République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

<u>Mémoire</u>

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques
Option : **Equations aux Dérivées Partielles et Analyse Numérique**

Par:

LARIBI Nada

Intitulé

Méthode de Galerkin-éléments finis mixtes pour une équation parabolique p-biharmonique avec terme mémoire

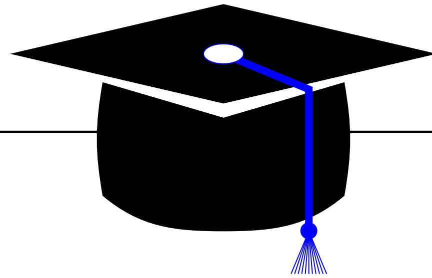
<u>Dirigé par</u> : Pr.CHAOUI Abderrezak

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. BOUSSETILA Nadjib**	**Professeur**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. CHAOUI Abderrezak**	**Professeur**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. LARIBI Naima**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr.GRARA Kamila**	**MCB**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2024

بسم الله الرحمن الرحيم



Remerciements

Avant tout je remercie " **Allah**" le tout puissant qui m'a donné la volonté, le courage, la force et la patience pour réaliser ce travail.

Je remercie profondément mon directeur de mémoire **Pr. CHAOUI Abderrezak** pour ses suivis et ses précieux orientations dans mon travail et je voudrais le remercie pour tous les conseils, les remarques et les informations importantes qu'il m'a donnés. c'est un grand honneur pour moi d'avoir travaillé sous sa direction.

Je tiens également à remercier tous les membres du jury

Pr.BOUSSETILA Nadjib

Dr.LARIBI Naima et **Dr.GRARA Kamila**

d'avoir accepté d'évaluer mon travail, avec l'espoir d'être à la hauteur de leur attente.

Une grande reconnaissance et un grand remerciement à tous mes enseignants et tous les membres de la composante administrative du département de mathématiques (Univ Guelma) et pour toute l'aide qui a été accordée.

Je remercie mes parents pour tous leurs sacrifices en faveur de mon éducation, ma famille et toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

-Merci à tous et à toutes-

⋆ Dédicace⋆

De tout mon cœur,Je dédie ce modeste travail à ceux qui m'ont appris la volonté aux personnes dont je suis sûr qu'elles seront plus heureuses et plus honorées que moi par ce travail à mes parents pour les sacrifices déployés à nos égards ; pour leur patience leur amour et leur confiance en nous ils ont tout fait pour notre bonheur et notre réussite.

A ma mère "Leila" tu étais mon ange, ma force, ma nostalgie, mon épaule et la source de mon bonheur. Que Dieu te protège et me donne la force de ton bonheur.

A mon père "Djamel" tu as toujours été à mes côtés pour me soutenir et m'encourager. Que ce travail traduit ma gratitude et mon affection.

Mes frères et mon soutien dans la vie "Abdou" , "Mohamed" et mon petit frère "Chouaib"

A toute ma famille.

A toute personne chère à mon cœur, proche ou lointaine, et à tous les membres de ma famille, petits et grands aux personnes qui nous ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à nos côtés, et qui nous ont accompagné durant notre période d'études .

Finalement a mes enseignants et a tous ceux qui m'ont aidé.

⋆ Laribi Nada ⋆

- **Abstract:**

A high-order parabolic p-biLaplace equation with memory term is studied. Using Roth's method, we managed to find the approximate solution of the time semi-discretized problem. Some a priori estimates are proved, from which we extract convergence, existence, uniqueness and qualitative results in suitable functional spaces. A full discretization scheme using the mixed finite element method is introduced.

- **Keywords: Parabolic p-biharmonic equation, memory term, weak solution, regularity results, mixed finite element method.**

- **Résumé :**

Une équation parabolique p-biLaplace d'ordre élevé avec terme mémoire est étudiée. En utilisant la méthode de Roth, nous avons réussi à trouver la solution approchée du problème semi-discrétisé en temps. Certaines estimations a priori sont prouvées, à partir desquelles nous extrayons la convergence, l'existence, l'unicité et les résultats qualitatifs dans des espaces fonctionnels appropriés. Un schéma de discrétisation complète utilisant la méthode des éléments finis mixtes est introduit.

- Mots clés : **Équation parabolique p-biharmonique, terme mémoire, solution faible, résultats de régularité, méthode des éléments finis mixtes.**

• ملخص:

تمت دراسة معادلة $p-biLaplace$ عالية الرتبة ذات حد الذاكرة. باستخدام طريقة روث، تمكنا من إيجاد الحل التقريبي للمسألة المقطعة جزئيا بالنسبة للزمن. تم إثبات بعض التقديرات المسبقة التي نستخرج منها التقارب والوجود والتفرد والنتائج النوعية في فضاءات دالية مناسبة. في نهاية المذكرة تم عرض مخطط التقطيع الكلي باستخدام طريقة العناصر المحدودة المختلطة.

- الكلمات المفتاحية: معادلة القطع المكافئ $p-biharmonic$، حد الذاكرة، الحل الضعيف، نتائج الانتظام، طريقة العناصر المحدودة المختلطة.

Table des matières

Introduction

Au cours des dernières décennies, l'étude des PDEs d'ordre élevé a connu un développement rapide. L'une de nos motivations pour étudier (2.1.1) vient des applications dans le domaine de l'élasticité, plus précisément, il peut être utilisé dans la modélisation des ondes de déplacement dans les ponts suspendus (voir [14]). D'autres applications intéressantes sont liées à l'amélioration de la qualité visuelle des images endommagées et bruitées si : $1 < p^- < 2$(voir [21]). Notons que dans le cas stationnaire et pour $p = 2$ le problème (2.1.1) devient $\Delta^2 u = f$ qui modélise les déformations d'une plaque mince homogène encastrée le long de sa poutre et soumise à une distribution f de charge normale à la plaque .

Parmi les travaux les plus récents concernant l'équation parabolique p-biharmonique , on peut revoir Cömert et al. [5] , où les auteurs ont essayé de démontrer l'existence et l'unicité de la solution faible globale pour l'équation parabolique p-biharmonique avec non-linéarité logarithmique. Dans [12], les auteurs ont obtenu les résultats sur l'explosion, l'extinction et la non-extinction des solutions pour une équation parabolique p-biharmonique non locale dans des conditions appropriées. Dans [22] , l'auteur a étudié l'équation parabolique p-biharmonique avec non-linéarité logarithmique. Un problème de valeur initiale pour l'onde p(x)-bi-Laplace avec dissipation non linéaire a été considéré dans [23] . En utilisant une variété de techniques, les auteurs ont obtenu des conditions suffisantes pour prouver le résultat de non existence global. D'autre part, la discrétisation du temps de Roth est l'une des méthodes les plus courantes pour résoudre les équations d'évolution, où les dérivées par rapport à t sont remplacées par les quotients de différence correspondants ce qui conduisent finalement à des systèmes d'équations différentielles, (voir [3, 4, 6, 8, 10, 16, 17]).

La méthode des éléments finis mixtes est discutée pour cette classe d'équations aux dérivées partielles, en raison de ses différents avantages, qui sont représentés dans la conservation locale de chaque grandeur physique (comme la quantité de mouvement, la masse, la quantité de chaleur, etc) et donc la conservation globale de ces quantités physiques. Elle permet également d'introduire une variable auxiliaire, ce qu'on appelle multiplicateur de Lagrange, associée à une contrainte que l'état doit satisfaire, on obtient donc un système de deux équations.

Dans ce mémoire, nous considérons un problème parabolique p-biharmonique d'ordre élevé avec terme de mémoire. Notre motivation dans ce choix est de bien étudier ce type de problème en le traitant analytiquement et numériquement, en utilisant la méthode de Rothe combinée avec la méthode des éléments finis mixtes pour obtenir une solution approchée du problème (2.1.1). Quelques résultats qualitatifs, en fonction des valeurs $p(1 < p \leq 2$ et si $2 < p < \infty)$sont prouvés. Une estimation optimale de l'erreur est discutée .

