar{Q}_i \Delta t \sin(\alpha)}{S} = C_1; \frac{a^2 \Delta t}{2gS\Delta x} = C_2; \frac{\bar{Q}_i \Delta t}{2S\Delta x} = C_3$$

$$\frac{\Delta t}{2\Delta x} \frac{\bar{Q}_i}{S} = d_1; \frac{\Delta t gS}{2\Delta x} = d_2; \Delta t \frac{\lambda}{2dS} = d_3$$

$$\begin{cases} H_i^{n+1} = (H_{i+1}^n + H_{i-1}^n)/2 + C_1 - C_2(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - C_3(H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) \\ Q_i^{n+1} = (Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^n)/2 - d_1(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - d_2(H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) - d_3 \bar{Q}_i |\bar{Q}_i| \end{cases} \quad (2.65)$$

Le schéma de Lax-Friedrichs, doit être complété par la condition initiale et les conditions aux limites.

2.3.5 Méthode de Richtmayer

Cette méthode est composée de deux étapes, l'une de prédiction et l'autre de correction. La première étape de la méthode Richtmyer calcule les valeurs de $f(H(x, t))$ et $f(Q(x, t))$ à la moitié du temps, $t_{n+1/2}$ et à demi points de grille, $x_{i+1/2}$. Dans la deuxième étape, les valeurs à t_{n+1} sont calculées à partir des données de t_n et $t_{n+1/2}$.

a) Etape de Prédiction:

L'application de la méthode Richtmayer pour la première étape sur le système d'équation numéro 13 donne les expressions suivantes:

$$\begin{cases} H_{i1}^{k+1} = (H_{i+1}^k + H_i^k)/2 + C_1 - C_2(Q_{i+1}^k - Q_i^k) - C_3(H_{i+1}^k - H_i^k) \\ H_{i2}^{k+1} = (H_i^k + H_{i-1}^k)/2 + C_1 - C_2(Q_i^k - Q_{i-1}^k) - C_3(H_i^k - H_{i-1}^k) \\ Q_{i1}^{k+1} = (Q_{i+1}^k + Q_i^k)/2 - d_1(Q_{i+1}^k - Q_i^k) - d_2(H_{i+1}^k - H_i^k) - d_3(\bar{Q}_i|\bar{Q}_i|) \\ Q_{i2}^{k+1} = (Q_i^k + Q_{i-1}^k)/2 - d_1(Q_i^k - Q_{i-1}^k) - d_2(H_i^k - H_{i-1}^k) - d_3(\bar{Q}_i|\bar{Q}_i|) \end{cases} \quad (2.66)$$

avec :

$$C_1 = \frac{\bar{Q}_i \Delta t_i \sin(\alpha)}{S}; C_2 = \frac{a^2 \Delta t}{2gS\Delta x}; C_3 = \frac{\bar{Q}_i \Delta t}{2S\Delta x}$$

$$d_1 = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \frac{\bar{Q}_i}{S}; d_2 = \frac{\Delta t g S}{2\Delta x}; d_3 = \Delta t \frac{\lambda}{2dS}$$

$$\bar{Q}_i = \frac{1}{2}(Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^n)$$

b) Etape de Correction:

En appliquant la deuxième étape de la method de Richtmayer, on obtient les expressions suivantes:

$$\begin{cases} H_{i1}^{k+1} = H_i^k + C_{11} - C_{22}(Q_{i1}^k - Q_{i2}^k) - C_{33}(H_{i1}^k - H_{i2}^k) \\ Q_{i1}^{k+1} = Q_i^k - d_{11}(Q_{i1}^k - Q_{i2}^k) - d_{22}(H_{i1}^k - H_{i2}^k) - d_{33}(\bar{Q}_i|\bar{Q}_i|) \end{cases} \quad (2.67)$$

avec:

$$C_{11} = C1; C_{22} = 2C_2; C_{33} = 2C_3$$

$$d_{11} = 2d_1; d_{22} = 2d_2; d_{33} = d_3$$

2.3.6 Méthode de MacCormak

La méthode MacCormack est un schéma de discrétisation largement utilisé pour la solution numérique d'équations aux dérivées partielles hyperboliques. Cette méthode des différences finies du second ordre a été introduite par Robert W. MacCormack en 1969 [3]. La méthode MacCormack est élégante et facile à comprendre et à programmer [4].

a) Etape de Prédiction: dans l'étape de prédicteur, les valeurs provisoires de H et Q au niveau temporel (t+Δt) sont estimées comme suit :

$$\begin{cases} H_i^* = H_i^k + C_1 - C_2(Q_{i+1}^k - Q_i^k) - C_3(H_{i+1}^k - H_i^k) \\ Q_i^* = Q_i^k - d_1(Q_{i+1}^k - Q_i^k) - d_2(H_{i+1}^k - H_i^k) - d_3\bar{Q}_i|\bar{Q}_i| \end{cases} \quad (2.68)$$

avec:

$$C_1 = \frac{\bar{Q}_i \Delta t_i \sin(\alpha)}{S}; C_2 = \frac{a^2 \Delta t}{gS\Delta x}; C_3 = \frac{\bar{Q}_i \Delta t}{S\Delta x}$$

$$d_1 = \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\bar{Q}_i}{S}; d_2 = \frac{\Delta t g S}{\Delta x}; d_3 = \Delta t \frac{\lambda}{2dS}$$

b) Etape de Correction: Dans l'étape de correction, les valeurs prédites H et Q sont corrigées selon les équations suivantes:

$$\begin{cases} H_i^{k+1} = (H_i^k + H_i^*)/2 + C_{11} - C_{22}(Q_i^k - Q_{i-1}^k) - C_{33}(H_i^k - H_{i-1}^k) \\ Q_i^{k+1} = (Q_i^k + Q_i^*)/2 - d_{11}(Q_i^k - Q_{i-1}^k) - d_{22}(H_i^k - H_{i-1}^k) - d_{33}\bar{Q}_i|\bar{Q}_i| \end{cases} \quad (2.69)$$

avec:

$$C_{11} = \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{S} \sin(\alpha); C_{22} = \frac{\Delta t a^2}{2gS\Delta x}; C_{33} = \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{S2\Delta x}$$

$$d_{11} = \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{2\Delta x S}; d_{22} = \frac{\Delta t g S}{2\Delta x}; d_{33} = \frac{\Delta t \lambda}{2dS}$$

2.3.7 Méthode Alternative

A l'instar des méthodes de Richtmayer et MarcCormak, la méthode alternative comprend deux étapes, la première pour la prédiction et la seconde pour la correction.

a) Etape de Prédiction:

$$\begin{cases} H_{i1}^{k+1} = H_i^k + C_1 - C_2(Q_i^k - Q_{i-1}^k) - C_3(H_i^k - H_{i-1}^k) \\ Q_{i1}^{k+1} = Q_i^k - d_1(Q_i^k - Q_{i-1}^k) - d_2(H_i^k - H_{i-1}^k) - d_3\bar{Q}_i|\bar{Q}_i| \end{cases} \quad (2.70)$$

avec:

$$C_1 = \frac{\bar{Q}_i \Delta t_i \sin(\alpha)}{S}; C_2 = \frac{a^2 \Delta t}{gS\Delta x}; C_3 = \frac{\bar{Q}_i \Delta t}{S\Delta x}$$

$$d_1 = \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{\Delta x S}; d_2 = \frac{\Delta t g S}{\Delta x}; d_3 = \Delta t \frac{\lambda}{2dS}$$

b) Etape de Correction

$$\begin{cases} H_{i1}^{k+1} = \frac{1}{2}(H_i^k + H_{i1}^{k+1}) + C_{11} - C_{22}(Q_{i+1}^{k+1} - Q_i^{k+1}) - C_{33}(H_{i+1}^{k+1} - H_i^{k+1}) \\ Q_{i1}^{k+1} = \frac{1}{2}(Q_i^k + Q_{i1}^{k+1}) - d_1(Q_{i+1}^{k+1} - Q_i^{k+1}) - d_2(H_{i+1}^{k+1} - H_i^{k+1}) - d_3\bar{Q}_i|\bar{Q}_i| \end{cases} \quad (2.71)$$

With:

$$C_{11} = C_1 = \frac{\bar{Q}_i \Delta t_i \sin(\alpha)}{S}; C_{22} = C_2/2 = \frac{a^2 \Delta t}{2gS\Delta x}; C_{33} = C_3/2 = \frac{\bar{Q}_i \Delta t}{2S\Delta x}$$

$$d_{11} = d_1/2 = \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{2\Delta x S}; d_{22} = d_2/2 = \frac{\Delta t g S}{2\Delta x}; d_{33} = d_3 = \Delta t \frac{\lambda}{2dS}$$

2.3.8 Les nœuds aux limites (frontières)

Lors de l'application de la méthode des différences finies apparait, aux limites (à gauche et à droite), toujours des variables indéfinies dans le domaine d'intérêt, c'est pour cela on fait appel à la méthode des caractéristiques pour en se débarrasser.

a) Au niveau du réservoir

H=Hr

Q à chercher

Au nœud i=1 (au réservoir)

$$Q_1^{k+1} = d_1 Q_0^k + Q_1^k (1 - d_3 |Q_1^k|) - d_1 Q_2^k + d_2 H_0^k - d_2 H_2^k \quad (2.72)$$

A cet endroit apparait un nœud fictif (i=0) de coordonnées H₀ et Q₀ et pour en éliminer en utilisant les équations aux caractéristiques à gauche.

$$CN = H(2) - Q(2)(R - T \cdot |Q(2)|) \quad (2.73)$$

H(2) et Q(2) sont des quantités calculées au temps (t) donc :

$$Q(1) = (H_R - CN)/R \quad (2.74)$$

Avec

$$T = B \cdot (x(i+2) - x(i+1)) = B \cdot \Delta x$$
$$B = \frac{\lambda}{2 \cdot g \cdot d \cdot S^2} \text{ et } R = \frac{a}{g \cdot S}$$

b) Au niveau de la vanne

Le débit est en fonction des paramètres suivants : $Q = f(Q_0, \Delta t, C_t, m)$ et s'écrit par l'expression suivante :

$$Q_n^{k+1} = \left(1 - \left(\frac{i \Delta t}{C_t} \right)^m \right) Q_n^k \quad (2.75)$$

La hauteur manométrique totale H est à chercher.

Au nœud $i=n$ (à la vanne)

$$H_n^{k+1} = C_3 Q_n^k H_{n-1}^k + H_n^k - C_3 Q_n^k H_{n+1}^k + C_2 Q_{n-1}^k - C_1 Q_n^k - C_2 Q_{n+1}^k \quad (2.76)$$

Un nœud fictif apparait, il s'agit du nœud (n+1) de coordonnées H_{n+1}^k et Q_{n+1}^k , qu'on doit en se débarrasser par l'utilisation également de la méthode des caractéristiques à droite.

$$\begin{cases} H(n) + R \cdot Q(n) = CP \\ CP = H(n-1) + Q(n-1)(R - T \cdot |Q(n-1)|) \\ Q(n) = (CP - H(n))/R \end{cases} \quad (2.77)$$

Toutefois, dans le cas où la fermeture est commandée le débit à la vanne suit, au fil du temps, une fonction dépendant de la loi de fermeture choisie et dans ce cas la charge totale à la vanne prend la relation suivante :

$$H(n) = CP - R \cdot Q(n) \quad (2.78)$$

2.3.9 Analyse de l'approximation par la méthode des différences finies

2.3.9.1 Erreur de troncature

L'erreur de troncature est l'erreur commise lors de la troncation de la fonction lors du développement en série de Taylor, c'est-à-dire du terme à partir duquel nous négligeons le reste du développement limité. Cette erreur est la différence entre la valeur exacte et celle calculée.

2.3.9.2 Erreur d'arrondi

Une erreur d'arrondi est la différence entre la valeur approchée calculée d'un nombre et sa valeur mathématique exacte.

L'erreur d'arrondi est la différence entre le résultat calculé et la valeur réelle d'un calcul ou d'une opération mathématique. Elle se produit lorsqu'un nombre est arrondi vers le haut ou vers le bas à une certaine décimale ou unité. Les erreurs d'arrondi sont inévitables en raison de la précision finie.

Les erreurs d'arrondi peuvent provenir de différentes sources, par exemple lorsque les nombres sont convertis d'une forme à une autre, lorsque les calculs sont effectués avec une précision limitée ou lorsque des approximations sont utilisées.

2.3.9.3 Consistance d'un schéma aux différences finies

Un schéma aux différences finies est consistant à l'équation exacte si l'EDF tends vers l'EDP lorsque les pas de discrétisation en temps et en espace tendent vers zéro indépendamment.

Pour formaliser cette approche, notons $u(x,t)$ la solution de l'EDP, i.e. $u(x,t)$ vérifie exactement l'équation: $EDP[u]=0$, et u_i^n la solution de l'EDF, i.e. $EDF[u]=0$. Nous allons calculer la différence E_t entre l'EDP et l'EDF aux nœuds du maillage et pour la solution exacte u :

$$E_t = EDF[u(i\Delta x, n\Delta t)] - EDP[u]_{(i\Delta x, n\Delta t)} \quad (2.79)$$

Ce qui donne, compte tenu du fait que $EDP[u]=0$

$$E_t = EDF[u(i\Delta x, n\Delta t)] \quad (2.80)$$

Cette différence est l'erreur de troncature du schéma aux différences finies, et correspond donc à l'erreur commise lorsque l'on remplace la solution approchée u_i^n par la solution exacte aux nœuds du maillage $u(i\Delta x, n\Delta t)$ dans l'équation aux différences EDF.

Le schéma EDF est dit consistant à l'équation EDP si cette erreur de troncature tends vers zéro lorsque le pas de discrétisation en temps Δt et le pas de discrétisation en espace Δx tendent vers zéro indépendamment.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0} E_t = EDF[u(i\Delta x, n\Delta t)] = 0 \quad (2.81)$$

2.3.9.4 Stabilité du schéma explicite

La notion de stabilité s'applique à des schémas, pour lesquels on calcule des solutions de façon itérative. Les calculs s'effectuent sur des ordinateurs avec une précision finie, et donc ils sont sujet à des erreurs d'arrondis. Lors d'un calcul itératif, ces erreurs peuvent être amplifiées par le schéma numérique. Le but de l'étude de stabilité est donc de déterminer quelle est l'amplification des erreurs par le schéma.

2.3.9.5 Critère de stabilité et choix des pas d'espace et de temps

Théoriquement les critères de stabilité numérique pour les schémas de résolution des équations différentielles aux dérivées partielles ne peuvent être déterminés que pour des équations linéaires.

Pour des équations non linéaires, des critères peuvent être déterminés en résolvant ces équations pour différentes valeurs de $(\Delta x/\Delta t)$ et en faisant une analyse des résultats obtenus.

Le critère de stabilité du schéma de résolution par la méthode des différences finies exposée précédemment est déterminé analytiquement en utilisant le critère de stabilité de John Von Neumann. Ce critère est le respect de l'inégalité

$$\Delta x \geq a \Delta t \quad (2.82)$$

Où Δx : pas d'espace
 Δt : pas de temps
 a : célérité de l'onde

Ainsi le choix du pas d'espace et du pas de temps devrait être fait en respectant le critère de stabilité.

2.3.9.6 Convergence du schéma explicite

Pour le schéma explicite, il est possible d'étudier directement la convergence de la solution numérique vers la solution exacte. Pour cela nous allons déterminer la solution exacte de l'équation aux différences finies

2.4 Méthode des caractéristiques ou (MDC)

Pour obtenir des équations plus faciles à gérer et dont la signification physique est plus évidente, nous allons transformer les équations de l'écoulement transitoire. Partons donc des 2 équations de Saint Venant et effectuons les opérations suivantes :

En multipliant la première équation par (a/ρ) , puis ajoutons et retranchons membre à membre les deux équations précédentes, on aura le système suivant :

$$\begin{cases} a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (2.83)$$

$$\begin{cases} (u + a) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{u}{\rho \cdot a} + \frac{1}{\rho} \right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = -g(\sin(\alpha) + j) \\ (u - a) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{u}{\rho \cdot a} \right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (2.84)$$

$$\begin{cases} (u + a) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{u + a}{\rho \cdot a} \right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = -g(\sin(\alpha) + j) \\ (u - a) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{u - a}{\rho \cdot a} \right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (2.85)$$

À ce système, on peut rajouter le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial t} dt + 0 + 0 = du \\ 0 + 0 + \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial t} dt = dP \end{cases} \quad (2.86)$$

On aura le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u+a) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{u+a}{\rho \cdot a} \right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = -g(\sin(\alpha) + j) \\ (u-a) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{u-a}{\rho \cdot a} \right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = -g(\sin(\alpha) + j) \\ \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial t} dt + 0 + 0 = du \\ 0 + 0 + \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial t} dt = dP \end{array} \right. \quad (2.87)$$

Ce système s'écrit sous la forme matricielle :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} (u+a) & 1 & \frac{(u+a)}{\rho \cdot a} & \frac{1}{\rho \cdot a} \\ (u-a) & 1 & -\frac{(u-a)}{\rho \cdot a} & -\frac{1}{\rho \cdot a} \\ \hline dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial t} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -g(\sin(\alpha) + j) \\ -g(\sin(\alpha) + j) \\ du \\ dP \end{array} \right\}$$

$$T.X=R$$

La méthode des caractéristiques s'écrit sous la forme matricielle suivante:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A_1 & B_1 C_1 & D_1 & \\ A_1 & B_1 C_1 & D_1 & \\ \hline dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial t} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} F \\ G \\ du \\ dP \end{array} \right\}$$

$$T_1.X=R_1$$

Les coefficients $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1$ et D_2 sont des fonctions de (x, t) , $u(x, t)$ et $P(x, t)$ et F et G sont aussi des fonctions de (x, t) , $u(x, t)$ et $P(x, t)$.

