République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par : **LAFIFI Manar**

Intitulé

Lien EDP, EDS et Applications

Dirigé par : **Dr. A. EZZEBSA**

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. S. SEKRANI	Prof	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. A. EZZEBSA	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. M. KERBOUA	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. S. BOUHADJAR	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2024

DÉDICACE

C'est avec une grande gratitude et des mots sincères, que je dédie ce modeste travail de fin d'étude.

A mon père Kamal, qui a été mon ombre durant toutes les années d'études et a mis à ma disposition tous les moyens nécessaire pour que je réussisse.

A ma mère Nasira pour tous ses sacrifices, son amour, sa tendresse, son soutien, ses prières tout au long de mes années d'études et de ses encouragements.
J'espère qu'un jour, je pourrai leurs rendre un peu de ce qu'ils ont fait pour moi, que dieu leur pretre bonheur et longue vie.

A ma grand-mère Maseuda et mon grand-père Ali, que Dieu lui fasse miséricorde.

Je dédie aussi de ce travail A mes très chers frères: Bilal, Ahlem et Marwa Qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité et pour la tendre affectation qu'ils m'ont toujours témoigné.

A mes neveux Najmo et Ghaith, si dieu le veut, je les verrai aux plus hauts rangs.

A tous les membres de ma famille et toute personne qui porte le nom Lafifi.

Manar.

REMERCIEMENTS

Je tiens á remercier avant tout ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la volonté, la santé et le courage pour réaliser ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à mon encadrant, le Dr. Abdelali Ezzebsa, pour son aide précieuse et ses conseils éclairés dans l'orientation de mon travail, ainsi que pour sa grande présence et sa gentillesse.

Je remercie également tous les membres de jury, qui ont accepté de juger ce travail, ainsi que tous mes enseignants, mes collègues et le personnelle administrative du département de Mathématiques et Informatique.

Mes grands remerciements vont aussi á ma famille précisément mon père et ma mère pour ses encouragement qu'ont accompagné durant cette mémoire.

Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui on participé de prés ou de loi á la réalisation de ce travail.

Table des matières

Abstract

The object of this memory is to present the link between partial differential equations "PDE" and stochastic differential equations "SDE" due to the relationships that exist between probabilities and partial differential equations through stochastic processes. These are often connected to linear differential operators, which allows the solutions of certain "EDP" to be expressed in terms of stochastic processes.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est de présenter le lien entre les équations aux dérivées différentielles EDP et les équations différentielles stochastiques EDS dûs aux relations existent entre probabilités et équations aux dérivéees partielles à travers les processus stochastiques. Ceux-ci sont souvent reliés à des opérateurs différentiels linéaires, ce qui permet d'exprimer les solutions de certaines EDP en termes de processus stochastiques.

ملخص

الهدف من دراسة موضوع هذه المذكرة هو دراسة العلاقة بين المعادلات التفاضلية الجزئية "PDE" والمعادلات التفاضلية العشوائية"SPDE" وهذا نظير العلاقة الموجودة بين الاحتمالات والمعادلات التفاضلية الجزئية من خلال عائلة المتغيرات العشوائية. غالبًا ما ترتبط هذه العلاقة بالمؤثرات التفاضلية الخطية، مما يسمح بفضلها بالتعبير عن حلول بعض المعادلات التفاضليةالجزئيةPDE.

0.1 Introduction

L'étude mathématique des **EDP** nous a appris à faire preuve d'un peu de modestie : on a découvert l'impossibilité de prévoir à moyen terme certains phénomènes gouvernés par des **EDP** non linéaires. Une petite variation des conditions initiales peut en temps très long conduire à des très grandes variations. L'une des choses qu'il faut avoir à l'esprit à propos des **EDP** est l'étude de lien entre les **EDPs** et les **EDP**. Ce lien dûs aux relations existent entre probabalités et équations aux dérivées partielles à travers des dynamiques aléatoires aux tempset gouvernées par des processus stochastiques Ce mémoire est composé de deux chapitres :

Chapitre 1 : Nous présentons quelques notions préliminaires sur les équations différentielles ordinaires du premier et du seconde ordre et leurs types, ensuite on a donné une généralité sur les **EDP** et ses propriétés, on a parlés aussi les notions de systèmes différentiels autonomes et caractéristiques de l'équation quasi-linéaire, terminé par l'introduction de problème de Cauchy et classification des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre en s'intéresse à l'étude de calcul stochastique par l'introduction des notions et vocabulaires nécessaires à la construction des dynamiques stochastiques tel que les équations différentielles stochastiques et ces applications. Notre objectif dans ce chapitre est de décrire la connexion entre EDP et EDS par la représentation de la solution de l'équation de la chaleur par un processus de diffusion. On termine ce mémoire par une application dans la finance pour comprendre comment modéliser un phénomène grâce à des EDP parabolique de seconde ordre.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Équations différentielles ordinaires

Définition 1.1 *Une équations différentielle ordinaire (qu'on notera EDO), d'ordre k, c'est une équation établissant une relation entre la variable indépendante x, la fonction inconnue $y = f(x)$ et un certain nombre de ces dérivées, on écrit :*

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ...) = 0. \tag{1.1}$$

Remarque 1.1 *Une équation différentielle ordinaire est d'ordre k si elle contient les dérivées de y jusqu'à l'ordre k.*

1.1.1 Équation différentielle ordinaire du premier ordre

Définition 1.2 *Une équation différentielle du premier ordre est une expression qui décrit une relation entre une fonction à une variable et sa dérivée premiére :*

$$F(x, y, y') = 0.$$

Lorsque cette équation est résoluble en y', on peut la mettre sous la forme :

$$y' = f(x, y).$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est appelé solution générale.

Remarque 1.2 *Si on ajoute à une équation une condition initiale $y(x_0) = y_0$, on dit que le système* $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ *admet une solution particulière.*

1.1.2 Type d'équations différentielles du premier ordre

Définition 1.3 ***(Équation différentielle à variables séparées)***

Soit l'équation différentielle du premier ordre suivante

$$y' = f(x, y).$$

Si $f(x, y)$ à la forme $f(x, y) = f_1(x).f_2(y)$, alors l'équation est dite à variables séparées.

Définition 1.4 ***(Équation à variables séparables)***

Toute équation différentielle ayant la forme

$$F_1(x)\, G_1(y)\, dx + F_2(x)\, G_2(y)\, dy = 0 \tag{1.2}$$

est dité équation à variables séparables. Dans la pratique,il suffit divisier les deux membres de (1.2) *par* $G_1(y)\, F_2(x)$, *on obtient une équation à variables séparées, c'est-à-dire de la forme*

$$F_1(x)dx + G_2(y)dy = 0$$

Définition 1.5 ***(Équation homogène du premier order)***

On appelle équation différentielle du premier ordre homogène toute équation de la forme :

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), x \neq 0, \tag{1.3}$$

où f *est définie, continue sur* $I \in \mathbb{R}$.

Définition 1.6 ***(Équations différentielles linaires du prémier ordre)***

On appelle équation du premier ordre toute équation s'écrivant sous la forme

$$y' + a(x)\, y = b(x) \tag{1.4}$$

où $a(x)$, $b(x)$ *sont des fonctions continues. L'équation homogène associe à* (1.4) *est*

$$y' + a(x)\, y = 0. \tag{1.5}$$

1.1.3 Équations différentielles ordinaires du deuxième ordre

Définition 1.7 *Une équation différentielle linéaire du second ordre est une équation différentielle de la forme*

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = f(t) \tag{1.6}$$

où $a,\ b,\ f$ sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle équation homogéne (sans second membre) associée à (1.6) *l'équation différentielle*

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0 \tag{1.7}$$

Définition 1.8 *On appelle équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants toute équation du type*

$$y'' + ay' + by = f(t), \tag{1.8}$$

où a et b sont des réels et $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $\mathbb{I}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1.2 Équations aux dérivées partielles

1.2.1 Généralités

Définition 1.9 *Une équation aux dérivées partielles (EDP) pour une fonction u de la variable $x \in \mathbb{R}^n$, est une relation entre u, x et les dérivées partielles de u, de la forme*

$$F\left(x, u, D_i u, D_{ij}^2 u, ...\right) = 0 \tag{1.9}$$

où u est la fonction inconnue, $D_i u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $D^2_{ij} u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, ...etc.

$u = \Phi(x)$ est une solution si, après substitution , Φ vérifie identiquement la relation (1.9) dans un domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Evidemment ,Φ doit etre assez réguliére pour que toutes les dérivées figurant dans l'équation existent et soient continues dans Ω, (c'est la notion de solution forte). L'ordre de l'équation est l'ordre de dérivation le plus élevé se trouvant dans la relation (1.9). L'EDP est dite linéaire si elle est linéaire par rapport à u et ses dérivées et les coefficients ne dépendent que de x. Une EDP d'ordre m est dite quasi-linéaire si elle est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre m et ses coefficients dépendent des dérivées d'ordre $< m$.