Ce mémoire est organisé comme suit :

Chapitre 1 : Nous présentons quelques notations de base, rappel d'analyse fonctionnelle et le matériel nécessaire à notre travail.

Chapitre 2 : est consacrée à quelques estimations a priori et résultats de convergence qui permettent de conclure à l'existence d'une solution faible du problème (2.1.1) au sens de la définition (2.2) puis nous montrons que pour $1 < p < 2$ le problème étudié a au plus une solution faible.

Chapitre 3 : Dans ce chapitre le problème complètement discrétisé en utilisant les éléments finis mixtes a été discuté.

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base et les outils mathématiques nécessaires qui seront utilisées par la suite.

1.1 Notions des espaces

Dans ce qui suit Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$.

1.1.1 Espace dual

L'ensemble des formes linéaires continues sur un espace vectoriel normé V est appelé espace dual de V et noté V'.

1.1.2 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Soit Ω et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on pose :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \text{u mesurable et } \int_\Omega |u|^p dx < \infty \ p.p \right\},$$

on munit l'espace $L^p(\Omega)$ de la norme suivante :

$$\|u\|_{L^p}^p = \int_\Omega |u(x)|^p dx.$$

1.1.3 Distributions

Définition 1.1.1.

Soit $f \in C(\Omega)$, on appelle support d'une fonction f, le sous-ensemble fermé de Ω noté *suppf* défini par :

$$suppf = \overline{\{x \in \Omega : \ f(x) \neq 0\}},$$

donc

$$x_0 \notin suppf \ \Leftrightarrow \exists V \in V(x_0) : f(x) = 0, \forall x \in V.$$

Définition 1.1.2. ***(L'espace des fonctions test*** $D(\Omega)$***)***

On définit l'ensemble $D(\Omega)$ comme l'espace des fonctions indéfiniment différentiable sur $\Omega(C^\infty(\Omega))$ et à support compact dans Ω qui est un espace vectoriel et tout élément de cet espace s'appelle fonction test. On appelle l'espace $D(\Omega)$ l'espace des fonctions test.

$$D(\Omega)\,(\equiv C_c^\infty(\Omega)) = \left\{f \in C^\infty(\Omega)\,, \text{tel que } supp(f) \text{ compact dans } \Omega\right\}.$$

Exemple :

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & \text{si :} |x| < 1 \\ 0, & \text{si :} |x| \geq 1. \end{cases}$$

est une fonction test sur $\mathbb{R}^n$, i.e : $\rho \in D(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.1.3. ***(L'espace de distributions** $D'(\Omega)$**)***

On appelle distribution sur Ω de $\mathbb{R}^n$ toute forme linéaire et continue par rapport à la topologie de $D(\Omega)$. En d'autres termes une distribution sur Ω est une forme linéaire : $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}\, ou\, \mathbb{C}$, telle que :

$$\lim_{k\to\infty} T(\varphi_k) = \lim_{k\to\infty} \langle T, \varphi_k \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Pour toute suite (φ_k) convergente vers φ dans $D(\Omega)$. L'espace de toutes les distributions sur Ω est noté $D'(\Omega)$ (c'est le dual topologique de $D(\Omega)$).

Dérivation au sens des distributions

Soit $T \in D'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on définit la dérivée d'indice α, notée $D^\alpha T$ par la formule suivante :

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Donc, on définit $DT = \frac{\partial T}{\partial x_i}$ par :

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle.$$

Exemple : On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction dite de Heaviside H par :$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si}\, x \geq 0 \\ \\ 0 & \text{si}\, x < 0. \end{cases}$$

Si $\varphi \in D(\Omega)$,alors

$$\langle DT_H, \varphi \rangle = -\langle T_H, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0).$$

Donc , la dérivée de la distribution de Heaviside est la distribution de Dirac, $DT_H = \delta_0$.

1.1.4 Espace $W^{m,p}(\Omega)$(Espace de Sobolev)

Soit Ω , soit $p \in [1, \infty[$ et $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de Sobolev par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega); \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| \leq m\},$$

où $D^\alpha u$ est une dérivée partielle de u au sens faible (au sens des distributions).
La norme sur l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si} \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \max\limits_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^\infty(\Omega)} & \text{si} \quad p = +\infty. \end{cases}$$

Notons que

$$|u|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)},$$

est une semi norme.

1.1.5 Espace $W_0^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.1.4.

L'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ est l'adhérence de $D(\Omega)$ dans l'espace $W^{m,p}(\Omega)$:

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Théorème 1.1.1.

L'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ est caractérisé par :

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega); D^\alpha u\backslash_{\partial\Omega} = 0; |\alpha| \leq m - 1\}.$$

• Pour $m = 2$, on définit l'espace $W_0^{2,p}(\Omega)$ comme suit :

$$W_0^{2,p}(\Omega) = \{u \in W^{2,p}(\Omega);\ u\backslash_{\partial\Omega} = 0 \text{ et } \nabla u\backslash_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Remarque :

1. Noter que si $p > 1$, alors les espaces $W^{2,p}(\Omega)$ et $W_0^{2,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach séparables et réflexifs.
2. La norme $\|.\|_{W^{2,p}(\Omega)}$ est équivalente à la semi-norme $\|\Delta(.)\|_{L^p(\Omega)}$ sur l'espace $W_0^{2,p}(\Omega)$ (voir[1, 19]).

1.1.6 Espace dual $W^{-m,q}(\Omega)$

Soient p, q deux réels vérifiant , $1 \leq q < \infty$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et m un entier de $\mathbb{N}^*$. L'espace $W^{-m,q}(\Omega)$ est le dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

$$(W_0^{m,p}(\Omega))' = W^{-m,q}(\Omega).$$

1.1.7 Espace Bochner

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach ; $I = [0, T]$, $T \in \mathbb{R}$.

•L'espace $L^p(I, X)$ de Bochner est définit pour toutes fonctions $f : I \to X$ par :

$$L^p(I, X) = \left\{ f : I \to X; \quad \int_I \|f(t)\|_X^p dt < \infty \right\},$$

tel que la norme correspondante soit définie :

$$\|f\|_{L^p(I,X)}^p = \int_I \|f\|_X^p dt.$$

•On définit l'espace $C(I, X)$ de Bochner comme suit :

$$C(I, X) = \left\{ f : I \to X; \quad \max_I \|f(t)\|_X < \infty \right\},$$

tel que la norme correspondante soit définie :

$$\|f\|_{C(I,X)} = \max_{t\in I} \|f(t)\|_X.$$

1.2 Suite de Rothe

On définit la suite de Rothe comme suit :

$$U^n(t) = \begin{cases} u_0 & ,\text{si} \quad t = 0, \\ u_{i-1}^n + (t - t_{i-1}^n)\delta u_i^n & ,\text{si} \quad t \in (t_{i-1}^n, t_i^n]. \end{cases}$$

Ensuite, on définit une suite de fonctions d'état :

$$\overline{U^n}(t) = \begin{cases} u_0 & ,\text{si} \quad t = 0, \\ u_i^n & ,\text{si} \quad t \in (t_{i-1}^n, t_i^n]. \end{cases}$$

1.3 Convergence faible

Définition 1.3.1.

Une suite u_n converge faiblement dans un espace de Banach V vers u, si l'on a :

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, v\rangle_{V\times V\prime} = \langle u, v\rangle_{V\times V\prime} \quad i.e \quad \lim_{n\to\infty} \langle u_n - u, v\rangle_{V\times V\prime} = 0, \forall v \in V'.$$

Où V' est l'espace dual de V.

- On note par $u_n \rightharpoonup u$: la convergence faible dans V.

- On note par $u_n \to u$: la convergence forte dans V (la convergence en norme).

Théorème 1.3.1.

Dans un espace de Banach séparable toute suite borné possède une sous suite faiblement convergente.([11])

Proposition 1.3.1.

Si $u_n \to u$ fortement ($\|u_n - u\|_{V\times V'} \to 0$), alors u_n converge faiblement vers u ($u_n \rightharpoonup u$) car :

$$\forall v \in V' \,;\, |\langle u_n, v\rangle_{V\times V'} - \langle u, v\rangle_{V\times V'}| = |\langle u_n - u, v\rangle_{V\times V'}| \leq \|u_n - u\|_V \|v\|_{V'} \to 0.$$

Remarque 1.3.1.