Pour connaître le type de la solution de ce système, le calcul du déterminant de T_1 s'avère d'une grande utilité et son calcul donne:

$$(B_2 D_1 - B_1 D_2) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + (D_2 A_1 + B_1 C_2 - B_2 C_1 - D_1 A_2) \frac{dx}{dt} + (C_1 A_2 - C_2 A_1) = 0$$

Par analogie avec le système développé précédemment on aura :

$$A_1 = (u+a); B_1 = B_2 = 1; C_1 = \left(\frac{u+a}{\rho \cdot a} \right); D_1 = -D_2 = \frac{1}{\rho \cdot a}$$

$$A_2 = (u - a); C_2 = \left(\frac{u - a}{\rho \cdot a}\right); F = G = -g(\sin(\alpha) + j)$$

En reportant ces valeurs dans l'équation précédente du second degré, on obtient l'équation sous la forme :

$$(B_2 D_1 - B_1 D_2) \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + (D_2 A_1 + B_1 C_2 - B_2 C_1 - D_1 A_2) \frac{dx}{dt} + (C_1 A_2 - C_2 A_1) = 0$$

$$(B_2 D_1 - B_1 D_2) = \left(1 \cdot \frac{1}{\rho \cdot a} - 1 \cdot \frac{-1}{\rho \cdot a}\right) = \frac{2}{\rho \cdot a}$$

$$(D_2 A_1 + B_1 C_2 - B_2 C_1 - D_1 A_2) = \left(\frac{-1}{\rho \cdot a} (u + a) + 1 \left(\frac{u - a}{\rho \cdot a}\right) - 1 \left(\frac{u + a}{\rho \cdot a}\right) - \frac{1}{\rho \cdot a} (u - a)\right)$$

$$(D_2 A_1 + B_1 C_2 - B_2 C_1 - D_1 A_2) = -2 \left(\frac{u + a}{\rho \cdot a}\right)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2u \frac{dx}{dt} + (u^2 - a^2) = 0$$

Le discriminant de cette équation au second degré est égal à :

$$\text{delta} = (-2u)^2 - 4 * 1 * (u^2 - a^2) = 4a^2$$

Le delta étant positif, alors le système (2.87) est de type hyperbolique et l'équation admet deux racines distinctes.

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = \frac{-b + \sqrt{\text{delta}}}{2a} = \frac{2u + 2a}{2} = u + a \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = \frac{-b - \sqrt{\text{delta}}}{2a} = \frac{2u - 2a}{2} = u - a \end{cases} \quad (2.88)$$

La condition de compatibilité s'écrit à partir de l'équation $D_x(u)=0$, donc :

$$\det \begin{bmatrix} -g(\sin(\alpha) + j) & 1 & \frac{(u + a)}{\rho \cdot a} & \frac{1}{\rho \cdot a} \\ -g(\sin(\alpha) + j) & 1 & \frac{-(u - a)}{\rho \cdot a} & \frac{-1}{\rho \cdot a} \\ \frac{du}{dP} & \frac{dt}{dx} & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$D_x(u) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -g(\sin(\alpha) + j) & 1 & \frac{(u + a)}{\rho \cdot a} & \frac{1}{\rho \cdot a} \\ -g(\sin(\alpha) + j) & 1 & \frac{-(u - a)}{\rho \cdot a} & \frac{-1}{\rho \cdot a} \\ \frac{du}{dP} & \frac{dt}{dx} & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Après développement de ce déterminant, on obtiendra l'équation suivante :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} + \left(\frac{dx}{dt} - u \right) \frac{du}{dt} + \left(\frac{dx}{dt} - u \right) + g(\sin(\alpha) + j) = 0$$

On a obtenu précédemment que :

$$\frac{dx}{dt} = u \pm a$$

1° Pour le signe positif de $(dx/dt)=u+a$, l'équation de compatibilité devient :

$$\frac{1}{\rho \cdot a} \frac{dP}{dt} + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0 \quad (2.89)$$

2° Pour le signe négatif de $(dx/dt) u-a$, l'équation de compatibilité s'écrit :

$$-\frac{1}{\rho \cdot a} \frac{dP}{dt} + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0 \quad (2.90)$$

Ecrivons les équations (2.89) et (2.90) sous une autre forme, on pourra négliger la vitesse d'écoulement (u) par rapport à la vitesse d'onde (a) car u est très petite ce qui permet d'écrire $u \pm a = a$

La pression (P) en point s'exprime par l'expression suivante :

$$P = \rho \cdot g \cdot (H - z) \Rightarrow \frac{dP}{dt} = \rho \cdot g \cdot \left(\frac{dH}{dt} - \frac{dz}{dt} \right) \quad (2.91)$$

La référence étant horizontale d'où :

$$\sin(\alpha) = \frac{z}{x} \Rightarrow z = x \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \sin(\alpha) \quad (2.92)$$

$$\frac{dP}{dt} = \rho \cdot g \cdot \left(\frac{dH}{dt} - \frac{dx}{dt} \cdot \sin(\alpha) \right) \quad (2.93)$$

En remplaçant l'expression dP/dt dans les équations (2.89) et (2.90) on aboutira aux équations suivantes :

1° Pour $(dx/dt)=u+a=a$

$$\frac{1}{\rho \cdot a} \frac{dP}{dt} + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho \cdot a} \left(\rho \cdot g \cdot \left(\frac{dH}{dt} - \frac{dx}{dt} \cdot \sin(\alpha) \right) \right) + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0$$

$$\frac{g}{a} \left(\left(\frac{dH}{dt} - a \cdot \sin(\alpha) \right) \right) + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} - g \cdot \sin(\alpha) + g \cdot \sin(\alpha) + g \cdot j = 0$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{g dH}{a dt} + g.j = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{g dH}{a dt} = -g.j$$

2° Pour $(dx/dt)=u-a=-a$

$$-\frac{1}{\rho.a} \frac{dP}{dt} + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\rho.a} \left(\rho.g. \left(\frac{dH}{dt} - \frac{dx}{dt} \cdot \sin(\alpha) \right) \right) + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0$$

$$-\frac{g}{a} \left(\left(\frac{dH}{dt} - (-a) \cdot \sin(\alpha) \right) \right) + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} - \frac{g dH}{a dt} - g.\sin(\alpha) + g.\sin(\alpha) + g.j = 0$$

$$\frac{du}{dt} - \frac{g dH}{a dt} + g.j = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt} - \frac{g dH}{a dt} = -g.j$$

Les deux équations rassemblées en une seule s'écrivent :

$$\frac{du}{dt} \pm \frac{g dH}{a dt} = -g.j \quad (2.94)$$

Multiplions les deux membres par a/g nous aurons :

$$\frac{a du}{g dt} \pm \frac{dH}{dt} = -a.j$$

* Le signe positif intervient lorsque $dx/dt=u+a \approx a \Rightarrow dx=a.dt$.

* Le signe négatif intervient lorsque $dx/dt=u-a \approx -a \Rightarrow dx=-a.dt$

En faisant intervenir le débit Q, on obtient :

$$\frac{a d\left(\frac{Q}{S}\right)}{g dt} \pm \frac{dH}{dt} = -a.j \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{a.Q}{g.S} \pm H \right) = -a.j$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a.Q}{g.S} \pm H \right) + a.j = 0 \quad (2.95)$$

La méthode des caractéristiques transforme les deux équations de Saint Venant aux dérivées partielles en quatre équations différentielles totales, celles-ci sont exprimées sous forme de différences finies.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \pm a \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{a.Q}{g.S} \pm H \right) + a.j = 0 \end{cases} \quad (2.96)$$

Donc, la méthode des caractéristiques transforme les deux équations aux dérivées partielles de l'écoulement non permanent en quatre équations différentielles totales. Ces quatre équations peuvent être intégrées, sur le domaine d'intérêt, en se basant sur la méthode des différences finies pour obtenir des expressions algébriques faciles à manipuler numériquement.

Le signe positif intervient lorsque $dx/dt = u + a \Rightarrow dx = a \cdot dt$ alors que le signe négatif intervient lorsque $dx/dt = u - a \Rightarrow dx = -a \cdot dt$.

2.5 Méthode des Eléments Finis (MEF)

La MEF est une approche utilisée pour résoudre les équations différentielles en transformant ces équations en formes intégrales basées sur le concept de minimisation d'une quantité, telle que l'énergie. Cela permet d'obtenir une solution exacte du problème. En d'autres termes, l'objectif est de trouver une fonction globale qui représente le modèle mathématique dans le domaine étudié.

Le principe fondamental de la méthode des éléments finis repose sur les étapes suivantes :

- * Définir une partition du domaine d'étude c'est-à-dire subdivisé le domaine d'étude en régions élémentaires (Eléments Finis).
- * Représenter la fonction inconnue sur chacun de ces éléments par une approximation polynomiale.
- * Construire les formes intégrales.
- * Minimiser l'intégrale.
- * Une organisation matricielle des calculs.
- * Une résolution du système algébrique.

La méthode des éléments finis est particulièrement puissante pour résoudre les équations aux dérivées partielles, notamment dans les cas où la géométrie du domaine d'étude est complexe [5]

2.6 Méthode des Volumes Finis (MVF)

La méthode des volumes finis est une technique spéciale de résolution utilisée pour les équations différentielles. Elle implique la subdivision du domaine d'étude en petits volumes élémentaires, chacun entourant un nœud principal. Les volumes sont délimités par des interfaces, qui peuvent être deux, quatre ou six selon la dimension du problème. L'équation différentielle est intégrée dans chaque volume élémentaire, en utilisant une fonction d'approximation pour représenter l'inconnue entre les nœuds

voisins. Cette intégration permet de discrétiser la forme intégrale de l'équation dans tout le domaine d'étude. Le résultat de cette discrétisation est une équation algébrique qui est composée des valeurs des nœuds principaux. Ainsi, la méthode des volumes finis permet de résoudre les équations en divisant le domaine en petits volumes et en utilisant des approximations pour calculer les intégrales .[6]

2.7 Conclusion

Après avoir transformé les équations hyperboliques régissant les écoulements transitoires dans les conduites sous pressions, appliquer les schémas explicite, implicite, de Crank-Nicolson, de Lax-Friedrichs, de Richtmayer, de MacCormak method et Alternative et l'utilisation des conditions initiales et aux limites en arrivant à des systèmes d'équations algébriques, Nous avons choisi le schéma de MacCormak pour la suite de notre travail vue qu'elle est plus utilisée et efficace pour la résolution des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique.



**CHAPITRE III: PRESENTATION DE LA
METHODE DE MACCORMACK**

3.1 Introduction

Ce chapitre visera en première étape la transformation des équations de type hyperbolique régissant l'écoulement transitoire, et écrites en fonction de la vitesse et de la pression, à des équations écrites en fonction du débit et de la hauteur piézométrique et en seconde étape la description précise de la méthode de MacCormack et la manière comment l'appliquer pour résoudre les équations de d'écoulement transitoire et fournir une compréhension approfondie de cette méthode et nous terminerons ce chapitre par la présentation des avantages et des limitations de cette méthode.

3.2 Transformation des équations de l'écoulement transitoire

La transformation des équations d'écoulement transitoire dans les canalisations sous pression, écrites en fonction de la vitesse et de la pression (voir système d'équations 1), en équations écrites en fonction de la hauteur piézométrique et du débit sans négliger les termes $u(\partial u/\partial x)$ et $u(\partial P/\partial x)$ devant les termes $\partial u/\partial t$ et $\partial P/\partial t$ et le tuyau peut avoir une inclinaison par rapport au plan horizontal, c'est-à-dire $\sin(\alpha) \neq 0$, doit utiliser les expressions mathématiques suivantes et introduisez-les dans les équations du système numéro (1.19)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial(\rho g(H - Z))}{\partial t} = \rho g \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \right) \quad (3.1)$$

Où : H et Z sont successivement la hauteur manométrique et le niveau géodésique

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(\rho g(H - Z))}{\partial x} = \rho g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \quad (3.2)$$

$$u \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{Q}{S} \frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{Q}{S} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (3.4)$$

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{Q}{S} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{Q}{S} \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (3.6)$$

$$\left(a \left(\frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho a} \left(\rho g \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \right) + \rho g \frac{Q}{S} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right) \right) = 0 \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\rho g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right) \right) = -g(\sin(\alpha) + j)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{g}{a} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \right) + \frac{Q}{S} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right) = 0 \\ \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial x} + g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (3.8)$$

En multipliant la première équation par a/g et la seconde par S, on obtient :

$$\begin{cases} \left(\frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \right) + \frac{Q}{S} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} + gS \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = -gS(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{Q}{S} \frac{\partial Z}{\partial x} - \left(\frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) - \frac{Q}{S} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial t} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} - gS \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) - gS(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (3.10)$$

$\partial Z / \partial t = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{Q}{S} \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{S} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} - gS \frac{\partial H}{\partial x} + gS \frac{\partial Z}{\partial x} - gS \sin(\alpha) - gSj \end{cases} \quad (3.11)$$

$\partial Z / \partial X = \sin(\alpha)$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{Q}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{S} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} - gS \frac{\partial H}{\partial x} - gSj \end{cases} \quad (3.12)$$

Ces deux équations représentent les variations de hauteur et de débit en fonction du temps dans le sens d'écoulement. Cette transformation a été réalisée car, dans les scénarios pratiques, les données disponibles sont données en termes de hauteurs et de débits, et tous les paramètres intermédiaires sont calculés en utilisant des unités cohérentes.

3.3 Méthode de résolution

La méthode MacCormack est un schéma de discrétisation largement utilisé pour la solution numérique d'équations aux dérivées partielles hyperboliques. Cette méthode des différences finies du second ordre a été introduite par Robert W. MacCormack en 1969. La méthode MacCormack est élégante et facile à comprendre et à programmer.

La méthode de MacCormack consiste à utiliser deux étapes, dans l'étape de prédiction elle utilise un schéma aux différences finies décentré en amont et dans l'étape de correction elle utilise un schéma en différences finies décentré en aval. Ces deux étapes peuvent être résumées mathématiquement comme suit :

➤ **Étape de prédiction :**

Dans la première étape, on utilise un schéma explicite pour prédire la solution future en se basant sur les valeurs actuelles.

