REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**UNIVERSITE 8 MAI 1945-GUELMA**

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Laboratoire de Mathématiques Appliquées et de Modélisation
Département de Mathématiques

# THESE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat 3ème cycle en Mathématiques

**Option** : Mathématiques Appliquées

# Comportement asymptotique de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute

**Présenté par:**
**BELHIRECHE Hanane**

**Devant le jury**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Président :** | **A. Benchettah** | **Prof** | **U.B.M- Annaba** |
| **Directeur de thèse:** | **M.Z. Aissaoui** | **M.C.A** | **Univ-Guelma** |
| **Co-encadreur:** | **H. Fujita Yashima** | **Prof** | **Univ-Guelma** |
| **Examinateur:** | **M. Moussaoui** | **Prof** | **ENS, Kouba** |
| **Examinateur:** | **S. Drabla** | **Prof** | **Univ- Sétif 1** |
| **Examinateur:** | **F. Ellaggoune** | **M.C.A** | **Univ-Guelma** |

**Année Universitaire : 2013/2014**

# Remerciements

Le seul moyen de se délivrer d'une tentation, c'est d'y céder paraît-il ! Alors j'y cède en disant un grand Merci aux personnes qui ont cru en moi et qui m'ont permis d'arriver au bout de cette thèse.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements :

A monsieur **Mohamed Zine Aissaoui** qui fut pour moi un directeur de thèse attentif et disponible malgré ses nombreuses charges. Sa compétence, sa rigueur scientifique et sa clairvoyance m'ont beaucoup appris. Son soutien m'a permis de ne jamais faiblir et de poursuivre toujours plus loin mes travaux. Ils ont été et resteront des moteurs à ma réussite.

A monsieur **Hisao Fujita Yashima** qui m'a aussi encadré tout au long de ma thèse. Ma considération est inestimable. Ses remarques et critiques pertinentes m'ont conduit vers la bonne voie. Sans sa grande disponibilité et sa patience, cette thèse n'aurait jamais vu le jours.

Je suis très sensible à l'honneur que m'a fait le professeur Benchettah Azzedine en acceptant de présider mon jury de soutenance et d'examiner ma thèse.

Je tiens à remercier vivement le professeur Moussaoui Mohand, Drabla salah et Ellaggoune Fateh qui ont accepté de faire partie du jury.

# Dédicace

A toute ma famille et en particulier **mes parents**, leur confiance, leur soutien et leur amour me portent et me guident tous les jours. Merci pour avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui.

A tous mes amies et collègues qui ont cru en moi.

Trouvez en ce modeste travail le symbole d'un effort qui veut satisfaire vos espoirs.

# Résumé

Dans les travaux réunis dans la présente thèse, on étudie la chute des gouttelettes par la force gravitationnelle, gouttelettes qui subissent aussi le processus de coagulation entre elles. Du point de vue mathématiques, il s'agit d'une équation integro-différentielle pour une fonction inconnue représentant la densité, par rapport à l'unité de volume, de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes. Cette fonction dépendra de la masse de gouttelettes, du temps et de la position.

En considérant l'équation dans un domaine d'une dimension spatiale en absence du mouvement de l'air et sous d'autres conditions appropriées, on montre l'existence et l'unicité de la solution globale ainsi que sa convergence vers une solution stationnaire en utilisant la propriété de "cône de dépendance".

Enfin, on traite l'équation dans un domaine tridimensionnel en présence d'un vent horizontal et on montre l'existence et l'unicité de la solution stationnaire ainsi que la solution globale en utilisant des propriétés similaires à celles utilisées dans le cas monodimensionnel.

**Mathematics Subject Classification (2010)**. 45K05, 45G10, 86A10.

**Mots clés**. Equations integro-différentielles, coagulation des gouttelettes, chute des gouttelettes.

# Abstract

In the works joined in the present thesis, we study the fall of drops by the gravitational force, drops for which there is also the process of coagulation between them. From a mathematical point of view, it is an integro-differential equation for an unknown function representing the density, with respect to the unit volume, of the liquid water contained in the drops. This function will depend on the mass of drops, the time and the position.

Considering the equation in one-dimensional domain in the absence of the air motion and under appropriate conditions, we prove the existence and the uniqueness of the global solution as well as its convergence towards the stationary solution, using the "cone of dependence" property.

Finally, we treat the equation in three-dimensional domain with the presence of a horizontal wind and we prove the existence and the uniqueness of the stationary solution as well as the global solution, using similar properties of one-dimensional case.

**Mathematics Subject Classification (2010)**. 45K05, 45G10, 86A10.

**Keywords**. Integro-differential equations, coagulation of droplets, fall of droplets.

# ملخص

تتعلق الأعمال التي جمعت في هذه الأطروحة بدراسة تساقط قطرات المطر تحت تأثير الجاذبية الأرضية و التي تخضع لعملية احتمال الالتقاء فيما بينها. تصاغ من وجهة نظر رياضية على شكل معادلة تكاملية تفاضلية لدالة مجهولة تمثل كثافة الماء السائل، بالنسبة لوحدة الحجم، المحتوى في القطرات مع الأخذ بعين الاعتبار كتلة القطرات و الزمن و الوضعية.

تتم دراسة المعادلة في مجال ذو بعد أحادي الوضعية إضافة إلى انعدام حركة الهواء. وفق شروط محددة نبرهن على وجود حل عام وحيد للمعادلة المقترحة و تقارب هذا الحل إلى الحل الثابت اعتمادا على خاصية "مخروط الارتباط" .

في الأخير نقدم دراسة المعادلة المقترحة في مجال ثلاثي الأبعاد تحت شرط وجود رياح أفقية حيث نبرهن على وجود حل ثابت وحيد ثم اعتمادا على بعض الخصائص المحددة سابقا نبرهن على وجود حل عام وحيد.



**التصنيف الرياضي** (2010 MSC) : .35B45, 35K20, 35M10

**الكلمات الاستدلالية** :المعادلات التكاملية التفاضلية، تلاقي قطرات المطر، تساقط قطرات المطر.

# Table des matières

# Chapitre 1

# Introduction

Depuis quelques décennies il y a eu des tentatives de modélisation mathématique de l'atmosphère (voir par exemple [32], [16], [2], etc...) et à cause de la complexité des phénomènes atmosphériques, jusqu'à maintenant la majorité des scientifiques se contentent des modèles partiels ou simplifiés. Même si ces tentatives étaient bien appréciables dans leurs aspects mathématiques spécifiques, dans ces modèles la description globale des phénomènes atmosphériques comprenant la formation des nuages et la précipitation était loin d'être satisfaisante.

L'atmosphère, comme on le sait bien, contient l'eau ($H_2O$) à l'état gazeux et sa proportion dans l'air est très variable. A la différence des autres molécules comme $N_2, O_2$... qui restent toujours à l'état gazeux dans les conditions ordinaires de l'atmosphère, $H_2O$ peut avoir trois états, gazeux, liquide et solide. La transition de phase de l'eau réalisée dans l'atmosphère, donnant naissance à des nuages et provoquant la pluie et la neige, concerne donc les trois états et les six types de transition de phase de l'eau, à savoir entre l'état gazeux et liquide on a *condensation-évaporation*, liquide et solide on a *solidification-fusion*, gazeux et solide on a *sublimation-sublimation inverse*. Dans ce mécanisme la quantité appelée *pression de la vapeur saturée* $\overline{p}_{vs}(T)$ joue un rôle fondamental. En effet, la condensation de la vapeur d'eau se réalise lorsque, à une température supérieure à celle de fusion de $H_2O$, la pression de la vapeur dépasse la pression de la vapeur saturée relative à l'état liquide $\overline{p}_{vs(l)}(T)$, valeur critique au-delà de laquelle les molécules de $H_2O$ à l'état gazeux tendent à s'établir à l'état liquide. Dans le cas contraire, les molécules tendent à quitter la surface de l'eau liquide et il y a l'évaporation. De manière analogue, aux températures inférieures à celle de la fusion et à la présence d'une surface de glace exposée dans l'air, il y aura la sublimation (inverse) de la vapeur d'eau présente dans l'air ; dans le cas contraire, à partir de la surface de glace il y aura la sublimation de solide en gaz (pour les détails de ces processus voir par exemple [21]). Ces processus de transition s'accompagnent d'un dégagement ou d'une absorption de l'énergie ; ce phénomène est connu sous le nom de *chaleur latente*, qui constitue un facteur important dans les phénomènes météorologiques.

D'autre part, la réalisation des processus de transition de phase nécessite la présence d'un support. En effet, la condensation se réalise au niveau d'un support constitué de noyaux secs appellé aérosols (voir [21], [31]), sur lesquels les molécules de $H_2O$ gazeux peuvent se déposer ou se condenser en formant une gouttelette d'eau. Même à la température inférieure à $0°$ se forment d'abord les gouttelettes d'eau puis ces gouttelettes se solidifient en formant des morceaux de cristaux. Une fois formés des morceaux de cristaux dans l'atmosphère, il y aura le processus de sublimation inverse : de gaz en solide (voir [21], [31]).

L'étude mathématique d'un système d'équations qui décrit d'une manière suffisamment complète ces phénomènes atmosphériques impliquant la transition de phase de l'eau est donc ce que nous voulons développer dans notre recherche. Dans [16] les auteurs ont proposé un modèle mathématique assez général modélisant le mouvement de l'air y compris la condensation et l'évaporation de l'eau et le mouvement des gouttelettes d'eau. Ensuite, dans [32], les auteurs ont fourni une description mathématique assez complète qui prend en charge toutes les transitions de phases et qui représente une généralisation du modèle proposé dans [16]. En introduisant quelques modifications dans la description des processus de condensation et d'évaporation de $H_2O$ et en adoptant une approximation de la vitesse des gouttelettes (il semble que cette approximation rende le modèle plus cohérent mathématiquement) ils ont démontré l'existence et l'unicité de la solution locale. A partir de ce modèle général une série de travaux récents ont été développés, en particulier [1], [2], [3], [5], [25] et [33].

Notre étude concerne la chute due à la force gravitationnelle des gouttelettes réalisant le processus de coagulation (ce processus décrit le mécanisme par lequel les gouttelettes s'unissent pour former une gouttelette plus grande). En effet, comme il est bien connu, à partir des nuages formés dans l'atmosphère, les gouttelettes suffisamment grandes vont tomber comme pluie, ce qui montre le rôle essentiel du processus de coagulation des gouttelettes dans l'apparition de la pluie. L'équation dite équation de Smoluchowski, proposée par Smoluchowski (voir [36]) et Müller (voir [29]), décrit le processus de coagulation ; cependant cette équation dans sa version communément considérée ne tient pas compte de l'effet de la chute des gouttelettes. On rappelle que l'équation de Smoluchowski et le processus de coagulation (et de fragmentation) ont été étudiés par plusieurs auteurs (voir [12], [13], [14], [27], [28], [30], [38], etc...). En outre, le problème de l'équation de coagulation (et de fragmentation) des gouttelettes en tenant compte de son déplacement a été étudié par plusieurs mathématiciens Russes comme P. B. Dubovski, V. A. Galkin et W. Stewart ainsi que d'autres (voir par exemple [8], [9] [10], [11], [17], [18], [19], etc.... ). Suite à ces travaux, nous proposons d'étudier le processus des gouttelettes qui tombent dans l'air et se coagulent entre elles dans les cas respectivement de l'absence de mouvement de l'air et de la présence d'un vent horizontal. Il s'agit de l'équation de la conservation de la masse pour la densité noté $\sigma(m)$ de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse $m$, densité par rapport à l'unité de volume de l'air contenant d'éventuelles gouttelettes, où la vitesse des gouttelettes sera déterminée par la force gravitationnelle, la friction entre les gouttelettes et l'air et la vitesse du vent.

# Contenu de la thèse

La présente thèse est composée de cinq chapitres. Le premier chapitre est dédié à l'introduction.

Dans le deuxième chapitre, on rappelle le système d'équations développé dans [32] et [2] qui modélise le mouvement de l'atmosphère, en tenant compte de toutes les transitions de phase de l'eau (dans [2] seulement des transitions entre le gaz et le liquide), à partir des équations de mouvement d'un gaz visqueux en y insérant les termes décrivant les processus de transition de phase ; on y prend en considération tous les paramètres physiques à savoir, la densité, la température, la vitesse et la pression. On donne un résultat d'existence et d'unicité de la solution locale du système proposé dans [2].

Dans le troisième chapitre, on étudie l'équation de coagulation des gouttelettes qui se déplacent dans l'air par la force gravitationnelle dans le cas d'équilibre, c'est-à-dire sans transition de phase de l'eau, et en absence du mouvement de l'air. Il s'agit de l'équation pour la densité des gouttelettes $\sigma$ de type Smoluchowski avec le déplacement des gouttelettes déterminé par leur masse. L'équation est considérée dans un domaine d'une dimension spatiale qui représente l'axe verticale de l'atmosphère et la densité des gouttelettes à l'entrée du domaine est supposé donnée. On montre l'existence et l'unicité de la solution globale ainsi que sa convergence vers une solution stationnaire. Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution globale, on transforme l'équation en une équation différentielle ordinaire dans un espace de Banach (ou dans un espace de Fréchet), en utilisant un changement de variables. On considère l'opérateur intégral (de coagulation) sur une famille de courbes et on utilise une variante du théorème de Fubini. Pour obtenir la solution globale on utilise l'idée du "cône de dépendance" pour la solution.

Ensuite, dans le quatrième chapitre, nous donnons une généralisation du résultat obtenu dans le chapitre précedent. Plus précisement on considère l'équation pour la densité $\sigma$ dans un domaine tridimensionnel et en présence d'un vent horizontal. On montre l'existence et l'unicité d'une solution stationnaire ainsi qu'une solution globale en utilisant les techniques développées dans le chapitre précedent.

Enfin, dans le dernier chapitre, on donne des perspectives concernant l'étude de l'équation du déplacement des gouttelettes dans l'air en tenant compte de la transition de phase condensation-évaporation.

# Chapitre 2

# Modèle général de l'atmosphère

## 2.1 Considérations générales et préliminaires

Dans ce chapitre nous rappellerons le système d'équations qui, formulé dans [32] (pour le modèle en deux états de $H_2O$, gazeux et liquide, voir [2]), modélise de manière suffisamment cohérente le mouvement de l'atmosphère. Du point de vue mécanique, ce modèle s'appuie sur les équations du mouvement d'un gaz visqueux (voir [23]), où on ajoute les éléments qui résultent des processus de transition de phase de l'eau dans l'atmosphère.

Quant à ce dernier aspect, du point de vue physique, à cause de la transition de phase et de la différence des comportements mécaniques de la vapeur, des gouttelettes et des morceaux de cristaux, l'eau présente dans l'atmosphère devra être considérée séparément en trois états : gazeux, liquide et solide. Donc pour formuler les équations du mouvement de l'air de manière suffisamment complète, il faut distinguer l'air sec qui rassemble toutes les composantes gazeuses de l'air sauf $H_2O$ (c'est-à-dire des molécules de $N_2$, $O_2$, $Ar$ et d'autre gaz en quantité infime), la vapeur d'eau, l'eau liquide se trouvant dans les gouttelettes et l'eau solide se trouvant dans les morceaux de cristaux.

Les quantités physiques que l'on doit considérer dans cette modélisation sont la vitesse $v = (v_1, v_2, v_3)$, la température $T$, la pression $p$, la densité de l'air sec $\varrho$, la densité de la vapeur d'eau $\pi$, la densité de l'eau liquide se trouvant dans les gouttelettes $\sigma_l$ ainsi que l'eau solide se trouvant dans les morceaux de cristaux $\sigma_s$. Les quantités $v$, $T$, $p$, $\varrho$ et $\pi$ seront des fonctions de la position $x$ et du temps $t$, tandis que $\sigma_l$ et $\sigma_s$ seront des fonctions de la masse de gouttelette ou de cristal $m$ ainsi que de $x$ et de $t$. Il est bon de préciser que la fonction $\sigma_l(m, t, x)$ doit être définie de telle sorte que, statistiquement, la masse totale de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse $m \in [m^*, m^* + \Delta m]$ se trouvant dans une région $R = [x_1^*, x_1^* + \Delta x_1] \times [x_2^*, x_2^* + \Delta x_2] \times [x_3^*, x_3^* + \Delta x_3]$ à l'instant $t$ soit donnée par

$$\int_{m^*}^{m^*+\Delta m} \int_R \sigma_l(m, t, x) dx dm$$

et de manière analogue pour la fonction $\sigma_s(m, t, x)$.

On rappelle que dans les conditions usuelles de l'atmosphère le comportement de l'air n'est pas beaucoup différent de celui du gaz idéal ; compte tenu de ces circonstances, dans cette modélisation on adopte l'hypothèse que la pression $p$ est donnée par la relation

$$p = R\Big(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h}\Big)T, \tag{2.1}$$

où $R$, $\mu_a$, $\mu_h$ sont respectivement la constante universelle des gaz, la masse molaire moyenne de l'air et celle de l'eau (pour les détails, voir par exemple [21]).

D'autre part, les valeurs de la pression de la vapeur saturée relative à la surface de l'eau liquide $\overline{p}_{vs(l)}(T)$ et celle relative à la surface de la glace

$\overline{p}_{vs(s)}(T)$ dependent fortement (presque exponentiellement) de la tempérture $T$ et sont données approximativement par

$$\overline{p}_{vs(l)}(T) \approx E_0.10^{\frac{7.63(T-273.15)}{T-31.25}}, \quad E_0 = 6.108(mbar), \tag{2.2}$$

$$\overline{p}_{vs(s)}(T) \approx E_0.10^{\frac{9.635(T-273.15)}{T-7.65}}. \tag{2.3}$$

Mais, dans ce qui suit, nous utilisons la densité de la vapeur saturée, notée $\overline{\pi}_{vs(l)}(T)$ (relative à l'état liquide) ou $\overline{\pi}_{vs(s)}(T)$ (relative à l'état solide), reliée à la pression de la vapeur saturée par la relation

$$\overline{\pi}_{vs(l)}(T) = \frac{\mu_h \overline{p}_{vs(l)}(T)}{RT}, \qquad \overline{\pi}_{vs(s)}(T) = \frac{\mu_h \overline{p}_{vs(s)}(T)}{RT}. \tag{2.4}$$

## 2.2 Equation de la quantité de mouvement

On rappelle d'abord que l'équation de la quantité de mouvement pour un gaz visqueux général (en désignant par $\varrho$, $v$ et $p$ sa densité, sa vitesse et sa pression) est donné par (voir [23])

$$\varrho\big(\partial_t v_j + (v \cdot \nabla) v_j\big) + \partial_{x_j} p = \tag{2.5}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k}\Big(\eta\big(\partial_{x_k} v_j + \partial_{x_j} v_k - \frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla \cdot v\big)\Big) + \partial_{x_j}(\zeta \nabla \cdot v) + \varrho f_j,$$

où $\eta$ et $\zeta$ sont les coefficients de viscosité d'écoulement et volumique, tandis que $f = (f_1, f_2, f_3)$ est la force extérieure.

Pour le mouvement de l'air dans l'atmosphère l'unique force extérieure qui intervient réellement, est celle de la gravitation

$$f = -\nabla \Phi,$$

$\Phi$ étant le géopotentiel. On rappelle en outre que l'air atmosphérique est composé par l'air sec ($N_2$, $O_2$, $Ar$ etc...) et la vapeur d'eau ; de plus le comportement mécanique de la vapeur d'eau ne diffère pas beaucoup de celui de l'air sec, ce qui nous permet de considérer l'unique équation de la quantité de mouvement avec la densité de l'air

$$\varrho + \pi.$$

Donc, si on adopte l'approximation

$$\eta = \text{Constante } > 0, \qquad \zeta = \text{Constante } > 0,$$

alors, en utilisant l'expression (2.1) de la pression, on obtient, dans le cas de l'absence de gouttelettes et de cristaux de glace, l'équation

$$\begin{aligned}(\varrho+\pi)\big(\partial_t v + (v\cdot\nabla)v\big) + R\nabla\Big(\Big(\frac{\varrho}{u_a}+\frac{\pi}{u_h}\Big)T\Big) &= \\ = \eta\Delta v + \big(\zeta+\frac{\eta}{3}\big)\nabla(\nabla\cdot v) - (\varrho+\pi)\nabla\Phi.\end{aligned} \tag{2.6}$$

D'autre part, pour le mouvement de l'air en présence de gouttelettes et de morceaux de cristaux de $H_2O$, il faut tenir compte de l'effet de la friction entre l'air et les gouttelettes de même entre l'air et les morceaux de cristaux de $H_2O$. Pour représenter ces effets, on ajoute à l'équation (2.6) les termes

$$\int_0^\infty \alpha_l(m)\sigma_l(m)\big(v-u_l(m)\big)dm,$$

$$\int_0^\infty \alpha_s(m)\sigma_s(m)\big(v-u_s(m)\big)dm,$$

où $\alpha_l(m)$ et $\alpha_s(m)$ sont des fonctions décroissantes par rapport à $m$ representant respectivement le coefficient de la friction entre l'air et les gouttelettes de masse $m$ et le coefficient de la friction entre l'air et les cristaux de masse $m$, tandis que $u_l(m)$ et $u_s(m)$ désignent la vitesse des gouttelettes de masse $m$ et celle des cristaux de glace de masse $m$ respectivement.

Ainsi on aurait l'équation de la conservation de la quantité de mouvement pour l'air composé de l'air sec et la vapeur d'eau de la forme (voir [16])

$$(\varrho+\pi)\big(\partial_t v+(v\cdot\nabla)v\big)=\eta\Delta v+\big(\zeta+\frac{\eta}{3}\big)\nabla(\nabla\cdot v)+ \tag{2.7}$$
$$-R\nabla\Big(\Big(\frac{\varrho}{u_a}+\frac{\pi}{u_h}\Big)T\Big)-\int_0^\infty \alpha_l(m)\sigma_l(m)(v-u_l(m))dm+$$
$$-\int_0^\infty \alpha_s(m)\sigma_s(m)(v-u_s(m))dm-(\varrho+\pi)\nabla\Phi.$$

Dans [16] les auteurs ont considéré seulement le terme avec $\sigma_l(m)$, en supposant que $\sigma_s(m)=0$ ; d'autre part ils ont considéré l'équation de l'évolution de la vitesse des gouttelettes $u_l(m)$.

Dans [2] (seulement pour $u_l(m)$) et [32] (pour $u_l(m)$ et $u_s(m)$) on a proposé l'utilisation d'une approximation, qui simplifie la formulation des équations et permet d'éviter une régularisation plutôt artificielle, en proposant qu'au lieu de considérer une équation propre pour la quantité de mouvement des gouttelettes et des morceaux de cristaux, on adopte la détermination de $u_l(m)=u_l(m,t,x)$ et de $u_s(m)=u_s(m,t,x)$ par les relations

$$u_l(m,t,x)=v(t,x)-\frac{1}{\alpha_l(m)}\nabla\Phi, \tag{2.8}$$

$$u_s(m,t,x)=v(t,x)-\frac{1}{\alpha_s(m)}\nabla\Phi. \tag{2.9}$$

Ces formulations sont motivées par le fait que la vitesse des gouttelettes dans l'atmosphère est, selon les observations effectuées (voir par exemple [35]), presque celle de l'équilibre (c'est-à-dire, en absence de variation de la vitesse de l'air, la vitesse des gouttelettes ayant une masse constante reste presque invariante). Quant à la vitesse des morceaux de cristaux de $H_2O$, à cause de leur forme géométrique assez variée, selon les résultats d'observations, elle n'est pas uniquement déterminée. Vues ces circonstances, les auteurs de [32] ont adopté la formule (2.9) en tant qu'une approximation de caractère statistique, en admettant une formule analogue à celle de la vitesse des gouttelettes.

En substituant les relations (2.8) et (2.9) dans l'équation (2.7), les auteurs de [32] ont proposé l'équation de quantité de mouvement pour l'air

$$(\varrho+\pi)\big(\partial_t v+(v\cdot\nabla)v\big)=\eta\Delta v+\big(\zeta+\frac{\eta}{3}\big)\nabla(\nabla\cdot v)+ \tag{2.10}$$
$$-R\nabla\Big(\big(\frac{\varrho}{u_a}+\frac{\pi}{u_h}\big)T\Big)-\Big[\int_0^\infty\big(\sigma_l(m)+\sigma_s(m)\big)dm+\varrho+\pi\Big]\nabla\Phi.$$

## 2.3 Equation du bilan de l'énergie

Nous rappelons d'abord l'équation du bilan de l'énergie d'un gaz (voir [23]), qui, exprimée en fonction de la température $T$ et avec l'expression de la pression donnée dans (2.1) et le coefficient de conductibilité thermique $\kappa$ supposé constant, aura, en absence de source de chaleur, la forme

$$c_v(\varrho+\pi)\big(\partial_t T+v\cdot\nabla T\big)=\kappa\Delta T-R\Big(\frac{\varrho}{u_a}+\frac{\pi}{u_h}\Big)T\,\nabla\cdot v+ \tag{2.11}$$
$$+\eta\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot v\Big)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\zeta(\nabla\cdot v)^2,$$

où $c_v$ est la chaleur spécifique de l'air.