Remarque 1.3 *Soit $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = f$ une EDP du premier ordre*

- Si $a_i = a_i(x)$ et $f = f(x)$, l'équation est linéaire.

- Si $a_i = a_i(x)$ et $f = f(x, u)$, l'équation est presque linéaire (ou semi-linéaire).

- Si $a_i = a_i(x, u)$, alors l'équation est quasi-linéaire.

Exemple 1.1 *:*

L'équation de Laplace : $\triangle u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$, est une EDP linéaire du second ordre. Le laplacien est un opérateur de dérivation très fréquent car il intervient dans les lois physiques qui ne dépendent pas d'une position spécale de l'espace, vu qu'il est invariant lors des changements de repéres cartésiens (mouvements rigides). Toute solution de $\triangle u = 0$ est dite fonction harmonique. Par exemple, les parties réelle et imaginaire u et v d'une fonction analytique f, $(f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y))$ sont harmoniques. Le vecteur$(u, -v)$ est par exemple le champs de vitesse d'une fluide incompressible, irratationnel pour $n = 3$, l'équation de Laplace est vérifiée par le potentiel vitesse d'un fluide incompressible irratationnel,par les champs électrostatique *et de gravitation en dehors des charges ou des masses attractives, par la température dans les équilibres thermiques,..etc.*

Exemple 1.2 *:*

L'équation des ondes $u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \triangle u = 0$*, où* $c = const > 0$*, et* $u = u(t, x_1, ..., x_n)$ *représente,entre autres, lorsque* $n = 1$*, les vibrations d'une corde ou la propagation des ondes sonores dans un tube , lorsque* $n = 2$*, les ondes de surface et lorsque* $n = 3$*, les ondes accoustiques ou lumineuses.*

Exemple 1.3 *:*

L'équation de la chaleur : $\dfrac{\partial u}{\partial t} - k \triangle u = 0$*, où* $k = const > 0$*, et* $u = u(t, x)$ *est la température d'un corps conducteur de chaleur quand la densité et la chaleur spécifique sont constants.*

Ces trois équation sont toutes les trois linéaires .Un exemple d'équation non linéaire très fréquent, est donné par "les équation de Navire-Stokes" pour un fluide visqueux incompressible de vecteur vitesse

$$u = (u_1, u_2, u_3) : \begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j + \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial x_i} - \gamma \triangle u_i = 0, i = 1,\ 2,\ 3 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \end{cases},$$

où p est la pression, ρ la densité et γ la viscosité

1.2.2 Rappels sur les systèmes différentiels autonomes

On s'intéresse aux systèmes différentiels de la forme :

$$\frac{dx_1}{\alpha_1(x)} = \frac{dx_2}{\alpha_2(x)} = .. = \frac{dx_n}{\alpha_n(x)}, \tag{1.10}$$

où $x = (x_1, x_2, .., x_n)$. Ce systèmes est autonome car, si on note dans le rapport commum, on aura : $\dfrac{dx_i}{ds} = \alpha_i$, et la variable s n'apparit pas expticitement dans le système dans le système.

Une solution de ce système est une courbe Γ tangente en chacun de ses points au vecteur $v = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. On convient que si l'un des α_i est nul, le numérateur qui lui correspond est aussi nul.

On appelle **intégrale première** de (1.10) toute fonction u constante le long des solutions du système, i.e : $u(x(s)) = const$, pour tout s tel que $x(s) \in \Gamma$.On admet le théoréme suivant :

Théorème 1.1 *Le système* (1.10) *admet* $n-1$ *intégrales premières linéairement indépendantes* $u_i, i = 1, ..., n,$*vérifient sur* Γ :

$u_i(x(s)) = const,$ *donc :*

$$0 = \frac{du_i}{ds} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{ds} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\partial u}{\partial x_i}, i = 1, .., n. \tag{1.11}$$

L'un, au moins des α_i étant non nul, le déterminant $\triangle$ de (1.17) est nul, or $\triangle$ est le jacobien $\triangle = \dfrac{\partial(u_1, ..., u_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)}$, et $\triangle = 0$ signifie que le système $(u_1, ..., u_n)$ est lié.

Par définition, tout fonction dépendant de $(n-1)$ intégrales premiéres linéairement indépendantes de (1.10) est dite **solution génerale** de (1.10).

Exemple 1.4 *:*

$$\frac{dx}{y\,(x+y)+z}=\frac{dy}{x\,(x+y)-z}=\frac{dz}{z\,(x+y)},$$

possède deux intégrales premières.On a :

$$\frac{d\,(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{dz}{z\,(x+y)}\Rightarrow\frac{z}{x+y}=C_1,$$

intégrale première. D'autre part :

$$\frac{xdx-ydy}{z\,(x+y)}=\frac{dz}{z\,(x+y)}\Rightarrow xdx-ydy-dz=0,$$

donc $x^2-y^2-2z=C_2$ *intégrale première. La solution générale est* $C_1=\Phi\,(C_2)$ *où* $z=(x+y)\,\Phi\left(x^2-y^2-2z\right).$

Remarque 1.4 *La solution générale s'écrit indifféremment* $C_1=\Phi\,(C_2)$*, ou* $C_2=\Phi\,(C_1)$*, ou* $\Phi\,(C_1,C_2)=0$*, où* Φ *est une fonction arbitraire.*

1.2.3 Caractéristiques de l'équation quasi-linéaire

– **Le cas homogéne :** Soit l'équation suivante :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial u}{\partial x_i}=0, \tag{1.12}$$

où les α_i sont des fonctions continument différentables des variables $x_1,..x_n$.

Cherchons des courbes $x\,(s)$ sur lesquelles u est constante, càd $\frac{du}{ds}=0$, (s étant le paramètre de la courbes). Notons qu'on va couper dans $\mathbb{R}^{n+1}$, la surface $x_{n+1}=u\,(x_1,..,x_n)$ par des plans paralléles au plan des $x_1, ..x_n$. On a donc :

$$\frac{du}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = 0,$$

qui au vu de (1.12) et de l'invariance de la différentielle premiére, induit le système :

$$\frac{dx_i}{ds} = \alpha_i, i = 1, ..n, \tag{1.13}$$

qu'on appelle **système caractéristique** de l'équation (1.12) .Toute solution $x(s)$ de (1.13) s'appelle **courbe caractéristique** de (1.12) .

Le système (1.13) est un système autonome qu'on réécrit sous la forme (1.10) et dont la solution générale est une fonction arbitraire de $(n-1)$ intégrales prèmières $c_j = \Phi(x_1, ..., x_n)$, $j = 1, ..., n-1$, linéairement indépendantes.

Soit $u(s) = u(x(s))$ une solution de (1.12) , alors le long d'une courbe caractéristique $x(s)$, u vérifie $\dfrac{du}{ds} = 0$, u est constante, donc $u = u(C_1, ..., C_{n-1})$ est solution de (1.10).

Inversement, soit Φ une intégrale prèmière de (1.13), alors $\Phi = \Phi(C_1(x), ..., C_{n-1}(x))$ et

$$0 = \frac{d\Phi}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i},$$

donc Φ est solution de (1.12). En conséquence :

La solution générale de (1.12) est une fonction arbitraire de $n-1$ intégrales prémiéres linéairement indépendantes du système caractéristique.

Exemple 1.5 *:*

$\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, *le système caractéristique est* $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{-1}$, *donc* $x^2 - 2y = C_1$ *et* $x + z = C_2$ *sont deux intégrales premières, et* $u(x, y, z) = \Phi\left(x^2 - 2y, x + z\right)$ *est la solution générale.*

– **Le cas non homogéne :**

Soit l'EDP suivante

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = a,$$

où a_i et a sont des fonction données continument différentiables de x et de u.

Notons $x_{n+1} = u$ et $a_{n+1} = a$ et cherchons la soultion sous la forme implicite $\Phi(x_1, ..., x_{n+1}) = 0$. Comme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0,\ \ k = 1, ..., n$$

on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} a_i \frac{d\Phi}{dx_i} &= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d\Phi}{dx_i} + a\frac{d\Phi}{d_{x+1}} = -\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n+1}} + a\frac{d\Phi}{dx_{n+1}} \\ &= \frac{d\Phi}{dx_{n+1}} \left[a - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] = 0, \end{aligned}$$

donc Φ est une solution de l'équation (1.12). On conséquence, la soultion géneral de l'équation quasi-linéaire

$$\sum_{i=1}^{n} a(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = a(x, u),$$

est donnée sous la forme implicte par la relation $\Phi(x_1, ..., x_{n+1}, u) = c$, où Φ est une intégrale première du système

$$\frac{dx_1}{a_1} = ... = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{a}.$$

Le système admet n intégrales premières linéairement indépendantes $c_1, ..., c_n$ et $\Phi(c_1, ..., c_n)$, avec $c_i = c(x, u)$. Contairement au cas linéaire, $\Phi(x_1, ..., x_n, u) = c$ définit implicitement u comme fonction de n intégrales premières $c_1, ..., c_n$. C'est, en défintive une famille à un paraméter car $n-1$ intégrales premières suffisent pou déteriner la soutiona.

