Etude de l'équation de coagulation des gouttelettes en mouvement avec le vent

MERAD Meriem
Thèse de doctorat nouveau régime (LMD) en mathématiques
Université 8 Mai 1945 Guelma

1er mai 2014

Table des matières

Introduction

Suite à l'évaporation des eaux des océans et des eaux des mers et successivement à la condensation de la vapeur dans l'atmosphère, se forment des nuages ; quand les gouttelettes qui forment les nuages deviennent suffisamment denses, se déclenche le phénomène de coagulation des gouttelettes d'eau. A la suite de quoi, les gouttelettes suffisamment grandes tombent sous forme de pluie. L'équation dite équation de Smoluchowski, proposée par Smoluchowski (voir [31]) et Müller (voir [26]), décrit le processus de coagulation ; cependant cette équation dans sa version communément considérée ne tient pas compte de l'effet de la chute des gouttelettes comme dans les travaux [9], [10], [11], [24], [25].

D'autre part, nous pouvons citer les travaux qui ont marqué la recherche concernant cette problématique, à savoir Galkin [14], [15], [16] et Dubovskii [5], [6], [7], [8]. En effet, ils ont pris en compte le processus de coagulation-fragmentation des gouttelettes dans leur déplacement pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation, en précisant les conditions sur le taux de coagulation non borné. Nous rappelons que dans leurs travaux ils se sont intéressés à l'évolution par rapport au temps et ils ont construit la solution suivant le temps. Dans nos travaux nous proposons l'étude du problème stationnaire de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute en certains déplacements, et la construction de la solution suivant la position sur les trajectoires des gouttelettes.

Dans cette thèse, on propose d'étudier le phénomène, qui correspond à la chute des gouttelettes en présence d'un vent, c'est-à-dire on va considérer des gouttelettes qui, se coagulant avec une certaine probabilité, tombent avec une vitesse qui sera déterminée par la force gravitationnelle, la friction entre ces gouttelettes et l'air ainsi que la vitesse de ce dernier. Les gouttelettes considérées doivent être distribuées selon la masse m de chacune d'elles, tandis que la friction avec l'air ainsi que la probabilité de coagulation dépend de la masse m.

Dans le premier chapitre on va rappeler le système d'équations développé dans [12] et [29]. Ce système d'équations modélise le mouvement de l'air contenant la vapeur d'eau et prend en considération toute les transitions de phase de l'eau, y compris la présence des gouttelettes et des morceaux de glace dans l'atmosphère (pour le détail voir [12] et [29]).

Dans le deuxième chapitre on va étudier l'équation de coagulation des gouttelettes qui se déplaçant dans l'air, dans le cas de l'absence du vent (vitesse du vent nulle) et dans le cas de la présence d'un vent horizontal constant (vitesse du vent non nulle). Du point de vue technique, on va considérer une équation intégro-différentielle pour une fonction inconnue $\sigma = \sigma(m, x, z)$ représentant la densité (par rapport au volume de l'air) de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m ; dans le cas d'absence de transition de phase de l'eau, on va montrer, dans un domaine de dimension deux, l'existence et l'unicité de la solution stationnaire avec une condition au limite. La démonstration s'appuie sur la transformation de l'équation en une équation différentielle ordinaire dans un espace de Banach, transformation réalisée par un changement de variables, par lequel la fonction $\sigma_l = \sigma$ devient fonction définie sur une famille de courbes, ce qui nous ramène à mettre au point une variante du théorème de Fubini, qui va servir à surmonter les difficultés techniques rencontrées.

Dans le troisième chapitre on va étudier l'équation pour la distribution des gouttelettes qui se déplaçant par un vent vertical et par la force gravitationnelle et subissent le processus de coagulation et celui d'accroissement de poids dû à la condensation de la vapeur sur leur surface. Du point de vue physique, ceci concerne processus essentiel dans une précipitation intensive conséquente à la condensation de la vapeur accélérée causée par un vent vertical croissant (voir par exemple [4]). Du point de vue mathématique notre équation est une équation de transport avec les opérateurs intégraux pour une fonction inconnue σ, qui représente la densité de l'eau liquide (par rapport au volume de l'air) contenue dans les gouttelettes de masse m. Le résultat principal de notre recherche est l'existence d'une solution stationnaire de l'équation en considération sous certaines hypothèses appropriées ; partiellement on va utiliser la technique développée dans l'étude de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute (voir [1], [5], [23]), où la démonstration s'appuie sur la transformation de l'équation en une équation différentielle ordinaire en utilisant la technique des caractéristiques. Du point de vue technique, il est crucial d'obtenir dans toutes les étapes une estimation convenable de $\sigma(m; z)$. Or, ces estimations ne s'obtiennent pas facilement, en particulier, dans le voisinage des points $(m; z)$ où la vitesse $u(m; z)$ des gouttelettes de masse m s'annule, et pour les obtenir, nous avons besoin d'une élaboration

considérable des estimations, ce qui constitue le point technique principal de notre travail.
Le contenu du chapitre deux est correspond au travail [23], tandis que l'étude exposé dans le chapitre trois est développée dans [22].

Chapitre 1

Rappel du modèle mathématique du mouvement de l'atmosphère avec la transition de phase de l'eau : gaz-liquide-solide

La base de la modélisation mathématique est, d'un côté, la mécanique des fluides, et d'autre côté, la description microphysique, en particulier la description des processus de la transition de phase de l'eau et de la formation des gouttelettes et des morceaux de glace de H_2O qui en résultent. Dans la suite et avant de rappeler le système d'équations qui modélise le mouvement de l'atmosphère avec la transition de phase de l'eau développé dans [12], [13] et [29] (voir aussi [1], [17], [19], et [28]), il est utile de rappeler les processus microphysiques et leurs possibles descriptions mathématiques. (On tient à remercier le Professeur Hisao Fujita Yashima pour la traduction des parties qui nous intéressent des livres [20] et [30]).

1.1 Transition de phase de l'eau

On rappelle qu'aux températures de notre environnement l'eau dans l'atmosphère peut se présenter en trois états : gazeux, liquide et solide. La transition de phase de H_2O, c'est-à-dire transformation d'un des trois états à un autre, peut se produire même dans l'atmosphère, comme on l'observe dans la formation des nuages et les différentes formes de précipitations (pluie, neige, etc...). La transition de phase de l'eau dans l'atmosphère concerne les trois états et tous les six types de transitions, c'est-à-dire : condensation-évaporation, solidification-fusion, sublimation et son inverse.

Rappelons (voir [17]) les aspects essentiels des transitions de phase de l'eau : la condensation de la vapeur d'eau se réalise lorsque, à une température supérieure à celle de la fusion de H_2O, la pression de la vapeur dépasse une valeur critique au-de-la de laquelle les molécules de H_2O en état gazeux tendent à s'établir en état liquide, cette valeur est appellée pression de la vapeur saturée, et elle est notée $\overline{p}_{vs(l)}(T)$; dans le cas contraire on aura le phénomène d'évaporation, où les molécules de H_2O quittent la surface du liquide. De manière analogue au cas de la condensation (resp. de l'évaporation), aux températures inférieures à celle de la fusion il y aura la sublimation inverse (resp. la sublimation), où la pression de la vapeur saturée doit être considérée sur la surface de la glace ; on la notera $\overline{p}_{vs(s)}(T)$.

Il est également utile de rappeler (voir [17]) que les processus de transition de phase de l'eau s'accompagne d'un dégagement ou d'une absorption de l'énergie ; ce phénomène est connu sous le nom de "chaleur latente". Ainsi on désigne par L_{gl}, L_{ls} et L_{gs} respectivement la chaleur latente relative à la transition gaz-liquide, liquide-solide et gaz-solide ; ces valeurs vérifient la relation

$$L_{gs} = L_{gl} + L_{ls}.$$

Pour les traitements mathématiques il nous est commode de définir, à l'aide de l'expression générale de la pression, la densité de la vapeur saturée relative à la suface de l'eau liquide $\overline{\pi}_{vs(l)}(T)$ et celle relative à la surface de la glace $\overline{\pi}_{vs(s)}(T)$ par

$$\overline{\pi}_{vs(l)}(T) = \frac{\mu_h \overline{p}_{vs(l)}(T)}{R_0 T}, \qquad \overline{\pi}_{vs(s)}(T) = \frac{\mu_h \overline{p}_{vs(s)}(T)}{R_0 T},$$

où R_0 et μ_h sont respectivement la constante universelle des gaz et la masse molaire de H_2O (voir [12], [29]).

1.2 Formulation mathématique de la formation des gouttelettes et des cristaux de H_2O

En suivant la formulation donnée dans [29], on introduit la description mathématique de la formation des gouttelettes et des cristaux de H_2O. On désigne par $\sigma_l(m) = \sigma_l(m, x, t)$ (resp. $\sigma_s(m) = \sigma_s(m, x, t)$) la densité de l'eau liquide (resp. solide) contenue dans les gouttelettes (resp. les morceaux de glace) de masse m dans l'air.

On rappelle d'abord que, selon les affirmations des météorologues, à cause de la pression de la vapeur saturée élevée pour les gouttelettes très petites due à la grande courbure, les gouttelettes de diamètre inférieur à une valeur critique (à l'ordre de $0, 1\mu$) ne se forment pas, et que la réalisation des processus de condensation et de la sublimation inverse est conditionnée par la présence du "support" dans l'air, appelé aérosol, sur lequel les molécules de H_2O en état gazeux peuvent se condenser ou se déposer. Ces circonstances ont amené les auteurs de [29] à introduire une probabilité relative à la création d'une nouvelle gouttelette de masse m

$$g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\sigma)]^+[\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)]^+, \tag{1.1}$$

et une probabilité concernant la disparition de cette dernière

$$g_1(m)[\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)]^-. \tag{1.2}$$

Dans (1.1), N^* représenterait le nombre total de gouttelettes qui peuvent être formées dans l'unité de volume, tandis que $\tilde{N}(\sigma)$ serait le nombre dans l'unité de volume des aérosols qui se trouvent déjà dans des gouttelettes ou dans des morceaux de cristaux ; dans [29] on propose la formule

$$\tilde{N}(\sigma) = \int_0^\infty \frac{\sigma_l(m)}{m} dm + \int_0^\infty \frac{\sigma_s(m)}{m} dm + C_l \int_0^\infty \sigma_l(m) dm + C_s \int_0^\infty \sigma_s(m) dm.$$

Quant aux morceaux de cristaux de H_2O, il faut tenir compte du fait particulier : même aux températures inférieures à 0^oC, se forment d'abord des gouttelettes d'eau liquide et puis ces gouttelettes se solidifient (pour les détails voir [29], [20]). Ainsi on a introduit une probabilité de disparition de morceaux de cristaux de masse m

$$g_2(m)[\pi - \overline{\pi}_{vs(s)}(T)]^-, \tag{1.3}$$

mais pas de probabilité d'apparition de morceaux de cristaux.

Suivant la notation de [29], désignons par $S_l(m)$ la surface d'une gouttelette de masse m et par $S_s(m)$ la surface d'un morceau de cristal de H_2O de masse m. Comme, au moins jusqu'à un certain poids, les gouttelettes sont presque sphériques et que l'on peut estimer que la distribution des aérosols susceptibles à la formation d'une gouttelette est essentiellement contenue dans un certain intervalle $[\tilde{m}_a, \tilde{m}_A]$, les auteurs de [29] ont supposé que

$$S_l(m) \in C^1([0;\infty[), \tag{1.4}$$

$$S_l(m) = 0 \ \text{ pour } \ 0 \leq m \leq \frac{\tilde{m}_a}{2}, \quad S_l(m) = 3^{\frac{2}{3}}(4\pi)^{\frac{1}{3}} m^{\frac{2}{3}} \ \text{ pour } \ m \geq \tilde{m}_A. \tag{1.5}$$

Pour donner une formulation mathématique conforme, ils ont proposé de considérer $S_s(m)$ comme une surface statistiquement établie d'un morceau de cristal de H_2O avec les propriétés

$$S_s(m) \in C^1([0;\infty[), \tag{1.6}$$

$$S_s(m) = 0 \ \text{ pour } \ 0 \leq m \leq \frac{\tilde{m}_a}{2}, \ \ S_s(m) = c_s m^{\frac{2}{3}} \ \text{ pour } \ m \geq \tilde{m}_A, \tag{1.7}$$

où c_s est une constante supérieure à $3^{2/3}(4\pi)^{1/3}$.

Conformément à ceci, pour les fonctions $g_0(m)$, $g_1(m)$, $g_2(m)$ introduites dans (1.1)-(1.3), ils supposent que

$$g_0(m) = 0 \quad \text{pour } \ m \notin [\tilde{m}_a, \tilde{m}_A],$$

$$g_1(m) = 0, \quad g_2(m) = 0, \quad \text{pour } \ m > \tilde{m}_A.$$

Pour la quantité $h_{gl}(T,\pi;m)$ de H_2O qui se condense sur les gouttelettes de masse m (ou bien qui s'évapore) et la quantité $h_{gs}(T,\pi;m)$ de H_2O qui se dépose sur un morceau de glace de masse m (ou bien qui se sublime), dans [29] on propose les formules

$$h_{gl} = h_{gl}(T,\pi;m) = K_1 \frac{S_l(m)}{m}(\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)), \tag{1.8}$$

$$h_{gs} = h_{gs}(T, \pi; m) = K_2 \frac{S_s(m)}{m}(\pi - \overline{\pi}_{vs(s)}(T)), \tag{1.9}$$

où K_1 et K_2 sont deux constantes positives, et T, π représentent respectivement la température et la densité de la vapeur d'eau. Ils introduisent également le coefficient de solidification $K_{ls}(T; m)$ et celui de la fusion $K_{sl}(T; m)$.

1.3 Processus de coagulation

Outre les processus de transition de phase de l'eau, les processus de coagulation contribuent aussi à la variation des densités $\sigma_l(m)$ et $\sigma_s(m)$. En effet, la rencontre de deux gouttelettes peut donner la naissance à une nouvelle gouttelette, qui est l'union de deux gouttelettes. Analoguement la rencontre de deux morceaux de glace ou d'une gouttelette et d'un morceau de glace peut elle aussi former un nouveau morceau de glace (les rencontres entre une gouttelette et un morceau de glace se produisent normalement à une température inférieure à celle de fusion en présence de gouttelettes d'eau liquide en état de sur-fusion). Pour formuler ces processus en termes mathématiques, on introduit les probabilités β_l, β_s et Z_{ls} relativement à la formation d'une nouvelle gouttelette par les rencontres de deux gouttelettes, à la formation d'un nouveau morceau de glace par les recontres de deux morceaux de glace, et celle d'un morceau de glace par les recontres d'une gouttelette et d'un morceau de glace.

1.4 Système d'équations

Les quantités physiques qu'on va considérer sont la densité de l'air sec ϱ, la densité de la vapeur d'eau π, la densité de l'eau liquide $\sigma_l(m)$ contenue dans les gouttelettes de masse m, la densité de l'eau solidifiée $\sigma_s(m)$ contenue dans les morceaux de glace de masse m, la vitesse $v = (v_1, v_2, v_3)$ de l'air, la vitesse $u_l(m) = (u_{l,1}(m), u_{l,2}(m), u_{l,3}(m))$ des gouttelettes de masse m, la vitesse $u_s(m) = (u_{s,1}(m), u_{s,2}(m), u_{s,3}(m))$ des morceaux de glace de masse m, la température T et la pression p. On rappelle que dans les conditions usuelles de l'atmosphère, le comportement de l'air est similaire à celui du gaz idéal, ce qui nous permet d'écrire l'équation de la pression dans la forme

$$p = R_0(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h})T, \tag{1.10}$$

où R_0, μ_a et μ_h sont respectivement la constante universelle des gaz, la masse molaire moyenne de l'air sec et la masse molaire de H_2O. Pour la vitesse $u_l(m, x, t)$ des gouttelettes de masse m et la vitesse $u_s(m, x, t)$ des morceaux de glace de masse m, on adopte les approximations

$$u_l(m, x, t) = v(x, t) - \frac{1}{\alpha_l(m)}\nabla\Phi, \tag{1.11}$$

$$u_s(m, x, t) = v(x, t) - \frac{1}{\alpha_s(m)}\nabla\Phi, \tag{1.12}$$

où $\alpha_l(m)$ (resp. $\alpha_s(m)$) est le coefficient de friction d'une gouttelette (resp. un morceau de glace) de masse m avec l'air, tandis que Φ est le potentiel (pour les détails, voir [12], [29]). Il est bon de rappeler que le coefficient de friction $\alpha_l(m)$ (resp. $\alpha_s(m)$) est une fonction décroissante de la masse m et que la relation (1.11) (resp. (1.12)) correspond, dans une bonne approximation, à la vitesse réelle des gouttelettes (resp. des morceaux de glace) (voir [1], [27], [28], [29], [30]). Les équations (1.10), (1.11) et (1.12) nous permettent de réduire le nombre des inconnues dans le système d'équations à définir dans la suite.

Dans la suite nous citons les équations du modèle développé dans [29]. L'équation de la quantité de mouvement de l'air dans ce système aura la forme

$$(\varrho+\pi)(\frac{\partial v}{\partial t}+(v\cdot\nabla)v)=\eta\Delta v+(\zeta+\frac{\eta}{3})\nabla(\nabla\cdot v)-R\nabla((\frac{\varrho}{\mu_a}+\frac{\pi}{\mu_h})T)+ \tag{1.13}$$

$$-[\int_0^{\infty}(\sigma_l(m)+\sigma_s(m))dm+\varrho+\pi]\nabla\Phi,$$

où η et ζ sont les coefficients de viscosité. Le terme $\int_0^{\infty}(\sigma_l(m)+\sigma_s(m))dm\nabla\Phi$ découle du principe de l'action-réaction correspondant aux effets de friction décrits dans (1.11)–(1.12).

Pour la conservation de l'énergie dans ce système d'équations on aura

$$(\varrho+\pi)c_v(\frac{\partial T}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}v_j\frac{\partial T}{\partial x_j})=\kappa\Delta T-R_0(\frac{\varrho}{\mu_a}+\frac{\pi}{\mu_h})T\nabla\cdot v+ \tag{1.14}$$

$$+\eta\sum_{i,j=1}^{3}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot v)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\zeta(\nabla\cdot v)^2+E_{rad}+$$

$$+L_{gl}H_{gl}(T,\pi,\sigma_l)+L_{ls}H_{ls}(T,\sigma_l,\sigma_s)+L_{gs}H_{gs}(T,\pi,\sigma_s),$$

où c_v et κ sont respectivement la chaleur spécifique et le coefficient de la thermoconductibilité de l'air , E_{rad} est la source de la chaleur (principalement due à la radiation), et le terme $L_{gl}H_{gl}(T,\pi,\sigma_l)+L_{ls}H_{ls}(T,\sigma_l,\sigma_s)+L_{gs}H_{gs}(T,\pi,\sigma_s)$ représente la chaleur fournie à l'air par tous les processus de transition de phase de l'eau, tandis que $H_{gl}(T,\pi,\sigma_l)$, $H_{ls}(T,\sigma_l,\sigma_s)$, $H_{gs}(T,\pi,\sigma_s)$ désignent respectivement la quantité totale de H_2O qui se transforme de gaz en liquide, de liquide en solide et de gaz en solide.

La loi de la conservation de la masse pour l'air sec (dont la densité est notée ϱ) est exprimée par l'équation de continuité classique (absence de transition de phase)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho v) = 0. \tag{1.15}$$

Pour la vapeur d'eau (dont la densité est notée π), compte tenu de la quantité de H_2O qui resulte de la transition de phase, le principe de la conservation de la masse est exprimé par l'équation

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\pi(t,x)v(t,x)) = -H_{gl}(T,\pi,\sigma_l) - H_{gs}(T,\pi,\sigma_s). \tag{1.16}$$

En ce qui concerne la densité σ_l de l'eau liquide, rappelons que, si nous suivons dans son déplacement et dans son processus de condensation ou d'évaporation une gouttelette qui a la masse m_0 à l'instant $t = t_0$ la fonction masse $m = m(m_0;t)$ à l'instant t, jusqu'à l'éventuelle rencontre avec une autre gouttelette, doit satisfaire l'équation (voir[29])

$$\frac{d}{dt} m(m_0;t) = m(m_0;t) h_{gl}(T,\pi;m). \tag{1.17}$$

En considérant la masse de gouttelettes m comme une variable "spatiale" et (m,x) comme un point de l'espace $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ (voir [29]), la relation (1.17) nous permet de traiter l'ensemble des gouttelettes comme ensemble de points matériels qui se déplaçant dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ avec la vitesse

$$\tilde{U}_4(u,T,\pi;m) = (mh_{gl}(T,\pi;m); u_1(m), u_2(m), u_3(m))^T. \tag{1.18}$$

Comme $\sigma_l(m,x,t)$ est une densité non seulement par rapport à dx, mais aussi par rapport à dm, de manière analogue au cas de ϱ et de π, la loi de conservation de la masse de l'eau $\sigma_l(m,x,t)$ peut être exprimée par

$$\frac{\partial \sigma_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma_l u_l) + \frac{\partial (m h_{gl} \sigma_l)}{\partial m} = [h_{gl} - K_{ls}]\sigma_l + K_{sl}(T,m)\sigma_s + \tag{1.19}$$

$$+g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\sigma_l, \sigma_s)]^+[\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)]^+ - g_1(m)[\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)]^-\sigma_l +$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^m \beta_l(m-m', m')\sigma_l(m')\sigma_l(m-m')dm' - m\sigma_l(m)\int_0^\infty \beta_l(m', m)\sigma_l(m')dm' +$$

$$-m\sigma_l(m)\int_0^\infty Z_{ls}(m, m')\sigma_s(m')dm'.$$

Pour la densité σ_s de l'eau solidifiée, les raisonnements analogues à la déduction de (1.19) nous conduisent à l'équation

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma_s u_s) + \frac{\partial (m h_{gs}\sigma_s)}{\partial m} = [h_{gs}(m) - K_{sl}]\sigma_s + \tag{1.20}$$

$$+K_{ls}(T, m)\sigma_l + \frac{m}{2}\int_0^m \beta_s(m-m', m')\sigma_s(m')\sigma_s(m-m')dm' +$$

$$-m\sigma_s(m)\int_0^\infty \beta_s(m', m)\sigma_s(m')dm' - m\sigma_s(m)\int_0^\infty Z_{ls}(m, m')\sigma_l(m')dm' +$$

$$+m\int_0^m Z_{ls}(m-m', m')\sigma_s(m-m')\sigma_l(m')dm' - g_2(m)[\pi - \overline{\pi}_{vs(s)}(T)]^-\sigma_s(m).$$

Chapitre 2

Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelettes avec un vent horizontal constant

La complexité du système d'équations introduit dans le chapitre précédent correspondant aux phénomènes réels qui se produisent dans l'atmosphère et la difficulté conséquente de l'étude nous suggèrent l'utilité de l'étude de systèmes partiels d'équations correspondant à des phénomènes partiels dans des conditions caractéristiques. Dans le présent chapitre, comme un des cas caractéristiques intéressants, on propose d'étudier l'équation décrivant la chute de gouttelettes en présence d'un vent horizontal constant, ce qui nous esperons contribuera à montrer que le modèle proposé jouit d'une cohérence mathématique et physique et qu'il y a une bonne possibilité que dans des recherches futures on puisse obtenir la preuve de sa majeure cohérence.