Dans [32] (voir aussi [16] et [2] pour le cas où il y a seulement la transition de phase de $H_2O$ entre l'état gazeux et l'état liquide) on a proposé d'ajouter à

(2.11) le terme de la source de chaleur due à la chaleur latente de la transition de phase de l'eau $L_{gl}(T)H_{gl} + L_{ls}(T)H_{ls} + L_{gs}(T)H_{gs}$ et le terme de source de chaleur générale due principalement à l'effet thermique de la radiation $E_{rad}$, de sorte que l'on a

$$c_v(\varrho + \pi)\big(\partial_t T + v \cdot \nabla T\big) = \kappa \Delta T - R\Big(\frac{\varrho}{u_a} + \frac{\pi}{u_h}\Big)T\,\nabla \cdot v + \tag{2.12}$$

$$+\eta \sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla \cdot v\Big)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \zeta(\nabla \cdot v)^2 + E_{rad} +$$

$$+L_{gl}(T)H_{gl} + L_{ls}H_{ls} + L_{gs}(T)H_{gs};$$

dans l'expression $L_{gl}(T)H_{gl} + L_{ls}(T)H_{ls} + L_{gs}(T)H_{gs}$ utilisée ici, $H_{gl}$, $H_{ls}$, $H_{gs}$ représentent la quantité de $H_2O$ qui se transforment de gaz en liquide, de liquide en solide et de gaz en solide respectivement ; tandis que $L_{gl}(T)$, $L_{ls}(T)$, $L_{gs}(T)$ désignent la chaleur latente de la transition de phase gaz-liquide, celle de la transition de phase liquide-solide et celle de la transition de phase gaz-solide de $H_2O$. Quant aux valeurs de la chaleur latente, selon les données expérimentalement établies, on a (voir [24], [31])

$$L_{gl}(T) \approx (3244 - 2,72T)10^3 \quad (J/kg),$$

$$\big(resp. \quad L_{ls} \approx 332.10^3 3 \quad (J/kg)\big);$$

la chaleur latente $L_{gs}$ relative à la transition de phase gaz-solide vérifie la relation (voir[21])

$$L_{gs} = L_{gl} + L_{ls}. \tag{2.13}$$

## 2.4 Equations de conservation de la masse

Pour l'air sec, qui n'est pas assujetti à la transition de phase, la loi de conservation de la masse est exprimée par l'équation classique (voir [23])

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0. \tag{2.14}$$

Pour la densité de la vapeur $\pi$, en tenant compte de la quantité de la vapeur qui se transforme en liquide ($H_{gl}$) ou en solide ($H_{gs}$), la loi de conservation de la masse peut être exprimée par l'équation (voir [16], [2], [32])

$$\partial_t \pi + \nabla \cdot (\pi v) = -H_{gl}\big(T, \pi, \sigma_l(\cdot)\big) - H_{gs}\big(T, \pi, \sigma_s(\cdot)\big). \tag{2.15}$$

D'autre part, pour la conservation de la masse de l'eau liquide et celle des cristaux d'eau, dans [32] les auteurs proposent l'équation pour la densité de l'eau liquide $\sigma_l$

$$\partial_t \sigma_l(m) + \nabla \cdot (\sigma_l(m) u_l(m)) + \partial_m [m h_{gl}(m) \sigma_l(m)] = \tag{2.16}$$

$$\begin{gathered} = [h_{gl}(m) - K_{ls}(T,m)]\sigma_l(m) + K_{sl}(T,m)\sigma_s + \\ + \frac{m}{2} \int_0^m \beta_l(m', m-m')\sigma_l(m')\sigma_l(m-m')dm' + \\ - m\sigma_l(m) \int_0^\infty \beta_l(m,m')\sigma_l(m')dm' - m\sigma_l(m) \int_0^\infty Z_{ls}(m',m)\sigma_s(m')dm' + \\ + g_0(m)[N^* - \widetilde{N}(\sigma_l, \sigma_s)]^+ [\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)]^+ - g_1(m)[\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)]^- \sigma_l(m) \end{gathered}$$

et l'équation pour la densité de l'eau solidifiée $\sigma_s$

$$\partial_t \sigma_s(m) + \nabla \cdot (\sigma_s(m) u_s(m)) + \partial_m [m h_{gs}(m) \sigma_s(m)] = \tag{2.17}$$

$$= [h_{gs}(m) - K_{sl}(T,m)]\sigma_s(m) + K_{ls}(T,m)\sigma_l(m) +$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^m \beta_s(m-m',m')\sigma_s(m')\sigma_s(m-m')dm' - m\sigma_s(m)\int_0^\infty \beta_s(m,m')\sigma_s(m')dm' +$$
$$+m\int_0^m Z_{ls}(m-m',m')\sigma_s(m-m')\sigma_l(m')dm' - m\sigma_s(m)\int_0^\infty Z_{ls}(m,m')\sigma_l(m')dm' +$$
$$-g_2(m)[\pi - \overline{\pi}_{vs(s)}(T)]^- \sigma_s(m).$$

Nous allons expliquer ci-dessous ce que signifient les nouveaux termes introduits dans (2.15)-(2.17). Mais, pour ce faire, nous rappelons les raisonnements qui nous conduisent à ces formulations. Rappelons d'abord que dans l'atmosphère les gouttelettes se forment exclusivement sur les aérosols. Pour le formuler convenablement, dans [2] (voir aussi [32]) on a introduit la probabilité de création d'une nouvelle gouttelette ayant la forme

$$g_0(m)\big[\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)\big]^+ \Big[N^* - \widetilde{N}\big(\sigma_l,\sigma_s\big)\Big]^+,$$

où $N^*$ est le nombre total de gouttelettes ou de morceaux de cristaux qui peuvent être formés dans l'unité de volume, tandis que $\widetilde{N}$ représente le nombre dans l'unité de volume des aérosols qui se trouvent déjà dans des gouttelettes ou dans des morceaux de cristaux ; on propose

$$\widetilde{N}\big(\sigma_l,\sigma_s\big) = \int_0^\infty \frac{\sigma_l(m)}{m}dm + \int_0^\infty \frac{\sigma_s(m)}{m}dm + c_l\int_0^\infty \sigma_l(m)dm + C_s\int_0^\infty \sigma_s(m)dm$$

avec deux constantes positives convenables $c_l$ et $C_s$.

Pour formuler l'évaporation totale et la sublimation totale, on introduit la probabilité de disparition des gouttelettes

$$g_1(m)\big[\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)\big]^-$$

et celle des morceaux de cristaux

$$g_2(m)\big[\pi - \overline{\pi}_{vs(s)}(T)\big]^-.$$

Comme pour l'apparition et la disparition de gouttelettes et de morceaux de cristaux de dimension d'aérosols, on suppose

$$g_0(m) = 0, \quad g_1(m) = 0, \quad g_2(m) = 0 \quad \text{pour} \quad m \geq \overline{m}_b,$$

$\overline{m}_b$ étant la masse maximale des aérosols concernés.

Pour formuler la condensation et l'évaporation sur la surface des gouttelettes, dans [2] (voir aussi [32]) on a introduit la fonction $S_l(m)$ qui représente la surface des gouttelettes de masse $m$, où $m$ est considéré comme la somme de la masse de $H_2O$ et de celle des noyaux (aérosols) à l'exception des gouttelettes d'eau de diamètre trop petit. Plus précisement, on a supposé que

$$S_l(m) \in \mathcal{C}^2([0,\infty[), \qquad S_l(m) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq m \leq \frac{\overline{m}_a}{2},$$

$$S_l(m) = 3^{2/3}(4\pi)^{1/3} m^{\frac{2}{3}} \quad \text{pour} \quad m \geq \overline{m}_b > 0$$

($\overline{m}_a$ est la borne inférieure de la masse des aérosols concernés). Rappelons que la surface $S_l(m)$ est considérée comme celle de l'eau et que donc la surface d'un aérosol sans eau doit être considérée comme nulle.

D'autre part, comme les morceaux de cristaux n'ont pas une forme identique (voir par exemple [21], [31]), dans [32] les auteurs ont considéré la surface statistique moyenne $S_s(m)$ d'un morceau de cristal de $H_2O$ avec les propriétés

$$S_s(m) \in \mathcal{C}^2([0,\infty[),$$

$$S_s(m) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq m \leq \frac{\overline{m}_a}{2}, \qquad S_s(m) \approx c_s m^{\frac{2}{3}} \quad \text{pour} \quad m \geq \overline{m}_b$$

et $c_s \geq 3^{\frac{2}{3}}(4\pi)^{\frac{1}{3}}$.

Avec $S_l(m)$ et $S_s(m)$ ainsi définies, nous avons introduit dans [2] $h_{gl}$ la quantité de condensation sur les gouttelettes de masse $m$ par :

$$h_{gl} = h_{gl}(T, \pi, m) = K_1 \frac{S_l(m)}{m}(\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)) \tag{2.18}$$

et dans [32] la quantité $h_{gs}$ de sublimation sur les morceaux de cristaux de masse $m$ est donnée par :

$$h_{gs} = h_{gs}(T, \pi, m) = K_2 \frac{S_s(m)}{m}(\pi - \overline{\pi}_{vs(s)}(T)), \tag{2.19}$$

où $K_1$ et $K_2$ sont les coefficients positifs, respectivement, associés à la vitesse de condensation ou d'évaporation et à celle de sublimation ou de sublimation inverse. On introduit également la quantité totale de condensation ou de sublimation

$$H_{gl}(T, \pi, \sigma_l(.)) = K_1(\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)) \int_0^\infty \frac{S_l(m)}{m} \sigma_l(m) dm, \tag{2.20}$$

$$H_{gs}(T, \pi, \sigma_l(.)) = K_2(\pi - \overline{\pi}_{vs(s)}(T)) \int_0^\infty \frac{S_s(m)}{m} \sigma_s(m) dm. \tag{2.21}$$

En outre les coefficients $K_{ls}$ et $K_{sl}$, qui figurent dans les équations (2.16) et (2.17), sont les coefficients de solidification et de fusion.

Outre les processus de transition de phase de l'eau on a le processus de coagulation. En effet, la rencontre de deux gouttelettes implique l'union des deux à cause de la tension superficielle, par contre, la rencontre de deux morceaux de cristaux a une probabilité plus basse d'entraîner l'union des deux. D'autre part, la rencontre entre une gouttelette et un morceau de cristal, se produisent généralement à une température inférieure à $0°C$ et offre à l'eau liquide une structure cristalline sur laquelle l'eau liquide peut se cristalliser. Dans (2.16) et (2.17) $\beta_l(m', m)$ désigne la probabilité de rencontre entre une gouttelette de masse $m$ et une de masse $m'$, $\beta_s(m', m)$ celle de la rencontre entre un morceau de cristal de masse $m$ et un de masse $m'$ qui engendre leur union et $Z_{ls}(m, m', T)$ celle de la rencontre entre un morceau de cristal de masse $m$ et une gouttelette de masse $m'$.

En rappelant la définition de $h_{gl}$ et de $h_{gs}$ introduite dans (2.18) et (2.19), la vitesse de croissance d'une gouttelette de masse $m$ et celle d'un morceau de cristal de masse $m$ sont définis par $mh_{gl}$ et $mh_{gs}$, ce qui permet de considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^4$

$$\widetilde{U}_{4l} = \widetilde{U}_{4l}(u_l, T, \pi, \sigma_l) = (mh_{gl}, u_{l,1}(m), u_{l,2}(m), u_{l,3}(m))^T$$

et

$$\widetilde{U}_{4s} = \widetilde{U}_{4s}(u_s, T, \pi, \sigma_s) = (mh_{gs}, u_{s,1}(m), u_{s,2}(m), u_{s,3}(m))^T$$

comme la vitesse d'une gouttelette et d'un morceau de cristal dans l'espace $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$, dans lequel la masse $m$ est considérée comme une variable spatiale. D'une manière similaire aux équations de continuité dans $\mathbb{R}^3$, en utilisant $\widetilde{U}_{4l}$ et $\widetilde{U}_{4s}$, la loi de la conservation de la masse pour $H_2O$ liquide et solide est exprimée dans la forme

$$\partial_t \sigma_i + \nabla_{(m,x)} \cdot \left(\sigma_i \widetilde{U}_{4i}\right) = \text{variation de la masse}, \quad \text{avec } i = l,\ s,$$

où

$$\nabla_{(m,x)} = \left(\frac{\partial}{\partial m}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^T.$$

En rappelant les contributions à la variations de $\sigma_l$ et $\sigma_s$ définis ci-dessus, on aura les équations (2.16) et (2.17).

## 2.5 Solution locale du système monodimensionnel dans [2]

Il est souhaitable de trouver une solution du système d'équations introduit dans la partie précédente qui soit cohérente du point de vue mathématique et qui corresponde aux phénomènes réels qui se produisent dans l'atmosphère. Vue la difficulté des traitements mathématiques de ce système général, nous avons étudié dans [2] (voir aussi [32] pour le modèle général) un système d'équations légèrement modifié avec des conditions convenables, pour montrer que le modèle proposé jouit d'une certaine cohérence mathématique et physique, avec une possibilité de pouvoir obtenir une preuve de sa cohérence dans des recherches futures.

### 2.5.1 Système d'équations monodimensionnelles

Dans [2], notre étude concerne la structure verticale des nuages et de la pluie. Pour cela, on considère le système d'équations (2.8)-(2.10), (2.12), (2.14)-(2.17) avec les transitions de phase de $H_2O$ seulement du gaz au liquide (et sa réciproque) où toutes les quantités dépendent seulement de la variable $x_3$ et $t$ et on suppose que $u_{l,1} = u_{l,2} = 0$, $v_1 = v_2 = 0$. On écrit pour la simplicité $x$, $v$, $u$, $f$ au lieu de $x_3$, $v_3$, $u_{l,3}$, $\frac{d}{dx_3}\Phi$ et $\beta$, $\sigma$ au lieu de $\beta_l$, $\sigma_l$.

On considère le système d'équations dans le domaine en une dimension $I = ]0,1[$, aux extrémités duquel nous posons les conditions aux limites homogènes pour $v$ et les conditions non-homogènes $T(t,0) = a_T$, $T(t,1) = b_T$ pour la température $T$. Il nous est commode de considérer, au lieu de $T$, la fonction inconnue $\vartheta$ définie par

$$T = T_0 + \vartheta, \qquad T_0(x) = (1-x)a_T + xb_T. \tag{2.22}$$

Toutefois nous continuons à utiliser $T$ dans l'expression de $\overline{\pi}_{vs}(T) = \overline{\pi}_{vs(l)}(T)$ et les expressions qui le contiennent, mais dans les calculs nous devons traiter $\vartheta$ définie dans (2.22).

D'autre part, la vitesse des gouttelettes de masse $m$ est donnée par

$$u(m,t,x) = v(t,x) - \frac{1}{\alpha_l(m)} f.$$

En tenant compte de ces considérations et en posant $\eta_1 = \frac{4}{3}\eta + \zeta$, le système d'équations (2.10), (2.12), (2.14)-(2.16) avec les transitions de phase de $H_2O$ du gaz au liquide en une dimension spatiale pour les inconnues $v$, $\vartheta$, $\varrho$, $\pi$ et $\sigma(m)$ se réduit à (voir [2])

$$(\varrho + \pi)(\partial_t v + v\partial_x v) = \tag{2.23}$$

$$= \eta_1 \partial_x^2 v - R\partial_x \Big[ \Big( \frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h} \Big)(\vartheta + T_0) \Big] - \Big( \varrho + \pi + \int_0^\infty \sigma(m)dm \Big) f,$$

$$(\varrho + \pi)c_v(\partial_t \vartheta + v\partial_x \vartheta) + R\Big( \frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h} \Big)(\vartheta + T_0)\partial_x v = \tag{2.24}$$

$$= \kappa \partial_x^2 \vartheta + \eta_1 (\partial_x v)^2 + E_{rad} + L_{gl} H_{gl} - (\varrho + \pi)c_v v \partial_x T_0,$$

$$\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho v) = 0, \tag{2.25}$$

$$\partial_t \pi + \partial_x(\pi v) = -H_{gl}(T, \pi, \sigma), \tag{2.26}$$

$$\partial_t \sigma(m) + \partial_x\big(\sigma(m)u(m)\big) + \partial_m\big(m h_{gl}(m)\sigma(m)\big) = \tag{2.27}$$

$$= h_{gl}\big(T, \pi, m\big)\sigma(m) + \frac{m}{2} \int_0^m \beta(m - m', m')\sigma(m')\sigma(m - m')dm' +$$

$$-m \int_0^{\infty} \beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm' + g_0(m)\big[N^* - \tilde{N}(\sigma)\big]^+[\pi - \overline{\pi}_{vs}]^+ +$$

$$-g_1(m)\big[\pi - \overline{\pi}_{vs}(T)\big]^-\sigma(m),$$

où $\eta_1$, $c_v$, $\kappa$ et $L_{gl}$ sont considérés comme constantes strictement positives.

### 2.5.2 - Résultat principal de [2]

Dans [2] pour construire la solution des équations (2.23)–(2.27), dans un intervalle de temps suffisamment petit, on a considéré les conditions aux limites

$$v = 0, \quad \vartheta = 0 \qquad \text{pour} \quad x = 0 \ \text{ et } \ x = 1 \tag{2.28}$$

et les données initiales

$$v(0,\cdot) = v_0(\cdot) \in H_0^1(I), \tag{2.29}$$

$$\vartheta(0,\cdot) = \vartheta_0(\cdot) \in H_0^1(I), \tag{2.30}$$

$$\varrho(0,\cdot) = \varrho_0(\cdot) \in H^1(I), \quad \inf_{x\in I} \varrho_0(x) > 0, \tag{2.31}$$

$$\pi(0,\cdot) = \pi_0(\cdot) \in H^1(I), \quad \inf_{x\in I} \pi_0(x) > 0, \tag{2.32}$$

$$\sigma(\cdot,0,\cdot) = \sigma_0(\cdot,\cdot) \in H^1(D_2), \quad \sigma_0 \geq 0, \quad \operatorname{supp}\sigma_0 \subset [\overline{m}_a, \overline{M}_1] \times [0,1], \tag{2.33}$$

où $D_2 = \mathbf{R}_+ \times I$ et $0 < \overline{M}_1 < \infty$.

On suppose que

$$S_l(\cdot) \in C^1([0,\infty[), \tag{2.34}$$

$$f \in H^2(I), \quad f(0) = f(1) = 0, \tag{2.35}$$

$$E_{rad} \in L^{\infty}_{loc}(0,\infty; L^2(I)), \tag{2.36}$$

$$\alpha_l(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}_+), \quad \alpha_l(m) > 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}_+, \tag{2.37}$$

$$\beta(\cdot,\cdot) \in C^1((\mathbb{R}_+)^2), \quad \beta(m,m') = 0 \text{ si } m + m' \geq \overline{M}_2 \quad (0 < \overline{M}_2 < \infty), \tag{2.38}$$

$$g_0(\cdot),\ g_1(\cdot) \in C^1([0,\infty[), \quad \operatorname{supp} g_0(\cdot) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_b]\ , \quad \operatorname{supp} g_1(\cdot) \subset [0, \overline{m}_b]. \tag{2.39}$$

La condition (2.38) est une approximation motivée par le fait que dans l'atmosphère les grandes gouttelettes subissent le processus de fragmentation, qui contrebalance la croissance de la population de gouttelettes de masse élevée due à la coagulation.

D'autre part, pour les difficultés techniques, dans les expressions concernant la condensation et l'évaporation, au lieu de $h_{gl}(T,\pi,m)$ et $H_{gl}\big(T,\pi,\sigma(\cdot)\big)$ définis dans (2.18) et (2.20), on a considéré les approximations

$$h^0_{gl}(T,\pi,m) = K_1 \frac{S_l(m)}{m}(\Theta_\delta(\pi) - \overline{\pi}_{vs}(T)), \tag{2.40}$$

$$H^0_{gl}(T,\pi,\sigma) = K_1(\Theta_\delta(\pi) - \overline{\pi}_{vs}(T)) \int_0^\infty \frac{S_l(m)}{m}\sigma(m)dm, \tag{2.41}$$

où $\Theta_\delta(\pi)$ est la moyenne locale de $\pi(x)$ avec une fonction de poids convenable, par exemple

$$\Theta_\delta(\pi)(x) = \frac{\int_0^1 \pi(y) e^{-(\frac{x-y}{\delta})^2} dy}{\int_0^1 e^{-(\frac{x-y}{\delta})^2} dy}, \qquad \delta \neq 0. \tag{2.42}$$

Le résultat principal de [2] est donné dans le théorème suivant.

**Théorème 2.5.1** *Il existe un $\bar{t} > 0$ tel que dans l'intervalle $[0,\bar{t}]$ le système d'équations* (2.23)–(2.27) *avec la substitution de $h^0_{gl}$, $H^0_{gl}$ et $[\Theta_\delta(\pi) - \overline{\pi}_{vs}]^+$ (définis dans* (2.40)-(2.42)*) au lieu de $h_{gl}$, $H_{gl}$ et $[\pi - \overline{\pi}_{vs}]^+$ et avec les conditions aux limites* (2.28) *et les conditions initiales* (2.29)–(2.33) *admet, dans* *l'intervalle de temps* $[0,\bar{t}]$*, une solution* $(v,\vartheta,\varrho,\pi,\sigma)$ *et une seule dans la classe*

$$v,\vartheta \in L^\infty(0,\bar{t};H_0^1(I)) \cap L^2(0,\bar{t};H^2(I)),$$

$$\varrho \in C([0,\bar{t}];H^1(I)), \qquad \inf_{(x,t)\in I\times[0,\bar{t}]} \varrho(x,t) > 0,$$

$$\pi \in C([0,\bar{t}];H^1(I)), \qquad \inf_{(x,t)\in I\times[0,\bar{t}]} \pi(x,t) > 0,$$

$$\sigma \in C([0,\bar{t}];H^1(D_2)), \quad \sigma \geq 0.$$

L'idée générale adoptée pour l'étude de la solution locale est celle de linéarisation, c'est-à-dire de rendre linéaires les équations non lineaires en fixant des données et de chercher un point fixe d'un opérateur défini par la solution des équations linéairisées. Plus précisement, on considère les fonctions données $\bar{v}$, $\bar{\vartheta}$, $\bar{\varrho}$, $\bar{\pi}$ et $\bar{\sigma}$ dans $I\times[0,t_1]$ $(t_1>0)$ satisfaisant aux conditions aux limites et initiales (2.28)–(2.33) et telles que

$$\bar{v} \in L^\infty(0,t_1;H_0^1(I)) \cap L^2(0,t_1;H^2(I)),$$

$$\bar{\vartheta} \in L^\infty(0,t_1;H_0^1(I)) \cap L^2(0,t_1;H^2(I)),$$

$$\bar{\varrho} \in C([0,t_1];H^1(I)), \qquad \inf_{x\in I} \bar{\varrho}(x,t) > 0,$$

$$\bar{\pi} \in C([0,t_1];H^1(I)),$$

$$\bar{\sigma} \in C([0,t_1];H^1(D_2)).$$

On définit l'opérateur $G_1$ qui à $(\bar{v},\bar{\vartheta})$ associe la solution $(\varrho,\pi,\sigma)$ des équations (2.25)-(2.27) avec $v=\bar{v}$, $\vartheta=\bar{\vartheta}$ et l'opérateur $G_2$ qui à $(\bar{v},\bar{\vartheta},\varrho,\pi,\sigma)$ associe la solution $(v,\vartheta)$ des équations linéarisées de (2.23)-(2.24) ; ensuite on démontre que pour $\bar{t}>0$ suffisamment petit l'opérateur $G=G_2\circ G_1$ est une contraction dans l'espace $\left(L^\infty(0,\bar{t};L^2(I)) \cap L^2(0,\bar{t};H_0^1(I))\right)^2 \times \left(L^\infty(0,\bar{t};L^2(I))\right)^2 \times$

$L^\infty(0, \bar{t}; L^2(D_2))$, ce qui donne l'existence et l'unicité de la solution locale dans la classe indiquée dans l'énoncé du théorème. Même si ce schéma de démonstration est usuel pour ce type d'équations, l'estimation de $\sigma$ requiert une technique extrêmement élaborée. Pour plus de détails, voir [2].

La candidate tient à remercie professeur Hisao Fujita Yashima pour avoir traduit les parties qui nous interessent des livres [24], [35].

# Chapitre 3

# Solution globale de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute

Dans ce chapitre on va considérer une équation integro-différentielle décrivant le processus de coagulation des gouttelettes se trouvant dans l'air. Il s'agit de l'équation pour la densité $\sigma_l(m, t, z) = \sigma(m, t, z)$ en une dimension spatiale (dimension connue comme axe verticale de l'atmosphère) dans le cas d'équilibre et en absence de mouvement de l'air. On montre l'existence et l'unicité d'une solution globale ainsi que sa convergence vers une solution stationnaire.

## 3.1 Position du problème

Considérons l'intervalle $[0, 1]$, qui représente l'espace "vertical" dans lequel les gouttelettes se déplacent à cause de la force gravitationnelle. Désignons par $\sigma(m, t, z)$ la densité de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse $m$ au point $z \in [0, 1]$ à l'instant $t \in \mathbb{R}$. On rappelle que dans la littérature concernant l'équation de Smoluchowski on utilise souvent le nombre (dans le sens statistique) $\tilde{n} = \tilde{n}(m,t,z) = \frac{\sigma(m,t,z)}{m}$ de gouttelettes de masse $m$ au lieu de la densité de l'eau liquide $\sigma(m,t,z)$. Mais nous préférons utiliser cette dernière pour décrire la modélisation générale des phénomènes météorologiques ([2], [16], [32]).

On suppose que les gouttelettes subissent le processus de coagulation et en même temps se déplacent dans l'air par la force gravitationnelle en subissant également l'effet de frottement avec l'air environnant ; cependant on ne considère pas l'éventuelle condensation de la vapeur d'eau sur les gouttelettes ni l'évaporation à partir des gouttelettes ; l'absence de condensation et d'évaporation correspondrait à l'état d'équilibre entre la vapeur d'eau présente dans l'air et la densité de la vapeur saturée. De plus, si on considère l'absence de mouvement de l'air (c'est-à-dire $v = 0$), la vitesse $u_l(m) = u(m)$ d'une gouttelette de masse $m$ définie dans (2.8) sera

$$u(m) = -\frac{1}{\alpha(m)}g, \tag{3.1}$$

où $\alpha(m) = \alpha_l(m)$ est le coefficient de frottement entre les gouttelettes de masse $m$ et l'air tandis que $g$ est une constante positive représentant l'accélération gravitationnelle .

En tenant compte de ces considérations, l'équation (2.16) se réduit à l'équation

$$\begin{aligned} \partial_t\sigma(m,t,z) + \partial_z(\sigma(m,t,z)u(m)) = \\ = \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',t,z)\sigma(m-m',t,z)dm' + \\ -m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,t,z)\sigma(m',t,z)dm'. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Si dans l'équation (3.2) on néglige la dépendance de $z \in [0,1]$, l'équation sera réduite à l'équation de Smoluchowski (dans une version avec la densité $\sigma(m,t) = m\tilde{n}(m,t)$).

Mais dans la nature, et à cause de la courbure très élevée de leur surface, les gouttelettes très petites s'évaporent immédiatement (voir par exemple [21], [31]) et d'autre part les gouttelettes très grandes se fragmentent à cause de la friction avec l'air environnant. Compte tenu de ces circonstances, dans le présent travail on se limite à considérer seulement les fonctions $\sigma(m,t,z)$ ne prenant des valeurs strictement positives que pour des $m$ tels que

$$0 < \overline{m}_a < m < \overline{m}_A < \infty.$$

En ce qui concerne la fonction $\alpha(m)$, on suppose qu'elle est une fonction strictement positive et suffisamment régulière (par exemple $\alpha(m) \in C^1(\mathbb{R}_+)$). Il est utile de rappeler que dans l'état normal de l'atmosphère $\alpha(m)$ est une fonction décroissante et ses valeurs varient sensiblement selon les valeurs de $m$ (pour les données expérimentales, voir par exemple [35]). Même si l'effet de la friction (par unité de masse) croît rapidement quand $m$ s'approche de 0, compte tenu de l'absence de gouttelettes très petites ($m < \overline{m}_a$), pour éviter un raisonnement inutilement compliqué, on suppose que

$$\sup_{m \in \mathbb{R}_+} \alpha(m) < \infty.$$

Pour la fonction $\beta(m_1,m_2) = \beta_l(m_1,m_2)$ on suppose que

$$\beta(\cdot,\cdot) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+), \quad \beta(m_1,m_2) \geq 0 \quad \forall (m_1,m_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \tag{3.3}$$

$$\beta(m_1,m_2) = \beta(m_2,m_1), \tag{3.4}$$

$$\beta(m_1, m_2) = 0 \qquad \text{pour} \;\; m_1 + m_2 \geq \overline{m}_A. \tag{3.5}$$

Les conditions (3.3) et (3.4) sont des conditions naturelles de la fonction de probabilité de rencontre de gouttelettes. D'autre part, la condition (3.5) est une approximation motivée par le fait que, comme nous l'avons déjà évoqué, dans l'atmosphère les grandes gouttelettes subissent également le processus de fragmentation, qui contrebalance la croissance de la population de gouttelettes de masse élevée due à la coagulation (cette approximation a été adoptée également dans [16], [2], [32]).