La réciproque est fausse en général. Par exemple, il est bien connu que dans $H := L^2([0, 2\pi])$, la fonction $x_n := \sin(nt)$ vérifie que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} \sin(nt)y(t)dt = 0, \quad \forall y \in H.$$

En effet, on vérifie d'abord que c'est vrai pour les fonctions y de classe C^1 (faire une intégration par parties), puis par densité , pour toutes les fonctions $y \in H$. Cela signifie que (x_n) converge faiblement vers la fonction nulle dans H. Mais (x_n) ne tend pas fortement vers la fonction nulle puisque :

$$\|x_n\|^2_{L^2([0,2\pi])} = \int_0^{2\pi} \sin^2(nt)dt = \frac{1}{n}\int_0^{2n\pi} \sin^2(s)ds = \int_0^{2\pi} \sin^2(s)ds,$$

où le dernier terme est une constante strictement positive indépendante de n.

1.4 Quelques inégalités utilisées

Théorème 1.4.1. ***(Inégalité de Hölder)***

Soit $p \in [1, \infty[$, on désigne par q l'exposant conjugué de p telles que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Si $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, alors $uv \in L^1(\Omega)$ et :

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Théorème 1.4.2. ***(Inégalité de Poincaré)***

Soit Ω un ouvert borné , $p \in [1, \infty[$. Alors, il existe une constante $C = C(\Omega, p)$ telle que :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Théorème 1.4.3. ***(Inégalité de ϵ-Young)***

Soit p, q deux réels vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \quad , \forall \epsilon > 0 \quad , ab \leq \frac{\epsilon^p}{p} a^p + \frac{1}{q\epsilon^q} b^q.$$

1.5 Théorèmes et lemmes utilisées

Lemme 1.5.1. ***(Gronwall)***

— **Cas continu :** soient α, β et γ prennent leurs valeurs dans l'intervalle $I = [1, \infty[$ en tant que fonction réelle, en supposant que β et γ sont deux fonctions continues. Si β est non-négative, α est non-décroissante et si γ satisfait l'inégalité intégrale suivante :

$$\gamma(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\gamma(s)ds, \quad \forall t \in I,$$

alors

$$\gamma(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_a^t \beta(s)ds\right).$$

— **Cas discret :** si $\gamma_n \geq 0$, $\alpha_n \geq \alpha_{n-1}$, $\beta_j \geq 0$ et

$$\gamma_n \leq \alpha_n + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \gamma_j, \quad n \geq 0,$$

alors

$$\gamma_n \leq \alpha_n \exp\left(\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j\right).$$

Théorème 1.5.1. ***(Formules de Green)***

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ régulière, alors : $\forall u, v \in H^1(\Omega)$ deux fonctions régulières, on a :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv.\gamma_i ds.$$

Où γ_i la iéme composante du vecteur unitaire normale extèrieure. En remarquant que $\Delta u = div(\nabla u)$ alors on a

$$\int_\Omega \Delta u.v dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} (\nabla u.\eta) v ds.$$

Lemme 1.5.2.

(Voir [15])Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$, avec $x \neq y$

1. Pour $p \geq 2$ il existe $C_1(p)$ tel que :

$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y)_{\mathbb{R}^n} \geq C_1(p)|x - y|^p.$$

2. Pour $1 < p \leq 2$ il existe $C_2(p)$ tel que :

$$\left||x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y\right| \leq C_2(p)|x - y|^{p-1}.$$

1.6 Notions des opérateurs

Définition 1.6.1.

Soit V un espace de Banach (réel),soit l'opérateur $T : V \to V$

$$T \; coercive \Leftrightarrow \lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|} = \infty.$$

$\langle Tu, u\rangle$: Crochet de dualité.

Définition 1.6.2.

Soit V un espace de Banach (réel), soit l'opérateur : $T : V \to V$

$$T \text{ monotone} \Leftrightarrow \langle Tu - Tv, u - v\rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in V.$$

Définition 1.6.3.

Soit V un espace de Banach (réel), soit l'opérateur : $T : V \to V$

$$T \text{ strictement monotone} \Leftrightarrow \langle Tu - Tv, u - v\rangle > 0 \quad \forall u, v \in V, u \neq v.$$

Définition 1.6.4.

Soit V un espace de Banach (réel). Un opérateur : $T : V \to V$ est dit hémicontinue si pour tout $u, v, w \in V$, la fonction

$$t \longrightarrow \langle T(u + tv), w\rangle,$$

est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1.7 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin consiste à approcher l'espace fonctionnel V pour une famille des sous espaces $V_h \subset V$ de dimension finie, la formulation faible est résolue dans V_h pour solution u_h :

$$\begin{cases} Trouver\ u_h \in V_h & \text{tel que} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h) & \forall v_h \in V_h. \end{cases}$$

La solution approchée u_h est une bonne estimation de la solution exacte u, c'est-à-dire que :

$$\lim_{h \to 0} \|u_h - u\| = 0.$$

1.8 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est l'un des outils numériques qui dépendent de la formulation variationnelle (et donc des solutions faibles), ce qui signifie que cette méthode propose de créer un algorithme discret basé sur des formules faibles, car elle permet de rechercher une solution approximative à un problème aux dérivées partielles sur un domaine compact avec des conditions aux limites ou à l'intérieur du domaine compact.

La méthode des éléments finis remplace l'espace des fonctions d'essai de dimension infinie pour la formulation variationnelle par un espace de fonctions d'essai approximatifs de dimension finie. Ensuite, il s'agit de parler de l'existence et de l'unicité de la solution, de la stabilité et de la convergence des méthodes numériques, ainsi que de l'estimation de l'erreur entre la solution exacte et la solution approximative.(Voir [18]).

1.8.1 Principe de la méthode des éléments finis

L'approche générale de la méthode des éléments finis est la suivante. Soit un domaine ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, avec une frontière $\partial\Omega$. La formulation variationnelle de l'équation aux dérivées partielles (EDP) est généralement prise comme suit :

$$(PV) \begin{cases} Trouver\ u \in V & \text{tel que} \\ a(u, v) = l(v) & \forall v \in V. \end{cases}$$

Pour trouver la solution approximative de u, nous utilisons une approximation interne, comme indiqué ci-dessous :

Soit Υ_h une partition de Ω constituée d'un nombre fini d'éléments $\mathcal{T}$, telle que

$$\overline{\Omega} = \cup_{\mathcal{T}\in\Upsilon_h}\overline{\mathcal{T}}$$

$$\mathcal{T} \cap \mathcal{L} = \emptyset \quad \text{si} \quad \mathcal{T} \neq \mathcal{L}.$$

On note $h_{\mathcal{T}} := diam\mathcal{T}$ le diamètre de $\mathcal{T}$ et $h := \max_{\mathcal{T}\in\Upsilon_h} h_{\mathcal{T}}$ le pas de la maille.

Grâce à cela, nous allons créer un espace d'approximation $V_h \subset V$ de dimension finie. Ainsi, V_h sera l'ensemble des fonctions continues sur Ω et affines sur chaque maille.

L'espace d'approximation V_h s'écrit comme suit :

$$V_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) \quad \text{tel que}\, v\backslash\mathcal{T} \in \mathbb{P}_n, \text{pour tout}\, \mathcal{T} \in \Upsilon_h\}.$$

Avec $\mathcal{T}$ est un triangle.

1.9 Méthode des éléments finis mixtes

Parmi les méthodes numériques proposées pour résoudre les équations aux dérivées partielles est la méthode des éléments finis mixtes, et elle est considérée comme l'une des méthodes préférées par rapport aux méthodes traditionnelles car l'un de ses avantages est la préservation des quantités physiques telles que la quantité de masse, la température et la quantité de mouvement...

Cette méthode permet de résoudre des problèmes mixtes dont les inconnues sont deux fonctions représentant d'une part l'état du système considéré, et d'autre part un multiplicateur de Lagrange associé à une contrainte que l'état doit satisfaire.