Plus précisément on va considérer l'équation intégro-différentielle (1.19) pour une fonction inconnue $\sigma_l(m, x, z)$ qui décrit le processus de coagulation de gouttelettes qui se déplaçant avec l'air dans un domaine de deux dimension, en supposant l'équilibre entre la condensation et l'évaporation, c'est-à-dire dans le cas où il n'y a pas de transition de phase de l'eau. Si nous supposons que le mouvement de l'air est un vent horizontal constant, la position dans la direction horizontale et orthogonale à la direction du vent ne nous intéresse pas particulièrement. L'équation dans la forme précise va être formulée dans le paragraphe suivant (voir (2.4)). Nous allons démontrer l'existence et l'unicité de la solution stationnaire de l'équation avec une condition aux limites dans le cas de l'absence du vent (vitesse du vent nulle) et dans le cas de la présence du vent (vitesse du vent non nulle et constante).

Dans les chapitres 2 et 3 on notera σ, u, α, et β au lieu de σ_l, u_l, α_l, et β_l.

2.1 Position du problème

Désignons par $\sigma(m, x, z, t)$ la densité de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m au point $(x, z) \in \Omega(\subset \mathbb{R}^2)$ à l'instant $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire, la masse de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m qui se trouvent dans l'unité de volume de l'air. Le nombre, au sens purement statistique, des gouttelettes de masse m dans l'unité de volume sera alors donné par

$$\tilde{n}(m, x, z, t) = \frac{\sigma(m, x, z, t)}{m}.$$

L'équation de Smoluchowski est souvent formulée par rapport au nombre $\tilde{n} = \tilde{n}(m, t)$ de gouttelettes de masse m, mais nous préférons utiliser la densité σ comme dans le cas de la modélisation générale des phénomènes météorologiques (voir [1], [9], [27]).

Nous considérons la densité σ dans le domaine

$$\Omega = \mathbb{R}\times]0,1[= \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < z < 1\}. \tag{2.1}$$

On suppose que le mouvement de l'air est un vent horizontal constant, c'est-à-dire (si on le représente dans $\mathbb{R}^2$)

$$v = (\ \overline{v},\ \ 0\ ), \qquad \overline{v} : \text{constante;}$$

la vitesse des gouttelettes donnée dans (1.11) se réduite alors à

$$u = u(m) = (\overline{v}, -\frac{g}{\alpha(m)}), \tag{2.2}$$

où g est une constante ($g > 0$) qui désigne l'accélération gravitationnelle, tandis que $\alpha(m)$ est le coefficient de friction entre les gouttelettes et l'air.

Si on considère la variation de $\sigma(m,x,z,t)$ due au déplacement avec la vitesse $u(m)$ des gouttelettes et au processus de coagulation, et on prend en considération l'état d'équilibre (absence de transition de phase de l'eau), l'équation (1.19) se réduite à

$$\begin{aligned} \partial_t\sigma(m,x,z,t) + \nabla_{(x,z)} \cdot (\sigma(m,x,z,t)u(m)) = \\ = \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',x,z,t)\sigma(m-m',x,z,t)\,dm' + \\ -m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,x,z,t)\sigma(m',x,z,t)\,dm', \end{aligned} \tag{2.3}$$

où $\nabla_{(x,z)} = (\partial_x, \partial_z)$. Si dans l'équation (2.3) on néglige la dépendance de $(x,z) \in \Omega$, l'équation sera réduite à l'équation de Smoluchowski où la densité $\sigma(m,t) = m\tilde{n}(m,t)$ est une fonction seulement de m et de t.

En renvoyant l'étude de l'équation d'évolution (2.3) à des recherches futures, dans ce chapitre nous considérons l'équation stationnaire

$$\nabla_{(x,z)} \cdot (\sigma(m,x,z)u(m)) = \tag{2.4}$$

$$= \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',x,z)\sigma(m-m',x,z)\,dm' +$$
$$-m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,x,z)\sigma(m',x,z)\,dm',$$

avec la condition

$$\sigma(m,x,1) = \overline{\sigma}(m,x). \tag{2.5}$$

Comme les gouttelettes tombent de $\{z = 1\}$ vers $\{z = 0\}$ avec la vitesse $u = u(m)$ (voir (2.2)), la condition (2.5) est une condition "initiale" (ou condition d'entrée) pour les gouttelettes qui partent de la position $(x, 1)$.

Nous nous intéressons à la fonction de densité $\sigma(m, x, z)$ avec m entre deux extrémités $\overline{m}_a$ et $\overline{m}_A$,

$$0 < \overline{m}_a \le m \le \overline{m}_A < \infty.$$

Cette condition peut être considérée conforme à la nature physique du problème ; en effet, la courbure élevée des gouttelettes très petites ne leur permet pas de subsister dans l'atmosphère (voir [12], [26]), d'autre part les gouttelettes très grandes se fragmentent à cause de la friction avec l'air environnant.

En ce qui concerne la fonction $\alpha(m)$, qui représente l'effet de la friction entre les gouttelettes et l'air, on suppose que $\alpha(m)$ est une fonction strictement positive et suffisamment régulière (par exemple $\alpha(m) \in C^1(\mathbb{R}_+)$).

Il est utile de rappeler que, dans l'état normale de l'atmosphère, $\alpha(m)$ est une fonction décroissante et ses valeurs varient sensiblement selon les valeurs de m (pour les données expérimentales, voir [28]). Même si l'effet de la friction (par l'unité de masse) croît rapidement quand m s'approche de 0, compte tenu de l'absence de gouttelettes très petites ($m < \overline{m}_a$), on suppose que

$$\sup_{m\in\mathbb{R}_+} \alpha(m) < \infty. \tag{2.6}$$

Pour la fonction $\beta(m_1, m_2)$ on suppose que

$$\beta(\cdot,\cdot) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+), \qquad \beta(m_1, m_2) \geq 0 \ \forall \ (m_1, m_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \tag{2.7}$$

$$\beta(m_1, m_2) = \beta(m_2, m_1), \tag{2.8}$$

$$\beta(m_1, m_2) = 0 \quad \text{pour } m_1 + m_2 \geq \overline{m}_A. \tag{2.9}$$

Les conditions (2.7) et (2.8) sont des conditions naturelles de la fonction de probabilité de rencontre de gouttelettes. D'autre part, la condition (2.9) est une approximation motivée par le fait que, comme on l'a déjà évoqué, dans l'atmosphère les grandes gouttelettes subissent également le processus de fragmentation, qui contrebalance la croissance de la population de gouttelettes de masse élevée due à la coagulation (cette approximation a été adoptée même dans [1], [9], [27]).

2.2 Cas de l'absence du mouvement de l'air

Dans le cas où $\overline{v} = 0$, le problème (2.4)–(2.5) se réduit à une famille de problèmes dans le domaine $0 < z < 1$, paramétrisée par $x \in \mathbb{R}$. En effet,
si $\overline{v} = 0$, $u(m)$ se réduite à

$$u(m) = (0, -\frac{g}{\alpha(m)}),$$

ce qui nous permet d'envisager le problème (2.4)–(2.5) séparément pour chaque $x \in \mathbb{R}$. Donc, en posant $\overline{\sigma}(m) = \overline{\sigma}(m, x)$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$ et en écrivant $\sigma(m, z)$ au lieu de $\sigma(m, x, z)$, on obtient l'équation

$$-\partial_z(\sigma(m,z)\frac{g}{\alpha(m)}) = \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m', m')\sigma(m', z)\sigma(m-m', z)\, dm' + \tag{2.10}$$

$$-m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)\,dm',$$
$$\sigma(m,1)=\overline{\sigma}(m). \tag{2.11}$$

Comme $\alpha(m)$ ne dépend pas de z, l'équation (2.10) peut être écrite dans la forme

$$\partial_z\sigma(m,z)=-\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)\,dm'+ \tag{2.12}$$
$$+\frac{m\alpha(m)}{g}\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)\,dm'.$$

Avant de nous occuper de la solution du problème (2.10)–(2.11), rappelons une propriété importante de l'opérateur intégral figurant au second membre de (2.10).

Lemme 2.1. *Soit $\beta(\cdot,\cdot)$ la fonction vérifiant* (2.7)–(2.9)*. Alors, quelque soit $\sigma(\cdot,z)\in L^1(\mathbb{R}_+)$, on a*

$$\int_0^\infty \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)\,dm'dm+ \tag{2.13}$$
$$-\int_0^\infty m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)\,dm'dm=0.$$

Démonstration. On pose

$$I=\int_0^\infty \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)dm'dm+$$
$$-\int_0^\infty m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'dm.$$

En faisant le changement de variables $q=m-m'$, $r=m'$ dans la première intégrale, et en remarquant que le déterminant jacobien de ce changement de variables est égale à 1, on voit que

$$I=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{q+r}{2}\beta(q,r)\sigma(q,z)\sigma(r,z)drdq+$$

$$-\int_0^\infty \int_0^\infty m\beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'dm.$$

On a évidamment

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{q+r}{2}\beta(q,r)\sigma(q,z)\sigma(r,z)drdq =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{q}{2}\beta(q,r)\sigma(q,z)\sigma(r,z)drdq +$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{r}{2}\beta(q,r)\sigma(q,z)\sigma(r,z)drdq.$$

En substituant $q = m,$ et $r = m'$, on a

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{q}{2}\beta(q,r)\sigma(q,z)\sigma(r,z)drdq =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{m}{2}\beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'dm,$$

et en substituant $q = m'$, $r = m$ et en tenant compte de la symétrie de la fonction β et du théorème de Fubini, on a

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{r}{2}\beta(q,r)\sigma(q,z)\sigma(r,z)drdq =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{m}{2}\beta(m',m)\sigma(m',z)\sigma(m,z)dmdm' =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{m}{2}\beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'dm.$$

Ce qui implique

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{m}{2}\beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'dm +$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{m}{2}\beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'dm +$$

$$- \int_0^\infty \int_0^\infty m\beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'dm.$$

d'où

$$I = 0.$$

Le lemme est démontré.

Remarque 2.1. L'égalité (2.13) n'est autre que la loi de la conservation de la masse pour l'eau liquide contenue dans les gouttelettes.

PROPOSITION 2.1. *Soit* $\overline{\sigma}(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ *avec* $\operatorname{supp}(\overline{\sigma}) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A]$. *Alors le problème* (2.10) – (2.11) *admet une unique solution* $\sigma \in C([0,1]; L^1(\mathbb{R}_+))$ *(c'est-à-dire, l'application* $z \longmapsto \sigma(\cdot, z)$ *est une fonction continue de* $[0,1]$ *à valeurs dans* $L^1(\mathbb{R}_+)$ *).*

DÉMONSTRATION. Pour résoudre le problème (2.10)–(2.11), on considère $\sigma(\cdot, z)$ comme élément de $L^1(\mathbb{R}_+)$, de sorte que l'équation (2.12) peut être écrite dans la forme

$$\frac{d\sigma}{dz} = F(\sigma), \tag{2.14}$$

où

$$F(\sigma) = F(\sigma)(m) = -\frac{m\alpha(m)}{2g} \int_0^m \beta(m - m', m')\sigma(m', z)\sigma(m - m', z)dm' +$$

$$+\frac{m\alpha(m)}{g} \int_0^\infty \beta(m, m')\sigma(m, z)\sigma(m', z)dm'.$$

Posons

$$C_\beta = \max\Big[\sup_{0<m'<m<\infty} \frac{m\alpha(m)}{2g}\beta(m - m', m') \, , \, \sup_{m,m'\in\mathbb{R}_+} \frac{m\alpha(m)}{g}\beta(m, m')\Big]. \tag{2.15}$$

Alors, en rappelant l'expression de $F(\sigma)$, on a pour σ_1, $\sigma_2 \in L^1(\mathbb{R}_+)$,

$$\|F(\sigma_1) - F(\sigma_2)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} = \int_0^\infty |F(\sigma_1)(m) - F(\sigma_2)(m)|dm \leq \tag{2.16}$$

$$\leq C_\beta \int_0^\infty \int_0^m \big|\sigma_1(m')\sigma_1(m-m') - \sigma_2(m')\sigma_2(m-m')\big| dm'dm+$$
$$+C_\beta \int_0^\infty \int_0^\infty \big|(\sigma_1(m)\sigma_1(m') - \sigma_2(m)\sigma_2(m')\big| dm'dm \leq$$
$$\leq C_\beta \int_0^\infty \int_0^m \big|\sigma_1(m')(\sigma_1(m-m')-\sigma_2(m-m'))+(\sigma_1(m')-\sigma_2(m'))\sigma_2(m-m')\big| dm'dm+$$
$$+C_\beta \int_0^\infty \int_0^\infty \big|(\sigma_1(m)(\sigma_1(m') - \sigma_2(m')) + (\sigma_1(m) - \sigma_2(m))\sigma_2(m')\big| dm'dm \leq$$
$$\leq C_\beta\big(\|\sigma_1 * (|\sigma_1 - \sigma_2|)\|_{L^1} + \|(|\sigma_1 - \sigma_2|) * \sigma_2\|_{L^1}\big)+$$
$$+C_\beta \int_0^\infty (|\sigma_1(m)|\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1} + |\sigma_1(m) - \sigma_2(m)|\|\sigma_2\|_{L^1})dm \leq$$
$$\leq 2C_\beta\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1}(\|\sigma_1\|_{L^1} + \|\sigma_2\|_{L^1}),$$

(pour la propriété de la convolution, voir [3]), ce qui montre que $F(\cdot)$ vérifie localement la condition de Lipchitz dans la topologie de $L^1(\mathbb{R}_+)$; par conséquent, l'équation (2.14) avec la condition initiale (2.11) admet une solution $\sigma(\cdot, z)$ et une seule dans un intervalle $1 - \delta \leq z \leq 1$ avec un $\delta > 0$ (suffisamment petit).

D'autre part, du lemme 2.1 et de l'équation (2.10) on déduit que

$$\int_0^\infty (\sigma(m, z)\frac{g}{\alpha(m)})dm = \int_0^\infty (\sigma(m, 1)\frac{g}{\alpha(m)})dm, \tag{2.17}$$

pourvu que $\sigma(\cdot, z)$ existe. Or, la condition (2.9) et l'hypothèse $\mathrm{supp}(\overline{\sigma}) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A]$ impliquent que $\mathrm{supp}(\sigma(\cdot, z)) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A]$. Donc, de la relation

$$0 < c_1 \leq \frac{g}{\alpha(m)} \leq c_2 < \infty \qquad \forall m \in [\overline{m}_a, \overline{m}_A]$$

avec deux constantes c_1, c_2 (qui résulte de l'hypothèse sur $\alpha(m)$), on déduit que $\|\sigma(\cdot, z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}$ est uniformément bornée en z (pourvu que $\sigma(\cdot, z)$ existe), ce qui, joint à la condition de Lipschitz locale, nous donne la solution $\sigma(\cdot, z)$ de l'équation (2.14) dans tout l'intervalle $[0, 1]$.

La proposition est démontrée.

2.3 Préliminaires pour le cas général

Pour résoudre l'équation (2.4) avec la condition (2.5), on va transformer l'équation (2.4) en une équation différentielle ordinaire (comme dans la démonstration de la proposition 2.1), pour cela, on introduit le changement de variables $(m, x, z) \mapsto (\tilde{m}, \xi, \tilde{z})$ défini par

$$\begin{cases} \tilde{m} = m, \\ \xi = x - \overline{v}\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), \\ \tilde{z} = z. \end{cases}$$

Définissons

$$\tilde{\sigma}(\tilde{m}, \xi, \tilde{z}) = \sigma(m, x, z) = \sigma(m, \xi + \overline{v}\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), z).$$

Dans la suite, on note simplement m, et z au lieu de $\tilde{m}$, et $\tilde{z}$ et encore $\sigma(m, \xi, z)$ au lieu de $\tilde{\sigma}(\tilde{m}, \xi, \tilde{z})$. Dans les coordonnées (m, ξ, z) l'équation (2.4) se transforme en

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(m, \xi, z) = \tag{2.18}$$

$$= -\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_0^m \beta(m-m', m')\sigma(m', \eta(m, m', \xi, z), z)\times$$
$$\times\sigma(m-m', \eta(m, m-m', \xi, z), z)dm' + \frac{m\alpha(m)}{g}\int_0^\infty \beta(m, m')\times$$
$$\times\sigma(m, \xi, z)\sigma(m', \eta(m, m', \xi, z), z)dm',$$

où

$$\eta(m, m', \xi, z) = \xi + \overline{v}\,\frac{\alpha(m) - \alpha(m')}{g}(1-z).$$

Pour réformuler l'équation (2.18) en une équation différentielle ordinaire et établir des propriétés utiles de l'opérateur intégral du deuxième membre de cette équation, on introduit pour chaque $z \in [0, 1]$ fixé, la famille des courbes

$$\gamma_\tau = \{(m, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,|\, \xi = \tau - \overline{v}\,\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)\}, \quad \tau \in \mathbb{R} \tag{2.19}$$

On désigne en outre

$$\gamma = \gamma_0. \tag{2.20}$$

On voit alors que les intégrales du second membre de l'équation (2.18) pourront être exprimées comme des intégrales sur les courbes $\gamma_{\tau(m,\xi)}$; cependant il nous faut préciser la mesure avec laquelle on effectué l'intégration.

Désignons par $P_{\mathbb{R}_+}$ la projection de γ_τ sur $\mathbb{R}_+$, ainsi pour les sous-ensembles A' de γ_τ, on a

$$P_{\mathbb{R}_+}A' = \{\, m \in \mathbb{R}_+ \,|\, \exists\, \xi \text{ tel que } (m,\xi) \in A' \,\}.$$

La régularité de la fonction $\xi(m) = \tau - \overline{v}\,\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)$ nous permet de définir les ensembles mesurables de γ_τ et la mesure μ_γ sur γ_τ par les relations suivantes :
i) $A' \subset \gamma_\tau$ est mesurable si et seulement si $P_{\mathbb{R}_+}A'$ est mesurable selon Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$,
ii) $\mu_\gamma(A') = \mu_{L,\mathbb{R}_+}(P_{\mathbb{R}_+}A')$, où $\mu_{L,\mathbb{R}_+}(\cdot)$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

Comme les courbes γ_τ, $\tau \in \mathbb{R}$, sont parallèles (c'est-à-dire, définies par la translation de γ_0 par τ dans la direction de ξ), on voit immédiatement que la projection $P_{\mathbb{R}_+}$ et la mesure $\mu_\gamma(\cdot)$ ne dépendent pas de $\tau \in \mathbb{R}$. La mesure $\mu_\gamma(\cdot)$ étant définie sur les courbes γ_τ, on va éclaircir les relations entre $\mu_\gamma(\cdot)$ et la mesure sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$; pour ce faire, on pose

$$\tau(m,\xi) = \xi + \overline{v}\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)$$

(où $\tau(m,\xi) \in \mathbb{R}$ avec $(m,\xi) \in \gamma_\tau$), et on considère la famille $\mathfrak{A}$ des ensembles A ayant la forme

$$A = \{(m,\ \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,|\, m \in [m_1,\ m_2\ [,\ \tau(m,\ \xi) \in [\tau_1,\ \tau_2\ [\ \} \tag{2.21}$$

avec $0 \leq m_1 \leq m_2 < \infty,\ -\infty < \tau_1 \leq \tau_2 < \infty.$

On définit la fonction $\tilde{\mu} : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_+$ par la relation

$$\tilde{\mu}(A) = (m_2 - m_1)(\tau_2 - \tau_1), \tag{2.22}$$

pour $A \in \mathfrak{A}$.

Remarque 2.2. Pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ mesurable selon Lebesgue, on a

$$\tilde{\mu}(A) = \mu_{L,\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}}(A).$$

En effet, si $A \in \mathfrak{A}$, on constate facilement que

$$\tilde{\mu}(A) = (m_2 - m_1)(\tau_2 - \tau_1) = \mu_{L,\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}}(A).$$

De la même manière que la construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ à partir de la famille des rectangles, on constate que le prolongement de $\tilde{\mu}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ défini une mesure qui coïncide avec la mesure de Lebesgue $\mu_{L,\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

Pour les mesures μ_γ et $\tilde{\mu}$ ainsi définies et les mesures de Lebesgue $\mu_{L,\mathbb{R}_+}, \mu_{L,\mathbb{R}}$ et $\mu_{L,\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}}$ respectivement sur $\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on a les lemmes suivants.

LEMME 2.2. *Soit A un ensemble mesurable (selon Lebesgue) de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On pose*

$$A_\tau = \{\, m \in \mathbb{R}_+ \,|\, \exists \xi \in \mathbb{R} \ \textit{tel que}\ (m, \xi) \in \gamma_\tau \cap A \,\},$$

$$A_m = \{\tau \in \mathbb{R} \,|\, \exists \xi \in \mathbb{R} \ \textit{tel que}\ (m, \xi) \in \gamma_\tau \cap A\}.$$

Alors on a

$$\mu_{L,\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}}(A) = \tilde{\mu}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_\gamma(A_\tau) d\tau = \tag{2.23}$$

$$= \int_{\gamma_0} \mu_{L,\mathbb{R}}(A_m) \mu_\gamma(dm) = \int_0^\infty \mu_{L,\mathbb{R}}(A_m) dm,$$

(ici et dans la suite l'élément d'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue s'écrit directement dm, $d\tau$ etc... sans utiliser les notations $\mu_{L,\mathbb{R}_+}(dm)$, $\mu_{L,\mathbb{R}}(d\tau)$, $\mu_{L,\mathbb{R}}(d\xi)$ etc...).

Démonstration. On démontre d'abord l'égalité

$$\tilde{\mu}(A) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_A(\tau) d\tau, \tag{2.24}$$

où $\varphi_A(\tau) = \mu_\gamma(A_\tau)$. Si $A \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ étant la famille des ensembles A ayant la forme (2.21)), alors la formule (2.24) est évidente, car dans ce cas on a

$$\varphi_A(\tau) = \begin{cases} \mu_\gamma(A_\tau) & \text{pour } \ \tau \in \cup_{m\in\mathbb{R}_+} A_m, \\ 0 & \text{pour } \ \tau \notin \cup_{m\in\mathbb{R}_+} A_m. \end{cases}$$

On désigne par $\Re(\mathfrak{A})$ l'ensemble de tous les ensembles $A \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tels que

$$\exists N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \;\; A_i \in \mathfrak{A}, \;\; i = 1, ..., N,$$

$$A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \;\text{ pour }\; i \neq j.$$

L'égalité (2.24) est également vérifiée pour des ensembles de $\Re(\mathfrak{A})$.