Pour la commodité de la notation, nous posons

$$\overline{\alpha}_0 = \sup_{m \in \mathbb{R}_+} \alpha(m), \qquad \overline{u}_0 = -\frac{g}{\overline{\alpha}_0}. \tag{3.6}$$

Dans la suite, on considère le problème de trouver une fonction $\sigma(m, t, z)$, qui vérifie l'équation (3.2) pour $(m, t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ avec la condition aux limites (condition d'entrée)

$$\sigma(m, t, 1) = \overline{\sigma}_1(m, t) \tag{3.7}$$

et la condition initiale

$$\sigma(m, 0, z) = \overline{\sigma}_0(m, z). \tag{3.8}$$

Conformément à ce que nous avons dit plus haut, on supposera que

$$\overline{\sigma}_1(m, t) = \overline{\sigma}_0(m, z) = 0 \qquad \text{pour} \;\; m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[.$$

## 3.2 Préliminaires

Pour résoudre l'équation (3.2) avec les conditions (3.7), (3.8), on utilisera l'idée de la transformer en une équation différentielle ordinaire dans un espace de Banach ou un espace de Fréchet. Pour cela, on introduit le changement de variables $(m, t, z) \mapsto (\tilde{m}, \tilde{t}, \tilde{z})$ défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{m} = m, \\ \tilde{z} = z, \\ \tilde{t} = t + \frac{1-z}{u(m)} \end{array} \right. \tag{3.9}$$

et on définit

$$\tilde{\sigma}(\tilde{m}, \tilde{t}, \tilde{z}) = \sigma(m, t, z) = \sigma(m, \tilde{t} - \frac{1-z}{u(m)}, z).$$

Dans la suite, on va écrire simplement $m$ et $z$ au lieu de $\tilde{m}$ et $\tilde{z}$ et encore $\sigma(m, \tilde{t}, z)$ au lieu de $\tilde{\sigma}(\tilde{m}, \tilde{t}, \tilde{z})$, ce qui ne crée pas d'équivoque dans le calcul.

Dans les coordonnées $(m, \tilde{t}, z)$ l'équation (3.2) se transforme en

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\sigma(m, \tilde{t}, z) = \frac{m}{2u(m)} \int_0^m & \beta(m - m', m')\sigma(m', \tilde{t}^*(m, m', \tilde{t}, z), z) \times \\ & \times\sigma(m - m', \tilde{t}^*(m, m - m', \tilde{t}, z), z)dm' + \\ -\frac{m}{u(m)} \int_0^\infty & \beta(m, m')\sigma(m, \tilde{t}, z)\sigma(m', \tilde{t}^*(m, m', \tilde{t}, z), z)dm', \end{aligned} \tag{3.10}$$

où

$$\tilde{t}^*(m, m', \tilde{t}, z) = \tilde{t} - \frac{1-z}{u(m)} + \frac{1-z}{u(m')}.$$

Pour réformuler l'équation (3.10) en une équation différentielle ordinaire et établir des propriétés utiles pour l'opérateur intégral du deuxième membre de cette équation, il est convenable, pour chaque $z \in [0, 1]$ fixé, d'introduire la famille de courbes

$$\gamma_\tau = \gamma_{\tau,z} = \{(m, \tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid \tilde{t} = \tau + \frac{1-z}{u(m)}\}, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

On voit alors que les intégrales du second membre de l'équation (3.10) pourront être exprimées comme intégrales sur les courbes $\gamma_{\tau(m,\tilde{t})}$ et $\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\tilde{t})}$, où

$\tau(m,\tilde{t}) = \tilde{t} - \dfrac{1-z}{u(m)}$. Or, pour les exprimer comme intégrales sur les courbes $\gamma_{\tau(m,\tilde{t})}$ et $\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\tilde{t})}$, il nous faut préciser la mesure avec laquelle on effectue l'intégration.

Considérons la courbe

$$\gamma = \gamma_0.$$

On définit la projection $P_{\mathbb{R}_+}$ de $\gamma$ sur $\mathbb{R}_+$ par la relation

$$P_{\mathbb{R}_+}A' = \{m \in \mathbb{R}_+ \mid \exists \tilde{t} \ \text{ tel que } \ (m,\tilde{t}) \in A'\},$$

pour les sous-ensembles $A'$ de $\gamma$, la régularité de la fonction $\tilde{t}(m) = \dfrac{1-z}{u(m)}$ nous permet de définir les ensembles mesurables de $\gamma$ et la mesure $\mu_\gamma$ sur $\gamma$ par les relations suivantes :

*i)* $A' \subset \gamma$ est mesurable si et seulement si $P_{\mathbb{R}_+}A'$ est mesurable selon Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$,

*ii)* $\mu_\gamma(A') = \mu_{L,\mathbb{R}_+}(P_{\mathbb{R}_+}A')$ où $\mu_{L,\mathbb{R}_+}(.)$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $\gamma_\tau$ est la translation de $\gamma$ par $\tau$ dans la direction de $\tilde{t}$, on définit la même mesure $\mu_\gamma(\cdot)$ sur toute les courbes $\gamma_\tau$ ; l'utilisation du même symbole $\mu_\gamma(\cdot)$ ne crée aucune équivoque (on voit immédiatement que la projection $P_{\mathbb{R}_+}$ et la mesure $\mu_\gamma(\cdot)$ ne dépendent pas de $\tau \in \mathbb{R}$).

Une fois la mesure $\mu_\gamma(\cdot)$ sur $\gamma_\tau$ introduite, on établit des relations entre $\mu_\gamma(\cdot)$ et la mesure sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On pose

$$\tau(m,\tilde{t}) = \tilde{t} - \frac{1-z}{u(m)}$$

(c'est-à-dire, $\tau(m,\tilde{t})$ est le nombre $\tau \in \mathbb{R}$ tel que $(m,\tilde{t}) \in \gamma_\tau$) et on considère la famille $\mathfrak{A}$ des ensembles $A$ ayant la forme

$$A = \{(m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid m \in [m_1, m_2[,\ \tau(m,\tilde{t}) \in [\tau_1, \tau_2[\ \} \tag{3.12}$$

avec $0 \leq m_1 \leq m_2 < \infty$, $-\infty < \tau_1 \leq \tau_2 < \infty$. Si on définit la fonction $\tilde{\mu} : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_+$ par la relation

$$\tilde{\mu}(A) = (m_2 - m_1)(\tau_2 - \tau_1)$$

pour $A \in \mathfrak{A}$, on constate que, de la même manière que la construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ à partir de la famille des rectangles, le prolongement de $\tilde{\mu}$ définit les ensembles mesurables selon $\tilde{\mu}$ de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et la mesure sur eux, mesure que nous notons toujours $\tilde{\mu}$, et que $\tilde{\mu}$ coïncide avec la mesure de Lebesgue $\mu_{L,\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ; on a en effet

$$\tilde{\mu}(A) = \mu_{L,\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}}(A)$$

pour $A \in \mathfrak{A}$.

Pour les mesures $\mu_\gamma$ et $\tilde{\mu}$ ainsi définies et les mesures de Lebesgue $\mu_{L,\mathbb{R}_+}$, $\mu_{L,\mathbb{R}}$ et $\mu_{L,\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}}$ respectivement sur $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes.

**Lemme 3.2.1** *Soit $A$ un ensemble mesurable (selon Lebesgue) de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On pose*

$$A_\tau = \{\, m \in \mathbb{R}_+ \mid \exists \tilde{t} \in \mathbb{R} \text{ tel que } (m, \tilde{t}) \in \gamma_\tau \cap A \,\},$$

$$A_m = \{\tau \in \mathbb{R} \mid \exists \tilde{t} \in \mathbb{R} \text{ tel que } (m, \tilde{t}) \in \gamma_\tau \cap A\}.$$

*Alors on a*

$$\mu_{L,\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}}(A) = \tilde{\mu}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_\gamma(A_\tau) d\tau =$$

$$= \int_{\gamma_0} \mu_{L,\mathbb{R}}(A_m) \mu_\gamma(dm) = \int_0^\infty \mu_{L,\mathbb{R}}(A_m) dm.$$

(Ici et dans la suite l'élément d'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue s'écrit directement $dm$, $d\tau$ etc... sans utiliser les notations $\mu_{L,\mathbb{R}_+}(dm)$, $\mu_{L,\mathbb{R}}(d\tau)$, etc...).

**Démonstration.** On démontre d'abord l'égalité

$$\tilde{\mu}(A) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_A(\tau) d\tau, \tag{3.13}$$

où $\varphi_A(\tau) = \mu_\gamma(A_\tau)$.

Si $A \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ est la famille des ensembles $A$ ayant la forme (3.12)), alors la formule (3.13) est évidente, car dans ce cas on a

$$\varphi_A(\tau) = \begin{cases} \mu_\gamma(A_\tau) & \text{pour } \tau \in \cup_{m\in\mathbb{R}_+} A_m, \\ 0 & \text{pour } \tau \notin \cup_{m\in\mathbb{R}_+} A_m. \end{cases}$$

La formule est également vérifiée pour les ensembles qui sont des réunions finies d'ensembles deux à deux disjoints de $\mathfrak{A}$.

Dans le cas général, la démonstration de l'égalité (3.13) est basée sur le lemme suivant, qui est la version pour la mesure $\tilde{\mu}$ du lemme de la page 309 de [22].

**Lemme 3.2.2** *Pour tout ensemble $\tilde{\mu}-$mesurable $A$, il existe un ensemble $B$ avec $A \subset B$ vérifiant l'égalité*

$$\tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(B) \tag{3.14}$$

*et ayant la forme*

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n, \quad B_1 \supset B_2 \supset ... \supset B_n \supset ...,$$

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}, \quad B_{n1} \subset B_{n2} \subset ... \subset B_{nk} \subset ...,$$

*où les ensembles $B_{nk}$ sont des réunions finies d'élément de $\mathfrak{A}$.*

**Démonstration.** On le démontre de manière analogue au lemme de la page 309 de [22], en remplaçant les rectangles par des ensembles $A$ du type (3.12). $\square$

**Suite de la démonstration du lemme 3.2.1.** L'égalité (3.13) s'étend facilement des ensembles $B_{nk}$ qui sont des réunions finies d'ensembles deux à deux disjoints de $\mathfrak{A}$ aux ensembles $B_n$ et $B$ à l'aide du théorème de Beppo Levi. En effet, comme on a

$$\varphi_{B_n}(\tau) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \varphi_{B_{nk}}(\tau) \quad \text{avec} \quad \varphi_{B_{n1}} \leq \varphi_{B_{n2}} \leq \cdots \leq \varphi_{B_{nk}} \leq \cdots$$

et

$$\varphi_B(\tau) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \varphi_{B_n}(\tau) \quad \text{avec} \quad \varphi_{B_1} \geq \varphi_{B_2} \geq \cdots \geq \varphi_{B_n} \geq \cdots,$$

alors, à l'aide du théorème de Beppo Levi, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_{B_n}(\tau) d\tau = \lim_{k \longrightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_{B_{nk}}(\tau) d\tau,$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_B(\tau) d\tau = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_{B_n}(\tau) d\tau.$$

Avec $B_{nk}$, $B_n$ et $B$ comme dans le lemme 3.2.2, en vertu de la continuité de la mesure on a

$$\tilde{\mu}(B_n) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \tilde{\mu}(B_{nk}), \qquad \tilde{\mu}(B) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \tilde{\mu}(B_n)$$

et comme $\tilde{\mu}(B_{nk}) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{B_{nk}}(\tau) d\tau$, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_{B_n}(\tau) d\tau = \tilde{\mu}(B_n),$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_B(\tau) d\tau = \tilde{\mu}(B).$$

Par conséquent, l'égalité (3.13) est vraie pour les ensembles qui sont des réunions infinies d'ensembles deux à deux disjoints de $\mathfrak{A}$.

Si $\tilde{\mu}(A) = 0$ alors d'aprés le lemme 3.2.2 il existe un ensemble $B$ (ayant la forme indiquée dans le lemme) tel que $A \subset B$ et $\tilde{\mu}(B) = 0$. Donc on a $\int_{\mathbb{R}} \varphi_B(\tau)d\tau = 0$ et encore

$$\varphi_B(\tau) = \mu_\gamma(B_\tau) = 0 \quad \text{presque pour tout } \tau \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, comme l'ensemble $A_\tau$ est mesurable et $A_\tau \subset B_\tau$, on a

$$\varphi_A(\tau) = \mu_\gamma(A_\tau) = 0 \quad \text{presque pour tout } \tau \in \mathbb{R}$$

et par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_A(\tau)d\tau = 0 = \tilde{\mu}(A).$$

Donc pour un ensemble de mesure nulle la formule (3.13) est vérifié.

Dans le cas général, on met $A$ sous la forme $A = B \backslash C$ avec $B$ ayant la propriété indiquée dans le lemme 3.2.2, en vertu de l'égalité (3.14), on a

$$\tilde{\mu}(C) = 0$$

et donc

$$\mu_\gamma(C_\tau) = 0 \qquad \text{presque pour tout } \tau \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent on a

$$\mu_\gamma(A_\tau) = \mu_\gamma(B_\tau) \quad \text{presque pour tout } \tau \in \mathbb{R};$$

on a donc

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_A(\tau)d\tau = \int_{\mathbb{R}} \varphi_B(\tau)d\tau = \tilde{\mu}(B),$$

ce qui, joint à (3.14), implique l'égalité (3.13).

La démonstration de l'égalité $\tilde{\mu}(A) = \displaystyle\int_{\gamma_0} \mu_{L,\mathbb{R}}(A_m)\mu_\gamma(dm)$ du lemme est tout à fait analogue à la première, tandis que l'égalité $\tilde{\mu}(A) = \displaystyle\int_0^\infty \mu_{L,\mathbb{R}}(A_m)dm$

résulte immédiatement de la relation $\tilde{\mu}(A) = \mu_{L,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}(A) = \displaystyle\int_0^\infty \mu_{L,\mathbb{R}}(A_m)dm.$ Le lemme est démontré. □

**Lemme 3.2.3** *Soit $\sigma(m,\tilde{t}) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Alors, pour presque tout $\tau \in \mathbb{R}$ la restriction de $\sigma(m,\tilde{t})$ à $\gamma_\tau$ appartient à $L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)$.*

La démonstration du lemme 3.2.3 résulte immédiatement du lemme suivant :

**Lemme 3.2.4** *(variante du théorème de Fubini).*
*Soit $\sigma(m,\tilde{t}) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Alors on a*

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \sigma(m,\tilde{t})dmd\tilde{t} = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{\gamma_\tau} \sigma(m,\tilde{t}(m,\tau))\mu_\gamma(dm)\Big)d\tau =$$

$$= \int_{\gamma_0}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(m,\tilde{t}(m,\tau))d\tau\Big)\mu_\gamma(dm) = \int_0^\infty\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(m,\tilde{t})d\tilde{t}\Big)dm =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_0^\infty \sigma(m,\tilde{t})dm\Big)d\tilde{t},$$

*où $\tilde{t}(m,\tau) = \tau + \frac{1-z}{u(m)}$.*

Avant de démontrer le lemme 3.2.4, rappelons d'abord le théorème suivant

**Théorème 3.2.1** *L'intégrale de Lebesgue d'une fonction sommable, non négative $f(x)$ sur un ensemble $M$ $\mu_x-$mesurable est égale à la mesure $\mu(A)$ avec $A$ défini par*

$$A = \{(x,y) :\ x \in M,\ 0 \le y \le f(x)\}$$

*et $\mu = \mu_x \otimes \mu_y$.*

**Démonstration.** Voir [22].

**Démonstration du lemme 3.2.4.** On pose

$$W = \{(m, \tilde{t}, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq \sigma(m, \tilde{t})\}.$$

En appliquant le théorème 3.2.1 avec $\mu_x = \mu_{L,\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}}$ et $\mu_x = \tilde{\mu}$, et en utilisant le lemme 3.2.1, on a

$$\tilde{\mu} \otimes \mu^1(W) = \mu_{L,\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \otimes \mu^1(W) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \sigma(m, \tilde{t}) dm d\tilde{t} = \int\limits_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \sigma(m, \tilde{t}) d\tilde{\mu},$$

où $\mu^1$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (pour $y \in \mathbb{R}$).

En outre d'après le théorème de Fubini classique (dans un espace euclidien) on a

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \sigma(m, \tilde{t}) dm d\tilde{t} = \int_0^\infty \Big( \int_{-\infty}^\infty \sigma(m, \tilde{t}) d\tilde{t} \Big) dm =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \Big( \int_0^\infty \sigma(m, \tilde{t}) dm \Big) d\tilde{t}.$$

Pour établir les égalités

$$\tilde{\mu} \otimes \mu^1(W) = \int_{-\infty}^\infty \Big( \int_{\gamma_\tau} \sigma(m, \tilde{t}) \mu_\gamma(dm) \Big) d\tau =$$

$$= \int_{\gamma_0} \Big( \int_{-\infty}^\infty \sigma(m, \tilde{t}(m, \tau)) d\tau \Big) \mu_\gamma(dm),$$

il suffit de rappeler que d'après le lemme 3.2.1 on a

$$\tilde{\mu} = \mu_\gamma \otimes \mu_\tau$$

($\mu_\tau$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ pour $\tau \in \mathbb{R}$) et que le raisonnement du lemme 3.2.1 peut être généralisé sans difficulté au produit de mesures

$$(\mu_\gamma \otimes \mu^1) \otimes \mu_\tau.$$

Cela étant, on peut démontrer les égalités en appliquant le raisonnement de la démonstration du théorème de Fubini (voir par exemple [22]). En effet, une fois les mesures bien définies la structure géométrique des ensemble sur lesquels elles sont définies n'intervient pas. Le lemme est démontré. □

**Suite de la démonstration du lemme 3.2.3.** On conclut directement à partir du lemme 3.2.4. □

**Lemme 3.2.5** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions appartenant à $\in L^1(\gamma, \mu_\gamma)$. On pose*

$$(f * g)(m) = \int_\gamma f(m - m')g(m')\mu_\gamma(dm').$$

*Alors $f * g \in L^1(\gamma, \mu_\gamma)$ et*

$$\| f * g \|_{L^1(\gamma,\mu_\gamma)} \leq \| f \|_{L^1(\gamma,\mu_\gamma)} \| g \|_{L^1(\gamma,\mu_\gamma)} .$$

**Démonstration.** La mesure $\mu_\gamma$ étant bien définie sur $\gamma_\tau$, le lemme se démontre de la même manière (avec des modifications purement formelles) que dans le cas des fonctions sommables par rapport à la mesure de Lebesgue (voir par exemple [6]). Soit

$$F(m, m') = f(m - m')\, g(m').$$

Pour presque tout $m' \in \gamma$ on a

$$\int_\gamma | F(m, m') | \mu_\gamma(dm) = \int_\gamma | f(m - m')\, g(m') | \mu_\gamma(dm)$$

$$=\mid g(m') \mid \int_\gamma \mid f(m-m') \mid \mu_\gamma(dm)$$
$$=\mid g(m') \mid \parallel f \parallel_{L^1(\gamma,\mu_\gamma)} < \infty$$

et

$$\int_\gamma \int_\gamma \mid F(m,m') \mid \mu_\gamma(dm)\mu_\gamma(dm') = \int_\gamma \mid g(m') \mid \parallel f \parallel_{L^1(\gamma,\mu_\gamma)} \mu_\gamma(dm')$$
$$=\parallel f \parallel_{L^1(\gamma,\mu_\gamma)} \parallel g \parallel_{L^1(\gamma,\mu_\gamma)} < \infty.$$

Appliquant le théorème de Tonelli, on voit que $F \in L^1(\gamma\times\gamma, \mu_\gamma \otimes \mu_\gamma)$. Grâce au théorème de Fubini, on obtient

$$\int_\gamma \mid F(m,m') \mid \mu_\gamma(dm') < \infty \quad \text{presque pour tout} \quad m \in \gamma$$

et

$$\int_\gamma \int_\gamma \mid F(m,m') \mid \mu_\gamma(dm')\mu_\gamma(dm) \leq \parallel f \parallel_{L^1(\gamma,\mu_\gamma)} \parallel g \parallel_{L^1(\gamma,\mu_\gamma)},$$

donc on aura

$$\parallel f * g \parallel_{L^1(\gamma,\mu_\gamma)} \leq \parallel f \parallel_{L^1(\gamma,\mu_\gamma)} \parallel g \parallel_{L^1(\gamma,\mu_\gamma)} .$$

Le lemme est démontré. □

Maintenant, on est en mesure de transformer l'équation (3.10) en une équation différentielle ordinaire, pour cela on pose

$$\tau(m,\tilde{t},z) = \tilde{t} - \frac{1-z}{u(m)}, \qquad \gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\tilde{t},z)} = \gamma_{\tau(m,\tilde{t},z)} \cap [0,m] \times \mathbb{R}. \tag{3.15}$$

Ainsi, on peut écrire l'équation (3.10) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(z) = F(\sigma(z)), \qquad \sigma(z) = \sigma(\cdot,\cdot,z) \tag{3.16}$$

avec

$$F(\sigma(z)) = F(\sigma(z))(m,\tilde{t}) = \tag{3.17}$$

$$= \frac{m}{2u(m)} \int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\tilde{t},z)}} \beta(m-m',m')\sigma(m',\tilde{t}',z)\sigma(m-m',\tilde{t}'',z)\mu_\gamma(dm') +$$
$$-\frac{m}{u(m)} \int_{\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z)}} \beta(m,m')\sigma(m',\tilde{t}',z)\sigma(m,\tilde{t},z)\mu_\gamma(dm'),$$

où $\tilde{t}'$ et $\tilde{t}''$ sont tels que

$$(m',\tilde{t}'), \quad (m-m',\tilde{t}'') \in \gamma_{\tau(m,\tilde{t})}.$$

De manière analogue, les conditions (3.7) et (3.8) se transforment en

$$\sigma(m,\tilde{t},1) = \overline{\sigma}_1^*(m,\tilde{t}), \tag{3.18}$$

$$\sigma(m,\frac{1-z}{u(m)},z) = \overline{\sigma}_0^*(m,z), \tag{3.19}$$

où $\overline{\sigma}_0^*$ et $\overline{\sigma}_1^*$ sont les fonctions obtenues à partir de $\overline{\sigma}_0$ et $\overline{\sigma}_1$ par le changement de variables introduit ci-dessus.

## 3.3 Solution avec la condition d'entrée de classe $L^1$

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution globale du problème (3.16)-(3.19), nous précisons d'abord que le domaine dans lequel nous allons considérer l'équation (3.16) est

$$\Omega = \bigcup_{\tau>0,\, 0<z<1} \gamma_{\tau,z} = \{(m,\tilde{t},z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times ]0,1[ \,|\, \tilde{t} > \frac{1-z}{u(m)}\}.$$

On pose

$$\Gamma_a = \bigcup_{0\leq z\leq 1} \gamma_{0,z} = \{(m,\tilde{t},z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0,1] \,|\, \tilde{t} = \frac{1-z}{u(m)}\},$$

$$\Gamma_b = \{z=1\} \cap \overline{\Omega}.$$

Il est évident que l'on peut identifier $\Gamma_b$ avec $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Les conditions (3.18) et (3.19) peuvent être écrites sous la forme

$$\sigma = \overline{\sigma}_1^* \quad \text{sur } \Gamma_b, \qquad \sigma = \overline{\sigma}_0^* \quad \text{sur } \Gamma_a. \tag{3.20}$$

Avant d'étudier le cas général du problème (3.16)-(3.19), nous allons examiner le cas où la donnée $\overline{\sigma}_1^*$ appartient à $L^1(\Gamma_b)$. Dans ce cas on a la proposition suivante.

**Proposition 3.3.1** *Soient* $\overline{\sigma}_{(a)} \in L^1(\Gamma_a) \cap L^\infty(\Gamma_a)$ *et* $\overline{\sigma}_{(b)} \in L^1(\Gamma_b) \cap L^\infty(\Gamma_b)$ *telles que*

$$\overline{\sigma}_{(a)}(m, \tilde{t}, z) \geq 0 \quad \textit{p.p. sur } \Gamma_a, \qquad \overline{\sigma}_{(b)}(m, \tilde{t}) \geq 0 \quad \textit{p.p. sur } \Gamma_b,$$

$$\overline{\sigma}_{(a)}(m, \tilde{t}, z) = 0, \quad \overline{\sigma}_{(b)}(m, \tilde{t}) = 0 \quad \textit{pour } m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[.$$

*Si*

$$\max(\|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)}, \|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)}) < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)},$$

*où*

$$M_1 = \sup_{2\overline{m}_a \leq m \leq \overline{m}_A, \overline{m}_a \leq m' \leq m - \overline{m}_a} \frac{m\alpha(m)}{2g} \beta(m - m', m'), \tag{3.21}$$

*alors il existe une solution $\sigma$ et une seule de l'équation* (3.16) *satisfaisant aux conditions*

$$\sigma = \overline{\sigma}_{(b)} \quad \textit{sur } \Gamma_b, \qquad \sigma = \overline{\sigma}_{(a)} \quad \textit{sur } \Gamma_a, \tag{3.22}$$

*solution appartenant à la classe*

$$\sigma \in C([0,1]; L^1(\Omega_z)) \cap L^\infty(\Omega),$$

*où*

$$\Omega_z = \bigcup_{\tau > 0} \gamma_{\tau,z} = \{(m, \tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,|\, \tilde{t} > \frac{1 - z}{u(m)}\}. \tag{3.23}$$

**Démonstration.** Pour montrer cette proposition, il nous convient d'examiner directement l'approximation successive avec laquelle on construit la solution $\sigma(m,\tilde{t},z)$.

Posons

$$\sigma^{[0]} = \overline{\sigma}_{(b)} \quad \text{sur } \Gamma_b, \qquad \sigma^{[0]} = \overline{\sigma}_{(a)} \quad \text{sur } \Gamma_a \tag{3.24}$$

et définissons $\sigma^{[n]}$, $n = 1, 2, \cdots$, par les relations

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma^{[n]}(m,\tilde{t},z) = F(\sigma^{[n-1]}(z))(m,\tilde{t}), \tag{3.25}$$

$$\sigma^{[n]} = \overline{\sigma}_{(b)} \quad \text{sur } \Gamma_b, \qquad \sigma^{[n]} = \overline{\sigma}_{(a)} \quad \text{sur } \Gamma_a,$$

où $F(\cdot)$ est l'opérateur défini dans (3.17).

D'autre part pour chaque point $(m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\tilde{t} \geq -\frac{\alpha(m)}{g}$, fixé, on définit le point $\zeta_1(m,\tilde{t}) \in [0,1]$ par la relation

$$\zeta_1(m,\tilde{t}) = \begin{cases} 1 + \frac{\tilde{t}}{\alpha(m)}g & \text{si } (m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-, \quad \tilde{t} \geq -\frac{\alpha(m)}{g}, \\ 1 & \text{si } (m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+. \end{cases} \tag{3.26}$$

On remarque que

$$(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t})) \in \Gamma_b \cup \Gamma_a \quad \forall (m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad \tilde{t} \geq -\frac{\alpha(m)}{g}.$$

Donc de l'équation (3.25) on déduit que

$$\sigma^{[n]}(m,\tilde{t},z) = \sigma^{[n]}(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t})) - \int_z^{\zeta_1(m,\tilde{t})} F(\sigma^{[n-1]}(z'))(m,\tilde{t})\big)dz' \tag{3.27}$$

avec

$$\sigma^{[n]}(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t})) = \begin{cases} \overline{\sigma}_{(b)} & \text{sur } \Gamma_b, \\ \overline{\sigma}_{(a)} & \text{sur } \Gamma_a. \end{cases}$$

**Lemme 3.3.1** *Quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $\sigma^{[n]}$ est bien définie dans la classe*

$$\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z) \in L^1(\Omega_z) \cap L^\infty(\Omega_z), \qquad 0 \leq z \leq 1$$

*et on a*

$$\operatorname{supp}(\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A] \times \mathbb{R} \qquad pour \;\; 0 \leq z \leq 1, \tag{3.28}$$

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\Omega_z)} \leq \frac{\|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)} + \|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)}}{1-(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)(\|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)} + \|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)})(1-z)} \tag{3.29}$$

*pour* $\frac{(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)(\|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)}+\|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)})\;\;-1}{(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)}} < z \leq 1$, *où*

$$M_2 = \sup_{m,m' \in \mathbb{R}_+} \frac{m\alpha(m)}{g}\beta(m,m'). \tag{3.30}$$

**Démonstration.** Remarquons d'abord que, si $\sigma^{[n]}$ $(n \geq 1)$ est bien définie par les relations (3.27) et si $\operatorname{supp}(\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A] \times \mathbb{R}$ pour $0 \leq z \leq 1$, alors $\sigma^{[n]}$ vérifie la condition (3.28). En effet, la condition (3.5) implique que la première intégrale de l'opérateur $F(\cdot)$ (voir (3.17)) s'annule pour $m \geq \overline{m}_A$. D'autre part, si $m \leq \overline{m}_a$, alors sous le signe d'intégration $\sigma^{[n-1]}(m-m',\cdot,z)$ et $\sigma^{[n-1]}(m',\cdot,z)$ s'annulent et donc l'intégrale s'annule. En outre par hypothèse $\sigma^{[n-1]}$ s'annule pour $m \leq \overline{m}_a$ et $m \geq \overline{m}_A$, ce qui implique que même la seconde intégrale de l'opérateur $F(\cdot)$ s'annule pour $m \leq \overline{m}_a$ et $m \geq \overline{m}_A$. On en déduit (3.28) pour $\sigma^{[n]}$.