1.9.1 Principe de la méthode des éléments finis mixtes :

Soit V , W deux espaces de Hilbert, le problème variationnel mixte s'écrit comme suit : Trouver $(u, w) \in V \times W$ tel que :

$$\begin{cases} a(u, v) + c(w, v) = l(v), & \forall v \in V, \\ c(u, \eta) = 0, & \forall \eta \in W. \end{cases}$$

Ici $a(.,.)$, $c(.,.)$ deux formes bilinéaires sur $V \times V$, $V \times W$ respectivement, et $l(.)$ forme linéaire sur V .

Chapitre 2

PROBLÈME SEMI DISCRÉTISÉ , EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION FAIBLE

Dans ce chapitre, on s'intéresse à d'étude le problème p-bilaplace intégro-différentiel parabolique et la preuve de l'existence et l'unicité de la solution faible.

2.1 Position du problème

Nous considérons un domaine overt borné Ω de $\mathbb{R}^n$, avec une frontière Lipschitz-continue $\partial\Omega$, et I=[o,T] , T>0. Notre objectif dans ce mémoire est d'étudier le problème p-biLaplace intégro-différentiel parabolique suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \Delta_p^2 u(t,x) = f(t,x) + \int_0^t a(t-s)\Delta_p^2 u(s,x)ds & \text{dans} \quad I\times\Omega, \\ u=0, \nabla u = 0 & \text{sur} \quad \Sigma = I\times\partial\Omega \\ u(0,x)=u_0 & \text{sur} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Où

$$\triangle_p^2 u := \Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u). \tag{2.1.2}$$

$f \in C(I, L^q(\Omega))$ satisfait : $\|f(t) - f(t')\|_{L^q(\Omega)} \leq l|t - t'|$, $\forall t, t' \in I$, pour certains constante strictement positive l . L'exposant $p > 1$, son conjugué q satisfait $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Les valeurs initiales u_0 et a sont des fonctions données dans $W_0^{2,p}(\Omega)$ et $C[0, T]$, respectivement.

2.2 Définition (solution faible)

Par solution faible du problème (2.1.1), nous entendons une fonction u satisfaisant :

1.
$$u \in C\left(I, W_0^{-2,q}(\Omega)\right) \cap L^p\left(I, W_0^{2,p}(\Omega)\right) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^q\left(I, W^{-2,q}(\Omega)\right).$$

2.
$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v dx dt + \int_0^T \int_\Omega \Delta_p^2 u v dx dt = \int_0^T \int_\Omega f v dx dt$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega \left(\int_0^t a(t-s) \Delta_p^2 u(s,x) ds \right) v dx dt \quad , \forall v \in L^p\left(I, W_0^{2,p}(\Omega)\right).$$

2.3 Estimation a priori et résultats d'existence

On divise l'intervalle I=[o,T] en n sous-intervalles où $\tau = \frac{T}{n}$, $t_i = i\tau$, $u^i(x) = u(t_i, x)$ et $\delta u^i(x) = \frac{u^i(x) - u^{i-1}(x)}{\tau} \simeq \frac{\partial u}{\partial t}$ pour $i = 1, ..., n$. Multiplier l'équation (2.1.1) par $v \in W_0^{2,p}(\Omega)$ et en intégrant sur Ω on obtient :

$$\int_\Omega \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} v dx + \int_\Omega |\Delta u^i|^{p-2} \Delta u^i \Delta v dx = \int_\Omega f v dx$$
$$+ \int_\Omega \left(\int_0^t a(t-s) |\Delta u|^{p-2} \Delta u(s,x) ds \right) \Delta v dx. \tag{2.3.1}$$

Alors le schéma d'approximation récurrent pour $i = 1, ..., n$ est :

$$\int_\Omega \delta u^i v dx + \int_\Omega |\Delta u|^{p-2} \Delta u^i \Delta v dx = \int_\Omega f^i v dx$$

$$+\tau \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} \int_\Omega |\, \Delta u^j|^{p-2}\, \Delta u^j \Delta v dx. \tag{2.3.2}$$

Où $f^i(x) = f(t_i, x)$ et $a_{ij} = a(t_i - t_j)$. Notons que l'existence de la solution u^i à chaque pas de temps t_i est assuré grâce à la monotonie et la coercivité de l'opérateur :
$u^i + \tau \Delta_p^2 u^i - \tau^2 \Delta_p^2 u^{i-1}$.

Théorème 2.1.

Soit $p > 2$, alors le problème (2.1.1) admet une solution faible u au sens de (2.2). Avant de prouver le théorème (2.1), nous avons besoin de quelques lemmes auxiliaires.

Lemme 2.1.

Il existe une constante positive C indépendante de n telle que :

$$\|u^k\|_{L^2(\Omega)} \;\leq\; C, \quad k = 1, ..., n$$

$$\sum_{i=1}^{k} \tau \|\Delta u^i\|^p_{L^p(\Omega)} \;\leq\; C, \quad k = 1, ..., n.$$

Preuve :

On a : $\delta u^i(x) = \frac{u^i(x) - u^{i-1}(x)}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau \delta u^i(x) = u^i(x) - u^{i-1}(x)$ on le remplacer dans (2.3.2) on obtient :

$$\int_\Omega (u^i - u^{i-1}) v dx + \tau \int_\Omega |\Delta u|^{p-2} \Delta u^i \Delta v dx = \tau \int_\Omega f^i v dx + \tau^2 \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} \int_\Omega |\, \Delta u^j|^{p-2}\, \Delta u^j \Delta v dx.$$

Testons avec u^i dans (2.3.2) et faisons la somme sur $i = 1, ..., k$, on obtient

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\int_{\Omega}(u^i-u^{i-1})u^i dx}_{I_1} + \tau\sum_{i=1}^{k}\int_{\Omega}|\Delta u^i|^p dx = \underbrace{\tau\sum_{i=1}^{k}\int_{\Omega}f^i u^i dx}_{I_2}$$
$$+\underbrace{\tau^2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{i-1}a_{ij}\int_{\Omega}|\,\Delta u^j|^{p-2}\,\Delta u^j\,\Delta u^i dx}_{I_3}. \tag{2.3.3}$$

On estime chaque terme de (2.3.3) séparément, on obtient :

$$I_1 = \sum_{i=1}^{k}\int_{\Omega}(u^i-u^{i-1})u^i dx = \sum_{i=1}^{k}\int_{\Omega}((u^i)^2 - u^i u^{i-1})dx. \tag{2.3.4}$$

D'autre part, on a

$$(u^i-u^{i-1})^2 = (u^i)^2 + (u^{i-1})^2 - 2u^i u^{i-1}$$

$$-u^i u^{i-1} = \frac{1}{2}\left[(u^i-u^{i-1})^2 - (u^i)^2 - (u^{i-1})^2\right].$$

Alors

$$\begin{aligned}((u^i)^2 - u^i u^{i-1}) &= (u^i)^2 + \frac{1}{2}\left[(u^i-u^{i-1})^2 - (u^i)^2 - (u^{i-1})^2\right]\\ &= \frac{1}{2}(u^i)^2 - \frac{1}{2}(u^{i-1})^2 + \frac{1}{2}(u^i-u^{i-1})^2. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

On remplace (2.3.5) dans (2.3.4) , on obtient :

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega \left(\frac{1}{2}(u^i)^2 - \frac{1}{2}(u^{i-1})^2 + \frac{1}{2}(u^i - u^{i-1})^2 \right) \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}(u^i)^2 - \frac{1}{2}(u^{i-1})^2 + \frac{1}{2}(u^i - u^{i-1})^2 \right) \\
&= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}(u^1)^2 - \frac{1}{2}(u^0)^2 + ... + \frac{1}{2}(u^k)^2 - \frac{1}{2}(u^{k-1})^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i=1}^{k} (u^i - u^{i-1})^2 dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_\Omega (u^0)^2 dx + \frac{1}{2} \int_\Omega (u^k)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega (u^i - u^{i-1})^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \|u^k\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2} \|u^0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \|u^i - u^{i-1}\|^2_{L^2(\Omega)}. \qquad (2.3.6)
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de ϵ-Young, on obtient :

$$
\begin{aligned}
|I_2| &= |\tau \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega f^i u^i dx| = \tau |\sum_{i=1}^{k} \int_\Omega f^i u^i dx| \\
&\leq \tau \sum_{i=1}^{k} \left(\int_\Omega |f^i|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |u^i|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \tau \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{C}{\epsilon} \int_\Omega |f^i|^q dx + C\epsilon \int_\Omega |u^i|^p dx \right] \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \tau \frac{C}{\epsilon} \int_\Omega |f^i|^q dx + \sum_{i=1}^{k} \tau C\epsilon \int_\Omega |u^i|^p dx. \qquad (2.3.7)
\end{aligned}
$$