Dans le cas général, la démonstration de l'égalité (2.24) est fondée sur le lemme suivant, qui est la version pour la mesure $\tilde{\mu}$ du lemme présenté à la page 309 de [18].

Lemme 2.3. *Pour tout ensemble $\tilde{\mu}-$mesurable A, il existe un ensemble B de la forme*

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n, \qquad B_1 \supset B_2 \supset ... \supset B_n \supset ...,$$

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}, \qquad B_{n1} \subset B_{n2} \subset ... \subset B_{nk} \subset ...,$$

où les ensembles B_{nk} appartiennent à $\Re(\mathfrak{A})$, tel que $A \subset B$ et

$$\tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(B). \tag{2.25}$$

Démonstration. On le démontre de manière analogue au lemme présenté à la page 309 de [18], plus précisement, en remplaçant les rectangles par des ensembles de type (2.21) dans la démonstration du lemme. □

Suite de la démonstration du lemme 2.2. L'égalité (2.24) s'étend facilement des ensembles $B_{nk} \in \Re(\mathfrak{A})$ aux ensembles B_n et B ; en effet

$$\varphi_{B_n}(\tau) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \varphi_{B_{nk}}(\tau), \quad \varphi_{B_{n1}} \leq \varphi_{B_{n2}} \leq ...,$$

$$\varphi_B(\tau) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \varphi_{B_n}(\tau), \quad \varphi_{B_1} \geq \varphi_{B_2} \geq ....$$

Pour $B_{nk} \in \Re(\mathfrak{A})$, on a

$$\tilde{\mu}(B_{nk}) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{B_{nk}}(\tau) d\tau,$$

donc on a aussi

$$\lim_{k \to \infty} \tilde{\mu}(B_{nk}) = \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_{B_{nk}}(\tau) d\tau.$$

En vertu de la continuité de la mesure et du théorème de Beppo Levi (voir [18]), on a

$$\tilde{\mu}(B_n) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{B_n}(\tau) d\tau.$$

De la même manière, pour n qui tend vers l'infini, on obtient

$$\tilde{\mu}(B) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_B(\tau) d\tau.$$

Ce qui montre que la formule (2.24) est vraie pour un ensemble B qui vérifié les propriétés indiquée dans le lemme 2.3.

D'autre part si $\tilde{\mu}(A) = 0$, alors d'après le lemme 2.3 il existe un ensemble B ayant les propriétés mentionnées dans l'énoncé du lemme 2.3, en particulier en vertu de l'égalité (2.25)

$$\tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(B) = 0,$$

ce qui implique

$$\varphi_B(\tau) = \mu_\gamma(B_\tau) = 0.$$

Comme $A_\tau \subset B_\tau$ pour presque tous τ, l'ensemble A_τ est mésurable et

$$\varphi_A(\tau) = \mu_\gamma(A_\tau) = 0,$$

ce qui implique que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_A(\tau) d\tau = 0 = \tilde{\mu}(A),$$

c'est-à-dire, pour un ensemble A de mesure nulle la formule (2.24) est vraie.

Dans le cas général, on met A sous la forme $A = B \backslash C$, avec B ayant la propriété indiquée dans le lemme 2.3. En vertu de l'égalité (2.25) on a

$$\tilde{\mu}(C) = 0.$$

Comme la formule (2.24) est vraie pour les ensembles B et C, il est aisé de voir qu'elle est vraie aussi pour l'ensemble A. La démonstration de la deuxième partie du lemme est parfaitement analogue à la première.

Le lemme est démontré.

Lemme 2.4. *Soit $\sigma(m, \xi) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Alors, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ la restriction de $\sigma(m, \xi)$ à γ_τ appartient à $L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)$.*

La démonstration du lemme 2.4 résulte immédiatement du lemme suivant.

Lemme 2.5 (variante du théorème de Fubini).*Soit* $\sigma(m,\xi) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. *Alors on a*

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \sigma(m,\xi)dmd\xi = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \sigma(m,\xi)d\tilde{\mu} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{\gamma_\tau} \sigma(m,\xi)\mu_\gamma(dm)\Big)d\tau = \int_{\gamma_0} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(m,\xi(m,\tau))d\tau\Big)\mu_\gamma(dm) =$$

$$= \int_0^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(m,\xi)d\xi\Big)dm = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_0^{\infty} \sigma(m,\xi)dm\Big)d\xi,$$

où $\xi(m,\tau) = \tau - \overline{v}\,\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)$.

Pour démontrer le lemme 2.5, nous rappelons le théorème suivant.

Théorème 2.1. *L'intégrale de Lebesgue d'une fonction sommable, non négative* $f(x)$ *est égale à la mesure* $\mu = \mu_x \otimes \mu_z$ *de l'ensemble* A*, définie par*

$$A = \{(x,z) \in M \times \mathbb{R},\ 0 \leq z \leq f(x)\},$$

où M *est un ensemble* μ_x-*mesurable quelconque et* $f(x)$ *est une fonction intégrable non négative.*

Pour la démonstration voir [18].

Démonstration du lemme 2.5. On pose

$$W = \{(m,\xi,\zeta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\ 0 \leq \zeta \leq \sigma(m,\xi)\}.$$

En appliquant le théorème 2.1 avec $\mu_x = \mu_{L,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}$ et $\mu_x = \tilde{\mu}$, et en utilisant le lemme 2.2,

$$\tilde{\mu} \otimes \mu^1(W) = \mu_{L,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \otimes \mu^1(W) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \sigma(m,\xi)dmd\xi = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \sigma(m,\xi)d\tilde{\mu},$$

où μ^1 est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (pour $\zeta \in \mathbb{R}$).
En outre d'après le théorème de Fubini classique (dans un espace euclidien) on a

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \sigma(m,\xi) dm d\xi =$$

$$= \int_0^\infty \Big(\int_{-\infty}^\infty \sigma(m,\xi) d\xi \Big) dm = \int_{-\infty}^\infty \Big(\int_0^\infty \sigma(m,\xi) dm \Big) \, d\xi.$$

Pour établir les égalités

$$\tilde{\mu} \otimes \mu^1(W) = \int_{-\infty}^\infty \Big(\int_{\gamma_\tau} \sigma(m,\xi) \mu_\gamma(dm) \Big) d\tau =$$

$$= \int_{\gamma_0} \Big(\int_{-\infty}^\infty \sigma(m,\xi(m,\tau)) d\tau \Big) \mu_\gamma(dm),$$

il suffit de rappeler que d'après le lemme 2.2 on a

$$\tilde{\mu} = \mu_\gamma \otimes \mu_\tau$$

(où μ_τ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ pour $\tau \in \mathbb{R}$), et que le raisonnement du lemme 2.2 peut être généralisé sans difficulté au produit de mesures

$$(\mu_\gamma \otimes \mu^1) \otimes \mu_\tau.$$

Cela étant, on peut démontrer les égalités en appliquant le raisonnemant de la démonstration du théorème de Fubini (voir par exemple [17]), auquel, une fois bien définies les mesures, n'intervient pas la structure géométrique des ensembles sur lesquels les mesures sont définies.
Le lemme est démontré. Par conséquent le lemme 2.4 est démontré.

Maintenant on est en mesure de transformer l'équation (2.18) en une équation différentielle ordinaire. Pour cela on pose

$$\tau(m,\xi,z) = \xi + \overline{v}\, \frac{\alpha(m)}{g}(1-z), \qquad \gamma_\tau^{[0,m]} = \gamma_\tau \cap [0,m] \times \mathbb{R}.$$

Alors l'équation (2.18) s'écrit dans la forme

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(m,\xi,z) = F_z(\sigma(z)), \tag{2.26}$$

avec

$$F_z(\sigma(m,\xi,z)) =$$

$$= -\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\xi,z)}} \beta(m-m',m')\sigma(m',\eta',z)\sigma(m-m',\eta'',z)\mu_\gamma(dm')+$$

$$+\frac{m\alpha(m)}{g}\int_{\gamma_{\tau(m,\xi,z)}} \beta(m,m')\sigma(m',\eta',z)\sigma(m,\xi,z)\mu_\gamma(dm'),$$

où η' et η'' sont tels que

$$(m',\eta') \in \gamma_{\tau(m,\xi,z)}, \quad (m-m',\eta'') \in \gamma_{\tau(m,\xi,z)}.$$

L'équation (2.26) doit être envisagée avec la condition (2.11), c'est-à-dire

$$\sigma(1) = \sigma(m,\xi,1) = \overline{\sigma}(m,\xi). \tag{2.27}$$

2.4 Existence et unicité de la solution avec les données dans L^1

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.26)–(2.27), on a besoin de préciser les conditions sur $\overline{\sigma}(m,\xi)$. On suppose que

$$\overline{\sigma}(\cdot,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}), \tag{2.28}$$

$$\overline{\sigma}(m,\xi) \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}, \tag{2.29}$$

$$\operatorname{supp}(\overline{\sigma}) \subset [\overline{m}_a,\overline{m}_A]\times\mathbb{R} \qquad (0<\overline{m}_a<\overline{m}_A<\infty), \tag{2.30}$$

$$\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A-\overline{m}_a)}, \tag{2.31}$$

où

$$M_1 = \sup_{2\overline{m}_a \leq m \leq \overline{m}_A, \overline{m}_a \leq m' \leq m - \overline{m}_a} \frac{m\alpha(m)}{2g} \beta(m - m', m'). \tag{2.32}$$

On a alors le résultat suivant.

Proposition 2.2. *Si* $\overline{\sigma}(m, \xi)$ *satisfait aux conditions* (2.28)–(2.31), *alors l'équation* (2.26) *avec la condition* (2.27) *admet une solution* σ *et une seule dans la classe*

$$\sigma \in \mathcal{C}([0,1]; L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0,1]). \tag{2.33}$$

Pour démontrer la proposition 2.2, commençons par la propriété de la convolution sur les courbes γ_τ.

Lemme 2.6. *Soient* f *et* g *deux fonctions appartenant à* $L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)$. *On pose*

$$(f * g)(m, \xi) = \int_{\gamma_\tau} f(m - m', \xi) g(m', \xi) \mu_\gamma(dm').$$

Alors on a $f * g \in L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)$ *et*

$$\|f * g\|_{L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)} \leq \|f\|_{L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)} \|g\|_{L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)}.$$

Comme la mesure μ_γ ne dépend pas de τ, le lemme 2.6 est vérifié de la même manière pour tout τ.

Démonstration. La mesure μ_γ étant bien définie sur γ_τ, le lemme se démontre de la même manière (avec des modifications purement formelles) que dans le cas des fonctions sommables par rapport à la mesure de Lebesgue (voir [3]). Soit

$$F(m, m', \xi) = f(m - m', \xi)\, g(m', \xi).$$

Pour presque tout $(m', \xi) \in \gamma_\tau$ on a

$$\int_{\gamma_\tau} \mid F(m, m', \xi) \mid \mu_\gamma(dm) = \int_{\gamma_\tau} \mid f(m - m', \xi)\; g(m', \xi) \mid \mu_\gamma(dm) =$$

$$= \mid g(m', \xi) \mid \int_{\gamma_\tau} \mid f(m - m', \xi) \mid \mu_\gamma(dm) =$$

$$= \mid g(m', \xi) \mid \parallel f \parallel_{L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)},$$

et

$$\int_{\gamma_\tau}\int_{\gamma_\tau} \mid F(m, m', \xi)) \mid \mu_\gamma(dm)\mu_\gamma(dm') = \int_{\gamma_\tau} \mid g(m', \xi) \mid \parallel f \parallel_{L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)} \mu_\gamma(dm') =$$

$$= \parallel f \parallel_{L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)} \parallel g \parallel_{L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)} < \infty.$$

Appliquant le théorème de Tonelli, on voit que $F \in L^1(\gamma_\tau \times \gamma_\tau)$. Grâce au théorème de Fubini, on obtient

$$\int_{\gamma_\tau} \mid F(m, m', \xi) \mid \mu_\gamma(dm') < \infty \qquad p.p\ (m, \xi) \in \gamma_\tau,$$

c'est-à-dire

$$\int_{\gamma_\tau} (f * g)(m, \xi)\mu_\gamma(dm) \leq \parallel f \parallel_{L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)} \parallel g \parallel_{L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)},$$

donc on aura

$$\parallel f * g \parallel_{L^1(\gamma_\tau)} \leq \parallel f \parallel_{L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)} \parallel g \parallel_{L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)}.$$

Le lemme est démontré.

A la différence du cas $v = 0$ (proposition 2.1) où on a considéré la solution $\sigma(m; z)$ comme fonction de z à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}_+)$, pour la proposition 2.2 on a besoin de construire la solution $\sigma(\cdot, \cdot, z)$ comme fonction de z à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. On construit la solution $\sigma(m,\xi,z)$ à l'aide de la méthode des approximations successives. Posons

$$\sigma^{[0]}(m,\xi,z) = \overline{\sigma}(m,\xi), \tag{2.34}$$

et définissons $\sigma^{[n]}$, $n = 1,2,\cdots$, par les relations

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma^{[n]} = F_z(\sigma^{[n-1]}), \qquad \sigma^{[n]}(m,\xi,1) = \overline{\sigma}(m,\xi), \tag{2.35}$$

où $F_z(\cdot)$ est l'opérateur défini dans (2.26).

LEMME 2.7. *Quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $\sigma^{[n]}$ est bien définie dans la classe*

$$\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}), \qquad 0 \le z \le 1,$$

et on a

$$\operatorname{supp}(\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A] \times \mathbb{R} \qquad \textit{pour} \;\; 0 \le z \le 1, \tag{2.36}$$

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \le \frac{\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}}{1-(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}(1-z)}, \tag{2.37}$$

pour $\frac{(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}-1}{(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}} < z \le 1$, *où*

$$M_2 = \sup_{m,m' \in \mathbb{R}} \frac{m\alpha(m)}{g}\beta(m,m'). \tag{2.38}$$

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que, si $\sigma^{[n]}$ $(n \ge 1)$ est bien définie par les relations (2.35) et si $\operatorname{supp}(\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A] \times \mathbb{R}$ pour $0 \le z \le 1$, alors $\sigma^{[n]}$ vérifie la condition (2.36). En effet, la condition (2.9) implique que la première intégrale de l'opérateur $F_z(\cdot)$ (voir (2.26)) s'annule, pour $m \ge \overline{m}_A$. D'autre part, si $m < \overline{m}_a$, alors sous le signe d'intégration

$\sigma^{[n-1]}(m-m',\cdot,z)$ et $\sigma^{[n-1]}(m',\cdot,z)$ s'annulent, donc l'intégrale s'annule. En outre par hypothèse $\sigma^{[n-1]}$ s'annule pour $m<\overline{m}_a$ et $m>\overline{m}_A$, ce qui implique que même la seconde intégrale de l'opérateur $F_z(\cdot)$ s'annule pour $m<\overline{m}_a$ et $m>\overline{m}_A$, on en déduit alors (2.36) pour $\sigma^{[n]}$.

Examinons maintenant l'opérateur $F_z(\cdot)$ appliqué à $\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)$. En supposant que le support de $\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)$ est contenu dans $[\overline{m}_a,\overline{m}_A]\times\mathbb{R}$ et en rappelant (2.32) et (2.38), on a (avec la notation η', η'' comme dans (2.26))

$$\Big|\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\xi,z)}}\beta(m-m',m')\sigma^{[n-1]}(m',\eta',z)\sigma^{[n-1]}(m-m',\eta'',z)\mu_\gamma(dm')\Big|\leq$$

$$\leq M_1\,\mu_\gamma(\gamma^{[0,m]}_\tau)\sup_{(m',\eta')\in\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\xi,z)}}\sigma^{[n-1]}(m',\eta',z)\sup_{(m-m',\eta'')\in\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\xi,z)}}\sigma^{[n-1]}(m-m',\eta'',z)\leq$$

$$\leq M_1(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|^2_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\xi,z)},\mu_\gamma)},$$

et

$$\Big|\frac{m\alpha(m)}{g}\int_{\gamma_{\tau(m,\xi,z)}}\beta(m,m')\sigma^{[n-1]}(m',\eta',z)\sigma^{[n-1]}(m,\xi,z)\mu_\gamma(dm')\Big|\leq$$

$$\leq M_2\,\mu_\gamma(\gamma_\tau)\sup_{(m',\eta')\in\gamma_{\tau(m,\xi,z)}}\sigma^{[n-1]}(m',\eta',z)\sup_{(m,\xi)\in\gamma_{\tau(m,\xi,z)}}\sigma^{[n-1]}(m,\xi,z)\leq$$

$$\leq M_2(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|^2_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\xi,z)},\mu_\gamma)}.$$

où M_1 et M_2 sont les constantes définies dans (2.32) et (2.38) respectivements.

On en déduit que, pour $\sigma^{[n]}$ définie par

$$\sigma^{[n]}(m,\xi,z)=\overline{\sigma}(m,\xi)-\int_z^1 F_{z'}(\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z'))dz',$$

on a

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\leq\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}+ \tag{2.39}$$
$$+(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\int_z^1\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z')\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}dz'.$$

En outre, en utilisant le lemme 2.6 et en tenant compte de la condition (2.9), on a

$$\Big\|\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_{\gamma_\tau^{[0,m]}}\beta(m-m',m')\sigma^{[n-1]}(m',\eta',z)\sigma^{[n-1]}(m-m',\eta'',z)\mu_\gamma(dm')\Big\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}+$$

$$+\Big\|\frac{m\alpha(m)}{g}\int_{\gamma_\tau}\beta(m,m')\sigma^{[n-1]}(m',\eta',z)\sigma^{[n-1]}(m,\eta,z)\mu_\gamma(dm')\Big\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\leq$$

$$\leq M_1\Big\|\big(\sigma^{[n-1]}*\sigma^{[n-1]}\big)(\cdot,\cdot,z)\Big\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}+M_2\Big\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\Big\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\Big\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\Big\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\leq$$

$$\leq C\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\big|_{\gamma_\tau}\|^2_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)},$$

où C est une constante indépendante de z (et η, η' et η'' sont tels que (m,η), (m',η'), $(m-m',\eta'')\in\gamma_\tau$ comme dans (2.26)). Comme on a en outre

$$\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\big|_{\gamma_\tau}\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\leq(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\big|_{\gamma_\tau}\|_{L^\infty(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\leq$$

$$\leq(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\qquad\text{(pour presque tout }\tau\in\mathbb{R}),\tag{2.40}$$

à l'aide du lemme 2.5 on en déduit que

$$\|F_z(\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z))\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}=\|F(\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z))\|_{L^1(\gamma_\tau\times\mathbb{R})}=\|F(\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z))\|_{L^1(\mathbb{R}\times\gamma_\tau)}\leq$$

$$\leq\int_{\mathbb{R}}\Big\|\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_{\gamma_\tau^{[0,m]}}\beta(m-m',m')\sigma^{[n-1]}(m',\eta',z)\sigma^{[n-1]}(m-m',\eta'',z)\mu_\gamma(dm')\Big\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}+$$

$$+\Big\|\frac{m\alpha(m)}{g}\int_{\gamma_\tau}\beta(m,m')\sigma^{[n-1]}(m',\eta',z)\sigma^{[n-1]}(m,\xi,z)\mu_\gamma(dm')\Big\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}d\tau\leq$$

$$\leq C\int_{\mathbb{R}}\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\big|_{\gamma_\tau}\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\big|_{\gamma_\tau}\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}d\tau.$$

En utilisant l'inégalité (2.40), on obtient

$$\|F(\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z))\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\leq C(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}} \|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\big|_{\gamma_\tau}\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} d\tau,$$
$$\leq C'\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}\times\gamma_\tau)},$$

ce qui implique que

$$\|F(\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z))\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq C'\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}, \tag{2.41}$$

avec une constante C' indépendante de z.

Définissons une suite de fonctions $y_n(z)$, $0 \leq z \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, par les relations récursives

$$y_0(z) = \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \qquad \text{pour } 0 \leq z \leq 1, \tag{2.42}$$

$$y_n(z) = \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} + (M_1+M_2)(\overline{m}_A - \overline{m}_a)\int_z^1 y_{n-1}(z')^2 dz', \tag{2.43}$$
$$\text{pour } 0 \leq z \leq 1, \quad n = 1, 2, \cdots$$

On va démontrer par l'induction mathématique que, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\sigma^{[n]}$ est bien définie et vérifie, outre la condition (2.36), les relations

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq y_n(z), \tag{2.44}$$

$$\sup_{0\leq z\leq 1} \|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} < \infty. \tag{2.45}$$

En effet, pour $n = 0$, les relations (2.36), (2.44) et (2.45) résultent immédiatement de la définition (2.34), (2.35) et des hypothèses (2.28) et (2.30).

Supposons maintenant que $\sigma^{[n-1]}$ vérifie les relations (2.36), (2.44) et (2.45) (dans lesquelles on substitue naturellement $n-1$ à la place de n). On remarque que, dans ces hypothèses, $\sigma^{[n]}$ vérifie la condition (2.36). D'autre part, de l'hypothèse sur $\sigma^{[n-1]}$ c'est-à-dire

$$\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq y_{n-1}(z),$$

on obtient

$$\int_z^1 \|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z')\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}dz' \leq \int_z^1 y^2_{n-1}(z')dz',$$

de l'inégalité (2.39) et de la définition de y_n, on constate que

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq y_n(z),$$

d'où $\sigma^{[n]}$ vérifie (2.44).