Examinons maintenant l'opérateur $F(\cdot)$ appliqué à $\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)$. En supposant que le support de $\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)$ est contenu dans $[\overline{m}_a, \overline{m}_A] \times \mathbb{R}$ et en rappelant la définition (3.1) de $u(m)$, on a (avec la notation $\tilde{t}'$, $\tilde{t}''$ comme dans (3.16))

$$\left|\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\tilde{t},z)}} \beta(m-m',m')\sigma^{[n-1]}(m',\tilde{t}',z)\sigma^{[n-1]}(m-m',\tilde{t}'',z)\mu_\gamma(dm')\right| \leq$$

$$\leq M_1\,\mu_\gamma(\gamma_\tau^{[0,m]}) \sup_{(m',\tilde{t}')\in\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z)}^{[0,m]}} \sigma^{[n-1]}(m',\tilde{t}',z) \sup_{(m-m',\tilde{t}'')\in\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z)}^{[0,m]}} \sigma^{[n-1]}(m-m',\tilde{t}'',z) \leq$$

$$\leq M_1(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|^2_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z)},\mu_\gamma)}$$

et

$$\Big|\frac{m\alpha(m)}{g}\int_{\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z)}} \beta(m,m')\sigma^{[n-1]}(m',\tilde{t}',z)\sigma^{[n-1]}(m,\tilde{t},z)\mu_\gamma(dm')\Big| \leq$$

$$\leq M_2\,\mu_\gamma(\gamma_\tau) \sup_{(m',\tilde{t}')\in\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z)}} \sigma^{[n-1]}(m',\tilde{t}',z) \sup_{(m,\tilde{t})\in\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z)}} \sigma^{[n-1]}(m,\tilde{t},z) \leq$$

$$\leq M_2(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|^2_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z)},\mu_\gamma)} \qquad \text{pour presque tout } \tau \geq 0,$$

où $M_1$ et $M_2$ sont les constantes définies dans (3.21) et (3.30) respectivement.

Donc a partir de l'équation (3.27) et la définition (3.23) de $\Omega_z$, on a

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\Omega_z)} \leq \max(\|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)};\|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)})+$$

$$+(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\int_z^1 \|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z')\|^2_{L^\infty(\Omega_{z'})}dz',$$

d'où

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\Omega_z)} \leq \|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)}+\|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)}+ \tag{3.31}$$

$$+(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\int_z^1 \|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z')\|^2_{L^\infty(\Omega_{z'})}dz'.$$

En outre, en utilisant le lemme 3.2.5 et en tenant compte de la condition (3.5), on a

$$\Big\|\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_{\gamma_\tau^{[0,m]}} \beta(m-m',m')\sigma^{[n-1]}(m',\tilde{t}',z)\sigma^{[n-1]}(m-m',\tilde{t}'',z)\mu_\gamma(dm')\Big\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}+$$

$$+\Big\|\frac{m\alpha(m)}{g}\int_{\gamma_\tau} \beta(m,m')\sigma^{[n-1]}(m',\tilde{t}',z)\sigma^{[n-1]}(m,\tilde{t},z)\mu_\gamma(dm')\Big\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} \leq$$

$$\leq M_1\Big\|\big(\sigma^{[n-1]}*\sigma^{[n-1]}\big)(\cdot,\cdot,z)\Big\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}+$$

$$+M_2\Big\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\Big\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\Big\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\Big\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\leq$$
$$\leq C\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\big|_{\gamma_\tau}\|^2_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)},$$

où $C$ est une constante indépendante de $z$ (et $\tilde{t}$, $\tilde{t}'$ et $\tilde{t}''$ sont tels que $(m,\tilde{t})$, $(m',\tilde{t}')$, $(m-m',\tilde{t}'')\in\gamma_\tau$ comme dans (3.16)). Comme on a en outre

$$\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\big|_{\gamma_\tau}\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\leq \mu_\gamma(\gamma_\tau)\sup_{(m,\tilde{t})\in\gamma_\tau}\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\leq$$
$$\leq(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\big|_{\gamma_\tau}\|_{L^\infty(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\leq$$
$$\leq(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\Omega_z)}\qquad\text{(pour presque tout }\tau>0),$$

à l'aide du lemme 3.2.4 on en déduit que

$$\|F(\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z))\|_{L^1(\Omega_z)}=\int_{\Omega_z}|F(\sigma^{[n-1]}(m,\tilde{t},z))|dmd\tilde{t}=$$
$$=\int_{\Omega_z}|F(\sigma^{[n-1]}(m,\tilde{t},z))|d\tilde{\mu}=\int_{\mathbb{R}_+^*}\int_{\gamma_\tau}|F(\sigma^{[n-1]}(m,\tilde{t},z))|\mu_\gamma(dm)d\tau\leq$$
$$\leq\int\limits_{\mathbb{R}_+^*}\Big(\Big\|\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_{\gamma_\tau^{[0,m]}}\beta(m-m',m')\sigma^{[n-1]}(m',\tilde{t}',z)\sigma^{[n-1]}(m-m',\tilde{t}'',z)\mu_\gamma(dm')\Big\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}+$$
$$+\Big\|\frac{m\alpha(m)}{g}\int_{\gamma_\tau}\beta(m,m')\sigma^{[n-1]}(m',\tilde{t}',z)\sigma^{[n-1]}(m,\tilde{t},z)\mu_\gamma(dm')\Big\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\Big)d\tau\leq$$
$$\leq C\int\limits_{\mathbb{R}_+^*}\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\big|_{\gamma_\tau}\|^2_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}d\tau$$
$$\leq C\int\limits_{\mathbb{R}_+^*}\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\big|_{\gamma_\tau}\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\big|_{\gamma_\tau}\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}d\tau\leq$$
$$\leq C(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\gamma_\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^*}\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\big|_{\gamma_\tau}\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}d\tau$$
$$\leq C'\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\Omega_z)}\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\Omega_z)},$$

donc on a

$$\|F(\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z))\|_{L^1(\Omega_z)} \leq C'\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\Omega_z)}\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\Omega_z)} \tag{3.32}$$

avec une constante $C'$ indépendante de $z$.

Définissons une suite de fonctions $y_n(z)$, $0 \leq z \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, par les relations récursives

$$y_0(z) = \|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)} + \|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)} \qquad \text{pour } 0 \leq z \leq 1,$$

$$y_n(z) = \|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)} + \|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)} +$$
$$+(M_1+M_2)(\overline{m}_A - \overline{m}_a)\int_z^1 y_{n-1}^2(z')dz', \quad \text{pour } 0 \leq z \leq 1.$$

On va démontrer par induction que, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\sigma^{[n]}$ est bien définie et vérifie, outre la condition (3.28), les relations

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\Omega_z)} \leq y_n(z), \tag{3.33}$$

$$\sup_{0\leq z\leq 1}\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\Omega_z)} < \infty. \tag{3.34}$$

En effet, pour $n = 0$, les relations (3.28), (3.33) et (3.34) résultent immédiatement de la définition (3.24) et des hypothèses sur les fonctions $\overline{\sigma}_{(a)}$ et $\overline{\sigma}_{(b)}$.

Supposons maintenant que $\sigma^{[n-1]}$ vérifie les relations (3.28), (3.33) et (3.34) (dans lesquelles on substitue naturellement $n-1$ à la place de $n$). Nous avons déjà remarqué que, sous ces hypothèses, $\sigma^{[n]}$ vérifie la condition (3.28). D'autre part, de l'hypothèse sur $\sigma^{[n-1]}$, on a

$$\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\Omega_z)} \leq y_{n-1}(z),$$

d'où

$$\int_z^1 \|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z')\|^2_{L^\infty(\Omega_{z'})}dz' \leq \int_z^1 y^2_{n-1}(z')dz',$$

de la définition de $y_n$ et de l'inégalité (3.31), on constate que $\sigma^{[n]}$ vérifie l'inégalité (3.33). Enfin, d'après la définition (3.27) de $\sigma^{[n]}$ on a

$$\int_{\Omega_z} \sigma^{[n]}(m,\tilde{t},z)dmd\tilde{t} \leq \max(\|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^1(\Gamma_b)};\|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^1(\Gamma_a)})+$$

$$+\int_{\Omega_z}\int_z^{\zeta_1(m,\tilde{t})} \left|F\big(\sigma^{[n-1]}(z')\big)(m,\tilde{t})\right|dz'dmd\tilde{t}.$$

On définit $\tilde{F}$ par

$$\tilde{F}(\sigma(z'))(m,\tilde{t}) = \begin{cases} F(\sigma(z'))(m,\tilde{t}) & \text{si } z \leq z' \leq \zeta_1(m,\tilde{t}), \\ 0 & \text{si } z' > \zeta_1(m,\tilde{t}) \end{cases}$$

et on a

$$\int_{\Omega_z} \sigma^{[n]}(m,\tilde{t},z)dmd\tilde{t} \leq$$

$$\leq \|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^1(\Gamma_b)} + \|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^1(\Gamma_a)} + \int_{\Omega_z}\int_z^1 \left|\tilde{F}\big(\sigma^{[n-1]}(z')\big)(m,\tilde{t})\right|dz'dmd\tilde{t}$$

$$\leq \|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^1(\Gamma_b)} + \|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^1(\Gamma_a)} + \int_z^1\int_{\Omega_{z'}} \left|\tilde{F}\big(\sigma^{[n-1]}(z')\big)(m,\tilde{t})\right|dmd\tilde{t}dz'$$

$$\leq \|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^1(\Gamma_b)} + \|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^1(\Gamma_a)} + \int_z^1\int_{\Omega_{z'}} \left|F\big(\sigma^{[n-1]}(z')\big)(m,\tilde{t})\right|dmd\tilde{t}dz'$$

$$\leq \|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^1(\Gamma_b)} + \|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^1(\Gamma_a)} + \int_z^1 \left\|F\big(\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z')\big)\right\|_{L^1(\Omega_{z'})}dz'.$$

Tenant compte de l'inégalité (3.32), on obtient

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\Omega_z)} \leq \|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^1(\Gamma_b)} + \|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^1(\Gamma_a)}+$$

$$+C'\int_z^1 \|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\Omega_{z'})}\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^1(\Omega_{z'})}dz',$$

donc on a

$$\sup_{0\le z\le 1}\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\Omega_z)} \le \|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^1(\Gamma_b)} + \|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^1(\Gamma_a)} +$$

$$+C'\sup_{0\le z\le 1}\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\Omega_z)}\sup_{0\le z\le 1}\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\Omega_z)},$$

les hypothèses sur $\sigma^{[n-1]}$, $\overline{\sigma}_{(b)}$ et $\overline{\sigma}_{(a)}$ impliquent que $\sigma^{[n]}$ vérifie également (3.34).

On remarque que la suite $\{y_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $0\le z\le 1$, est une suite croissante et est l'approximation successive de la solution $Y(z)$ du problème de Cauchy (pour $z\le 1$)

$$\begin{cases} Y'(z) = -(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)Y(z)^2, \\ Y(1) = \|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)} + \|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)}. \end{cases}$$

La fonction $Y(z)$ a la forme explicite

$$Y(z) = \frac{\|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)} + \|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)}}{1-(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)(\|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)} + \|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)})(1-z)}$$

pour $\frac{(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)(\|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)}+\|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)})\ -1}{(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)(\|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)}+\|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)})} < z \le 1$, ce qui nous permet de démontrer que (3.33) implique l'inégalité (3.29). $\square$

**Suite de la démonstration de la proposition 3.3.1.** Nous allons démontrer avant tout l'existence et l'unicité de la solution dans un intervalle $[1-\delta,1]$ avec $\delta>0$ suffisamment petit.

Considérons deux fonctions $\sigma_1$ et $\sigma_2$ appartenant à $L^1(\Omega_z)$ et la différence $F(\sigma_1)-F(\sigma_2)$. D'après le lemme 3.2.4 on a

$$\|F(\sigma_1)-F(\sigma_2)\|_{L^1(\Omega_z)} = \int_{\Omega_z}|F(\sigma_1)-F(\sigma_2)|dmd\tilde{t} =$$

$$= \int\limits_{\Omega_z} |F(\sigma_1) - F(\sigma_2)| d\tilde{\mu} = \int\limits_{\mathbb{R}_+^*} \Big( \int_{\gamma_\tau} |F(\sigma_1) - F(\sigma_2)| \mu_\gamma(dm) \Big) d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+^*} \int\limits_{\gamma_\tau} \Big| \frac{m}{2u(m)} \int\limits_{\gamma_\tau^{[0,m]}} \beta(m-m', m') \big[ \sigma_1(m', \tilde{t}', z) \sigma_1(m-m', \tilde{t}'', z) +$$

$$- \sigma_2(m', \tilde{t}', z) \sigma_2(m-m', \tilde{t}'', z) \big] \mu_\gamma(dm') +$$

$$- \frac{m}{u(m)} \int\limits_{\gamma_\tau} \beta(m, m') \big[ \sigma_1(m, \tilde{t}, z) \sigma_1(m', \tilde{t}', z) - \sigma_2(m, \tilde{t}, z) \sigma_2(m', \tilde{t}', z) \big] \mu_\gamma(dm') \Big| \mu_\gamma(dm) d\tau$$

$$\leq C_\beta \Big[ \int\limits_{\mathbb{R}_+^*} \int\limits_{\gamma_\tau} \Big| \int\limits_{\gamma_\tau^{[0,m]}} \big[ \big( \sigma_1(m-m', \tilde{t}'', z) - \sigma_2(m-m', \tilde{t}'', z) \big) \sigma_1(m', \tilde{t}', z) +$$

$$+ \big( \sigma_1(m', \tilde{t}', z) - \sigma_2(m', \tilde{t}', z) \big) \sigma_2(m-m', \tilde{t}'', z) \big] \mu_\gamma(dm') + \int\limits_{\gamma_\tau} \big[ \big( \sigma_1(m, \tilde{t}, z) - \sigma_2(m, \tilde{t}, z) \big) \times$$

$$\times \sigma_2(m', \tilde{t}', z) + \big( \sigma_1(m', \tilde{t}', z) - \sigma_2(m', \tilde{t}', z) \big) \sigma_1(m, \tilde{t}, z) \big] \mu_\gamma(dm') \Big| \mu_\gamma(dm) d\tau \Big]$$

$$\leq C_\beta \Big[ \int\limits_{\mathbb{R}_+^*} \int\limits_{\gamma_\tau} \Big( \big( |\sigma_1 - \sigma_2| * \sigma_1 \big)(m, \tilde{t}, z) + \big( |\sigma_1 - \sigma_2| * \sigma_2 \big)(m, \tilde{t}, z) \Big) \mu_\gamma(dm) d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}_+^*} \int\limits_{\gamma_\tau} \Big( |\sigma_1(m, \tilde{t}, z) - \sigma_2(m, \tilde{t}, z)| \int\limits_{\gamma_\tau} \sigma_2(m', \tilde{t}', z) \mu_\gamma(dm') +$$

$$+ \sigma_1(m, \tilde{t}, z) \int\limits_{\gamma_\tau} |\sigma_1(m', \tilde{t}', z) - \sigma_2(m', \tilde{t}', z)| \mu_\gamma(dm') \Big) \mu_\gamma(dm) d\tau \Big] \leq$$

$$\leq C_\beta \Big[ \int\limits_{\mathbb{R}_+^*} \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau)} \big( \|\sigma_1\|_{L^1(\gamma_\tau)} + \|\sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau)} \big) d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}_+^*} \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau)} \big( \|\sigma_1\|_{L^1(\gamma_\tau)} + \|\sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau)} \big) d\tau \Big]$$

$$\leq 2C_\beta \int\limits_{\mathbb{R}_+^*} \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)} \big( \|\sigma_1\|_{L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)} + \|\sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)} \big) d\tau,$$

où

$$C_\beta = \max\Big[\sup_{0<m'<m<\infty}\frac{m}{2u(m)}\beta(m-m',m')\,,\ \sup_{m,m'\in\mathbb{R}_+}\frac{m}{u(m)}\beta(m,m')\Big]. \quad (3.35)$$

Encore une fois à l'aide du lemme 3.2.4, on déduit que

$$\|F(\sigma_1)-F(\sigma_2)\|_{L^1(\Omega_z)}\leq \quad (3.36)$$

$$\leq 2C_\beta \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathbb{R}_+^*}\big(\|\sigma_1\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}+\|\sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\big)\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^1(\Omega_z)}$$

$$\leq 2C_\beta(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathbb{R}_+^*}\big(\|\sigma_1\|_{L^\infty(\gamma_\tau)}+\|\sigma_2\|_{L^\infty(\gamma_\tau)}\big)\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^1(\Omega_z)}.$$

Maintenant on substitue $\sigma_1=\sigma^{[n]}$ et $\sigma_2=\sigma^{[n-1]}$ dans (3.36). Alors en vertu de (3.29) on a

$$\|F(\sigma^{[n]})-F(\sigma^{[n-1]})\|_{L^1(\Omega_z)}\leq 2C_\beta(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathbb{R}_+^*}\big(\|\sigma^{[n]}\|_{L^\infty(\Omega_z)}+$$

$$+\|\sigma^{[n-1]}\|_{L^\infty(\Omega_z)}\big)\|\sigma^{[n]}-\sigma^{[n-1]}\|_{L^1(\Omega_z)}\leq$$

$$\leq 4C_\beta(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathbb{R}_+^*}\left[\frac{\|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)}+\|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)}}{1-(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)(\|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)}+\|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)})(1-z)}\right]\times$$

$$\times\|\sigma^{[n]}-\sigma^{[n-1]}\|_{L^1(\Omega_z)},$$

$$\|F(\sigma^{[n]})-F(\sigma^{[n-1]})\|_{L^1(\Omega_z)}\leq\Lambda_\sigma(z)\|\sigma^{[n]}-\sigma^{[n-1]}\|_{L^1(\Omega_z)},$$

où $\Lambda_\sigma(z)=4C_\beta(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\frac{\|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)}+\|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)}}{1-(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)(\|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)}+\|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)})(1-z)}$.

C'est-à-dire, sur les fonctions $\sigma^{[n]}$, $n\in\mathbb{N}$, l'opérateur $F(\cdot)$ satisfait à la condition de Lipschitz dans l'espace $L^1(\Omega_z)$ avec le coefficient de Lipschitz $\Lambda_\sigma(z)$. Donc, de la même manière que pour la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution locale d'une équation différentielle ordinaire, on peut démontrer qu'il existe un $\delta>0$ tel que $\sigma^{[n]}$ converge, quand $n$ tend vers l'infini, vers une fonction $\sigma$ dans la topologie de

$$C([1-\delta,1];L^1(\Omega_z))$$

et que la limite $\sigma$ satisfait, dans l'intervalle $[1-\delta, 1]$, l'équation (3.16) et les conditions (3.22). On voit aisément que l'unicité de la solution $\sigma$ dans l'intervalle $[1-\delta, 1]$ se démontre d'une manière analogue à la démonstration du théorème classique.

Une fois la solution locale $\sigma$ obtenue sur l'intervalle $[1-\delta, 1]$, examinons ses propriétés. Avant tout on remarque que (3.28) pour tout $n \in \mathbb{N}$ implique que la limite de la suite $\sigma^{[n]}$ jouit de la même propriété, c'est-à-dire on a

$$\operatorname{supp}(\sigma) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A] \times \mathbb{R} \times [1-\delta, 1]. \tag{3.37}$$

D'autre part, pourvu que $\sigma \geq 0$, la première intégrale de l'opérateur $F(\cdot)$ (voir (3.17)) est négative ($\leq 0$), tandis que la seconde intégrale de $F(\cdot)$ est de la forme

$$\sigma(m, \tilde{t}, z)\frac{m\alpha(m)}{g}\int_{\gamma_\tau} \beta(m, m')\sigma(m', \tilde{t}'(m, m', \tilde{t}, z), z)\mu_\gamma(dm'),$$

donc on peut écrire l'équation (3.16) sous la forme

$$\partial_z\sigma = E\sigma - G$$

avec $E$ et $G$ sont deux fonctionnelles positives, de manière analogue aux cas des équations différentielles ordinaires, on a

$$\sigma(m, \tilde{t}, z) = \sigma(m, \tilde{t}, \zeta_1(m, \tilde{t}))\exp\Big(-\int_z^{\zeta_1} E(z')dz'\Big) +$$

$$+\int_z^{\zeta_1} G(z')\exp\Big(-\int_z^{z'} E(z'')dz''\Big)dz',$$

où

$$\sigma(m, \tilde{t}, \zeta_1(m, \tilde{t})) = \begin{cases} \overline{\sigma}_{(a)} & \text{sur } \Gamma_a, \\ \overline{\sigma}_{(b)} & \text{sur } \Gamma_b, \end{cases}$$

ce qui montre que

$$\sigma \geq 0 \qquad \text{p.p. dans } \ \Omega_z \quad \text{pour } z \in [1-\delta, 1]. \tag{3.38}$$

Les relations (3.37) et (3.38) étant démontrées, on peut faire l'estimation de $\|\sigma(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\Omega_z)}$. Pour cela on considère le deuxième membre $F(\sigma(z))$ de (3.16). En vertu de (3.38) on a

$$\frac{m\alpha(m)}{g}\int_{\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z)}} \beta(m,m')\sigma(m',\tilde{t}',z)\sigma(m,\tilde{t},z)\mu_\gamma(dm') \geq 0,$$

ce qui nous permet de déduire de (3.16) (voir la définition (3.1) pour $u$) que

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(m,\tilde{t},z) \geq -\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\tilde{t},z)}} \beta(m-m',m')\sigma(m',\tilde{t}',z)\sigma(m-m',\tilde{t}'',z)\mu_\gamma(dm'),$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(m,\tilde{t},z) \geq -M_1\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\tilde{t},z)}} \sigma(m',\tilde{t}',z)\sigma(m-m',\tilde{t}'',z)\mu_\gamma(dm') \tag{3.39}$$

(ici $\tilde{t}'$ et $\tilde{t}''$ sont comme dans (3.16)). Donc, si on pose

$$\varphi(z) = \|\sigma(\cdot,\cdot;z)\|_{L^\infty(\Omega_z)},$$

alors, compte tenu de (3.37), il résulte de (3.39) que

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(m,\tilde{t},z) \geq -M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)\varphi(z)^2 \qquad \text{p.p. dans } \ \Omega_z,$$

ou

$$\sigma(m,\tilde{t},z) \leq \sigma(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t})) + M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)\int_z^{\zeta_1(m,\tilde{t})} \varphi(z')^2 dz' \qquad \text{p.p. dans } \Omega_z. \tag{3.40}$$

On note par

$$\|\overline{\sigma}_{(a,b)}\|_{L^\infty(\Gamma_a\cup\Gamma_b)} = \max(\|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)}; \|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)}),$$

alors de (3.40) on a

$$\varphi(z) \leq \|\overline{\sigma}_{(a,b)}\|_{L^\infty(\Gamma_a\cup\Gamma_b)} + M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)\int_z^1 \varphi(z')^2 dz' \qquad \text{p.p. dans } \ \Omega_z.$$

Cette inégalité implique que

$$\|\sigma(\cdot,\cdot;z)\|_{L^\infty(\Omega_z)} = \varphi(z) \leq \tilde{Y}(z) \tag{3.41}$$

pour $z \leq 1$ dans l'intervalle de l'existence de $\sigma(\cdot,\cdot;z)$ et de $\tilde{Y}(z)$, où $\tilde{Y}(z)$ est la solution de l'équation intégrale

$$\tilde{Y}(z) = \|\overline{\sigma}_{(a,b)}\|_{L^\infty(\Gamma_a\cup\Gamma_b)} + M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)\int_z^1 \tilde{Y}(z')^2 dz',$$

ou, ce qui revient au même, du problème de Cauchy

$$\frac{d\tilde{Y}(z)}{dz} = -M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)\tilde{Y}(z)^2, \qquad \tilde{Y}(1) = \|\overline{\sigma}_{(a,b)}\|_{L^\infty(\Gamma_a\cup\Gamma_b)}.$$

On a d'ailleurs

$$\tilde{Y}(z) = \frac{\|\overline{\sigma}_{(a,b)}\|_{L^\infty(\Gamma_a\cup\Gamma_b)}}{1 - M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)\|\overline{\sigma}_{(a,b)}\|_{L^\infty(\Gamma_a\cup\Gamma_b)}(1-z)}. \tag{3.42}$$

On rappelle que $\|\overline{\sigma}_{(a,b)}\|_{L^\infty(\Gamma_a\cup\Gamma_b)} < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)}$, ce qui implique que le deuxième membre de (3.42) est bien défini pour tout $z \in [0,1]$. Donc l'inégalité (3.41) est valable pour tout $z \in [0,1]$ tel que $\sigma(\cdot,\cdot,z)$ existe.

Rappelons que l'on a construit la solution locale $\sigma(\cdot,\cdot;z)$ dans un intervalle $[1-\delta, 1]$ et que l'on peut prolonger la solution $\sigma(\cdot,\cdot,z)$ pour tout l'intervalle où les conditions pour la construction de la solution locale continuent à être vérifiées. Or, de (3.36) on déduit que, si $\|\sigma(\cdot,\cdot;z)\|_{L^\infty(\Omega_z)} < \infty$, alors on peut encore prolonger la solution. Par conséquent, en vertu de (3.41) et (3.42), la solution $\sigma(\cdot,\cdot,z)$ peut être prolongée dans tout l'intervalle $[0,1]$.

L'unicité de la solution résulte de l'unicité de la solution locale.