Sachant que $W_0^{2,p}(\Omega)$ s'injecte continument dans $L^p(\Omega)$ on arrive à :

$$|I_2| = \tau \left| \sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega} f^i u^i dx \right|$$

$$\leq C \sum_{i=1}^{k} \tau \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} |f^i|^q dx + C\epsilon \sum_{i=1}^{k} \tau \int_{\Omega} |\Delta u^i|^p dx$$

$$\leq C \sum_{i=1}^{k} \tau + C\epsilon \sum_{i=1}^{k} \tau \int_{\Omega} |\Delta u^i|^p dx$$

$$\leq C + C\epsilon\tau \sum_{i=1}^{k} \|\Delta u^i\|^p_{L^p(\Omega)}. \tag{2.3.8}$$

Pour le terme mémoire on procède comme suit :

$$|I_3| = |\tau^2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} \int_{\Omega} |\, \Delta u^j|^{p-2} \, \Delta u^j \Delta u^i dx|$$

$$\leq \tau^2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{i-1} C \int_{\Omega} |\, \Delta u^j|^{p-2} \, |\Delta u^j||\Delta u^i| dx$$

$$\leq \tau^2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{i-1} C \int_{\Omega} |\, \Delta u^j|^{p-1} \, |\Delta u^i| dx$$

$$\leq \tau^2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{i-1} C \left(\int_{\Omega} |\, \Delta u^j|^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega} |\, \Delta u^i|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \tau^2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{i-1} C \left(\int_{\Omega} |\, \Delta u^j|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega} |\, \Delta u^i|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Car :$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow p + q = pq, \; Donc : pq - q = p, \; Parsuite : (p-1)q = p \right).$

$$
\begin{aligned}
|I_3| &\leq \tau^2 \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{i-1} C\left[\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |\,\Delta u^j|^p dx + \epsilon \int_\Omega |\,\Delta u^i|^p dx\right] \\
&\leq \tau^2 \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{i-1} \frac{C}{\epsilon}\int_\Omega |\,\Delta u^j|^p dx + \tau^2 \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{i-1} C\epsilon \int_\Omega |\,\Delta u^i|^p dx \\
&\leq \tau^2 \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{i-1} \frac{C}{\epsilon}\int_\Omega |\,\Delta u^j|^p dx + \sum_{i=1}^{k} \tau^2 i\epsilon C \int_\Omega |\,\Delta u^i|^p dx \\
&\leq C \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{i-1} \tau^2 \|\Delta u^j\|^p_{L^p(\Omega)} + C\epsilon\tau \sum_{i=1}^{k} \|\Delta u^i\|^p_{L^p(\Omega)}. \qquad (2.3.9)
\end{aligned}
$$

En remplaçant (2.3.6) , (2.3.8) et (2.3.9) dans (2.3.3), on obtient :

$$
\begin{aligned}
\|u^k\|^2_{L^2(\Omega)} + (1 - C\epsilon)\tau \sum_{i=1}^{k} \|\Delta u^i\|^p_{L^p(\Omega)} &\leq \|u^0\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ C \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{i-1} \tau^2 \|\Delta u^j\|^p_{L^p} + C. \qquad (2.3.10)
\end{aligned}
$$

Maintenant, en choisissant ϵ tel que $(1 - C\epsilon) > 0$ et en utilisant le lemme de Gronwall, on arrive au résultat souhaité.

Lemme 2.2.

L'estimation suivante est vraie :

$$
\|\partial_t u^n\|^2_{W^{-2,q}(\Omega)} \leq C. \qquad (2.3.11)
$$

Preuve :

Notons que les notations ci-dessus nous permettent de réécrire (2.3.2), en utilisant la suite de Roth comme suit :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_t u^n(t) v dx + \int_\Omega \Delta_p^2 \overline{u^n}(t) v dx &= \int_\Omega f^n(t) v dx + \tau \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} \int_\Omega \Delta_p^2 u^j v dx, \\ &\quad , \forall v \in W_0^{2,p}(\Omega). \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Où : $f^n(t) = f^i$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq n$.

Maintenant, en tenant compte du fait que pour $p > 2$, $\Delta_p^2 : W_0^{2,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-2,q}(\Omega)$ est borné (Voir[7]) ; l'inégalité de Hölder nous donne :

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \partial_t u^n(t) v dx\right| &\leq \left|\int_\Omega f^n v dx\right| + \tau \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} \int_\Omega |\Delta u^j|^{p-1} |\Delta v| dx + \left|\int_\Omega \Delta_p^2 \overline{u^n}(t) v dx\right| \\ &\leq \left(\int_\Omega |f^n|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &+ \tau C \sum_{j=0}^{i-1} \left(\int_\Omega |\Delta u^j|^{(p-1)q} dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |\Delta v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &+ \left(\int_\Omega |\Delta_p^2 \overline{u^n}(t)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|f^n\|_{L^q(\Omega)} \|v\|_{L^p(\Omega)} + \tau C \sum_{j=0}^{i-1} \|\Delta u^j\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}} \|\Delta v\|_{L^p(\Omega)} + C\|v\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq C\|f\|_{C(I, L^q(\Omega))} \|\Delta v\|_{L^p(\Omega)} + \tau C \sum_{j=0}^{i-1} \|\Delta u^j\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}} \|\Delta v\|_{L^p(\Omega)} \\ &+ C\|\Delta v\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

L'inégalité de ϵ-Young implique :

$$\left|\int_\Omega \partial_t u^n(t) v dx\right| \leq C\|\Delta v\|_{L^p(\Omega)} + \left(\sum_{j=0}^{i-1} \frac{C}{\epsilon}\tau\|\Delta u^j\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=0}^{i-1} C\epsilon\tau|\Omega|\right)\|\Delta v\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.3.14}$$

En choisissant maintenant $\epsilon = 1$ et en utilisant le lemme (1.5.2), on obtient :

$$\left|\int_\Omega \partial_t u^n(t) v dx\right| \leq C\|\Delta v\|_{L^p(\Omega)} \quad , \forall v \in W_0^{2,p}(\Omega). \tag{2.3.15}$$

Ainsi,

$$\|\partial_t u^n(t)\|_{W^{-2,q}(\Omega)} = \sup_{v \in W_0^{2,p}(\Omega)} \frac{|\int_\Omega \partial_t u^n(t) v dx|}{\|\Delta v\|_{L^p(\Omega)}} \leq C. \tag{2.3.16}$$

Ceci termine la preuve.

Preuve du théorème 2.1

D'aprés les lemmes (2.1) et (2.2), on peut déduire :

$$\|\partial_t u^n\|_{L^q(I,W^{-2,q}(\Omega))} \leq C, \tag{2.3.17}$$

$$\|\overline{u^n}\|^p_{L^p\left(I,W_0^{2,p}(\Omega)\right)} = \int_0^T \|\Delta\overline{u^n}(t)\|^p_{L^p(\Omega)} dt \leq C, \tag{2.3.18}$$

et

$$\|\overline{u^n}\|_{C(I,L^2(\Omega)} \leq C. \tag{2.3.19}$$

Alors, le lemme 1.3.13 dans [13] implique qu'il existe $u \in C\left(I, W^{-2,q}(\Omega)\right) \bigcap L^p\left(I, W_0^{2,p}(\Omega)\right)$

avec $\partial_t u \in L^q\left(I, W^{-2,q}(\Omega)\right)$ et une sous-suite de u^n à nouveau notée u^n satisfaisant :

$$\begin{aligned}
u^n &\longrightarrow u \quad , \text{dans} \quad C\left(I, W^{-2,q}(\Omega)\right)\\
u^n(t) &\rightharpoonup u(t) \quad , \text{dans} \quad W_0^{2,p}(\Omega)\\
\overline{u^n} &\rightharpoonup u \quad , \text{dans} \quad L^p\left(I, W_0^{2,p}(\Omega)\right)\\
\partial_t u^n &\rightharpoonup \partial_t u \quad , \text{dans} \quad L^q\left(I, W^{-2,q}(\Omega)\right)\\
f^n &\rightharpoonup f \quad , \text{dans} \quad L^q\left(I, L^q(\Omega)\right)
\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

quand $n \longrightarrow \infty$.