- On calcule d'abord une estimation de la solution future en utilisant une différence finie explicite.
- Cette étape est sujette aux instabilités numériques, mais elle fournit une première approximation.

$$u_i^* = u_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(u_{i+1}^k) - f(u_i^k)) \quad (3.13) [7]$$

➤ **Étape correction :**

- Dans la deuxième étape, on corrige cette prédiction en utilisant une moyenne pondérée des valeurs prédites et des valeurs corrigées.
- On calcule ensuite un terme correcteur en utilisant une différence finie centrée pour améliorer la stabilité et l'exactitude de la solution.

$$u_i^{k+1} = \frac{1}{2} (u_i^k + u_i^*) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(u_i^*) - f(u_{i-1}^*)) \quad (3.14) [7]$$

L'application de ces deux étapes, au système d'équations numéro huit, conduit aux expressions suivantes :

Étape de prédiction : Cette étape permet de prédire les valeurs de H et Q à l'instant (t+Δt).

$$\begin{cases} \frac{H_i^* - H_i^k}{\Delta t} = \frac{\bar{Q}_i}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2}{gS} \frac{Q_{i+1}^k - Q_i^k}{\Delta x} - \frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{H_{i+1}^k - H_i^k}{\Delta x} \\ \frac{Q_i^* - Q_i^k}{\Delta t} = -\frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{Q_{i+1}^k - Q_i^k}{\Delta x} - gS \frac{H_{i+1}^k - H_i^k}{\Delta x} - \frac{\lambda \bar{Q}_i |\bar{Q}_i|}{2dS} \end{cases} \quad (3.15)$$

Multiplions les deux côtés par Δt et réorganisons

$$\begin{cases} H_i^* = H_i^k + \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{S} \sin(\alpha) - \frac{\Delta t a^2}{gS} \frac{Q_{i+1}^k - Q_i^k}{\Delta x} - \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{S} \frac{H_{i+1}^k - H_i^k}{\Delta x} \\ Q_i^* = Q_i^k - \Delta t \frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{Q_{i+1}^k - Q_i^k}{\Delta x} - \Delta t gS \frac{H_{i+1}^k - H_i^k}{\Delta x} - \Delta t \frac{\lambda \bar{Q}_i |\bar{Q}_i|}{2dS} \end{cases} \quad (3.16)$$

Mettons:

$$\frac{\bar{Q}_i \Delta t \sin(\alpha)}{S} = C_1; \frac{a^2 \Delta t}{gS \Delta x} = C_2; \frac{\bar{Q}_i \Delta t}{S \Delta x} = C_3$$

$$\frac{\Delta t \bar{Q}_i}{\Delta x S} = d_1; \quad \frac{\Delta t g S}{\Delta x} = d_2; \quad \Delta t \frac{\lambda}{2 d S} = d_3$$

$$\begin{cases} H_i^* = H_i^k + C_1 - C_2(Q_{i+1}^k - Q_i^k) - C_3(H_{i+1}^k - H_i^k) \\ Q_i^* = Q_i^k - d_1(Q_{i+1}^k - Q_i^k) - d_2(H_{i+1}^k - H_i^k) - d_3 \bar{Q}_i |\bar{Q}_i| \end{cases} \quad (3.17)$$

Étape de correction : Cette étape permet de corriger les valeurs de H et Q au temps $(t+\Delta t)$ obtenues à l'étape de prédiction.

$$\begin{cases} \frac{H_i^{k+1} - (H_i^k + H_i^*)/2}{\Delta t} = \frac{1}{2\Delta x} (f(H_i^*) - f(H_{i-1}^*)) \\ \frac{Q_i^{k+1} - (Q_i^k + Q_i^*)/2}{\Delta t} = \frac{1}{2\Delta x} (f(Q_i^*) - f(Q_{i-1}^*)) \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} H_{i1}^{k+1} = \frac{1}{2}(H_i^k + H_i^*) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(H_i^*) - f(H_{i-1}^*)) \\ Q_{i1}^{k+1} = \frac{1}{2}(Q_i^k + Q_i^*) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(Q_i^*) - f(Q_{i-1}^*)) \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\begin{cases} \frac{H_i^{k+1} - (H_i^k + H_i^*)/2}{\Delta t} = \frac{\bar{Q}_i}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2}{gS} \frac{Q_i^k - Q_{i-1}^k}{2\Delta x} - \frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{H_i^k - H_{i-1}^k}{2\Delta x} \\ \frac{Q_i^{k+1} - (Q_i^k + Q_i^*)/2}{\Delta t} = -\frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{Q_i^k - Q_{i-1}^k}{2\Delta x} - gS \frac{H_i^k - H_{i-1}^k}{2\Delta x} - gSj \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\begin{cases} H_i^{k+1} - (H_i^k + H_i^*)/2 = \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{S} \sin(\alpha) - \frac{\Delta t a^2}{gS} \frac{Q_i^k - Q_{i-1}^k}{2\Delta x} - \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{S} \frac{H_i^k - H_{i-1}^k}{2\Delta x} \\ Q_i^{k+1} - (Q_i^k + Q_i^*)/2 = -\frac{\Delta t \bar{Q}_i}{S} \frac{Q_i^k - Q_{i-1}^k}{2\Delta x} - \Delta t g S \frac{H_i^k - H_{i-1}^k}{2\Delta x} - \Delta t g S j \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} H_i^{k+1} = (H_i^k + H_i^*)/2 + \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{S} \sin(\alpha) - \frac{\Delta t a^2}{gS} \frac{Q_i^k - Q_{i-1}^k}{2\Delta x} - \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{S} \frac{H_i^k - H_{i-1}^k}{2\Delta x} \\ Q_i^{k+1} = (Q_i^k + Q_i^*)/2 - \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{S} \frac{Q_i^k - Q_{i-1}^k}{2\Delta x} - \Delta t g S \frac{H_i^k - H_{i-1}^k}{2\Delta x} - \Delta t \frac{\lambda \bar{Q}_i |\bar{Q}_i|}{2 d S} \end{cases} \quad (3.22)$$

Mettons :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{S} \sin(\alpha) &= c_{11}; \quad \frac{\Delta t a^2}{2gS\Delta x} = c_{22}; \quad \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{S 2\Delta x} = c_{33} \\ \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{2\Delta x S} &= d_{11}; \quad \frac{\Delta t g S}{2\Delta x} = d_{22}; \quad \frac{\Delta t \lambda}{2 d S} = d_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} H_i^{k+1} = (H_i^k + H_i^*)/2 + c_{11} - c_{22}(Q_i^k - Q_{i-1}^k) - c_{33}(H_i^k - H_{i-1}^k) \\ Q_i^{k+1} = (Q_i^k + Q_i^*)/2 - d_{11}(Q_i^k - Q_{i-1}^k) - d_{22}(H_i^k - H_{i-1}^k) - d_{33} \bar{Q}_i |\bar{Q}_i| \end{cases} \quad (3.23)$$

Avec :

$$\bar{Q}_i = \frac{1}{2}(Q_{i+1}^k + Q_{i-1}^k) \quad (3.24)$$

Δt : pas de temps ; Δx : pas spatial ; S : section transversale du tuyau ; d : diamètre du tuyau ; λ : coefficient de frottement ; i : indice spatial ; k : indice de temps.

L'application du diagramme de la méthode de MacCormack aux nœuds intérieurs ne posera aucun problème mais aux limites limites (à gauche et à droite), il en résulte les expressions suivantes :

Au nœud $i = 1$

A ce nœud, le problème ne se pose que dans l'étape de correction et l'expression donnant le débit s'écrit comme suit :

Étape correction

$$Q_1^{k+1} = (Q_1^k + Q_1^*)/2 - d_{11}(Q_1^k - Q_0^k) - d_{22}(H_1^k - H_0^k) - d_{33}\bar{Q}_1|\bar{Q}_1| \quad (3.25)$$

Au nœud $i=n$

A ce nœud, le problème se pose uniquement dans l'étape de prédiction et l'expression donnant la hauteur piézométrique s'écrit comme suit :

Étape du prédiction;

$$H_n^* = H_n^k + C_1 - C_2(Q_{n+1}^k - Q_n^k) - C_3(H_{n+1}^k - H_n^k) \quad (3.26)$$

Ces deux expressions mettent clairement en évidence l'apparition de deux nœuds fictifs $i=0$ et $(i=n+1)$ de coordonnées successivement (Q_0, H_0) et (Q_{n+1}, H_{n+1}) . Pour cela et afin de calculer les valeurs du débit et de la hauteur aux nœuds $(i=1)$ et $(i=n)$, la méthode des caractéristiques est utilisée pour s'affranchir des nœuds fictifs. La figure (3.1) illustre la combinaison de l'application de la méthode MacCormack et de la méthode des caractéristiques.

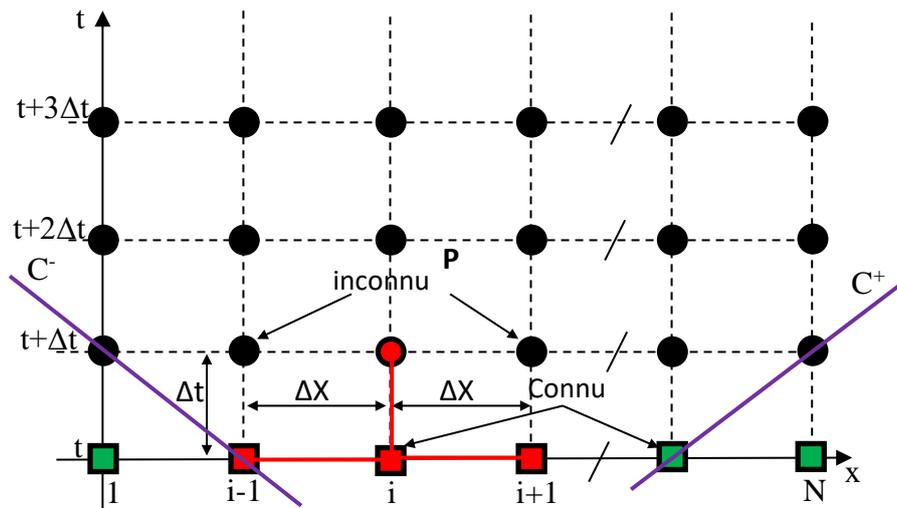


Figure (3.1) : Maillage dans le temps et dans l'espace des méthodes MacCormack et MOC

3.4 Les avantages et les limitations de la méthode MacCormack

3.4.1 Avantages de la méthode MacCormack :

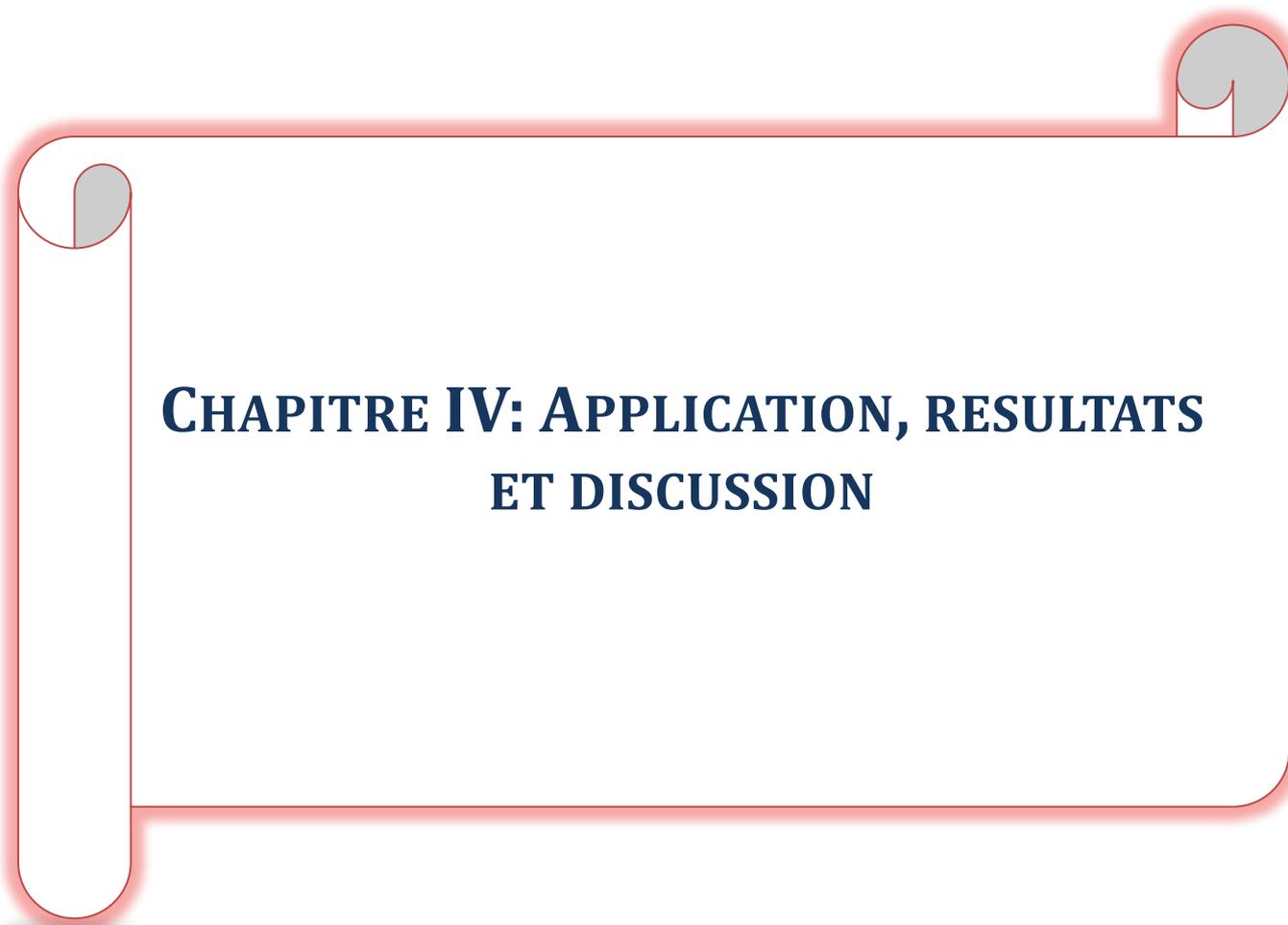
- Simplicité: La méthode MacCormack est relativement simple à implémenter par rapport à des méthodes plus complexes.
- Robustesse: Elle est robuste et peut bien gérer certaines situations sans nécessiter une discrétisation spatiale très fine.
- Efficacité : La méthode MacCormack est souvent plus rapide en termes de calculs comparée à des méthodes plus sophistiquées. [8]

3.4.2 Limitations de la méthode MacCormack :

- Diffusion numérique: La méthode MacCormack peut introduire de la diffusion numérique, ce qui peut affecter la précision des résultats, surtout pour des phénomènes transitoires.
- Précision limitée: Pour des problèmes avec des chocs ou des discontinuités, la méthode MacCormack peut ne pas être aussi précise que des méthodes plus avancées comme la méthode de Godunov.
- Stabilité : La méthode MacCormack peut nécessiter des restrictions sur les pas de temps pour assurer la stabilité numérique, ce qui peut parfois limiter son utilisation pour des simulations à long terme. [8]

3.5 Conclusion

La méthode de MacCormack est une technique permettant de transformer les équations différentielles en dérivées partielles de type hyperbolique régissant l'écoulement transitoire dans les conduites sous pression à des équations algébriques faciles à manipuler numériquement. Cet avantage donne une flexibilité lors de la conception et de l'optimisation des systèmes hydrauliques.



**CHAPITRE IV: APPLICATION, RESULTATS
ET DISCUSSION**



4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons essayer d'appliquer sur le modèle mathématique de l'écoulement transitoire la méthode de **MacCormak** en prenant, comme modèle physique, un système hydraulique gravitaire composé d'un réservoir, d'une conduite et d'une vanne (R-C-V). Nous élaborerons par la suite, un code permettant de calculer tous les paramètres hydrauliques en écoulement transitoire. Puis, nous réaliserons les courbes de surpressions et de dépressions pour les cas des fermetures linéaire et quadratique et nous terminerons par la recherche des lois optimales de fermeture d'une vanne.

4.2 Position du problème et conditions aux limites

4.2.1 Position du problème

Afin de concrétiser les modèles mathématiques obtenus et de conférer un intérêt pratique à notre travail, le modèle suivant sera adopté. Il s'agit d'un grand réservoir R de cote du trop-plein de 200 m assure un débit de 350 l/s à un robinet vanne motorisé par le biais d'une conduite gravitaire inclinée de 10° et de longueur $L=1000$ m. Le robinet vanne à fermeture commandée est placé à l'autre extrémité de la conduite à une cote égale à 50 m. En effet, l'écoulement transitoire pourra lieu à l'échelle du système (Réservoir – Conduite – Vanne) suite à une perturbation des conditions initiales d'écoulement, comme une fermeture rapide ou lente d'une vanne qu'elle soit volontaire ou non. La figure (4.1) montre un schéma approximatif de l'exemple adopté.

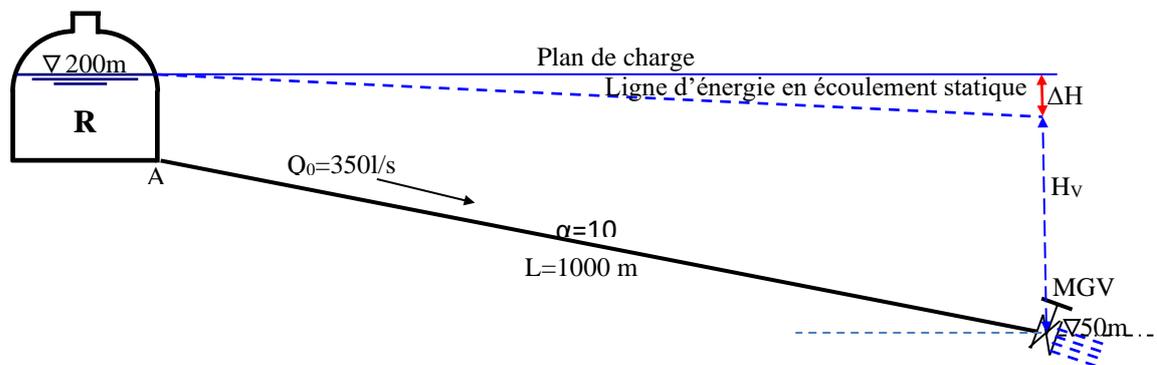


Figure (4.1): Schéma du système hydraulique d'une vanne motorisée alimentée en eau à partir d'un réservoir

Dans ce travail, nous nous attacherons à mettre en exergue ce modèle et fournir toutes les informations nécessaires pour faire bon usage des modèles mathématiques obtenus. Les conditions initiales et aux limites du modèle physique aident également davantage à entamer plus facilement les calculs, surtout aux nœuds limites, dans l'écoulement transitoire.