La proposition est démontrée. $\square$

## 3.4 Existence et unicité de la solution globale en temps

Pour démontrer un théorème d'existence et d'unicité de la solution globale dans le cas général, on va établir la propriété de "cône de dépendance" pour l'équation (3.16). Pour ce faire, on considère un ensemble mesurable $\omega$ de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ avec $0 < mes(\omega) < \infty$. On définit

$$D[\omega] = \bigcup_{(m,\tilde{t})\in\omega} D_{(m,\tilde{t})}, \tag{3.43}$$

où

$$D_{(m,\tilde{t})} = \bigcup_{0\leq z\leq 1} \Big( \bigcup_{\tau_-(m,\tilde{t},z)\leq\tau\leq\tau_+(m,\tilde{t})} \gamma_{\tau,z} \Big) = \tag{3.44}$$

$$= \big\{(m', \tilde{t}', z') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0,1] \mid \tilde{t}' = \tau + \frac{1-z'}{u(m')},\ \tau_-(m,\tilde{t},z') \leq \tau \leq \tau_+(m,\tilde{t})\big\}$$

avec

$$\begin{cases} \tau_+(m,\tilde{t}) = \tau(m,\tilde{t},0) = \tilde{t} - \frac{1}{u(m)}, \\ \tau_-(m,\tilde{t},z) = \max\big(0,\ \tau_+(m,\tilde{t}) + \frac{z}{\overline{u}_0}\big) = \max\big(0,\ \tilde{t} - \frac{1}{u(m)} + \frac{z}{\overline{u}_0}\big) \end{cases} \tag{3.45}$$

(pour $\overline{u}_0$, voir (3.6)). On définit également $D_\omega(z)$ par

$$D_\omega(z) = \bigcup_{(m,\tilde{t})\in\omega} \Big( \bigcup_{\tau_-(m,\tilde{t},z)\leq\tau\leq\tau_+(m,\tilde{t})} \gamma_{\tau,z} \Big) = \big\{(m',\tilde{t}',z') \in D[\omega] \mid z' = z\big\}; \tag{3.46}$$

on remarque que $D_\omega(z_1)$ est l'intersection de $\bigcup_{(m,\tilde{t})\in\omega} D_{(m,\tilde{t})}$ et du plan $z = z_1$. D'après la définition de l'ensemble $D_{(m,\tilde{t})}$ (voir aussi la définition (3.15) de $\tau(m,\tilde{t},z)$), on remarque que

$$(m', \tilde{t}', z') \in D_{(m,\tilde{t})} \Rightarrow \gamma_{\tau(m',\tilde{t}',z'),z'} \subset D_{(m,\tilde{t})},$$

$$\tau(m_1, \tilde{t}_1, 0) = \tau(m_2, \tilde{t}_2, 0) \Rightarrow D_{(m_1,\tilde{t}_1)} = D_{(m_2,\tilde{t}_2)};$$

cette dernière relation signifie que, si $(m_1, \tilde{t}_1)$ et $(m_2, \tilde{t}_2)$ se trouvent sur une courbe $\gamma_{\tau,0}$, alors ils définissent le même ensemble.

La propriété de "cône de dépendance" est donnée par le lemme suivant.

**Lemme 3.4.1** *Soient* $\overline{\sigma}^{[1]}_{(a)}$ *et* $\overline{\sigma}^{[2]}_{(a)}$ *deux fonctions définies sur* $\Gamma_a$, $\overline{\sigma}^{[1]}_{(b)}$ *et* $\overline{\sigma}^{[2]}_{(b)}$ *deux fonctions définies sur* $\Gamma_b$. *On suppose que* $\overline{\sigma}^{[1]}_{(a)}$, $\overline{\sigma}^{[2]}_{(a)}$, $\overline{\sigma}^{[1]}_{(b)}$, $\overline{\sigma}^{[2]}_{(b)}$ *satisfont aux conditions de la proposition 3.3.1. Soit* $\sigma^{[1]}$*(resp.* $\sigma^{[2]}$*) la solution de l'équation* (3.16) *avec la condition* (3.22) *avec* $\overline{\sigma}_{(a)} = \overline{\sigma}^{[1]}_{(a)}$, $\overline{\sigma}_{(b)} = \overline{\sigma}^{[1]}_{(b)}$ *(resp.* $\overline{\sigma}_{(a)} = \overline{\sigma}^{[2]}_{(a)}$, $\overline{\sigma}_{(b)} = \overline{\sigma}^{[2]}_{(b)}$*). Si*

$$\overline{\sigma}^{[1]}_{(b)} = \overline{\sigma}^{[2]}_{(b)} \quad sur\ \Gamma_b \cap D[\omega], \qquad \overline{\sigma}^{[1]}_{(a)} = \overline{\sigma}^{[2]}_{(a)} \quad sur\ \Gamma_a \cap D[\omega], \tag{3.47}$$

*alors on a*

$$\sigma^{[1]} = \sigma^{[2]} \quad p.p.\ dans\ D[\omega].$$

**Démonstration.** On intègre l'équation (3.16) par rapport à $z$, on a

$$\sigma^{[i]}(m, \tilde{t}, z) = \sigma^{[i]}(m, \tilde{t}, \zeta_1(m, \tilde{t}))+$$

$$-\frac{m}{2u(m)} \int_z^{\zeta_1} \int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'}} \beta(m-m', m')\sigma^{[i]}(m', \tilde{t}', z')\sigma^{[i]}(m-m', \tilde{t}'', z')\mu_\gamma(dm')dz'+$$

$$+\frac{m}{u(m)} \int_z^{\zeta_1} \int_{\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'}} \beta(m, m')\sigma^{[i]}(m', \tilde{t}', z')\sigma^{[i]}(m, \tilde{t}, z')\mu_\gamma(dm')dz', \qquad i = 1, 2,$$

tandis que les conditions (3.18)-(3.19) nous donnent

$$\sigma^{[i]}(m, \tilde{t}, \zeta_1(m, \tilde{t})) = \begin{cases} \overline{\sigma}^{[i]}_{(a)} & \text{sur } \Gamma_a, \\ \\ \overline{\sigma}^{[i]}_{(b)} & \text{sur } \Gamma_b, \end{cases}$$

$\zeta_1(m,\tilde{t})$ étant le nombre défini dans (3.26). En faisant la différence de ces équations pour $i=1$ et $i=2$, on a

$$|\sigma^{[1]}(m,\tilde{t},z)-\sigma^{[2]}(m,\tilde{t},z)| \leq |\sigma^{[1]}(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t}))-\sigma^{[2]}(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t}))|+$$

$$+\Big|\frac{m}{2u(m)}\int_z^{\zeta_1}\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'}}\beta(m-m',m')\Big[\sigma^{[1]}(m',\tilde{t}',z')\sigma^{[1]}(m-m',\tilde{t}'',z')+$$

$$-\sigma^{[2]}(m',\tilde{t}',z')\sigma^{[2]}(m-m',\tilde{t}'',z')\Big]\mu_\gamma(dm')dz'\Big|+\Big|\frac{m}{u(m)}\int_z^{\zeta_1}\int_{\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'}}\beta(m,m')\times$$

$$\times\Big[\sigma^{[1]}(m',\tilde{t}',z')\sigma^{[1]}(m,\tilde{t},z')-\sigma^{[2]}(m',\tilde{t}',z')\sigma^{[2]}(m,\tilde{t},z')\Big]\mu_\gamma(dm')dz'\Big|,$$

donc on a

$$|\sigma^{[1]}(m,\tilde{t},z)-\sigma^{[2]}(m,\tilde{t},z)| \leq |\sigma^{[1]}(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t}))-\sigma^{[2]}(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t}))|+$$

$$+C_\beta\Big[\int_z^{\zeta_1}\int\limits_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'}}\Big(\big|\sigma^{[1]}(m-m',\tilde{t}'',z')-\sigma^{[2]}(m-m',\tilde{t}'',z')\big|\sigma^{[2]}(m',\tilde{t}',z')+$$

$$+\big|\sigma^{[1]}(m',\tilde{t}',z')-\sigma^{[2]}(m',\tilde{t}',z')\big|\sigma^{[1]}(m-m',\tilde{t}'',z')\Big)\mu_\gamma(dm')dz'+$$

$$+\int_z^{\zeta_1}\int\limits_{\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'}}\Big(\big|\sigma^{[1]}(m,\tilde{t},z')-\sigma^{[2]}(m,\tilde{t},z')\big|\sigma^{[2]}(m',\tilde{t}',z')+$$

$$+\big|\sigma^{[1]}(m',\tilde{t}',z')-\sigma^{[2]}(m',\tilde{t}',z)\big|\sigma^{[1]}(m,\tilde{t},z')\Big)\mu_\gamma(dm')dz'\Big],$$

où $C_\beta$ est une constante définie dans (3.35). On en déduit que

$$|\sigma^{[1]}(m,\tilde{t},z)-\sigma^{[2]}(m,\tilde{t},z)| \leq |\sigma^{[1]}(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t}))-\sigma^{[2]}(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t}))|+ \tag{3.48}$$

$$+C_\beta\Big[\int_z^1\Big(\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z')-\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})}\|\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^1(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})}+$$

$$+\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^1(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})}\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z')-\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})}\Big)dz'+$$

$$+\int_z^1 \Big( \|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z') - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})} \|\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^1(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})} +$$

$$+(\overline{m}_A - \overline{m}_a)\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})} \|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z') - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})}\Big) dz'\Big].$$

Considérons maintenant un point générique $(m, \tilde{t}, z)$ de $D[\omega]$. En vertu de (3.44)-(3.45) il existe $(m_0, \tilde{t}_0) \in \omega \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que

$$\max\big(0,\ \tilde{t}_0 - \frac{1}{u(m_0)} + \frac{z}{\overline{u}_0}\big) = \tau_-(m_0, \tilde{t}_0, z) \leq \tilde{t} - \frac{1-z}{u(m)} \leq \tau_+(m_0, \tilde{t}_0) = \tilde{t}_0 - \frac{1}{u(m_0)}.$$

Cette inégalité, jointe à l'inégalité $u(m) \leq \overline{u}_0 < 0$, implique que, pour $0 \leq z \leq z' \leq 1$, on a

$$\tilde{t}_0 - \frac{1}{u(m_0)} + \frac{z'}{\overline{u}_0} \leq \tilde{t} - \frac{1-z'}{u(m)} \leq \tilde{t}_0 - \frac{1}{u(m_0)},$$

ou, en vertu de (3.15), (3.45), on a

$$\tau_-(m_0, \tilde{t}_0, z') \leq \tau(m, \tilde{t}, z') \leq \tau_+(m_0, \tilde{t}_0),$$

ce qui, d'après la définition (3.46) de l'ensemble $D_\omega(z)$, démontre que

$$\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'} \subset D_\omega(z') \qquad \text{pour } 0 \leq z \leq z' \leq \zeta_1(m, \tilde{t}) \leq 1.$$

On rappelle que l'on a en outre, pour $i = 1, 2$,

$$\|\sigma^{[i]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z),z},\mu_\gamma)} \leq (\overline{m}_A - \overline{m}_a)\|\sigma^{[i]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z),z})} \leq$$

$$\leq (\overline{m}_A - \overline{m}_a)\|\sigma^{[i]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_\omega(z))},$$

pour presque tout $(m, \tilde{t}) \in \Omega_z$ (voir (3.23)).

Cela étant, de l'équation (3.48) on déduit que

$$\|\sigma^{[1]}(.,.,z) - \sigma^{[2]}(.,.,z)\|_{L^\infty(D_\omega(z))} \leq$$

$$\leq \max\Big( \sup_{(m,\tilde{t})\in\Gamma_b\cap D[\omega]} |\overline{\sigma}^{[1]}_{(b)}(m,\tilde{t}) - \overline{\sigma}^{[2]}_{(b)}(m,\tilde{t})|; \sup_{(m,\tilde{t},\zeta_1)\in\Gamma_a\cap D[\omega]} |\overline{\sigma}^{[1]}_{(a)}(m,\tilde{t},\zeta_1) - \overline{\sigma}^{[2]}_{(a)}(m,\tilde{t},\zeta_1)|\Big) +$$
$$+C\int_z^1 \Big(\|\sigma^{[1]}(.,.,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))} + \|\sigma^{[2]}(.,.,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))}\Big)\times$$
$$\times\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z') - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))}dz',$$

où $C$ est une constante indépendante de $z$, d'où

$$\|\sigma^{[1]}(.,.,z) - \sigma^{[2]}(.,.,z)\|_{L^\infty(D_\omega(z))} \leq$$
$$\leq \Big(\|\overline{\sigma}^{[1]}_{(b)} - \overline{\sigma}^{[2]}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b\cap D[\omega])} + \|\overline{\sigma}^{[1]}_{(a)} - \overline{\sigma}^{[2]}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a\cap D[\omega])}\Big) +$$
$$+C\int_z^1 \Big(\|\sigma^{[1]}(.,.,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))} + \|\sigma^{[2]}(.,.,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))}\Big)\times$$
$$\times\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z') - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))}dz'.$$

A l'aide du lemme de Gronwall, on en déduit que

$$\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z) - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_\omega(z))} \leq \tag{3.49}$$
$$\leq \Big(\|\overline{\sigma}^{[1]}_{(b)} - \overline{\sigma}^{[2]}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b\cap D[\omega])} + \|\overline{\sigma}^{[1]}_{(a)} - \overline{\sigma}^{[2]}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a\cap D[\omega])}\Big)\times$$
$$\times\exp\Big(C\int_z^1 \big(\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))} + \|\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))}\big)dz'\Big).$$

Or, en vertu de l'hypothèse (3.47) on a

$$\|\overline{\sigma}^{[1]}_{(b)} - \overline{\sigma}^{[2]}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b\cap D[\omega])} = \|\overline{\sigma}^{[1]}_{(a)} - \overline{\sigma}^{[2]}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a\cap D[\omega])} = 0,$$

ce qui nous permet de déduire de (3.49) que

$$\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z) - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_\omega(z))} \leq 0,$$

ou, compte tenu de la relation $D[\omega] = \bigcup_{0\leq z\leq 1} D_\omega(z)$,

$$\sigma^{[1]}(m,\tilde{t},z) = \sigma^{[2]}(m,\tilde{t},z) \qquad \text{p.p. dans } D[\omega].$$

Le lemme est démontré.

Maintenant nous pouvons démontrer le théorème principal.

**Théorème 3.4.1** *Si $\overline{\sigma}_0^* \in L^\infty(\Gamma_a)$ et $\overline{\sigma}_1^* \in L^\infty(\Gamma_b)$ satisfont aux conditions*

$$\overline{\sigma}_0^*(m,\tilde{t},z) \geq 0 \quad p.p.\ sur\ \Gamma_a, \qquad \overline{\sigma}_1^*(m,\tilde{t}) \geq 0 \quad p.p.\ sur\ \Gamma_b,$$

$$\overline{\sigma}_0^*(m,\tilde{t},z) = 0, \quad \overline{\sigma}_1^*(m,\tilde{t}) = 0 \qquad pour\ m \in [0,\overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A,\infty[,$$

$$\max\left(\|\overline{\sigma}_0^*\|_{L^\infty(\Gamma_a)}; \|\overline{\sigma}_1^*\|_{L^\infty(\Gamma_b)}\right) < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)},$$

*$M_1$ étant la constante définie dans (3.21), alors l'équation (3.16) avec la condition (3.20) admet une solution $\sigma$ et une seule appartenant à la classe*

$$\sigma \in L^\infty(\Omega)$$

*et $\sigma$ vérifie les relations*

$$\sigma(m,\tilde{t},z) \geq 0 \quad p.p.\ dans\ \Omega,$$

$$\sigma(m,\tilde{t},z) = 0 \quad pour\ m \in [0,\overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A,\infty[.$$

**Démonstration.** Pour démontrer l'existence de la solution globale en temps du problème (3.16), (3.20), on considère une famille d'ensembles mesurables et bornés $\omega_i$, $i \in \mathbb{N}$, définis par

$$\omega_i = \{(m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,|\, \overline{m}_a \leq m \leq \overline{m}_A,\ \frac{1}{u(m)} \leq \tilde{t} \leq i\} = \tag{3.50}$$

$$= \Omega_0 \cap \{(m,\tilde{t}) \in [\overline{m}_a,\overline{m}_A] \times \mathbb{R} \,|\ \tilde{t} \leq i\},$$

où $\Omega_0$ est l'ensemble défini dans (3.23) avec $z = 0$. La définition de $D[\omega]$ (voir (3.43), (3.44)) nous permet de définir un nombre $N$ tel que

$$D_{\omega_i}(1) \subset \{(m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,|\, \tilde{t} \leq i + N\} \qquad \text{pour tout } i \in \mathbb{N}.$$

On considère une fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\psi(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s \geq 1 \end{cases}$$

avec $0 \leq \psi(s) \leq 1 \ \forall s \in [0,1]$ et on pose

$$\psi_i(\tilde{t}) = \psi(\tilde{t} - (i+N));$$

on a évidemment

$$D_{\omega_i}(1) \subset \{(m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,|\, \psi_i(\tilde{t}) = 1\} \qquad \text{pour tout } i \in \mathbb{N}. \tag{3.51}$$

Cela étant, on considère la famille d'équations

$$\partial_z \sigma^{[i]}(m,\tilde{t},z) = F\big(\sigma^{[i]}(z)\big)(m,\tilde{t}), \qquad i \in \mathbb{N} \tag{3.52}$$

(avec $F(\cdot)$ définie dans (3.17)), complétées par les conditions

$$\sigma^{[i]} = \psi_i \, \overline{\sigma}_1^* \quad \text{sur } \Gamma_b, \qquad \sigma^{[i]} = \overline{\sigma}_0^* \quad \text{sur } \Gamma_a. \tag{3.53}$$

D'après la proposition 3.3.1 (avec $\overline{\sigma}_{(b)} = \psi_i \, \overline{\sigma}_1^*$ et $\overline{\sigma}_{(a)} = \overline{\sigma}_0^*$) le problème (3.52)-(3.53) admet une unique solution $\sigma = \sigma^{[i]} \in C([0,1]; L^1(\Omega_z)) \cap L^\infty(\Omega)$ telle que

$$\sigma^{[i]} \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega, \qquad \sigma^{[i]}(m,\tilde{t},z) = 0 \quad \text{pour } m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[.$$

D'autre part, d'après la définition des ensembles $\omega_i$ (voir (3.50)), on a

$$D[\omega_i] \subset D[\omega_{i'}] \qquad \text{pour } i \leq i'$$

et encore

$$D_{\omega_i}(1) \subset D_{\omega_{i'}}(1) \qquad \text{pour } i \leq i'.$$

Par conséquent, de (3.53) (voir aussi (3.51)), on a

$$\sigma^{[i]} = \sigma^{[i']} \quad \text{sur } \Gamma_b \cap D[\omega_i], \quad \sigma^{[i]} = \sigma^{[i']} \quad \text{sur } \Gamma_a \cap D[\omega_i] \qquad \text{pour } i \leq i'$$

et en vertu du lemme 3.4.1 on a

$$\sigma^{[i]} = \sigma^{[i']} \quad \text{p.p. dans } D[\omega_i] \quad \text{pour } i \leq i'.$$

Donc, en définissant $\sigma$ par

$$\sigma = \begin{cases} \sigma^{[0]} & \text{dans} \quad \Omega \cap D[\omega_0], \\ \sigma^{[i]} & \text{dans} \quad D[\omega_i] \setminus D[\omega_{i-1}], \quad i = 1, 2, \cdot, \cdot, \cdot, \end{cases}$$

on a

$$\sigma = \sigma^{[i]} \qquad \text{p.p. dans } \Omega \cap D[\omega_i] \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Par suite, en vertu de (3.52) on a

$$\partial_z \sigma(m, \tilde{t}, z) = F\big(\sigma(z)\big)(m, \tilde{t}), \qquad \text{dans } \Omega \cap D[\omega_i] \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

En outre, en vertu de (3.51) et (3.53), on a

$$\sigma = \sigma^{[i]} = \overline{\sigma}_1^* \qquad \text{sur} \quad \Gamma_b \cap D[\omega_i], \qquad \sigma = \sigma^{[i]} = \overline{\sigma}_0^* \quad \text{sur } \Gamma_a \cap D[\omega_i].$$

Donc, en rappelant les relations $\Omega \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} D[\omega_i]$ et $\Gamma_b \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_{\omega_i}(1)$ qui résultent de la définition de $\omega_i$, $D[\omega_i]$, $D_{\omega_i}(1)$, on peut conclure qu'il existe une solution du problème (3.16), (3.20) appartenant à $L^\infty(\Omega)$.

Pour démontrer l'unicité de la solution, considérons deux éventuelles solutions $\sigma_1$, $\sigma_2$ du problème (3.16), (3.20). Si $\sigma_1 \neq \sigma_2$ sur un ensemble de mesure strictement positive, alors on peut choisir un ensemble mesurable $\omega$ tel que $0 < mes(\omega) < \infty$ et que $mes(\{(m, \tilde{t}, z) \in D[\omega] \,|\, \sigma_1 \neq \sigma_2\}) > 0$. Or comme $\sigma_1$ et $\sigma_2$ sont des solutions du problème (3.16), (3.20), $\sigma_1 = \sigma_2$ sur

$\Gamma_a \cup \Gamma_b$, en particulier $\sigma_1 = \sigma_2$ sur $(\Gamma_a \cup \Gamma_b) \cap D[\omega]$ ; cette condition entraîne, d'après le lemme 3.4.1, que $\sigma_1 = \sigma_2$ dans $D[\omega]$, ce qui prouve qu'il n'est pas possible d'avoir deux solutions $\sigma_1$ et $\sigma_2$ qui se diffèrent sur un ensemble de mesure strictement positive. L'unicité de la solution est démontrée. $\square$

En retournant aux coordonnées $(m, t, z)$, on peut exprimer le résultat sous la forme suivante.

**Théorème 3.4.2** *Si* $\overline{\sigma}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times [0,1])$ *et* $\overline{\sigma}_1 \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ *satisfont aux conditions*

$$\overline{\sigma}_0(m,z) \geq 0 \quad \textit{p.p. sur } \mathbb{R}_+ \times [0,1], \qquad \overline{\sigma}_1(m,t) \geq 0 \quad \textit{p.p. sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,$$

$$\overline{\sigma}_0(m,z) = 0, \quad \overline{\sigma}_1(m,t) = 0 \qquad \textit{pour } m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[,$$

$$\max\left(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times[0,1])}; \|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)}\right) < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)},$$

$M_1$ *étant la constante définie dans* (3.21), *alors l'équation* (3.2) *avec les conditions* (3.7) *et* (3.8) *admet une solution* $\sigma$ *et une seule appartenant à la classe*

$$\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times ]0,1[)$$

*et* $\sigma$ *vérifie les relations*

$$\sigma(m,t,z) \geq 0 \ \textit{p.p. dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times ]0,1[,$$

$$\sigma(m,t,z) = 0, \quad \textit{pour } m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[.$$

**Démonstration.** Rappelons qu'avec le changement de variables $(m,t,z) \mapsto (m, \tilde{t}, z)$ introduit par (3.9), on a transformé l'équation (3.2) et les conditions

(3.7)-(3.8) dans (3.16) et (3.20). Donc, si $\tilde{\sigma}(m, \tilde{t}, z)$ est la solution du problème (3.16), (3.20) dont l'existence et l'unicité ont été démontrées dans le théorème 3.4.1, alors, en faisant le changement de variables inverses vers les coordonnées $(m, t, z)$, on voit que la fonction

$$\sigma(m, t, z) = \tilde{\sigma}(m, t + \frac{1-z}{u(m)}, z)$$

satisfait à l'équation (3.2) et aux conditions (3.7)-(3.8). L'unicité de la solution $\sigma$ découle de celle de $\tilde{\sigma}$ démontrée dans le théorème 3.4.1. $\square$

## 3.5 Convergence de la solution globale vers la solution stationnaire

Le résultat obtenu dans le paragraphe précédent nous donne également la convergence de la solution globale vers la solution stationnaire.

Rappelons d'abord le résultat sur la solution stationnaire. On considère l'équation

$$\partial_z \sigma(m, z) = \frac{m}{2u(m)} \int_0^m \beta(m - m', m')\sigma(m', z)\sigma(m - m', z)dm' + \qquad (3.54)$$
$$-\frac{m}{u(m)} \int_0^\infty \beta(m, m')\sigma(m, z)\sigma(m', z)dm'$$

avec la condition aux limites (condition d'entrée)

$$\sigma(m, 1) = \overline{\sigma}(m). \qquad (3.55)$$

Avant de nous occuper de la solution du problème (3.54)-(3.55), rappelons une propriété importante de l'opérateur intégral figurant au second membre de (3.54).

**Lemme 3.5.1** *On suppose que* $\beta(\cdot,\cdot)$ *vérifie les conditions* (3.3)-(3.5)*. Alors, quelque soit* $\sigma(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+)$*, on a*

$$\int_0^\infty \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm'dm+ \tag{3.56}$$
$$-\int_0^\infty m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm'dm = 0.$$

**Démonstration.** On note par

$$I = \int_0^\infty \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)dm'dm+$$
$$-\int_0^\infty m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'dm.$$

En faisant le changement de variables dans la première intégrale

$$q = m-m', \quad r = m'$$

dont le déterminant jacobien sera 1, donc on a

$$I = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{q+r}{2}\beta(q,r)\sigma(q,z)\sigma(r,z)drdq+$$
$$-\int_0^\infty\int_0^\infty m\beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'dm.$$

Comme $q,\ r$ sont des variables arbitraires, on a :

$$I = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{m'-m}{2}\beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'dm \tag{3.57}$$
$$= -\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{m-m'}{2}\beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'dm$$

ou encore

$$I = -\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{m'-m}{2}\beta(m',m)\sigma(m',z)\sigma(m,z)dmdm'.$$

Grâce à la symétrie de la fonction $\beta$ et d'aprés le théorème de Fubini , on a

$$I=-\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{m'-m}{2}\beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'dm,$$

ce qui joint à (3.57), implique que

$$I=-I \quad \Rightarrow I=0.$$

Le lemme est démontré. $\square$

L'égalité (3.56) n'est autre que la loi de la conservation de la masse pour l'eau liquide contenue dans les gouttelettes.

**Corollaire 3.5.1** *Si $\sigma(m,z)$ satisfait à (3.54), alors*

$$\int_0^\infty \sigma(m,z)u(m)dm=const, \qquad \forall z\in[0,1].$$

**Démonstration.** En se référant au fait que l'intégrale du deuxième membre de (3.54) est égal à 0, on a

$$\int_0^\infty \partial_z\sigma(m,z)u(m)dm=0,$$

d'où on obtient

$$\forall z\in[0,1] \qquad \int_0^\infty \sigma(m,z)u(m)dm=const.$$

Le corollaire est démontré.

**Proposition 3.5.1** *Soit $\overline{\sigma}(\cdot)\in L^1(\mathbb{R}_+)$ avec $\overline{\sigma}\geq 0$, $\overline{\sigma}(m)=0$ pour $m\in[0,\overline{m}_a]\cup[\overline{m}_A,\infty[$. Alors le problème (3.54)–(3.55) admet une unique solution $\sigma\in C([0,1];L^1(\mathbb{R}_+))$ (c'est-à-dire, l'application $z\longmapsto\sigma(\cdot,z)$ est une fonction continue de $[0,1]$ à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}_+)$) telle que*

$$\sigma\geq 0, \qquad \sigma(m,z)=0 \quad \textit{pour} \quad m\in[0,\overline{m}_a]\cup[\overline{m}_A,\infty[.$$

**Démonstration.** Pour résoudre le problème (3.54)-(3.55), on considère $\sigma(\cdot, z)$ comme élément de $L^1(\mathbb{R}_+)$, de sorte que l'équation (3.54) peut être écrite dans la forme

$$\frac{d\sigma}{dz} = F(\sigma) \tag{3.58}$$

avec

$$F(\sigma) = F(\sigma(z))(m) = \frac{m}{2u(m)} \int_0^m \beta(m-m', m')\sigma(m', z)\sigma(m-m', z)dm' +$$

$$-\frac{m}{u(m)} \int_0^\infty \beta(m, m')\sigma(m, z)\sigma(m', z)dm'.$$

Il suffit de vérifie la condition du théorème de Cauchy-Lipschitz pour l'existence et l'unicité de la solution locale de l'équation (3.58) avec la condition (3.55). On a, pour $\sigma_1$, $\sigma_2 \in L^1(\mathbb{R}_+)$

$$\|F(\sigma_1) - F(\sigma_2)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} = \int_{\mathbb{R}_+} \big|F(\sigma_1) - F(\sigma_2)\big| dm \le$$

$$\le \Big[C_\beta \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^\infty \Big|\sigma_1(m')\big(\sigma_1(m-m') - \sigma_2(m-m')\big) + \big(\sigma_1(m') - \sigma_2(m')\big)\sigma_2(m-m')\Big| dm' dm$$

$$+ \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^\infty \Big|\sigma_1(m)\big(\sigma_1(m') - \sigma_2(m')\big) + \big(\sigma_1(m) - \sigma_2(m)\big)\sigma_2(m')\Big| dm' dm\Big] \le$$

$$\le C_\beta \Big[\|\sigma_1 * \big(|\sigma_1 - \sigma_2|\big)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} + \|\big(|\sigma_1 - \sigma_2|\big) * \sigma_2\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}_+} \Big(\sigma_1(m)\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} + \big|\sigma_1(m) - \sigma_2(m)\big| \|\sigma_2\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}\Big) dm\Big] \le$$

$$\le 2C_\beta \big(\|\sigma_1\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} + \|\sigma_2\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}\big) \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}$$

(pour la propriété de la convolution, voir par exemple [6]), ce qui montre que $F(\cdot)$ vérifie localement la condition de Lipschitz dans la topologie de $L^1(\mathbb{R}_+)$. Par conséquent, l'équation (3.58) avec la condition initiale (3.55) admet une solution $\sigma(\cdot, z)$ et une seule dans un intervalle $1-\delta < z < 1$ avec un $\delta > 0$ suffisamment petit.

