République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

Mlle BACIL Mayssa

Intitulé

Unicité et positivité de la solution d'un problème aux limites du second ordre.

Dirigé par :

Dr Lilia ZENKOUFI
Devant le jury

PRESIDENT	Dr S. BADI	Pr	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr L. ZENKOUFI	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr N. SELLAMI	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr Y. BOUATTIA	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2024

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة و إثبات وحدانية وإيجابية الحل غير المعدوم لمسالة حدية مرفقة بمعادلة تفاضلية من الدرجة الثانية. وذلك باستعمال مبدأ التقلص لباناخ و نظرية جيو-كراسنوسيلسكي.

تتكون المذكرة من مقدمة و وثلاثة فصول. في الأول ناقشنا و أشرنا إلى بعض أساسيات التحليل الدالي التي سيتم استعمالها فيما بعد. يقدم الفصل الثاني نتائج نظرية أساسية حول نظرية النقطة الثابتة، وقد قدمنا بعض النظريات الهامة حول نظرية النقطة الثابتة. و يخصص الفصل الثالث لدراسة مسألة حدية من الدرجة الثانية أين ترد الشروط في ثلاث نقاط من المجال، باستخدام مبدأ التقلص لباناخ ونظرية النقطة الثابتة لجيو-كراسنوسيلسكي. النتائج المحصل عليها تم توضيحها بواسطة أمثلة.

ننهي هذه المذكرة بقائمة من المراجع .

الكلمات المفتاحية : نظرية جيو-كراسنوسالسكي، مبدأ التقلص لباناخ، مسألة حدية، وحدانية الحل ، إيجابية الحل.

Table des matières

Remerciements

Avant tout, Je tiens à remercier ALLAH qui m'a permis de réaliser ce travail et m'a aidé à le terminer.

Je tiens à remercier mon encadreur Dr Zenkoufi Lilia, de m'avoir proposé ce sujet de recherche et d'avoir dirigé mon travail.

Je tiens également à remercier sincèrement les membres de jury de soutenance, d'avoir accepter de juger ce travail.

Je remercie aussi mes professeurs de l'école primaire, moyenne, lycée, et ceux de l'université 08 Mai 1945.

Abstract

The aim of this work is to study and to prove the uniqueness and the positivity of a nontrivial solution for a boundary problem generated by a second order differential equation, we used Banach's contraction principle and the Guo-Krasnosel'skii fixed point theorem.

This work contains an introduction and three chapters. In the first, we discuss the fundamental concepts of functional analysis that we will use in the following. In the second, we present essential theoretical results on the fixed point theory and some important theorems. The third chapter is based on the study of the uniqueness and positivity of the solution of a three point boundary value problem of second order, we used the Banach contraction principle and the Guo-Krasnosel'skii fixed point theorem.

The results obtained are illustrated by examples. We finalize this work by a bibliography.

Key words: Banach contraction principle, Boundary value problem, Guo-Krasnosel'skii fixed point theorem, Positivity of solution, Uniqueness of solution.

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier et de démontrer l'unicité et la positivité d'une solution non triviale pour un problème aux limites engendré par une équation différentielle du second ordre, nous avons utilisé le principe de contraction de Banach et le théorème de Guo-Krasnosel'skii du point fixe dans un cône.

Ce mémoire contient une introduction et trois chapitres. Dans le premier, nous abordons les concepts fondamentaux de l'analyse fonctionnelle que nous allons utiliser dans la suite. Dans le deuxième, nous présentons des résultats théoriques essentiels sur la théorie du point fixe et quelques théorèmes importants. Le troisième chapitre est basé sur l'étude de l'unicité et la positivité de la solution d'un problème aux limites du second ordre à trois points, en utilisant le principe de contraction de Banach et le théorème de Guo-Krasnosel'skii du point fixe dans un cône. Les résultats obtenus pour chaque chapitre sont illustrés par des exemples. On termine ce travail par une bibliographie.

Mots clés: Principe de contraction de Banach, Problème aux limites, Théorème de Guo-Krasnosel'skii du point fixe, Positivité de la solution, Unicité de la solution.

Introduction

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude d'un problème aux limites engendré par une équation différentielle ordinaire du second ordre à trois points, nous étudions l'unicité et la positivité de la solution en utilisant les théorèmes du point fixe tels que, le théorème de Guo-Krasnosel'skii, et le principe de contraction de Banach.

Certains problèmes en physique moderne et en technologie sont généralement décrits par des problèmes aux limites engendrés par des équations différentielles linéaires ou non linéaires. Quand ces équations satisfont des conditions aux limites en plus d'une valeur, le problème résultant est un problème aux limites à plusieurs points. L'étude de ces problèmes est d'actualité et plusieurs travaux et ouvrages sont consacrés à ce sujet, voir: $[1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...]$.

En analyse, un théorème de point fixe est un résultat qui affirme qu'une fonction f possède au moins un point fixe, avec quelques conditions sur f. Un point fixe d'une fonction f est définie dans un espace métrique X vers lui même, est un élément $x \in X$ qui vérifie $f(x) = x$. Ces théorèmes présentent un outil très utile en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.

Le théorème de Banach ou "Le principe de contraction Banach" est le théorème le plus simple du point fixe connue: "toute application contractante d'un espace métrique complet vers lui même possède un point fixe unique".

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même. Et de façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

En 1955, et pour la première fois, Krasnoselskii a élaboré son théorème du point fixe. Krasnoselski a joint les deux résultats de Banach et de Schauder afin d'entirer son théorème qui affirme que dans un convexe compact, toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est contractane et l'autre compacte admet un point fixe. Ce théorème est très efficace dans la résolution des équations différentielles non linéaires, il apporte des réponses aux problèmes d'existence et d'unicité.

Le théorème de point fixe de Guo-Krasnosel'skii dans un cône est un outil très important concentrés sur la recherche des conditions qui garentissent l'existence de solutions positives des problèmes aux limites, il a été l'objet de plusieurs articles de recherche et possède des très nombreuses applications intéressantes en analyse non linéaire.

De cette théorie découlent plusieurs applications qui constituent un domaine très actif de la rechèrche....

Remarquons que dans certains problèmes aux limites engendrés par des équations différentielles ordinaires, les conditions aux limites sont imposées localement ou non localement. Par exemple dans ce problème

$$\begin{cases} u''(t) + f\left(t,\ u(t),\ u'(t)\right) = 0, \\ u(0) = 0,\ \ u'(1) = 0. \end{cases}$$

Si la condition locale $u'(1) = 0$ est remplacée par la condition non locale $u(1) = u(\eta)$, $i.e$,

$$u(0) = 0 \ \text{ et } \ u(1) = u(\eta),$$

(où $\eta \in]0,1[$), alors le problème est dit un problème non-local.

Evidemment, le problème non-local donne de meilleurs résultats que le problème local. Dans le calcul numérique, il est plus difficile de déterminer la valeur de $u'(1)$ que celle de $\frac{u(\eta)-u(1)}{\eta-1}$. La condition non locale $u(1) = u(\eta)$, peut être écrite comme "une différence" $u(1) - u(\eta)$.

Pour plus de résultat sur l'existence, l'unicité et la positivité des solutions de problème aux limites non linéaires voir les références suivantes: $[1, 2, 3, 4, 5, 8...]$.

Passons maintenant à la description du plan de ce mémoire.

Le premier chapitre se compose notament des rappels de quelques résultats théoriques et notions de base de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisées dans les chapitres qui suivent.

Dans le deuxième chapitre nous allons présenter quelques résultats de la théorie du point fixe, où nous allons étudier et énoncer quelques théorèmes du point fixe, tels que le théorème de Banach, le théorème de Brower, le théorème de Schauder et le théorème de Guo-Krasnosel'skii dans un cône.

Ces éléments d'analyse on été pris de quelques livres et articles choisis, $[2, 9, 10, 11, 12, ...]$.

Dans le dernier chapitre nous allons étudier le problème aux limites du second ordre à trois points suivant:

$$\begin{cases} u''(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = \alpha u'(0), \ u(1) = \beta u(\eta), \end{cases}$$

où, $\eta \in]0, 1[$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et f est une fonction continue: $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

En utilisant le principe de contraction de Banach et le théorème de point fixe de Guo-Krasnosel'skii dans un cône, nous démontrons l'unicité et la positivité de la solution. Les résultats obtenus sont illustrés par des exemples.

Enfin, nous terminons ce mémoire par **une bibliographie**.

Chapitre 1

Quelques notions d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre nous allons rappeler quelques notions de base de l'analyse fonctionnelle et des résultats connus qu'on va utiliser dans la suite de notre travail.

