

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Laboratoire de Mathématiques Appliquées et de Modélisation
Département de Mathématiques



Thèse :

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat 3^{ème} cycle en Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées

Par : AYACHI Asma

Intitulée

**Etude numérique des équations d'un
gaz visqueux**

Sous la direction de : M.C.A. A. HITTA

Co-encadreur : Prof. M.Z. AISSAOUI

Devant le jury

Président	A. Benchettah	Prof	U.B.M-Annaba
Examineur	S. Drabla	Prof	Univ-Sétif
Examineur	H. Fujita Yashima	Prof	Univ-Guelma
Invité	M. Moussaoui	Prof	ENS, Kouba

Table des matières

1	Introduction	10
1.1	Motivation de la recherche et quelques rappels sur les phénomènes physiques	10
1.2	Contenu de la thèse	13
2	Présentation des équations du mouvement de l'air	16
2.1	Equation de conservation de la masse	17
2.2	Equation de la quantité de mouvement	18
2.3	Equation du bilan de l'énergie de l'air	18
2.4	Condensation de la vapeur d'eau dans l'air	19
2.5	Equations du mouvement stationnaire	20
2.6	Modèle du mouvement stationnaire de l'air en une dimension spatiale	21
3	Etude d'un système d'équations différentiels ordinaires	26
3.1	Equation différentielle du second ordre	26
3.2	Equation linéarisée et estimations de sa solution	30
3.3	Existence d'une solution du système d'équations différentielles ordinaires non linéaires	33

4	Existence d'une solution stationnaire du mouvement de l'air	39
4.1	Position du problème	39
4.2	Equation linéarisée	42
4.3	Existence de la solution du système d'équations non linéaire . . .	45
5	Etude numérique de l'équation du mouvement de l'air	48
5.1	Exemple 1 : Mouvement de l'air qui passe sur une montagne (cas d'air sec)	48
5.2	Schéma numérique	50
5.3	Résultat du calcul numérique	52
5.4	Conclusion	54
5.5	Exemple 2 : Mouvement de l'air qui passe sur une montagne en formant des nuages	59
5.6	Système d'équations	60
5.7	Schéma numérique	67
5.8	Résultat du calcul numérique	70
5.9	Conclusion	71
6	Perspectives	75
6.1	Problème de l'existence d'une solution de l'équation monodimen- sionnelle du mouvement stationnaire avec la condensation de la vapeur d'eau	75
6.1.1	Position du problème	76
6.1.2	Transformation des équations	77
6.1.3	Equations linéarisées avec la condensation donnée	79
6.1.4	Pour obtenir une solution de l'équation non linéaire	83

6.2 Perspectives générales 83

Remerciements

Cette thèse est le fruit de plusieurs années de travail, enrichi d'une expérience scientifique qui n'aurait pas été concrétisée sans le savoir et le soutien de nombreux professeurs universitaires, qui m'ont permis d'arriver au bout de les recherches. Je tiens ainsi à remercier vivement tous ceux qui, de près ou de loin ont contribué à m'aider à ce travail, en espérant n'oublier personne. Mes vifs remerciements, empreints d'une reconnaissance de recherche scientifique ineffable, vont tout d'abord à mon directeur de thèse Monsieur HITTA AMARA Maître de Conférences A à l'Université de 8 Mai 1945 Guelma, d'avoir accepté de diriger cette thèse, pour ses encouragement, ses conseils tout le long ce travail.

A mon co-directeur de thèse Monsieur AISSAOUI MOHAMED ZINE, Professeur à l'Université de 8 Mai 1945 Guelma, pour ses investissements dans ce travail durant toute la période d'élaboration, par ses orientations, ses conseils et nos discussions enrichissantes, malgré ses préoccupations administratives et ses nombreuses charges.

A Monsieur GUEBBAI HAMZA, Maître de Conférences A à l'Université de 8 Mai 1945 Guelma, ma profonde gratitude pour son aide, son soutien tout le long de ma thèse, ses remarques et ses critiques surtout concernant la partie numérique.

A Monsieur HISAO FUJITA YASHIMA, Professeur à l'Université de 8 Mai 1945 Guelma, pour avoir mis sa confiance en moi, en me proposant le thème de ce travail, pour ses conseils avisés, nos discussions enrichissantes, sa disponibilité et surtout son écoute au cours de ces années.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur BENCHETTAH AZZEDINE, Professeur à l'Université de Annaba, d'avoir accepter de présider mon jury de thèse, ainsi qu'à Monsieur DRABLA SALAH et Monsieur HISAO FUJITA YASHIMA pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'être membres du jury en qualité d'examineurs de cette thèse.