D'autre part, du corollaire 3.5.1 (voir aussi la définition (3.1) de $u(m)$) on déduit que

$$\int_0^\infty \Big(\sigma(m,z)\frac{g}{\alpha(m)}\Big)dm = \int_0^\infty \Big(\sigma(m,1)\frac{g}{\alpha(m)}\Big)dm.$$

Or la condition (3.5) et l'hypothèse $\operatorname{supp}(\overline{\sigma}) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A]$ implique que $supp(\sigma(\cdot, z)) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A]$. Donc de la relation

$$0 < c_1 \leq \frac{g}{\alpha(m)} \leq c_2 < \infty \qquad \forall m \in [\overline{m}_a, \overline{m}_A]$$

avec deux constantes $c_1$, $c_2$ (qui résulte de l'hypothèse sur $\alpha(m)$), on en déduit que $\|\sigma(\cdot, z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}$ est uniformément bornée en $z$ (pourvu que $\sigma(\cdot, z)$ existe), ce qui, joint à la condition de Lipschitz locale, nous donne la solution $\sigma(\cdot, z)$ de l'équation (3.58) sur tout l'intervalle $[0, 1]$. $\square$

S'il existe un $t_1 \geq 0$ tel que

$$\overline{\sigma}_1(m,t) = \overline{\sigma}_1^\infty(m) \qquad \forall t \geq t_1,\ m \in \mathbb{R}_+,$$

avec une fonction $\overline{\sigma}_1^\infty(\cdot)$ qui ne depend pas de $t$, alors la convergence de la solution $\sigma$ obtenue dans le théorème 3.4.2 vers la solution stationnaire avec la condition d'entrée $\overline{\sigma}(m) = \overline{\sigma}_1^\infty(m)$ résulte immédiatement du théorème 3.4.1 et du lemme 3.4.1.

Pour examiner la convergence pour le cas des conditions plus générales pour $\overline{\sigma}_1$, admettons que $\overline{\sigma}_1(\cdot, t)$ tend vers $\overline{\sigma}_1^\infty(\cdot)$ (dans le sens qu'on va préciser) et considérons la solution stationnaire $\sigma^\infty = \sigma^\infty(m, z)$, qui s'obtient par la proposition 3.5.1 avec $\overline{\sigma}(m) = \overline{\sigma}_1^\infty(m)$.

Introduisons en outre les notations

$$\overline{\sigma}_1^t(m,s) = \overline{\sigma}_1(m,t+s), \quad \sigma^t(m,s,z) = \sigma(m,t+s,z) \quad \text{pour } 0 < s < 1.$$

On a alors le résultat suivant.

**Proposition 3.5.2** *Soient $\overline{\sigma}_0$ et $\overline{\sigma}_1$ comme dans le théorème 3.4.2. On suppose en outre que*

$$\overline{\sigma}_1^t \to \overline{\sigma}_1^\infty \quad \textit{pour } t \to \infty \quad \textit{dans } L^\infty(\mathbb{R}_+ \times ]0,1[). \tag{3.59}$$

*Alors on a*

$$\sigma^t \to \sigma^\infty \quad \textit{pour } t \to \infty \quad \textit{dans } L^\infty(\mathbb{R}_+ \times ]0,1[\times]0,1[). \tag{3.60}$$

*Dans* (3.59) *et* (3.60), *$\overline{\sigma}_1^\infty$ et $\sigma^\infty$ sont à considérer comme fonctions appartenant à $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times ]0,1[)$ et $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times ]0,1[\times]0,1[)$ et indépendantes de $s \in ]0,1[$.*

**Démonstration.** Rappelons d'abord la définition (3.9) de $\tilde{t}$, qui nous donne l'expression de $t$ en fonction de $\tilde{t}$, c'est-à-dire

$$t = t(m,\tilde{t},z) = \tilde{t} - \frac{1-z}{u(m)}. \tag{3.61}$$

Ainsi, de la définition de $D[\omega]$ (voir (3.43)) il résulte immédiatement qu'il existe deux constantes $N_1$ et $N_2$ telles que, si on pose

$$\omega^{[t]} = \{(m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,|\, m \in ]\overline{m}_a, \overline{m}_A[, \ \tilde{t} \in [t - N_1, t + N_2]\},$$

on ait

$$\mathbb{R}_+ \times [t, t+1] \times [0,1] \subset \{(m,t',z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times [0,1] \,|\, t' = t'(m,\tilde{t},z), \ (m,\tilde{t},z) \in D[\omega^{[t]}]\}. \tag{3.62}$$

Comme $\sigma^\infty$ peut être considérée comme la solution du problème (3.2), (3.7) et (3.8) avec $\overline{\sigma}_1 = \overline{\sigma}_1^\infty$ et $\overline{\sigma}_0 = \sigma^\infty$, en tenant compte que $\sigma^\infty$ et $\overline{\sigma}_1^\infty$ sont indépendantes de $t$, en faisant la comparaison de l'équation (3.2) pour $\sigma$ et celle pour $\sigma^\infty$, et en les considérant dans les coordonnées $(m, \tilde{t}, z)$ (mais, pour éviter la notation lourde due au changement de variables défini dans (3.9), nous utilisons la même notation pour $\sigma$), de la même manière que pour l'inégalité (3.49), on a

$$\|\sigma(\cdot,\cdot,z) - \sigma^\infty(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_{\omega[t]}(z))} \leq \|\overline{\sigma}_1 - \overline{\sigma}_1^\infty\|_{L^\infty(D_{\omega[t]}(1))} \times \tag{3.63}$$

$$\times \exp\Big( C \int_z^1 \big( \|\sigma(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_{\omega[t]}(z'))} + \|\sigma^\infty(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_{\omega[t]}(z'))} \big) dz' \Big).$$

Or, de l'hypothèse (3.59) (voir aussi (3.61), (3.46)) il résulte que

$$\|\overline{\sigma}_1 - \overline{\sigma}_1^\infty\|_{L^\infty(D_{\omega[t]}(1))} \to 0 \quad \text{pour } t \to \infty.$$

Donc de (3.63) on déduit que

$$\|\sigma(\cdot,\cdot,z) - \sigma^\infty(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_{\omega[t]}(z))} \to 0 \quad \text{pour } t \to \infty, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

c'est-à-dire, en le traduisant encore dans les coordonnées $(m, t, z)$ (voir (3.61) et (3.62)), on a

$$\sigma^t \to \sigma^\infty \quad \text{pour } t \to \infty \quad \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}_+ \times ]0,1[\times]0,1[).$$

La proposition est démontrée. $\square$

# Chapitre 4

# Solution globale de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute avec le vent horizontal

Ce chapitre est une généralisation du chapitre précedent. Plus précisement, on considérera l'équation pour la densité $\sigma(m,t,x,y,z)$ comme dépendente de la masse (de la gouttelette) $m$, du temps $t$ et de la position $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, décrivant le processus de coagulation des gouttelettes en chute, en présence d'un vent horizontal dans la direction de l'axe $x$ qui dépend de $y$ (c'est-à-dire $\overline{v} = \overline{v}(y)$). On montrera l'existence et l'unicité d'une solution stationnaire ainsi qu'une solution globale.

## 4.1 Position du problème

Considérons le domaine $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$, qui représente une région "horizontale" dans laquelle les gouttelettes se déplacent à cause de la force gravitationnelle et avec le vent. Désignons par $\sigma(m,t,x,y,z)$ la densité de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse $m$ au point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times ]0,1[$ à l'instant

$t \in \mathbb{R}_+$.

Si on considère que les gouttelettes subissent le processus de coagulation et en même temps se déplacent par la force gravitationnelle et le mouvement de l'air dans lequel elles se trouvent tout en subissant l'effet de frottement avec ce dernier, la vitesse $u_l(m) = u(m)$ d'une gouttelette de masse $m$ est donnée par

$$u = u(m) = \big(\overline{v}(y), 0, -\frac{g}{\alpha(m)}\big), \tag{4.1}$$

où $\overline{v}(y)$ est la vitesse de l'air, $g$ est une constante positive représentant l'accélération gravitationnelle et $\alpha(m)$ est le coefficient de friction entre les gouttelettes et l'air. La relation (4.1) constitue une bonne approximation, à la vitesse réelle des gouttelettes dans l'atmosphère (voir par exemple [2], [32], [35]).

Ces considérations nous mènent à l'équation suivante (voir [2], [32])

$$\partial_t \sigma(m,t,x,y,z) + \nabla_{(x,y,z)} \cdot (\sigma(m,t,x,y,z)u(m)) = \tag{4.2}$$

$$= \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',t,x,y,z)\sigma(m-m',t,x,y,z)dm' +$$

$$-m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,t,x,y,z)\sigma(m',t,x,y,z)dm',$$

où $\nabla_{(x,y,z)} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Si dans l'équation (2.16) on considère l'état d'équilibre relatif à l'état liquide, l'équation est réduite à l'équation (4.2).

On suppose que

$$\alpha(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}_+), \qquad \beta(\cdot,\cdot) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+),$$

$$\beta(m_1,m_2) \geq 0 \quad \forall (m_1,m_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad \beta(m_1,m_2) = \beta(m_2,m_1).$$

Comme les petites gouttelettes s'évaporent immédiatement à cause de la courbure très élevée de leur surface (voir [21], [31]). Par contre, les gouttelettes très grandes se fragmentent à cause de la friction avec l'air environnant. Nous considérons que les gouttelettes sont absentes en dehors d'un intervalle $[\overline{m}_a, \overline{m}_A]$. Par conséquent nous supposons que la fonction $\sigma$ vérifie

$$\sigma(m) = 0 \qquad \text{pour} \quad m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[.$$

Ceci nous permet de définir les fonctions $\alpha(\cdot)$ et $\beta(\cdot,\cdot)$ de telle sorte que

$$0 < \inf_{m\in\mathbb{R}_+} \alpha(m) \leq \sup_{m\in\mathbb{R}_+} \alpha(m) < \infty$$

et

$$\beta(m_1, m_2) = 0 \qquad \text{pour} \quad m_1 + m_2 \geq \overline{m}_A.$$

Nous posons

$$\overline{\alpha}_0 = \sup_{m\in\mathbb{R}_+} \alpha\,(m)\,. \tag{4.3}$$

## 4.2 Solution stationnaire

On considère l'équation stationnaire issue de (4.2)

$$\nabla_{(x,y,z)} \cdot (\sigma(m,x,y,z)u(m)) = \tag{4.4}$$

$$= \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',x,y,z)\sigma(m-m',x,y,z)dm' +$$

$$-m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,x,y,z)\sigma(m',x,y,z)dm'$$

avec la condition aux limites

$$\sigma(m,x,y,1) = \overline{\sigma}(m,x,y). \tag{4.5}$$

Comme les gouttelettes tombent de $\{z=1\}$ avec la vitesse $u=u(m)$ (voir (4.1)), la condition (4.5) est une condition "initiale" (ou condition d'entrée) pour les gouttelettes qui partent de la position $(x,y,1)$.

### 4.2.1 Préliminaires

Pour résoudre l'équation (4.4) avec la condition (4.5), nous allons la transformer en une équation différentielle ordinaire. Pour cela, nous introduisons le changement de variables $(m,x,y,z)\mapsto(\tilde{m},\xi,\tilde{y},\tilde{z})$ défini par

$$\begin{cases} \tilde{m}=m, \\ \xi = x-\overline{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), \\ \tilde{y}=y, \\ \tilde{z}=z \end{cases} \tag{4.6}$$

et définissons

$$\tilde{\sigma}(\tilde{m},\xi,\tilde{y},\tilde{z})=\sigma(m,x,y,z)=\sigma(m,\xi+\overline{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z),y,z).$$

Dans la suite, on écrira simplement $m$, $y$, $z$ et $\sigma(m,\xi,y,z)$ au lieu de $\tilde{m}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ et $\tilde{\sigma}(\tilde{m},\xi,\tilde{y},\tilde{z})$ ; ainsi, l'équation (4.4) se transforme en

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(m,\xi,y,z)= \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} =-\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_0^m &\beta(m-m',m')\sigma(m',\eta(m,m',\xi,y,z),y,z)\times \\ &\times\sigma(m-m',\eta(m,m-m',\xi,y,z),y,z)dm'+ \\ +\frac{m\alpha(m)}{g}\int_0^\infty &\beta(m,m')\sigma(m,\xi,y,z)\sigma(m',\eta(m,m',\xi,y,z),y,z)dm', \end{aligned}$$

où

$$\eta(m,m',\xi,y,z)=\xi+\overline{v}(y)\frac{\alpha(m)-\alpha(m')}{g}(1-z)$$

et la condition (4.5) se transforme en

$$\sigma(m,\xi,y,1)=\overline{\sigma}(m,\xi,y). \tag{4.8}$$

Par conséquent nous allons réformuler l'équation (4.7) en une équation différentielle ordinaire dans un espace de Banach à définir (où dans un espace de Fréchet). Pour traiter l'opérateur intégral dans un cadre fonctionnel convenable, nous introduisons, pour chaque $y\in\mathbb{R}$ et $z\in[0,1]$ fixés, la famille de courbes

$$\gamma_\tau=\gamma_{\tau,y,z}=\Big\{(m,\xi)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\mid \xi=\tau-\overline{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)\Big\},\ \tau\in\mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Cette famille de courbes $\gamma_\tau$ est analogue à celle définie dans (3.11). Cependant ces dernières dépendent de $y$ et le paramètre $\tau$ est un paramètre spatial, alors que dans (3.11) le paramètre $\tau$ était relatif au temps.

De manière analogue on définit une mesure $\mu_\gamma$ sur les courbes $\gamma_\tau$. Plus précisément, en désignant par $P_{\mathbb{R}_+}$ la projection de $\gamma_\tau$ sur $\mathbb{R}_+$, on définit les ensembles mesurables de $\gamma_\tau$ et la mesure $\mu_\gamma$ sur $\gamma_\tau$ par les relations :

i) $A'\subset\gamma_\tau$ est mesurable si et seulement si $P_{\mathbb{R}_+}A'$ est mesurable selon Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$,

ii) $\mu_\gamma(A')=\mu_{L,\mathbb{R}_+}(P_{\mathbb{R}_+}A')$, où $\mu_{L,\mathbb{R}_+}(\cdot)$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

Comme les courbes $\gamma_\tau$, $\tau\in\mathbb{R}$, sont parallèles, on voit que la projection $P_{\mathbb{R}_+}$ et la mesure $\mu_\gamma(\cdot)$ ne dépendent pas de $\tau\in\mathbb{R}$.

La mesure $\mu_\gamma(\cdot)$ a des propriétés analogues à celles démontrées dans les lemmes 3.2.1, 3.2.3, 3.2.4 et 3.2.5 du chapitre 3. En effet on a les lemmes suivants.

**Lemme 4.2.1** *Soit $A$ un ensemble mesurable (selon Lebesgue) de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On pose*

$$A_\tau = \{\, m \in \mathbb{R}_+ \,|\, \exists \xi \in \mathbb{R} \ \text{tel que} \ (m,\xi) \in \gamma_\tau \cap A \,\},$$

$$A_m = \{\tau \in \mathbb{R} \,|\, \exists \xi \in \mathbb{R} \ \text{tel que} \ (m,\xi) \in \gamma_\tau \cap A\}.$$

*Alors on a*

$$\mu_{L,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}(A) = \tilde{\mu}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_\gamma(A_\tau) d\tau =$$

$$= \int_{\gamma_0} \mu_{L,\mathbb{R}}(A_m)\mu_\gamma(dm) = \int_0^{\infty} \mu_{L,\mathbb{R}}(A_m) dm.$$

Ici et dans la suite on note $dm$, $d\tau$, $d\xi$ etc... au lieu de $\mu_{L,\mathbb{R}_+}(dm)$, $\mu_{L,\mathbb{R}}(d\tau)$, $\mu_{L,\mathbb{R}}(d\xi)$ etc ....

**Lemme 4.2.2** *Soit $\sigma(m,\xi) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Alors, pour presque tout $\tau \in \mathbb{R}$, la restriction de $\sigma(m,\xi)$ à $\gamma_\tau$ appartient à $L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)$.*

**Lemme 4.2.3** *Soit $\sigma(m,\xi) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Alors on a*

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \sigma(m,\xi) dm d\xi = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \sigma(m,\xi) d\tilde{\mu} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big( \int_{\gamma_\tau} \sigma(m,\xi)\mu_\gamma(dm) \Big) d\tau = \int_{\gamma_0} \Big( \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(m,\xi(m,\tau)) d\tau \Big) \mu_\gamma(dm) =$$

$$= \int_0^{\infty} \Big( \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(m,\xi) d\xi \Big) dm = \int_{-\infty}^{\infty} \Big( \int_0^{\infty} \sigma(m,\xi) dm \Big) d\xi,$$

*où* $\xi(m,\tau) = \tau - \overline{v}(y)\, \frac{\alpha(m)}{g}(1-z)$.

**Lemme 4.2.4** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions appartenant à $L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)$. On pose*

$$(f * g)(m) = \int_{\gamma_\tau} f(m-m')g(m')\mu_\gamma(dm').$$

*Alors on a* $f * g \in L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)$ *et*

$$\|f * g\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} \leq \|f\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} \|g\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}.$$

On pose

$$\tau(m,\xi,y,z) = \xi + \overline{v}(y)\,\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), \qquad \gamma_\tau^{[0,m]} = \gamma_\tau \cap [0,m] \times \mathbb{R}. \quad (4.10)$$

On peut alors écrire l'équation (4.7) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(z) = F(\sigma(z)), \qquad \sigma(z) = \sigma(\cdot,\cdot,\cdot,z) \quad (4.11)$$

avec

$$F(\sigma(z)) = F(\sigma(z))(m,\xi,y) = \quad (4.12)$$

$$= -\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\xi,y,z)}} \beta(m-m',m')\sigma(m',\eta',y,z)\sigma(m-m',\eta'',y,z)\mu_\gamma(dm') +$$

$$+\frac{m\alpha(m)}{g}\int_{\gamma_{\tau(m,\xi,y,z)}} \beta(m,m')\sigma(m',\eta',y,z)\sigma(m,\xi,y,z)\mu_\gamma(dm'),$$

où $\eta'$ et $\eta''$ sont tels que

$$(m',\eta') \in \gamma_{\tau(m,\xi,y,z)}, \quad (m-m',\eta'') \in \gamma_{\tau(m,\xi,y,z)}.$$

### 4.2.2 Solution avec la condition d'entrée dans $L^1$

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (4.11) avec la condition (4.8), nous supposons que

$$\overline{\sigma}(\cdot,\cdot,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2), \quad (4.13)$$

$$\overline{\sigma}(m,\xi,y) \geq 0 \quad p.p. \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \quad (4.14)$$

$$supp(\overline{\sigma}) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A] \times \mathbb{R}^2, \quad (4.15)$$

$$\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)} < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)}, \tag{4.16}$$

où $M_1$ est une constante définie dans (3.21).

On a la proposition suivante.

**Proposition 4.2.1** *Si* $\overline{\sigma}(m,\xi,y)$ *satisfait aux conditions* (4.13)–(4.16)*, alors l'équation* (4.11) *avec la condition* (4.8) *admet une solution* $\sigma$ *et une seule vérifiant*

$$\sigma \in C([0,1]; L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2\times[0,1]).$$

**Démonstration.** Comme dans l'équation (4.11) ni la dérivée ni l'intégrale par rapport à $y$ ne se présentent, l'équation pour chaque $y \in \mathbb{R}$ fixé peut être résolue indépendamment, ce qui nous permet d'envisager (4.11), (4.8) séparément pour chaque $y \in \mathbb{R}$. Donc, on pose $\sigma(m,\xi,z) = \sigma(m,\xi,y,z)$, $\overline{\sigma}(m,\xi) = \overline{\sigma}(m,\xi,y)$ et on considère $\sigma(\cdot,\cdot,z)$ comme une fonction de $z$ à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$. Pour démontrer la proposition, il nous convient d'examiner directement l'approximation successive avec laquelle on construit la solution $\sigma(m,\xi,z)$.

Posons

$$\sigma^{[0]}(m,\xi,z) = \overline{\sigma}(m,\xi)$$

et définissons $\sigma^{[n]}$, $n = 1,2,\cdots$, par les relations

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma^{[n]} = F(\sigma^{[n-1]}), \qquad \sigma^{[n]}(m,\xi,1) = \overline{\sigma}(m,\xi), \tag{4.17}$$

où $F(\cdot)$ est l'opérateur défini dans (4.12). De (4.17), on déduit que

$$\sigma^{[n]}(m,\xi,z) = \overline{\sigma}(m,\xi) - \int_z^1 F(\sigma^{[n-1]}(m,\xi,z'))dz'. \tag{4.18}$$

Pour démontrer la proposition 4.2.1 on a le lemme suivant.

**Lemme 4.2.5** *Quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $\sigma^{[n]}$ est bien définie dans la classe*

$$\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}), \qquad 0 \leq z \leq 1$$

*et on a*

$$\operatorname{supp}(\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A] \times \mathbb{R} \qquad \text{pour} \;\; 0 \leq z \leq 1,$$

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq \frac{\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}}{1-(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}(1-z)},$$

*pour* $\frac{(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}-1}{(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}} < z \leq 1$*,* $M_2$ *étant une constante définie dans* (3.30)*.*

**Démonstration.** Le lemme se démontre d'une manière analogue au lemme 3.3.1 du chapitre 3, en tenant compte des fait que dans l'équation (4.18) $\xi$ est une variable d'espace, alors que dans (3.27) $\tilde{t}$ était une variable relative au temps. Donc en reprenant les mêmes étapes de la démonstration du lemme 3.3.1, en remplaçant $\tilde{t}$ par $\xi$, $\Omega_z$ par $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et $\|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)} + \|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)}$ par $\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}$ et en tenant compte de la relation

$$\|F(\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z))\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} |F(\sigma^{[n-1]}(m,\xi,z))| d\xi dm =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} |F(\sigma^{[n-1]}(m,\xi,z))| d\tilde{\mu} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\gamma_\tau} |F(\sigma^{[n-1]}(m,\xi,z))| \mu_\gamma(dm) d\tau =$$

$$= \int_{\gamma} \int_{\mathbb{R}} |F(\sigma^{[n-1]}(m,\xi,z))| d\tau \mu_\gamma(dm),$$

on démontre le lemme. □

**Suite de la démonstration de la proposition 4.2.1.** La proposition se démontre de manière analogue au proposition 3.3.1 du chapitre 3 avec les mêmes considérations que celle de la démonstration du lemme 4.2.5. □

### 4.2.3 Existence et unicité de la solution dans $L^\infty$

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de (4.11), (4.8) dans le cas général, nous allons utiliser la propriété de "cône de dépendance".

Soit $\omega$ un ensemble mesurable de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ tel que $0 < mes(\omega) < \infty$ ; on définit

$$D[\omega] = \bigcup_{(m,\xi,y)\in\omega} D_{(m,\xi,y)}, \tag{4.19}$$

où

$$D_{(m,\xi,y)} = \bigcup_{0\le z\le 1} \Big( \bigcup_{\tau_-(m,\xi,y,z)\le\tau\le\tau_+(m,\xi,y)} \gamma_{\tau,y,z} \Big) = \tag{4.20}$$

$$= \Big\{ (m',\eta',y',z') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0,1] \mid \eta' = \tau - \overline{v}(y')\frac{\alpha(m')}{g}(1-z'),$$
$$y' = y,\ \tau_-(m,\xi,y,z') \le \tau \le \tau_+(m,\xi,y) \Big\}$$

avec

$$\begin{cases} \tau_+(m,\xi,y) = \tau(m,\xi,y,0) = \xi + \overline{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}, \\ \tau_-(m,\xi,y,z) = \tau_+(m,\xi,y) - \overline{v}(y)\frac{\overline{\alpha}_0}{g}z = \xi + \overline{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g} - \overline{v}(y)\frac{\overline{\alpha}_0}{g}z \end{cases} \tag{4.21}$$

(pour $\overline{\alpha}_0$ voir (4.3)). On définit également $D_\omega(z)$ par

$$D_\omega(z) = \bigcup_{(m,\xi,y)\in\omega} \Big( \bigcup_{\tau_-(m,\xi,y,z)\le\tau\le\tau_+(m,\xi,y)} \gamma_{\tau,y,z} \Big) = \tag{4.22}$$

$$= \{(m',\eta',y',z') \in D[\omega] \mid z' = z\};$$

c'est-à-dire $D_\omega(z_1)$ est l'intersection de $\displaystyle\bigcup_{(m,\xi,y)\in\omega} D_{(m,\xi,y)}$ et du plan $z = z_1$. On remarque que d'après la définition de l'ensemble $D_{(m,\xi,y)}$ on a

$$(m',\eta',y',z') \in D_{(m,\xi,y)} \Rightarrow \gamma_{\tau(m',\eta',y',z'),y',z'} \subset D_{(m,\xi,y)},$$

$$\tau(m_1,\xi_1,y,0) = \tau(m_2,\xi_2,y,0) \Rightarrow D_{(m_1,\xi_1,y)} = D_{(m_2,\xi_2,y)};$$

par conséquent, si $(m_1, \xi_1)$ et $(m_2, \xi_2)$ se trouvent sur une courbe $\gamma_{\tau,y,0}$, alors ils définissent le même ensemble.

La propriété de "cône de dépendance" est donnée par le lemme suivant.