1.1 Rappels

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé (e.v.n) sur un sous-corps $\mathbb{k}$ (en général $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), complet pour la distance issue de sa norme.

Soit V un espace vectoriel normé.

Définition 1.1 *(Ouvert).*

Un ensemble $O \subset V$ est ouvert dans V si $\forall x \in O$, $\exists\ \varepsilon$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset O$, avec $B(x, \varepsilon) = \{y \in V;\ ||x - y||_V < \varepsilon\}$ boule ouverte de centre x et de rayon ε.

Définition 1.2 *(Fermé).*

Un ensemble $F \subset V$ est fermé dans V si $V \backslash F$ est ouvert dans V.

Définition 1.3 *(Convergence).*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* V*.*

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $l \in V$ *si*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N;\ \|u_n - l\|_V \leq \varepsilon.$$

Définition 1.4 *(Convexe).*

On dit qu'une partie A *de* V *est convexe si pour tout* $x, y \in A$*, on a pour tout* $t \in [0,\ 1]$, $tx + (1-t)y \in A$*.*

Ce qui signifie que le segment joignant x *et* y *est entrièrement contenu dans* A*.*

Définition 1.5 *(Espace metrique complet)***.**

On dit que l'espace métrique (V, d) *est complet si et seulement si toute suite de Cauchy d'éléments de* V *converge dans* V*.*

Définition 1.6 *Soit* $I \subset \mathbb{R}$*,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *On dit que l'intervalle* I *est stable relativement à la fonction* f *lorsque* $f(I) \subset I$*.*

Définition 1.7 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* I*. On dit que* x *est un point fixe de* f *lorsque* $f(x) = x$*.*

En d'autres termes, les points fixes de f *sont les solutions, lorsqu'elles existent de l'équation* $f(x) = x$*.*

Définition 1.8 *(Suite de Cauchy).*

Soit (E, d) *un espace métrique et* $(x_n)_n$ *une suite d'élément de* E*.*

On dit que $(x_n)_n$ *est une suite de Cauchy si et seulement si:*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0 \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

Définition 1.9 *(Ensemble compact).*

Un ensemble $A \subset V$ *est compact si de toute suite d'éléments de* A*, on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de* A*.*

Proposition 1.1 *Si A est compact, alors A est fermé et borné.*

Proposition 1.2 *Si V est de dimension finie, alors A est compact si et seulement si A est fermé et borné.*

Proposition 1.3

1) *Toute suite convergente est de Cauchy.*
2) *Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.*
3) *Toute suite de Cauchy est bornée.*
4) *Toute suite de Cauchy qui possède une suite extraite convergente est convergente.*

Proposition 1.4 *Tout espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ normé de dimension finie est complet.*

Définition 1.10 *Une norme est une application définie sur V $(e.v.n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, notée $||.||_V$, et satisfaisant les trois propriétés suivantes*:

(i) $\|v\|_V = 0 \Leftrightarrow v = 0$,

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V, \|\lambda v\|_V = |\lambda| \ \|v\|_V$,

(iii) *Inégalité triangulaire*: $\forall v, w \in V, \|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V$.

Proposition 1.5

1) *Si V est compact et si A est une partie fermée de V, alors A est compacte.*

Définition 1.11 *Soit V un espace topologique séparé.*

Un sous-ensemble F de V est relativement compact si son adhérence $\overline{F}$ est compacte.

Le sous-ensemble F est dit précompact si son complété est compact.

Evidemment, lorsque V est lui-même complet, les deux notions sont équivalentes.

Définition 1.12 *Soit $||.||_{V_1}$, et $||.||_{V_2}$ deux normes sur V. On dit que ces deux normes sont équivalentes s'il existe c_1 et c_2 strictement positives telles que*

$$\forall v \in V, c_1 \|.\|_{V_2} \leq \|.\|_{V_1} \leq c_2 \|.\|_{V_2}.$$

Si $\|.\|_{V_1}$ *, et* $\|.\|_{V_2}$ *sont deux normes équivalentes sur* V*, on a l'équivalence:*

$$u_n \text{ converge vers } l \text{ suivant } \|.\|_{V_1} \Leftrightarrow u_n \text{ converge vers } l \text{ suivant } \|.\|_{V_2}.$$

Proposition 1.6 *Si* V *est de dimension finie, alors toutes les normes sont équivalentes.*

Proposition 1.7 *Soit* V *un espace vectoriel normé.*

La norme sur V *est une application continue, autrement dit la fonction* $\varphi : v \in V \longmapsto \|.\|_V \in \mathbb{R}$ *est continue.*

En effet, on a $\|\varphi(v) - \varphi(w)\| \leq \|v - w\|_V$ *et* φ *est lipschitzienne donc continue.*

Définition 1.13 *(Les espaces* L^P*).*

Soit $1 \leq p \leq +\infty$,

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable et } |f(x)|^p \in L^1(\Omega)\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = (\int_\Omega |f(x)|^p\, dx)^{\frac{1}{p}}.$$

Théorème 1.1 *(Convergence dominée)*[10].

Soit $f_n \in L^1(E)$*, une suite de fonctions sommable sur* E *telle que:*

1) *Pour presque tout* x*,* $f_n(x) \to f(x)$ *sur* E*.*

2) $|f_n| \leq g \in L^1(E)$*.*

Alors, $f \in L^1(E)$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$*.*

1.1.1 Applications continues d'un espace compact

Rappelons que toute fonction numérique continue sur un intervalle fermé borné atteint ses bornes inférieure et supérieure. Cette propriété implique que $f([a, b]) = [m, M]$ lorsque $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Définition 1.14 *(Continuité en un point).*

Soient I un intervalle, f une fonction définie sur I et $a \in I$.

On dit que f est continue en a lorsque f admet une limite en a égale à $f(a)$.

Définition 1.15 *(Continuité sur un intervalle).*

Soient I un intervalle, f une fonction définie sur I.

On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I.

Définition 1.16 *(Continuité absolue).*

Soit I un intervalle réel, une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est absolument continue si, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que pour toute suite finie $([a_n, b_n])_{n \leq N}$ de sous intervalle de I d'interieurs disjoints,

$$\sum_{n \geq 0} (b_n - a_n) < \eta \Rightarrow \sum_{n \geq 0} | f(b_n) - f(a_n) | < \varepsilon.$$

Propriètés:

− F absolument continue sur I alors, elle est continue sur I.

− F est absolument continue sur I si et seulement s'il existe une fonction intégrbale f sur I (au sens de Lebesgue) telle que:

$$\forall x \in I : F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt.$$

Définition 1.17 *(Continuité uniforme).*

Soit I un intervalle réel, une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue si,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I,\ \exists y \in I,\ \ | y - x | \leq \eta \Rightarrow | f(y) - f(x) | \leq \varepsilon.$$

Théorème 1.2 [4] *(Théorème des valeurs intermédiaires)*

Soit I un intervalle, a et b appartient à I avec $a < b$, f une application continue sur l'intervalle I, et λ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Alors, il existe (au moins) un réel c dans $[a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

(Autrement dit: l'équation, $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution dans $[a,b]$).

Théorème 1.3 [4] *(Théorème des accroissements finis)*

Soit f est une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe c de $]a,b[$ tel que:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

1.1.2 Théorème d'Arzéla-Ascoli

On va rappeler le théorème d'Arzéla-Ascoli qui concerne les compacts, qui constitue un outil fondamental de l'analyse fonctionnelle [7].

Définition 1.18 *Une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur un intervalle $I = [a,b]$ est uniformément bornée s'il existe un nombre M tel que*

$$|f_n(x)| \leq M, \quad x \in I.$$

Pour toute fonction f_n appartenant à la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et pour tout $x, y \in [a,b]$, la suite est équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$

$$\text{tel que} \quad |x-y| < \delta; \text{ alors, } |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

Définition 1.19 *(Equicontinuité).*

Soit $\mathcal{F}$ une famille d'applications $X \longrightarrow Y$ où X est un espace topologique et Y un espace métrique. On dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in X$ il existe un voisinage V_x de x dans X tel que:

$$d(f(x), f(y)) < \varepsilon \text{ pour tout } f \in F \text{ et tout } y \in V_x.$$

Si X est aussi métrique, $\mathcal{F}$ est dite uniformément équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous x, y vérifiant

$$d(x,y) < \alpha,$$

et tout $f \in \mathcal{F}$, on ait

$$d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Théorème 1.4 [4] *(Théorème d'Arzéla-Ascoli).*

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et supposons que X compact. Alors, une partie $\mathcal{F}$ inclue dans $C(X,Y)$ est relativement compacte (i.e, d'adhérence compact) pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si on a les deux conditions suivantes :

- La famille $\mathcal{F}$ est unifomément bornée sur X.