Enfin, de la définition (2.35) et d'après le théorème de Fubini, on a

$$\partial_z\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} = \|F(\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z))\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})},$$

utilisant l'inégalité (2.41), on obtient

$$\int_z^1 \partial_{z'}\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}dz' \leq$$

$$\leq C'\int_z^1 \|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}dz',$$

ce qui implique que

$$\sup_{0\leq z\leq 1}\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq \|\bar{\sigma}\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} + C'\sup_{0\leq z\leq 1}\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\times$$

$$\times\sup_{0\leq z\leq 1}\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})},$$

ou

$$\sup_{0\leq z\leq 1}\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq \|\bar{\sigma}\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} + C'\sup_{0\leq z\leq 1}\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\sup_{0\leq z\leq 1}y_{n-1}(z).$$

En utilisant les hypothèses sur $\sigma^{[n-1]}$, on aura

$$\sup_{0\leq z\leq 1}\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq C < \infty,$$

ce qui implique que $\sigma^{[n]}$ vérifie également (2.45). On remarque que la suite $\{y_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \le z \le 1$, est une suite croissante et est l'approximation successive de la solution $Y(z)$ du problème de Cauchy (pour $z \le 1$)

$$Y'(z) = -(M_1 + M_2)(\overline{m}_A - \overline{m}_a)Y(z)^2, \qquad Y(1) = \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}.$$

Ce qui implique que

$$-\frac{Y'(z)}{Y^2(z)} = (M_1 + M_2)(\overline{m}_A - \overline{m}_a),$$

en plus

$$\int_z^1 \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{1}{Y(z)}\Big)\Big|_{z=z'} dz' = (M_1 + M_2)(\overline{m}_A - \overline{m}_a)(1 - z),$$

d'où la fonction $Y(z)$ a la forme explicite

$$Y(z) = \frac{\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}}{1 - (M_1 + M_2)(\overline{m}_A - \overline{m}_a)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}(1 - z)}.$$

$Y(z)$ est bien définie pour $\frac{(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}-1}{(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}} < z \le 1$, ce qui nous permet de démontrer que (2.44) implique l'inégalité (2.37). Le lemme est démontré.

Maintenant on va démontrer la proposition 2.2.

Démonstration de la proposition 2.2. On va démontrer avant tout l'existence et l'unicité de la solution dans un intervalle $[1 - \delta, 1]$ (avec $\delta > 0$ et suffisament petit). Considérons deux fonctions σ_1 et σ_2 appartenant à $L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et la différence $F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)$. D'après le lemme 2.5 on a

$$\|F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} |F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)| dm d\xi = \tag{2.46}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\gamma_\tau} |F(\sigma_1) - F(\sigma_2)| \mu_\gamma(dm) \Big) d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\gamma_\tau} \Big| \frac{m\alpha(m)}{2g} \int\limits_{\gamma_\tau^{[0,m]}} \beta(m-m', m') \big[\sigma_1(m-m', \eta'', z)\sigma_1(m', \eta', z) +$$

$$-\sigma_2(m-m', \eta'', z)\sigma_2(m', \eta', z) \big] \mu_\gamma(dm') - \frac{m\alpha(m)}{g} \times$$

$$\times \int\limits_{\gamma_\tau} \beta(m, m') \big[\sigma_1(m, \xi, z)\sigma_1(m', \eta', z) - \sigma_2(m, \xi, z)\sigma_2(m', \eta', z) \big] \mu_\gamma(dm') \Big| \mu_\gamma(dm) d\tau,$$

alors, on a

$$\|F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)\|_{L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})} \leq \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\gamma_\tau} \Big| M_1 \int\limits_{\gamma_\tau^{[0,m]}} \big[(\sigma_1(m-m', \eta'', z) - \sigma_2(m-m', \eta'', z)) \times$$

$$\times \sigma_1(m', \eta', z) + \big(\sigma_1(m', \eta', z) - \sigma_2(m', \eta', z) \big) \sigma_2(m-m', \eta'', z) \big] \mu_\gamma(dm') +$$

$$+ M_2 \int\limits_{\gamma_\tau} \big[\sigma_2(m', \eta', z) \big(\sigma_1(m, \xi, z) - \sigma_2(m, \xi, z) \big) + \sigma_1(m, \xi, z) \times$$

$$\times \big(\sigma_1(m', \eta', z) - \sigma_2(m', \eta', z) \big) \big] \mu_\gamma(dm') \Big| \mu_\gamma(dm) d\tau \leq$$

$$\leq M_1 \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\gamma_\tau} \big(\big|\sigma_1 - \sigma_2\big| * \sigma_1 \big)(m, \xi, z) + \big(\big|\sigma_1 - \sigma_2\big| * \sigma_2 \big)(m, \xi, z) \mu_\gamma(dm) d\tau +$$

$$+ M_2 \Big[\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\gamma_\tau} \Big(\big|\sigma_1(m, \xi, z) - \sigma_2(m, \xi, z)\big| \int\limits_{\gamma_\tau} \sigma_2(m', \eta', z) \mu_\gamma(dm') +$$

$$+ \sigma_1(m, \xi, z) \int\limits_{\gamma_\tau} \big|\sigma_1(m', \eta', z) - \sigma_2(m', \eta', z)\big| \mu_\gamma(dm') \Big) \mu_\gamma(dm) d\tau \Big],$$

$$\leq M_1 \int\limits_{\mathbb{R}} \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau)} \big(\|\sigma_1\|_{L^1(\gamma_\tau)} + \|\sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau)} \big) d\tau +$$

$$+ M_2 \int\limits_{\mathbb{R}} \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau)} \big(\|\sigma_1\|_{L^1(\gamma_\tau)} + \|\sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau)} \big) d\tau,$$

d'où

$$\|F_z(\sigma_1)-F_z(\sigma_2)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\le (M_1+M_2)\int\limits_{\mathbb{R}}\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\times \tag{2.47}$$

$$\times\big(\|\sigma_1\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}+\|\sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\big)d\tau$$

avec M_1 et M_2 sont les deux constantes définies dans (2.32) et (2.38).

Encore une fois à l'aide du lemme 2.5, on déduit de (2.47) que

$$\|F_z(\sigma_1)-F_z(\sigma_2)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\le \tag{2.48}$$

$$\le (M_1+M_2)\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\mathrm{ess}\big(\|\sigma_1\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}+\|\sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\big)\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}.$$

Maintenant on substitue $\sigma_1=\sigma^{[n]}$ et $\sigma_2=\sigma^{[n-1]}$ dans (2.48), on obtient

$$\|F_z(\sigma^{[n]})-F_z(\sigma^{[n-1]})\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\le (M_1+M_2)\,\|\sigma^{[n]}-\sigma^{[n-1]}\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\times$$

$$\times\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\mathrm{ess}\big[\|\sigma^{[n]}\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}+\|\sigma^{[n-1]}\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\big],$$

de (2.40), on en déduit

$$\|F_z(\sigma^{[n]})-F_z(\sigma^{[n-1]})\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\le (M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\times$$

$$\times\|\sigma^{[n]}-\sigma^{[n-1]}\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\mathrm{ess}\big(\|\sigma^{[n]}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}+\|\sigma^{[n-1]}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\big).$$

Alors en vertu de (2.37)

$$\|F_z(\sigma^{[n]})-F_z(\sigma^{[n-1]})\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\le \Lambda_\sigma(z)\|\sigma^{[n]}-\sigma^{[n-1]}\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}, \tag{2.49}$$

$$\text{avec}\qquad \Lambda_\sigma(z)=\frac{2(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}}{1-(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}(1-z)},$$

pour $\frac{(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}-1}{(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}}<z\le 1$.

C'est-à-dire, parmi les fonctions $\sigma^{[n]}$, $n\in\mathbb{N}$, l'opérateur $F_z(\cdot)$ satisfait à la condition de Lipschitz dans l'espace $L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ avec le coefficient de Lipschitz $\Lambda_\sigma(z)$ et $1-\delta < z < 1$ (avec $\delta > 0$ suffisament petit).

Nous allons montrer dans le suite que $\sigma^{[n]}$ converge, quand n tend vers l'infini, vers la solution σ dans l'intervalle $[1-\delta, 1]$. De la définition (2.35) de $\sigma^{[n]}$, on a

$$\|\sigma^{[n+1]} - \sigma^{[n]}\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq \int_z^1 \|F(\sigma^{[n]}) - F(\sigma^{[n-1]})\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} dz'.$$

En vertu de (2.49), pour $z \in [1-\delta, 1]$

$$\|\sigma^{[n+1]}(\cdot,\cdot,z) - \sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq$$
$$\leq \int_z^1 \Lambda_\sigma(z')\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z') - \sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} dz' \leq$$
$$\leq \overline{\Lambda}_\sigma \int_z^1 \|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z') - \sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} dz',$$

avec $\overline{\Lambda}_\sigma = \sup\limits_{1-\delta\leq z\leq 1} \Lambda_\sigma(z)$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, avec $m \geq n$ on déduit que

$$\|\sigma^{[n+m]}(\cdot,\cdot,z) - \sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq \tag{2.50}$$
$$\leq \overline{\Lambda}_\sigma \int_z^1 \|\sigma^{[m+n-1]}(\cdot,\cdot,z') - \sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} dz'.$$

En répétant une procédure analogue, on arrive à l'inégalité

$$\|\sigma^{[n+m]}(\cdot,\cdot,z) - \sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq$$
$$\leq (\overline{\Lambda}_\sigma)^n \frac{(1-z)^n}{n!} \sup_{1-\delta\leq z\leq 1} (\|\sigma^{[m]}(\cdot,\cdot,z) - \sigma^{[0]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}).$$

Comme en vertu de (2.45), il existe un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$(\overline{\Lambda}_\sigma)^n \frac{(1-z)^n}{n!} \sup_{1-\delta\leq z\leq 1} (\|\sigma^{[m]}(\cdot,\cdot,z) - \sigma^{[0]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}) \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

on déduit que

$$\|\sigma^{[n+m]}(\cdot,\cdot,z)-\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\leq\varepsilon$$

c'est-à-dire $\{\sigma^{[n]}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $C([1-\delta,1],L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}))$, et donc il existe un $\delta>0$ tel que $\sigma^{[n]}$ converge, quand n tend vers l'infini, vers une fonction σ dans la topologie de

$$C([1-\delta,1];L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})),$$

et que la limite σ satisfait, dans l'intervalle $[1-\delta,1]$, à l'équation (2.26) et à la condition (2.27). On voit aisément que l'unicité de la solution σ dans l'intervalle $[1-\delta,1]$ se démontre d'une manière analogue à la démonstration du théorème classique, c'est-à-dire nous supposons que σ_1 et σ_2 sont deux solutions de l'équation (2.26) dans l'intervalle $[1-\delta,1]$, alors on a

$$\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\leq\int_z^1\|F(\sigma_1)-F(\sigma_2)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}dz',$$

de l'inégalité (2.48), on a

$$\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\leq(M_1+M_2)\int_z^1\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\times$$
$$\times\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\operatorname{ess}\big(\|\sigma_1\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}+\|\sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\big)dz'.$$

Dans l'intervalle de l'existence de la solution, et du lemme de Granwall, on en déduit que

$$\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\leq 0,$$

ce qui prouve l'unicité de la solution dans l'intervalle $[1-\delta,1]$.

Une fois obtenue la solution locale σ dans l'intervalle $[1-\delta,1]$, examinons ses propriétés. Avant tout on remarque que (2.36) pour tout $n \in \mathbb{N}$ implique que la limite de la suite $\sigma^{[n]}$ vérifié

$$\operatorname{supp}(\sigma) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A] \times \mathbb{R} \times [1-\delta, 1]. \tag{2.51}$$

D'autre part, pourvu que $\sigma \geq 0$, la première intégrale de l'opérateur $F_z(\cdot)$ (voir (2.26)) est négative (≤ 0), tandis que la seconde intégrale de $F_z(\cdot)$ est de la forme

$$\sigma(m,\xi,z)\frac{m\alpha(m)}{g}\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m',\eta(m,m',\xi,z),z)dm'.$$

donc on peut écrire l'équation (2.26) sous la forme

$$\partial_z\sigma = A\sigma - B,$$

avec A et B sont deux fonctionnelle positives, de manière analogue aux cas des équations différentielles ordinaires, on a

$$\sigma(m,\xi,z) = \overline{\sigma}(m,\xi)\exp(-\int_z^1 A(z')dz') + \int_z^1 B(z')\exp(-\int_z^{z'} A(z'')dz'')dz',$$

ce qui montre que

$$\sigma \geq 0 \qquad \text{p.p. dans } \ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [1-\delta, 1]. \tag{2.52}$$

Les relations (2.51) et (2.52) étant démontrées, on peut refaire l'estimation de $\|\sigma(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}$; pour cela on considère le deuxième membre $F_z(\sigma(z))$ de (2.26). En vertu de (2.52) on a

$$\frac{m\alpha(m)}{g}\int_{\gamma_{\tau(m,\xi,z)}} \beta(m,m')\sigma(m',\eta',z)\sigma(m,\xi,z)\mu_\gamma(dm') \geq 0,$$

ce qui nous permet de déduire de (2.26) que

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(m,\xi,z) \geq -\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\xi,z)}} \beta(m-m',m')\sigma(m',\eta',z)\sigma(m-m',\eta'',z)\mu_\gamma(dm'),$$

alors

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(m,\xi,z) \geq -M_1 \int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\xi,z)}} \sigma(m',\eta',z)\sigma(m-m',\eta'',z)\mu_\gamma(dm'), \quad (2.53)$$

(ici η' et η'' sont comme dans (2.26)). Donc, si on pose

$$\varphi(z) = \|\sigma(\cdot,\cdot;z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})},$$

alors, compte tenu de (2.51), il résulte de (2.53)

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(m,\xi,z) \geq -M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)\varphi(z)^2 \qquad \text{p.p. dans } \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}, \quad (2.54)$$

on obtient

$$\sigma(m,\xi,z) \leq \overline{\sigma}(m,\xi) + M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)\int_z^1 \varphi(z')^2 dz' \qquad \text{p.p. dans } \mathbb{R}_+\times\mathbb{R},$$

d'où

$$\varphi(z) \leq \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} + M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)\int_z^1 \varphi(z')^2 dz' \qquad \text{p.p. dans } \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}.$$

Cette inégalité implique que

$$\|\sigma(\cdot,\cdot;z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} = \varphi(z) \leq \tilde{Y}(z), \quad (2.55)$$

pour $z \leq 1$ dans l'intervalle de l'existence de $\sigma(\cdot,\cdot;z)$ et de $\tilde{Y}(z)$, où $\tilde{Y}(z)$ est la solution de l'équation intégrale

$$\tilde{Y}(z) = \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} + M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)\int_z^1 \tilde{Y}(z')^2 dz',$$

ou, ce qui revient au même, du problème de Cauchy

$$\frac{d\tilde{Y}(z)}{dz} = -M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)\tilde{Y}(z)^2, \qquad \tilde{Y}(1) = \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}.$$

On a d'ailleurs

$$\tilde{Y}(z) = \frac{\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}}{1 - \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)(1-z)}. \tag{2.56}$$

On rappelle que la condition (2.31) implique que le deuxième membre de (2.56) est bien défini pour tout $z \in [0,1]$. Donc l'inégalité (2.55) est valable pour tout $z \in [0,1]$ tel que $\sigma(\cdot,\cdot,z)$ existe.

Rappelons que l'on a construit la solution locale $\sigma(\cdot,\cdot;z)$ dans un intervalle $[1-\delta,1]$ et que l'on peut prolonger la solution $\sigma(\cdot,\cdot,z)$ pour tout l'intervalle où les conditions pour la construction de la solution locale continuent à être vérifiées. Or, de (2.48) on déduit si $\|\sigma(\cdot,\cdot;z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} < \infty$, alors on peut encore prolonger la solution. Par conséquent, en vertu de (2.55) et (2.56), la solution $\sigma(\cdot,\cdot,z)$ peut être prolongée dans tout l'intervalle $[0,1]$.

L'unicité de la solution résulte de l'unicité de la solution locale, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Chapitre 3

Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelettes avec un vent vertical

Il est vrai que dans la Nature la composante verticale de la vitesse de l'air est généralement, assez petite par rapport aux composantes horizontales. Mais il y a aussi des cas où le mouvement vertical ascendant de l'air constitue l'élément fondamental du phénomène, comme dans le cas des orages ou dans la partie centrale d'un cyclone tropical. En effet, dans ces cas, l'écoulement ascendant de l'air cause une forte condensation de vapeur, créant des gouttelettes très nombreuses, qui se coagulant en formant des gouttelettes plus grandes et tombent comme pluie intense (voir [4]).

Pour contribuer à l'analyse et l'éclaircissement de ces phénomènes, dans ce chapitre on va étudier l'équation pour la distribution des gouttelettes qui se déplaçant par un vent vertical et par la force gravitationnelle et subissent le processus de coagulation et celui d'accroissement de poids dû à la condensation de la vapeur sur leur surface. Plus précisément, on considère l'équation intégro-différentielle (1.19) pour une fonction inconnue $\sigma = \sigma(m, z)$ se trouve à la hauteur z ($0 \leq z \leq 1$). Comme notre intérêt principal concerne le comportement de la densité σ en présence d'un vent vertical ascendant (ou de la composante verticale positive d'un vent), nous concentrons notre attention sur la variation de σ par rapport à l'hauteur z, en négligeant son éventuelle dépendance de la position horizontale. L'équation dans la forme précise va être formulée dans le paragraphe suivant (voir (3.1)). On va démontrer, dans la suite, l'existence d'une solution stationnaire de cette équation avec les "conditions d'entrée" pour $\sigma(m, z)$.

3.1 Position du problème

On va considérer la densité $\sigma = \sigma(m, z)$ de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m à la hauteur $z \in [0, 1]$. En désignant par $h_{gl} = h_{gl}(m, z)$ la quantité de condensation sur les gouttelettes de masse m par unité de temps et par unité de masse de gouttelettes.
Nous considérons l'équation

$$\begin{aligned} \partial_z\big(\sigma(m,z)u(m,z)\big) + \partial_m\big(mh_{gl}(m,z)\sigma(m,z)\big) = h_{gl}\big(m,z\big)\sigma(m,z)+ \\ +\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)dm'+ \\ -m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm', \end{aligned} \tag{3.1}$$

dans le domaine

$$\Omega = \{\,(m,z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, m > \overline{m}_a,\ 0 < z < 1\,\}, \qquad \overline{m}_a > 0; \tag{3.2}$$

Le choix d'une constante $\overline{m}_a$ strictement positive et convenablement petite et du domaine Ω donné dans (3.2) est conforme à la nature physique du

problème ; en effet, la courbure élevée des gouttelettes très petites ne leur permet pas de subsister dans l'atmosphère et les gouttelettes se forment exclusivement sur des aérosols ayant une masse supérieure à une valeur critique (voir [17], [28]).
Pour la vitesse des gouttelettes, en adoptant l'approximation (voir [28], [30])

$$u(m,z) = v(z) - \frac{g}{\alpha(m)}, \tag{3.3}$$

avec $v(z)$, g et $\alpha(m)$ représentent respectivement la vitesse de l'air (dans la direction de l'axe z), l'accélération gravitationnelle et le coefficient de friction entre les gouttelettes et l'air.
L'équation (3.1) va être envisagée dans Ω avec les conditions d'entrée

$$\sigma(m,z) = \overline{\sigma}_0(m,z) \qquad \text{pour} \quad (m,z) \in S_0 \cup S_1 \cup S_a, \tag{3.4}$$

où

$$S_0 = \{\,(m,z) \in \overline{\Omega} \,|\, m \geq \overline{m}_a,\ z = 0,\ u(m,0) \geq 0\,\}, \tag{3.5}$$

$$S_1 = \{\,(m,z) \in \overline{\Omega} \,|\, m \geq \overline{m}_a,\ z = 1,\ u(m,1) < 0\,\}, \tag{3.6}$$

$$S_a = \{\,(m,z) \in \overline{\Omega} \,|\, m = \overline{m}_a,\ 0 \leq z \leq 1\,\}. \tag{3.7}$$

On suppose que $\overline{\sigma}_0(m,z)$ est continue sur $S_0 \cup S_a$ et uniformément continue sur S_1 et que

$$\overline{\sigma}_0(m,z) \geq 0 \qquad \forall (m,z) \in S_0 \cup S_1 \cup S_a, \tag{3.8}$$

$$\overline{\sigma}_0(m,z) = 0 \qquad \text{si} \ \ m \geq \overline{m}_A \quad (\overline{m}_A > \overline{m}_a). \tag{3.9}$$

On remarque que $S_0 \cup S_1 \cup S_a$ est la partie de la frontière de Ω où le vecteur $(mh_{gl}, u)^T$ est orienté vers l'intérieur de Ω ; on précise que, d'après la condition (3.16) (voir aussi (3.15)) formulée dans la suite, on aura $\overline{m}_a h_{gl}(\overline{m}_a, z) > 0$

pour tout $z \in [0,1]$, ce qui nous garantit que le vecteur $(mh_{gl}, u)^T$ est orienté vers l'intérieur de Ω même sur S_a. L'hypothèse de la continuité de $\overline{\sigma}_0(m,z)$ garantira que le problème ne sera pas influencé par la convention sur l'appartenance ou non à S_0 du point $(m,0)$ tel que $u(m,0) = 0$ et sur l'appartenance du point $(\overline{m}_a, 0)$ à S_0 ou à S_a. Quant au point (m,1) tel que $u(m,1) = 0$, nous convenons qu'il n'appartient pas à S_1 et nous formulerons le problème conformément à cette convention.

On suppose que les fonctions $u(m,z)$ et $h_{gl}(m,z)$ sont données, et que

$$v(\cdot) \in C^1([0,1]), \qquad \inf_{z\in[0,1]} v(z) > 0, \tag{3.10}$$

$$\alpha(\cdot) \in C^1([\overline{m}_a, \infty[\,), \qquad \frac{d}{dm}\alpha(m) < 0 \quad \forall m \geq \overline{m}_a, \tag{3.11}$$

$$0 < \inf_{m\geq\overline{m}_a} \alpha(m) < \sup_{m\geq\overline{m}_a} \alpha(m) < \infty, \tag{3.12}$$

$$\inf_{z\in[0,1]} (v(z) - \frac{g}{\alpha(\overline{m}_a)}) > 0, \tag{3.13}$$

$$\exists m_1 > \overline{m}_a \quad \text{tel que} \quad \sup_{z\in[0,1]} (v(z) - \frac{g}{\alpha(m_1)}) < 0. \tag{3.14}$$

Pour la fonction $h_{gl}(m,z)$ on suppose que

$$h_{gl}(\cdot,\cdot) \in C^1(\overline{\Omega}), \tag{3.15}$$

$$0 < \inf_{(m,z)\in\Omega} mh_{gl}(m,z) \leq \sup_{(m,z)\in\Omega} mh_{gl}(m,z) < \infty. \tag{3.16}$$

En ce qui concerne $\beta(m_1, m_2)$ on suppose qu'elle vérifie les conditions (2.7),(2.8), et (2.9) introduites dans le chapitre précédent.

Rappelons que l'écoulement ascendant de l'air cause généralement, par la transformation adiabatique de l'air, la diminution de la température de chaque partie de l'air qui se déplace ; la diminution de la température, à son tour, implique la diminution de la densité de la vapeur saturée, ce qui cause la condensation de la vapeur, si l'humidité de l'air est déjà au niveau de la saturation. Pour que la position de notre problème correspond à cette situation, on suppose que $v(z) > 0$ et $h_{gl} > 0$ (voir (3.10), (3.16)).