**Lemme 4.2.6** *Soient $\overline{\sigma}^{[1]}$ et $\overline{\sigma}^{[2]}$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ satisfaisant aux conditions de la proposition 4.2.1. Soit $\sigma^{[1]}$ (resp. $\sigma^{[2]}$) la solution de* (4.11), (4.8) *avec $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}^{[1]}$ (resp. $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}^{[2]}$). Si on a*

$$\overline{\sigma}^{[1]} = \overline{\sigma}^{[2]} \qquad \textit{sur} \;\; D_\omega(1), \tag{4.23}$$

*alors*

$$\sigma^{[1]} = \sigma^{[2]} \qquad \textit{p.p. dans} \;\; D[\omega]\cdot$$

**Démonstration.** Le lemme se démontre d'une manière analogue au lemme 3.4.1 du chapitre 3. Plus précisement, on intègre l'équation (4.11) par rapport à $z$, on a

$$\begin{aligned}
&\sigma^{[i]}(m,\xi,y,z) = \overline{\sigma}^{[i]}(m,\xi,y)+\\
&+\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_z^1\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\xi,y,z'),y,z'}}\beta(m-m',m')\sigma^{[i]}(m',\eta',y,z')\times\\
&\times\sigma^{[i]}(m-m',\eta'',y,z')\mu_\gamma(dm')dz'+\\
&-\frac{m\alpha(m)}{g}\int_z^1\int_{\gamma_{\tau(m,\xi,y,z'),y,z'}}\beta(m,m')\sigma^{[i]}(m',\eta',y,z')\sigma^{[i]}(m,\xi,y,z')\mu_\gamma(dm')dz',
\end{aligned}$$

pour $i = 1, 2$. En faisant la différence pour $i = 1$ et $i = 2$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\sigma^{[1]}(m,\xi,y,z)-\sigma^{[2]}(m,\xi,y,z)\right| \le \left|\overline{\sigma}^{[1]}(m,\xi,y)-\overline{\sigma}^{[2]}(m,\xi,y)\right|+\\
&+C_\beta\Big[\int_z^1\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\xi,y,z'),y,z'}}\Big(\left|\sigma^{[1]}(m-m',\eta'',y,z')-\sigma^{[2]}(m-m',\eta'',y,z')\right|\sigma^{[2]}(m',\eta',y,z')+\\
&+\left|\sigma^{[1]}(m',\eta',y,z')-\sigma^{[2]}(m',\eta',y,z')\right|\sigma^{[1]}(m-m',\eta'',y,z')\Big)\mu_\gamma(dm')dz'+\\
&+\int_z^1\int_{\gamma_{\tau(m,\xi,y,z'),y,z'}}\Big(\left|\sigma^{[1]}(m,\xi,y,z')-\sigma^{[2]}(m,\xi,y,z')\right|\sigma^{[2]}(m',\eta',y,z')+\\
&+\left|\sigma^{[1]}(m',\eta',y,z')-\sigma^{[2]}(m',\eta',y,z')\right|\sigma^{[1]}(m,\xi,y,z')\Big)\mu_\gamma(dm')dz'\Big],
\end{aligned}$$

où

$$C_\beta = \max[\sup_{0<m'<m<\infty} \frac{m\alpha(m)}{2g}\beta(m-m',m'), \sup_{m,m'\in\mathbb{R}_+} \frac{m\alpha(m)}{g}\beta(m,m')].$$

On en déduit que

$$\left|\sigma^{[1]}(m,\xi,y,z)-\sigma^{[2]}(m,\xi,y,z)\right| \leq \left|\overline{\sigma}^{[1]}(m,\xi,y)-\overline{\sigma}^{[2]}(m,\xi,y)\right|+ \tag{4.24}$$

$$+C_\beta\Big[\int_z^1 \Big(\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,y,z')-\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,y,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\xi,y,z'),y,z'})}\|\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,y,z')\|_{L^1(\gamma_{\tau(m,\xi,y,z'),y,z'})}+$$

$$+\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,y,z')-\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,y,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\xi,y,z'),y,z'})}\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,y,z')\|_{L^1(\gamma_\tau(m,\xi,y,z'),y,z')}\Big)dz'+$$

$$+\int_z^1 \Big(\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,y,z')-\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,y,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\xi,y,z'),y,z'})}\|\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,y,z')\|_{L^1(\gamma_{\tau(m,\xi,y,z'),y,z'})}+$$

$$+(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,y,z')-\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,y,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\xi,y,z'),y,z'})}\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,y,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\xi,y,z'),y,z'})}\Big)dz'\Big].$$

Considérons maintenant un point générique $(m,\xi,y,z)$ de $D[\omega]$ ; en vertu de (4.20)–(4.21) il existe $(m_0,\xi_0,y_0)\in\omega\subset\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} \xi_0+\overline{v}(y_0)\frac{\alpha(m_0)}{g}-\overline{v}(y_0)\frac{\overline{\alpha}_0}{g}z=\tau_-(m_0,\xi_0,y_0,z)\leq\xi+\overline{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)\leq \\ \qquad\qquad \leq\tau_+(m_0,\xi_0,y_0)=\xi_0+\overline{v}(y_0)\frac{\alpha(m_0)}{g}, \\ y=y_0. \end{cases}$$

Cette inégalité, jointe à l'inégalité $\overline{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}\leq\overline{v}(y)\frac{\overline{\alpha}_0}{g}<0$, implique que, pour $0\leq z\leq z'\leq 1$, on a

$$\begin{cases} \xi_0+\overline{v}(y_0)\frac{\alpha(m_0)}{g}-\overline{v}(y_0)\frac{\overline{\alpha}_0}{g}z'\leq\xi+\overline{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z')\leq\xi_0+\overline{v}(y_0)\frac{\alpha(m_0)}{g}, \\ y=y_0; \end{cases}$$

en vertu de (4.10) et (4.21), on a

$$\begin{cases} \tau_-(m_0,\xi_0,y_0,z')\leq\tau(m,\xi,y,z')\leq\tau_+(m_0,\xi_0,y_0), \\ y=y_0, \end{cases}$$

ce qui, d'après la définition (4.22) de l'ensemble $D_\omega(z)$, montre que

$$\gamma_{\tau(m,\xi,y,z'),y,z'}\subset D_\omega(z') \qquad \text{pour } \ 0\leq z\leq z'\leq 1.$$

On rappelle que l'on a en outre, pour $i = 1, 2$,

$$\|\sigma^{[i]}(\cdot,\cdot,y,z)\|_{L^1(\gamma_\tau(m,\xi,y,z),y,z;\mu_\gamma)} \leq (\overline{m}_A - \overline{m}_a)\|\sigma^{[i]}(\cdot,\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_\omega(z))},$$

pour presque tout $(m, \xi, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$.

De (4.24) on déduit que

$$\begin{aligned}\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z) - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_\omega(z))} &\leq \|\overline{\sigma}^{[1]} - \overline{\sigma}^{[2]}\|_{L^\infty(D_\omega(1))} + \\ +C\int_z^1 \Big(\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))} &+ \|\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))}\Big)\times \\ \times\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z') &- \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))}dz',\end{aligned}$$

où $C$ est une constante indépendante de $z$. A l'aide du lemme de Gronwall, on a

$$\begin{aligned}\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z) - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_\omega(z))} &\leq \|\overline{\sigma}^{[1]} - \overline{\sigma}^{[2]}\|_{L^\infty(D_\omega(1))}\times \\ \times\exp\Big(C\int_z^1 \big(\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))} &+ \|\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))}\big)dz'\Big).\end{aligned} \tag{4.25}$$

Or, en vertu de l'hypothèse (4.23) on a

$$\|\overline{\sigma}^{[1]} - \overline{\sigma}^{[2]}\|_{L^\infty(D_\omega(1))} = 0,$$

ce qui nous permet de déduire de (4.25) que

$$\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z) - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_\omega(z))} \leq 0$$

et, compte tenu de la relation $D[\omega] = \bigcup_{0\leq z\leq 1} D_\omega(z)$ , on a

$$\sigma^{[1]}(m,\xi,y,z) = \sigma^{[2]}(m,\xi,y,z) \qquad \text{p.p. dans } \ D[\omega].$$

Le lemme est démontré. □

Maintenant nous pouvons démontrer le théorème principal.

**Théorème 4.2.1** *Si $\overline{\sigma} \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ satisfait aux conditions*

$$\overline{\sigma}(m,\xi,y) \geq 0 \qquad p.p. \ sur \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2,$$

$$\overline{\sigma}(m,\xi,y) = 0 \qquad pour \ \ m \in [0,\overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[,$$
$$\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)} < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)},$$

*alors l'équation* (4.11) *avec la condition* (4.8) *admet une solution $\sigma$ et une seule vérifiant*

$$\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0,1])$$

*avec*

$$\sigma(m,\xi,y,z) \geq 0 \qquad p.p. \ dans \ \ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0,1],$$

$$\sigma(m,\xi,y,z) = 0 \qquad pour \ \ m \in [0,\overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[\cdot$$

**Démonstration.** Le théorème se démontre d'une manière analogue au théorème 3.4.1 du chapitre 3. Plus précisement, on considère une famille d'ensembles mesurables et bornés $\omega_i$, $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, définis par

$$\omega_i = \left\{(m,\xi,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \mid \overline{m}_a \leq m \leq \overline{m}_A, \ -i \leq \xi \leq i, \ -i \leq y \leq i\right\}. \tag{4.26}$$

La définition (4.19) de $D[\omega]$ nous permet de définir un nombre $N$ tel que

$$D_{\omega_i}(1) \subset \big\{(m,\xi,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \mid \overline{m}_a \leq m \leq \overline{m}_A,$$

$$-i-N \leq \xi \leq i+N, \ -i-1 \leq y \leq i+1\big\}.$$

On considère une fonction $\psi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\psi_i \geq 0$, telle que

$$\psi_i(\xi,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |\xi| \leq i+N \quad \text{et} \quad |y| \leq i+1, \\ 0 & \text{si} \quad |\xi| \geq i+N+1 \quad \text{et} \quad |y| \geq i+2; \end{cases}$$

on a alors

$$D_{\omega_i}(1) \subset \{(m,\xi,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \mid \psi_i(\xi,y) = 1\} \qquad \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \tag{4.27}$$

Soit la famille d'équations

$$\partial_z \sigma^{[i]}(m,\xi,y,z) = F(\sigma^{[i]}(z))(m,\xi,y), \qquad i \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \tag{4.28}$$

(avec $F(\cdot)$ définie dans (4.12)), complétées par la condition

$$\overline{\sigma}^{[i]} = \psi_i \, \overline{\sigma} \qquad \text{sur } \ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2. \tag{4.29}$$

D'après la proposition 4.2.1, le problème (4.28)–(4.29) admet une solution unique

$$\sigma = \sigma^{[i]} \in C([0,1]; L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0,1]),$$

telle que

$$\sigma^{[i]} \geq 0 \qquad \text{p.p. dans } \ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0,1],$$

$$\sigma^{[i]}(m,\xi,y,z) = 0 \qquad \text{pour } \ m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[.$$

D'autre part, d'après la définition (4.26) des ensembles $\omega_i$, on a

$$D[\omega_i] \subset D[\omega_{i'}] \qquad \text{pour } \ i \leq i',$$

donc de (4.29) (voir aussi (4.27)) on a

$$\overline{\sigma}^{[i]} = \overline{\sigma}^{[i']} \qquad \text{sur } \ D_{\omega_i}(1) \qquad \text{pour } \ i \leq i'$$

et en vertu du lemme 4.2.6 on a

$$\sigma^{[i]} = \sigma^{[i']} \qquad \text{p.p. dans } \ D[\omega_i] \qquad \text{pour } \ i \leq i'.$$

En définissant $\sigma$ par

$$\sigma = \begin{cases} \sigma^{[1]} & \text{dans} \quad D[\omega_1], \\ \sigma^{[i]} & \text{dans} \quad D[\omega_i] \backslash D[\omega_{i-1}], \quad i = 2, \cdot, \cdot, \cdot, \end{cases}$$

alors on a

$$\sigma = \sigma^{[i]} \qquad \text{p.p. dans} \quad D[\omega_i] \quad \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Par suite, de (4.28)- (4.29) on obtient

$$\partial_z \sigma(m, \xi, y, z) = F(\sigma(z))(m, \xi, y) \qquad \text{dans} \quad D[\omega_i] \quad \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

$$\sigma = \overline{\sigma}^{[i]} = \overline{\sigma} \qquad \text{sur} \quad D_{\omega_i}(1).$$

En rappelant les relations $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D[\omega_i]$ et $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_{\omega_i}(1)$, qui résultent de la définition de $\omega_i$, $D[\omega_i]$, $D_{\omega_i}(1)$, on peut conclure qu'il existe une solution de (4.11), (4.8).

Pour démontrer l'unicité, considérons deux solutions $\sigma_1$ et $\sigma_2$ avec $\sigma_1 \neq \sigma_2$ sur un ensemble de mesure strictement positive, alors on peut choisir un ensemble mesurable $\omega$ tel que $0 < mes(\omega) < \infty$ et $mes(\{(m, \xi, y, z) \in D[\omega] \mid \sigma_1 \neq \sigma_2\}) > 0$. Comme $\sigma_1$ et $\sigma_2$ sont des solutions de (4.11), (4.8), on a $\sigma_1 = \sigma_2$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \{1\}$ et en particulier $\sigma_1 = \sigma_2$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \{1\} \bigcap D[\omega]$ ; par conséquent, d'après le lemme 4.2.6, on a $\sigma_1 = \sigma_2$ dans $D[\omega]$, ce qui prouve qu'il n'est pas possible d'avoir deux solutions $\sigma_1$ et $\sigma_2$ qui se diffèrent sur un ensemble de mesure strictement positive. L'unicité de la solution est démontrée. $\square$

Pour l'existence et l'unicité de la solution dans les coordonnées $(m, x, y, z)$, on a le théorème suivant.

**Théorème 4.2.2** *Si* $\overline{\sigma} \in L^{\infty}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ *satisfait aux conditions*

$$\overline{\sigma}(m, x, y) \geq 0 \qquad p.p \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2,$$

$$\overline{\sigma}(m, x, y) = 0 \qquad \text{pour } m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[,$$

$$\|\overline{\sigma}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)} < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)},$$

*alors l'équation* (4.4) *avec la condition* (4.5) *admet solution unique* $\sigma$ *vérifiant*

$$\sigma \in L^{\infty}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1]),$$

*telle que*

$$\sigma(m, x, y, z) \geq 0 \qquad p.p \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1],$$

$$\overline{\sigma}(m, x, y, z) = 0 \qquad \text{pour } m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[.$$

**Démonstration.** On associe au problème (4.4)-(4.5), où la fonction inconnue à chercher est $\sigma$, le problème (4.11), (4.8) par une application bijective définis par le changement de variables $(m, x, y, z) \mapsto (\tilde{m}, \xi, \tilde{y}, \tilde{z})$ introduit dans (4.6) avec

$$\sigma(m, x, y, z) = \tilde{\sigma}(m, \xi + \overline{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1 - z), y, z).$$

Si $\tilde{\sigma}(m, \xi, y, z)$ est la solution du problème (4.11), (4.8) dont l'existence et l'unicité ont été démontrées dans le théorème 4.2.1, alors, on obtient l'existence et l'unicité de la solution $\sigma$ du problème (4.4)-(4.5) vérifiant les mêmes conditions. $\square$

## 4.3 Solution globale de l'equation de coagulation des gouttelettes en chute avec un vent horizontal

Nous cherchons une fonction $\sigma(m,t,x,y,z)$, qui vérifie l'équation (4.2) avec

$$(m,t,x,y,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0,1]$$

avec la condition aux limites (condition d'entrée)

$$\sigma(m,t,x,y,1) = \overline{\sigma}_1(m,t,x,y) \tag{4.30}$$

et la condition initiale

$$\sigma(m,0,x,y,z) = \overline{\sigma}_0(m,x,y,z). \tag{4.31}$$

De manière analogue au cas stationnaire, pour résoudre l'équation (4.2) avec les conditions (4.30)-(4.31), nous allons la transformer en une équation différentielle ordinaire, en introduisant le changement de variables

$$\begin{cases} \tilde{m} = m, \\ \xi = x - \overline{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), \\ \tilde{y} = y, \\ \tilde{z} = z, \\ \tilde{t} = t - \frac{\alpha(m)}{g}(1-z); \end{cases} \tag{4.32}$$

la fonction à chercher sera alors

$$\tilde{\sigma}(\tilde{m},\tilde{t},\xi,\tilde{y},\tilde{z}) = \sigma(m,t,x,y,z) = \sigma\Big(m, \tilde{t}+\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), \xi+\overline{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), y, z\Big).$$

On notera $m$, $y$, $z$ et $\sigma(m,\tilde{t},\xi,y,z)$ au lieu de $\tilde{m}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ et $\tilde{\sigma}(\tilde{m},\tilde{t},\xi,\tilde{y},\tilde{z})$ ; l'équation (4.2) se transforme en

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma\left(m,\tilde{t},\xi,y,z\right) = \tag{4.33}$$

$$= -\frac{m\ \alpha(m)}{2g} \int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',\tilde{t}^*(m,m',\tilde{t},z),\eta(m,m',\xi,y,z),y,z)\times$$
$$\times\sigma(m-m',\tilde{t}^*(m,m-m',\tilde{t},z),\eta(m,m-m',\xi,y,z),y,z)dm'+$$
$$+\frac{m\ \alpha(m)}{g} \int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,\tilde{t},\xi,y,z)\sigma(m',\tilde{t}^*(m,m',\tilde{t},z),\eta(m,m',\xi,y,z),y,z)dm',$$

où

$$\begin{cases} \tilde{t}^*(m,m',\tilde{t},z) = \tilde{t} + \frac{\alpha(m)-\alpha(m')}{g}(1-z), \\ \eta(m,m',\xi,y,z) = \xi + \overline{v}(y)\frac{\alpha(m)-\alpha(m')}{g}(1-z). \end{cases}$$

Nous introduisons pour chaque $y \in \mathbb{R}$ et $z \in [0,1]$ fixés, la famille de courbes

$$\gamma_{\tau,\zeta} = \gamma_{\tau,\zeta,y,z} = \left\{(m,\tilde{t},\xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \mid \tilde{t} = \tau - \frac{\alpha(m)}{g}(1-z),\ \xi = \zeta - \overline{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)\right\} \tag{4.34}$$

avec $\tau, \zeta \in \mathbb{R}$.

Soient $\tau$, $\zeta$, $\gamma_{\tau,\zeta}^{[0,m]}$ telle que

$$\tau(m,\tilde{t},z) = \tilde{t} + \frac{\alpha(m)}{g}(1-z), \quad \zeta(m,\xi,y,z) = \xi + \overline{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z),$$

$$\gamma_{\tau,\zeta}^{[0,m]} = \gamma_{\tau,\zeta} \cap [0,m] \times \mathbb{R}^2.$$

On pose

$$\kappa = (\tau,\zeta), \quad \vartheta = (\tilde{t},\xi), \quad q = q(y) = (1,\overline{v}(y))^T.$$

Alors les courbes définies dans (4.34) peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$\gamma_\kappa = \gamma_{\kappa,y,z} = \left\{(m,\vartheta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \mid \vartheta = \kappa - q(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)\right\}$$

avec

$$\kappa(m,\vartheta,y,z) = \vartheta + q(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), \qquad \gamma_\kappa^{[0,m]} = \gamma_\kappa \cap [0,m] \times \mathbb{R}^2.$$

La famille de courbes $\gamma_\kappa$ est similaire à celle définie dans (4.9) dans le cas stationnaire, donc de la même manière, on définit une mesure $\mu_\gamma$ sur les courbes $\gamma_\kappa$ et l'équation (4.33) devient

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(z) = F(\sigma(z)),\ \sigma(z) = \sigma(\cdot,\cdot,\cdot,z), \tag{4.35}$$

où

$$F(\sigma(z)) = F(\sigma(z))(m,\vartheta,y) = \tag{4.36}$$

$$= -\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_{\gamma^{[0,m]}_{\kappa(m,\vartheta,y,z)}} \beta(m-m',m')\sigma(m',\vartheta',y,z)\sigma(m-m',\vartheta'',y,z)\mu_\gamma(dm')+$$

$$+\frac{m\alpha(m)}{g}\int_{\gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z)}} \beta(m,m')\sigma(m',\vartheta',y,z)\sigma(m,\vartheta,y,z)\mu_\gamma(dm')$$

avec $\vartheta'$ et $\vartheta''$ sont définis par les relations

$$(m',\vartheta') \in \gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z)}, \qquad (m-m',\vartheta'') \in \gamma^{[0,m]}_{\kappa(m,\vartheta,y,z)}.$$

On remarque que cette équation est du même type que l'équation (4.11) dans le cas stationnaire avec $\vartheta$, $\kappa$ au lieu de $\xi$, $\tau$ (ou l'équation (3.16) dans le cas d'évolution en une dimension spatiale avec $\vartheta$, $\kappa$ au lieu de $\tilde{t}$, $\tau$) et que l'opérateur intégral figurant dans (4.36) vérifie les mêmes propriétés des lemmes 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3 et 4.2.4 (voir aussi les lemmes 3.2.1, 3.2.3, 3.2.4 et 3.2.5).

De manière analogue, les conditions aux limites et initiale se transforment en

$$\sigma\left(m,\tilde{t},\xi,y,1\right) = \overline{\sigma}_1^*(m,\tilde{t},\xi,y) = \overline{\sigma}_1^*(m,\vartheta,y) \tag{4.37}$$

et

$$\sigma(m,\frac{\alpha(m)}{g}(z-1),\xi,y,z) = \overline{\sigma}_0^*(m,\xi,y,z), \tag{4.38}$$

où $\overline{\sigma}_0^*$ et $\overline{\sigma}_1^*$ sont les fonctions obtenues de $\overline{\sigma}_0$ et $\overline{\sigma}_1$ par le changement de variables introduit dans (4.32).

### 4.3.1 Solution avec condition d'entrée de classe $L^1$

Nous définissons le domaine dans lequel nous allons considérer l'équation (4.35), à savoir

$$\Omega = \bigcup_{\kappa\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},\ 0<z<1} \gamma_{\kappa,y,z} =$$

$$= \left\{ (m,\vartheta,y,z) = (m,\tilde{t},\xi,y,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times ]0,1[\ \mid\ \tilde{t} > \frac{\alpha(m)}{g}(z-1) \right\}.$$

On pose

$$\Gamma_a = \left\{ (m,\vartheta,y,z) = (m,\tilde{t},\xi,y,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times [0,1]\ \mid\ \tilde{t} = \frac{\alpha(m)}{g}(z-1) \right\},$$

$$\Gamma_b = \{z=1\} \cap \overline{\Omega}.$$

Les conditions (4.37)–(4.38) peuvent être écrites dans la forme

$$\sigma = \overline{\sigma}_1^* \qquad \text{sur} \quad \Gamma_b, \qquad \sigma = \overline{\sigma}_0^* \qquad \text{sur} \quad \Gamma_a. \tag{4.39}$$

On a alors la proposition suivante.

**Proposition 4.3.1** *Soient $\overline{\sigma}_{(a)} \in L^1(\Gamma_a) \cap L^\infty(\Gamma_a)$ et $\overline{\sigma}_{(b)} \in L^1(\Gamma_b) \cap L^\infty(\Gamma_b)$ telles que*

$$\overline{\sigma}_{(a)}(m,\vartheta,y,z) \geq 0 \qquad p.p.\ sur \quad \Gamma_a, \quad \overline{\sigma}_{(b)}(m,\vartheta,y) \geq 0 \qquad p.p.\ sur \quad \Gamma_b,$$

$$\overline{\sigma}_{(a)}(m,\vartheta,y,z) = \overline{\sigma}_{(b)}(m,\vartheta,y) = 0 \qquad pour \quad m \in [0,\overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A,\infty[.$$

*Si*

$$\max(\|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)}, \|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)}) < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)},$$

*alors il existe une solution $\sigma$ et une seule de l'équation (4.35) satisfaisant aux conditions*

$$\sigma = \overline{\sigma}_{(b)} \quad sur\ \Gamma_b, \qquad \sigma = \overline{\sigma}_{(a)} \quad sur\ \Gamma_a \tag{4.40}$$

*avec*

$$\sigma \in C([0,1]; L^1(\Omega_z)) \cap L^\infty(\Omega),$$

*où*

$$\Omega_z = \{(m, \vartheta, y) = (m, \tilde{t}, \xi, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \mid \tilde{t} > \frac{\alpha(m)}{g}(z-1)\}. \tag{4.41}$$

**Démonstration.** Dans (4.35) et (4.36), on remarque l'absence de la dérivée et de l'intégrale par rapport à $y$, comme dans (4.11), ce qui implique que l'équation (4.35) peut être envisager séparément pour chaque $y \in \mathbb{R}$.

On définit pour chaque point $(m, \vartheta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ le nombre $\zeta_1(m, \vartheta) \in [0,1]$ tel que

$$\zeta_1(m, \vartheta) = \zeta_1(m, \tilde{t}, \xi) = \zeta_1(m, \tilde{t}) = \begin{cases} \max(0, 1 + \frac{\tilde{t}}{\alpha(m)} g) & \text{si } \tilde{t} \leq 0, \\ 1 & \text{si } \tilde{t} > 0. \end{cases} \tag{4.42}$$

On a évidement

$$(m, \vartheta, y, \zeta_1(m, \vartheta)) \in \Gamma_b \cup \Gamma_a \quad \forall (m, \vartheta, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \quad \tilde{t} \geq -\frac{\alpha(m)}{g}.$$

On remarque que $\zeta_1(m, \vartheta)$ ainsi défini est égal à $\zeta_1(m, \tilde{t})$ défini dans (3.26), ce qui nous permet de remplacer, dans la démonstration de la proposition 3.3.1 du chapitre 3, l'axe du temps par le plan $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. Par conséquent en reconduisant les mêmes étapes de la démonstration de cette dernière, on démontre la proposition. □

### 4.3.2 Existence et unicité de la solution globale en temps

De manière analogue au cas stationnaire, pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution globale avec un vent horizontal dans le cas général, on utilise la propriété de "cône de dépendence" et la proposition 4.3.1.

On considère un ensemble $\omega$ de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ tel que $0 < mes(\omega) < \infty$ et on définit

$$D[\omega] = \bigcup_{(m,\vartheta,y)\in\omega} D_{(m,\vartheta,y)}, \tag{4.43}$$

où

$$D_{(m,\vartheta,y)} = \bigcup_{0\leq z\leq 1} \Big( \bigcup_{\kappa_-(m,\vartheta,y,z)\leq\kappa\leq\kappa_+(m,\vartheta,y)} \gamma_{\kappa,y,z} \Big) = \tag{4.44}$$

$$= \{(m',\vartheta',y',z') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times [0,1] \mid \vartheta' = \kappa - q(y')\frac{\alpha(m')}{g}(1-z'),$$
$$y' = y,\ \kappa_-(m,\vartheta,y,z') \leq \kappa \leq \kappa_+(m,\vartheta,y)\}$$

avec

$$\begin{cases} \kappa_+(m,\vartheta,y) = \kappa(m,\vartheta,y,0) = \vartheta + q(y)\frac{\alpha(m)}{g}, \\ \kappa_-(m,\vartheta,y,z) = \kappa_+(m,\vartheta,y) - q(y)\frac{\overline{\alpha}_0}{g}z = \vartheta + q(y)\frac{\alpha(m)}{g} - q(y)\frac{\overline{\alpha}_0}{g}z. \end{cases}$$

On définit également $D_\omega(z)$ par

$$D_\omega(z) = \bigcup_{(m,\vartheta,y)\in\omega} \Big( \bigcup_{\kappa_-(m,\vartheta,y,z)\leq\kappa\leq\kappa_+(m,\vartheta,y)} \gamma_{\kappa,y,z} \Big) =$$
$$= \{(m',\vartheta',y',z') \in D[\omega] \mid z' = z\}.$$

On remarque que $D[\omega]$ est défini d'une manière similaire au cas stationnaire (voir (4.19), (4.20), (4.21) et (4.22)). Ainsi on a le lemme suivant.