- La famille $\mathcal{F}$ est équicontinue en tout point de X.

Autre énoncé

Théorème 1.5 *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et supposons que X compact. Alors, une partie $\mathcal{F}$ incluse dans $C(X,Y)$ est relativement compacte (i.e, d'adhérence compact) pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si on a les deux conditions suivantes :*

- La famille $\mathcal{F}$ est équicontinue en tout point de X.

- Pour tout $x \in X$ l'ensemble des $f(x)$ pour $f \in \mathcal{F}$ est relativement compact;

i.e, $\mathcal{F}(x) = \{f(x), \quad f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact pour tout $x \in X$.

Définition 1.20 *Un opérateur est complètement continu s'il est continu et compact.*

Chapitre 2

Théorie du point fixe

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques résultats de la théorie du point fixe, nous étudions le théorème de Banach, le théorème de Brower, le théorème de Schauder et le théorème de Guo-Krasnosel'skii.

Ces théorèmes sont trés importants en mathématiques.

2.1 Théorèmes du point fixe.

Présentons maintenant quelques résultats de la théorie du point fixe.

Définition 2.1 *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, $f : E \to F$ une application et k un réel positif.*
On dit que f est lipschitzienne si:

$$\forall (x, y) \in E^2, \; d_F(f(x), f(y)) \leq k \; d_E(x, y).$$

Définition 2.2 *Une application contractante est une application lipschitzienne avec* $0 \leq k < 1$.

Théorème 2.1 *(Théorème de point fixe).*

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$.

Si $f(I) \subset I$ (I stable relativement à f), alors f admet (au moins) un point fixe sur I. (C'est-à-dire: il existe (au moins) un réel x de I tel que $f(x) = x$).

Preuve. *Considérons la fonction g définie sur $I = [a, b]$ par*

$$g(x) = f(x) - x,$$

Montrons que $0 \in g(I)$. On a:

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - a \in g(I), \\ g(b) &= f(b) - b \in g(I), \end{aligned}$$

Or, comme $f(I) \subset I$, on a:

$$f(a) \geq a \quad \text{et} \quad f(b) \leq b,$$

c'est -à-dire

$$g(a) \geq 0 \quad \text{et} \quad g(b) \leq 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $x \in I$ tel que

$$g(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x) = x.$$

■

2.1.1 Théorème de contraction de Banach.

C'est un théorème du point fixe métrique, il garentit l'existence d'un unique point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

Théorème 2.2 *Soient* (E, d) *un espace métrique complet et* $\varphi : E \longrightarrow E$ *une application contractante, (i.e, Lipschitzienne de rapport* $k < 1$*).*

Alors,

φ *admet un unique point fixe* $a \in E$.

De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$*, la suite itérée* $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$\begin{cases} x_0 \in E \quad \textit{quelconque} \\ x_{p+1} = \varphi(x_p), \end{cases}$$

converge vers a.

Preuve.

1. Existence:

Soit x_0 un point initial quelconque et (x_p) la suite itérée associée. On a

$$d(x_p, x_{p+1}) = d\left(\varphi(x_{p-1}), \varphi(x_p)\right) \quad p \geq 1.$$

Nous allons prouver que (x_p) est une suite de Cauchy dans E. Pour $p < q$, nous utilisons l'inégalité triangulaire

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + ... + d(x_{q-1}, x_q).$$

Puisque φ est une contraction, nous avons

$$\begin{aligned} d(x_p, x_{p+1}) &= d\left(\varphi(x_{p-1}), \varphi(x_p)\right) \\ &\leq kd(x_{p-1}, x_p), \quad p \geq 1. \end{aligned}$$

En répétant cette inégalité, nous obtenons

$$d(x_p, x_q) \leq \left(k^p + k^{p+1} + ... + k^{q-1}\right) d(x_0, x_1)$$

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq k^p \left(1 + k + ... + k^{q-p-1}\right) d(x_0, x_1) \\ &\leq k^p \left(\frac{1}{1-k}\right) d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Nous déduisons alors que (x_p) est une suite de Cauchy. Comme (E, d) est complet, la suite (x_p) converge vers un point limite $a \in E$.

Par ailleurs puisque φ est une contraction, nous avons:

$$a = \lim_{p\to\infty} x_p = \lim_{p\to\infty} \varphi(x_{p-1}) = \varphi\left(\lim_{p\to\infty} x_{p-1}\right) = \varphi(a).$$

nous avons donc prouvé que φ admet un point fixe a dans E ($i.e,\ \varphi(a) = a$).

2. Unicité:

Supposons qu'il existe $a, b \in E$, $a \neq b$, tels que nous avons $\varphi(a) = a$ et $\varphi(b) = b$. Alors,

$$d(a, b) = d(\varphi(a), \varphi(b)) \leq kd(a, b),$$

ce qui implique que: $d(a, b) = 0$, i.e, $a = b$. (puisque $k < 1$) . ■

Les hypothèses de ce théorème sont essentielles et si nous en négligeons seulement une, le point fixe n'existe pas.

Contre-exemples.

Les exemples suivant montrent que chacune des hypothèses du théorème est réellement nécessaire.

(**1**). X n'est pas stable relativement à f :

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, définie sur $X = [0, 1]$.

Or, X est fermé dans $\mathbb{R}$ et complet car $\mathbb{R}$ est complet.

De plus,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \\ \sup_{x\in X}\left|f^{'}(x)\right| &< 1 \Rightarrow f \text{ est contractante.} \end{aligned}$$

Mais f n'a pas du point fixe car

$$f([0,1]) = \left[1, \sqrt{2}\right],$$

$i.e$; X n'est pas stable par f.

(**2**). f n'est pas contractante:

Soit $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, définie sur $X = [0, \infty[$.

Or, $f : X \to X$ et X est un fermé de $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est complet donc X est complet.

Mais,

$$\sup_{x\in X}|f'(x)| = 1$$

donc f n'est pas contractante, alors f n'a pas du point fixe.

(**3**).

Soit $f(x) = \frac{\sin(x)}{2}$, définie sur $X = \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.

On a,

$$\begin{aligned} f\left(\left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right) &= \left]0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \subset \left]0, \frac{\pi}{4}\right], \\ \sup_{x\in X}\left|f^{'}(x)\right| &= \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow f \text{ est contractante.} \end{aligned}$$

Mais, X n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc n'est pas complet, alors f n'a pas du point fixe.

2.1.2 Théorème de Brouwer.

C'est un théorème du point fixe topologique, il garentit l'existence (mais pas nécessairement l'unicité) d'un point fixe pour une fonction continue sur une boule fermé dans un espace de dimension finie.

Théorème 2.3 *Soit K une partie non vide, compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to K$ une fonction continue, alors il existe $x \in K$ tel que $f(x) = x$.*

Remarque 2.1 *Les parties convexes et compactes de $\mathbb{R}$ sont les segments.*

Dans le cas $n = 1$ le théorème de Brouwer prend donc la forme particulière suivante:

Théorème 2.4

Si $f : [a, b] \to [a, b]$ est continue, alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Preuve. Si f est continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ lui-même, la fonction

$g : x \longmapsto f(x) - x \geq 0$ est continue, prend en a la valeur $f(a) - a \geq 0$ et en b la valeur $f(b) - b \leq 0$.

D'après le *Théorème des valeurs intermédiaires*, la fonction g s'annule en un point x_0, qui est un point fixe de f. ■

Remarque 2.2 1. *L'hypothèse " I fermé " n'est là que pour assurer que $x_0 \in I$. Si on sait déjà, par ailleurs, que $x_0 \in I$ (en pratique, on a parfois déjà calculé ℓ en résolvant l'équation $f(x_0) = x_0$), cette hypothése devient inutile.*

2. *Le théorème du point fixe ne s'applique pas si l'on remplace l'hypothèse "f contractante sur I" par l'hypothèse "f 1-lipschitzienne sur I".*

Voici un ***contre-exemple*** *:*

Soit, $I = [1, +\infty[$ et

$$f : I \to I$$

telle que,

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

Soient x et y dans I avec $x < y$.

Comme la fonction f est croissante sur $[1, +\infty[$, on a :

$$|f(y) - f(x)| \leq f(y) - f(x)$$

donc,

$$|f(y) - f(x)| \leq y - x + \frac{x - y}{xy}$$

alors,

$$|f(y) - f(x)| \leq y - x \leq |y - x| .$$

Ce qui prouve que f est 1-lipschitzienne sur I.