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses* (2.7)-(2.9) *et* (3.10)-(3.16)*, il existe une constante* $\overline{A}_0 > 0$ *telle que, si*

$$\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0 \cup S_1 \cup S_a)} \leq \overline{A}_0, \tag{3.17}$$

alors l'équation (3.1) *avec les conditions* (3.4)–(3.9) *admette une solution* σ *dans la classe* $L^\infty(\Omega)$ *; cette solution* σ *est non-négative, bornée et continue à morceaux dans* Ω*.*

La constante $\overline{A}_0$ mensionnée dans l'énoncé du théorème 3.1 pourra être mieux déterminée, comme on le verra dans la remarque 3.2.

3.2 Division du domaine et caractéristiques

On définit d'abord la division du domaine Ω en trois parties Ω_1, Σ_{int}, Ω_2

$$\begin{cases} \Omega_1 = \{\,(m,z) \in \Omega \,|\, u(m,z) > 0\,\}, \\ \Sigma_{int} = \{\,(m,z) \in \Omega \,|\, u(m,z) = 0\,\}, \\ \Omega_2 = \{\,(m,z) \in \Omega \,|\, u(m,z) < 0\,\}. \end{cases} \tag{3.18}$$

On pose également

$$\Sigma = \{\,(m,z) \in \overline{\Omega} \,|\, u(m,z) = 0\,\}.$$

En vertu des conditions (3.3), (3.10) et (3.11) la relation

$$u(m_\Sigma(z), z) = 0, \qquad z \in [0,1],$$

définit une fonction $m_\Sigma(z)$ de classe $C^1([0,1])$ de sorte que Σ est représentée par

$$\Sigma = \{\, (m,z) \in \overline{\Omega} \,|\, m = m_\Sigma(z),\ z \in [0,1]\,\}, \tag{3.19}$$

et on a

$$\overline{m}_a < m_\Sigma^- < m_\Sigma^+ < \infty$$

où

$$m_\Sigma^- = \inf_{0\le z\le 1} m_\Sigma(z), \qquad m_\Sigma^+ = \sup_{0\le z\le 1} m_\Sigma(z). \tag{3.20}$$

La fonction $m_\Sigma(z)$ jouit de la propriété suivante.

Lemme 3.1. *On a*

$$\frac{dm_\Sigma(z)}{dz} = -\frac{\alpha(m)^2 \frac{dv(z)}{dz}}{g\frac{d\alpha(m)}{dm}}. \tag{3.21}$$

Démonstration. Comme $m_\Sigma(z)$ est définie par la relation

$$u(m_\Sigma(z), z) = v(z) - \frac{g}{\alpha(m)} = 0,$$

en désignant par $\vec{w}_\Sigma = (\frac{dm_\Sigma(z)}{dz}, 1)^T$ le vecteur tangent à la courbe Σ, de la relation

$$\nabla u \cdot \vec{w}_\Sigma = \frac{g}{\alpha(m)^2}\frac{d\alpha(m)}{dm}\frac{dm_\Sigma(z)}{dz} + \frac{dv(z)}{dz} = 0$$

on obtient (3.21).

Le lemme est démontré.

Maintenant on va définir les caractéristiques pour l'équation (3.1), qui peut être écrite dans la forme

$$u(m,z)\partial_z\sigma(m,z) + mh_{gl}(m,z)\partial_m\sigma(m,z) = \tag{3.22}$$

$$= -\sigma(m,z)\big(\partial_z u(m,z) + m\partial_m h_{gl}(m,z)\big)+$$
$$+\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)dm'+$$
$$-m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'.$$

De l'expression de l'équation (3.22) il résulte que les caractéristiques sont déterminées par le système d'équations

$$\frac{dz(t)}{dt} = u(m(t),z(t)), \tag{3.23}$$

$$\frac{dm(t)}{dt} = m(t)h_{gl}(m(t),z(t)) \tag{3.24}$$

avec les conditions initiales pour $(m(t_0),z(t_0))$. Comme le second membre des équations (3.23)–(3.24) est de classe C^1 par rapport à (m,z), pour tout $(m,z)\in\overline{\Omega}$ il existe une courbe et une seule qui est définie par les équations (3.23)–(3.24) et qui passe par (m,z). On désigne ces courbes par

$$\gamma = \{(m_\gamma(t),z_\gamma(t))\in\overline{\Omega} \mid t\in[t_0,t_1]\}, \tag{3.25}$$

et par Γ l'ensemble de toutes ces caractéristiques γ ; dans (3.25) $m_\gamma(t)$ et $z_\gamma(t)$ sont des fonctions qui satisfont au système d'équations (3.23)-(3.24), tandis que t_0 et t_1 sont tels que $z_\gamma(t_0)=0$ ou 1 ou $m_\gamma(t_0)=\overline{m}_a$ et $z_\gamma(t_1)=0$ ou 1, mais, comme on le voit aisément, t_0 peut être choisi arbitrairement.

Lemme 3.2. *Chaque courbe $\gamma\in\Gamma$, définie par les équations* (3.23)-(3.24) *et les conditions initiales, peut être représentée par une fonction continue $\widetilde{z}(m)=\widetilde{z}_\gamma(m)$ de $m\in[m_0,m_1]$ à valeurs dans $[0,1]$ (avec certains m_0, $m_1\in[\overline{m}_a,\infty[$) et la fonction $\widetilde{z}_\gamma(m)$ est strictement croissante dans la partie où $(m,\widetilde{z}_\gamma(m))\in\Omega_1$ et strictement décroissante dans la partie où $(m,\widetilde{z}_\gamma(m))\in\Omega_2$.*

Démonstration. Comme $mh_{gl}(m,z) > 0$ pour tout $(m,z) \in \Omega$ (voir(3.16)), l'équation (3.24) implique que sur γ la fonction $m_\gamma(t)$ est strictement croissante, ce qui nous permet de représenter γ par une fonction $\widetilde{z}(m) = \widetilde{z}_\gamma(m)$ pour $m \in [m_0, m_1]$, $m_0 = m(t_0), m_1 = m(t_1)$. Des équations (3.23)–(3.24) on déduit que

$$\frac{d\widetilde{z}(m)}{dm} = \frac{u(m,z)}{mh_{gl}(m,z)} \quad \text{pour } (m,z) \in \gamma. \tag{3.26}$$

La définition des sous-domaine Ω_1 et Ω_2 et la relation (3.26) entraînent que $\frac{d\widetilde{z}(m)}{dm} > 0$ si $(m, \widetilde{z}(m)) \in \Omega_1$ et que $\frac{d\widetilde{z}(m)}{dm} < 0$ si $(m, \widetilde{z}(m)) \in \Omega_2$, ce qui prouve la deuxième partie de l'énoncé du lemme. $\square$

On voit aisément que, quelque soit $\gamma \in \Gamma$, Σ et γ possèdent au plus un point commun, qu'on note $(m_\Sigma(\gamma), z_\Sigma(\gamma))$. Si on définit t_Σ par la relation

$$(m_\gamma(t_\Sigma), z_\gamma(t_\Sigma)) \in \Sigma,$$

on a

$$(m_\Sigma(\gamma), z_\Sigma(\gamma)) = (m_\gamma(t_\Sigma), z_\gamma(t_\Sigma)).$$

On remarque que $m_\Sigma(\gamma)$ et $z_\Sigma(\gamma)$ vérifient les relations

$$m_\Sigma(\gamma) = m_\Sigma(z_\Sigma(\gamma)) = m_\gamma(t_\Sigma), \qquad z_\Sigma(\gamma) = \max_{m_0 \le m \le m_1} \widetilde{z}_\gamma(m).$$

On pose

$$\gamma^{(1)} = \gamma \cap \overline{\Omega_1}, \qquad \gamma^{(2)} = \gamma \cap \overline{\Omega_2}, \tag{3.27}$$

$$\Gamma^{(1)} = \{\, \gamma^{(1)} = \gamma \cap \overline{\Omega_1} \,|\, \gamma \in \Gamma \,\}, \qquad \Gamma^{(2)} = \{\, \gamma^{(2)} = \gamma \cap \overline{\Omega_2} \,|\, \gamma \in \Gamma \,\},$$

(le fait que $\Gamma^{(1)}$ et $\Gamma^{(2)}$ contiennent l'ensemble vide ne causera pas d'obstacle à nos raisonnements). Comme $\widetilde{z}_\gamma(m)$ est strictement croissante pour

$m_0 \leq m \leq m_\Sigma(\gamma)$ et strictement décroissante dans $m_\Sigma(\gamma) \leq m \leq m_1$ (voir le lemme 3.2), on peut définir les fonctions $m_\gamma^{(1)}(z)$ et $m_\gamma^{(2)}(z)$ par les relations

$$m = m_\gamma^{(1)}(z) \Leftrightarrow (m, z) \in \gamma^{(1)}, \qquad m = m_\gamma^{(2)}(z) \Leftrightarrow (m, z) \in \gamma^{(2)}. \tag{3.28}$$

Lemme 3.3. *On suppose que $\Sigma \cap \gamma \neq \emptyset$. Alors, quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que*

$$\int_{z_\Sigma(\gamma)-\delta}^{z_\Sigma(\gamma)} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'), z')}\, dz' \leq \varepsilon, \qquad \int_{z_\Sigma(\gamma)}^{z_\Sigma(\gamma)-\delta} \frac{1}{u(m_\gamma^{(2)}(z'), z')}\, dz' \leq \varepsilon. \tag{3.29}$$

Démonstration. En vertu des conditions (3.10)-(3.12) on peut choisir un voisinage U_Σ de Σ et quatre constantes c_1, c_2, c_3, c_4 tels que

$$-c_2 \leq \frac{g}{\alpha(m)^2} \frac{d\alpha(m)}{dm} \leq -c_1 < 0 \qquad \text{dans } U_\Sigma, \tag{3.30}$$

$$m h_{gl}(m, z) \geq c_3 > 0 \qquad \text{dans } U_\Sigma, \tag{3.31}$$

$$\left| \frac{dv(z)}{dz} \right| \leq c_4 < \infty \qquad \forall z \in [0, 1]. \tag{3.32}$$

On se limite d'abord à la partie de γ contenue dans $\overline{\Omega_1}$ et donc à $[t_0, t_\Sigma]$ pour t. On pose

$$\zeta(t) = z_\gamma(t_\Sigma) - z_\gamma(t) = z_\Sigma(\gamma) - z_\gamma(t) \qquad \text{pour } t \in [t_0, t_\Sigma]. \tag{3.33}$$

On a alors

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = -u(m_\gamma(t), z_\gamma(t)). \tag{3.34}$$

Or, comme on a $u(m, z) = 0$ sur Σ, en utilisant la fonction $m_\Sigma(z)$ (voir (3.19)), on a

$$u(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) = u(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) - u(m_\Sigma(z_\gamma(t)), z_\gamma(t)) = \tag{3.35}$$

$$= -\int_{m_\gamma(t)}^{m_\Sigma(z_\gamma(t))} \frac{\partial u}{\partial m} dm = -\int_{m_\gamma(t)}^{m_\Sigma(z_\gamma(t))} \frac{g}{\alpha(m)^2} \frac{d\alpha(m)}{dm} dm.$$

D'autre part, d'après le lemme 3.1, on a

$$m_\gamma(t_\Sigma) - m_\Sigma(z_\gamma(t)) = m_\Sigma(z_\gamma(t_\Sigma)) - m_\Sigma(z_\gamma(t)) = -\int_{z_\gamma(t)}^{z_\gamma(t_\Sigma)} \frac{\alpha(m_\Sigma(z))^2 \frac{dv(z)}{dz}}{g \frac{d\alpha(m)}{dm}|_{m=m_\Sigma(z)}} dz. \tag{3.36}$$

Maintenant nous nous limitons à t tels que $(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) \in \Omega_1 \cap U_\Sigma$. Alors, de (3.30), (3.34) et (3.35) on déduit que

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} \leq -c_1(m_\Sigma(z_\gamma(t)) - m_\gamma(t)). \tag{3.37}$$

Or, comme en vertu de (3.30) et (3.32) on a

$$-\int_{z_\gamma(t)}^{z_\gamma(t_\Sigma)} \frac{\alpha(m_\Sigma(z))^2 \frac{dv(z)}{dz}}{g \frac{d\alpha(m)}{dm}|_{m=m_\Sigma(z)}} dz \leq \frac{c_4}{c_1}(z_\gamma(t_\Sigma) - z_\gamma(t)) = \frac{c_4}{c_1}\zeta(t),$$

de (3.36) on obtient

$$m_\Sigma(z_\gamma(t)) - m_\gamma(t) = m_\gamma(t_\Sigma) - m_\gamma(t) - (m_\gamma(t_\Sigma) - m_\Sigma(z_\gamma(t))) \geq$$

$$\geq m_\gamma(t_\Sigma) - m_\gamma(t) - \frac{c_4}{c_1}\zeta(t),$$

ce qui, joint à (3.37), nous donne

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} \leq -c_1(m_\gamma(t_\Sigma) - m_\gamma(t)) + c_4\zeta(t). \tag{3.38}$$

En outre, en vertu de (3.24) et(3.31), on a

$$m_\gamma(t_\Sigma) - m_\gamma(t) \geq c_3(t_\Sigma - t),$$

ce qui nous permet de déduire de (3.38) que

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} \leq -c_1 c_3(t_\Sigma - t) + c_4\zeta(t) \qquad \text{pour} \quad t_\Sigma - \widetilde{\delta} \leq t \leq t_\Sigma \tag{3.39}$$

avec un certain $\widetilde{\delta} > 0$. Comme la fonction

$$\overline{\zeta}(t) = c_1 c_3 \int_t^{t_\Sigma} (t_\Sigma - t') e^{-c_4(t'-t)} dt',$$

vérifie l'égalité

$$\frac{d\overline{\zeta}(t)}{dt} = -c_1 c_3 (t_\Sigma - t) + c_4 \overline{\zeta}(t),$$

et que

$$\overline{\zeta}(t_\Sigma) = \zeta(t_\Sigma) = 0,$$

d'après le théorème de comparaison, on déduit de (3.39) que

$$\zeta(t) \geq c_1 c_3 \int_t^{t_\Sigma} (t_\Sigma - t') e^{-c_4(t'-t)} dt' \geq \frac{c_1 c_3}{2} (t_\Sigma - t)^2 e^{-c_4(t_\Sigma - t)},$$

pour $t_\Sigma - \widetilde{\delta} \leq t \leq t_\Sigma$; en particulier, pour $t_\Sigma - \widetilde{\delta}_1 \leq t \leq t_\Sigma$, $\widetilde{\delta}_1 = \min(\widetilde{\delta}, \frac{\log 2}{c_4})$, on a

$$\zeta(t) \geq \frac{c_1 c_3}{4} (t_\Sigma - t)^2,$$

ou

$$t_\Sigma - t \leq \frac{2}{\sqrt{c_1 c_3}} \sqrt{\zeta(t)} = \frac{2}{\sqrt{c_1 c_3}} \sqrt{z_\gamma(t_\Sigma) - z_\gamma(t)}. \tag{3.40}$$

On rappelle que d'après la définition de la vitesse $u(m, z)$, on a

$$t_\Sigma - t = \int_{z_\gamma(t)}^{z_\gamma(t_\Sigma)} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'), z')} dz'$$

(pour la fonction $m_\gamma^{(1)}(z)$, voir (3.28)). Donc, de (3.40) on déduit que

$$\int_{z_\gamma(t)}^{z_\gamma(t_\Sigma)} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'), z')} dz' \leq \frac{2}{\sqrt{c_1 c_3}} \sqrt{z_\gamma(t_\Sigma) - z_\gamma(t)},$$

ce qui implique que, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut choisir

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2 c_1 c_3}{4},$$

de sorte que la première inégalité de (3.29) sera vérifiée.

La deuxième inégalité de (3.29) se démontre de manière analogue.

Le lemme est démontré.

Corollaire.3.1. *On pose*

$$z_1^{(\gamma)} = z_\Sigma(\gamma) \quad si \quad \Sigma \cap \gamma \neq \emptyset, \qquad z_1^{(\gamma)} = 1 \quad si \quad \gamma \subset \overline{\Omega_1},$$

$$z_2^{(\gamma)} = z_\Sigma(\gamma) \quad si \quad \Sigma \cap \gamma \neq \emptyset, \qquad z_2^{(\gamma)} = 1 \quad si \quad \gamma \subset \overline{\Omega_2}.$$

Alors, quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\int_{z_1^{(\gamma)}-\delta}^{z_1^{(\gamma)}} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'), z')}\, dz' \leq \varepsilon, \qquad \int_{z_2^{(\gamma)}}^{z_2^{(\gamma)}-\delta} \frac{1}{u(m_\gamma^{(2)}(z'), z')}\, dz' \leq \varepsilon. \tag{3.41}$$

Démonstration. Le corollaire résulte immédiatement du lemme et des hypothèses sur $u(m, z)$. $\square$

3.3 Transformation de l'équation

Les caractéristiques γ étant définies, on peut écrire l'équation (3.22) comme la famille d'équations sur $\gamma \in \Gamma$

$$\frac{d}{dt}\sigma(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) = \tag{3.42}$$

$$= -\sigma(m_\gamma(t), z_\gamma(t))\big(m_\gamma(t)\partial_m h_{gl}(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) + \partial_z u(m_\gamma(t), z_\gamma(t))\big) +$$

$$+\frac{m_\gamma(t)}{2}\int_0^{m_\gamma(t)} \beta(m_\gamma(t) - m', m')\sigma(m', z_\gamma(t))\sigma(m_\gamma(t) - m', z_\gamma(t))dm' +$$

$$-m_\gamma(t)\int_0^{\infty} \beta(m_\gamma(t), m')\sigma(m_\gamma(t), z_\gamma(t))\sigma(m', z_\gamma(t))dm';$$

ici, pour ne pas alourdir l'écriture, on a écrit

$$\partial_m h_{gl}(m_\gamma(t), z_\gamma(t)), \qquad \partial_z u(m_\gamma(t), z_\gamma(t))$$

au lieu de

$$\partial_m h_{gl}(m,z)\big|_{(m,z)=(m_\gamma(t),z_\gamma(t))}, \qquad \partial_z u(m,z)\big|_{(m,z)=(m_\gamma(t),z_\gamma(t))}.$$

Si on introduit les opérateurs $K[m,z;\sigma,\sigma]$ et $L[m,z;\sigma]$ par

$$K[m,z;\sigma,\sigma] = \int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m-m',z)\sigma(m',z)dm', \tag{3.43}$$

$$L[m,z;\sigma] = \int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m',z)dm', \tag{3.44}$$

on peut écrire l'équation (3.42) sur γ dans la forme

$$\frac{d}{dt}\sigma(m_\gamma(t),z_\gamma(t)) = \tag{3.45}$$

$$= -\sigma(m_\gamma(t),z_\gamma(t))\big(m_\gamma(t)\partial_m h_{gl}(m_\gamma(t),z_\gamma(t)) + \partial_z u(m_\gamma(t),z_\gamma(t))\big) +$$
$$+ m_\gamma(t)\Big(\frac{1}{2}K[m_\gamma(t),z_\gamma(t);\sigma,\sigma] - \sigma(m_\gamma(t),z_\gamma(t))L[m_\gamma(t),z_\gamma(t);\sigma]\Big).$$

Si on considère l'équation (3.45) séparément sur $\gamma^{(1)} = \gamma \cap \overline{\Omega_1}$ et sur $\gamma^{(2)} = \gamma \cap \overline{\Omega_2}$, on peut même transformer (3.45) dans une forme relative à la variable z. On rappelle que sur $\gamma = \gamma^{(1)} \cup \gamma^{(2)}$ on a

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{d\sigma}{dz}u(m_\gamma(t),z_\gamma(t)). \tag{3.46}$$

Considérons d'abord l'équation sur $\gamma^{(1)}$ et utilisons la fonction $m_\gamma^{(1)}(z)$ (voir (3.28)). Si on introduit les notations $\sigma(\gamma;z)$, $h_{gl}(\gamma;z)$, $u(\gamma;z)$ par

$$\sigma(\gamma;z) = \sigma(m_\gamma^{(1)}(z);z), \quad h_{gl}(\gamma;z) = h_{gl}(m_\gamma^{(1)}(z);z), \quad u(\gamma;z) = u(m_\gamma^{(1)}(z);z), \tag{3.47}$$

compte tenu de la relation (3.46), on peut écrire l'équation (3.45) dans la forme

$$\frac{d\sigma(\gamma;z)}{dz} = -\frac{\sigma(\gamma;z)}{u(\gamma;z)}\big(m_\gamma^{(1)}(z)\partial_m h_{gl}(\gamma;z) + \partial_z u(\gamma;z)\big) + \tag{3.48}$$

$$+\frac{m_\gamma^{(1)}(z)}{u(\gamma;z)}\big(\frac{1}{2}K[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma,\sigma]-\sigma(\gamma;z)L[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma]\big).$$

L'équation (3.48) doit être envisagée sur l'intervalle $[z_0^{(\gamma)},z_1^{(\gamma)}]$ et avec la condition initiale

$$\sigma(\gamma;z_0^{(\gamma)})=\overline{\sigma}_0(m_\gamma^{(1)}(z_0^{(\gamma)}),z_0^{(\gamma)}), \tag{3.49}$$

où $z_0^{(\gamma)}$ (resp. $z_1^{(\gamma)}$) est la valeur la plus petite (resp. grande) de z sur $\gamma^{(1)}$. La condition (3.49) n'est autre que la condition (3.4) restreinte sur $S_0\cup S_a$ et exprimée par rapport à $\gamma^{(1)}\in\Gamma^{(1)}$.

Sur $\gamma^{(2)}$, en utilisant la fonction $m_\gamma^{(2)}(z)$ et les notations $\sigma(\gamma;z)$, $h_{gl}(\gamma;z)$, $u(\gamma;z)$ tout analogues (avec $m_\gamma^{(2)}(z)$ au lieu de $m_\gamma^{(1)}(z)$ dans (3.47)), compte tenu de (3.46), l'équation (3.45), de manière tout analogue à (3.48), peut être écrite dans la forme

$$\frac{d\sigma(\gamma;z)}{dz}=-\frac{\sigma(\gamma;z)}{u(\gamma;z)}\big(m_\gamma^{(2)}(z)\partial_m h_{gl}(\gamma;z)+\partial_z u(\gamma;z)\big)+ \tag{3.50}$$

$$+\frac{m_\gamma^{(2)}(z)}{u(\gamma;z)}\big(\frac{1}{2}K[m_\gamma^{(2)}(z),z;\sigma,\sigma]-\sigma(\gamma;z)L[m_\gamma^{(2)}(z),z;\sigma]\big).$$

L'équation (3.50) doit être considérée sur l'intervalle $[0,z_2^{(\gamma)}]$, où $z_2^{(\gamma)}$ est la valeur la plus grande de z sur $\gamma^{(2)}$. Si $\gamma^{(2)}\cap\Sigma=\emptyset$, alors $z_2^{(\gamma)}=1$; si $\gamma^{(2)}\cap\Sigma\neq\emptyset$, alors $z_2^{(\gamma)}=z_\Sigma(\gamma)$. La condition (3.4) se traduit en

$$\sigma(\gamma;z_2^{(\gamma)})=\sigma(\gamma;1)=\overline{\sigma}_0(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}),z_2^{(\gamma)}) \qquad \text{si} \ \ (m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}),z_2^{(\gamma)})\in S_1. \tag{3.51}$$

D'autre part, si $(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}),z_2^{(\gamma)})\in\Sigma$, alors la valeur de $\sigma(\gamma;z_2^{(\gamma)})$ doit être égale à la valeur au point $z=z_2^{(\gamma)}=z_1^{(\gamma)}$ de la fonction $\sigma(\gamma;z)$ qui satisfait à (3.48).