Enfin, je remercie mes PARENTS pour leurs contributions, leurs soutiens et leurs patiences, durant toutes mes études en m'aidant et en m'encourageant aux moments opportuns et difficiles ; plus particulièrement mes soeurs et mes frères qui ont contribué à l'aboutissement de ce travail. Sans oublier tous mes proches amis et collègues qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de cette thèse.

Résumé

Dans les travaux réunis dans la présente thèse, on étudie le mouvement de l'air qui passe sur une montagne, c'est-à-dire sur des lieux élevés pour l'équation monodimensionnelle du mouvement stationnaire d'un gaz visqueux et calorifère en coordonnées eulériennes, avec de petits coefficients de viscosité et de conductibilité thermique.

Dans la partie théorique, on considère l'équation dans un domaine d'une dimension spatiale avec la condition d'entrée et de la sortie du domaine du gaz, on montre l'existence d'une solution de l'équation avec viscosité et thermoconductibilité dans un voisinage de la solution de l'équation sans viscosité et thermoconductibilité. Pour la démontrer on utilise le ***théorème du point fixe de Schauder***.

Dans la partie numérique, on présente les résultats du calcul numérique pour le cas de l'air sec et pour le cas de l'air humide avec la condensation de la vapeur. Pour le calcul numérique, on utilise ***la méthode de différences finies***. Dans le premier cas, on verra que la solution numérique de l'équation avec la viscosité et la thermoconductibilité ne diffère pas beaucoup de celle de l'équation sans viscosité et thermoconductibilité, pourvu que les coefficients de viscosité et de thermoconductibilité soient suffisamment petits, ce qui confirme le résultat de la partie théorique. Dans le deuxième cas, à cause des difficul-

tés surgissant de l'introduction de la condensation de la vapeur, on utilise des techniques particulières adaptées au cas. Dans le résultat du calcul on constate que l'atténuation due à la chaleur latente de la diminution de la température quand l'air monte sur la montagne correspond d'une manière satisfaisante à ce que la théorie physique prévoit et que l'on observe dans la nature.

Mathematics Subject Classification (2010) . 76N10, 34B15, 76N15.

Mots-Clés : gaz visqueux et calorifère, solution stationnaire, petitesse de viscosité, schéma de différences finies.

ملخص

تتعلق الأعمال التي جمعت في هذه الأطروحة، بدراسة حركة الهواء الذي يعبر جبل، بمعنى آخر في المرتفعات من اجل معادلة في مجال ذو بعد أحادي الوضعية لحركة ثابتة لغاز لزج ناقل للحرارة في إحداثيات وليريان، مع صغر معاملات اللزوجة و التوصيل الحراري.

في الجزء النظري، يتم تفحص المعادلة في مجال ذو بعد أحادي وفق شرط الدخول و الخروج في مجال الغاز، نبرهن وجود حل للمعادلة بوجود اللزوجة و التوصيل الحراري بجوار حل للمعادلة بعدم وجود اللزوجة و التوصيل الحراري. للبرهان نستعمل نظرية النقطة الثابتة لشودار.

في الجزء العددي نكشف نتائج الحساب العددي في حالة الهواء الجاف و في حالة الهواء الرطب مع تكثيف البخار. من اجل الحساب العددي، نستعمل طريقة الفروق المحدودة. في الحالة الأولى، نرى أن الحل العددي للمعادلة بوجود اللزوجة و التوصيل الحراري لا يختلف كثيرا عن الحل العددي للمعادلة بعدم وجود اللزوجة و التوصيل الحراري، علما أن معاملات اللزوجة و التوصيل الحراري صغار بما فيه كفاية، وهذا يؤكد نتائج الجزء النظري. في الحالة الثانية، بسبب الصعوبات الناشئة عن دخول تكثيف البخار نستعمل طرق خاصة للحالة. في نتائج الحساب نكشف أن التخفيف بسبب الحرارة الكامنة من نقصان الحرارة عندما يصعد الهواء على الجبل تتوافق بطريقة مرضية من قبل النظرية الفيزيائية و التي لوحظت في الطبيعة.

التصنيف الرياضي MSC (2010). 76N10, 34B15, 76N15.

الكلمات الاستدلالية: غاز لزج ناقل للحرارة ، حل ثابتة، صغر اللزوجة، خطط الفروق المحدودة.

Abstract

In the works combined in the present thesis, we study the movement of the air which passes over a mountain, This mean over places raised for the monodimensional equation of the stationary movement of a viscous and heat-conveying gas in eulerienne coordinates, with a small coefficients of viscosity and heat-conductivity.

In the theoretical part, we consider an equation in a domain of a spatial dimension with the condition of entered and output of the domain of the gas, we proof the existence of the solution of the equation with viscosity and heat-conductivity in a neighborhood of the solution of the equation without viscosity and heat-conductivity. We use *the fixed point theorem of Schauder*.