Cependant f n'a pas de point fixe sur I. (L'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution)

2.1.3 Théorème de Schauder.

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Théorème 2.5 [11]

Soient E un espace de Banach et $K \subset E$ convexe et compact. Alors toute application continue $f : K \to K$ possède un point fixe.

Exemple 2.1 *Etude de la convergence de la suite définie par:*

$$\begin{cases} u_0 \in [-1, +\infty[\\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

On utilisant le théorème suivant:

Théorème 2.6 [12] *Soit g une fonction continue définie sur un intervalle I. On suppose de plus que l'intervalle I est stable par f.*

Si la suite récurrente (u_n) *converge, c'est nécessairement vers un point fixe de* f.
On peut introduire l'application f *définie sur* $[-1,+\infty[$ *par*:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1+x}$$

Point fixe *de* f:

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = x,\ \text{avec } x \geq 0$$

on a

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

On montre facilement que f *est dérivable sur* $]-1,+\infty[$, *croissante sur* $[-1,+\infty[$, *puis que*:

$$f([-1,+\infty[) = [0,+\infty[\subset [-1,+\infty[$$

L'intervalle $I = [-1,+\infty[$ *est donc stable et la suite* (u_n) *est bien définie.*
De plus:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2}.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,\ |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b-a|.$$

Donc, f *est* $\frac{1}{2}$*-lipschitzienne sur* I, *donc contractante sur* I.
En outre:

$$f(\mathbb{R}_+) = [1,+\infty[\subset \mathbb{R}_+.$$

Donc, $\mathbb{R}_+$ *est stable par* f .
D'après le théorème du point fixe, la suite (u_n) *définie par*

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

converge donc vers λ.

Enfin, si $u_0 \in [-1, \infty]$ alors $u_1 \in \mathbb{R}_+$ et d'après ce qui précède (u_n)converge encore vers λ.

2.2 Théorème du point fixe dans un cône.

Dans l'ouvrage [7], D. Guo, V. Lakshmikantham a démontré le théorème de Guo-Krasnosel'skii qui est un des plus important outils concentrés sur la recherche des conditions qui garentissent l'existence de solutions positives des problèmes aux limites, il a été l'objet de plusieurs articles de recherche et possède des très nombreuses applications intéressantes en analyse non linéaire.

Définition 2.3

Soit E un espace de Banach. Un sous ensemble convexe, fermé et non vide $K \subset E$ est un cône s'il vérifie les deux conditions suivantes

(i) $x \in K$ *et* $\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in K$.

(ii) $x \in K$ *et* $-x \in K \Rightarrow x = 0$.

Théorème 2.7 *(Guo-Krasnosel'skii)*

E un espace de Banach et $K \subset E$ un cône. Supposons que Ω_1, Ω_2 deux sous ensembles ouverts de E avec $0 \in \Omega_1$, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ et soit

$$\mathcal{A} : K \cap \left(\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1\right) \to K,$$

un opérateur complètement continu telles que:

(i) $\|\mathcal{A}u\| \leq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|\mathcal{A}u\| \geq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$; *ou*

(ii) $\|\mathcal{A}u\| \geq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|\mathcal{A}u\| \leq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$.

Alors $\mathcal{A}$ admet un point fixe dans $K \cap \left(\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1\right)$.

Chapitre 3

Etude d'un problème aux limites du second ordre à trois points

Dans ce chapitre, nous étudions l'unicité et la positivité de la solution d'un problème aux limites engendré par une équation différentielle ordinaire du second ordre à trois points, en utilisant le principe de contraction de Banach et le théorème de Guo-Krasnosel'skii du point fixe dans un cône.

Inspiré par les travaux [6] et [9] "qui ont étudié l'éxistence, l'unicité et la positivité de la solution non triviale des problème aux limites à trois points", nous allons étudier le problème aux limites du second ordre à trois points suivant:

$$\begin{cases} u''(t) + f(t, u(t)) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) = \alpha u'(0), \ u(1) = \beta u(\eta) \end{cases} \tag{3.1}$$

où, $\eta \in \left]0,1\right[$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et f une fonction continue : $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Dans la section suivante, nous allons donner l'expresion de la solution du problème linéaire et quelques propriétés de la fonction de Green $G(t,s)$, ainsi que l'opérateur intégral associé et quelques définitions de base nécessaires. Dans la troizième section, nous démontrons les résultats d'unicité de la solution non triviale du problème par utilisation du principe de contraction de Banach, nous appliquons le théorème d'Arzéla-Ascoli pour démontrer que l'opérateur intégral est complètement continu. Dans la quatrième section, nous employons le théorème de Guo-Krasnosel'skii pour étudier l'existence d'au moins une solution positive du problème, dans le cas où f est super-linéaire ou sous-linéaire. Les résultats obtenus sont illustrés par des exemples à la fin du chapitre.

3.1 Préliminaires

Nous allons introduire quelques concepts préliminaires que nous allons utiliser.

Soit l'espace de Banach $E = C[0,1]$, muni de la norme $\|u\|_E = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$.

Lemme 3.1 [6, 9]

Soit $y \in L^1[0,1]$, si $\beta(\eta+\alpha) \neq \alpha+1$, alors le problème aux limites à trois points

$$\begin{cases} u''(t) + y(t) = 0, & 0 < t < 1, \\ u(0) = \alpha u'(0), & u(1) = \beta u(\eta), \end{cases} \tag{3.2}$$

a une solution unique

$$u(t) = \frac{1}{(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)} \int_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds, \tag{3.3}$$

où

$$G(t,s) = \begin{cases} (s+\alpha)\left[(1-t) + \beta(t-\eta)\right], & 0 \le s \le t \le 1,\ 0 \le s \le \eta < 1, \\ (s+\alpha)(1-t) + \beta(t-s)(\eta+\alpha), & 0 < \eta \le s \le t \le 1, \\ (t+\alpha)\left[(1-s) + \beta(s-\eta)\right], & 0 \le t \le s \le \eta < 1, \\ (t+\alpha)(1-s), & 0 \le t \le s \le 1,\ 0 < \eta \le s \le 1. \end{cases}$$

Preuve. D'après l'équation dans (3.2) nous avons $u''(t) = -y(t)$.

Pour $t \in [0,1]$ en intégrant de 0 à t, nous obtenons ce résultat

$$u'(t) = -\int_0^t y(s)ds + C_1.$$

donc

$$u\left(t\right) = -\int_0^t \left(t-s\right) y\left(s\right) ds + C_1 t + C_2,$$

on a:

$$u(0) = C_2.$$

et

$$u'(0) = C_1.$$

donc, de la condition

$$u\left(0\right) = \alpha u^{'}\left(0\right),$$

on trouve que

$$C_2 = \alpha C_1.$$

Nous avons

$$u\left(1\right) = -\int_0^1 \left(1-s\right) y\left(s\right) ds + C_1 + C_2,$$

$$u\left(\eta\right) = -\int_0^\eta \left(\eta-s\right) y\left(s\right) ds + C_1 \eta + C_2,$$

alors, de

$$u\left(1\right) = \beta u\left(\eta\right),$$

et

$$C_2 = \alpha C_{1,}$$

nous avons

$$-\int_0^1 (1-s)\,y(s)\,ds + C_1 + \alpha C_1 = \beta(-\int_0^\eta (\eta-s)\,y(s)\,ds + C_1\eta + \alpha C_1)$$

$$C_1((\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)) = \int_0^1 (1-s)\,y(s)\,ds - \beta\int_0^\eta (\eta-s)\,y(s)\,ds$$

$$C_1 = \frac{1}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_0^1 (1-s)\,y(s)\,ds$$
$$-\frac{\beta}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_0^\eta (\eta-s)\,y(s)\,ds,$$

remplaçant C_1 et C_2 dans

$$u(t) = -\int_0^t (t-s)\,y(s)\,ds + C_1 t + C_2,$$

nous obtenons

$$u(t) = -\int_0^t (t-s)\,y(s)\,ds + \left(\frac{1}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_0^1 (1-s)\,y(s)\,ds\right.$$
$$\left.-\frac{\beta}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_0^\eta (\eta-s)\,y(s)\,ds\right)t$$
$$+\alpha\left(\frac{1}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_0^1 (1-s)\,y(s)\,ds\right.$$
$$\left.-\frac{\beta}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_0^\eta (\eta-s)\,y(s)\,ds\right).$$

Par conséquent, le problème aux limites à trois points (3.2) a une solution unique

$$u(t) = -\int_0^t (t-s)\,y(s)\,ds + \frac{t+\alpha}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_0^1 (1-s)\,y(s)\,ds$$
$$-\frac{\beta(t+\alpha)}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_0^\eta (\eta-s)\,y(s)\,ds,$$