Il est utile de rappeler que dans Ω_1 on a $u(m,z)>0$ et dans Ω_2 on a $u(m,z)<0$. Donc, même si formellement (3.50) ne diffère de (3.48) que par la présence de $m_\gamma^{(2)}(z)$ au lieu de $m_\gamma^{(1)}(z)$, les signes des facteurs $\frac{\sigma(\gamma;z)}{u(\gamma;z)}$ et $\frac{m_\gamma^{(1)}(z)}{u(\gamma;z)}$ (respectivement $\frac{m_\gamma^{(2)}(z)}{u(\gamma;z)}$) dans leur second membre sont opposés l'un à l'autre.

3.4 Résolution de l'équation dans Ω_1

Pour résoudre l'équation (3.1) (ou (3.48)) avec les conditions (3.4), nous la résolvons d'abord dans Ω_1, en supposant que dans Ω_2 la fonction σ est égale à une fonction donnée $\overline{\sigma}_2$ et puis on va résoudre l'équation dans Ω_2 avec la fonction $\sigma = \sigma_1$ dans Ω_1, σ_1 étant la solution obtenue dans l'étape précédente. On cherchera ensuite un point fixe de l'opérateur qui, à $\overline{\sigma}_2$, associe la solution σ_2 de la seconde étape.

Pour construire la solution $\sigma = \sigma_1$ dans Ω_1 avec la donnée $\overline{\sigma}_2$ dans Ω_2, on suppose qu'une fonction $\overline{\sigma}_2(m,z)$ est donnée dans Ω_2 et vérifie les conditions

$$0 \le \inf_{(m,z)\in\Omega_2} \overline{\sigma}_2(m,z) \le \sup_{(m,z)\in\Omega_2} \overline{\sigma}_2(m,z) < \infty. \tag{3.52}$$

$$\overline{\sigma}_2(m,z) = 0 \quad \text{pour } m \ge \overline{m}_B, \tag{3.53}$$

où

$$\overline{m}_B = \sup\{m_\gamma^{(2)}(0) \,|\, m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}) \le \overline{m}_A, \;\; \gamma^{(2)} \in \Gamma^{(2)}\}. \tag{3.54}$$

Pour préciser les conditions sur l'existence et l'unicité de la solution σ dans Ω_1 avec $\overline{\sigma}_2$ dans Ω_2, on pose

$$C_h = \sup_{(m,z)\in\Omega} |m\partial_m h_{gl}(m,z) + \partial_z u(m,z)|, \tag{3.55}$$

$$C_\beta = \sup_{m,m'\in\mathbb{R}_+} m\beta(m,m'). \tag{3.56}$$

En vertu du lemme 3.3 on peut choisir un $\delta_1 > 0$ tel que

$$\int_{z_\Sigma(\gamma)-\delta_1}^{z_\Sigma(\gamma)} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'),z')}\, dz' \le \tag{3.57}$$

$$\leq \frac{1}{4\max(C_h + C_\beta \|\overline{\sigma}_2\|_{L^\infty(\Omega_2)}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-), \frac{3C_\beta}{2}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a))},$$

(pour m_Σ^-, m_Σ^+ voir (3.20)). Posons encore

$$M_1 = \sup_{(m,z)\in\Omega_1^{(\delta_1)}} \frac{1}{u(m,z)}, \qquad \Omega_1^{(\delta_1)} = \bigcup_{\gamma^{(1)}\in\Gamma^{(1)}} \{(m,z) \in \gamma^{(1)} \mid \; z \leq z_\Sigma(\gamma) - \delta_1 \}. \tag{3.58}$$

Proposition 3.1. *On suppose que $\overline{\sigma}_2$ vérifie la condition* (3.52) *et que*

$$\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)} < \frac{1}{2(e^{c_1} + \frac{c_2}{c_1}(e^{c_1} - 1))}, \tag{3.59}$$

où

$$c_1 = 2(C_h + C_\beta \|\overline{\sigma}_2\|_{L^\infty(\Omega_2)}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-))M_1, \quad c_2 = 3C_\beta(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a)M_1. \tag{3.60}$$

Alors il existe une fonction $\sigma(m,z) = \sigma_1(m,z)$ qui vérifie dans Ω_1 l'équation (3.1) *dans laquelle on substitue $\overline{\sigma}_2(m,z)$ à la place de $\sigma(m,z)$ pour $(m,z) \in \Omega_2$ et la condition* (3.4) *(restreinte à $S_0 \cup S_a$) ; cette solution est unique dans la classe $L^\infty(\Omega_1)$.*

Démonstration. Pour construire la solution σ dans Ω_1, on construit d'abord une approximation successive $\{\sigma^{[n]}\}_{n\in\mathbb{N}}$, en utilisant la structure de l'équation (3.48) (et de la condition (3.49)). On pose

$$\sigma^{[0]}(\gamma; z) = \overline{\sigma}_0(m_\gamma^{(1)}(z_0^{(\gamma)}), z_0^{(\gamma)}) \tag{3.61}$$

et, si $\sigma^{[n]}$ est bien définie, on pose

$$\sigma^{[n+1]}(\gamma; z) = \overline{\sigma}_0(m_\gamma^{(1)}(z_0^{(\gamma)}), z_0^{(\gamma)}) + R_1(\sigma^{[n]})(\gamma; z), \tag{3.62}$$

où $R_1(\cdot)$ est l'opérateur intégral défini par

$$R_1(\sigma)(\gamma;z) = -\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\sigma(\gamma;z')}{u(\gamma;z')}(m_\gamma^{(1)}(z')\partial_m h_{gl}(\gamma;z') + \partial_z u(\gamma;z'))dz' + \tag{3.63}$$

$$+\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{m_\gamma^{(1)}(z')}{u(\gamma;z')}\Big(\frac{1}{2}K[m_\gamma^{(1)}(z'),z';\sigma,\sigma] - \sigma(\gamma;z')L[m_\gamma^{(1)}(z'),z';\sigma]\Big)dz'.$$

Lemme 3.4. *Quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $\sigma^{[n]}$ est bien définie et on a*

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty(\overline{m}_a,m_\Sigma(z))} \le \frac{2\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)}e^{c_1 z}}{1-2\frac{c_2}{c_1}\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)}(e^{c_1 z}-1)} \qquad \textit{pour } 0 \le z \le 1. \tag{3.64}$$

Démonstration du lemme. On déduit de (3.62) (voir aussi (3.63)) que

$$|\sigma^{[n+1]}(\gamma;z)| \le \overline{\sigma}_0(m_\gamma^{(1)}(z_0^{(\gamma)}),z_0^{(\gamma)}) + \tag{3.65}$$

$$+\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{|\sigma^{[n]}(\gamma;z')|}{u(\gamma;z')}|m_\gamma^{(1)}(z')\partial_m h_{gl}(\gamma;z') + \partial_z u(\gamma;z')|dz' +$$

$$+\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{m_\gamma^{(1)}(z')}{u(\gamma;z')}\Big(\frac{1}{2}|K[m_\gamma^{(1)}(z'),z';\sigma^{[n]},\sigma^{[n]}]| + |\sigma^{[n]}(\gamma;z')L[m_\gamma^{(1)}(z'),z';\sigma^{[n]}]|\Big)dz'.$$

En écrivant $\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty}$ et $\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}$ au lieu de $\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty(\overline{m}_a,m_\Sigma(z))}$ et $\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)}$, on déduit de (3.65) (voir aussi (3.55), (3.56)) que

$$|\sigma^{[n+1]}(\gamma;z)| \le \overline{\sigma}_0(m_\gamma^{(1)}(z_0^{(\gamma)}),z_0^{(\gamma)}) + C_h\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{|\sigma^{[n]}(m_\gamma^{(1)},z')|}{u(m_\gamma^{(1)};z')}dz' + \tag{3.66}$$

$$+\frac{C_\beta}{2}\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)};z')}\int_0^m |\sigma^{[n]}(m_\gamma^{(1)}-m',z')\sigma^{[n]}(m',z')|dm'dz' +$$

$$+C_\beta\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)};z')}\int_0^{m_\Sigma} |\sigma^{[n]}(m_\gamma^{(1)},z')\sigma^{[n]}(m',z')|dm'dz' +$$

$$+C_\beta \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{1}{u(\gamma;z')} \int_{m_\Sigma}^{\infty} |\sigma^{[n]}(m_\gamma^{(1)},z')\sigma^{[n]}(m',z')|dm'dz',$$

comme $\sigma(m,z)=\overline{\sigma}_2$ pour $(m,z)\in\Omega_2$, alors

$$|\sigma^{[n+1]}(\gamma;z)| \leq \|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty} + C_h \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}}{u(\gamma;z')}dz' + \tag{3.67}$$

$$+\frac{C_\beta}{2}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a)\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}^2}{u(\gamma;z')}dz' + C_\beta(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a)\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}^2}{u(\gamma;z')}dz' +$$

$$+C_\beta(\overline{m}_B - m_\Sigma^-)\|\overline{\sigma}_2\|_{L^\infty(\Omega_2)}\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}}{u(\gamma;z')}dz',$$

d'où

$$|\sigma^{[n+1]}(\gamma;z)| \leq \|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty} + \tag{3.68}$$

$$+(C_h + C_\beta\|\overline{\sigma}_2\|_{L^\infty(\Omega_2)}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-))\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}}{u(\gamma;z')}dz' +$$

$$+\frac{3C_\beta}{2}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a)\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}^2}{u(\gamma;z')}dz'.$$

Donc, en vertu de (3.57), (3.58) et (3.60) on a

$$|\sigma^{[n+1]}(\gamma;z)| \leq \|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty} + \tag{3.69}$$

$$+\frac{c_1}{2}\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}dz' + \frac{1}{4}\sup_{z_0^{(\gamma)}\leq z'\leq z}\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty} +$$

$$+\frac{c_2}{2}\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}^2dz' + \frac{1}{4}\sup_{z_0^{(\gamma)}\leq z'\leq z}\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}^2,$$

où c_1 et c_2 sont les constantes définies dans (3.60). Comme (3.68) est valable pour tout $\gamma^{(1)}\in\Gamma^{(1)}$, en définissant de manière naturelle la fonction $\sigma^{[n+1]}(m,z)$ sur Ω_1 et les normes $\|\sigma^{[n+1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty(\overline{m}_a,m_\Sigma(z))}$ (pour $m_\Sigma(z)$ voir (3.19)), on déduit de (3.69) que

$$\|\sigma^{[n+1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq \|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty} + \tag{3.70}$$

$$+\frac{c_1}{2}\int_0^z \|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}dz' + \frac{1}{4}\sup_{z_0^{(\gamma)}\le z'\le z}\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}+$$

$$+\frac{c_2}{2}\int_0^z \|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|^2_{L^\infty}dz' + \frac{1}{4}\sup_{z_0^{(\gamma)}\le z'\le z}\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|^2_{L^\infty}.$$

On considère la fonction

$$\overline{X}(z) = \frac{2\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}e^{c_1 z}}{1-2\frac{c_2}{c_1}\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}(e^{c_1 z}-1)}, \qquad 0\le z\le 1. \tag{3.71}$$

On constate que $\overline{X}(z)$ vérifie les relations

$$\frac{d}{dz}\overline{X}(z) = c_1\overline{X}(z) + c_2\overline{X}^2(z), \qquad \overline{X}(0) = 2\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}$$

et donc

$$\overline{X}(z) = 2\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty} + c_1\int_0^z \overline{X}(z')dz' + c_2\int_0^z (\overline{X}(z'))^2 dz'. \tag{3.72}$$

D'après (3.59) et (3.71) on a également

$$\overline{X}(1)\le 1.$$

On va montrer que, quelque soit $n\in\mathbb{N}$, la fonction $\sigma^{[n]}$ vérifie l'inégalité

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty}\le \overline{X}(z). \tag{3.73}$$

En effet, pour $n=0$, l'inégalité (3.73) résulte immédiatement de la définition (3.61). Supposons maintenant que $\sigma^{[n]}$ vérifie (3.73). En substituant (3.73) dans (3.70), on a

$$\|\sigma^{[n+1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty}\le \|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}+\frac{c_1}{2}\int_0^z \overline{X}(z')dz'+\frac{c_2}{2}\int_0^z \overline{X}^2(z')dz'+\frac{1}{4}\overline{X}(z)+\frac{1}{4}\overline{X}^2(z),$$

compte tenu de la relation $\overline{X}(z)\le\overline{X}(1)\le 1$, on a

$$\|\sigma^{[n+1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty}\le \|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}+\frac{c_1}{2}\int_0^z \overline{X}(z')dz'+\frac{c_2}{2}\int_0^z \overline{X}^2(z')dz'+\frac{1}{2}\overline{X}(z).$$

Cette inégalité et l'égalité (3.72) entraînent

$$\|\sigma^{[n+1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq \overline{X}(z) \quad \text{pour } z \in [0,1],$$

ce qui démontre (3.73) et donc (3.64). Le lemme est démontré.

Continuation de la démonstration de la proposition 3.1. En faisant la différence entre la $n+m$-ième approximation $\sigma^{[n+m]}$ et la n-ième approximation $\sigma^{[n]}$, des définitions (3.62) et (3.63) on obtient

$$\sigma^{[n+m]}(\gamma;z) - \sigma^{[n]}(\gamma;z) = \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{1}{u(\gamma;z')} D(z')dz', \tag{3.74}$$

où

$$\begin{gathered} D(z) = -(\sigma^{[n+m-1]} - \sigma^{[n-1]})(m_\gamma^{(1)}(z)\partial_m h_{gl}(\gamma;z) + \partial_z u(\gamma;z)) + \\ +\frac{m_\gamma^{(1)}(z)}{2}\big(K[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma^{[n+m-1]},\sigma^{[n+m-1]}] - K[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma^{[n-1]},\sigma^{[n-1]}]\big) + \\ -m_\gamma^{(1)}(z)\big(\sigma^{[n+m-1]}(\gamma;z)L[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma^{[n+m-1]}] - \sigma^{[n-1]}(\gamma;z)L[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma^{[n-1]}]\big). \end{gathered}$$

D'après les définitions (3.43), (3.44) et l'inégalité (3.64) ainsi que l'hypothèse sur $\overline{\sigma}_2$, il existe deux constantes C_0 et C_1 telles que

$$|D(z)| \leq C_0, \tag{3.75}$$

$$|D(z)| \leq C_1\|\sigma^{[n+m-1]}(\cdot,z) - \sigma^{[n-1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty}. \tag{3.76}$$

Soit ε un nombre réel strictement positif. D'après le lemme 3.3 il existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\int_{z_\Sigma(\gamma)-\delta(\varepsilon)}^{z_\Sigma(\gamma)} \frac{1}{u(\gamma;z')}dz' = \frac{\varepsilon}{2eC_0} \qquad \forall \gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}. \tag{3.77}$$

On pose

$$L_1(\varepsilon) = \sup_{\gamma^{(1)}\in\Gamma^{(1)}} \{ \frac{1}{u(\gamma;z)} \,|\, (m,z) \in \gamma^{(1)},\ z \leq z_\Sigma(\gamma) - \delta(\varepsilon) \}. \tag{3.78}$$

Des relations (3.74)-(3.78) on déduit que

$$|\sigma^{[n+m]}(\gamma;z)-\sigma^{[n]}(\gamma;z)| \leq L_1(\varepsilon)C_1\int_0^z \|\sigma^{[n+m-1]}(\cdot,z')-\sigma^{[n-1]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}dz'+\frac{\varepsilon}{2e},$$

d'où

$$\|\sigma^{[n+m]}(\cdot,z)-\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty([\overline{m}_a,m_\Sigma(z)])} \leq$$
$$\leq L_1(\varepsilon)C_1\int_0^z \|\sigma^{[n+m-1]}(\cdot,z')-\sigma^{[n-1]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}dz'+\frac{\varepsilon}{2e}.$$

En répétant une procédure analogue, on arrive à l'inégalité

$$\|\sigma^{[n+m]}(\cdot,z)-\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq (L_1(\varepsilon)C_1)^n\frac{z^n}{n!}\|\sigma^{[m]}-\sigma^{[0]}\|_{L^\infty(\Omega_1)}+\frac{\varepsilon}{2e}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}. \tag{3.79}$$

Comme, en vertu du lemme 3.4, il existe un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$(L_1(\varepsilon)C_1)^n\frac{z^n}{n!}\|\sigma^{[m]}-\sigma^{[0]}\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq n_\varepsilon,$$

on déduit de (3.79) que

$$\|\sigma^{[n+m]}(\cdot,z)-\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_\varepsilon, \quad \forall m \geq 1. \tag{3.80}$$

C'est-à-dire, $\{\sigma^{[n]}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans la topologie de $L^\infty(\Omega_1)$ et donc, quand n tend vers l'infini, $\sigma^{[n]}$ converge vers une fonction $\sigma = \sigma_1$ dans $L^\infty(\Omega_1)$.

Il n'est pas difficile à démontrer que la limite $\sigma = \sigma_1$ satisfait à l'équation (3.1) dans laquelle on substitue $\overline{\sigma}_2(m,z)$ à la place de $\sigma(m,z)$ pour $(m,z) \in \Omega_2$ et à la condition (3.4) et que la solution est unique. $\square$

3.5 Résolution de l'équation dans Ω_2

Maintenant on se propose de résoudre l'équation (3.1) dans Ω_2, en supposant que dans Ω_1 la fonction σ est égale à une fonction donnée $\overline{\sigma}_1$ (plus tard on substituera à $\overline{\sigma}_1$ la solution σ_1 de l'équation (3.1) dans Ω_1 avec $\overline{\sigma}_2$ donnée dans Ω_2). On suppose que

$$\overline{\sigma}_1 \in C(\overline{\Omega_1}), \qquad 0 \leq \inf_{(m,z)\in\Omega_1} \overline{\sigma}_1(m,z) \leq \sup_{(m,z)\in\Omega_1} \overline{\sigma}_1(m,z) < \infty \tag{3.81}$$

et, à l'aide du corollaire du lemme 3.3 on choisit un $\delta_2 > 0$ tel que

$$\int_{z_2^{(\gamma)}-\delta_2}^{z_2^{(\gamma)}} \frac{1}{|u(m_\gamma^{(2)}(z'), z')|}\, dz' \leq \tag{3.82}$$

$$\leq \frac{1}{4\max(C_h + \frac{3C_\beta}{2}\|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\Omega_1)}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a) + \frac{C_\beta}{2}\|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\Omega_1)}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-),\ \frac{3C_\beta}{2}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-))}$$

où m_Σ^-, m_Σ^+, C_h et C_β sont les constantes introduites dans (3.55), (3.56) et (3.20) respectivement. On pose en outre

$$M_2 = \sup_{(m,z)\in\Omega_2^{(\delta_2)}} \frac{1}{|u(\gamma;z)|}, \quad \Omega_2^{(\delta_2)} = \bigcup_{\gamma^{(2)}\in\Gamma^{(2)}} \{(m,z) \in \gamma^{(2)} \,|\, z \leq z_\Sigma(\gamma) - \delta_2\,\}. \tag{3.83}$$

$$T_2 = \sup_{\gamma^{(2)}\in\Gamma^{(2)}} \int_{z_2^{(\gamma)}}^{0} \frac{1}{u(\gamma,z')}dz'; \tag{3.84}$$

on voit aisément que, en vertu de (3.3),(3.11), et (3.16), on a $T_2 < \infty$.

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution $\sigma = \sigma_2$ dans Ω_2, on suppose, de manière analogue à (3.59), que

$$\max\left(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)}, \|\overline{\sigma}_1\big|_\Sigma\|_{L^\infty(\Sigma)}\right) + \frac{C_\beta T_2}{2}\|\overline{\sigma}_1\|^2_{L^\infty(\Omega_1)}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a) \leq \tag{3.85}$$

$$\leq \frac{1}{2(e^{c_3} + \frac{c_4}{c_3}(e^{c_3}-1))},$$

où $\overline{\sigma}_1\big|_\Sigma$ est la restriction de $\overline{\sigma}_1$ à Σ et

$$c_3 = (2C_h + 3C_\beta\|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\Omega_1)}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a) + C_\beta\|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\Omega_1)}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-))M_2, \tag{3.86}$$

$$c_4 = 3C_\beta(\overline{m}_B - m_\Sigma^-)M_2.$$

Proposition 3.2. *On suppose que les conditions* (3.81) *et* (3.85) *sont vérifiées. Alors il existe une fonction $\sigma(m,z) = \sigma_2(m,z)$ qui vérifie dans Ω_2 l'équation* (3.1) *dans laquelle on substitue $\overline{\sigma}_1(m,z)$ à la place de $\sigma(m,z)$ pour $(m,z) \in \Omega_1$ et la condition* (3.4) *sur S_1 et la condition $\sigma(m,z) = \overline{\sigma}_1(m,z)$ pour $(m,z) \in \Sigma$; cette solution σ est unique dans la classe $L^\infty(\Omega_2)$.*

Démonstration. Comme pour la proposition 3.1, on va utiliser la forme (3.50) sur $\gamma^{(2)}$ de l'équation. Or, dans le cas où le point de départ $(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)})$ de $\gamma^{(2)}$ se trouve sur Σ, on pose la condition

$$\sigma(\gamma; z_2^{(\gamma)}) = \overline{\sigma}_1(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) \qquad \text{si } \ (m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) \in \Sigma, \tag{3.87}$$

tandis que, dans le cas où $(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) \in S_1$, on considère la condition (3.51) déjà introduite précédemment.