In the numerical part, we present the results of numerical calculation for the case of dry air and in the case of humid air with the condensation of the steam. For the numerical computation, we use *the finite difference method*. In the first case, we will see that the numerical solution of the equation with viscosity and heat-conductivity does not differ much from the equation without viscosity and heat-conductivity, provided that the coefficients of viscosity and heat-conductivity is sufficiently small, what confirms the result of the theoretical part . In the second case, and because of the difficulties that appears of the introduced of the condensation of the vapor, we use particular techniques

Adapted to the case. In the result of calculation is found that the attenuation due to the latent heat of the temperature decrease when the air rises to the mountain corresponds satisfactorily to that physical theory predicts and that observed in nature.

Mathematics Subject Classification (2010) . 76N10, 34B15, 76N15.

Key-Words : viscous heat-conductive gas, stationary solution, smallness of viscosity, finite difference scheme.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Motivation de la recherche et quelques rappels sur les phénomènes physiques

Comme nous le voyons tous les jours, les phénomènes météorologiques interviennent dans notre vie quotidienne et conditionnent beaucoup de nos activités. Tous les pays sont munis d'un service météorologique et cherchent de prévoir mieux les phénomènes météorologiques du prochain futur. L'analyse et la prévision de ces phénomènes, comme il est logique, passent souvent par des modèles mathématiques et le calcul numérique de ces modèles. On connaît par exemple un puissant modèle [26], qui est utilisé par beaucoup de chercheurs qui travaillent dans les services météorologiques et dans les instituts de recherches.

Comme les phénomènes météorologiques sont assez complexes, même une machine si puissante ne peut – semble-t-il – pas résoudre tous les problèmes avec toute la précision souhaitée. Nous désirons alors donner notre modeste contribution à la recherche des modèles mathématiques des phénomènes atmosphériques et météorologiques avec notre étude des équations du mouve-

ment de l'air avec éventuelle condensation de la vapeur d'eau et donc avec éventuelle formation de nuages, en nous limitant pour le moment aux cas d'un écoulement constant modélisé en une dimension spatiale.

Nous adoptons, comme beaucoup d'autres chercheurs, le principe que le mouvement de l'air doit être avant tout décrit par les équations de la mécanique des fluides, dont la théorie physique et mathématique est, nous semble-t-il, bien consolidée, comme nous pouvons la trouver dans [16]. Pour la recherche mathématique sur ces équations nous trouvons également une ample littérature (dont par exemple [1] [5], [9], [13], [14], [19], [20], etc...).

D'autre part, la condensation de la vapeur d'eau dans l'air et la formation des gouttelettes (plus généralement, les transitions de phase de l'eau dans l'air et la formation/disparition des gouttelettes et des morceaux de cristaux de H_2O dans l'air) sont bien étudiées (de manière plutôt qualitative) par les météorologues (voir par exemple [18], [21], [25]), mais ne sont pas bien connues par les chercheurs de mathématiques. Pour cela, nous citons ci-dessous quelques descriptions essentielles des phénomènes de transition de phase de l'eau dans l'air et de leurs conséquences.

Comme il est bien connu, l'air atmosphérique contient une certaine quantité d'eau à l'état gazeux. A la différence des autres molécules comme N_2 ou O_2 qui restent toujours en état gazeux dans les conditions ordinaires de l'atmosphère, l'eau (H_2O) peut avoir trois états : solide, liquide et gazeux. Ça signifie que dans l'atmosphère on trouve les six types de transition de phase de l'eau, à savoir condensation (de l'état gazeux à l'état liquide), évaporation (de l'état liquide à l'état gazeux), solidification (de l'état liquide à l'état solide), fusion (de l'état solide à l'état liquide), sublimation (de l'état solide à l'état gazeux), subli-

mation inverse (de l'état gazeux à l'état solide). Pour la condensation, l'évaporation, la sublimation et la sublimation inverse de l'eau dans l'atmosphère la pression de la vapeur saturée joue un rôle fondamental. En effet, par exemple, la condensation de la vapeur d'eau, à une température supérieure à celle de fusion de H_2O , se réalise lorsque et seulement lorsque la pression de la vapeur d'eau (c'est-à-dire pression partielle de la vapeur dans l'air) dépasse la valeur critique, appelée pression de la vapeur saturée. C'est-à-dire, au-delà de cette valeur critique les molécules de H_2O en état gazeux tendent à s'établir en état liquide. S'il existe une surface de l'eau liquide exposée dans l'air et la pression de la vapeur devient inférieure à la pression de la vapeur saturée, les molécules de H_2O se trouvant à la surface de l'eau liquide commencent à sortir du liquide, en réalisant le processus d'évaporation. On rappelle que la valeur de la pression de la vapeur saturée est déterminée essentiellement par la température T .