$i.e,$

$$u(t) = -\int_0^t (t-s)\,y(s)\,ds + \frac{t+\alpha}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_\eta^1 (1-s)\,y(s)\,ds$$
$$+\frac{t+\alpha}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_0^\eta [(1-s)+\beta(s-\eta)]\,y(s)\,ds.$$

Supposons que $\eta > t$, alors

$$u(t) = -\int_0^t (t-s)\,y(s)\,ds + \frac{t+\alpha}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_\eta^1 (1-s)\,y(s)\,ds$$
$$+\frac{t+\alpha}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_0^t [(1-s)+\beta(s-\eta)]\,y(s)\,ds$$
$$+\frac{t+\alpha}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_t^\eta [(1-s)+\beta(s-\eta)]\,y(s)\,ds,$$

donc

$$u(t) = \frac{1}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_0^t (s+\alpha)[(1-t)+\beta(t-\eta)]\,y(s)\,ds$$
$$+\frac{t+\alpha}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_\eta^1 (1-s)\,y(s)\,ds$$
$$+\frac{t+\alpha}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_t^\eta [(1-s)+\beta(s-\eta)]\,y(s)\,ds.$$

Maintenant, si $\eta < t$

$$u(t) = -\int_0^\eta (t-s)\,y(s)\,ds - \int_\eta^t (t-s)\,y(s)\,ds$$
$$+\frac{t+\alpha}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_\eta^1 (1-s)\,y(s)\,ds$$
$$+\frac{t+\alpha}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_0^\eta [(1-\beta\eta)-(1-\beta)s]\,y(s)\,ds,$$

alors

$$
\begin{aligned}
u(t) \;&=\; -\int_0^{\eta}(t-s)\,y(s)\,ds-\int_{\eta}^{t}(t-s)\,y(s)\,ds \\
&\quad+\frac{t+\alpha}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_{\eta}^{t}(1-s)\,y(s)\,ds \\
&\quad+\frac{t+\alpha}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_{t}^{1}(1-s)\,y(s)\,ds \\
&\quad+\frac{t+\alpha}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_{0}^{\eta}\left[(1-\beta\eta)-(1-\beta)\,s\right]y(s)\,ds,
\end{aligned}
$$

donc,

$$
u(t)=\frac{1}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_0^{\eta}(s+\alpha)\left[(1-t)+\beta(t-\eta)\right]y(s)\,ds
$$

$$
+\frac{1}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_{\eta}^{t}\left[(s+\alpha)(1-t)+\beta(t-s)(\eta+\alpha)\right]y(s)\,ds
$$

$$
+\frac{t+\alpha}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_{t}^{1}(1-s)\,y(s)\,ds.
$$

Par conséquent,

$$
u(t)=\frac{1}{(\alpha+1)-\beta(\eta+\alpha)}\int_0^1 G(t,s)\,y(s)\,ds,
$$

où

$$
G(t,s)=\begin{cases}
(s+\alpha)\left[(1-t)+\beta(t-\eta)\right], & 0\leq s\leq t\leq 1,\ 0\leq s\leq \eta<1,\\
(s+\alpha)(1-t)+\beta(t-s)(\eta+\alpha), & 0<\eta\leq s\leq t\leq 1,\\
(t+\alpha)\left[(1-s)+\beta(s-\eta)\right], & 0\leq t\leq s\leq \eta<1,\\
(t+\alpha)(1-s), & 0\leq t\leq s\leq 1,\ 0<\eta\leq s\leq 1.
\end{cases}
$$

Ceci achève la démonstration. ■

Nous avons besoin de quelques propriétés de la fonction $G(t,s)$.

Lemme 3.2

Pour tous $t \in [0,\tau]$, $s \in [0,1]$, $\alpha > 0$ *et* $0 < \beta < 1$ *nous avons*

$$0 \leq \gamma G(s,s) \leq G(t,s) \leq \frac{2(1+\alpha)}{\alpha} G(s,s),$$

où

$$\gamma = \min\left\{\beta(1-\eta), 1-\tau, \frac{\alpha}{1+\alpha}\right\}.$$

Preuve. Soit $t, s \in [0,1]$.

Pour: $0 \leq s \leq t \leq 1$, $0 \leq s \leq \eta < 1$, nous avons

$G(t,s) = (s+\alpha)[(1-t)+\beta(t-\eta)] > 0$, *i.e*,

$$G(t,s) = (s+\alpha)[(1-t)+\beta(t-\eta)] = (s+\alpha)[(1-\beta\eta)-t(1-\beta)],$$

alors,

$$G(t,s) \geq (s+\alpha)[(1-\beta\eta)-(1-\beta)],$$

$$G(t,s) \geq (s+\alpha)[1-\beta\eta-1+\beta],$$

$$G(t,s) \geq (s+\alpha)\beta(1-\eta) > 0.$$

Et

$$G(t,s) = (s+\alpha)[(1-t)+\beta(t-\eta)],$$

$$G(t,s) = (s+\alpha)[(1-\beta\eta)-t(1-\beta)],$$

i.e,

$$G(t,s) \leq (s+\alpha)[(1-\beta\eta)-s(1-\beta)],$$

donc

$$G(t,s) \leq (s+\alpha)[(1-s)+\beta(s-\eta)] = G(s,s).$$

Pour: $0 < \eta \leq s \leq t \leq 1$, nous avons

$(s+\alpha)(1-t) \geq 0$ et $\beta(t-s)(\eta+\alpha) \geq 0$, alors

$$G(t,s) = (s+\alpha)(1-t) + \beta(t-s)(\eta+\alpha) \geq 0.$$

Et

$$G(t,s) = (1-t)(s+\alpha) + \beta(t-s)(\eta+\alpha),$$

$i.e$,

$$G(t,s) \leq (1-s)(s+\alpha) + \beta(1-s)(\eta+\alpha),$$

$$G(t,s) \leq (1-s)(s+\alpha+\beta\eta+\beta\alpha),$$

$$\leq (1-s)(1+\alpha+1+\alpha),$$

$$\leq 2(1-s)(1+\alpha)\frac{s+\alpha}{s+\alpha},$$

$$\leq 2(1-s)(s+\alpha)\frac{1+\alpha}{\alpha},$$

donc,

$$G(t,s) \leq \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}G(s,s).$$

Pour: $\quad 0 \leq t \leq s \leq \eta < 1$,

$$G(t,s) = (t+\alpha)[(1-s) + \beta(s-\eta)] = (t+\alpha)[(1-\beta\eta) - s(1-\beta)],$$

$$\geq (t+\alpha)\beta(1-\eta) > 0.$$

Et

$$G(t,s) = (t+\alpha)[(1-s) + \beta(s-\eta)],$$

$$\leq (s+\alpha)[(1-s) + \beta(s-\eta)] = G(s,s).$$

Pour: $0 \leq t \leq s \leq 1$, $0 < \eta \leq s \leq 1$, nous avons

$$G(t,s) = (t+\alpha)(1-s) \geq 0.$$

Et

$$G(t,s) = (t+\alpha)(1-s),$$

$$\leq (s+\alpha)(1-s) = G(s,s).$$

Par conséquent

$$0 \leq G(t,s) \leq 2\frac{1+\alpha}{\alpha} G(s,s), \quad \forall t,s \in [0,1].$$

Maintenant pour: $0 \leq t \leq \tau \leq 1$ nous avons

Pour: $0 \leq s \leq t \leq 1$, $0 \leq s \leq \eta < 1$,

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)} = \frac{(s+\alpha)\left[(1-t)+\beta(t-\eta)\right]}{(s+\alpha)\left[(1-s)+\beta(s-\eta)\right]},$$

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)} = \frac{(1-t)+\beta(t-\eta)}{(1-s)+\beta(s-\eta)},$$

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)} = \frac{(1-\beta\eta)-t(1-\beta)}{(1-\beta\eta)-s(1-\beta)},$$

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)} \geq \frac{1-\beta\eta-(1-\beta)}{1},$$

$$\geq \beta(1-\eta),$$

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)} \geq \beta(1-\eta).$$

Pour: $0 < \eta \leq s \leq t \leq \tau \leq 1$,

$$G(t,s) = (1-t)(s+\alpha) + \beta(t-s)(\eta+\alpha),$$

$$\geq (1-t)(s+\alpha)\frac{1-s}{1-s},$$

$i.e,$

$$G(t,s) \geq \frac{1-t}{1-s} G(s,s),$$

$$G(t,s) \geq (1-\tau) G(s,s).$$

Pour: $\quad 0 \leq t \leq s \leq \eta < 1,$

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)} = \frac{(t+\alpha)\left[(1-s)+\beta(s-\eta)\right]}{(s+\alpha)\left[(1-s)+\beta(s-\eta)\right]},$$