4.2.2 Conditions aux limites

Les équations aux caractéristiques sont insuffisantes pour décrire l'écoulement non permanent, ce qui explique pourquoi nous allons définir ci-après les conditions limites dont nous aurons besoin pour le reste du travail.

4.2.2.1 Conditions aux limites au niveau d'un réservoir d'alimentation à niveau constant

Pour mettre en évidence les bonnes conditions aux limites à la sortie d'un réservoir, il faut d'abord supposer que le réservoir est de grandes dimensions afin de négliger la variation du plan d'eau à l'intérieur de celui-ci lors de la génération de l'écoulement transitoire et la hauteur due à l'énergie cinétique.

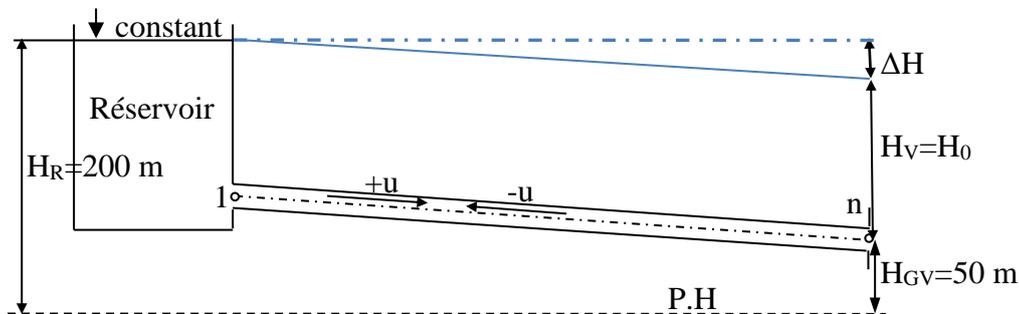


Figure (4.2) : Sortie de l'eau à partir d'un réservoir à charge constante

$$H(1) = H_R = 200 \text{ m} ; \frac{u_0^2}{2g} \approx 0$$

Où : H_R est le niveau du plan d'eau dans le réservoir et $H(1)$ est la charge relative au premier nœud situé juste à l'orifice du réservoir.

Lorsque une vanne est placée à l'extrémité aval de la conduite et elle est fermée, une onde de surpression est générée pour se propager vers le réservoir où elle sera réfléchiée en une onde de dépression. L'équation du débit au premier nœud s'écrit :

$$Q(1) = (H_R - CN)/R \quad (4.1)$$

$$CN = H(2) - Q(2)(R - T \cdot |Q(2)|) \quad (4.2)$$

Où : $H(2)$ et $Q(2)$ sont des quantités calculées au temps (t) . [2]

4.2.2.2 Conditions aux limites au niveau de la vanne

Les systèmes hydrauliques sont équipés de vannes qui contribuent à une bonne gestion. Cependant, la manière dont ils sont manipulés peut conduire à des perturbations indésirables affectant tous les paramètres hydrauliques. A cet effet, et du fait de sa présence en bout de canalisation ou à des endroits particuliers, le calcul de la

pression et du débit à ce nœud se fait en fonction de la caractéristique positive du nœud précédent et Ainsi, les équations de ce nœud s'écrivent comme suit:

$$\begin{cases} H(n) + R \cdot Q(n) = CP \\ CP = H(n-1) + Q(n-1)(R - T \cdot |Q(n-1)|) \\ Q(n) = (CP - H(n))/R \end{cases} \quad (4.3)$$

Toutefois, dans le cas où la fermeture est commandée le débit à la vanne suit, au fil du temps, une fonction dépendant de la loi de fermeture choisie et dans ce cas la charge totale à la vanne prend la relation suivante :

$$H(n) = CP - R \cdot Q(n) \quad (4.4)$$

Le débit au nœud N est étroitement lié à la vitesse moyenne d'écoulement à travers la vanne. Cette vitesse peut prendre des lois concave, linéaire ou convexe. Pour cela, il primordial de la clarifier en donnant sa relation.

$$u_f = (u_0 - u_\tau) \left[1 - \left(\frac{i \cdot \Delta t}{Ct} \right)^m \right] + u_\tau \quad (4.5)$$

Où $0 \leq i \leq N$, $Ct = N \cdot \Delta t$, $0 \leq m < \infty$, u_0 est la vitesse initiale du fluide, u_τ est la vitesse du fluide à la fin de l'opération de fermeture, Δt est le pas du temps et m est un exposant déterminant le type de la loi de fermeture de la vanne.

- $m = 0$, la loi de fermeture est instantanée et la vitesse passe instantanément de la valeur en écoulement permanent à une valeur finale égale à zéro en écoulement transitoire ($Ct = 0$, $Q(n) = 0$ et $H(n) = CP$).
- $1 < m < \infty$, les lois de fermeture sont de types convexes où la vitesse moyenne se caractérise par une faible diminution du débit au début du temps de fermeture (Ct) et une augmentation rapide au dernier temps de fermeture.
- $0 < m < 1$, les lois de fermeture suivent des fonctions concaves où la vitesse moyenne d'écoulement se caractérise par une forte décroissance initiale au premier temps de fermeture (Ct), suivie d'une décroissance lente la plupart du reste temps.
- $m = 1$, la loi de fermeture suit une loi linéaire dans laquelle la vitesse d'écoulement moyenne entre en réduction uniforme pendant toute la durée de la fermeture . [9]. [10]

Si la vitesse du fluide à la fin de l'opération de fermeture est nulle $u_\tau=0$ la relation précédente s'écrit comme suit:

$$u_f = u_0 \left[1 - \left(\frac{i \cdot \Delta t}{Ct} \right)^m \right] \quad (4.6)$$

Le débit volumique à travers une vanne en fermeture s'écrit :

$$Q = u \cdot S_C = u \cdot \varepsilon_1 \cdot S \quad (4.7)$$

Où, S_c est la section contractée et ε_1 est le coefficient de contraction de la section.

$$Q(t) = u_0 \left[1 - \left(\frac{i \cdot \Delta t}{Ct} \right)^m \right] \cdot \varepsilon_1 \cdot S \quad (4.8)$$

En écoulement permanent le débit volumique s'écrit comme suit:

$$Q_0 = u_0 \cdot S \quad (4.9)$$

Ce qui permettra d'écrire l'expression du débit au nœud n comme suit :

$$Q_n(t) = \varepsilon_1 \cdot Q_0 \left[1 - \left(\frac{i \cdot \Delta t}{Ct} \right)^m \right] \quad (4.10)$$

La figure (4.3) montre les courbes enveloppes des lois possibles pour la fermeture d'une vanne dans un système hydraulique.

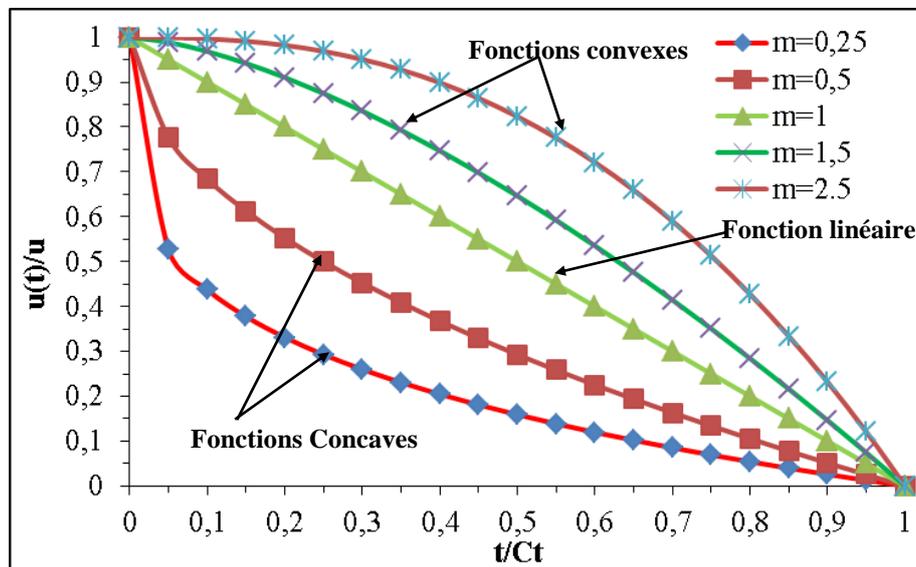


Figure (4.3): Fonctions de fermeture pour différentes valeurs de l'exposant m

L'exposant m , de l'expression de Q au nœud n , génère l'infini de fonctions de Q et par conséquent la recherche de la valeur optimale de cet exposant s'avère une priorité majeure pour une gestion optimale.

4.3 Type de vannes

Il existe de nombreux types de vannes qui ont été développés en fonction de différents types de fluides et le fonctionnement des vannes. Chaque vanne a des caractéristiques différentes de l'autre vanne, et chaque vanne présente des avantages et des inconvénients, de sorte que les vannes sont conçues en fonction du travail qu'elles contiennent, de sorte que certaines d'entre elles leur travail est capable d'étrangler le débit, d'autres types de vannes ne peuvent qu'arrêter le débit. Parmi les vannes les plus utilisées, nous allons citer les suivantes :

4.3.1 Vanne sphérique

Elle fonctionne en répondant à l'action du disque. Le disque se déplace vers ou loin du siège, arrêtant ainsi l'écoulement du fluide ou permettant au fluide de s'écouler. Le disque ou sièges de clapet sur le siège de soupape. Ce type de vannes peut être actionnée manuellement ou actionnée électriquement ou automatique.

La fonction d'actionnement :

$$\eta = 1 - \frac{t}{T_V} \quad (4.11)$$

$$\eta = 1 - \left(\frac{t}{T_V}\right)^2$$

$$\eta = \theta_m \left(\frac{t}{T_V}\right)$$

$$\eta = \left(\theta_m - \left(\frac{t}{T_V}\right)^2\right) \quad (4.12)$$

Où : T_V est le temps d'actionnement de la vanne et θ_m l'angle d'actionnement complet.

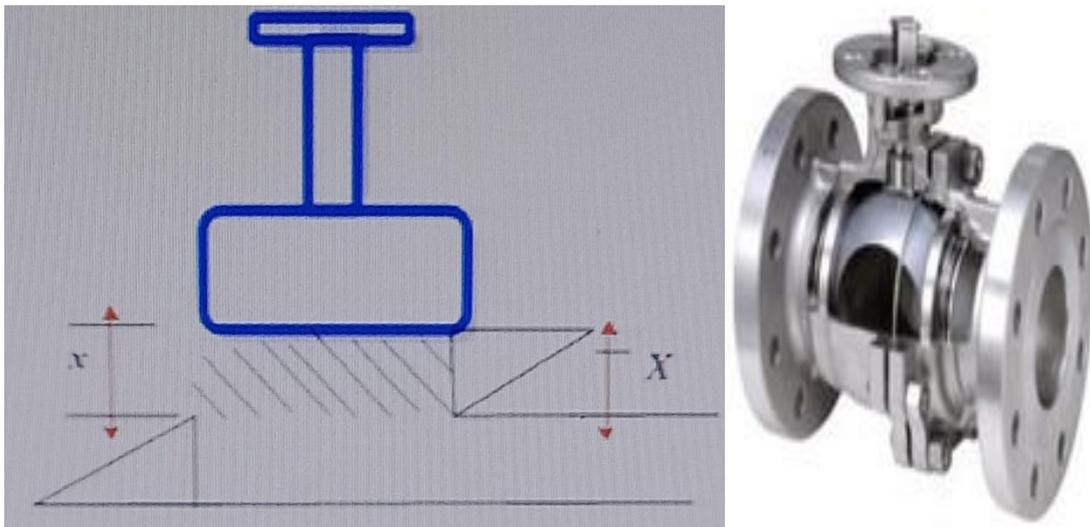


Figure (4.4) : Représentation schématique du robinet d'arrêt sphérique [11] [12].

4.3.2 Vanne carrée

La vanne a un disque, la porte a un mouvement transversal dans le sens de l'écoulement du fluide, ainsi cet agencement s'arrête complètement ou s'ouvre le passage du fluide. La vanne utilise des pressions et des températures élevées et elle est utilisée pour une large gamme de fluides.

La fonction d'actionnement :

$$\text{Vanne carrée} = 1 - \frac{1}{\pi} \left(\arccos(2\eta - 1) - (2\eta - 1)\sqrt{1 - (2\eta - 1)^2} \right) \quad (4.13)$$

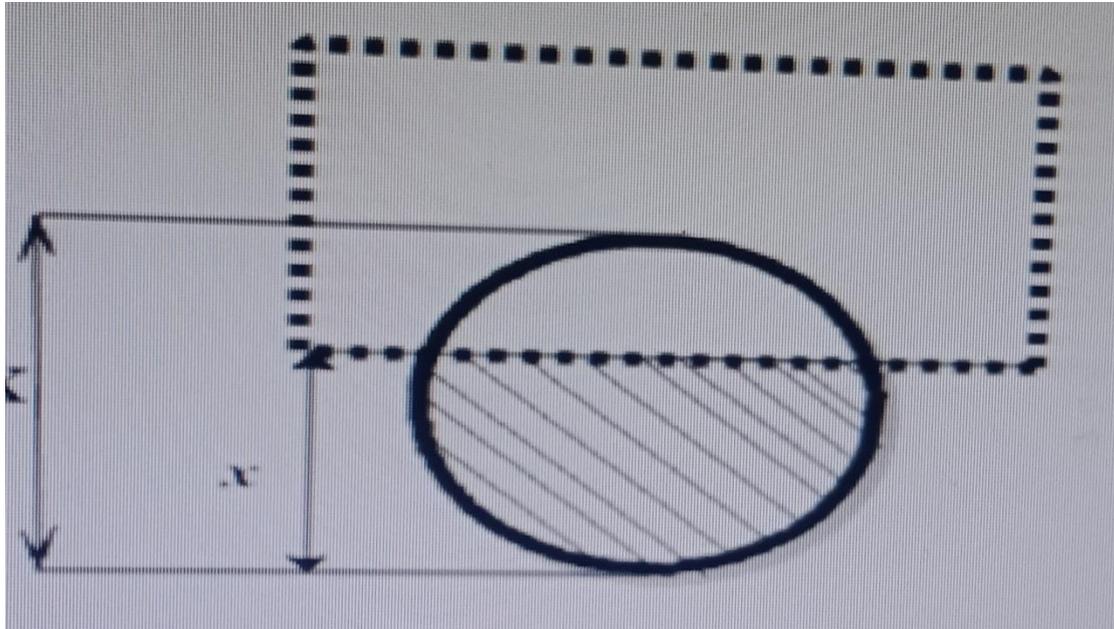


Figure (4.5) : Représentation schématique du robinet-vanne carré [11].

4.3.3 Vanne à bille

La vanne à bille a un bouchon sphérique qui est l'élément de contrôle. Il est utilisé lorsqu'une combinaison d'étranglement et d'arrêt est requise. Il offre de bonnes caractéristiques d'écoulement. Le robinet à tournant sphérique se compose d'un globe à deux voies et la boule tourne entre des sièges élastiques.

La fonction d'actionnement : $\text{Vanne à bille} = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right) \quad (4.14)$

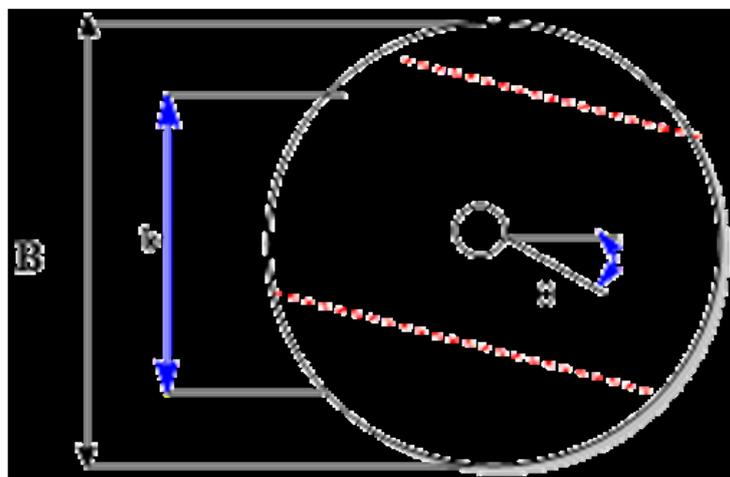


Figure (4.6) : Représentation schématique du robinet à tournant sphérique [11].

4.3.4 Vanne papillon

Dans la vanne papillon, l'élément de contrôle est un disque appelé lame, ailette ou clapet, qui tourne dans le sens horizontal ou vertical et permet au fluide de s'écouler. La vanne papillon convient à l'étranglement ou au fonctionnement marche-arrêt à faible chute de pression. Il est économique, facile à installer et ne laisse pas les solides s'accumuler.