Exemple 1.6 $(x+u)\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = y^2 + u$
le système caractéristique $\dfrac{dx}{(x+u)} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{du}{(y^2+u)}$ *nous donne :*
$\dfrac{du}{dy} - \dfrac{1}{y}x = y + c_1$ *équation différentielle linéaire en* $x(y)$ *qui donne*
$x = y^2 + c_1 y \log|y| + c_2 y,$ *d'où* $c_1 = \dfrac{u}{y} - y$ *et* $c_2 = \dfrac{x}{y} - y - \left(\frac{u}{y} - y\right)\ln|y|,$ *et la solution générale s'écrit* $c_2 = \Phi(c_1)$.

1.2.4 Problème de Cauchy

Existence et Unicté d'une Solution locale

Le problème de Cauchy relatif à l'EDP quasi-linéaire $\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\, u_{x_i} = b(x,u)$ consiste à chercher la soultion de cette équation qui prend sur une surface donnée S une valeur donnée u_0. S et u_0 sont appelées "les données intiales".

Soit

$$\Phi \left| \begin{array}{c} E \subset \mathbb{R}^{n-1} \to S \subset \mathbb{R}^n \\ \\ (\alpha_1, ..., \alpha_n) \to (x_1, ..., x_n) \end{array} \right|$$

une paramétrisation de S, c'est-à-dire

$$\Phi = (\Phi_1, ..., \Phi_n), x_i = \Phi_i(\alpha), \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}),$$

et $rang\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right)=n-1.$

Théorème 1.2 *Le problème de Cauchy*

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_{x_i}=b;\ \ u/S=u_0,$$

admet une solution unique u de classe C^1 au voisinage de S, si S n'est ni une surface caractéristique, ni une surface (dans le sens décrit ci dessous).

– **Méthode des caractéristiques paramétrées**

Soit l'équation quasi-linéaire :

$$a\left(x,y,u\right)u_x+b\left(x,y,u\right)u_y=c\left(x,y,u\right), \tag{1.14}$$

géométriquement l'EDP (1.14) signifie que

$$\underbrace{\left(a\left(x,y,u\right),b\left(x,y,u\right),c(x,y,u)\right)}_{\overrightarrow{v}}\bullet\underbrace{\left(u_x,u_y,-1\right)}_{\overrightarrow{\eta}}=0,$$

$$\left[\begin{array}{c}\text{Le vecteur } \overrightarrow{v} \text{ est tangent à la surface intégrale } \overrightarrow{\eta}\left(u_x,u_y,-1\right)\\ \overrightarrow{\eta}=\nabla f\left(x,y,u\right)\qquad\left(f\left(x,y,u\right)=u\left(x,y\right)-u\right)\end{array}\right.,$$

<u>Méthode</u> : Utilisant les paramètres s et τ pour exprimier x,y et u c'est à dire : $x\left(s,\tau\right),y\left(s,\tau\right)$ et $u\left(s,\tau\right)$ où trois étapes :

Etape 1 : résoudre le système de trois *EDO* pour avoir $x\left(s,\tau\right),\ y\left(s,\tau\right),\ u\left(s,\tau\right)$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = a,\ x\left(0,\tau\right) = x_0\left(\tau\right) \\ \dfrac{dy}{ds} = b,\ y\left(0,\tau\right) = y_0\left(\tau\right) \\ \dfrac{du}{ds} = c,\ \ u\left(0,\tau\right) = u_0\left(\tau\right) \end{cases},$$

Etape 2 : Ecrire $s,\ \tau$ en terme de x, y et u.

Nous devrons s'assurers que

$$\triangle = \begin{vmatrix} \dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dx}{d\tau} \\ \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dy}{d\tau} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ en } s = 0,$$

pour garantir l'unicité de la solution. Dans le cas $\triangle = 0$, cela signifie que la solution n'existe pas.

Etape 3 : La substution de s et τ dans $u\left(s,\tau\right)$, où trouver la solution génerale.

Exemple 1.7 *Soit l'EDP*

$$\begin{cases} u_x + uu_y = 0 \\ u\left(0,y\right) = \sin y,\quad \mathbb{R} \end{cases}$$

***E**1*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = 1 \quad , \quad x\left(0,\tau\right) = x_0\left(\tau\right) = 0 \\ \dfrac{dy}{ds} = u \quad , \quad y\left(0,\tau\right) = y_0\left(\tau\right) = \tau \\ \dfrac{du}{ds} = 0 \quad , \quad u\left(0,\tau\right) = u_0\left(\tau\right) = \sin\tau \end{cases}$$

On a $\dfrac{dx}{ds} = 1 \Rightarrow dx = ds \Rightarrow x(s,\tau) = s + c_1(\tau)\,,\ x(0,\tau) = 0 \Rightarrow c_1(\tau) = 0$ *donc* $x(s,\tau) = s.$

$\dfrac{du}{ds} = 0 \Rightarrow du = 0 \Rightarrow u(s,\tau) = c_3(\tau)\,,\ u(0,\tau) = \sin\tau$ *donc* $u(s,\tau) = \sin\tau.$

$\dfrac{dy}{ds} = u \Rightarrow dy = \sin\tau\ ds \Rightarrow y(s,\tau) = s\cdot\sin\tau + c_2(\tau)\,,\ y(0,\tau) = c_2(\tau) = \tau$ *donc* $y(s,\tau) = s\cdot\sin\tau + \tau.$

***E**$_2$:*

$$\begin{aligned} \triangle &= \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds}, \frac{dx}{d\tau} \\ \frac{dy}{ds}, \frac{dy}{d\tau} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \sin\tau & s\cos\tau + 1 \end{vmatrix} \\ &= (s\cos\tau + 1) = 1 \neq 0 pour s = 0. \end{aligned}$$

La soultion est unique.

***E**$_3$:*

$$\begin{aligned} u(s,\tau) &= \sin\tau \Rightarrow u(x,y) = \sin(y - u(x,y)\cdot x)\ \ car : \\ & \left\{ \begin{array}{c} x = s \\ y = s\cdot\sin\tau + \tau \Rightarrow \tau = y - x\cdot u \end{array} \right. . \end{aligned}$$

1.2.5 Équations aux dérivées partielles du deuxième ordre

Définition 1.10 *Soit f une fonction de deux variable x et y. On appelle équation aux dérivées partielles du $2^{éme}$ ordre, une relation de la forme :*

$$F\left(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 0,$$

faisant intervenir f et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2*.*

1.2.6 Classification des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre

Une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre à deux variables x et y sous la forme générale est donnée par :

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + d\frac{\partial f}{\partial x} + e\frac{\partial f}{\partial y} = k, \tag{1.15}$$

où $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ g$ et k sont des constants ou des fonctions à deux variables x et y.

Une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre (1.15) est généralement classée en trois classes :

1. **Parabolique :** L'équation parabolique est une équation qui satisfait la propriété :

$$b^2 - 4ac = 0.$$

   Des exemples d'équations parabolique est une l'équation de la chaleur,

$$u_t = ku_{xx}.$$

2. **Hyperbolique :** L'équation hyperbolique est une équation qui satisfait la propriété :

$$b^2 - 4ac > 0.$$

Des exemples d'équations hyperbolique sont les équations des ondes,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

3. **Elliptique :** L'équation elliptique est une équation qui satisfait la propriété :

$$b^2 - 4ac < 0.$$

Des exemples d'équations elliptique sont l'équation de Laplace,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Exemple 1.8 *La classification des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre est :*

1. $u_t = 5u_{xx}$

$a = 5,\ b = 0,\ c = 0,$ *alors* $b^2 - 4ac = 0,$ *donc l'équation est parabolique.*

2. $u_{tt} = 6u_{xx}$

$a = 6,\ b = 0,\ c = -1,$ *alors* $b^2 - 4ac = 24 > 0,$ *donc l'équation est hyperbolique.*

3. $u_{xx} + u_{yy} = 0$

$a = 1,\ b = 0,\ c = 1,$ *alors* $b^2 - 4ac = -4 < 0,$ *donc l'équation est elliptique.*

Chapitre 2

Introduction aux EDP stochastiques

2.1 Motivations

Le but des équations différentielles stochastiques EDS est de fournir un modèle mathématique pour une équation différentielle perturbée par un bruit aléatoire. Les liens importants entre les équations aux dérivées partielles EDP et les équations aux dérivées partielles stochastiques $EDPS$ dûs aux relations existent entre probabilités et équations aux dérivéees partielles à travers les processus stochastiques. Ceux-ci sont souvent reliés à des opérateurs différentiels linéaires, ce qui permet d'exprimer les solutions de certaines EDP en termes de processus stochastiques.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à l'influence d'une perturbation aléatoire, autrement dit d'un terme supplémentaire gouverné par un processus aléatoire (typiquement un mouvement brownien), sur plusieurs modèles d'équations différentielles classiques. Le type d'équation à envisager est bien entendu celui de l'équation différentielle standard à un paramètre, qui donne alors naissance de l'**équation différentielle standard stochastique**

$$dY_t = b(t, Y_t)dt + \sigma(t, Y_t)dW_t, \tag{2.1}$$

où $W : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ est un processus aléatoire, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, b et $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Lorsque W correspond à un mouvement brownien, l'équation (2.1) peut être interprétée, par le biais de la théorie d'Itô comme suit

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b(s, Y_s)ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s)dW_s. \tag{2.2}$$

tel que $\int_0^t \sigma(s, Y_s)dW_s$ donne naissance d'une intégrale dite d'Itô qui possède de propriétés stochastiques qui permettent facilement d'envisager la résolution du modèle (2.2). Sous des hypothèses de régularité standards concernant les applications b, σ, on peut montrer facilement le resultat d'existence et d'unicité de l'équation (2.2) .