Aux températures inférieure à celle de fusion (et à la présence d'une surface de glace exposée dans l'air), si la pression de la vapeur dépasse la pression de la vapeur saturée (relative à l'état solide), alors il y aura la sublimation (inverse) de gaz en solide de la vapeur d'eau présente dans l'air ; d'autre part, si la pression de la vapeur devient inférieure à la pression de la vapeur saturée (relative à l'état solide), alors il y aura la sublimation de solide en gaz à partir de la surface de la glace. La pression de la vapeur saturée relative à la surface liquide et celle relative à la surface solide de H_2O ont des valeurs différentes, mais dans la présente thèse nous nous limitons aux cas où la température est supérieure à celle de fusion et donc n'y aura pas de sublimation ni sublimation inverse.

D'autre part, la condensation de la vapeur d'eau dans l'atmosphère fournit la chaleur à l'air (chaleur latente). Ce processus sera expliqué dans le chapitre

suisant.

On rappelle que dans les conditions usuelles de l'atmosphère le comportement de l'air sec ainsi que celui de la vapeur d'eau au regard de la relation entre la pression, la densité et la température n'est pas beaucoup différent de celui du gaz idéal, ce qui implique que la pression partielle de l'air sec et celle de la vapeur d'eau sont représentées respectivement par $R\frac{\rho}{\mu_a}T$ et $R\frac{\pi}{\mu_h}T$, où R , μ_a , μ_h sont respectivement la constante universelle des gaz, la masse molaire moyenne de l'air et de l'eau. La pression de l'air composé par l'air sec et la vapeur d'eau est la somme de la pression partielle de l'air sec et de celle de la vapeur d'eau. Donc la pression p de l'air est donnée par

$$p = R\left(\frac{\rho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h}\right)T. \quad (1.1)$$

1.2 Contenu de la thèse

Dans cette thèse, on propose d'étudier le phénomène du vent qui traverse une chaîne de montagne, c'est-à-dire sur des lieux élevés. On va considérer les équations concernent la vitesse, la température, la densité et la pression selon le modèle d'un gaz visqueux et calorifère en une dimension dans un régime stationnaire.

Cette thèse contient cinq chapitres.

Dans le deuxième chapitre, on va rappeler le système d'équations qui est formulé dans [24] qui modélise le mouvement de l'atmosphère, en tenant compte les transitions de phase de l'eau (pour le modèle en deux état seulement des transition entre le gaz et le liquide). Du point de vue mécanique, ce modèle s'appuie sur les équations du mouvement d'un gaz visqueux et calorifère (voir

[16]).

Ensuite, il y'a deux parties, partie théorique et partie numérique.

La partie théorique contient deux chapitres : chapitre 3 et chapitre 4. Dans le chapitre 3, on montre l'existence d'une solution d'une équation différentielle ordinaire non linéaire du second ordre, en utilisant le *théorème du point fixe de Schauder*. Dans la deuxième partie, chapitre 4, on va appliquer ce résultat à notre équation monodimensionnelle du mouvement stationnaire de l'air. On montre l'existence d'une solution avec la condition de l'entrée et de la sortie du domaine du gaz dans un voisinage de la solution de l'équation sans viscosité et sans thermoconductibilité, sous la condition que les coefficients de viscosité et thermoconductibilité sont petits. Le contenu de ces deux chapitres correspond au contenu de l'article [3].

Dans la partie numérique, on présente les résultats du calcul numérique pour deux exemples : cas de l'air sec et cas de l'air avec vapeur d'eau. Pour les deux cas, pour le calcul numérique nous utilisons la *méthode de différences finies*.

Dans le premier exemple, on présente en particulier la comparaison numérique entre la solution de l'équation avec viscosité et avec thermoconductibilité et la solution de l'équation sans viscosité et sans thermoconductibilité, toujours sous la condition que les coefficients de viscosité et de thermoconductibilité sont suffisamment petits. Ceci confirme le résultat de la partie théorique. Ce résultat numérique est présenté dans [3].

Dans le deuxième exemple, à cause des difficultés dues à la fonction représentant la condensation de la vapeur, fonction qui a des aspects particuliers, on utilise des techniques particulières introduites pour ce cas spécifique. Dans le

résultat du calcul on voit que, quand l'air monte sur la montagne, la diminution de la température est atténuée à cause de la chaleur latente de condensation. L'allure de la température calculée dans notre travail correspond d'une manière satisfaisante à ce que la théorie physique prévoit et que l'on observe dans la nature. Ce résultat est illustré dans l'article [11].