La fonction d'actionnement :

$$\text{Vanne papillon} = \frac{1 + \cos(\eta)}{2} + \frac{\cos(\eta)}{\pi} \left(\arcsin(-x) + \frac{1}{2} \sin(2 \arcsin(-x)) \right) - \frac{1}{\pi} \left(\arcsin(x) + \frac{1}{2} \sin(2 \arcsin(x)) \right) \quad (4.15)$$

Où :

$$x = \frac{\sin(\eta) \sqrt{\left(\frac{B}{b}\right)^2 - 1}}{1 + \cos(\eta)}; \quad \eta = \theta_m - \left(\frac{t}{T_V}\right)^2$$

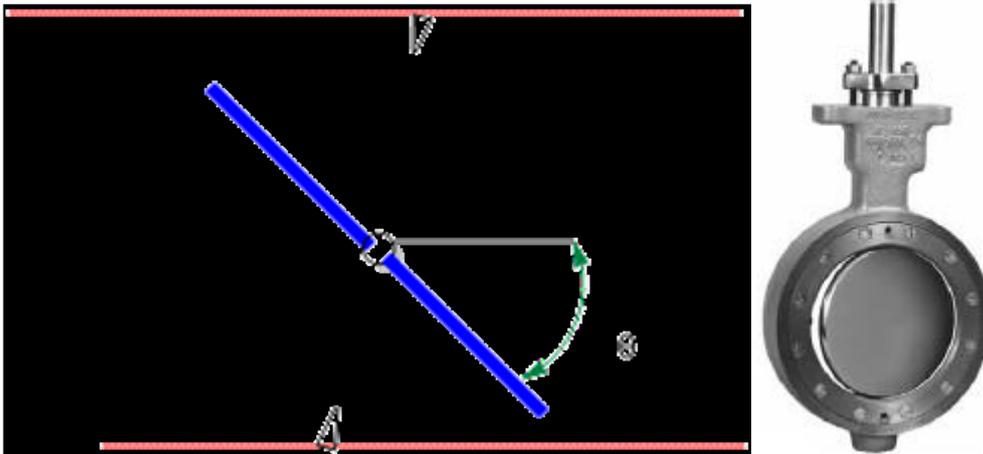


Figure (4.7) : Représentation schématique de la vanne papillon [11] [12].

4.3.5 Vanne à pointeau

Les vannes à pointeau sont utilisées pour mesurer le débit de fluide à travers des tubes ou des orifices. Le débit est régulé en insérant ou en retirant une tige conique dans ou hors d'un orifice conique similaire, créant une manière très précise d'ajuster le débit de fluide à travers l'orifice. Les principales caractéristiques comprennent le type de vanne, les connexions d'orifice, la taille de la vanne et les matériaux qui composent le corps de la vanne, notamment son siège, son joint, sa garniture et sa garniture de tige. Les vannes à pointeau sont utilisées dans les systèmes de vide et pour les systèmes de mesure où une régulation précise du débit est requise. En raison du nombre élevé de tours requis pour fermer une vanne à pointeau, ils ne sont pas parfaitement adaptés pour une utilisation dans les applications de service d'arrêt.

La fonction d'actionnement :

$$\text{Vanne à pointeau} = 2\eta - \eta^2 \quad (4.16)$$

Où :

$$\eta = \theta - \left(\frac{t}{T_V}\right)^2 \quad (4.17)$$

Donc,

$$\text{Vanne à pointeau} = 2\left(\theta - \left(\frac{t}{T_V}\right)^2\right) - \left(\theta - \left(\frac{t}{T_V}\right)^2\right)^2 \quad (4.18)$$

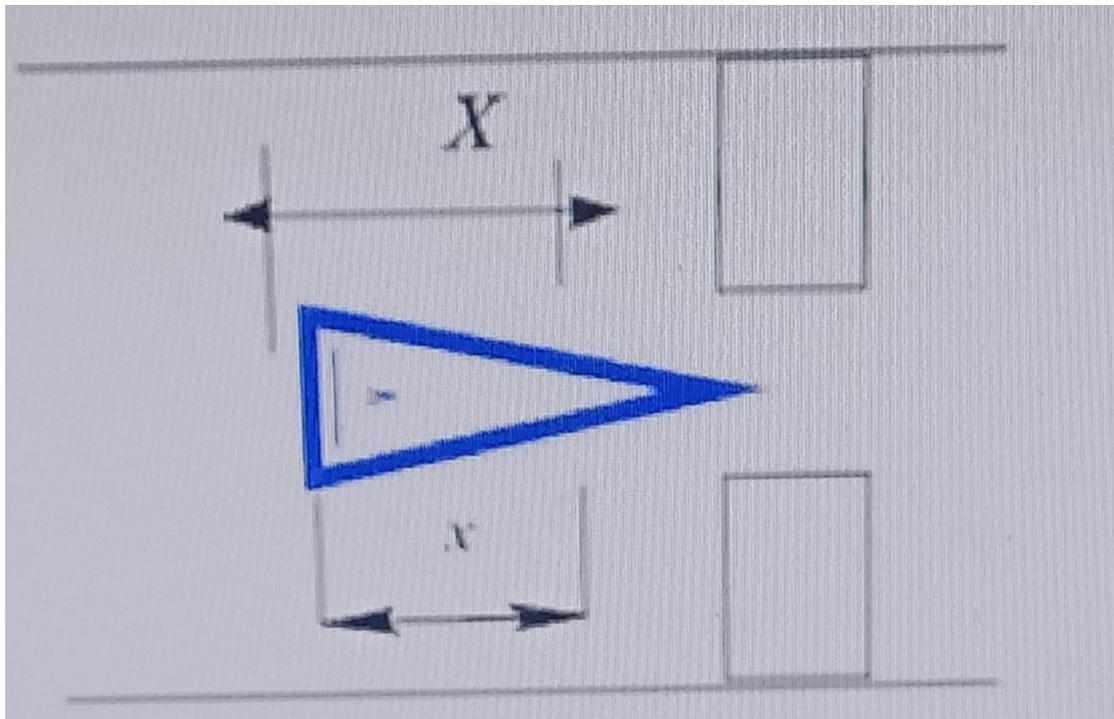


Figure (4.8) : Représentation schématique de la vanne à pointeau [11].

4.3.6 Vanne circulaire

Ce type de vannes fonctionne en soulevant une vanne circulaire hors du trajet du fluide lorsque la vanne est complètement ouverte et que la vanne est à passage intégral, ce qui signifie qu'il n'y a rien pour obstruer le flux à cause de la porte et de la tuyauterie. Ce diamètre d'alésage détermine également la taille de la vanne.

La fonction d'actionnement :

$$\text{Vanne circulaire} = 1 - 2\pi \left(\arccos(\eta) - \eta\sqrt{1 - \eta^2} \right) \quad (4.19)$$

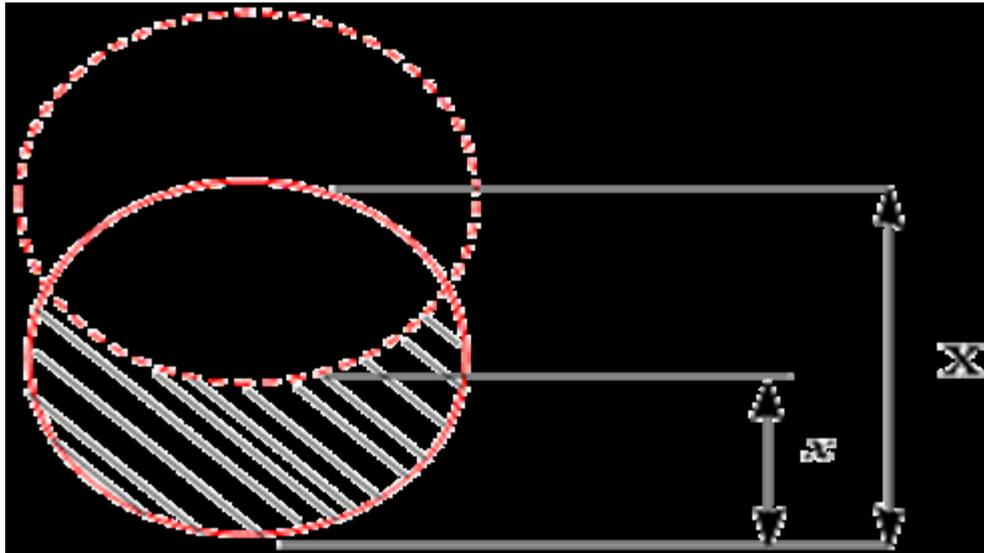


Figure (4.9) : Représentation schématique du robinet-vanne circulaire [11] .

4.3.7 Vanne à clapet simple

Elles font l'objet d'une vaste gamme de production pour des applications les plus variées:

- à passage droit, en équerre, trois voies, ...
 - pour des services cryogéniques, de liquide flashant, de désurchauffe de vapeur, ...
- Elles peuvent être équipées de clapets et/ou de cages aux formes variées permettant d'ajuster la courbe de variation de débit/Cv aux besoins les plus variés.

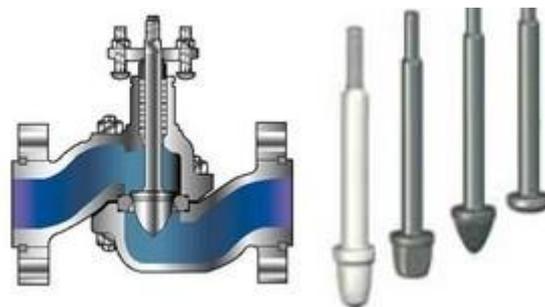


Figure (4.10): Vanne à clapet simple [12].

4.3.8 Vanne à clapet double

Permet pour un même diamètre de raccordement une capacité quasiment double de celui d'une vanne à clapet simple.

De plus l'effet de la pression sur les clapets s'annule et autorise donc un actionneur (servomoteur) de faible puissance.



Figure (4.11) : Vanne à clapet double [12].

4.3.9 Vanne à cage

De conception proche des vannes à clapet, ici la cage aussi bien que le clapet contribue au réglage du débit. Les cages peuvent avoir des formes très variées permettant de produire toutes formes de courbes caractéristiques. Elles permettent d'effectuer la détente en plusieurs étapes, utile pour résoudre des problèmes de bruit ou de cavitation.

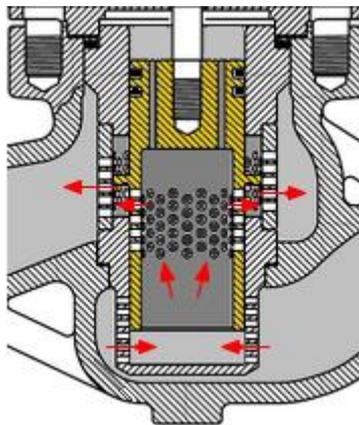


Figure (4.12) : Vanne à cage [12].

4.3.10 Vanne à clapet rotatif excentré

Ce type de vanne permet un domaine d'utilisation plus étendu que d'autres technologies telles que les vannes à clapet ou les vannes papillon. La différence de pression ne s'oppose pas directement au mouvement du clapet, ce qui autorise des actionneurs de relative faible puissance.

Elle peut être utilisée dans les deux sens de circulation du fluide; dans le sens clapet → arbre, le fluide tend à ouvrir la vanne, tandis que dans le sens arbre → clapet, le fluide tend à la fermer.

La courbe caractéristique est assez linéaire sur la variation de débit et le gain sur le débit est assez constant sur toute la course.

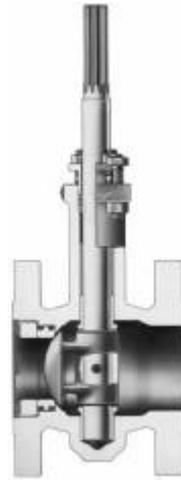


Figure (4.13) : Vanne à clapet rotatif excentré [12].

Ce chapitre consiste à explorer l'effet de fermeture de la vanne sur les paramètres de l'écoulement transitoire dans les conduites sous pression.

4.4 Equations de l'écoulement transitoire

Les équations gouvernant les écoulements transitoires, en fonction du débit et de la charge manométrique, dans les conduites sous pression sont données par les deux équations représentées par le système suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{Q}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{S} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} - gS \frac{\partial H}{\partial x} \pm gSj \end{cases} \quad (4.20)$$

Où : a est la célérité d'onde.

a) Cas d'une conduite libre

Pour les conduites libres la célérité d'onde s'écrit :

$$a = \left(\sqrt{\frac{K}{\rho}} \right) / \left(\sqrt{1 + \frac{K \cdot D \cdot C}{E \cdot e_1}} \right) \quad (4.21)$$

K : module d'élasticité du liquide, pour l'eau $K=2,07 \cdot 10^9$ Pascals ;

E : module d'élasticité du matériau constituant le réseau.

e_1 : épaisseur de la conduite en m ;

C=1 puisque on considère que la conduite étudiée est à paroi mince ;

ρ : masse volumique du liquide, pour l'eau $\rho= 10^3 \text{kg/m}^3$;

S : section transversale de la conduite (m^2) ;

g : accélération de la pesanteur (m/s^2).

Comme dans le cas général, on n'a aucune idée sur le sens de l'écoulement du liquide dans la conduite, il est plus commode d'exprimer j par la relation suivante :

$$j = \frac{\lambda}{2 \cdot g \cdot d \cdot S^2} Q \cdot |Q| \quad (4.22)$$

Avec :

d : diamètre intérieur de la conduite en m ;

λ : coefficient de frottement, il est donné par la formule implicite de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{\varepsilon}{3,71d} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right) \quad (4.23)$$

avec :

Re : le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{U \cdot d}{\nu} \quad (4.24)$$

Où :

U : la vitesse moyenne d'écoulement en (m/s) ;

d : diamètre intérieur de la conduite en (m) ;

ν : est la viscosité cinématique en (m^2/s), pour l'eau elle est donnée par l'expression de Poiseuille ainsi écrite.

$$\nu = \frac{0,0178}{1 + 0,0337t + 0,000221t^2} \cdot 10^{-4} \quad (4.25)$$

Où t est la température du liquide [13].

En phase transitoire où ($2320 < Re < 4000$), le coefficient de frottement est donné par la formule de Frenkel qui s'écrit: [14].

$$\lambda = \frac{2,7}{Re^{0,53}} \quad (4.23a)$$

En régime laminaire où ($Re < 2320$) et pour les conduites circulaires, le coefficient de frottement est donné par l'expression suivante [13] [15].

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (4.23b)$$

b) Cas d'une conduite enterrée

La célérité d'onde est déterminée dans le cas des conduites enterrées par l'expression suivante : [16].

:

$$\frac{1}{a^2} = \left[\frac{\rho}{K} \left(1 + K(1 - v_m^2) \frac{2r}{E_m e_m} \right) [1 + B(P - P_a)] \right] \quad (4.24)$$

D'où :

$$B = (1 - v_m^2) \frac{r^2}{E_m e_m^2} (1 - 2v_m) \quad (4.25)$$

Avec :

- a : la célérité d'onde (m/s),
- E_m : le module de Young du métal (Pa),
- ν_m : le coefficient de Poisson du métal,
- e_m : l'épaisseur du blindage (m),
- K_e : le module d'élasticité de l'eau [Pa],
- ρ : la masse volumique de l'eau [kg/m^3],
- r : le rayon de la conduite (m),
- P : la pression hydrostatique (Pa),
- P_a : la charge des terres de remblai (Pa). [17].

L'hypothèse de la charge de précontrainte requiert, tout d'abord, le calculer la pression hydrostatique en régime permanent au nœud considéré et la charge des terres du remblai. Cette dernière grandeur nécessite de savoir le type de pose de la conduite et est-ce que cette pose est faite dans une tranchée large ou étroite.

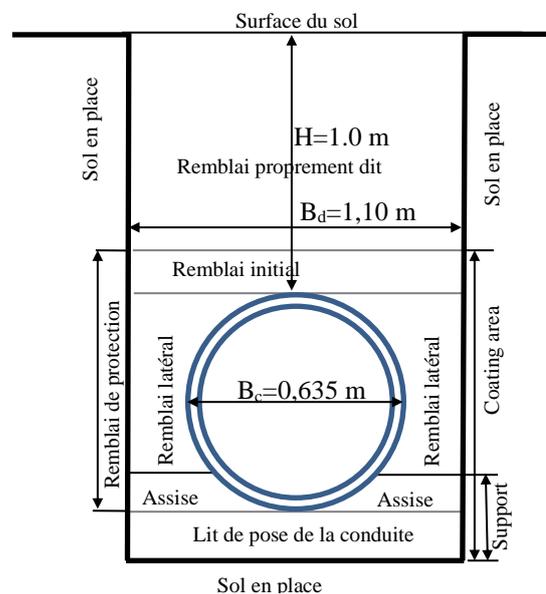


Figure (4.14) : Coupe transversale de la conduite

Tableau 1: Caractéristiques des matériaux utilisés

Type de matériaux	Fonte
Module d'élasticité en Pascal	$E_F=1.03. 10^{11}$
Diamètre extérieur en (mm)	635
Diamètre intérieur en (mm)	600
Épaisseur de la conduite e_1 en (mm)	17.5
Rugosité de la conduite ϵ en (mm)	0.03
Longueur (m)	1000
Pression nominale de la conduite (bars)	42
Coefficient de Poisson	0,26

Tableau 2: Caractéristiques du réservoir, du débit et du fluide

Niveau du trop plein du réservoir en (m)	200	Fluid elasticity modulus	$K = 2,07.10^9$ Pa
Débit sortant du réservoir en (l/s)	350	Fluid temperature	15°C

L'organigramme de la figure (4.15) donne la représentation schématique de la résolution du problème de l'écoulement transitoire.