Nous intéressons à des dynamiques différentielles stochastiques, et ferons ainsi le lien avec la théorie des EDP classiques. Nous nous intéressons plus particulièrement sur l'étude de l'équation de la chaleur stochastique en dimension 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma(u) \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x}, \ t \in [0, T], \ x \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

et nous ferons précisé les proriétés de la solution et sa représentation sous forme de processus aléatoire.

Remarque 2.1 *La physique fait aussi un appel à un autre type d'équations stochastques tel que les équations des ondes en dimension* 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_x u + \sigma(u) \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2}, \ t \in [0, T], \ x \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

pour un certain processus stochastique $W : ([0, T] \times \mathbb{R}) \times \Omega \to \mathbb{R}$.

Remarque 2.2 *Les deux modèles (2.3) et (2.4) nous permettront de nous familiariser avec les techniques les plus classiques de la théorie des EDP stochastiques.*

2.2 Processus aléatoires

Définition 2.1 *Un processus aléatoire est une famille de v.a.*$(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ *définie sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *On peut également le voir comme une fonction aléatoire, ou tout simplement tout application*

$$X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$$

telle que, pour tout $t \geq 0$, $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ *est une application mesurable (autrement dit* X_t *est une variable aléatoire).*

2.2.1 Processus à accroissements indépendants et stationnnaires

(Indépendance) : $(X_t - X_s) \perp \mathcal{F}_s^X = \sigma(X_r, \ 0 \leq r \leq s), \forall t > s \geq 0.$

(Stationnarité) :$X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0, \forall t > s \geq 0.$

Remarque 2.3 *Pour de tels processus, donner la loi de* $X_t - X_0, \forall t > 0$, *ainsi que celle de* X_0 *suffit à caractériser entièrement le processus.*

Citons encore une définition dont nous avons besoin pour définir le mouvement brownien.

Définition 2.2 *Un processus* (X_t) *est appelé un processus à trajectoires continues (ou simplement processus continu) si* $\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : t \rightarrow X_t(\omega) \text{ est continue}\}\right) = 1$.

2.2.2 Mouvement Brownien standard

Historiquement

-1828. Robert Brown, botaniste observe le mouvement du pollen en suspension dans l'eau.

-1877. Delsaux explique que ce mouvement irrégulier est du aux chocs du pollen avec les molécules d'eau (chengements incessants de direction),

-1900. Louis Bachelier dans se thèse : **Théorie de la spéculation** modélise les cours de la bourse comme des processus à accroissements indépendants et Gaussiens (problème. le cours de l'actif, processus Gaussien, peut être négatif).

-1905. Einstein détermine la densité du mouvement Brownien noté **MB** et le lie aux $\mathbf{EDP}_{\mathrm{s}}$.

-1923. Etude rigoureuse du **MB** par Wiener, entre autre démonstration de l'existence.

Un mouvement Brownien généralement noté **B** pour Brown ou **W** pour Wiener.

Remarque 2.4 *Un mouvement brownien standard (abrégé m.b.s.) est un processus aléatoire à temps continu* $(B_t,\ t \in \mathbb{R}_+)$ *tel que*

$$\begin{cases} i)\ B_0 = 0 \ p.s \\ ii)\ (B_t) \text{ est à accroissements indépendants et stationnaires,} \\ iii)\ B_t \sim N(0,t),\ \forall t > 0, \\ iv)\ (B_t) \text{ est à trajectoires continues.} \end{cases}$$

Remarque 2.5 *On dit un mouvement brownien standard ou dit issu de zéro.*

Remarque 2.6 *De cette définition il suit que pour $t \geq s \geq 0$, $B_t - B_s \sim B_{t-s} \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, i.e. $\mathbb{E}(B_t - B_s) = 0$ Et $\mathbb{E}((B_t - B_s)^2) = t - s$. En appliquant la loi des grands nombres, on trouve encore que $\dfrac{B_t}{t} \to 0$ p.s, lorsque $t \to \infty$. De plus, on a $\dfrac{B_t}{\sqrt{t}} \sim \mathcal{N}(0,1)$, pour tout $t > 0$. On voit donc que le m.b.s est bien une généralisation à temps continu de la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$.*

De façon équivalente, on peut définir un mouvement brownien comme un processus gaussien (c'est-à-dire, toute combinaison linéaire $\lambda_1 B_{t_1} + ... + \lambda_n B_{t_n}$ est une variable gaussienne) continu ($t \to B_t(\omega)$ est une fonction continue pour presque tout $\omega \in \Omega$), centré (c'est-à-dire $\mathbb{E}[B_t] = 0$ pour tout $t \geq 0$) et dont la fonction de covariance est donnée par

$$\mathbb{E}[B_s B_t] = \inf(s, t).$$

Notation 2.1 *Notons $\mathbb{E}_x(f(B_s))$ l'espérance de $f(B_s)$ quand B est un Brownien issu de x, sans toujours faire cette précision, on a $\mathbb{E}_x(f(B_s)) = \mathbb{E}(f(x + B_s))$ ou B est un Brownien issu de 0. De même on a*

$$P_x(B_s \in A) = P(x + B_s \in A)$$

et

$$P_x(B_s \in da)$$

pour la densité de la variable aléatoire B_s ou B est un Brownien partant de x.

2.2.3 Scaling

Proposition 2.1 *Si* $(B_t,\ t \geq 0)$ *est un mouvement Brownien, alors*

i) le processus $\overset{\curlywedge}{B}$ *défini par* $\overset{\curlywedge}{B}_t = -B_t$ *est un mouvement Brownien.*

ii) le processus $\tilde{B}$ *défini par* $\tilde{B}_t = \frac{1}{c}\ B_{c^2t}$ *est un mouvement Brownien. (Propriété de scaling).*

iii) le processus $\overline{B}$ *défini par* $\overline{B}_t = tB_{\frac{1}{t}}$, $\forall t > 0$, $\overline{B}_0 = 0$ *est un mouvement Brownien.*

2.2.4 Processus gaussien

Définition 2.3 *Un processus gaussien est un processus* $(X_t,\ t \in \mathbb{R}_+)$ *tel que* $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ *est un vecteur aléatoire gaussien* $\forall n \succeq 1$ *et* $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$. *Ceci revient à dire que* $c_1X_{t_1} + ... + c_nX_{t_n}$ *est une v.a. gaussienne* $\forall n \succeq 1,\ t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$ *et* $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$. *Pour un vecteur aléatoire (pas forcément gaussien), on définit encore :*

La fonction m : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *donnée par* $m(t) = E(X_t)$ *et appelée la moyenne du processus.*

La fonction K : $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *donnée par* $K(X_t) = \operatorname{cov}(X_t, X_s)$ *et appelée la covariance du processus.*

K est symétrique : $K(t,s) = K(s,t)\,,\ \forall s,t \in \mathbb{R}_+$

K est définie positive : $\sum_{i,j=1}^{n} c_ic_jK(t_it_j) \geq 0,\ \forall n \succeq 1,\ c_1, ..., c_n \in \mathbb{R},\ t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$.

Proposition 2.2 ***(Kolmogorov)***

Etant donné $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *et* $K : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *symétrique et définie positive, il existe un processus gaussien* $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ *de moyenne* m *et de covariance* K. *De plus,* m *et* K *caractérisent entièrement le processus* (X_t).

Proposition 2.3 ***($2^{éme}$ caractérisation du mouvement brownien standard)***

Un mouvement brownien standard $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est un processus à trajectoires continues et gaussien avec moyenne $m(t) = 0$ et covariance $K(t, s) = t \wedge s = \min(t, s)$.

Preuve. Il faudrait vérifier que $c_1 B_{t_1} + ... + c_n B_{t_n}$ est une v.a. gaussienne.