Chapitre 2

Présentation des équations du mouvement de l'air

Dans ce chapitre nous rappelons les équations aux dérivées partielles qui décrivent le mouvement de l'air et l'éventuel processus de condensation de la vapeur d'eau contenue dans l'air et ses conséquences. Dans notre étude en général, nous considérons l'air comme gaz visqueux et calorifère et pour les équations fondamentales de son mouvement nous suivons essentiellement la formulation de [16]. D'autre part, pour les équations qui décrivent la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère nous avons suivi des modèles développés dans une série de travaux [4], [10], [12], [24], qui à leur tour se sont basés sur les descriptions des phénomènes physiques données dans [18], [21], [25].

Rappelons d'abord le système d'équations qui modélise de manière suffisamment détaillée le mouvement de l'atmosphère, en tenant compte de la transition de phase de l'eau (pour le modèle en deux états gazeux et liquide de H_2O voir [4]).

2.1 Equation de conservation de la masse

Comme il n'y a pas de possibilité de transformation de l'air sec à H_2O ou de H_2O à un des éléments de l'air sec, la loi de la conservation de la masse s'applique séparément à l'air sec et à H_2O . Donc, pour l'air sec, qui n'est pas assujéti à la transition de phase, la loi de conservation de la masse est exprimée par l'équation classique (voir [16])

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad (2.1)$$

où ρ est la densité de l'air sec et v est la vitesse de l'air.

Pour la vapeur d'eau, le principe de la conservation de la masse doit être appliquée en tenant compte de la variation due à la transition de phase. Dans [24] les auteurs ont proposé une équation qui tient compte de l'éventuelle transition de phase du gaz au solide ou vice-versé ; mais ici, pour simplifier, nous nous limitons au cas où la température est supérieure à celle de fusion, de sorte que nous considérons l'équation qui exprime la loi de la conservation de la masse de la vapeur d'eau (voir [4], [12], [24])

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\pi v) = -H_{gl}(T, \pi, \sigma(\cdot)), \quad (2.2)$$

où π est la densité de la vapeur d'eau et $H_{gl} = H_{gl}(T, \pi, \sigma(\cdot))$ représente la quantité totale (dans l'unité de volume et de temps) de H_2O qui se transforment du gaz au liquide (son éventuelle valeur négative signifie la quantité de H_2O qui se transforme du liquide au gaz). Dans la suite on va préciser la définition de la fonction H_{gl} où la question délicate est la description de la formation et de la disparition des gouttelettes.

2.2 Equation de la quantité de mouvement

Désignons par Φ le géopotentiel et par η et ζ les coefficients de viscosité de l'écoulement et volumique, l'équation qui exprime la loi de la conservation de la quantité du mouvement, comme on le connaît bien (voir [16]), aura la forme

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) = \eta \Delta v + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot v) - \nabla p - \rho \nabla \Phi - 2\rho \omega \times v, \quad (2.3)$$

où p est la pression et ω est la vitesse angulaire de la rotation de la Terre. Si on néglige la force de Coriolis, l'équation (2.3) se réduit à

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) = \eta \Delta v + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot v) - \nabla p - \rho \nabla \Phi. \quad (2.4)$$

On rappelle que dans les conditions usuelles de l'atmosphère le comportement de l'air n'est pas beaucoup différent de celui du gaz idéal, ce qui nous permet de supposer que la pression p est donnée par

$$p = \frac{R}{\mu_m} \rho T = R_1 \rho T, \quad (2.5)$$

où T est la température, R et μ_m sont respectivement la constante universelle des gaz et la masse molaire moyenne de l'air (voir [12], [24]).

2.3 Equation du bilan de l'énergie de l'air

Rappelant l'équation du bilan de l'énergie d'un gaz (voir [16]), qui est exprimée en fonction de la température T et avec l'expression de la pression donnée dans (2.5) et en désignant par L_{gl} la chaleur latente (voir [16]), donc l'équation de bilan de l'énergie aura la forme

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T \right) = \kappa \Delta T - p \nabla \cdot v + \quad (2.6)$$

$$+ \eta \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot v \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \zeta (\nabla \cdot v)^2 + L_{gl}(T) H_{gl},$$

où c_v la chaleur spécifique et κ le coefficient de conductibilité thermique.

2.4 Condensation de la vapeur d'eau dans l'air

La formation des nuages réalisée au moment où le vent traverse une montagne est largement observée et les processus physiques qui engendrent ce phénomène – transformation adiabatique de l'air, diminution de la pression et de la température, pression de la vapeur saturée, condensation de la vapeur, effet de la chaleur latente – sont bien connues. Rappelons d'abord les aspects principaux de la transition de phase de H_2O dans l'atmosphère (voir [18], [21]).