Toujours comme dans la démonstration de la proposition 3.1, on construit une approximation successive $\{\sigma^{[n]}\}_{n\in\mathbb{N}}$. On choisit $\sigma^{[0]}(\gamma; z)$ égale à la donnée initiale (3.51) ou (3.87), c'est-à-dire

$$\sigma^{[0]}(\gamma; z) = \overline{\sigma}_i(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}), \tag{3.88}$$

où

$$\overline{\sigma}_i = \overline{\sigma}_1 \quad \text{si } \ (m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) \in \Sigma, \qquad \overline{\sigma}_i = \overline{\sigma}_0 \quad \text{si } \ (m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) \in S_1,$$

et, si $\sigma^{[n]}$ est bien définie, on pose (avec la même notation $\overline{\sigma}_i(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)})$ utilisée dans (3.88))

$$\sigma^{[n+1]}(\gamma; z) = \overline{\sigma}_i(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) + R_2(\sigma^{[n]})(\gamma; z), \tag{3.89}$$

où $R_2(\cdot)$ est défini par

$$R_2(\sigma)(\gamma; z) = -\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} \frac{\sigma(\gamma; z')}{u(\gamma; z')}(m_\gamma^{(2)}(z')\partial_m h_{gl}(\gamma; z') + \partial_z u(\gamma; z'))dz' + \tag{3.90}$$

$$+\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z}\frac{m_\gamma^{(2)}(z')}{u(\gamma;z')}\Big(\frac{1}{2}K[m_\gamma^{(2)}(z'),z';\sigma,\sigma]-\sigma(\gamma;z')L[m_\gamma^{(2)}(z'),z';\sigma]\Big)dz'.$$

Lemme 3.5. *Quelque soit $n\in\mathbb{N}$, $\sigma^{[n]}$ est bien définie et on a*

$$\sigma^{[n]}(m,z)=0 \qquad si\ \ m>\overline{m}_B, \tag{3.91}$$

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty(m_\Sigma(z),\overline{m}_B)}\leq\frac{2A_{0,1}e^{c_3(1-z)}}{1-2\frac{c_4}{c_3}A_{0,1}(e^{c_3(1-z)}-1)} \qquad pour\ \ 0\leq z\leq 1, \tag{3.92}$$

avec

$$A_{0,1}=\max\big(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)},\|\overline{\sigma}_1\big|_\Sigma\|_{L^\infty(\Sigma)}\big)+\frac{T_2C_\beta}{2}\|\overline{\sigma}_1\|^2_{L^\infty(\Omega_1)}(m_\Sigma^+-\overline{m}_a).$$

Démonstration du lemme. Des conditions (3.9), (2.9), de la définition de $\overline{m}_B$ (voir (3.53)) et de la définition de $\sigma^{[n]}$ on déduit immédiatement que $\sigma^{[n]}(m,z)=0$ pour $m>\overline{m}_B$.

De manière analogue à la déduction de (3.68), en écrivant $\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty}$ au lieu de $\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty(m_\Sigma(z),\overline{m}_B)}$, on déduit de (3.55), (3.56), (3.89) et (3.90), que

$$|\sigma^{[n+1]}(\gamma;z)|\leq\max\big(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)},\|\overline{\sigma}_1\big|_\Sigma\|_{L^\infty(\Sigma)}\big)+C_h\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z}\frac{|\sigma^{[n]}(m_\gamma^{(2)},z')|}{u(m_\gamma^{(2)},z')}dz'+$$

$$+\frac{C_\beta}{2}\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z}\frac{1}{u(m_\gamma^{(2)},z')}\int_0^{m_\Sigma(z)}|\sigma^{[n]}(m_\gamma^{(2)}-m',z')\sigma^{[n]}(m',z')|dm'dz'+$$

$$+\frac{C_\beta}{2}\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z}\frac{1}{u(m_\gamma^{(2)},z')}\int_{m_\Sigma(z)}^{m}|\sigma^{[n]}(m_\gamma^{(2)}-m',z')\sigma^{[n]}(m',z')|dm'dz'+$$

$$+C_\beta\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z}\frac{1}{u(m_\gamma^{(2)},z')}\int_0^{m_\Sigma(z)}|\sigma^{[n]}(m_\gamma^{(2)},z')\sigma^{[n]}(m',z')|dm'dz'+$$

$$+C_\beta \int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} \frac{1}{u(m_\gamma^{(2)}, z')} \int_{m_\Sigma(z)}^{\infty} |\sigma^{[n]}(m_\gamma^{(2)}, z')\sigma^{[n]}(m', z')|dm'dz',$$

alors

$$\begin{gathered}
|\sigma^{[n+1]}(\gamma; z)| \leq \max\left(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)}, \|\overline{\sigma}_1\big|_\Sigma\|_{L^\infty(\Sigma)}\right) + \\
+\frac{C_\beta}{2}\|\overline{\sigma}_1\|^2_{L^\infty(\Omega_1)}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a)\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} \frac{1}{u(\gamma; z')}dz' + \\
+(C_h + \frac{3C_\beta}{2}\|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\Omega_1)}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a) + \frac{C_\beta}{2}\|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\Omega_1)}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-))\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot, z')\|_{L^\infty}}{u(\gamma; z')}dz' + \\
+\frac{3C_\beta}{2}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-)\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot, z')\|^2_{L^\infty}}{u(\gamma; z')}dz'.
\end{gathered} \tag{3.93}$$

Or, en décomposant l'intégrale $\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z}$ en

$$\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} = \int_{z_2^{(\gamma)}}^{\max(z_2^{(\gamma)} - \delta_2,\, z)} + \int_{\max(z_2^{(\gamma)} - \delta_2,\, z)}^{z},$$

et en utilisant (3.82), (3.83) et (3.86), de manière analogue à l'obtention de (3.70) on déduit de (3.93) que

$$\begin{gathered}
\|\sigma^{[n+1]}(\gamma; z)\|_{L^\infty} \leq A_{0,1} + \\
+\frac{c_3}{2}\int_z^1 \|\sigma^{[n]}(\cdot, z')\|_{L^\infty}dz' + \frac{1}{4}\sup_{z \leq z' \leq 1}\|\sigma^{[n]}(\cdot, z')\|_{L^\infty} + \\
+\frac{c_4}{2}\int_z^1 \|\sigma^{[n]}(\cdot, z')\|^2_{L^\infty}dz' + \frac{1}{4}\sup_{z \leq z' \leq 1}\|\sigma^{[n]}(\cdot, z')\|^2_{L^\infty}.
\end{gathered} \tag{3.94}$$

Ayant obtenu une inégalité similaire à (3.70), on peut procéder de la même manière, en définissant

$$\overline{Y}(z) = \frac{2A_{0,1}e^{c_3(1-z)}}{1 - 2\frac{c_4}{c_3}A_{0,1}(e^{c_3(1-z)} - 1)} \qquad \text{pour } \ 0 < z < 1,$$

et en démontrant

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot, z)\|_{L^\infty} \leq \overline{Y}(z),$$

ce qui nous amène à l'énoncé du lemme.

CONTINUATION DE LA DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.2. Une fois construite la suite de solutions approchées $\sigma^{[n]}$ vérifiant les relations (3.91), (3.92), on peut procéder de manière tout analogue à la démonstration de la proposition 3.1, en faisant la différence $\sigma^{[n+m]}(\gamma; z) - \sigma^{[n]}(\gamma; z)$ (pour $\sigma^{[n]}$ construites dans le lemme 3.5) comme dans (3.74) et en l'estimant comme dans (3.75)-(3.80), de sorte que la démonstration de la proposition 3.2 sera complétée. $\square$

3.6 Estimations de σ_1 sur Ω_1 et de σ_2 sur Ω_2

Même si la démonstration des propositions 3.1 et 3.2 contient implicitement (voir les lemmes 3.4 et 3.5) une majoration de la norme de σ_1 dans $L^\infty(\Omega_1)$ et de celle de σ_2 dans $L^\infty(\Omega_2)$, pour nos ultérieurs raisonnements il nous convient d'améliorer ces estimations. On commençe par la démonstration de la positivité de σ_1.

LEMME 3.6. *Soit $\sigma = \sigma_1$ la solution de l'équation* (3.1) *dans Ω_1, obtenue dans la proposition 3.1 (sous les conditions de la proposition 3.1).*
Alors on a

$$\sigma_1(m, z) \geq 0 \qquad \forall (m, z) \in \Omega_1. \tag{3.95}$$

En outre, σ_1 est continue dans Ω_1.

DÉMONSTRATION. On rappelle que $\sigma = \sigma_1$ satisfait, sur chaque $\gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}$, à l'équation (3.48) et que, en vertu de la définition (3.43) de K, on a

$$\frac{m_\gamma^{(1)}(z)}{u(\gamma; z)} K[m_\gamma^{(1)}(z), z; \sigma, \sigma] \geq 0.$$

Donc la condition $\sigma(\gamma; z_0^{(\gamma)}) \geq 0$ (voir (3.49), (3.4)) et l'expression du second membre de l'équation (3.48), considérée comme équation différentielle ordinaire, impliquent que $\sigma(\gamma; z) \geq 0$ là où $\sigma(\gamma; z)$ est bien définie.

La continuité de σ_1 résulte de la continuité de $\overline{\sigma}_0$ sur $S_0 \cup S_a$ et du fait que, sur chaque $\gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}$, σ_1 est la solution de l'équation (3.48), dont les coefficients sont continus. □

A l'aide du lemme 3.3 on choisit un $\vartheta_1 > 0$ tel que

$$\int_{z_\Sigma(\gamma)-\vartheta_1}^{z_\Sigma(\gamma)} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'), z')}\, dz' \leq \frac{1}{4\max(C_h, C_\beta(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a))} \tag{3.96}$$

et on pose

$$\mu_1 = \sup_{(m,z)\in\Omega_1^{(\vartheta_1)}} \frac{1}{u(m,z)}, \qquad \Omega_1^{(\vartheta_1)} = \bigcup_{\gamma^{(1)}\in\Gamma^{(1)}} \{(m,z) \in \gamma^{(1)} \mid\ z \leq z_\Sigma(\gamma) - \vartheta_1\},$$
$$\tag{3.97}$$

$$a_1 = 2C_h\mu_1, \qquad a_2 = 2C_\beta(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a)\mu_1. \tag{3.98}$$

On a le lemme suivant.

Lemme 3.7. *Soit* $\sigma = \sigma_1$ *la solution de l'équation* (3.1) *dans* Ω_1*, obtenue dans la proposition 3.1 (sous les conditions de la proposition 3.1). Alors on a*

$$\sigma_1(m,z) \leq \overline{A}_1 \qquad \forall (m,z) \in \Omega_1, \tag{3.99}$$

où

$$\overline{A}_1 = \frac{2e^{a_1}\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)}}{1 - 2\frac{a_2}{a_1}\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)}(e^{a_1}-1)}. \tag{3.100}$$

Démonstration. On considère de nouveau l'équation (3.48) vérifiée par σ. En vertu de la condition (3.52) et du lemme 3.6 on a

$$\sigma(\gamma; z) L[m_\gamma^{(1)}(z), z; \sigma] \geq 0,$$

ce qui nous permet de déduire de (3.48) que

$$|\sigma(\gamma;z)| \leq \|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty} + C_h \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma(\cdot,z')\|_{L^\infty}}{u(\gamma;z')} dz' + \tag{3.101}$$

$$+ C_\beta (m_\Sigma^+ - \overline{m}_a) \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma(\cdot,z')\|_{L^\infty}^2}{u(\gamma;z')} dz',$$

où on a écrit $\|\sigma(\cdot,z)\|_{L^\infty}$ et $\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}$ au lieu de $\|\sigma(\cdot,z)\|_{L^\infty(\overline{m}_a,m_\Sigma(z))}$ et $\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)}$.

L'inégalité (3.101) étant établie, on peut procéder d'une manière analogue à la démonstration du lemme 3.4 (en particulier, à partir de (3.68)), en y remplaçant c_1 et c_2 par a_1 et a_2 définis dans (3.98) (vois aussi (3.96), (3.97)). De la sorte on aura

$$\|\sigma(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq \frac{2\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)} e^{a_1 z}}{1 - 2\frac{a_2}{a_1}\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)}(e^{a_1 z}-1)} \qquad \text{pour} \quad 0 \leq z \leq 1,$$

d'où le lemme. $\square$

Remarque 3.1. La valeur $\overline{A}_1$ donnée dans (3.100) ne dépend pas $\overline{\sigma}_2$. En effet, a_1 et a_2 ne dépendent pas de $\overline{\sigma}_2$ (voir (3.96)-(3.98)).

Maintenant on considère l'équation (3.1) dans Ω_2 avec $\sigma = \sigma_1$ dans Ω_1, où σ_1 est la solution de l'équation (3.1) dans Ω_1 obtenue dans la proposition 3.1. Pour mieux caractériser la solution $\sigma = \sigma_2$ de ce problème, en désignant par $\overline{\gamma}_b$ la caractéristique qui passe par le point $(m_\Sigma(1),1)$ (pour la notation $m_\Sigma(z)$, voir (3.19)), on divise Ω_2 en deux parties

$$\Omega_{2,1} = \{\, (m,z) \in \Omega_2 \,|\, m_\Sigma(z) < m \leq m_{\overline{\gamma}_b}^{(2)}(z) \,\}, \tag{3.102}$$

$$\Omega_{2,2} = \Omega_2 \backslash \Omega_{2,1} = \{\, (m,z) \in \Omega_2 \,|\, m > m_{\overline{\gamma}_b}^{(2)}(z) \,\}, \tag{3.103}$$

où $m_\gamma^{(2)}(z)$ est la fonction définie dans (3.28).

Lemme 3.8. *Soit $\sigma = \sigma_2$ la solution de l'équation* (3.1) *dans Ω_2, obtenue dans la proposition 3.2 (sous les conditions de la proposition 3.2) avec $\overline{\sigma}_1 = \sigma_1$ dans Ω_1, où σ_1 est la solution de l'équation* (3.1) *dans Ω_1 obtenue dans la proposition 3.1. Alors on a*

$$\sigma_2(m, z) \geq 0 \qquad \forall (m, z) \in \Omega_2. \tag{3.104}$$

En outre, σ_2 est continue dans $\Omega_{2,1}$ et continue dans $\Omega_{2,2}$.

Démonstration. On procède d'une manière analogue à la démonstration du lemme 3.6. On rappelle d'abord que $\sigma = \sigma_2$ satisfait, sur chaque $\gamma^{(2)} \in \Gamma^{(2)}$, à l'équation (3.50) et que, en vertu de la définition de K, on a

$$\frac{m_\gamma^{(2)}(z)}{|u(\gamma; z)|} K[m_\gamma^{(2)}(z), z; \sigma, \sigma] \geq 0.$$

Rappelons que les conditions initiales sur S_1 sont données par (3.51) et elles sont non-négatives par l'hypothèse (3.8), tandis que celles sur Σ sont données par (3.87) et elles sont non-négatives en vertu du lemme 3.6. Par suite l'expression du second membre de l'équation (3.50) implique que $\sigma(\gamma; z) \geq 0$ là où $\sigma(\gamma; z)$ est bien définie.

La continuité de σ_2 résulte de la continuité de $\overline{\sigma}_0$ sur S_1, de celle de σ_1 sur Σ et du fait que, sur chaque $\gamma^{(2)} \in \Gamma^{(2)}$, σ_2 est la solution de l'équation (3.48), dont les coefficients sont continus. $\square$

Analoguement au cas précédent, on choisit un $\vartheta_2 > 0$ tel que

$$\int_{z_\Sigma(\gamma)-\vartheta_2}^{z_\Sigma(\gamma)} \frac{1}{|u(m_\gamma^{(2)}(z'), z')|} \, dz' \leq \tag{3.105}$$

$$\leq \frac{1}{4 \max(C_h + C_\beta \overline{A}_1 (m_\Sigma^+ - \overline{m}_a), C_\beta(\overline{m}_B - m_\Sigma^-))},$$

et on pose

$$\mu_2 = \sup_{(m,z)\in\Omega_2^{(\vartheta_2)}} \frac{1}{|u(m,z)|}, \qquad \Omega_2^{(\vartheta_2)} = \bigcup_{\gamma^{(2)}\in\Gamma^{(2)}} \{(m,z) \in \gamma^{(2)} \mid \ z \leq z_\Sigma(\gamma) - \vartheta_2 \}, \tag{3.106}$$

$$a_3 = 2(C_h + C_\beta \overline{A}_1(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a))\mu_2, \qquad a_4 = 2C_\beta(\overline{m}_B - m_\Sigma^-)\mu_2. \tag{3.107}$$

On a le lemme suivant.

Lemme 3.9. *Soit $\sigma = \sigma_2$ la solution de l'équation* (3.1) *dans Ω_2, obtenue dans la proposition 3.2 (sous les conditions de la proposition 3.2) avec $\overline{\sigma}_1 = \sigma_1$ dans Ω_1, où σ_1 est la solution de l'équation* (3.1) *dans Ω_1 obtenue dans la proposition 3.1. Alors on a*

$$\sigma_2(m,z) \leq \overline{A}_2 \qquad \forall (m,z) \in \Omega_2, \tag{3.108}$$

où

$$\overline{A}_2 = \frac{2e^{a_3}\max(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)}, \overline{A}_1)}{1 - 2\frac{a_4}{a_3}\max(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)}, \overline{A}_1)(e^{a_3}-1)}. \tag{3.109}$$

Démonstration. Comme dans la démonstration du lemme 3.7, on considère l'équation (3.50) vérifiée par σ sur $\gamma^{(2)}$. En vertu des lemmes 3.6 et 3.8 on a $\sigma_1 \geq 0$ et $\sigma_2 \geq 0$, et donc

$$\sigma(\gamma; z) L[m_\gamma^{(2)}(z), z; \sigma] \geq 0.$$

Compte tenu de cette relation, on déduit de (3.50) que

$$|\sigma(\gamma;z)| \leq \max\left(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)}, \|\overline{\sigma}_1\big|_\Sigma\|_{L^\infty(\Sigma)}\right) + C_h \int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} \frac{|\sigma(m_\gamma^{(2)}, z')|}{u(m_\gamma^{(2)}, z')} dz' +$$

$$+ C_\beta \int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} \frac{1}{u(m_\gamma^{(2)}, z')} \int_0^{m_\Sigma} |\sigma(m_\gamma^{(2)}, z')\sigma(m', z')| dm' dz' +$$

$$+C_\beta \int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} \frac{1}{u(m_\gamma^{(2)}, z')} \int_{m_\Sigma}^{\infty} |\sigma(m_\gamma^{(2)}, z')\sigma(m', z')| dm' dz',$$

ce qui implique que

$$|\sigma(\gamma; z)| \leq \max(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}, \|\sigma_1\big|_\Sigma\|_{L^\infty}) + \tag{3.110}$$

$$+(C_h + C_\beta \overline{A}_1(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a)) \int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma(\cdot, z')\|_{L^\infty}}{u(m_\gamma^{(2)}, z')} dz' + C_\beta(\overline{m}_B - m_\Sigma^-) \int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma(\cdot, z')\|_{L^\infty}^2}{u(m_\gamma^{(2)}; z')} dz'.$$

L'inégalité (3.110) étant établie, on peut procéder d'une manière analogue à la démonstration du lemme 3.5 (en particulier, à partir de (3.93)), en y remplaçant c_3 et c_4 par a_3 et a_4 définis dans (3.107). De la sorte, en rappelant la continuité de σ_1 sur chaque $\gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}$, on aura

$$\|\sigma(\cdot, z)\|_{L^\infty} \leq \frac{2e^{a_3(1-z)} \max(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)}, \overline{A}_1)}{1 - 2\frac{a_4}{a_3}(e^{a_3(1-z)} - 1) \max(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)}, \overline{A}_1)} \qquad \text{pour } 0 \leq z \leq 1.$$

A l'aide du lemme 3.7 on en déduit le lemme. □

3.7 Existence de la solution dans Ω

On va maintenant compléter la démonstration du théorème 3.1. On commence par définir l'ensemble

$$B_0 = \left\{\sigma_2 \in L^\infty(\Omega_2), 0 \leq \sigma_2(m, z) \leq \overline{A}_2\right\} \tag{3.111}$$

où $\overline{A}_2$ est la constante définie dans (3.109).

Si $\overline{\sigma}_2 \in B_0$, alors en vertu de la proposition 3.1 et des lemmes 3.6 et 3.7 il existe une unique fonction $\sigma_1(m, z)$ qui vérifie dans Ω_1 l'équation (3.1) dans laquelle on substitue $\overline{\sigma}_2(m, z)$ à la place de $\sigma(m, z)$ pour $(m, z) \in \Omega_2$, la condition (3.4) (restreinte à $S_0 \cup S_a$) et l'inégalité

$$0 \leq \sigma_1(m, z) \leq \overline{A}_1 \qquad \forall (m, z) \in \Omega_1,$$

où $\overline{A}_1$ est la constante définie dans (3.100). Ceci nous permet de définir l'opérateur

$$G_1 : B_0 \to L^\infty(\Omega_1), \tag{3.112}$$

qui, à $\overline{\sigma}_2 \in B_0$, associe la solution $\sigma_1 \in L^\infty(\Omega_1)$ obtenue dans la proposition 3.1 et on a

$$G_1(B_0) \subset \{\, \sigma_1 \in L^\infty(\Omega_1) \,|\, 0 \leq \sigma_1(m,z) \leq \overline{A}_1 \ \forall (m,z) \in \Omega_1 \,\}. \tag{3.113}$$

Maintenant, à l'aide de la proposition 3.2, on peut définir l'opérateur

$$G_2 : G_1(B_0) \to L^\infty(\Omega_2), \tag{3.114}$$

qui, à $\sigma_1 \in G_1(B_0)$, associe la fonction $\sigma_2 \in L^\infty(\Omega_2)$ qui vérifie dans Ω_2 l'équation (3.1) dans laquelle on substitue $\sigma_1(m,z)$ à la place de $\sigma(m,z)$ pour $(m,z) \in \Omega_1$ et la condition (3.4) sur S_1 et la condition $\sigma(m,z) = \sigma_1(m,z)$ pour $(m,z) \in \Sigma$. En outre, en vertu des lemmes 3.8 et 3.9, on a

$$G_2(G_1(B_0)) \subset B_0. \tag{3.115}$$

On pose

$$G = G_2 \circ G_1, \tag{3.116}$$

$$B = \overline{\mathrm{conv}(G(B_0))}, \tag{3.117}$$

où la fermeture $\overline{\cdot}$ est prise par rapport à la topologie induite par la norme

$$\|\varphi\| = \sup_{(m,z)\in\Omega_2} |\varphi(m,z)|,$$

tandis que "conv(A)" désigne l'ensemble convexe le plus petit qui contient A.

Lemme 3.10. *On a*

$$G(B) \subset B, \tag{3.118}$$

et

$$B \text{ est convexe.} \tag{3.119}$$

Démonstration. L'affirmation (3.119) résulte immédiatement de la définition (3.117), tandis que (3.118) se déduit de (3.115) et des définitions (3.116)-(3.117). □

On va démontrer l'équicontinuité de $G(B_0)$ dans $\Omega_{2,2}$ et celle dans $\Omega_{2,1}$.