$\underbrace{B_t + B_s}_{\text{est gaussienne}} = (B_t - B_s) + 2B_s$, c'est donc une v.a. gaussienne, car la somme de deux v.a. gaussiennes indépendantes est encore gaussienne. Soit maintenant

$$\begin{aligned} t &\geq s \geq 0,\, m(t) = \mathbb{E}(B_t) = 0, \\ K(t,s) &= \operatorname{cov}(B_t, B_s) = \mathbb{E}(B_t B_s) = \mathbb{E}((B_t - B_s + B_s) B_s) \\ &= \mathbb{E}((B_t - B_s) B_s) + \mathbb{E}\left(B_s^2\right) = 0 + s. \end{aligned}$$

Car $(B_t - B_s) \perp B_s$. On a donc $K(t, s) = \min(t, s)$. ■

2.2.5 Processus de Markov

Un processus $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est dit de Markov, si on a

$$\mathbb{E}\left(f(X_t) / \mathcal{F}_s^X\right) = \mathbb{E}\left(f(X_t) / X_s\right) \;\; p.s,$$

pour tout $t > s \geq 0$ et pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne et bornée (**N. B**: $\mathcal{F}_s^X = \sigma(X_r,\ r \leq s)$). En particulier, si $f(x) = 1_{B(x)}$ avec $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$, alors

$$\mathbb{P}\left(X_t \in B / \mathcal{F}_s^X\right) = \mathbb{P}\left(X_t \in B / X_s\right).$$

Proposition 2.4 *Le mouvement brownien standard $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est un processuse de Markov.*

2.2.6 Martingale à temps continu

Définition 2.4 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité.*

▶ *Une filtration est une famille* $(\mathcal{F}_t, t \in)$ *de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *tet que* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \ \ \forall t \geq s \geq 0.$

▶ *Un processus* (X_t) *est adapté à* (F_t) *si* X_t *est* F_t*-mesurable* $\forall t \geq 0.$

▶ *La filtration naturelle d'un processus* $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ *est donnée par* $\left(\mathcal{F}_t^X, t \in \mathbb{R}_+\right)$, *où* $\mathcal{F}_t^X = \sigma\left(X_s,\ 0 \leq s \leq t\right).$

Définition 2.5 *Un processus* (M_t) *adapté à* $(\mathcal{F}_t)$ *tel que*

$$\begin{cases} i)\ \mathbb{E}\left(|M_t|\right) < \infty, \quad \forall t \geq 0, \\ ii)\ \mathbb{E}\left(M_t/\mathcal{F}_s\right) = M_s \ \ p.s\ \forall t > s \geq 0, \end{cases}$$

est appelé une martingale (à temps continu). On définit de manière similaire une sous-martingale et une sur-martingale (à temps continu), avec les inégalités correspondantes.

Proposition 2.5 *Le mouvement brownien standard* $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ *est une martingale par rapport à sa filtration naturelle* $\left(\mathcal{F}_t^B, t \in \mathbb{R}_+\right).$

2.3 Intégrale de Riemann-Stieltjes

2.3.1 Intégrale de Riemann

Soit $t > 0$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. On définit

$$\int_0^t f(s)\, ds = \lim \sum_{i=1}^{n} f\left(s_i^{(n)}\right)\left(t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}\right),$$

où $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < ... < t_n^{(n)} = t$, $s_i^{(n)} \in \left[t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}\right]$ et $\left(t_0^{(n)}, ..., t_n^{(n)}\right)$ est une suite de partitions de $[0, t]$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\leq i\leq n} \left|t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}\right| = 0$.

2.3.2 Résultat d'analyse (Dérivation sous le signe somme)

Soit $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy$. Si f est continue et admet une déerivée partielle par rapport à x $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ continue bornée en valeur absolue par $g(y)$, $\left|\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right| \leq g(y)$ où g est une fonction intégrable, alors

$$F'(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy.$$

2.3.3 Fonction (localement) à variation bornée

Etant donnée une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $\forall t > 0$

$$\sup \sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| < \infty,$$

où le supremum est pris sur toutes les partitions $(t_0, ..., t_n)$ de $[0, t]$, avec n arbitraire. Si g est croissante, alors g est à variation bornée, car

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} (g(t_i) - g(t_{i-1})) = g(t) - g(0)$$

est indépendant de la partition choisie, donc

$$\sup \sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| = g(t) - g(0) < \infty.$$

Remarque 2.7 *Si g est la différence de deux fonctions croissantes, alors g est à variation bornée.*

Si g est continument dérivable, alors g est à variation bornée, car

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left|g\left(t_i\right)-g\left(t_{i-1}\right)\right| &= \sum_{i=1}^{n}\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} g'\left(s\right)ds\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\sup_{s\in[t_{i-1},t_i]}\left|g'\left(s\right)\right|\left(t_i-t_{i-1}\right)\\ &\leq \sup_{s\in[0,t]}\left|g'\left(s\right)\right|\sum_{i=1}^{n}\left(t_i-t_{i-1}\right)=\sup_{s\in[0,t]}\left|g'\left(s\right)\right|t\end{aligned}$$

est indépendant de la partition choisie, donc

$$\sup\sum_{i=1}^{n}\left|g\left(t_i\right)-g\left(t_{i-1}\right)\right| \leq \sup_{s\in[0,t]}\left|g'\left(s\right)t\right|<\infty.$$

2.3.4 Intégrale de Riemann-Stieltjes

Soit $t>0$, $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ continue et $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ à variation bornée. On définit

$$\int_0^t f\left(s\right)dg\left(s\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(s_i^{(n)}\right)\left(g\left(t_i^n\right)-g\left(t_{i-1}^n\right)\right),$$

où $0=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<...<t_n^{(n)}=t$, $s_i^{(n)}\in\left[t_{i-1}^{(n)},t_i^{(n)}\right]$ et $\left(t_0^{(n)},...,t_n^{(n)}\right)$ est une suite de partitions de $[0,t]$ telle que

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leq i\leq n}\left|t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}\right|=0.$$

Remarque 2.8 *Si f est continue et g est continument dérivable, alors*

$$\int_0^t f\left(s\right)dg\left(s\right)=\int_0^t f\left(s\right)g'\left(s\right)ds.$$

Si f et g sont continues et à variation bornée, alors

$$\begin{aligned}\int_0^t f(s)\,df(s) &= \frac{f(t)^2}{2} - \frac{f(0)^2}{2},\\ \int_0^t f(s)\,dg(s) &= f(t)\,g(t) - f(0)g(0) - \int_0^t g(s)\,df(s)\,.\end{aligned}$$

2.3.5 Passons des fonctions déterministes aux processus aléatoires

Soit $(H_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un processus à trajectoires continues. Soit $(V_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un processus (à trajectoires) à variation bornée. On définit

$$\int_0^t H_s dV_s = \int_0^t H_s(\omega)\, dV_s(\omega).$$

Cette intégrale est définie trajectoire par trajectoire.

Remarque 2.9 *le champ d'application de l'intégrale stochastique est le suivant : Si la courbe (V_t) est l'évolution du prix d'un actif financier et (H_t) est la stratégie d'investissement sur cet actif, alors $\int_0^t H_s dV_s$ représente le gain effectué sur l'intervalle $[0,t]$. L'intégrale ci-dessus est donc bien définie et l'on peut se demander pourquoi on a besoin de parler d'intégrale "stochastique" ?*

Il se trouve qu'en mathématiques financières, les processus d'évolution des prix sont mieux repésentés par des mouvements browniens (ou des processus plus compliqués encore). Or le mouvement brownien (standard) a des trajectoires continues mais pas à variation bornée.

2.3.6 Variation quadratique

Proposition 2.6 *Si M et N sont deux martingales continues (relativement à (F_t)) de carré intégrable (i.e., pour tout $t \in [0,T]$, $\mathbb{E}\left[M_t^2\right] < \infty$ et $\mathbb{E}\left[N_t^2\right] < \infty$), alors pour tout $t \in [0,T]$*

et toute subdivision $\Delta_T = \{0 < t_1 < ... < T\}$ *de* $[0, T]$ *dont le pas* $|\Delta_T|$ *tend vers* 0*, la suite de processus*

$$\sum_i (M_{t+1\wedge t} - M_{t_i \wedge t}) (N_{t+1\wedge t} - N_{t_i \wedge t}),$$

converge (en probabilité) quand $|\Delta_t| \to 0$*. Sa limite est appelée le crochet de* M *et* N *(au temps* t*), et est notée* $\langle M, N \rangle_t$*.*

Remarque 2.10 *Le processus-crochet* $(\langle M, N \rangle_t)_{t\in[0,T]}$ *ainsi défini correspond également à l'unique processus continu, adapté, à variation bornée, qui s'annule en* 0*, tel que* $MN - \langle M, N \rangle$ *soit une martingale.*

Quand $M = N$*, on note plus simplement* $\langle M \rangle := \langle M, M \rangle$ *et on parle aussi (logiquement) de variation quadratique de* M*. Il s'agit alors d'un processus positif croissant.*

2.4 Formules d'Itô

Dans ce qui suit, X est un processus d'Itô de décomposition

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t.$$

Théorème 2.1 *Soit* $(B_t,\ t \in \mathbb{R}^+)$ *un mouvement brownien standard par rapport à* $(F_t,\ t \in \mathbb{R}^+)$ *et* $f \in C^2$ *(i.e.* $f,\ f'$ *et* f'' *sont des fonctions continues). On suppose de plus que*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t (f'(B_s))^2 ds\right) < \infty,\ \forall t > 0,$$

alors pour tout $t > 0$,

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)\ dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\ ds\ p.s. \tag{2.5}$$