On rappelle que la condensation de la vapeur d'eau dans l'atmosphère fournit la chaleur à l'air (chaleur latente) ; la quantité de la chaleur donnée à (ou retirée de) l'air peut être exprimée par le produit de la chaleur latente L_{gl} et de la quantité de condensation H_{gl} .

La chaleur latente L_{gl} est donnée approximativement par

$$L_{gl} = L_{gl}(T) \approx (3244 - 2,72 T) 10^3 \quad (J/kg), \quad (2.7)$$

(voir par exemple [18]).

D'autre part, la quantité de condensation est déterminée par la relation entre la pression de la vapeur saturée (relative à l'état liquide) $\bar{p}_{vs}(T)$ et la quantité de H_2O présente en état gazeux ; la valeur de $\bar{p}_{vs}(T)$ dépend fortement de la température T , donnée approximativement par

$$\bar{p}_{vs}(T) \approx E_0 \cdot 10^{\frac{7,63(T-273,15)}{T-31,25}}, \quad E_0 = 6,107 \quad (mbar) \quad (2.8)$$

(voir par exemple [18]). Comme la densité et la pression sont reliées par une équation analogue à (2.5), la densité de la vapeur saturée $\bar{\pi}_{vs}(T)$ doit être donnée par

$$\bar{\pi}_{vs}(T) = \frac{\mu_h}{RT} \bar{p}_{vs}(T), \quad (2.9)$$

avec

$$\mu_h = 18.01(g/mole) \quad R = 8.314(j/mole),$$

où μ_h est la masse molaire de H_2O (voir [12], [24]).

Selon les physiciens la quantité de condensation est donnée par la variation de H_2O dans l'air par rapport à la densité de la vapeur saturée $\bar{\pi}_{vs}(T)$, peut être écrite par

$$H_{gl} = K[\pi(x) - \bar{\pi}_{vs}(T(x))]^+, \quad (2.10)$$

où $[]^+$ désigne la partie positive et K est le coefficient associé à la vitesse de condensation. Le coefficient K est assez grand de sorte que la presque totalité de la partie de la vapeur qui dépasse $\bar{\pi}_{vs}(T(x))$ se transforme en liquide assez rapidement.

2.5 Equations du mouvement stationnaire

Quand les quantités physiques comme la vitesse, la densité et la température ne varient pas dans le temps et le mouvement reste constant au cours du

temps, on devra considérer les équations stationnaire du système, en posant

$$\partial_t \rho = 0, \quad \partial_t v = 0, \quad \partial_t T = 0.$$

En effet on a

$$\nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad (2.11)$$

$$\rho(v \cdot \nabla)v = \eta \Delta v + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right) \nabla(\nabla \cdot v) - \frac{R}{\mu_m} \nabla(\rho T) - \rho \nabla \Phi, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \rho c_v(v \cdot \nabla T) &= \kappa \Delta T - \frac{R}{\mu_m} \rho T \nabla \cdot v \\ &+ \eta \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot v \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \zeta (\nabla \cdot v)^2 + L_{gl}(T) H_{gl}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Même si l'obtention des équations (2.11)-(2.13) à partir des équations (2.1), (2.4), (2.6) est facile, cela ne signifie pas que la résolution des équations (2.11)-(2.13) soit facile. En effet, tandis que les équations (2.4), (2.6) sont du type parabolique, les équations (2.12)-(2.13) sont du type elliptique, ce qui implique qu'on a besoin d'une méthode différente pour résoudre les équations (2.11)-(2.13).

2.6 Modèle du mouvement stationnaire de l'air en une dimension spatiale

Les équations du mouvement stationnaire que nous avons vues dans la section précédente ne sont pas faciles à résoudre ; en particulier les résultats que nous connaissons exigent la petitesse des données. Nous proposons donc

d'étudier le cas où le domaine est réduit en une dimension qui d'un point de vue mathématique sera naturellement rendu plus facile. Or, dans cette catégorie, on peut inclure une approximation monodimensionnelle de l'écoulement de l'air passant sur une "montagne", c'est-à-dire sur une surface dont la hauteur varie. Cette approximation pourra servir comme modèle simplifié de la formation des nuages par le vent qui passe sur une montagne.

Pour décrire le modèle de l'écoulement de l'air qui passe sur une montagne, nous désignons par une fonction $h(x_1)$ la hauteur de la surface (terrestre) sur laquelle l'air passe on suppose qu'il est une fonction suffisamment régulière. On va considérer l'écoulement dans une couche proche de la surface $\{x_3 = h(x_1)\}$.