D'autre part, on sait que $\Delta_p^2 : W_0^{2,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-2,q}(\Omega)$ est un opérateur hémicontinu (voir [7]). En utilisant ce fait, on obtient :

$$\int_\Omega \Delta_p^2 \overline{u^n}(t) v dx \longrightarrow \int_\Omega \Delta_p^2 u(t) v dx \;=\; \int_\Omega |\Delta u(t)|^{p-2} \Delta u(t) \Delta v dx, \qquad \forall v \in W_0^{2,p}(\Omega). \tag{2.3.21}$$

Pour $n \longrightarrow \infty$.

On procède de la même manière que dans [2] on peut facilement vérifier que :

$$\tau \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} \int_\Omega \Delta_p^2 u^j v dx \;\rightharpoonup\; \int_0^t a(t-s) \Delta_p^2 u(s,x) ds, \text{dans } L^q\left(I, W^{-2,q}(\Omega)\right) \qquad Pour\, \tau \longrightarrow 0. \tag{2.3.22}$$

Grâce aux hypothèses sur f ; la propriété $(2.3.20)_5$ est une conséquence de l'estimation :

$$\|f^n(t) - f(t)\|_{L^q(\Omega)} \;\leq\; \frac{C}{n}. \tag{2.3.23}$$

Maintenant, en intégrant l'équation (2.3.12) de 0 à T on obtient :

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t u^n(t) v dx + \int_0^T \int_\Omega \Delta_p^2 \overline{u^n}(t) v dx = \int_0^T \int_\Omega f^n v dx$$

$$+\tau \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} \int_0^T \int_\Omega \Delta_p^2 u^j v dx \quad , \forall v \in W_0^{2,p}(\Omega). \tag{2.3.24}$$

En prenant la limite quand $n \longrightarrow \infty$ dans (2.3.24), on obtient :

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v dx dt + \int_0^T \int_\Omega \Delta_p^2 u v dx dt = \int_0^T \int_\Omega f v dx dt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \left(\int_0^t a(t-s) \Delta_p^2 u(s,x) ds \right) v dx dt \quad , \forall v \in W_0^{2,p}(\Omega). \tag{2.3.25}$$

Concluant donc la preuve.

2.4 Unicité de la solution faible

Théorème 2.2.

Soit $1 < p \leq 2$. Alors le problème (2.1.1) a au plus une solution.

Preuve :

Supposons que le problème (2.1.1) admet deux solutions u_1 et u_2. En soustrayant l'équation (2.3.1) pour u_2 de l'équation (2.3.1) pour u_1, on obtient :

$$\int_\Omega \partial_t (u_1 - u_2) v dx + \int_\Omega \left(|\Delta u_1|^{p-2} \Delta u_1 - |\Delta u_2|^{p-2} \Delta u_2 \right) \Delta v dx$$

$$= \int_\Omega \left(\int_0^t a(t-s) \left(|\Delta u_1|^{p-2} \Delta u_1 - |\Delta u_2|^{p-2} \Delta u_2 \right) ds \right) \Delta v dx. \tag{2.4.1}$$

En choisissant $v = u_1 - u_2$ dans (2.4.1) et en utilisant le lemme (1.5.2) on obtient :

$$\int_\Omega \partial_t(u_1-u_2)(u_1-u_2)dx + \int_\Omega \left(|\Delta u_1|^{p-2}\Delta u_1 - |\Delta u_2|^{p-2}\Delta u_2\right)\Delta(u_1-u_2)dx$$

$$= \int_\Omega \left(\int_0^t a(t-s)\left(|\Delta u_1|^{p-2}\Delta u_1 - |\Delta u_2|^{p-2}\Delta u_2\right)ds\right)\Delta(u_1-u_2)dx.$$

Ce qui implique que :

$$\int_\Omega \partial_t(u_1-u_2)^2dx + C_1\|\Delta(u_1-u_2)\|_{L^p}^p$$

$$\leq \int_\Omega \left(\int_0^t a(t-s)\left(|\Delta u_1|^{p-2}\Delta u_1 - |\Delta u_2|^{p-2}\Delta u_2\right)ds\right)\Delta(u_1-u_2)dx.$$

Ainsi

$$\frac{d}{dt}\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1\|\Delta(u_1-u_2)\|_{L^p}^p$$

$$\leq \int_\Omega \left(\int_0^t a(t-s)\left(|\Delta u_1|^{p-2}\Delta u_1 - |\Delta u_2|^{p-2}\Delta u_2\right)ds\right)\Delta(u_1-u_2)dx. \quad (2.4.2)$$

En intégrant (2.4.2) sur $[0,\xi]$ pour $\xi \in [0,T]$ et en tenant compte du fait que $u_1(0) = u_2(0)$, on a

$$\int_0^\xi \frac{d}{dt}\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + C_1\int_0^\xi \|\Delta(u_1-u_2)\|_{L^p(\Omega)}^p$$

$$\leq \int_0^\xi \int_\Omega \left(\int_0^t a(t-s)\left(|\Delta u_1|^{p-2}\Delta u_1 - |\Delta u_2|^{p-2}\Delta u_2\right)ds\right)\Delta(u_1-u_2)dx.$$

Ce qui donne

$$\left[\|u_1(t)-u_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right]_0^{\xi}+C_1\int_0^{\xi}\|\Delta(u_1-u_2)\|^p_{L^p(\Omega)}dt$$

$$\leq \int_0^{\xi}\int_\Omega\left(\int_0^t a(t-s)\left(|\Delta u_1|^{p-2}\Delta u_1-|\Delta u_2|^{p-2}\Delta u_2\right)ds\right)\Delta(u_1-u_2)dx.$$

Plus précisément

$$\|u_1(\xi)-u_2(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}-\overbrace{\|u_1(0)-u_2(0)\|^2_{L^2(\Omega)}}^{=0}+C_1\int_0^{\xi}\|\Delta(u_1-u_2)\|^p_{L^p(\Omega)}dt$$

$$\leq \int_0^{\xi}\int_\Omega\left(\int_0^t a(t-s)\left(|\Delta u_1|^{p-2}\Delta u_1-|\Delta u_2|^{p-2}\Delta u_2\right)ds\right)\Delta(u_1-u_2)dx.$$

Par conséquent

$$\|u_1(\xi)-u_2(\xi)\|^2_{L^2(\Omega)}+C_1\int_0^{\xi}\|\Delta(u_1-u_2)\|^p_{L^p(\Omega)}dt$$

$$\leq \int_0^{\xi}\int_\Omega\left(\int_0^t a(t-s)\left(|\Delta u_1|^{p-2}\Delta u_1-|\Delta u_2|^{p-2}\Delta u_2\right)ds\right)\Delta(u_1-u_2)dxdt.\quad(2.4.3)$$