Remarque 2.11 *Le second terme du membre de droite dans* (2.5) *(absent dans les régles de calcul différentiel "classique") est appelé **terme d'Itô à une variable.** La formule d'Itô dif-féntielle s'écrit alors*

$$dX_t = X_t\ dB_t + \frac{1}{2}X_t dt.$$

Exemple 2.1 *Soit la fonctions* $f(x) = x$ *en appliquant la formule* (2.5), *on obtient*

$$B_t - B_0 = \int_0^t 1\ dB_s + 0.$$

Remarque 2.12 *Nous allons maintenant élaborée une autre versionde de la formule d'Itô (légèrement plus élaborée de la formule* (2.5)*).*

Théorème 2.2 *Soient* (B_t) *un mouvement brownien standard et* $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, *c'est-à-dire* $f, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ *sont continues, telle que*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)\right)^2\ ds\right) < \infty,\ \forall t > 0,$$

alors pour tout $t > 0$, ***la formule d'Itô à deux variables*** *s'écrite*

$$f(t, B_t) - f(0, B_0) = \int_0^t f'_t(s, B_s)\ ds + \int_0^t f'_x(s, B_s)\ dB_S + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, B_s)\ ds \tag{2.6}$$

Remarque 2.13 *La condition de bornitude des dérivées n'est exigée que pour l'existence des intégrales et pour la propriété de martingale de l'intégrale stochastique.*

En notant sa ressemblance avec la formule de Taylor, sous la forme

$$df(X_t) = f^{'}(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f(X_t)dX_tdX_t.$$

et la règle de multiplication

$$dt.dt = 0,\ dt.dB_t = 0 \text{ et } dB_t.dB_t = dt.$$

Soit

$$f(t,x) = x - t,$$

alors on a

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -1,\ \frac{\partial f}{\partial x} = 1 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

De (2.6) on trouve

$$B_t - t = \int_0^t -1\ ds + \int_0^t 1dB_t.$$

Remarque 2.14 *On se donne deux fonctions b et σ de $[0;T]\ \times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant les hypothèses du théorème d'existence de solution d'EDS. Soit A l'opérateur défini sur les fonctions de $C^{1,2}$ par*

$$Af(t;x) := f_t^{'}\left(t,x\right) + f_x^{'}\left(t,x\right)b\left(t,x\right) + \frac{1}{2}f_{xx}^{'\,'}\left(t,x\right)\sigma^2\left(t,x\right).$$

Soit $\left(X_u^{x,t},\ u \geq t\right)$ *le processus d'Itô défini par*

$$X_u^{x,t} = X_t^{x,t} + \int_t^u b(s, X_s^{x,t})ds + \int_t^u \sigma(s, X_s^{x,t})dB_s, u \geq t$$

avec une condition initiale en t : $X_t^{x,t} = x$. *On constate que* $Af(t;x) := f_t^{'}(t,x) + \mathcal{L}f(t;x)$ *où* $\mathcal{L}$ *est le générateur infinitésimal de* X.

Exemple 2.2 *martingale exponentielle*

Soit θ *est un paramètre et* Z_0 *une constante. La solution de* $dZ_t = \theta_t Z_t dB_t$ *est*

$$Z_t = Z_0 \exp\left(\int_0^t \theta_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)$$

Exemple 2.3 *Si de plus* $\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)\right) < \infty$, *le processus* $(Z_t, t \leq T)$ *est une martingale d'espérance* Z_0.

Lemme 2.1 *Soit* f *telle que* $|f(t,x) - f(t,y)| \leq C|x-y|$ *et* $\sup |f(s,0)| \leq C$. *Alors,*

$$\int_0^t f(s, B_s)\, dB_S - \frac{1}{2}\int_0^t (f(s,B_s))^2\, ds$$

est une martingale.

Propriété de Markov

La propriété de Markov du mouvement Brownien est utilisée pour tout s, le processus $(W_t,\ t \geq 0)$ défini par $W_t = B_{t+s} - B_s$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$.

Théorème 2.3 *Pour* f *borélienne bornée,* $\mathbb{E}(f(B_u)/\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(B_u)/\sigma(B_t))$ *pour* $u > t$.

Preuve. En utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle et les propriétés d'indépendances des accroissements on obtient donc

$$\mathbb{E}(f(B_u)/\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(B_u - B_t + B_t)/\mathcal{F}_t) == \Phi(u-t, B_t)$$

avec $\Phi(u-t,x) = \mathbb{E}(f(B_u - B_t + x) = \mathbb{E}((f(Y+x))$. Où Y a même loi que $B_u - B_t$ $(B_u - B_t \to N(0,1))$. De même on a, $\mathbb{E}(f(B_u)/\sigma(B_t)) = \Phi(u-t, B_t)$. Plus précisement on a

$$\Phi(s,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp -\frac{(y-x)^2}{2s} dy.$$

■

2.5 Equation de la chaleur

Définition 2.6 *On définit l'équation de la chaleur par* $\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = 0$*, où* k *constante positive,* Δ *est l'équation de laplace tel que* $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$ *et* $u = u(t,x)$ *est la température d'un corps conducteur de chaleur quand la densité et la chaleur spécifique sont constants.*

Soit $g(t,x)$ la densitée gaussienne centrée de variance t. On note

$$q(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt[2]{2 \times \pi \times t}} \exp -\frac{(y-x)^2}{2t} = q(t, x-y).$$

La densité de transition du mouvement Brownien. C'est de façon heuristique, la probabilité pour que le mouvement Brownien soit en y sachant que t instants auparavant, il se trouvait en

x, c'est aussi la densité conditionnelle

$$P\left(B_{t+s} \in dy / B_s = x\right) = q\left(t, x, y\right) dy$$

La densité de transition q vérifie l'équation "$forward$"

$$\frac{\partial q}{\partial t}\left(t, x, y\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial y^2}\left(t, x, y\right)$$

et l'équation "$backward$"

$$\frac{\partial q}{\partial t}\left(t, x, y\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\left(t, x, y\right)$$

En utilisant cette notation et la stationarité des accroissements du MB, on obtient que pour toute fonction f borélienne bornée

$$\mathbb{E}\left(f\left(B_T\right) / B_t = x\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(y\right) q\left(T - t, x, y\right) dy.$$

Notons $u(t, x, f)$ la fonction

$$\begin{aligned} u(t, x, f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(y\right) q\left(t, x, y\right) dy = \mathbb{E}\left(f\left(B_t + x\right)\right) \\ &= \mathbb{E}(f(B_{t+s}) / B_s = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x + y\right) g\left(t, y\right) dy \end{aligned} \tag{2.7}$$

cette fonction vérife l'équation *backward* et le théorème de dérivation sous le signe intégral tel que

$$\begin{cases} u\left(0, x, f\right) = f\left(x\right) \\ -\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Pour calculer $\mathbb{E}\left(f\left(B_T\right)\right),$ il suffit de résoudre l'équation aux dérivées partielles (2.8) et de remarquer que $\mathbb{E}\left(f\left(B_T\right)\right) = u\left(T, 0, f\right).$ On peut écrire, en utilisant

$$\mathbb{E}\left(f\left(B_t + x\right)\right) = u\left(t, x, f\right),$$

$$\mathbb{E}\left(f\left(B_T + x\right)\right) - f\left(x\right) = u\left(T, x, f\right) - u\left(0, x, f\right) = \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}\left(s, x, f\right) ds = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(s, x, f\right) ds.$$

En remarquant que (utiliser (2.7)) et le théorème de dérivation sous le signe intégral)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(t, x, f\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f''\left(x + y\right) g\left(t, y\right) dy = u\left(t, x, f''\right) = \mathbb{E}\left(f''\left(B_t + x\right)\right), \tag{2.9}$$

on obtient

$$\mathbb{E}\left(f\left(B_T + x\right)\right) = f\left(x\right) + \frac{1}{2}\int_0^T \mathbb{E}\left(f''\left(B_s + x\right)\right) ds.$$

En appliquant le lemme d'Itô pour prouver que $u\left(t, x, f\right) = u\left(T - t, x, f\right)$ est solution du probleme suivant

$$\begin{cases} u\left(T, x\right) = f\left(x\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

et vérife $u\left(0, x, f\right) = \mathbb{E}\left(f\left(B_T + x\right)\right).$

Proposition 2.7 *Si f est une fonction de classe C_b^1 en temps et C_b^2, en espace*

$$\mathbb{E}\left(f\left(t, x + B_t\right)\right) = f\left(0, x\right) + \int_0^t \mathbb{E}\left[\frac{1}{2} f''_{xx}\left(s, x + B_s\right) + f'_t\left(s, x + B_s\right)\right] ds.$$

On peut généraliser ce résultat au processus X défini par $X_t = x + \mu t + \sigma B_t$.La fonction

$u(t,x,f)=\mathbb{E}(f(t,x+\mu t+\sigma B_t))$ vérifie

$$\frac{du}{dt}(t,x,f)=\frac{1}{2}\sigma^2 u(t,x,\partial_{xx}f)+\mu u(t,x,\partial_x f)+u(t,x,\partial_t f),$$

et $u(0,x,f)=f(x)$, on définit $\mathcal{L}$ le générateur du processus par l'opérateur

$$\mathcal{L}(f)=\frac{1}{2}\sigma^2\partial_{xx}f+\mu\partial_x f$$

Proposition 2.8 *Si f est une fonction de classe C_b^1 en temps et C_b^2, en espace*

$$\mathbb{E}(f(t,x+\mu t+\sigma B_t))=f(0,x)+\int_0^t\left[\mathcal{L}f(s,x+\mu s+\sigma B_s)+\partial_t f(s,x+\mu s+\sigma B_s)\right]ds$$

Notre objectif est de montrer comment représenter les solutions des EDP classique sous forme de processus aléatoires. Soit $(B_t,t\in\mathbb{R}_+)$ un MBS.