Lemme 3.11. *Il existe une fonction continue $\widetilde{\varepsilon}(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que*

$$\widetilde{\varepsilon}(r) \to 0 \qquad \text{pour} \;\; r \to 0 \tag{3.120}$$

et que, quelque soit $\sigma_2 \in G(B_0)$ et quelque soit $((m_1, z_1), (m_2, z_2)) \in \Omega_{2,2} \times \Omega_{2,2}$ ou $\in \Omega_{2,1} \times \Omega_{2,1}$, on ait

$$|\sigma_2(m_1, z_1) - \sigma_2(m_2, z_2)| \leq \widetilde{\varepsilon}(|m_1 - m_2| + |z_2 - z_1|). \tag{3.121}$$

Démonstration. Comme la démonstration de (3.121) pour $((m_1, z_1), (m_2, z_2)) \in \Omega_{2,1} \times \Omega_{2,1}$ ne diffère pas beaucoup de celle pour $((m_1, z_1), (m_2, z_2)) \in \Omega_{2,2} \times \Omega_{2,2}$, on examine de manière détaillée le cas de $((m_1, z_1), (m_2, z_2)) \in \Omega_{2,2} \times \Omega_{2,2}$ et nous nous limiterons à des commentaires essentielles pour le cas de $((m_1, z_1), (m_2, z_2)) \in \Omega_{2,1} \times \Omega_{2,1}$.

Considérons deux points (m_1, z_1) et (m_2, z_2) appartenant à $\Omega_{2,2}$ et supposons, sans restreindre la généralité, que $z_1 \leq z_2$. Désignons par γ_1 (resp. γ_2) la caractéristique qui passe par (m_1, z_1) (resp. (m_2, z_2)). On pose en outre

$$m_1^{(z_2)} = m_{\gamma_1}^{(2)}(z_2).$$

En rappelant la définition des caractéristiques γ (voir (3.23)-(3.24)) et les hypothèses sur $u(m,z)$ et $h_{gl}(m,z)$, on voit aisément qu'il existe une fonction $\widetilde{d}_m$ telle que

$$|m_1^{(z_2)} - m_2| = |m_{\gamma_1}^{(2)}(z_2) - m_2| \leq \widetilde{d}_m(|m_1 - m_2| + |z_2 - z_1|). \tag{3.122}$$

En vertu de (3.122), pour démontrer l'existence d'une fonction $\widetilde{\varepsilon}(\cdot)$ vérifiant (3.120) et (3.121), il suffit de montrer l'existence d'une fonction continue $\widetilde{\varepsilon}_z(\cdot)$ telle que

$$\widetilde{\varepsilon}_z(r) \to 0 \qquad \text{pour} \quad r \to 0, \tag{3.123}$$

$$|\sigma_2(\gamma; z_1) - \sigma_2(\gamma; z_2)| \leq \widetilde{\varepsilon}_r(|z_2 - z_1|) \tag{3.124}$$

(ici $\sigma_2(\gamma; z)$ désigne la valeur de $\sigma_2(m,z)$ sur la courbe γ comme dans (3.50)) et l'existence d'une fonction continue $\widetilde{\varepsilon}_m(\cdot)$ telle que

$$\widetilde{\varepsilon}_m(r) \to 0 \qquad \text{pour} \quad r \to 0, \tag{3.125}$$

$$|\sigma_2(m_1, z) - \sigma_2(m_2, z)| \leq \widetilde{\varepsilon}_m(|m_1 - m_2|). \tag{3.126}$$

Or, de l'équation (3.50) on déduit que

$$|\sigma_2(\gamma; z_1) - \sigma_2(\gamma; z_2)| = \int_{z_1}^{z_2} \left|\frac{\Phi(\gamma; z)}{u(\gamma; z)}\right| dz,$$

où $\Phi(\gamma; z)$ est le second membre de (3.50) multiplié par $u(\gamma; z)$. Comme on le voit aisément, les hypothèses sur h_{gl}, u, β implique qu'il existe une constante C_1 telle que

$$|\Phi(\gamma; z)| \leq C_1$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour tout $z \in [0,1]$. Donc, d'après le corollaire du lemme 3.3, il existe une fonction continue $\widetilde{\varepsilon}_z(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ vérifiant (3.123) et (3.124).

Pour montrer l'existence de la fonction $\widetilde{\varepsilon}_m(\cdot)$, on considère un nombre ε strictement positif. Si (m_1, z), $(m_2, z) \in \Omega_{2,2}$, $(m_1, z) \in \gamma_1$, $(m_2, z) \in \gamma_2$, alors il résulte de l'équation (3.50) que

$$\sigma_2(m_1, z) - \sigma_2(m_2, z) = \sigma(\gamma_1; z) - \sigma(\gamma_2; z) = \tag{3.127}$$
$$= \sigma_2(m^{(2)}_{\gamma_1}, 1) - \sigma_2(m^{(2)}_{\gamma_2}, 1) + \int_1^z \Big(\frac{\Phi(\gamma_1; z')}{u(\gamma_1; z')} - \frac{\Phi(\gamma_2; z')}{u(\gamma_2; z')}\Big) dz'.$$

En vertu du corollaire du lemme 3.3 il existe un $\delta_{1,\varepsilon}$ tel que

$$\int_{\max(z, 1-\delta_{1,\varepsilon})}^1 \Big|\frac{\Phi(\gamma_1; z')}{u(\gamma_1; z')} - \frac{\Phi(\gamma_2; z')}{u(\gamma_2; z')}\Big| dz' \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.128}$$

D'autre part, comme les hypothèses sur $u(m, z)$ implique que

$$\sup_{(m,z)\in\Omega_{2,2}, z\leq 1-\delta_{1,\varepsilon}} \frac{1}{|u(m, z)|} < \infty,$$

les hypothèses de la régularité des coefficients qui figurent dans le second membre de (3.50) impliquent que

$$\int_z^{\max(z, 1-\delta_{1,\varepsilon})} \Big|\frac{\Phi(\gamma_1; z')}{u(\gamma_1; z')} - \frac{\Phi(\gamma_2; z')}{u(\gamma_2; z')}\Big| dz' \leq \varphi_{1,\varepsilon}(\mathrm{dist}(\gamma_1, \gamma_2)), \tag{3.129}$$

où $\varphi_{1,\varepsilon}(\cdot)$ est une fonction continue telle que $\varphi_{1,\varepsilon}(r) \to 0$ pour $r \to 0$, tandis que

$$\mathrm{dist}(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{z\in[0,1]} |m^{(2)}_{\gamma_1}(z) - m^{(2)}_{\gamma_2}(z)|. \tag{3.130}$$

On rappelle en outre que, comme le système d'équations (3.23)-(3.24) peut être résolu avec les conditions "initiales" $(m(t_0), z(t_0)) = (m_1, z)$ ou $(m(t_0), z(t_0)) = (m_2, z)$ dans toutes les deux directions de t et les coefficients sont des fonctions lipschitziennes, il existe une fonction continue $\widetilde{\delta}_m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\mathrm{dist}(\gamma_1, \gamma_2) \leq \widetilde{\delta}_m(|m_1 - m_2|) \tag{3.131}$$

et que

$$\widetilde{\delta}_m(r) \to 0 \qquad \text{pour} \;\; r \to 0.$$

Enfin, en vertu de la régularité supposée pour $\overline{\sigma}_0$, il existe une fonction continue φ_0 telle que $\varphi_0(r) \to 0$ pour $r \to 0$ et que

$$|\overline{\sigma}_0(m_1, 1) - \overline{\sigma}_0(m_2, 1)| \leq \varphi_0(|m_1 - m_2|).$$

On a donc

$$|\sigma_2(m^{(2)}_{\gamma_1}, 1) - \sigma_2(m^{(2)}_{\gamma_2}, 1)| \leq \varphi_0(\mathrm{dist}(\gamma_1, \gamma_2)). \tag{3.132}$$

Des relations (3.127)-(3.132) on déduit qu'il existe un $\delta_\varepsilon > 0$ tel que, si

$$|m_1 - m_2| \leq \delta_\varepsilon,$$

alors on ait

$$|\sigma_2(m_1, z) - \sigma_2(m_2, z)| \leq \varepsilon,$$

ce qui implique l'existence d'une fonction continue $\widetilde{\varepsilon}_m(\cdot)$ vérifiant (3.125) et (3.126). □

Corollaire.3.2. *L'ensemble B est compact dans la topologie induite par la norme $\|\varphi\| = \sup_{(m,z)\in\Omega_2} |\varphi(m, z)|$.*

Démonstration. D'après le lemme 3.11, $G(B_0)$ est équicontinu. Donc l'est aussi B. D'autre part, en vertu des lemmes 3.8 et 3.9, B est uniformément borné. Donc d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà l'ensemble B est compact. □

Maintenant on va démontrer que l'opérateur G est continu.

Lemme 3.12. *L'opérateur G est continu de B dans lui même dans la topologie induite par la norme*

$$\|\varphi\| = \sup_{(m,z)\in\Omega_2} |\varphi(m,z)|.$$

Démonstration. On va montrer la continuité de G_1 et celle de G_2, qui impliqueront la continuité de G.

On va d'abord montrer que G_1 est continu. On remarque que, comme les fonctions appartenant à B sont continues à morceaux et celles de $G_1(B)$ sont continues, ici on peut utiliser la norme de L^∞. En effet, si on pose

$$\sigma_1 = G_1(\overline{\sigma}_2), \qquad \sigma_1^* = G_1(\overline{\sigma}_2^*), \qquad \Xi = \sigma_1 - \sigma_1^*, \qquad \Pi = \overline{\sigma}_2 - \overline{\sigma}_2^*, \tag{3.133}$$

on déduit de (3.48) (voir aussi (3.43), (3.44)) que, en désignant $\Xi(\gamma;z) = \sigma_1(\gamma;z) - \sigma_1^*(\gamma;z)$, etc..., on a

$$|\Xi(\gamma;z)| \leq C_h \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{|\Xi(\gamma;z')|}{u(\gamma;z')} dz' + \tag{3.134}$$

$$+C_\beta \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{1}{u(\gamma;z')} \int_0^{m_\gamma(z')} \big(|\sigma_1(m',z')\Xi(m-m',z')| + |\sigma_1^*(m-m',z')\Xi(m',z')|\big) dm' dz' +$$

$$+C_\beta \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\sigma_1(\gamma;z')}{u(\gamma;z')} \Big[\int_0^{m_\Sigma(z')} |\Xi(m',z')| dm' + \int_{m_\Sigma(z')}^{\infty} |\Pi(m',z')| dm' \Big] dz' +$$

$$+C_\beta \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{|\Xi(\gamma;z')|}{u(\gamma;z')} \Big[\int_0^{m_\Sigma(z')} \sigma_1^*(m',z') dm' + \int_{m_\Sigma(z')}^{\infty} \overline{\sigma}_2^*(m',z') dm' \Big] dz',$$

où C_h et C_β sont les constantes définies dans (3.55)-(3.56).

Comme en vertu des lemmes 3.7-3.11 et de la définition de B les valeurs $\sigma_1(m,z)$, $\sigma_1^*(m,z)$, $\overline{\sigma}_2(m,z)$, $\overline{\sigma}_2^*(m,z)$ sont uniformément bornées et $\overline{\sigma}_2(m,z) = \overline{\sigma}_2^*(m,z) = 0$ pour $m \geq \overline{m}_B$, en vertu du corollaire du lemme 3.3

il existe un certain $\delta > 0$ tel que le second membre de (3.134) restreint à l'intégrale sur l'intervalle $[\min(z, z_1^{(\gamma)} - \delta), z]$ est majoré par $\frac{1}{2}\sup_{0\le z'\le z}(\|\Xi(\cdot, z')\|_{L^\infty} + \|\Pi(\cdot, z')\|_{L^\infty})$ et donc, compte tenu que $\frac{1}{u(m,z)}$ avec $z \le z_1^{(\gamma)} - \delta$ est uniformément borné, on déduit de (3.134) que

$$|\Xi(\gamma; z)| \le \frac{1}{2}\sup_{0\le z'\le z}(\|\Xi(\cdot, z')\|_{L^\infty} + \|\Pi(\cdot, z')\|_{L^\infty}) +$$

$$+C\int_{z_0^{(\gamma)}}^{\min(z, z_1^{(\gamma)}-\delta)} \|\Xi(\cdot, z')\|_{L^\infty} dz' + C' \int_{z_0^{(\gamma)}}^{\min(z, z_1^{(\gamma)}-\delta)} \|\Pi(\cdot, z')\|_{L^\infty} dz',$$

où C et C' sont deux constantes. Comme cette inégalité est valable pour tout $\gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}$, on en déduit que

$$y(z) \le \frac{1}{2}y(z) + C\int_0^z y(z')dz' + \big(\frac{1}{2} + C'\big)\|\Pi\|_{L^\infty(\Omega_2)},$$

où

$$y(z) = \sup_{0\le z'\le z} \|\Xi(\cdot, z')\|_{L^\infty}.$$

On en déduit qu'il existe une constante C'' telle que

$$\|\Xi\|_{L^\infty(\Omega_2)} \le C''\|\Pi\|_{L^\infty(\Omega_2)},$$

ce qui prouve la continuité de G_1.

En ce qui concerne la continuité de G_2, on verra qu'elle peut être démontrée d'une manière analogue à celle de G_1. $\square$

Démonstration du théorème 3.1. En vertu des lemmes 3.10-3.12 et leur corollaire, B est convexe et compact, on a $G(B) \subset B$ et l'opérateur G est continu. Par conséquent d'après le théorème de Schauder il existe un élément $\overline{\sigma}_2 \in L^\infty(\Omega_2)$ tel que $G(\overline{\sigma}_2) = \overline{\sigma}_2$, c'est-à-dire $\overline{\sigma}_2 = \sigma_2$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Remarque 3.2. La constante $\overline{A}_0$ mensionnée dans l'énoncé du théorème 3.1 pourra être mieux déterminée. En effet la constante doit vérifier les conditions (3.59) et (3.85), qui peuvent être réécrites par

$$\overline{A}_0 < \frac{1}{2(e^{c_1(\overline{A}_0)} + \frac{c_2}{c_1(\overline{A}_0)}(e^{c_1(\overline{A}_0)} - 1))} = \psi_1(\overline{A}_0), \tag{3.135}$$

$$\max(\overline{A}_0, \overline{A}_1(\overline{A}_0)) + \frac{C_\beta}{2} T_2 \overline{A}_1^2(\overline{A}_0)(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a) \leq \tag{3.136}$$
$$\leq \frac{1}{2(e^{c_3(\overline{A}_0)} + \frac{c_4}{c_3(\overline{A}_0)}(e^{c_3(\overline{A}_0)} - 1))} = \psi_2(\overline{A}_0)$$

où

$$\overline{A}_1(\overline{A}_0) = \frac{2e^{a_1}\overline{A}_0}{1 - 2\frac{a_2}{a_1}\overline{A}_0(e^{a_1} - 1)},$$

$$c_1(\overline{A}_0) = 2(C_h + C_\beta \overline{A}_1(\overline{A}_0)(\overline{m}_B - m_\Sigma^-))M_1$$

$$c_3(\overline{A}_0) = (2C_h + 3C_\beta \overline{A}_1(\overline{A}_0)(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a) + C_\beta \overline{A}_1(\overline{A}_0)(\overline{m}_B - m_\Sigma^-))M_2.$$

Comme $\psi_1(0) > 0$, $\psi_2(0) > 0$, et que $\psi_1(\cdot)$ et $\psi_2(\cdot)$ sont continues, on peut trouver $\overline{A}_0 > 0$ tel que les inégalités (3.135) et (3.136) soient vérifiées.

Conclusion

Lors de ce travail sur le système d'équations qui modélise le mouvement de l'air développé dans [12], [13] et [29], on a étudié l'équation de continuité de l'eau liquide pour une fonction inconnue σ, avec la vitesse des gouttelettes et le tau de condensation sont des fonctions données. Cette considération nous permettent d'étudier l'équation de la chute des gouttelettes dans l'atmosphère dans des conditions caractéristiques. Premièrement dans le cas d'équilibre, et dans un domaine de dimension deux, on a montré l'existence et l'unicité de la solution stationnaire de l'équation, dans le cas de l'absence du mouvement de l'air ce qui correspond à la chute verticale des gouttelettes, et dans le cas de présence d'un vent horizontal constant, et les gouttelettes se déplaçant toujours dans le sens du haut vers le bas. Deuxièment, on a montré l'existence de la solution stationnaire de l'équation dans le cas de la présence d'un vent vertical ascendant avec la croissance des gouttelettes due à la condensation, où la vitesse des gouttelettes légères est dans la direction du bas vers le haut, tandis que celle des gouttelettes lourdes est dans le sens du haut vers le bas, ce qui nous ont permis de comprendre l'aspect de phénomène orage.

Bibliographie

[1] Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H. : Equations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau. *Sci. Techn. Univ. Constantine* - A, vol. 31 (2011), pp. 9-17.

[2] Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H. : Solution globale de l'équation de coagulation de gouttelettes en chute. To appear on *Rend. Sem. Mat. Univ. Poli. Torino*.

[3] Brezis, H. : *Analyse fonctionelle (Théorie et applications)*, Masson, 1987.

[4] Cotton, W., Bryan, G., van den Heever, S. : *Storm and cloud dynamics* (II ed.). Academic Press, 2011.

[5] Dubovski, P. B. : An iterative method for solving of the coagulation equation with space-nonhomogeneous velocity fields. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 30 (1990), pp. 1755-1757 (En-glish translation : pp. 116-117).

[6] Dubovski, P. B. : Solutions of a spatially inhomogeneous coagulation equation with particle fractionation taken into account. *Differential Equations*, vol. 26 (1990), pp.508-513 (English translation : pp.380-384).

[7] Dubovski, P. B. : Existence Theorem for Space Inhomogeneous Coagulation Equation. *Appl. Math. Mt.* Vol.7 , No. 4, pp. 13-18, 1994.

[8] Dubovskii, P. B. : Solvability of the transport equation in coagulation and fragmentation kinetics (in Russian). *Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat.* vol. 65 (2001), pp. 3-24.

[9] Escobedo, M., Velazquez, J.J.L. : On the fundamental solution of a linearized homogeneous coagulation equation. *Comm. Math. Phys.*, vol. 297 (2010), pp. 759–816.

[10] Escobedo, M., Mischler, S., Perthame, B. : Gelation in coagulation and fragmentation models. *Comm. Math. Phys.*, vol. 231 (2002), pp. 157–188.

[11] Escobedo, M., Mischler, S., Rodriguez Ricard, M. : On self-similarity and stationary problem for fragmentation and coagulation models. *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire*, vol. 22 (2005), pp. 99–125.

[12] Fujita Yashima, H., Campana, V., Aissaoui, M. Z. : Système d'équations d'un modèle du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère. *Ann. Math. Afr.*, vol. 2 (2011), pp. 66–92.

[13] Fujita Yashima, H. : Modelación matemática del movimiento de la atmósfera con la transición de fase del agua. *Rev. Invest. Operac.*, vol. 34 (2013), pp. 93-104.

[14] Galkin, V. A. : Smoluchowski Equation of the Kinetic Theory of Coagulation for Spatially Nonuniform Systems. *Sov. Phys. Dokl.*, vol. 30 (12), 1985, pp. 1012-1014.

[15] Galkin, V. A. : Generalized Solution of the Smoluchowski Kinetic Equation for Spatially Inhomogeneous Systems. *Sov. Phys. Dokl.*, vol. 32 (1987), pp. 200-202.

[16] Galkin, V. A., Dubovski, P. B. : Solution of the Coagulation Equation with Unbounded Kernels. *Differential Equations*, vol. 22, 1986, pp. 504-509 (English translation : pp.373-378).

[17] Kikoïne, A. K., Kikoïne, I. K. : *Physique moléculaire* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1979.

[18] Kolmogorov, A. N., Fomine, S. V. : *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionelle* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1974.

[19] Landau, L. L., Lifchitz, E. M. : *Mécanique des fluides (physique théorique, tome 6)* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1989.

[20] Matveev, L. T. : *Physique de l'atmosphère*. Gidrometeoizdat, Leningrad-S. Peterburg, 1965, 1984, 2000.

[21] Merad, M. : Modèle général du mouvement de l'atmosphére avec la transition de phase de l'eau : gaz-liquide-solide. *mémoire de master*. Université 8 Mai 1945, Guelma. 2010.

[22] Merad, M., Aissaoui, M.Z., Fujita Yashima, H. : Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelettes avec un vent vertical. Manuscrit 2013.

[23] Merad, M., Belhireche, H., Fujita Yashima, H. : Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelettes en chute avec le vent horizontal. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.* vol 129, (2013). pp 205–224.

[24] Mischler, S. : Contributions à l'étude mathématique de quelques modèles issus de la physique hors équilibre. *Thèse d'habilitation*, Univ. Versailles Saint-Quentin, 2001.

[25] Mischler, S., Rodriguez Ricard, M. : Existence globale pour l'équation de Smoluchowski continue non homogène et comportement asymptotique des solutions. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. I, Math., vol. 336, (2003), pp. 407–412.

[26] Müller, H. : Zur allgemeinen Theorie der raschen Koagulation. *Kolloidchem. Beib.*, vol. 27, (1928), pp. 223-250.

[27] Niethammer, B., Velazquez, J.J.L. : Optimal bounds for self-similar solutions to coagulation equations with multiplicative kernel. A paraître sur *Commun. PDE.*

[28] Prodi, F., Battaglia, A. : *Meteorologia - Parte II, Microfisica.* Grafica Pucci, Roma, 2004. (voir aussi le site :
http ://www.meteo.uni-bonn.de/mitarbeiter/battaglia/teaching.html).

[29] Selvaduray, S., Fujita Yashima, H. : Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati : gassoso, liquido e solido. *Accad. Sci. Torino, Memorie Cl. Sci. Fis.*, Serie V, vol. 35 (2011), pp. 37-69.

[30] Sheng, P.-X., Mao, J.-T., Li, J.-G., Zhang, A.-C., Sang, J.-G., Pan, N.-X. : *Physique de l'atmosphère* (en chinois). Publ. Univ. Pékin, Pékin, 2003.

[31] Smoluchowski, M. : Drei Vorträge über Diffusion, Brownische Bewegung und Koagulation von Kolloidteilchen. *Phys. Zeits.*, vol. 17, (1916), pp. 557–585.

[32] Tani, A. : On the first initial-bondary value problem of compressible viscous fluid motion. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, vol. 13, (1977), pp.193-253.

[33] Voloshtchuk, V. M. : *Théorie cinétique de coagulation* (en russe). Gidrometeoizdat, Leningrad, 1984.