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)} = \frac{t+\alpha}{s+\alpha},$$

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)} \geq \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

Pour: $\quad 0 \leq t \leq s \leq 1,\ 0 < \eta \leq s \leq 1,$

$$G(t,s) = (t+\alpha)(1-s),$$

$$G(t,s) \geq \alpha(1-s)\frac{s+\alpha}{s+\alpha},$$

$$G(t,s) \geq (1-s)(s+\alpha)\frac{\alpha}{s+\alpha},$$

$$G(t,s) \geq \frac{\alpha}{1+\alpha} G(s,s).$$

Posons

$$\gamma = \min\left\{\beta(1-\eta), 1-\tau, \frac{\alpha}{1+\alpha}\right\}.$$

Donc,

$$G(t,s) \geq \gamma G(s,s), \ \forall t,s \in [0,1].$$

Par conséquent,

$$0 \leq \gamma G(s,s) \leq G(t,s) \leq \frac{2(1+\alpha)}{\alpha} G(s,s), \quad \forall t,s \in [0,1].$$

$\blacksquare$

Définition 3.1

Définissons l'opérateur intégral $T : E \to E$, *par*

$$Tu\,(t) = \frac{1}{(\alpha + 1) - \beta\,(\eta + \alpha)} \int_0^1 G\,(t, s)\, f\,(s, u\,(s))\, ds \tag{3.4}$$

D'après le Lemme 3.1, *la fonction* $u(t) \in E$ *est une solution du problème* (3.1) *si et seulement si, l'opérateur* T *a un point fixe dans* E ($Tu\,(t) = u(t)$).

3.2 Unicité de la solution non triviale.

En appliquant le théorème de la contraction de Banach, nous allons prouver le résultat de l'unicité.

Théorème 3.1

Supposons qu'il existe une fonction positive $k \in L^1\left([0, 1], \mathbb{R}_+\right)$, *telles que*

$$|f\,(t, u) - f\,(t, v)| \leq k\,(t)\,|u - v|\,, \quad \forall u, v \in \mathbb{R},\ t \in [0, 1]\,,$$

et

$$C = \frac{2\,(1 + \alpha)}{\alpha\,|(\alpha + 1) - \beta\,(\eta + \alpha)|} \int_0^1 G\,(s, s)\, k\,(s) < 1.$$

alors, le problème aux limites (3.1) *a une solution unique dans* E.

Preuve. Nous avons

$$Tu\,(t) = \frac{1}{(\alpha + 1) - \beta\,(\eta + \alpha)} \int_0^1 G\,(t, s)\, f\,(s, u\,(s))\, ds.$$

Nous allons prouver que T est une contraction.

Soient $u, v \in E$, alors

$$|Tu\,(t) - Tv\,(t)| \leq \frac{1}{|(\alpha + 1) - \beta\,(\eta + \alpha)|} \int_0^1 G_1\,(s)\, |f\,(s, u\,(s)) - f\,(s, v\,(s))|\, ds,$$

comme $G(t,s) \leq \frac{2(1+\alpha)}{\alpha} G(s,s)$, donc

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq \frac{2(1+\alpha)}{\alpha\,|(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)|} \int_0^1 G(s,s)\,[k(s)\,|u(s) - v(s)|]\,ds,$$

Alors,

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq \|u - v\| \frac{2(1+\alpha)}{\alpha\,|(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)|} \int_0^1 G(s,s)\,k(s)\,ds.$$

Par conséquent,

$$\|Tu - Tv\|_E \leq C\,\|u - v\|_E\,.$$

Alors T est une contraction, donc il admet un point fixe unique qui est la solution unique du problème aux limites (3.1) . ■

3.3 Positivité de la solution

Nous faisons les hypothèses supplémentaires suivantes:

$(Q1)$: $f(t,u) = a(t) f_1(u)$ où $a \in C([0,1], \mathbb{R}_+)$ et $f_1 \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.

$(Q2)$: $\int_0^1 G(s,s)\,a(s)ds > 0$.

Pour établir l'existence d'une solution positive du problème aux limites (3.1) , nous utilisons le théorème 2.7 de Guo–Krasnosel'skii.

Le résultat principal de cette section est le suivant:

Théorème 3.2

Supposons que $(Q1)$ *et* $(Q2)$ *sont vérifiées,* $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, *et supposons que*

$$f_0 = \lim_{|u|\to 0} \frac{f_1(u)}{|u|},$$

$$f_\infty = \lim_{|u|\to \infty} \frac{f_1(u)}{|u|}.$$

Alors, le problème (3.1) *a au moins une solution positive dans le cas*:

(*i*) $f_0 = 0$ *et* $f_\infty = \infty$ (*super-linéaire*), *ou*

(*ii*) $f_0 = \infty$ *et* $f_\infty = 0$ (*sous-linéaire*).

Lemme 3.3

Supposons que $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$ *et que* $(Q1)$ *et* $(Q2)$ *sont vérifiées et si* u *est une solution du problème aux limites* (3.1), *alors* u *est positive et vérifie*

$$\min_{t\in[0,\tau_2]} u(t) \geq \gamma \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} \|u\|_E.$$

où

$$\gamma = \min\left\{\beta(1-\eta), 1-\tau, \frac{\alpha}{1+\alpha}\right\}.$$

Preuve. Si u est une solution de (3.1) alors $Tu = u$.

Pour tout $t \in [0,1]$,

$$u(t) = \frac{1}{(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)} \int_0^1 G(t,s) a(s) f_1(u(s)) ds.$$

En appliquant le *lemme* 3.2, nous trouvons

$$u(t) \leq 2\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) \frac{1}{(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)} \int_0^1 G(s,s) a(s) f_1(u(s)) ds,$$

donc

$$\|u\|_E \leq 2\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) \frac{1}{(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)} \int_0^1 G(s,s) a(s) f_1(u(s)) ds.$$

D'autre part, pour tous $t \in [0,\tau]$

$$u(t) \geq \gamma \frac{1}{(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)} \int_0^1 G(s,s) a(s) f_1(u(s)) ds,$$

$$u(t) \geq \gamma \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} \|u\|_E.$$

Par conséquent,

$$\min_{t\in[0,\tau]} u(t) \geq \gamma \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} \|u\|_E.$$

Ceci achève la démonstration. ■

Définition 3.2 *Définissons l'opérateur integral* T

$$Tu(t) = \frac{1}{(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)} \int_0^1 G(t,s)\, a(s)\, f_1(u(s))\, ds.$$

Définition 3.3 *Pour* $\alpha > 0$ *et* $0 < \beta < 1$ *nous définissons le cône* K *par*

$$K = \left\{ u \in E,\ u(t) \geq 0,\ \min_{t\in[0,\tau]} u(t) \geq \gamma \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} \|u\| \right\}.$$

Lemme 3.4 K *est un sous ensemble convexe fermé et non vide de* E.

Preuve. De la définition de K, il est clair que K est fermé et non vide. Montrant que K est convexe.

(1) : $\forall x \geq 0,\ y \geq 0$ et $\forall t \in [0,1] \Rightarrow (1-t)x + ty \geq 0.$

(2) : Nous avons

$$\|(1-t)x + ty\|_E \leq (1-t)\|x\|_E + t\|y\|_E,$$

$$\|(1-t)x + ty\|_E \leq \frac{2(1+\alpha)}{\gamma\alpha} \min_{t\in[0,\tau]} [(1-t)x(t) + ty(t)].$$

$i.e$,

$$\min_{t\in[0,\tau]} [(1-t)x(t) + ty(t)] \geq \gamma \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} \|(1-t)x + ty\|_E.$$

Alors, $(1) + (2) \Rightarrow (1-t)x + ty \in K \Rightarrow K$ est un sous ensemble convexe.

(i) $\forall x \in K$ et $\lambda \geq 0$,

Nous avons

$$\lambda x \geq 0 \text{ et } \|\lambda x\|_E \leq \lambda \|x\|_E \leq \frac{2(1+\alpha)}{\gamma\alpha} \min_{t\in[0,\tau]} (\lambda x(t)),$$

donc

$$\min_{t\in[0,\tau]} (\lambda x(t)) \geq \gamma \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} \|\lambda x\|_E.$$

Alors,

$$\lambda x \in K.$$

(ii) $\forall x \in K$ et $-x \in K$, nous avons $x \geq 0$ et $-x \geq 0$ alors, $0 \leq x \leq 0$ $i.e$, $x = 0$.