Remarque 2.15 ♦ *La solution de l'équation de la chaleur*(2.10) *n'est en réalité pas unique.*

♦ *Si u_0 n'est pas C^2, alors la solution en $t=0$ ne peut être C^2 en x. Pour être tout a' fait exact, on devrait remplacer la condition $u(0,x)=u_0(x)$ par*

$$\lim_{t\to 0}u(t,x)=u_0(x)$$

Lemme 2.2 *Soit u la solution de l'équation* (2.10)*. Pour tout $(T,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ fixé, le processus $(Y_t=u(T-t,B_t^x)),t\in[0,T]$ est une martingale. Par la formule d'Itô et le fait que $dB_s^x=dB_s$,*

$d\langle B^x\rangle_s = ds$, *en appliquant la formule d'Itô on obtient*

$$\begin{aligned}
Y_t - Y_0 &= u\left(T-t, B_t^x\right) - u\left(T, x\right) \\
&= \int_0^t -\frac{\partial u}{\partial t}\left(T-s, B_s^x\right) ds + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}\left(T-s, B_s^x\right) dB_s^x + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(T-s, B_s^x\right) d\langle B^x\rangle_s \\
&= \int_0^t \left(-\frac{\partial u}{\partial t}\left(T-s, B_s^x\right) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(T-s, B_s^x\right)\right) ds + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}\left(T-s, B_s^x\right) dB_s \\
&= \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}\left(T-s, B_s^x\right) dB_s
\end{aligned}$$

car u *satisfait l' ´equation* (2.10), *et on a* $\mathbb{E}\left(\int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}\left(T-s, B_s^x\right) dB_s\right) = \mathbb{E}\left(u\left(T-t, B_t^x\right) - u\left(T, x\right)\right) =$ 0. *Le processus* $\left(Y_t = u\left(T-t, B_t^x\right)\right),\ t \in [0, T]$ *est "donc" une martingale.*

Proposition 2.9 *Soit* u *la solution de l'équation* (2.10). *Pour tout* $(T, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, *on a*

$$u\left(T, x\right) = \mathbb{E}\left(u_0\left(B_T^x\right)\right) \tag{2.11}$$

Preuve. Par le lemme précédent et la condition initiale dans (2.8), on trouve

$$u\left(T, x\right) = \mathbb{E}\left(u\left(T, B_0^x\right)\right) = \mathbb{E}\left(Y_0\right) = \mathbb{E}\left(Y_T\right) = \mathbb{E}\left(u\left(0, B_T^x\right)\right) = \mathbb{E}\left(u_0\left(B_t^x\right)\right).$$

■

Remarque 2.16 ♦ *Le résultat suivant nous donne donc une* <u>*représentation probabiliste*</u> *de la solution de l'équation de la chaleur* (2.8). *Noter qu'on peut le reformuler de manière plus "classique"*

$$u\left(T, x\right) = \int_{\mathbb{R}} u_0\left(x\right) f_T\left(y-x\right) dy,$$

où f_T *est la densité de la loi* $\mathcal{N}\left(0, T\right)$. *La fonction* $K_T\left(x, y\right) = f_T\left(y-x\right)$ *est également appelée* *“**noyau de Green de l’équation de la chaleur**” en analyse.*

♦ *Noter qu’il est possible de montrer dans l’autre sens que la fonction u définie par* (2.11) *est solution de l’équation* (2.8).

Soit $(B_t,\ t \in \mathbb{R}^+)$ un mouvement brownien standard. On définit $\left(B_t^{t_0,x_0},\ t \in \mathbb{R}_+\right)$, le mouvement brownien partant au temps $t \geq 0$ du point $x_0 \in \mathbb{R}$ par

$$B_t^{t_0,x_0} = B_t - B_{t_0} + x_0,\ t \geq t_0$$

Résultat d’analyse : Equation de la chaleur rétrograde

Soient $T > 0$ et $u_0 \in C(\mathbb{R})$. Il existe alors une “**unique**” fonction $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ qui vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x),\ \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}, \\ u(T,x) = h(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.12}$$

Lemme 2.3 *Soit u la solution de l’´equation* (2.12)*. Pour tout* $(t_0, x_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}$ *fixé, le processus* $(u\left(t, B_t^{t_0,x_0}\right))$, $t \in [t_0, T]$ *est une martingale.*

Preuve. Par la formule d’Itô (utilisée sur l’intervalle de temps $[t_0, t]$), on a

$$\begin{aligned} u\left(t, B_t^{t_0,x_0}\right) - u(t_0,x_0) &= \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}\left(s, B_s^{t_0,x_0}\right) ds + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}\left(s, B_s^{t_0,x_0}\right) dB_s^{t_0,x_0} + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(s, B_s^{t_0,x_0}\right) d\langle B^{t_0,x_0}\rangle_s \\ &= \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}\left(s, B_s^{t_0,x_0}\right) dB_s \end{aligned}$$

car u satisfait l’équation (2.12). Le processus $(u\left(t, B_t^{t_0,x_0}\right))$, $t \in [t_0, T]$ est une martingale.

■

Proposition 2.10 *Soit u la solution de l'équation* (2.12)*. Pour tout* $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}$*, on a*

$$u(T, x) = \mathbb{E}\left(h\left(B_T^{t_0,x_0}\right)\right).$$

Preuve. Par le lemme précédent et la condition tarminale dans (2.12), on trouve que

$$u(t_0, x_0) = \mathbb{E}\left(u\left(t_0, B_0^{t_0,x_0}\right)\right) = \mathbb{E}\left(u\left(T, B_t^{t_0,x_0}\right)\right) = \mathbb{E}\left(h\left(B_T^{t_0,x_0}\right)\right)$$

■

2.6 Lien EDS ↔ EDP paraboliques (Formule de Feynman-Kac)

La formule de Feynman-Kac, montre qu'il y'a une relation entre les solutions des équations différentielles stochastiques et certaines équations aux dérivées partielles du second ordre linéaire.

Soient $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $(B_t,\ t \in \mathbb{R}^+)$ un mouvement brownien standard et $f, g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions conjointement continues en (t, x) et lipschitziennes en x. On pose $\left(X_t^{t_0,x_0},\ t \in [t_0, \infty[\right)$ la solution de l'EDS

$$dX_t = f(t, X_t)\, dt + g(t, X_t)\, dB_t \text{ et } X_{t_0} = x_0. \tag{2.13}$$

On suppose de plus qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$|g(t, x)| \geq K,\ \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},$$

Cette dernière hypothèse est l'hypothèse de "diffusion non-dégénérée".

Résultat d'analyse (EDP **parabolique**)

Soient $h \in C(\mathbb{R})$ et $T > 0$. Etant donné les hypothèses effectuées sur f et g, il existe une "unique" fonction $u \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ qui vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)\,ds + f(t,x)\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) + \dfrac{1}{2}g^2(t,x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = h(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.14}$$

Lemme 2.4 *Soit u la solution de l'équation (2.14). Pour tout $(t_0,x_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}$ fixé, le processus $(u\left(t, X_t^{t_0,x_0}\right))$, $t \in [t_0,T]$ est une martingale.*

Preuve. Par la formule d'Itô (utilisée sur l'intervalle de temps (t_0,t)), ona

$$\begin{aligned} u\left(t, X_t^{t_0,x_0}\right) - u(t_0,x_0) &= \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}\left(s, X_s^{t_0,x_0}\right) ds \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}\left(s, X_s^{t_0,x_0}\right) dX_s^{t_0,x_0} \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(s, X_s^{t_0,x_0}\right) d\langle X^{t_0,x_0}\rangle_s \end{aligned}$$

En utilisant le fait que X est solution de (2.14), on trouve

$$\begin{aligned} u\left(t, X_t^{t_0,x_0}\right) - u(t_0,x_0) &= \int_0^t \left(\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t}\left(s, X_s^{t_0,x_0}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(s, X_s^{t_0,x_0}\right) f\left(s, X_s^{t_0,x_0}\right) \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(s, X_s^{t_0,x_0}\right) g^2\left(s, X_s^{t_0,x_0}\right) \end{array} \right) ds \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}\left(s, X_s^{t_0,x_0}\right) g\left(s, X_s^{t_0,x_0}\right) dB_s \\ &= \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}\left(s, X_s^{t_0,x_0}\right) g\left(s, X_s^{t_0,x_0}\right) dB_s \end{aligned}$$

car u satisfait l'équation (2.14). Le processus $(u\left(t, B_t^{t_0,x_0}\right))$, $t \in [t_0,T]$ est une martingale.