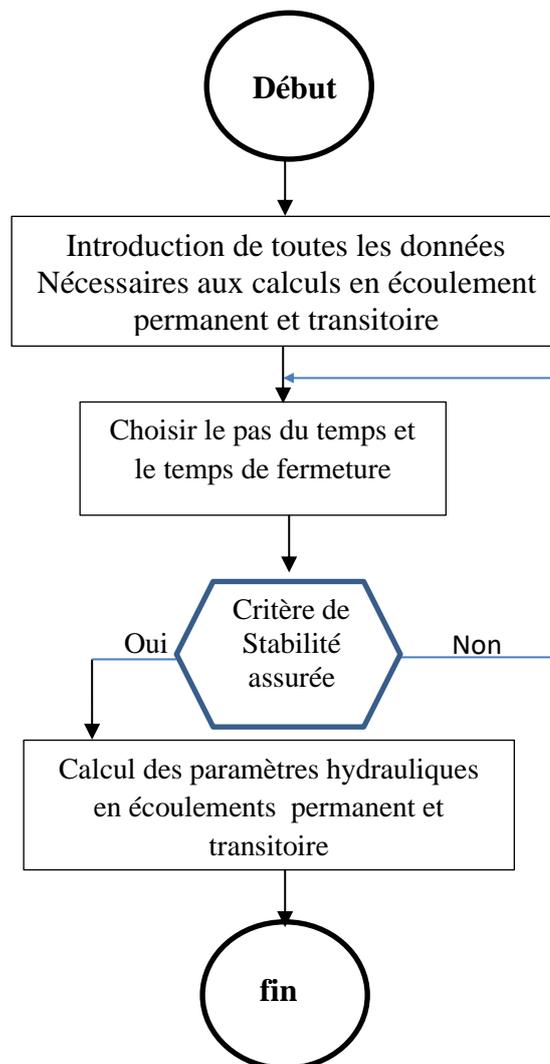


Figure (4.15) : Organigramme de calcul des paramètres hydrauliques en écoulement transitoire

La fermeture instantanée, de temps de fermeture nul, génère un phénomène oscillatoire de surpressions et de dépressions de période de retour de $4L/a$, lequel a des effets néfastes sur le tuyau et ses annexes en même temps. Cette fermeture, bien qu'elle soit pratiquement irréalisable, en raison de son délai, qui doit être nul, doit être évitée afin de ne pas mettre en danger le système hydraulique. Par ailleurs, elle engendre des pressions importantes dépassant en certains endroits du système hydraulique la résistance du tuyau, notamment. Alors que la fermeture rapide, de

temps de fermeture compris entre 0 et $0,5 t_4$ (période de retour), engendre des valeurs de pression importantes pouvant causer des dommages au système hydraulique.

La fermeture est dite lente, si le temps de fermeture de la vanne est supérieur au temps d'aller et de retour de l'onde de choc $t > 0,5 t_4$. Cette fermeture n'est pas obligatoire manuelle. En effet, les progrès de la technologie ont conduit à l'apparition de vannes motorisées qui se ferment et s'ouvrent en fonction du signal de commande. Cette opportunité génère des lois reliant le débit et le signal de commande à l'instar des lois linéaire, concaves et convexes.

Du premier manœuvre à $t=t_0$ jusqu'à la fermeture totale de la vanne et après un certain temps de la fermeture, quelles seront les valeurs des paramètres de l'écoulement en tous les nœuds de la conduite. La réponse à cette question fait l'objet de ce travail.

4.5 Effet de l'angle d'inclinaison sur la loi de fermeture

Pour chercher l'effet de l'angle d'inclinaison de la conduite par rapport au plan horizontal à sur la loi de fermeture de la vanne, nous allons effectuer un calcul de l'exposant donnant le type de la loi de fermeture de la vanne, pour deux temps de différents de fermeture et pour des valeurs de l'angle allant de 0 à 90° en prenant un pas de 5 degrés.

Les résultats obtenus sont mentionnés dans la figure (4.16).

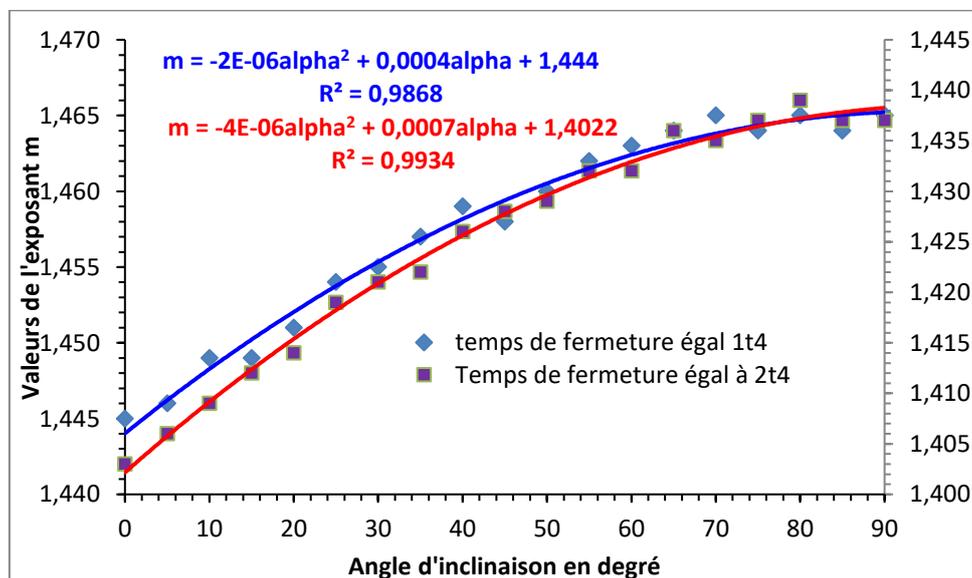


Figure (4.16) : Variation de l'exposant de la loi de fermeture en fonction de l'angle d'inclinaison de la conduite pour les temps de fermeture de la vanne égaux à $1t_4$ et $2t_4$

Il ressort de ces deux figures qu'il existe une bonne corrélation entre l'angle d'inclinaison de la conduite et l'exposant m déterminant la loi de fermeture de la vanne.

4.6 Effet de l'angle d'inclinaison sur la pression optimale

Pour rechercher l'effet de l'angle d'inclinaison de la conduite par rapport au plan horizontal sur la pression optimale, nous allons effectuer un calcul de la pression optimale au niveau de la vanne, pour deux temps de différents de fermeture et pour des valeurs de l'angle allant de 0 à 90° en prenant un pas de 5 degrés. La figure (4.17) montre l'aspect graphique des résultats obtenus.

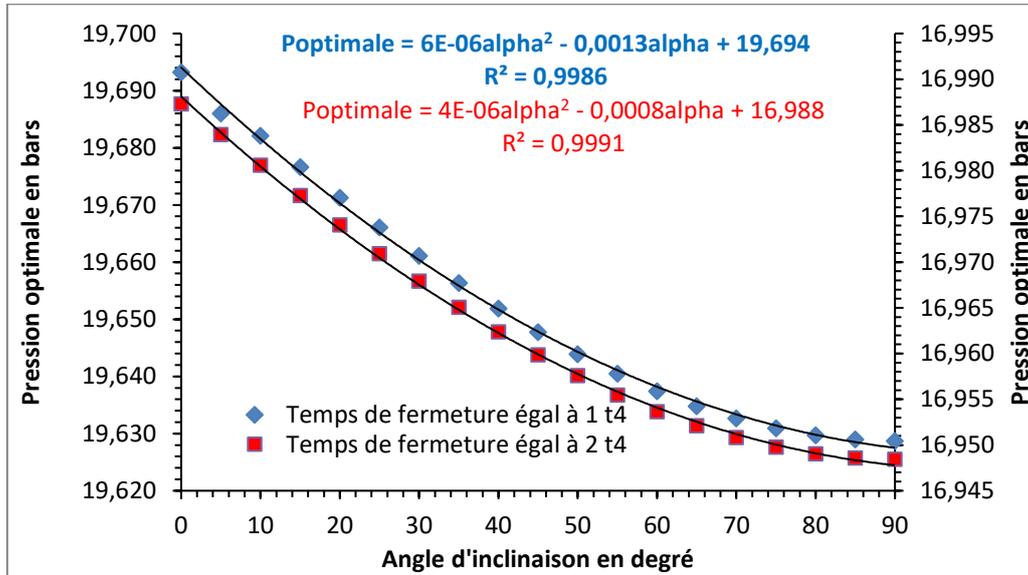


Figure (4.17) : Variation de la pression optimale en fonction de l'angle d'inclinaison de la conduite pour les temps de fermeture de la vanne égaux à 1t₄ et 2t₄

Malgré que la variation de la pression optimale est faible lors du passage d'un angle d'inclinaison égal à zéro degré à un angle égal à 90°, il existe une fonction polynomiale entre la pression optimale et cet angle.

4.7 Effet de la longueur de la conduite sur la loi de fermeture et la pression optimale

La longueur de la conduite a des influences sur les valeurs de l'exposant déterminant la loi de fermeture optimale et sur les valeurs de la pression correspondante, mais les relations reliant ces grandeurs entre eux restent méconnais. Dans ce qui suit nous allons essayer de rechercher ces relations. Prenons le problème posé auparavant et recherchant les valeurs de l'exposant et la pression optimale correspondante en faisant varier la longueur de la conduite tout en gardant les valeurs des autres grandeurs constantes. Les résultats obtenus de l'exposant sont représentés dans la figure (4.18).

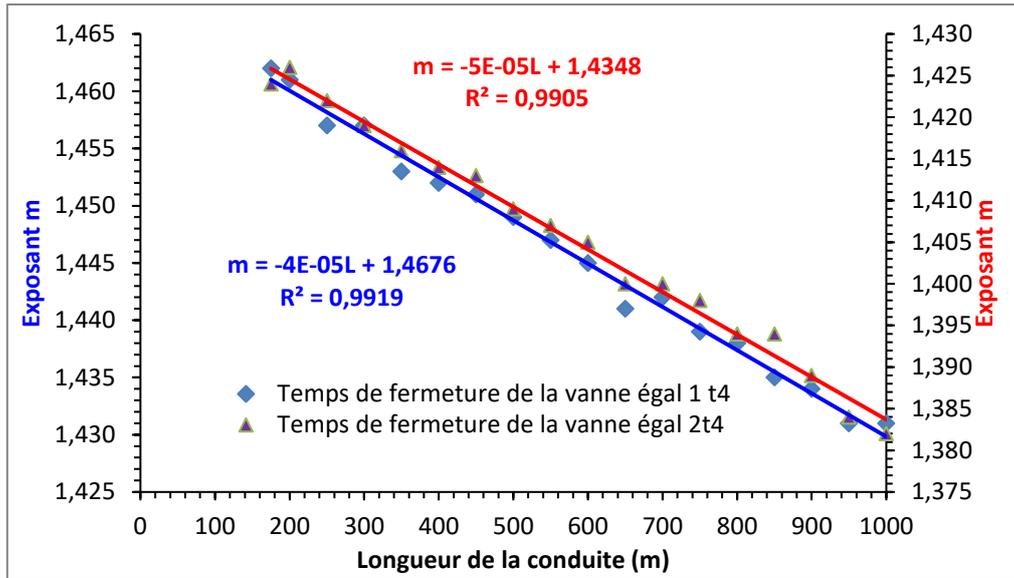


Figure (4.18) : Variation de l'exposant de la loi de fermeture en fonction de la longueur de la conduite pour les temps de fermeture de la vanne égaux à $1t_4$ et $2t_4$

Pour les deux cas traités, c'est à dire le temps de fermeture $TF=1t_4$ et $TF=2t_4$, la relation reliant l'exposant avec la longueur de la conduite est linéaire et elle n'est pas unique.

Les résultats de la pression optimale obtenus sont indiqués dans la figure (4.19).

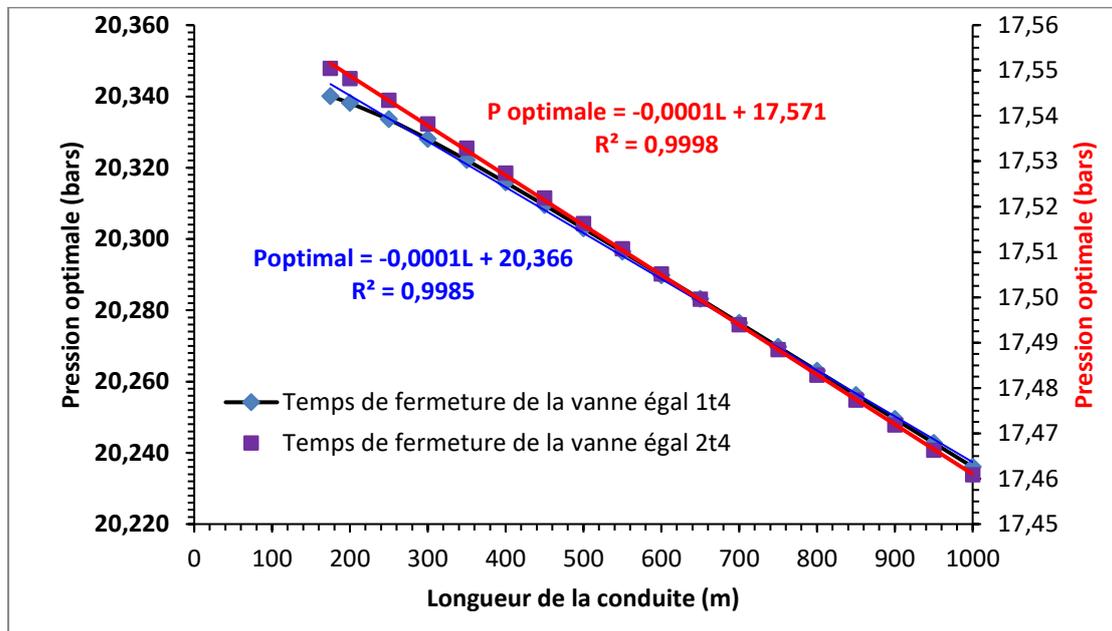


Figure (4.19) : Variation de la pression optimale en fonction de la longueur de la conduite pour les temps de fermeture de la vanne égaux à $1t_4$ et $2t_4$

Pour les cas de $TF=1t_4$ et $TF=2t_4$ la relation reliant la pression optimale et la longueur de la conduite est linéaire et également elle n'est pas unique.

4.8 Effet de la profondeur d'enterrement de la conduite sur la loi de fermeture

Pour rechercher l'influence de la profondeur d'enterrement de la conduite sur les valeurs de l'exposant et les valeurs de la pression correspondante, une série de calcul a été effectuée de ces deux grandeurs en faisant varier la profondeur d'enterrement de 0,5 m à 3 m en prenant un pas de profondeur de 0,1m. Les résultats obtenus de l'exposant m et de la pression optimale sont représentés dans les figures (4.20) et (4.21).