Pour modéliser cet écoulement par des équations en une dimension, définissons la vitesse w le long de la surface $\{x_3 = h(x_1)\}$

$$w = \left(1 + \left(\frac{dh}{dx_1}\right)^2\right)^{-1/2} \left(v_1 + \frac{dh}{dx_1} v_3\right), \quad (2.14)$$

$v = (v_1, v_2, v_3)$ étant le vecteur vitesse, c'est-à-dire w est la composante de la vitesse v dans la direction

$$\vec{\xi} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+h'^2}}, 0, \frac{h'}{\sqrt{1+h'^2}}\right)^T \quad (h' = \frac{d}{dx_1} h(x_1)).$$

En outre, on a besoin d'introduire la "section du courant", qui n'est pas définie a priori, et l'effet de la friction avec la surface terrestre. Pour que la "section du courant", ou l'épaisseur de la couche, soit déterminée de manière cohérente à la description du mouvement de l'air en dimension trois représenté par le système d'équations (2.11)-(2.13), il faut qu'elle soit déterminée de sorte que la pression soit fonction de la densité et de la température à l'intérieur de l'écoulement dans la couche considérée coïncide avec celle de l'extérieur.

Dans la suite nous écrivons simplement x au lieu de x_1 et considérons le mouvement stationnaire de l'air dans une couche proche de la surface (ce qui est équivalent mais plus facile à imaginer, dans un tuyau que nous construisons dans notre esprit). Désignons donc par $S(x)$ la "section" du courant (ou du tuyau). Alors, en tenant compte des relations entre la longueur dans la direction $\vec{\xi}$ et la dérivée par rapport à x , pour l'écoulement stationnaire de (2.11), on déduit l'équation de continuité "en tuyau."

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\rho S w}{\sqrt{1+h'^2}} \right) = 0, \quad (2.15)$$

Quant à l'équation de la quantité de mouvement, on considère l'équation (2.12) multipliée par $\vec{\xi}$; on y introduit le terme de la friction avec la surface $-\alpha w$ et le gradient de la pression de base γ , de sorte que pour w on a

$$\begin{aligned} \frac{\rho S w}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx} w = f_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + \\ + f_2 w - \frac{R_1}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx} (\rho S T) - \frac{\rho S}{\sqrt{1+h'^2}} h' g - \alpha w + \gamma, \end{aligned} \quad (2.16)$$

où

$$f_1 = \frac{1}{1+h'^2} \left[\frac{\eta}{3} (3h'^2 + 4) + \zeta \right],$$

$$f_2 = \frac{1}{(1+h'^2)^3} h''^2 \left[-\frac{\eta}{3} (h'^2 + 4) + \zeta (2h'^2 - 1) \right] - h' \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) h''',$$

$$(h'' = \frac{d^2}{dx^2} h(x), h''' = \frac{d^3}{dx^3} h(x)).$$

L'expression des coefficients f_1, f_2 de (2.16) résulte des calculs assez longs mais élémentaires.

Pour l'équation du bilan de l'énergie, les calculs des coefficients de (2.13) effectués en tenant compte des relations entre la longueur dans la direction de $\vec{\xi}$ et la dérivée $\frac{d}{dx}$. Si on néglige la contribution de la chaleur latente de $L_{gl}(T)H_{gl}$, nous conduisons à

$$\begin{aligned} \frac{\rho S w}{\sqrt{1+h'^2}} c_v \frac{dT}{dx} = \kappa \frac{d^2 T}{dx^2} - R_1 \rho T \frac{d}{dx} \left(\frac{w S}{\sqrt{1+h'^2}} \right) + \\ + g_1 \left(\frac{d}{dx} w \right)^2 + g_2 w \frac{d}{dx} w + g_3 w^2, \end{aligned} \quad (2.17)$$

où

$$g_1 = \frac{1}{1+h'^2} \left(\eta \left(\frac{4}{3} + h'^2 \right) + \zeta \right),$$

$$g_2 = \frac{-2h'}{(1+h'^2)^2} h'' \left(\frac{\eta}{3} + \zeta \right),$$

$$g_3 = \frac{1}{(1+h'^2)^3} h''^2 \left(\eta \left(1 + \frac{4}{3} h'^2 \right) + \zeta h'^2 \right).$$