■

Proposition 2.11 *(formule de Feynman-Kac)*

Soit u la solution de l'équation (2.14)*. Pour tout* $(t_0, x_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}$*, on a*

$$u(t_0, x_0) = \mathbb{E}\left(h\left(X_T^{t_0,x_0}\right)\right).$$

Preuve. Par le lemme précédent et la condition terminale dans (2.14), on obtient donc

$$u(t_0, x_0) = \mathbb{E}\left(u\left(t_0, X_0^{t_0,x_0}\right)\right) = \mathbb{E}\left(u\left(T, X_T^{t_0,x_0}\right)\right) = \mathbb{E}\left(h\left(X_T^{t_0,x_0}\right)\right)$$

■

Conclusion

Comme la solution analytique soit meilleure que celle de la méthode probabiliste, on peut dire que la méthode probabiliste donne une approximation acceptable de la solution.

L'utilisation de cette méthode est avantagées dans le cas de résolution des *EDPs* où la résolution par les méthodes analytiques implique une résolution des systèmes linéaires à grandes dimensions.

2.7 Application en finance (Modèle de Black et Scholes)

L'objectif de cette application est de comprendre comment modéliser un phénomène grâce à des **EDP** Il s'agit donc de faire le lien entre ces phénomènes et la manière dont ceux-ci sont pris en compte dans un modèle mathématique, en s'en tenant à un exemples simple et concrets. On suppose avoir un marché financier avec :

1. Un actif sans risque dont le prix S_0 vérifie $dS_0\left(t\right) = S_0\left(t\right) rdt$ où r est une constante

2. Un actif risqué dont le prix $S(t)$ vérifie

$$dS\left(t\right) = S\left(t\right)\left(bdt + \sigma dB_t\right),$$

où B est un mouvement Brownien, et b, σ des constantes. On étudie un actif contingent de payoff $h\left(S_T\right)$. Le cas d'un call Européen correspond à $h\left(x\right) = \left(x - K\right)^+$. Le prix d'un call de maturité T et de prix d'exercice K est une fonction $C\left(t, S\left(t\right)\right)$. On se constitue un portefeuille composé d'un call et de β_t parts de l'actif risqué. La valeur de ce portefeuille est

$$V_t = C\left(t, S_t\right) + \beta_t dS_t.$$

On suppose par la condition d'autofinancement que

$$dV_t = dC_t + \beta_t dS_t.$$

En utilisant la formule d'Itô, on a

$$dV_t = \left(\frac{\partial C}{\partial x} S_t b + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial 2x^2}\sigma^2 S_t^2\right) dt + \beta_t dS_t dt + \left(\frac{\partial C}{\partial x}\sigma S_t + \beta_t \sigma S_t\right) d\beta_t.$$

Le portefeuille est sans risque si $\dfrac{\partial C}{\partial x}\sigma S_t + \beta_t \sigma S_t = 0$, soit $\beta_t = -\dfrac{\partial C}{\partial x}$ et de rendement r si

$$dV_t = rV_t dt,$$

soit

$$dC_t + \beta_t dS_t = r\left(C_t + \beta_t S_t\right) dt$$

d'où, en remplaçant β par sa valeur

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS_t \frac{\partial C}{\partial x}\left(t, S_t\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial 2x^2}\sigma^2 S_t^2 + rC\left(t, S_t\right) = 0,$$

avec $C\left(T, S_T\right) = h\left(S_T\right)$. Soit, en notant que S_t est une variable aléatoire qui admet une densité strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ on a

$$\frac{\partial C}{\partial t}\left(t, x\right) + rx\frac{\partial C}{\partial x}\left(t, x\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial 2x^2}\sigma^2 x^2 - rC\left(t, S_t\right) = 0,\ \forall x \geq 0,\ \forall\ t \geq 0$$

avec $C\left(T, x\right) = h\left(x\right)$.

L'équation aux dérivées partielles peut être résolue par des méthodes classiques d'EDP.

Portefeuille dupliquant

On reprend l'étude de la valorisation d'un actif contingent de payoff $h\left(S_T\right)$ sur un sous jacent de dynamique

$$dS\left(t\right) = S_t\left(bdt + \sigma dW_t\right).$$

On note $C\left(t, S_t\right)$ la valeur de l'actif contingent à la date t. On constitue un portefeuille constitué de α_t parts de l'actif sans risque et γ_t parts de l'actif risqué. Sa valeur à l'instant t est $V_t := \alpha_t S_t^0 + \gamma_t S_t$. Par l'hypothèse d'autofinancement, on a

$$dV_t := \alpha_t dS_t^0 + \gamma_t dS_t.$$

Le portefeuille duplique l'actif contingent si

$$\alpha_t S_t^0 + \gamma_t S_t = C(t, S_t),$$

soit en identifiant les termes en dt et dW_t dans dV_t et dC_t : (on utilise l'unicité de la décomposition d'un processus d'Itô en processus à variation finie et martingale) : $\gamma_t S_t \sigma = \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) S_t \sigma,$,
soit $\gamma_t = \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t)$ et

$$\begin{aligned}\alpha_t S_t^0 + b\gamma_t S_t &= \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) S_t b + \frac{\partial C}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial 2x^2}\sigma^2 S_t^2 \\ &= \alpha_t r S_t^0 + S_t \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t).\end{aligned}$$

En utilisant $\alpha_t S_t^0 + \gamma_t S_t = C(t, S_t)$ on obtient $\alpha_t S_t^0 = C(t, S_t) - S_t \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t)$, d'où

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) S_t r + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial 2x^2}\sigma^2 S_t^2 + rC(t, S_t) = 0,$$

et $C(T, S_T) = h(S_T)$. Le processus S prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, résoudre l'équation précédente pour un call européen revient à étudier

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t}(t, x) + xr\frac{\partial C}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial 2x^2}\sigma^2 x^2 - rC(t, S_t) = 0, ,\forall x \geq 0 \\ C(T, x) = (x - K)_+ . = \max(x - K, 0). \end{cases} \tag{2.15}$$

pour résoudre cette équation, on se place sur un espace de probabilité pour laquelle le processus $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard et telle que le prix de l'actif S_t risqué vérifie

$$dS_t = S_t(bdt + \sigma dB_t).$$

L'opérateur $\mathcal{L}_t$ est alors indépendant du temps et vaut

$$\mathcal{L}_t = \mathcal{L}^{Black-Scholes} = \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) S_t r + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial 2x^2}\sigma^2 S_t^2$$

et on trouve par un calcul direct que le prix du call donnée par la formule

$$C(t, x) = x\mathcal{N}(d_1) - K \exp(-r(T-t))\mathcal{N}(d_2),$$

où

$$\mathcal{N}(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx,$$

et

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\ln\left(\frac{x}{K\exp(-r(T-t))}\right)\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}, d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

tel que $C_x(t, x) = \mathcal{N}(d_1)$ représente la couverture (le nombre de parts d'actif sous jacent utilisées pour répliquer l'option) est solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t}(t, x) + \mathcal{L}^{Black-Scholes} C(t, S_t) - rC(t, S_t) = 0, \text{, dans } [0, T] \times \mathbb{R}_+ \\ C(T, x) = (x-K)_+ . = \max(x-K, 0) . \ \forall x \geq 0. \end{cases}$$

Remarque 2.17 *En interprétant l'équation* (2.15), *(qui correspond à chercher f telle que* $\exp(-rt) h(t, X_t)$ *est une martingale) on voit que*

$$C(t, x) = \mathbb{E}\left(\exp(-r(T-t))(S_T - K)^+ / \mathcal{F}_t\right),$$

avec

$$dS_t = S_t \left(rdt + \sigma dB_t \right).$$

Cette remarque est fondamentale en finance.

La perspective immédiate de notre travail est de développer des applications.

Bibliographie

[1] B. Meftah. Cours sur les équations différentielles ordinaires, université 8 mai 1945 Guelma, 2021.

[2] R. Durrett, Stochastic Calculus. A practical introduction, CRC press 1996.

[3] I. Karatzas and S. E. Shreve, Brownian motion and Stochastic Calculus, Springer Verlag, 1991.

[4] D. Lamberton and B. Lapeyre. Introduction au CalculStochastique Appliqué à La Finance. Ellipses, édition marketing S.A, 1997.

[5] O. Lévèque. EPFL. Cours de Probabilités et Calcul stochastique. Semestre d'hiver 2004-2005.

[6] F. Sylvain, Formule de Feynman-Kac Approche Analytique et Probabiliste, Marché.Julien, 2001.