En appliquant l'inégalité ϵ-Young au côté droit de (2.4.3), on obtient :

$$C_1\int_0^{\xi}\|\Delta(u_1-u_2)\|^p_{L^p(\Omega)}dt$$

$$\leq \int_0^{\xi}(\frac{C}{\epsilon}\int_\Omega\left(\int_0^t a(t-s)\left(|\Delta u_1|^{p-2}\Delta u_1-|\Delta u_2|^{p-2}\Delta u_2\right)ds\right)^q dxdt$$

$$+C\epsilon\int_\Omega(\Delta(u_1-u_2))^p dx)dt$$

$$\leq \frac{C}{\epsilon}\int_0^{\xi}\int_\Omega\left(\int_0^t a(t-s)\left(|\Delta u_1|^{p-2}\Delta u_1-|\Delta u_2|^{p-2}\Delta u_2\right)ds\right)^q dxdt$$

$$+C\epsilon\int_0^{\xi}\|\Delta(u_1-u_2)\|^p_{L^p(\Omega)}dt.\quad(2.4.4)$$

Maintenant, en vertu du lemme (1.5.2) et de l'inégalité de Hölder, le premier terme du côté droit de (2.4.4) satisfait :

$$\int_0^t a(t-s)\left(|\Delta u_1|^{p-2}\Delta u_1 - |\Delta u_2|^{p-2}\Delta u_2\right) ds$$

$$\leq \int_0^t \max_{s\in[0,T]} |a(t-s)| \left(||\Delta u_1|^{p-2}\Delta u_1 - |\Delta u_2|^{p-2}\Delta u_2|\right) ds$$

$$\leq \|a\|_{C([0,T])} \left(\int_0^t ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^t ||\Delta u_1|^{p-2}\Delta u_1 - |\Delta u_2|^{p-2}\Delta u_2|^q ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \underbrace{\|a\|_{C([0,T])} T^{\frac{1}{p}} C_2}_{C} \left(\int_0^t |\Delta(u_1-u_2)|^{(p-1)q} ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C\left(\int_0^t |\Delta(u_1-u_2)|^p ds\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.4.5}$$

En substituant (2.4.5) dans (2.4.4) et en choisissant ϵ tel que $C_1 - C\epsilon > 0$ on arrive à :

$$(C_1 - C\epsilon)\int_0^\xi \|\Delta(u_1-u_2)\|^p_{L^p(\Omega)} dt \quad \leq \quad \frac{C}{\epsilon} C \int_0^\xi \int_\Omega \int_0^t |\Delta(u_1-u_2)|^p dsdxdt$$

$$(C_1 - C\epsilon)\int_0^\xi \int_\Omega |\Delta(u_1-u_2)|^p dxdt \quad \leq \quad C\int_0^\xi \int_\Omega \int_0^t |\Delta(u_1-u_2)|^p dsdxdt. \tag{2.4.6}$$

Le lemme de Gronwall montre que :

$$\|u_1-u_2\|^p_{L^p\left([0,\xi],W_0^{2,p}(\Omega)\right)} = \int_0^\xi \int_\Omega |\Delta(u_1-u_2)|^p dxdt = 0 \quad ,\forall \xi \in [0,T]. \tag{2.4.7}$$

Par conséquent,

$$\|u_1-u_2\|^p_{L^p\left([0,T],W_0^{2,p}(\Omega)\right)} = 0$$

$$u_1 = u_2 \quad dans \quad L^p\left([0,T], W_0^{2,p}(\Omega)\right). \tag{2.4.8}$$

2.5 Remarque

Multiplions l'équation (2.1.1) par $a(t-s)$ et en intégrant sur $[0,t]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^t a(t-s)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}ds &+ \int_0^t a(t-s)\Delta_p^2 u(t,x)ds = \int_0^t a(t-s)f(t,x)ds \\
&+ \int_0^t a(t-s)\int_0^s a(s-\mu)\Delta_p^2 u(\mu,x)d\mu ds \\
\int_0^t a(t-s)\Delta_p^2 u(t,x)ds &= \int_0^t a(t-s)f(t,x)ds + \int_0^t a(t-s)\int_0^s a(s-\mu)\Delta_p^2 u(\mu,x)d\mu ds \\
&- \left[[a(t-s)u(t,x)]_0^t - \int_0^t a'(t-s)u(t,x)ds\right] \\
&= \int_0^t a(t-s)f(t,x)ds + \int_0^t a(t-s)\int_0^s a(s-\mu)\Delta_p^2 u(\mu,x)d\mu ds \\
&- a(0)u(t,x) + a(t)u_0(x) + \int_0^t a'(t-s)u(t,x)ds. \qquad (2.5.1)
\end{aligned}$$

Maintenant, soit $M(t,x) = \int_0^t a(t-s)\Delta_p^2 u(t,x)ds$. Il est clair que :

$$M(t,x) = \int_0^t a(t-s)M(s,x)ds + F(t,x,u). \qquad (2.5.2)$$

Où

$$F(t,x,u) = \int_0^t a(t-s)f(t,x)ds - a(0)u(t,x) + a(t)u_0(x) + \int_0^t a'(t-s)u(t,x)ds. \qquad (2.5.3)$$

Donc, le problème (2.1.1) prend la forme du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \Delta_p^2 u(t,x) = f(t,x) + M(t,x) & \text{dans} \quad I \times \Omega \\ M(t,x) = \int_0^t a(t-s)M(s,x)ds + F(t,x,u) & \text{dans} \quad I \times \Omega \\ u = 0, \nabla u = 0 & \text{sur} \quad \Sigma = I \times \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0 & \text{sur} \quad \Omega \\ M(0,x) = 0 & \text{sur} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.5.4}$$

Ce qui pourrait être étudié à une autre occasion.

Chapitre 3

FORMULATION MIXTE ET PROBLÈME COMPLÈTEMENT DISCRÉTISÉ

Dans ce chapitre, on donne une formulation mixte et on discute le problème complètement discrétisé en utilisant les éléments finis mixtes.

3.1 Formulation mixte

Dans ce mémoire, on propose une analyse de la formule mixte, en tenant compte de l'observation suivante :
que si : $\phi(w) = |w|^{p-2}w$, l'inverse est spécifié comme :

$$\phi^{-1}(w) = sgn(w)|w|^{\frac{1}{p-1}}w = |w|^{q-2}w,$$

en fonction de cela, on choisit la variable auxiliaire suivante :

$$\psi^i = |\Delta u^i|^{p-2}\Delta u^i. \tag{3.1.1}$$

En prenant : $X = W_0^{2,p}(\Omega)$ et $Y = L^q(\Omega)$, on peut écrire le problème (2.1.1) comme cela :

$$\begin{cases} -\Delta u^i = |\psi^i|^{q-2}\psi^i, \\ -\Delta \psi^i = -f^i + \delta u^i - \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\Delta\psi^i. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

La formulation mixte de (3.1.2) peut être écrit comme suit : on souhaite déterminer une paire $(u^i, \psi^i) \in X \times Y$ tel que :

$$\begin{cases} a(\psi^i, v) - b(u^i, v) = 0 \quad \forall v \in X, \\ b(\psi^i, \eta) = L_Y(\eta) \quad \forall \eta \in Y. \end{cases} \tag{3.1.3}$$

Où

$$a(\psi^i, v) := (|\psi^i|^{q-2}\psi^i, v), \tag{3.1.4}$$

$$b(\psi^i, \eta) := -(\Delta\psi^i, \eta), \tag{3.1.5}$$

$$L_Y(\eta) := ((-f^i + \delta u^i), \eta) + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} b(\psi^i, \eta), \tag{3.1.6}$$

où : $f^i = f(t_i, x)$.