K est un sous ensemble convexe, fermé et non vide de $C[0,1]$ et vérifie les deux conditions (i) et (ii) donc, d'après la $définition$ 2.3, K est un cône dans $C[0,1]$. ■

Lemme 3.5

L'opérateur T est complètement continu et satisfait $T(K) \subseteq K$.

Preuve. T est complètement continu.

1) Comme les fonctions G, a et f_1 sont continues, alors T est continu.

2) Soit $B_r = \{u \in E : \|u\| \leq r\}$ un sous ensemble borné. Nous allons prouver que $T(B_r)$ est relativement compact:

(i) $T(B_r)$ est uniformément borné.

Pour certains $u \in B_r$, comme f_1 et a sont continues alors, il existe une constante L telle que

$$L = \max_{\substack{t \in [0,1] \\ \|u\|_E \leq r}} a(t) f_1(u).$$

Et nous avons,

$$Tu(t) = \frac{1}{(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)} \int_0^1 G(t,s)\, a(t) f_1(u(s))\, ds.$$

Alors,

$$|Tu(t)| \leq \left(2\frac{1+\alpha}{\alpha} L\right) \frac{1}{(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)} \int_0^1 G(s,s)\, ds,$$

donc,

$$\|Tu\| \leq \frac{2L(1+\alpha)}{\alpha\left[(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)\right]} \int_0^1 G(s,s)\, ds,$$

alors, $T(B_r)$ est unifomément borné.

(ii) $T(B_r)$ est équicontinu.

Pour tout $t_1,\, t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$ nous avons

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| = \left| \frac{1}{(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)} \int_0^1 (G(t_1,s) - G(t_2,s))\, a(s)\, f_1(u(s))\, ds \right|,$$

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \leq \frac{1}{(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)} L \left[\int_0^{t_1} |G(t_1,s) - G(t_2,s)|\, ds \right.$$

$$\left. + \int_{t_1}^{t_2} |G(t_1,s) - G(t_2,s)|\, ds + \int_{t_2}^1 |G(t_1,s) - G(t_2,s)|\, ds \right],$$

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \leq \frac{L(t_2 - t_1)}{(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)} \left[\int_0^{t_1} |(1-\beta)(s+\alpha)|\, ds \right.$$

$$\left. + \int_{t_2}^1 |(1-\beta)\, s|\, ds + \int_{t_1}^{t_2} |1-s|\, ds \right].$$

Alors, $|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \underset{t_1 \to t_2}{\longrightarrow} 0$, par conséquent, $T(B_r)$ est équicontinu.

Le théorème d'Arzela-Ascoli implique que T est un opérateur complètement continu.

Montrant maintenant que $T(K) \subseteq K$.

Pour tout $t \in [0,1]$,

$$Tu(t) = \frac{1}{(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)} \int_0^1 G(t,s)\, a(s)\, f_1(u(s))\, ds.$$

En appliquant le *lemme* 3.2, nous arrivons à

$$Tu(t) \leq \frac{2(1+\alpha)}{\alpha\left[(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)\right]} \int_0^1 G(s,s)\, a(s)\, f_1(u(s))\, ds.$$

Donc,

$$\|Tu\|_E \leq \left[\frac{2(1+\alpha)}{\alpha}\right] \frac{1}{\left[(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)\right]} \int_0^1 G(s,s)\, a(s)\, f_1(u(s))\, ds.$$

D'autre part, pour tous $t \in [0, \tau]$

$$Tu(t) \geq \gamma \frac{1}{(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)} \int_0^1 G(s,s)\, a(s)\, f_1(u(s))\, ds,$$

donc,

$$Tu(t) \geq \gamma \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} \|Tu\|_E \,.$$

Par conséquent,

$$\min_{t \in [0,\tau]} Tu(t) \geq \gamma \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} \|Tu\|_E \,,$$

et

$$u \in K \Rightarrow TK \subset K.$$

■

Preuve. (**Théorème 3.2**).

Nous allons prouver que le problème (3.1) a au moins une solution positive dans les deux cas sous-linéaire et super-linéaire. Pour cela nous utilisons *le Théorème* 2.7.

u est une solution du problème (3.1), si et seulement si u est un point fixe de l'opérateur T où, T est défini par

$$Tu(t) = \frac{1}{(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)} \int_0^1 G(t,s)\, a(s)\, f_1(u(s))\, ds.$$

Notant,

$$K = \left\{ u \in C([0,1], \mathbb{R}_+) \ , \ \min_{t \in [0,\tau]} u(t) \geq \gamma \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} \|u\|_E \right\},$$

où, K est un sous ensemble convexe fermé et non vide de $C[0,1]$.

D'après *le définition* 3.3, K est un cône de $C[0,1]$, et d'après *le Lemme* 3.5 nous avons $TK \subset K$.

Pour $f_0 = 0$,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_1 > 0, \text{ telle que } \ f_1(y) \leq \varepsilon y, \quad \text{pour} \quad 0 < y \leq \delta_1.$$

Soit Ω_1 un ouvert de E défini par

$$\Omega_1 = \{y \in C[0,1] \,/\, \|y\|_E < \delta_1\},$$

alors, pour $u \in K \cap \partial\Omega_1$, nous avons

$$Tu(t) = \frac{1}{(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)} \int_0^1 G(t,s)\, a(s)\, f_1(u(s))\, ds,$$

$$Tu(t) \leq \left(2\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) \frac{1}{(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)} \int_0^1 G(s,s)\, a(s)\, f_1(u(s))\, ds,$$

$$Tu(t) \leq \left(2\varepsilon \|u\| \frac{1+\alpha}{\alpha}\right) \frac{1}{(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)} \int_0^1 G(s,s)\, a(s)\, ds,$$

nous pouvons choisir ε, tel que

$$\left(2\varepsilon\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) \frac{1}{(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)} \int_0^1 G(s,s)\, a(s)\, ds \leq 1.$$

Ainsi,

$$\|Tu\|_E \leq \|u\|_E\,, \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega_1.$$

Maintenant à partir de $f_\infty = \infty$, nous avons

$$\forall M > 0, \exists H > 0, \text{ telle que } \; f_1(y) \geq My, \quad \text{pour } y \geq H,$$

Soit

$$H_1 = \max\left\{2\delta_1, \frac{2(1+\alpha)}{\gamma\alpha} H\right\}.$$

Dénoté par Ω_2 l'ensemble ouvert

$$\Omega_2 = \{y \in C[0,1] \,/\, \|y\|_E < H_1\}.$$

Si $u \in K \cap \partial\Omega_2$, alors

$$\min_{t\in[0,\tau]} u\left(t\right) \geq \gamma\frac{\alpha}{2\left(1+\alpha\right)}\left\Vert u\right\Vert_E = \gamma\frac{\alpha}{2\left(1+\alpha\right)}H_1 \geq H.$$

Alors, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$.

Et ainsi,

$$Tu\left(t\right) = \frac{1}{\left(\alpha+1\right)-\beta\left(\eta+\alpha\right)}\int_0^1 G\left(t,s\right)a\left(s\right)f_1\left(u\left(s\right)\right)ds,$$

$$Tu\left(t\right) \geq \gamma\frac{1}{\left(\alpha+1\right)-\beta\left(\eta+\alpha\right)}\int_0^1 G\left(s,s\right)a\left(s\right)f_1\left(u\left(s\right)\right)ds,$$

$$Tu\left(t\right) \geq \gamma\frac{1}{\left(\alpha+1\right)-\beta\left(\eta+\alpha\right)}\int_0^1 G\left(s,s\right)a\left(s\right)\gamma\frac{\alpha}{2\left(1+\alpha\right)}M\left\Vert u\right\Vert_E ds,$$

alors,

$$Tu\left(t\right) \geq M\frac{\alpha}{2\left(1+\alpha\right)}\gamma^2\frac{1}{\left(\alpha+1\right)-\beta\left(\eta+\alpha\right)}\int_0^1 G\left(s,s\right)a\left(s\right)ds\left\Vert u\right\Vert_E.$$

Si nous choisissons M, tel que

$$M\gamma^2\frac{\alpha}{2\left(1+\alpha\right)\left[\left(\alpha+1\right)-\beta\left(\eta+\alpha\right)\right]}\int_0^1 G\left(s,s\right)a\left(s\right)ds \geq 1,$$

nous obtiendrons,

$$\left\Vert Tu\right\Vert_E \geq \left\Vert u\right\Vert_E,\ \forall u \in K \cap \partial\Omega_2.$$

En utilisant la première partie du *Théorème* 2.7, nous déduisons que T a un point fixe dans $K \cap \left(\overline{\Omega}_2 \diagdown \Omega_1\right)$.