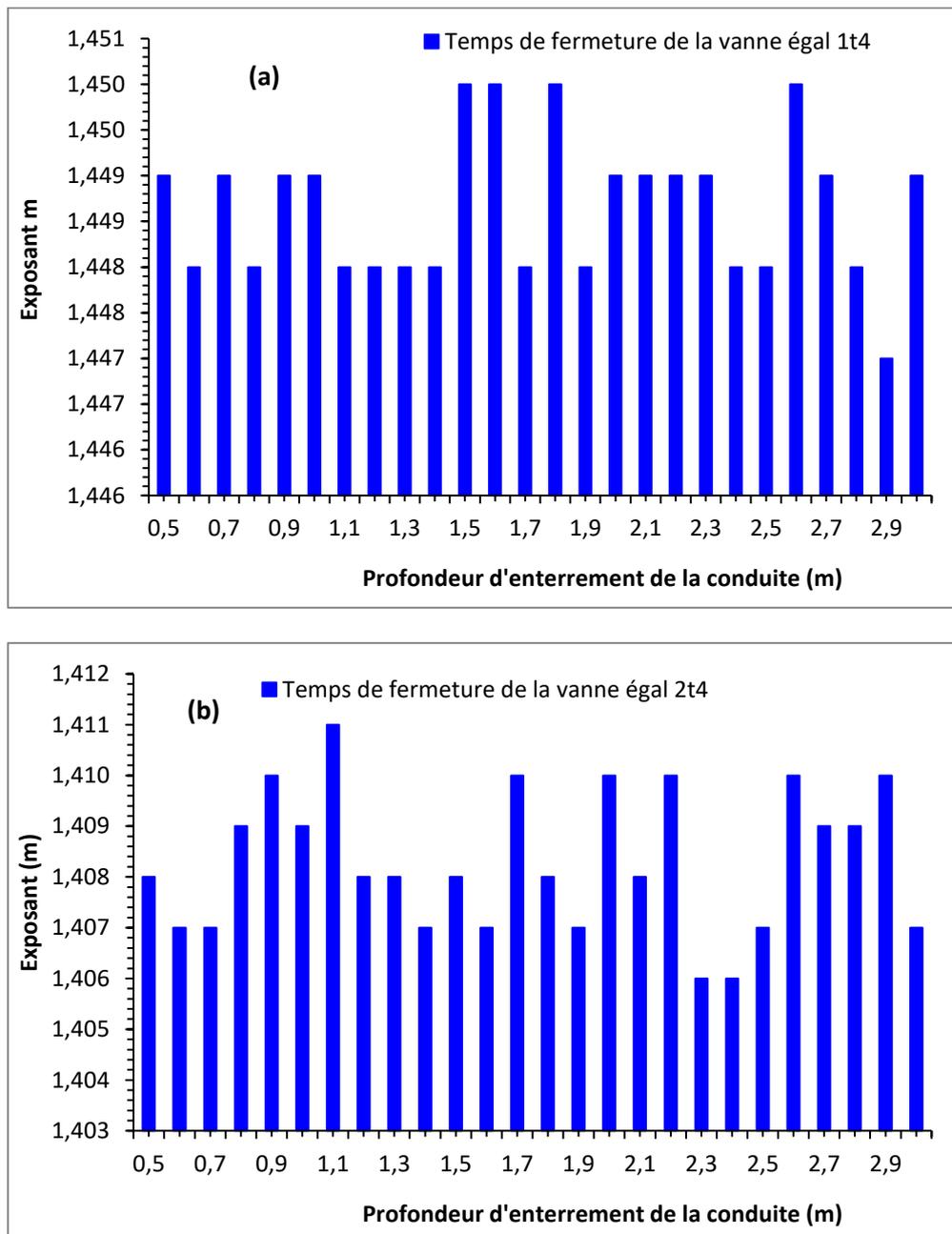


Figure (4.20) : Variation de l'exposant de la loi de fermeture en fonction de la profondeur d'enterrement de la conduite pour les temps de fermeture de la vanne égaux à $1t_4$ et $2t_4$

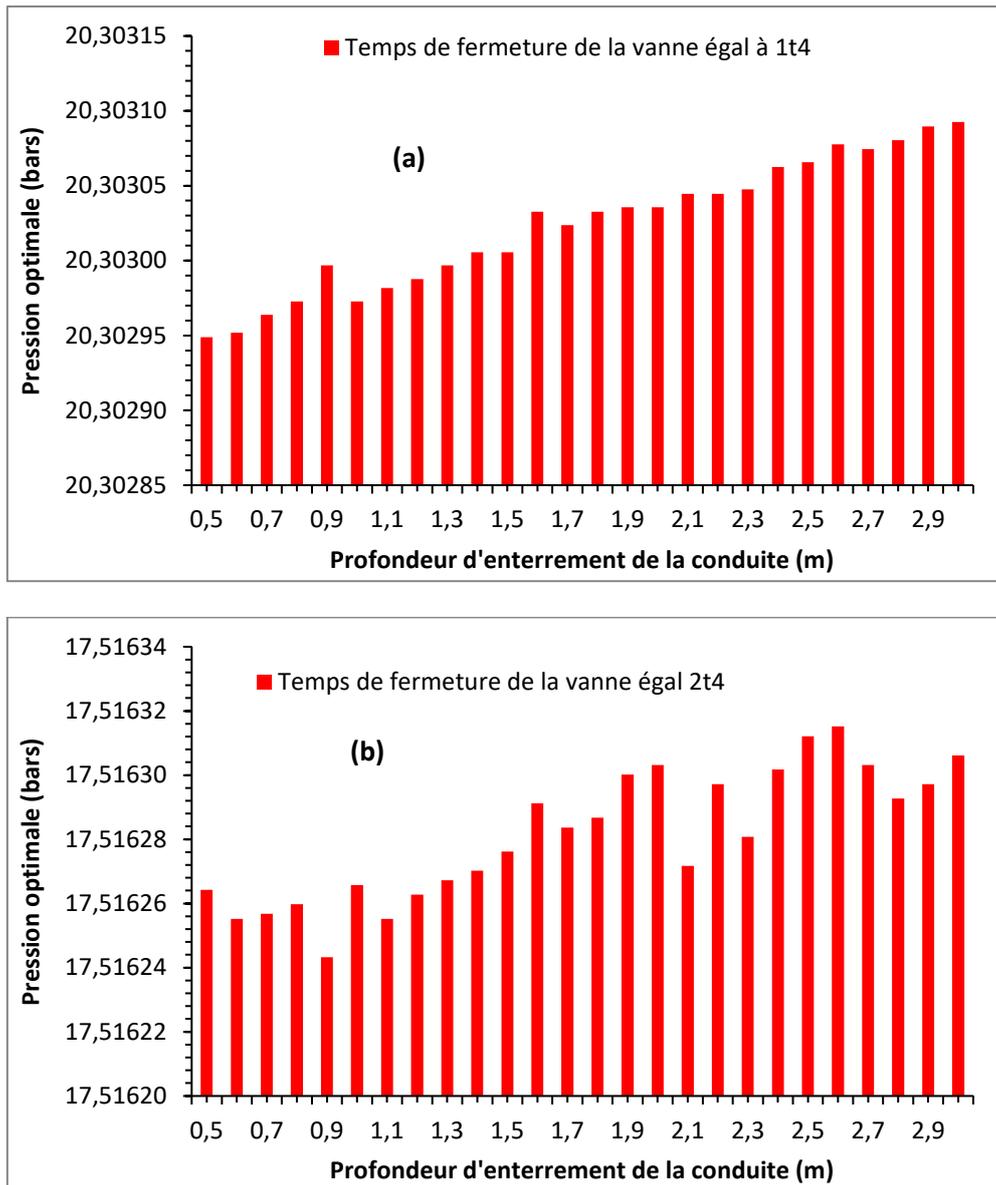


Figure (4.21) : Variation de la pression optimale en fonction de la profondeur d'enterrement de la conduite pour les temps de fermeture de la vanne égaux à $1t_4$ et $2t_4$

Il ressort de ces résultats que la profondeur d'enterrement n'a que de très petites influences sur la loi optimale et les pressions optimales correspondantes c'est pour cette raison nous allons prendre une profondeur d'enterrement égale à 1 m dans le reste des calculs.

4.9 Cas de fermeture rapide

Les figures (4.22) et (4.23) présentent respectivement l'évolution de la pression pour une fermeture rapide et lente. Il est évident que lors d'une fermeture rapide, la pression augmente linéairement au cours du premier quart de la période de retour de l'onde de choc, suivie d'une descente tout aussi linéaire au cours du deuxième trimestre de la période de retour. La loi quadratique entraîne des pressions plus faibles

au niveau de la vanne par rapport à la loi linéaire. La loi linéaire présente un fort gradient de pression au premier trimestre de la période de retour et un gradient plus faible au deuxième trimestre. Les deux lois de fermeture des vannes montrent une différence de 0,05 bar maximum entre les valeurs de surpression maximale et minimale enregistrées.

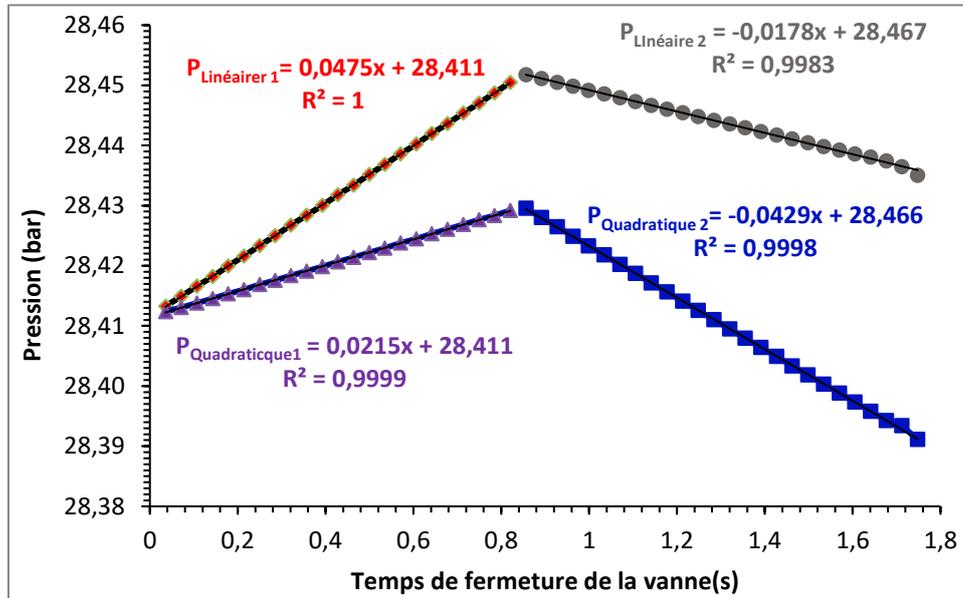


Figure. (4.22): Résultat de simulation de pression en fonction du temps pour les lois de fermeture linéaires et quadratiques

4.10 Cas de fermeture lente

Cette section se concentre sur l'exploration de différents temps de fermeture de vanne (t) allant de $0,51 t_4$ secondes à $10 t_4$ secondes, avec un pas de $\Delta t = 0,001$ s, afin de déterminer la loi de fermeture de vanne optimale qui minimise la surpression et la dépression. Pour illustrer ce processus, des calculs sont effectués à l'aide de deux lois de fermeture couramment utilisées : la loi linéaire et la loi quadratique.

4.10.1 Lois de fermeture linéaire et quadratique

Les figures (4.23)(a) et (4.23) (b) montrent l'évolution temporelle de la pression à la vanne pour un temps de fermeture égal à trois fois la période de retour ($3 t_4$). De ces deux graphiques on peut déduire la surpression maximale et la dépression maximale. Il est clair que pour le temps de fermeture lente testé ($3 t_4$), la pression générée sous la loi quadratique est supérieure à celle générée sous la loi linéaire. De plus, la pression minimale est respectée en cas de fermeture quadratique de la vanne.

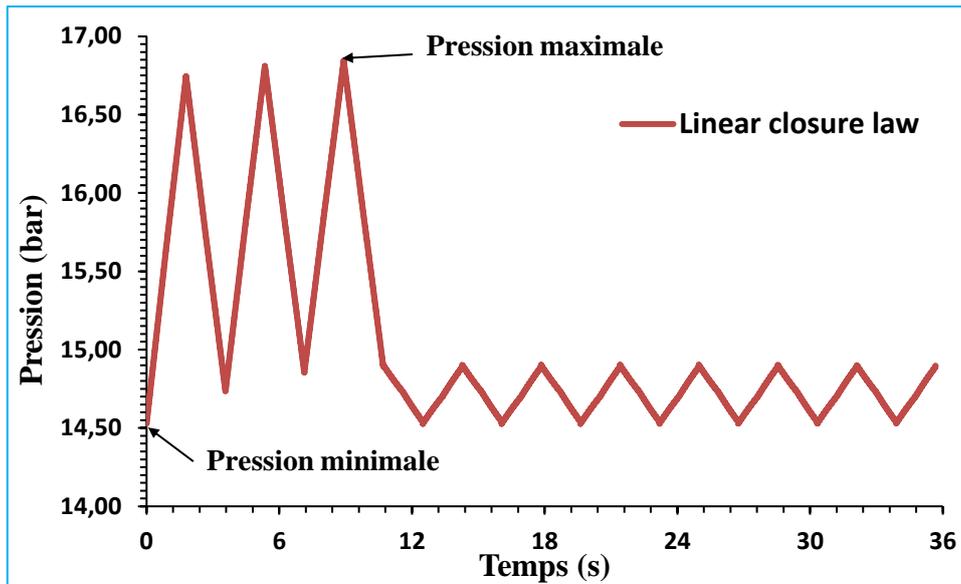


Figure (4.23) (a): Résultat de simulation de la pression au niveau de la vanne en fonction du temps pour la loi linéaire quadratique

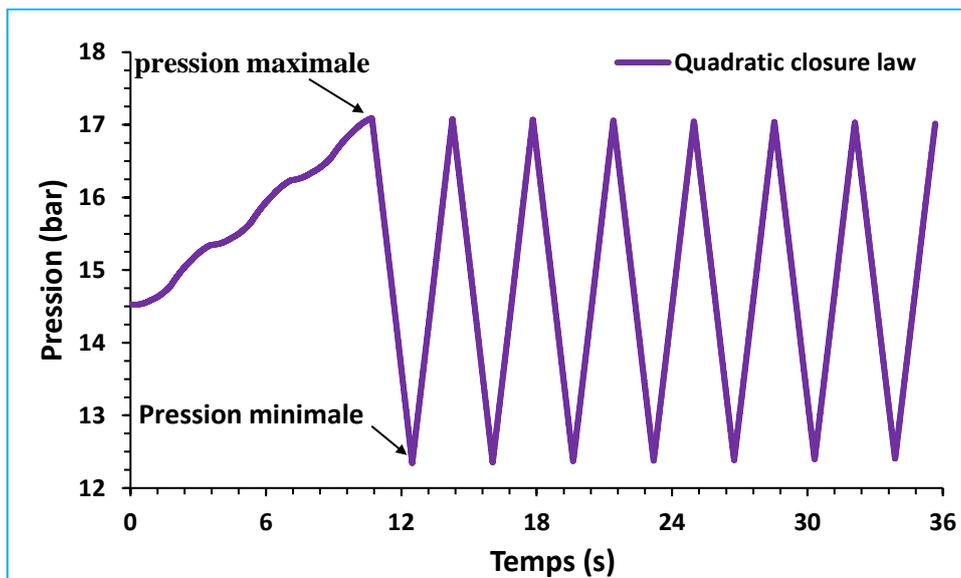


Figure (4.23) (b): Résultat de simulation de la pression au niveau de la vanne en fonction du temps pour la loi de fermeture quadratique

Dans le prolongement du résultat précédent, les graphiques suivants (Figures (4.24) et (4.25) montrent respectivement l'évolution des maximums de surpression et de dépression, obtenus pour différents temps de fermeture lente allant de $0,51 t_4$ à $10 t_4$ avec un pas de temps égal à $0,01 t_4$, (soit 950 vannes horaires de fermeture).

Il apparaît qu'à mesure que le temps de fermeture lente augmente, la surpression au niveau de la vanne diminue et tend asymptotiquement le long de l'axe des x vers la pression d'équilibre. Les surpressions générées par la loi quadratique sont nettement supérieures à celles de la loi linéaire. La figure(4.9) qui montre la variation de la

dépression maximale, montre clairement la diminution de la dépression maximale au fur et à mesure du temps de fermeture lente de la vanne.