**Lemme 4.3.1** *Soient $\overline{\sigma}^{[1]}_{(a)}$ et $\overline{\sigma}^{[2]}_{(a)}$ deux fonctions définies sur $\Gamma_a$, $\overline{\sigma}^{[1]}_{(b)}$ et $\overline{\sigma}^{[2]}_{(b)}$ deux fonctions définies sur $\Gamma_b$. On suppose que $\overline{\sigma}^{[1]}_{(a)}$, $\overline{\sigma}^{[2]}_{(a)}$, $\overline{\sigma}^{[1]}_{(b)}$, $\overline{\sigma}^{[2]}_{(b)}$ satisfont aux conditions de la proposition 4.3.1. Soit $\sigma^{[1]}$(resp. $\sigma^{[2]}$) la solution de l'équation* (4.35) *avec la condition* (4.40) *et $\overline{\sigma}_{(a)} = \overline{\sigma}^{[1]}_{(a)}$, $\overline{\sigma}_{(b)} = \overline{\sigma}^{[1]}_{(b)}$ (resp. $\overline{\sigma}_{(a)} = \overline{\sigma}^{[2]}_{(a)}$, $\overline{\sigma}_{(b)} = \overline{\sigma}^{[2]}_{(b)}$). Si on a*

$$\overline{\sigma}^{[1]}_{(b)} = \overline{\sigma}^{[2]}_{(b)} \quad sur\ \Gamma_b \cap D[\omega], \qquad \overline{\sigma}^{[1]}_{(a)} = \overline{\sigma}^{[2]}_{(a)} \quad sur\ \Gamma_a \cap D[\omega],$$

*alors*

$$\sigma^{[1]} = \sigma^{[2]} \quad p.p.\ dans\ D[\omega].$$

**Démonstration.** On intègre l'équation (4.35) par rapport à $z$, on a

$$\sigma^{[i]}(m,\vartheta,y,z) = \sigma^{[i]}(m,\vartheta,y,\zeta_1(m,\vartheta))+$$

$$+\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_z^{\zeta_1}\int_{\gamma^{[0,m]}_{\kappa(m,\vartheta,y,z'),y,z'}}\beta(m-m',m')\sigma^{[i]}(m',\vartheta',y,z')\sigma^{[i]}(m-m',\vartheta'',z')\mu_\gamma(dm')dz'+$$

$$-\frac{m\alpha(m)}{g}\int_z^{\zeta_1}\int_{\gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z'),y,z'}}\beta(m,m')\sigma^{[i]}(m',\vartheta',y,z')\sigma^{[i]}(m,\vartheta,y,z')\mu_\gamma(dm')dz',$$

pour $i=1,2$. Il résulte des conditions (4.39) que

$$\sigma^{[i]}(m,\vartheta,y,\zeta_1(m,\vartheta)) = \begin{cases} \overline{\sigma}^{[i]}_{(a)} & \text{sur } \Gamma_a, \\ \\ \overline{\sigma}^{[i]}_{(b)} & \text{sur } \Gamma_b, \end{cases}$$

où $\zeta_1(m,\vartheta)$ est le nombre défini dans (4.42).

En faisant la différence pour $i=1$ et $i=2$, on a

$$|\sigma^{[1]}(m,\vartheta,y,z)-\sigma^{[2]}(m,\vartheta,y,z)| \le |\sigma^{[1]}(m,\vartheta,y,\zeta_1)-\sigma^{[2]}(m,\vartheta,y,\zeta_1)|+$$

$$+C_\beta\Big[\int_z^{\zeta_1}\int_{\gamma^{[0,m]}_{(m,\vartheta,y,z'),y,z'}}\Big(\big|\sigma^{[1]}(m-m',\vartheta'',y,z')-\sigma^{[2]}(m-m',\vartheta'',y,z')\big|\sigma^{[2]}(m',\vartheta',y,z')+$$

$$+\big|\sigma^{[1]}(m',\vartheta',y,z')-\sigma^{[2]}(m',\vartheta',y,z')\big|\sigma^{[1]}(m-m',\vartheta'',y,z')\Big)\mu_\gamma(dm')dz'+$$

$$+\int_z^{\zeta_1}\int_{\gamma_{(m,\vartheta,y,z'),y,z'}}\Big(\big|\sigma^{[1]}(m,\vartheta,y,z')-\sigma^{[2]}(m,\vartheta,y,z')\big|\sigma^{[2]}(m',\vartheta',y,z')+$$

$$+\big|\sigma^{[1]}(m',\vartheta',y,z')-\sigma^{[2]}(m',\vartheta',y,z)\big|\sigma^{[1]}(m,\vartheta,y,z')\Big)\mu_\gamma(dm')dz'\Big].$$

On en déduit que

$$|\sigma^{[1]}(m,\vartheta,y,z)-\sigma^{[2]}(m,\vartheta,y,z)| \le \max(\|\overline{\sigma}^{[1]}_{(a)}-\overline{\sigma}^{[2]}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a\cap D[\omega])},\|\overline{\sigma}^{[1]}_{(b)}-\overline{\sigma}^{[2]}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b\cap D[\omega])})+$$

$$+C_\beta\Big[\int_z^1 \Big(\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')-\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z'),y,z'})}\|\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^1(\gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z'),y,z'})}+$$

$$+\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^1(\gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z'),y,z'})}\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')-\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z'),y,z'})}\Big)dz'+$$

$$+\int_z^1 \Big(\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')-\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z'),y,z'})}\|\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^1(\gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z'),y,z'})}+$$

$$+(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z'),y,z'})}\,\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')-\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z'),y,z'})}\Big)dz'\Big].$$

On remarque que cette inégalité est analogue à l'inégalité (4.24) dans la démonstration du lemme 4.2.6 avec $\vartheta$ et $\kappa$ au lieu de $\xi$ et $\tau$. Donc de manière analogue on obtient le résultat. □

Maintenant nous pouvons démontrer le théorème principal.

**Théorème 4.3.1** *Si $\overline{\sigma}_0^* \in L^\infty(\Gamma_a)$ et $\overline{\sigma}_1^* \in L^\infty(\Gamma_b)$ satisfont aux conditions*

$$\overline{\sigma}_0^*(m,\xi,y,z) \geq 0 \quad p.p.\ sur\ \Gamma_a, \qquad \overline{\sigma}_1^*(m,\vartheta,y) \geq 0 \quad p.p.\ sur\ \Gamma_b,$$

$$\overline{\sigma}_0^*(m,\xi,y,z) = 0, \quad \overline{\sigma}_1^*(m,\vartheta,y) = 0 \qquad pour\ m \in [0,\overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A,\infty[,$$

$$\max\left(\|\overline{\sigma}_0^*\|_{L^\infty(\Gamma_a)}; \|\overline{\sigma}_1^*\|_{L^\infty(\Gamma_b)}\right) < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A-\overline{m}_a)},$$

*alors l'équation* (4.35) *avec la condition* (4.39) *admet une solution $\sigma$ et une seule vérifiant*

$$\sigma \in L^\infty(\Omega)$$

*et*

$$\sigma(m,\vartheta,y,z) \geq 0 \quad p.p.\ dans\ \Omega,$$

$$\sigma(m,\vartheta,y,z) = 0, \quad pour\ m \in [0,\overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A,\infty[.$$

**Démonstration.** On considère une famille d'ensembles mesurables et bornés $\omega_i$, $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, définis par

$$\omega_i = \Big\{(m, \vartheta, y) = (m, \tilde{t}, \xi, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \mid \overline{m}_a \leq m \leq \overline{m}_A,$$

$$-\frac{\alpha(m)}{g} \leq \tilde{t} \leq i,\ -i \leq \xi \leq i,\ -i \leq y \leq i\Big\}$$

$$= \Omega_0 \cap \big\{(m, \vartheta, y) = (m, \tilde{t}, \xi, y) \in [\overline{m}_a, \overline{m}_A] \times \mathbb{R}^3 \mid \tilde{t} \leq i,\ -i \leq \xi \leq i,\ -i \leq y \leq i\big\},$$

où $\Omega_0$ est l'ensemble défini dans (4.41) avec $z = 0$. La définition de $D[\omega]$ (voir (4.43)-(4.44)) nous permet de définir un nombre $N$ tel que

$$D_{\omega_i}(1) \subset \Big\{(m, \vartheta, y) = (m, \tilde{t}, \xi, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \mid \overline{m}_a \leq m \leq \overline{m}_A,$$

$$\tilde{t} \leq i + N,\ -i - N \leq \xi \leq i + N,\ -i - 1 \leq y \leq i + 1\Big\}$$

et on considère une fonction $\psi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ ; $\psi_i \geq 0$, telle que

$$\psi_i(\vartheta, y) = \psi_i(\tilde{t}, \xi, y) =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \tilde{t} \leq i + N, \quad |\xi| \leq i + N, \quad |y| \leq i + 1, \\ 0 & \text{si} \quad \tilde{t} \geq i + N + 1, \quad |\xi| \geq i + N + 1, \quad |y| \geq i + 2. \end{cases}$$

On a alors

$$D_{\omega_i}(1) \subset \{(m, \vartheta, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid \psi_i(\vartheta, y) = 1\} \quad i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Le théorème se démontre d'une manière analogue au théorème 3.4.1 du chapitre 3 (voir aussi le théorème 4.2.1 du cas stationnaire) avec les mêmes étapes reconduites. $\square$

L'existence et l'unicité de la solution dans les coordonnées $(m, t, x, y, z)$ sont données dans le théorème suivant.

**Théorème 4.3.2** *Si* $\overline{\sigma}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0,1])$ *et* $\overline{\sigma}_1 \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ *satisfont aux conditions*

$$\overline{\sigma}_0(m,x,y,z) \geq 0 \qquad p.p.\ sur\ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0,1],$$

$$\overline{\sigma}_1(m,t,x,y) \geq 0 \qquad p.p.\ sur\ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2,$$

$$\overline{\sigma}_0(m,x,y,z) = \overline{\sigma}_1(m,t,x,y) = 0 \qquad pour\ \ m \in [0,\overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[,$$

$$\max\left(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2\times[0,1])}; \|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)}\right) < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)},$$

*alors l'équation* (4.2) *avec les conditions* (4.30)-(4.31) *admet une solution* $\sigma$ *et une seule vérifiant*

$$\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times ]0,1[)$$

*et*

$$\sigma(m,t,x,y,z) \geq 0 \qquad p.p.\ dans\ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times ]0,1[,$$

$$\sigma(m,t,x,y,z) = 0, \qquad pour\ m \in [0,\overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[.$$

**Démonstration.** Au problème (4.2), (4.30), (4.31), où la fonction inconnue à chercher est $\sigma$, on associe le problème (4.35), (4.39) par une application bijective défini par le changement de variables $(m,t,x,y,z) \mapsto (\tilde{m}, \tilde{t}, \xi, \tilde{y}, \tilde{z})$ introduit dans (4.32) avec

$$\sigma(m,t,x,y,z) = \tilde{\sigma}(m, t - \frac{\alpha(m)}{g}(1-z), x + \overline{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), y, z).$$

Si $\tilde{\sigma}(m,\tilde{t},\xi,y,z)$ est la solution du problème (4.35), (4.39) dont l'existence et l'unicité ont été démontrées dans le théorème 4.3.1, alors, on aura l'existence et l'unicité de la solution $\sigma$ du problème (4.2), (4.30), (4.31) vérifiant les mêmes conditions. $\square$

# Chapitre 5

# Perspectives

Dans les chapitres 3 et 4 on a étudié la chute des gouttelettes par la force gravitationnelle dans les cas respectivement de l'absence du mouvement de l'air et la présence d'un vent horizontal, sans considérer la condensation de la vapeur d'eau sur les gouttelettes ni l'évaporation à partir des gouttelettes. En outre, l'étude du déplacement des gouttelettes dans l'air par la force gravitationnelle et par le vent en tenant compte de toutes les transitions de phase de l'eau n'est pas encore bien élucidée ; ceci ouvre de nombreux perspectives et beaucoup de problèmes à résoudre.

Pour cela, en premier lieu, on va envisagé l'étude du déplacement des gouttelettes dans l'air tenant compte le processus de coagulation et la transition condensation-évaporation.

## 5.1 Equation de coagulation des gouttelettes en chute avec condensation dans le domaine entre deux plans horizontaux

On considère l'équation qui décrit le déplacement des gouttelettes dans l'air, donnée dans le chapitre 2, en tenant compte la transition condensation-évaporation, caractérisée par l'équation suivante

$$\partial_t \sigma(m) + \nabla_x \cdot (\sigma(m) u(m)) + \partial_m (m h_{gl}(m) \sigma(m)) = \tag{5.1}$$

$$= h_{gl}(m)\sigma(m) + \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m', m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm' +$$

$$-m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm' + g_0(m)\big[N^* - \widetilde{N}(\sigma)\big]^+ [\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)]^+ +$$

$$-g_1(m)[\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)]^- \sigma(m),$$

où les termes $h_{gl}$, $g_0(m)\big[N^* - \widetilde{N}(\sigma)\big]^+[\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}]^+$ et $g_1(m)[\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}]^- \sigma$ sont comme dans le chapitre 2, l'équation (2.16), avec les transitions seulement entre le gaz et le liquide, et la vitesse $u(m) = u_l(m)$ des gouttelettes de masse $m$ est donnée par

$$u(t,x,m) = v(t,x) - \frac{g}{\alpha(m)} e_3, \quad e_3 = (0,0,1)^T.$$

L'équation (5.1) va être considérer dans un domaine borné dans la direction verticale, c'est-à-dire dans le domaine

$$\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad \text{avec} \quad \Omega = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x_3 < 1 \,\},$$

complétée par la condition initiale

$$\sigma(0,x,m) = \tilde{\sigma}_0(x,m) \qquad \text{pour} \quad x \in \Omega,\ m \in \mathbb{R}_+ \tag{5.2}$$

et la condition aux limites

$$\sigma(t, x_1, x_2, 1, m) = \tilde{\sigma}_1(t, x_1, x_2, m) \qquad \text{pour} \quad t \in \mathbb{R}_+,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ m \in \mathbb{R}_+. \tag{5.3}$$

Si on note par $\Gamma_- = \big(\{0\} \times \Omega \times \mathbb{R}_+\big) \cup \big(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \{1\} \times \mathbb{R}_+\big)$ alors les conditions (5.2)-(5.3) peuvent être écrites dans la forme

$$\sigma|_{\Gamma_-} = \tilde{\sigma} = \begin{cases} \tilde{\sigma}_0 & \text{sur } \{0\} \times \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \tilde{\sigma}_1 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \{1\} \times \mathbb{R}_+. \end{cases} \tag{5.4}$$

Pour déterminer la distribution de $\sigma$, on introduit deux nombres $\overline{m}_a$ et $\overline{m}_A$ (avec $0 < \overline{m}_a < \overline{m}_A < \infty$) et on considère que les gouttelettes sont absentes en dehors de l'intervalle $[\overline{m}_a, \overline{m}_A]$, alors on a

$$\sigma(m) = 0 \qquad \text{pour } m \in [0, \overline{m}_a[ \,\cup\, ]\overline{m}_A, \infty[.$$

Supposons que $u$, $h_{gl}$, $(\pi - \overline{\pi}_{vs})$, $\beta$, $g_0$ et $g_1$ sont des fonctions données et que $N^*$ et $\widetilde{N}(\sigma)$ sont respectivement une constante positive et une fonction linéaire de $\sigma$ avec

$$\widetilde{N}(\sigma)(t, x) = \int_0^\infty n(m)\sigma(t, x, m)dm \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega,$$

$$n(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+), \quad n(m) \geq 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}_+.$$

En outre, on va supposer que $\beta$ est une fonction continue, positive, symétrique et vérifie la condition

$$\beta(m_1, m_2) = 0 \qquad \text{si} \quad m_1 + m_2 \geq \overline{m}_A$$

et que $g_0$ et $g_1$ vérifient

$$g_0 \in \mathcal{C}([0, \infty[), \qquad g_0 \geq 0, \qquad g_0(m) = 0 \quad \text{si} \quad m \notin [\overline{m}_a, \overline{m}_A],$$

$$g_1 \geq 0, \quad g_1 \in \mathcal{C}([0,\infty[\,),$$

où

$$g_1 \in \mathcal{C}(\,]m_{g1},\infty[\,), \int_{m_{g1}}^{\overline{m}_a+1} g_1(m)dm = \infty, \quad m_{g1} \in [0,\overline{m}_a].$$

D'autre part, on va supposer que

$$u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}_+;\mathbb{R}^3) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}_+;W^{1,\infty}(\Omega \times \mathbb{R}_+;\mathbb{R}^3))\cap$$

$$\cap L^1_{x_3}\big(0,1;W^{1,\infty}_{(t,x_1,x_2,m)}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+;\mathbb{R}^3)\big),$$

$$\nabla \cdot u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}_+),$$

$$h_{gl} \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}_+) \cap L^1_{loc}\left(\mathbb{R}_+;W^{1,\infty}(\Omega \times \mathbb{R}_+)\right) \cap$$

$$\cap L^1_{x_3}\big(0,1;W^{1,\infty}_{(t,x_1,x_2,m)}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)\big)$$

et qu'il existe une constante positive $A_0$ tel que

$$u_3(t,x,m) \leq -A_0 < 0 \qquad \forall (t,x,m) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}_+$$

($\mathcal{C}_b(X;\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues bornées sur $X$).

De plus, on va supposer que

$$\tilde{\sigma}_0 \in \mathcal{C}_b(\Omega \times \mathbb{R}_+), \qquad \tilde{\sigma}_0 \geq 0,$$

$$\tilde{\sigma}_1 \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+), \qquad \tilde{\sigma}_1 \geq 0,$$

$$\tilde{\sigma}_0(x,m) = 0, \quad \tilde{\sigma}_1(t,x_1,x_2,m) = 0 \quad \text{si} \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad m \notin [\overline{m}_a,\overline{m}_A].$$

L'équation (5.1) peut être écrite dans la forme suivante

$$\partial_t \sigma + \widetilde{U} \cdot \nabla_{(x,m)}\sigma = -\widetilde{g}\sigma + \Phi[\sigma] - \sigma f[\sigma] + h[\sigma],$$

où

$$\nabla_{(x,m)} = \left(\partial_{x_1},\partial_{x_2},\partial_{x_3},\partial_m\right)^T,$$

$$\widetilde{U}(t,x,m) = (u_1(t,x,m), u_2(t,x,m), u_3(t,x,m), mh_{gl}(t,x,m)),$$

$$\widetilde{g}(t,x,m) = \nabla_x \cdot u(t,x,m) + \partial_m(mh_{gl}(t,x,m)) + g_1(m)[\pi - \overline{\pi}_{vs}]^-,$$

$$\Phi[\sigma](t,x,m) = \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m', m')\sigma(t,x,m')\sigma(t,x,m-m')dm',$$

$$f[\sigma](t,x,m) = m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(t,x,m')dm',$$

$$h[\sigma](t,x,m) = g_0(m)\big[N^* - \widetilde{N}(\sigma)(t,x)\big]^+[\pi - \overline{\pi}_{vs}]^+$$

avec $(t,x,m) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}_+$.

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}t(s) = 1, \\ \frac{d}{ds}X(s) = \widetilde{U}(t(s), X(s)), \\ (t(0), X(0)) = (\tilde{t}, \tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \tilde{x_3}, \tilde{m}) \in \Gamma_-, \end{cases} \tag{5.5}$$

où $X(s) = \big(X_1(s), X_2(s), X_3(s), M(s)\big)$ et la première équation de (5.5) nous donne

$$t(s) = \tilde{t} + s.$$

A partir des conditions pour $u$ et $h_{gl}$, on déduit qu'il existe unique solution $X(\tilde{t}, \tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \tilde{x_3}, \tilde{m}; \cdot)$ sur $[-\tilde{t}, +\infty[$ du problème (5.5).

Nous pouvons écrire formellement le problème (5.1) et (5.4) dans la forme

$$\frac{d}{ds}\sigma(\tilde{t}+s, X(\tilde{t}, \tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \tilde{x_3}, \tilde{m}; s)) = -\sigma(\tilde{t}+s, X(\tilde{t}, \tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \tilde{x_3}, \tilde{m}; s)) \times \tag{5.6}$$

$$\times\big[\widetilde{g}(\tilde{t}+s, X(\tilde{t}, \tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \tilde{x_3}, \tilde{m}; s)) + f[\sigma](\tilde{t}+s, X(\tilde{t}, \tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \tilde{x_3}, \tilde{m}; s))\big] +$$

$$+\Phi[\sigma](\tilde{t}+s, X(\tilde{t}, \tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \tilde{x_3}, \tilde{m}; s)) + h[\sigma](\tilde{t}+s, X(\tilde{t}, \tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \tilde{x_3}, \tilde{m}; s)),$$

$$\sigma(\tilde{t}, \tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \tilde{x_3}, \tilde{m}) = \tilde{\sigma}(\tilde{t}, \tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \tilde{x_3}, \tilde{m}) \quad \forall(\tilde{t}, \tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \tilde{x_3}, \tilde{m}) \in \Gamma_-. \tag{5.7}$$

On espère que cette formule nous permettra de montrer l'existence et l'unicité de la solution globale, en utilisant l'idée de [34].

## 5.2 Perspectives générales

Un problème d'un grand intérêt qui se pose est celui de l'étude du déplacement des gouttelettes en tenant compte de toutes les transitions de phase de l'eau entre le gaz-liquide-solide. Nous éspérons résoudre le problème en utilisant les idées qui ont guidé les travaux présentés dans cette thèse.

# Bibliographie

[1] Ascoli, D., Selvaduray, S. : wellposedness in the lipchitz class for a quasi-linear hyperbolic system arising from a model of the atmosphere including water phase transition. *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, vol **21** (2014), pp. 263-287.

[2] Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H. : Equations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau. *Sci. Techn. Univ. Constantine* - A, vol. **31** (2011), pp. 9–17.

[3] Belhireche, H., Aissaoui, M.Z., Fujita Yashima, H. : Solution globale de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute. *Ren. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino*, vol. **70**, 3 (2012), pp. 261–278.

[4] Belhireche, H., Aissaoui, M.Z., Ellaggoune, F. : Global solution for the coagulation equation in fall with horizontal wind. To appear on *Annales de l'Académie des scientifiques roumains : Série sur les mathématiques et ses applications.*

[5] Belhireche, H., Selvaduray, S. : Global solution for the coagulation equation of water droplets in atmosphere between two horizontal planes. In preparation.

[6] Brezis, H. : *Analyse fonctionelle (Théorie et applications)*, Masson 1987.

[7] Buccellato, S., Fujita Yashima, H. : Système d'équations d'un gaz visqueux modélisant l'atmosphère avec la force de Coriolis et la stabilité de l'état d'équilibre. *Ann. Univ. Ferrara - Sez. VII - Sc. Mat.*, vol. **49** (2003), pp. 127–159.

[8] Dubovski, P. B. : An Iterative Method for Solving the Coagulation Equation with Space-Nonhomogeneous Velocity Fields. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. **30** (1990), pp. 1755-1757 (En-glish translation : pp. 116-117).

[9] Dubovski, P. B. : Solutions of a Spatially Inhomogeneous Coagulation Equation with Particle Fractionation Taken into Account. *Differential Equations*, vol. **26** (1990), pp. 508-513 (English translation : pp. 380-384).

[10] Dubovski, P.B. : Solubility of the transport equation in the kinetics of coagulation and fragmentation (in Russian). *Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat.*, vol. **65** (2001), pp. 3-24.

[11] Dubovski, P.B., Galarkin, V.A., Stewart, W. : Exact solutions for the coagulation-fragmentation equation. *J. Phys. A : Math. Gen*, vol. **25** (1992), pp. 4737-4744. *Printed in the UK.*

[12] Escobedo, M., Mischler, S., Perthame, B. : Gelation in coagulation and fragmentation models. *Comm. Math. Phys.*, vol. **231** (2002), pp. 157–188.

[13] Escobedo, M., Mischler, S., Rodriguez Ricard, M. : On self-similarity and stationary problem for fragmentation and coagulation models. *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire*, vol. **22** (2005), pp. 99–125.

[14] Escobedo, M., Velazquez, J.J.L. : On the Fundamental Solution of a Linearized Homogeneous Coagulation Equation. *Comm. Math. Phys.*, vol. **297** (2010), pp. 759–816.

[15] Fujita Yashima, H. : Modelación matemática del movimiento de la atmósfera con la transición de fase del agua. Rev. Invest. Operac., vol. **34** (2013), pp. 93-104.

[16] Fujita Yashima, H., Campana, V., Aissaoui, M. Z. : Système d'équations d'un modèle du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère. *Ann. Math. Afr.*, vol. **2** (2011), pp. 66–92.

[17] Galkin, V. A. : Generalized Solution of the Smoluchowski Kinetic Equation for Spatially Inhomogeneous Systems. *Sov. Phys. Dokl.*, vol. **32** (3) (1987), pp. 200-202.

[18] Galkin, V. A. : Smoluchowski Equation of the Kinetic Theory of Coagulation for Spatially Nonuniform Systems. *Sov. Phys. Dokl.*, vol. **30** (12) (1985), pp. 1012-1014.

[19] Galkin, V. A., Dubovski, P. B. : Solution of the Coagulation Equation with Unbounded Kernels. *Differential Equations*, vol. **22** (1986), pp. 504-509 (English translation : pp.373-378).

[20] Kantrovitch, L. V., Akilov, G. P. : *Analyse fonctionnelle, tome 2* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1981.

[21] Kikoïne, A. K., Kikoïne, I. K. : *Physique moléculaire* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1979.

[22] Kolmogorov, A. N., Fomine, S. V. : *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionelle* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1974.

[23] Landau, L. L, Lifchitz, E. M : *Mécanique des fluides (physique théorique, tome 6)* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1989.

[24] Matveev, L. T. : *Physique de l'atmosphère* (en russe). Gidrometeoizdat, Leningrad-S. Peterburg, 1965, 1984, 2000.

[25] Merad, M., Belhireche, H., Fujita Yashima, H. : Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelettes en chute avec le vent horizontal. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, vol. **129** (2013), pp. 225-244.

[26] Mikhaïlov, V. : *Equations aux dérivées partialles* (traduit de russe). Editions Mir Moscou 1980.

[27] Mischler, S. : Contributions à l'étude mathématique de quelques modèles issus de la physique hors équilibre. *Thèse d'habilitation*, Univ. Versailles Saint-Quentin, 2001.

[28] Mischler, S., Rodriguez Ricard, M. : Existence globale pour l'équation de Smoluchowski continue non homogène et comportement asymptotique des solutions. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. I, Math., vol. **336** (2003), pp. 407–412.

[29] Müller, H. : Zur allgemeinen Theorie der raschen Koagulation. *Kolloidchem. Beib.*, vol. **27** (1928), pp. 223–250.

[30] Niethammer, B., Velazquez, J.J.L. : Optimal bounds for self-similar solutions to coagulation equations with multiplicative kernel. A paraître sur *Commun. PDE.*

[31] Prodi, F., Battaglia, A. : *Meteorologia - Parte II, Microfisica.* Grafica Pucci, Roma, 2004. (voir aussi le site :
http ://www.meteo.uni-bonn.de/mitarbeiter/battaglia/teaching.html ).

[32] Selvaduray, S., Fujita Yashima, H. : Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati : gassoso, liquido e solido. *Accad. Sci. Torino, Memorie Cl. Sci. Fis., Serie V*, vol. **35** (2011), pp.37-69.

[33] Selvaduray, S. : On quasilinear hyperbolic system relative to an atmospheric model on the transition of water defined on the whole space. 2013 (submitted).

[34] Selvaduray S. : An initial and boundary value problem on a strip for a quasilinear hyperbolic system relative to a model of $H_2O-$phase transition in atmospshere. (In preparation).

[35] Sheng, P.-X., Mao, J.-T., Li, J.-G., Zhang, A.-C., Sang, J.-G., Pan, N.-X. : *Physique de l'atmosphère* (en chinois). Publ. Univ. Pékin, Pékin, 2003.

[36] Smoluchowski, M. : Drei Vorträge über Diffusion, Brownische Bewegung und Koagulation von Kolloidteilchen. *Phys. Zeits.*, vol. **17** (1916), pp. 557–585.

[37] Tani, A. : On the first initial-bondary value problem of compressible viscous fluid motion. *Publ. RIMS, Kyoto Univ*, vol. **13** (1977), pp.193-253.

[38] Voloshtchuk, V. M. : *Théorie cinétique de coagulation* (en russe). Gidrometeoizdat, Leningrad, 1984.