Ceci achève le cas *super-linéaire* du *Théorème*.

(ii) Maintenant, nous supposons que $f_0 = \infty$ et $f_\infty = 0$ (le cas *sous-linéaire*).

De $f_0 = \infty$, nous concluons que

$$\forall M' > 0,\ \exists\delta' > 0,\ \text{ telle que } f_1\left(y\right) \geq M'y, \text{ pour } 0 < y \leq \delta'.$$

Soit

$$\Omega_1^{'} = \left\{ y \in C\left[0,1\right] / \left\| y \right\|_E < \delta^{'} \right\},$$

alors, pour $u \in K \cap \partial\Omega_1^{'}$ et en choisissant

$$M^{'}\gamma^2 \frac{\alpha}{2\left(1+\alpha\right)\left[\left(\alpha+1\right)-\beta\left(\eta+\alpha\right)\right]} \int_0^1 G\left(s,s\right) a\left(s\right) ds \geq 1,$$

nous avons,

$$Tu\left(t\right) \geq \gamma \frac{1}{\left(\alpha+1\right)-\beta\left(\eta+\alpha\right)} \int_0^1 G\left(s,s\right) a\left(s\right) f_1\left(u\left(s\right)\right) ds,$$

$$Tu\left(t\right) \geq M^{'} \left\| u \right\| \gamma^2 \frac{\alpha}{2\left(1+\alpha\right)\left[\left(\alpha+1\right)-\beta\left(\eta+\alpha\right)\right]} \int_0^1 G\left(s,s\right) a\left(s\right) ds.$$

Ainsi,

$$\left\| Tu \right\|_E \geq \left\| u \right\|_E, \quad u \in K \cap \partial\Omega_1^{'}.$$

Maintenant, de $f_\infty = 0$, nous avons

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists H^{'} > 0, \quad \text{telle que} \quad f_1\left(y\right) \leq \varepsilon y, \quad \text{pour} \quad y \geq H^{'},$$

nous pouvons choisir ε, tel que

$$\left(2\varepsilon\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) \frac{1}{\left(\alpha+1\right)-\beta\left(\eta+\alpha\right)} \int_0^1 G\left(s,s\right) a\left(s\right) ds \leq 1.$$

Soit

$$H_2 = \max\left\{ 2\delta^{'},\ \frac{2\left(1+\alpha\right)}{\gamma\alpha} H^{'} \right\},$$

et

$$\Omega_2^{'} = \left\{ y \in C\left[0,1\right] / \left\| y \right\|_E < H_2 \right\},$$

alors, pour $u \in K' \cap \partial\Omega_2'$

$$\min_{t\in[0,\tau]} u(t) \geq \gamma \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} \|u\|_E = \gamma \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} H_2 \geq H',$$

$$Tu(t) = \frac{1}{(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)} \int_0^1 G(t,s)\, a(s)\, f_1(u(s))\, ds,$$

donc,

$$Tu(t) \leq 2\frac{1+\alpha}{\alpha} \frac{1}{(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)} \int_0^1 G(s,s)\, a(s)\, f_1(u(s))\, ds,$$

$$Tu(t) \leq \left(2\varepsilon \frac{1+\alpha}{\alpha}\right) \frac{1}{(\alpha+1) - \beta(\eta+\alpha)} \|u\|_E \int_0^1 G(s,s)\, a(s)\, ds,$$

ainsi,

$$\|Tu\|_E \leq \|u\|_E, \quad u \in K \cap \partial\Omega_2'.$$

D'après la seconde partie du *Théorème* 2.7, nous déduisons que T a un point fixe dans $K \cap \left(\overline{\Omega}_2' \diagdown \Omega_1'\right)$.

Ceci termine la preuve du *Théorème* 3.2. ■

3.4 Exemples

Afin d'illustrer nos résultats, nous donnons quelques exemples.

Exemple 3.1 *Considérons le problème aux limites à troits points*

$$u'' + t^2 u + \cos e^t + 3\sin^2 t = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = \alpha u'(0), \quad u(1) = \beta u(\eta). \tag{P_1}$$

Posons, $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = 2$, $\eta = \frac{1}{2}$.

Nous avons,

$$f(t,x) = t^2 x + \cos e^t + 3\sin^2 t,$$

nous pouvons choisir

$$\begin{cases} k(t) = t^2, \\ h(t) = \cos e^t + 3\sin^2 t. \end{cases}$$

$k,\ h \in L^1[0,1]$ *sont deux fonctions positives.*

Nous avons,

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le t^2 |x-y|,$$

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le k(t)|x-y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},\ t \in [0,1]$$

et

$$\frac{2(\beta+1)(1+\alpha)}{|\beta(\eta+\alpha) - (\alpha+1)|} \int_0^1 (1-s)\, k(s)\, ds < 1,$$

alors, d'après le Théorème 3.1 *le problème aux limites* (P_1) *a une solution unique dans* E.

Exemple 3.2 *Considérons le problème aux limites à troit points*

$$u'' + t^2u^2 + u^2t^2e^t + u^2t^2\sin^2 t = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = \alpha u'(0), \quad u(1) = \beta u(\eta). \tag{P_2}$$

Posons, $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\eta = \frac{1}{2}$ *et*

$$\begin{aligned} f(t,u) &= u^2\left(t^2 + t^2e^t + t^2\sin^2 t\right), \\ &= a(t)\, f_1(u). \end{aligned}$$

$a(t) = \left(t^2 + t^2e^t + t^2\sin^2 t\right) \in C([0,1],[0,\infty[)$ *et* $f_1(u) = u^2 \in C([0,\infty[\,,[0,\infty[)$.

Donc,

$$f_0 = \lim_{u\to 0} \frac{f_1(u)}{u} = 0, \qquad f_\infty = \lim_{u\to\infty} \frac{f_1(u)}{u} = \infty.$$

D'après le Théorème 3.2, *le problème aux limites* (P_2) *a au moins une solution positive.*

Conclusion

Actuellement il y a une grande variété de théorèmes de points fixes. L'objectif commun de ces théorèmes est de chercher des solutions et de résoudre les problèmes d'existence qui se posent en analyse mathématique et en ingénierie. De la théorie du point fixe découlent plusieurs applications qui constituent un domaine très actif de la recherche.

Dans ce travail, nous avons étudié quelques théorèmes du point fixe tels que, le théorème de Banach, de Brouwer, de Schauder et le théorème de Guo-Krasnosel'skii et quelques-unes de leurs applications. Nous avons démontré l'unicité et la positivité de la solution pour un problème aux limites du second ordre à trois points. Nous souhaitons continuer dans ce chemin pour essayer d'autres équations qui n'ont pas encore été étudiées avec cette technique.

Bibliographie

[1] R. Agarwal, M. Meechan, D. O'Regan, Fixed point theory and applications. Cambridge University Press, 141.

[2] Boyd, D. W. and Wong, J. S. W., On nonlinear contractions, Proc. Amer. Math.soc. 20 (1969), 458-464. MR 39 : 916.

[3] H Boulares, A Ardjouni, Y Laskri, Existence and uniqueness of solutions for nonlinear fractional nabla difference systems with initial conditions. Fract. Differ. Calc 7 (2), 247-263, 2017.

[4] H. Brézis, Analyse fonctionnelles, Théorie et applications. Masson, paris 1983.

[5] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin, 1985.

[6] A. Guezane-Lakoud, L. Zenkoufi, Positive solution of a three-point nonlinear boundary value problem for second order differential equations, Int. J. Appl. Math. Stat., (20), (2011), 38–46.

[7] D. Guo, LakshmikanthamV., Nonlinear problems in abstract cones, Academic Press, San Diego, 1988.

[8] A Hallaci, H Boulares, A Ardjouni, Existence and uniqueness for delay fractional differential equations with mixed fractional derivatives. Open Journal of Mathematical Analysis 4 (2), 26-31, 2020.

[9] Lilia Zenkoufi: Existence and uniqueness solution for integral boundary value problem of fractional differential equation. New Trends in Mathematical Sciences BISKA, NTMSCI 10 Special Issue, No. 1, 90-94 (2022).

[10] L. Schwartz, Analyse-topologie générale et analyse fonctionnelle, Hermann, Paris 1970.

[11] Smart, D. R., Fixed point theorems, Cambridge university. Press, Cambridge, 1980.

[12] Zeidler, E., Nonlinear functional analysis and its applications, I. fixed-point theorems, Springer-Verlage, Berlin, 1993.