Augmente. La courbe de dépression de la loi linéaire apparaît sinusoïdale, contrairement à la loi quadratique, qui a un aspect plus lisse

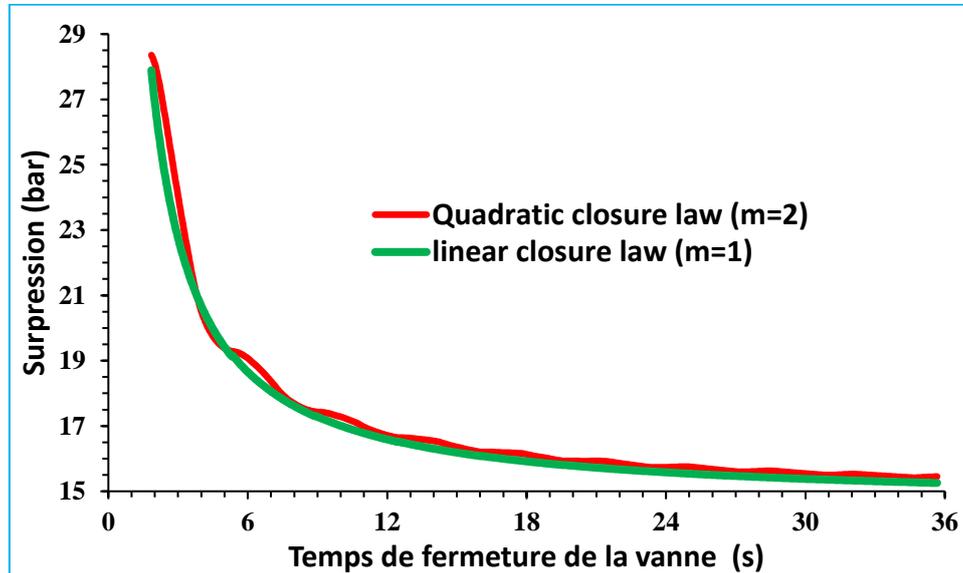


Figure (4.24): Résultat de simulation de surpression au niveau de la vanne en fonction du temps pour les lois de fermeture linéaire et quadratique

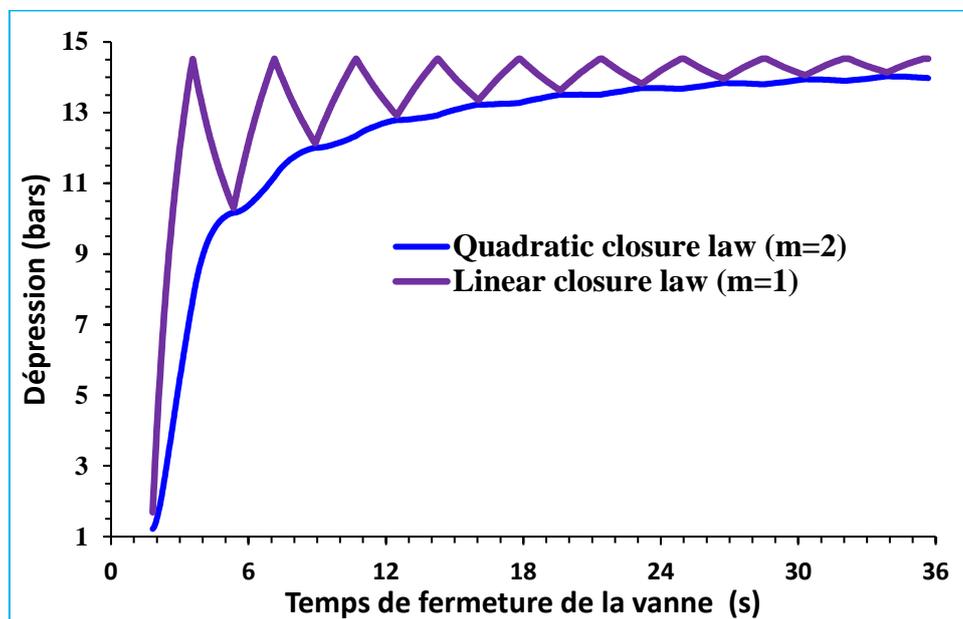


Figure (4.25): Résultat de simulation de la dépression au niveau de la vanne en fonction du temps pour les lois de fermeture linéaire et quadratique

4.10.2 Recherche de lois optimales pour éviter la surpression

La recherche de la loi optimale qui génère la surpression minimale, pour tout temps de fermeture lent de la vanne, consiste à tester toutes les lois de fermeture possibles en

faisant varier l'exposant m de l'équation 20, et à enregistrer la valeur de m pour la loi qui minimise la surpression maximale.

Pour ce faire, nous avons examiné des temps de fermeture lents de vannes allant de $0,51 t_4$ à $10 t_4$, en utilisant un pas de temps de $0,05 t_4$ (191 temps de fermeture ont été testés). La figure (4.26) illustre la variation de l'exposant m de la loi optimale en fonction des temps de fermeture lents. La courbe décrivant l'évolution de m montre un motif périodique, chaque temps de fermeture lent présentant une loi optimale unique qui produit la surpression minimale. Pour les temps de fermeture faibles, l'exposant m est compris entre 1,117 et 1,599. À mesure que le temps de fermeture augmente, la plage de variation de m diminue

Cette courbe de valeurs de m des lois optimales est mise sous l'enveloppe de deux courbes, l'une supérieure d'équation $m_{sup} = 1.8055Ct^{0.101}$ ($R^2 = 0.9913$) et l'autre inférieure d'équation $m_{inf} = 9 \times 10^{-5}Ct^2 + 1,7 \times 10^{-3}Ct + 1,2699$ ($R^2 = 0,9075$). L'écart entre ces deux courbes commence par s'élargir et se rétrécit avec le temps.

La figure (4.27) (a) montre la variation de la surpression minimale pour différents temps de fermeture lente de la vanne correspondant aux valeurs optimales de m . De toute évidence, à mesure que le temps de fermeture lente augmente, la surpression diminue et se rapproche de la pression d'équilibre pour t supérieur à $10 t_4$. Les dépressions correspondantes sont représentées sur la figure (4.27) (b).

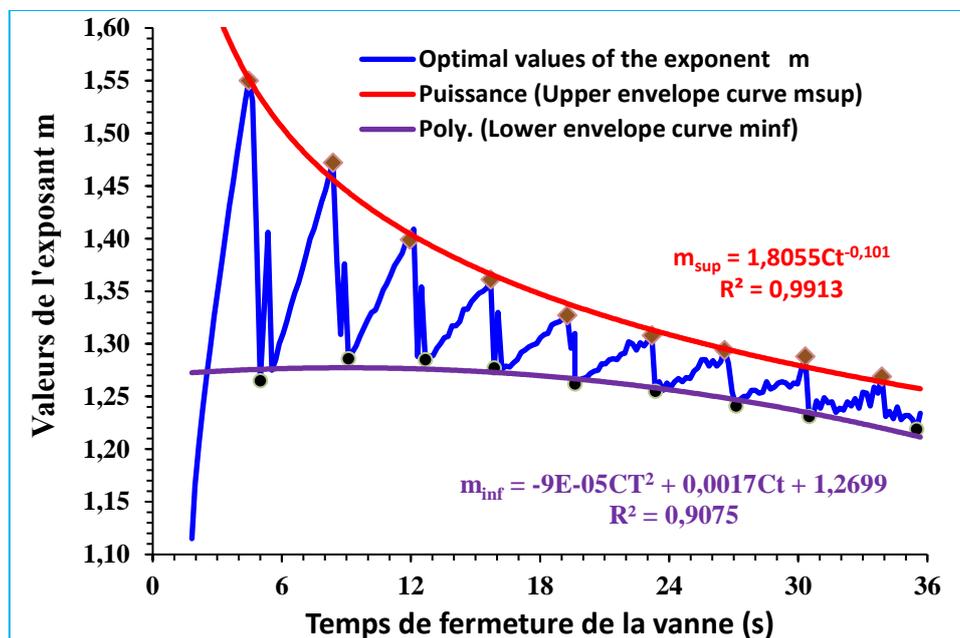


Figure (4.26): Résultat de simulation de la valeur optimale de l'exposant m en fonction du temps de fermeture de la vanne dans le cas d'une protection contre les surpressions

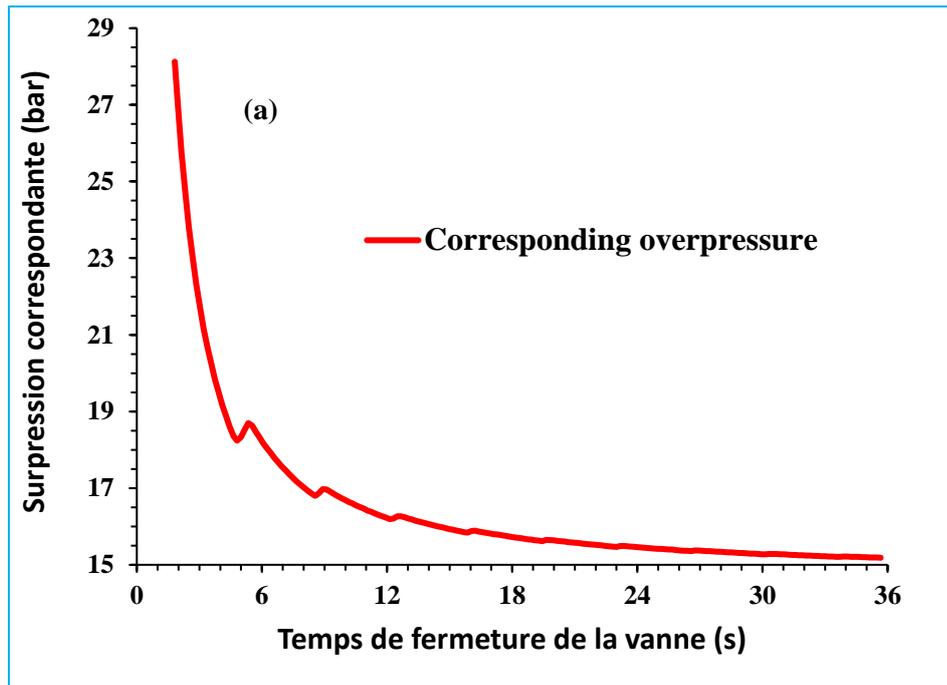


Figure (4.27) (a): Variation de la surpression en fonction du temps de fermeture pour un m optimal

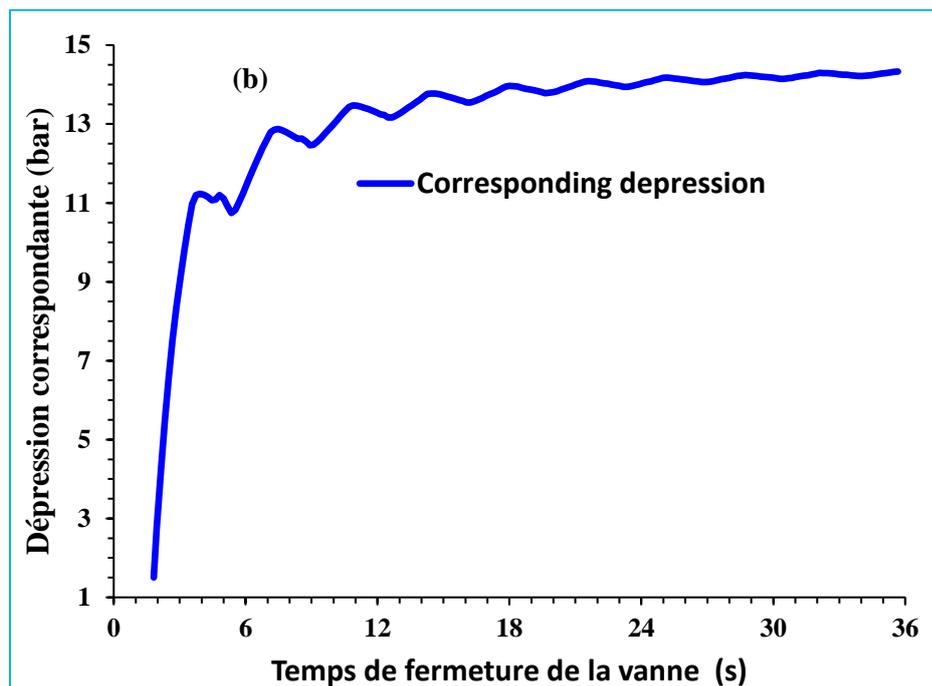


Figure (4.27) (b): Variation de la dépression correspondante.

4.11 Conclusion

Les résultats obtenus en étudiant les lois linéaires et quadratiques démontrent qu'à mesure que la vanne de fermeture rapide augmente, la surpression au niveau de la vanne diminue linéairement au cours du deuxième trimestre de t_4 , suite à une augmentation initiale au cours de la première période. Dans le cas d'une fermeture lente, on observe qu'à mesure que le temps de fermeture augmente, la surpression et la dépression diminuent, se rapprochant d'une pression d'équilibre. L'étude révèle également que différentes lois sont optimales pour atténuer la surpression et la dépression lors d'une fermeture lente et que, à mesure que la durée de la fermeture lente augmente, la surpression et la dépression diminuent. L'exposant « m » de la loi optimale, qui est crucial pour une protection efficace contre la surpression et la dépression, se situe dans une plage définie déterminée par deux courbes limites. Ce paramètre dépend de la durée de fermeture lente, qui régit la variation optimale du débit. Lors de la recherche de la loi de fermeture de vanne optimale (OVCL) pour atténuer la surpression, on constate que l'exposant « m » se situe dans la plage de 1,117 à 1,599.

Enfin, les résultats confirment la précision de la méthode de MacCormack dans la simulation numérique des phénomènes de coups de bélier.



CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

La résolution des équations d'écoulement transitoire représente un défi crucial dans de nombreux domaines de l'ingénierie et des sciences appliquées. Dans ce mémoire, nous avons exploré et appliqué la méthode de MacCormack pour aborder ces équations avec une attention particulière à ses aspects théoriques et pratiques.

La méthode de MacCormack, grâce à sa simplicité et à son efficacité, s'est révélée être un technique puissant pour la simulation numérique des écoulements transitoires. Sa nature explicite et son algorithme en deux phases (prédiction et correction) offrent une balance idéale entre facilité de mise en œuvre et précision numérique. Cette méthode de différence finie de deuxième ordre a prouvé son utilité dans diverses applications, notamment dans les domaines des écoulements compressibles, de la dynamique des fluides, et du transfert de chaleur.

Cependant, comme toute méthode numérique, la méthode de MacCormack n'est pas sans limites. Sa stabilité conditionnelle, dépendante du critère CFL, impose des restrictions sur le choix des pas de temps et d'espace, nécessitant une attention particulière pour éviter des instabilités numériques. De plus, bien que la méthode offre une bonne précision pour des gradients modérés, elle peut être sujette à des erreurs de dispersion et de diffusion numérique, en particulier dans la présence de discontinuités ou de gradients très raides.

Les travaux réalisés dans ce mémoire ont permis de confirmer l'efficacité de la méthode de MacCormack pour la résolution des équations d'écoulement transitoire, tout en soulignant les précautions nécessaires pour son application optimale. Les simulations effectuées ont démontré la capacité de cette méthode à fournir des résultats précis et fiables, tout en restant accessible en termes de complexité de mise en œuvre.

En conclusion, la méthode de MacCormack se positionne comme une technique incontournable pour les simulations numériques des écoulements transitoires. Les résultats obtenus dans ce mémoire ouvrent la voie à des applications futures et des optimisations supplémentaires, notamment en combinaison avec d'autres méthodes numériques pour surmonter ses limitations et améliorer encore sa robustesse et sa précision. La continuité des recherches dans ce domaine promet d'enrichir davantage les outils disponibles pour l'ingénieur et le scientifique, permettant des simulations de plus en plus réalistes et précises des phénomènes complexes d'écoulement transitoire.

Références bibliographiques

- [1] https://fr.wikipedia.org/wiki/Sch%C3%A9ma_de_Lax-Friedrichs
- [2] OURAGH Youcef "Ecoulement forcé en hydraulique" Tome II, Edition Paris 1971.
- [3] MacCormack, R. W., The Effect of viscosity in hypervelocity impact cratering, AIAA Paper, 69-354 (1969).
- [4] Anderson, J. D., Jr., Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications, McGraw Hill (1994)
- [5] DJADEL, Karim «Anisotropie Laplacien Navier-Stokes, Équations de Singularités Volumes finis, Méthodes de Équations différentielles elliptiques » thèse, Lille 1, 2005
- [6] J. BLAZEK ET AL, « Computational Fluid Dynamics : Principles and Applications », ELSEVIER, First edition, 2001
- [7].MacCormack, R.W.(1982). A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow, AIAA Journal, vol. 20, no. 9, pp. 1275–1281.
- [8] r. j. leveque finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems (2007)
- [9] PROVENZANO P.G., BARONI F., AGUERRE R. J. (2011). The closing function in the water hammer modeling, Latin American Applied Research. Vol. 41, pp. 43–47.
- [10] SUBANI N., NORSARAHANDA A. (2015). Analysis of water hammer with different closing valve laws on transient flow of hydrogen-natural gas mixture, Abstract and Applied Analysis. Volume, Article ID 510675, 12 pages. <http://dx.doi.org/10.1155/2015/510675>
- [11] **Zahraa J-Ars matical Geometric of Open and Close Valve in Water Hammer** Wasit Journal for Pure Sciences Vol. (2) No. 0(1)
- [12] <http://processs.free.fr/Pages/VersionWeb.php?page=0913>
- [13] KREMENETSKI N., SCHTERENLIHT D., ALYCHEV V., YAKOVLEVA L. (1984). Hydraulique, Édition MIR.
- [14] ZELLA L., SMADHI D. (2005). L'intérêt du calcul des pertes de charge en micro irrigation. Larhyss Journal. N°4, pp. 51- 68.
- [15] RANALD V. G. (1985). Mécanique des fluides et hydraulique, in Edition Française, 272 pages.
- [16] AIT S.Dj. (2018), Calcul du coup de bélier dans les conduites enterrées, Mémoire de master en hydraulique, ENSH, Blida, Algérie
- [17] MARSTON, M. G. et A. O. ANDERSON, « The Theory of Loads on Pipes in Ditches and Tests of Cement and Clay Drain Tile and Sewer Pipe», 1913
-