Proposition (condition d'inf-sup) : Il existe $\gamma, C \geq 0$ tel que pour $u \in X$, on a :

$$\gamma \leq C \inf_{0 \neq \gamma \in Y} \sup_{0 \neq u^i \in X} \frac{b(u^i, \eta)}{\|u^i\|_X \|\eta\|_Y}. \tag{3.1.7}$$

Preuve : Voir [6]

3.2 Discrétisation complète

Soit Υ_T une partition triangulaire disjoints T ce qui signifie que $\overline{\Omega} = \cup_{T \in \Upsilon_T} \overline{T}$ et aussi pour chaque $T, K \in \Upsilon_T$, on a que l'intersection de deux éléments différents $T \cap K$ est soit : un sommet, un bord, une face, ou l'ensemble de K et T. Notant que cette triangulation est régulière selon le concept de Ciarlet, où la constante de régularité de forme de T est donnée comme suit :

$$\exists \mu > 0\,;\, \mu = \inf_{T\in\Upsilon_T} \frac{h_T}{\rho_T} \quad \forall T \in \Upsilon_T, \tag{3.2.1}$$

où h_T est le diamètre de T et ρ_T est le diamètre de la plus grande boule contenue à l'intérieur de T. Soit $\mathbb{P}^k(\Upsilon_h)$ définir l'espace des polynômes par morceaux de degré k sur la triangulation Υ_h :

$$\mathbb{P}^k(\Upsilon_h) = \left\{ \phi : \phi\backslash_T \in P^k(T)\,, \forall T \in \Upsilon_h \right\}. \tag{3.2.2}$$

Les espaces finis discrets sont définis comme suit :

$$V^h = \mathbb{P}^k(\Upsilon_h) \cap C^0(\overline{\Omega}), \tag{3.2.3}$$

et

$$V_0^h = \left\{ \phi \in V^h\,; \phi\backslash_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \tag{3.2.4}$$

où R est l'opérateur de projection de Ritz tel que :

$$\int_\Omega \nabla(Rv)\nabla\phi = \int_\Omega \nabla v \nabla \phi dx \quad , \forall \phi \in V^h \cap H_0^1(\Omega). \tag{3.2.5}$$

Où

$$h = \max_{T\in\Upsilon_T} h_T. \tag{3.2.6}$$

Alors, le schéma d'éléments finis mixtes entièrement discrets pour (3.1.3) est écrit comme suit : trouver une paire $(u_h^i, \psi_h^i) \in V_0^h \times V^h$

$$\begin{cases} a(\psi_h^i, v) - b_h(u_h^i, v) = 0 \\ b_h(\psi_h^i, \eta) = L(\eta) \quad , \forall (v,\eta) \in V^h \times V_0^h, \end{cases} \tag{3.2.7}$$

d'aprés la formule de Green on a :

$$b_h(u_h, v) = \sum_{T \in \Upsilon_h} \int_T \nabla u_h \nabla v dx = \int_\Omega \nabla u_h \nabla v dx, \tag{3.2.8}$$

en substituant (3.2.8) dans (3.2.7) le problème (3.2.7) peut s'écrire comme cela : trouver une paire $(u_h^i, \psi_h^i) \in V_0^h \times V^h$

$$\begin{cases} \int_\Omega |\psi_h i|^{q-2} \psi_h^i v dx - \int_\Omega \nabla u_h^i \nabla v dx = 0 \\ \int_\Omega \nabla \psi_h^i \nabla \eta dx = \int_\Omega (f^i - \delta u^i) \eta dx + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \int_\Omega \nabla \psi^j \nabla \eta dx \quad \forall (v, \eta) \in V^h \times V_0^h. \end{cases} \tag{3.2.9}$$

En procédant comme dans [6] et en utilisant les propriétés de a(.,.) (voir [20], prop. 3.1) et le lemme 01 dans [6], on peut arriver au résultat suivant.

3.2.1 Théorème

Pour $m \geq 2$, il existe $C \geq 0$ tel que :

$$\begin{aligned} \|u^i - u_h^i\|^{p-1}_{W_h^{2,p}(\Omega)} &+ \|w^i - w_h^i\|_{L^q(\Omega)} \leq C(h^{\frac{q}{2}(m+1)} |w^i|^{\frac{q}{2}}_{W^{m+1,q}(\Omega)} + h^{m+1} |w^i|_{W^{m+1,q}(\Omega)} \\ &+ h^{m-1} |u^i|_{W^{m+1,p}(\Omega)} + h^{m+1} |\delta u^i|_{W^{m+1,q}(\Omega)}). \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Bibliographie

[1] Adams,R.A.,Fournier,J.J.F. :Sobolev Spaces.AcademicPress,New York (2003).

[2] Bahuguna,D.,Raghavendra,V. :Rothe's method to parabolic integrodifferential equations via abstract integrodifferential equations. Appl. Anal. **33**, 153–167 (1989).

[3] Chaoui, A., Guezane-Lakoud, A. : Solution to an integrodifferential equation with integral condition. Appl. Math. Comput. **266**, 903–908 (2015) .

[4] Chaoui, A., Hallaci, A. : On the solution of a fractional diffusion integrodifferential equation with Rothe time discretization. Numer. Funct. Anal. Optim **39**(6), 643–654 (2018).

[5] Cömert, T., Piskin, E. : Global existence and exponential decay of solutions for higher-order parabolic equation with logarithmic nonlinearity. Miskolc Math. Notes **23**(2), 595–605 (2022).

[6] Djaghout, M., Chaoui, A., Zennir, K. : On discretization of the evolution p-biLaplace equation. Numer. Anal. Appl. **25**(4), 371–383 (2022).

[7] El Khalil, A., Kellati, S., Touzani, A. : On the spectrum of the p-biharmonic operator. In : 2002-Fez Conference on Partial Differential Equations. Electronic Journal of Differential Equations, Conference 09, p. 161170 (2002).

[8] Guezane-Lakoud, A., Jasmati, M.S., Chaoui, A. : Rothe's method for an integrodifferential equation with integral conditions. Nonl. Anal. **72**, 1522–1530 (2010).

[9] Gupta, N., Maqbul, Md. : Solutions to Rayleigh–Love equation with constant coefficients and delay forcing term. Appl. Math. Comput. **355**(3–4), 123–134 (2019).`https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.02.059`.

[10] Gupta, N., Maqbul, Md. : Approximate solutions to Euler–Bernoulli beam type equation. Mediterr. J. Math. (2021).`https://doi.org/10.1007/s00009-021-01833-2`.

[11] H.BRESIS. Analyse Fonctionnelle Masson Paris 1983.

[12] Hao, A., Zhou, J. : Blowup, extinction and non-extinction for a nonlocal p-biharmonic parabolic equation. Appl. Math. Lett. **64**, 198–204 (2017).

[13] Kacur, J. : Method of Rothe in evolution equations. In : Teubner Texte zur Mathematik, vol. 80. Teubner, Leipzig (1985).

[14] Lazer, A., McKenna, P. : Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges : some new connec- tions with nonlinear analysis. SIAM Rev. **32**(4), 537–578 (1990).

[15] Lindqvist, P. : Notes on the p-Laplace Equation. Report. University of Jyväskylä Department of Mathe- matics and Statistics, 102 (2006).

[16] Maqbul, Md., Raheem, A. : Time-discretization schema for a semilinear pseudoparabolic equation with integral conditions. Appl. Numer. Math. **148**, 18–27 (2020).`https://doi.org/10.1007/s12591-017-0379-1`.

[17] Maqbul, Md., Raheem, A. : Time-discretization schema for a semilinear pseudoparabolic equation with integral conditions. Appl. Numer. Math. (2019)..`https://doi.org/10.1016/j.apnum.2019.09.002`

[18] P. Ciarlet, É. Lunéville, La méthode des éléments finis : De la théorie a la pratique I. Concepts généraux. Paris (2009).

[19] Pişkin, E., Okutmuştur, B. : An Introduction to Sobolev Spaces. Bentham Science, Sharjah (2021).

[20] Sandri, D. : Sur l'approximation numérique des écoulements quasi-newtoniens dont la viscosité suit la loi puissance ou la loi de Carreau. RAIRO Model. Math. Anal. Numer. **27**(2), 131–155 (1993).

[21] Theljani, A., Belhachmi, Z., Moakher, M. : High-order anisotropic diffusion operators in spaces of variable exponents and application to image inpainting and restoration problems. Nonl. Anal. : Real World Appl.**47**, 251–271 (2019).

[22] Wang, J., Liu, C. : p-Biharmonic parabolic equation with logarithmic nonlinearity. Electron. J. Differ. Equ. **2019**(8), 1–18 (2019).`http://ejde.math.txstate.eduorhttp://ejde.math.unt.edu`.

[23] Zennir, K., Beniani, A., Bochra, B., Alkhalifa, L. : Destruction of solutions for class of wave p(x)-bi- Laplace equation with nonlinear dissipation. AIMS Math. **8**(1), 285–294 (2023).`https://doi.org/10.3934/math.2023013`.