En vertu de l'équation (2.15), la fonction $\frac{\rho S w}{\sqrt{1+h'(x)^2}}$ demeure constante. Nous écrivons K_ρ pour désigner cette constante, c'est-à-dire, on a

$$\frac{\rho S w}{\sqrt{1+h'^2}} = K_\rho. \quad (2.18)$$

Si la fonction $S(x)$ est connue, l'équation (2.18) nous permet de réduire l'inconnue ρ comme fonction de w ou w comme fonction de ρ . Dans notre calcul nous allons utiliser l'égalité

$$\rho = \frac{K_\rho \sqrt{1+h'^2}}{S w}. \quad (2.19)$$

Nous substituons la relation (2.5) et (2.19) dans l'équations (2.16) et (2.17). Alors nous avons un système d'équations de deux équations avec deux inconnues : la vitesse w et la température T

$$K_{\rho} \frac{d}{dx} w = f_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + f_2 w \quad (2.20)$$

$$- \frac{R_1 K_{\rho}}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{1+h'^2} \frac{T}{w} \right) - h' \frac{K_{\rho}}{w} g - \alpha w + \gamma,$$

$$K_{\rho} c_v \frac{dT}{dx} = \kappa \frac{d^2 T}{dx^2} - R_1 \frac{K_{\rho} \sqrt{1+h'^2}}{S w} T \frac{d}{dx} \left(\frac{w S}{\sqrt{1+h'^2}} \right) + \quad (2.21)$$

$$+ g_1 \left(\frac{d}{dx} w \right)^2 + g_2 w \frac{d}{dx} w + g_3 w^2.$$

Chapitre 3

Etude d'un système d'équations différentiels ordinaires

3.1 Equation différentielle du second ordre

Avant de nous occuper au système d'équations monodimensionnelles du mouvement stationnaire d'un gaz visqueux et calorifère (2.20)-(2.21), on va donner un résultat pour un cas plus général, cas d'équation différentielle à valeur dans \mathbb{R}^n . Nous considérons l'équation différentielle ordinaire

$$\varepsilon u''(x) + \beta(x, u(x), u'(x)) = g(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3.1)$$

pour une fonction inconnue $u(x) \in \mathbb{R}^n$ avec les conditions aux limites

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (3.2)$$

Dans (3.1), ε est une constante telle que $0 < \varepsilon \leq 1$ et $g(x)$ est une fonction donnée à valeurs dans \mathbb{R}^n . Pour la fonction $\beta(x, u, u') : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nous supposons qu'elle est continûment dérivable par rapport à u et à u' et que

$$\beta(x, 0, 0) = 0. \quad (3.3)$$

Cette dernière condition ne restreint pas la généralité ; en effet, si $\beta(x, 0, 0) \neq 0$, alors il nous suffit de considérer $\beta(x, u, u') - \beta(x, 0, 0)$ au lieu de $\beta(x, u, u')$ et $g(x) - \beta(x, 0, 0)$ au lieu de $g(x)$ dans (3.1).

Compte tenu des conditions sur $\beta(x, u, u')$, nous réécrivons l'équation (3.1) dans la forme

$$\varepsilon u''(x) + B(x)u'(x) + C(x)u(x) = g(x) - R(x, u(x), u'(x)), \quad (3.4)$$

où

$$B(x) = (B_{ij}(x)), \quad B_{ij}(x) = \frac{\partial \beta_i(x, u, u')}{\partial u'_j} \Big|_{u=0, u'=0},$$

$$C(x) = (C_{ij}(x)), \quad C_{ij}(x) = \frac{\partial \beta_i(x, u, u')}{\partial u_j} \Big|_{u=0, u'=0},$$

$$R_i(x, u(x), u'(x)) = \beta_i(x, u(x), u'(x)) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \beta_i(x, u, u')}{\partial u'_j} \Big|_{u=0, u'=0} u'_j(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \beta_i(x, u, u')}{\partial u_j} \Big|_{u=0, u'=0} u_j(x).$$

Pour les matrices $B(x)$ et $C(x)$ nous supposons qu'il existe une matrice définie positive $D(x)$, une matrice Γ indépendante de $x \in [0, 1]$ et une constante $K_0 > 0$ telles que

$$D(x)\tilde{B}(x) \text{ soit symétrique pour tout } x \in [0, 1], \quad (3.5)$$

$$u \cdot D(x)\tilde{C}(x)u \leq -K_0|u|^2 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in [0, 1], \quad (3.6)$$

$$\varepsilon \|D'\|_{L^\infty}^2 < 4m_D(K_0 - \|D\tilde{B}\|_{L^\infty}\|E'\|_{L^\infty} - \frac{1}{2} \max_k \|\lambda'_k\|_{L^\infty}), \quad (3.7)$$

où

$$m_D = \inf\{{}^t u D u \mid u \in \mathbb{R}^n, |u| = 1\},$$

$$\tilde{B}(x) = B(x) - 2\varepsilon\Gamma,$$

$$\tilde{C}(x) = C(x) - B(x)\Gamma + \varepsilon\Gamma^2,$$

$\lambda_k, k = 1, \dots, n,$ sont les valeurs propres de $D(x)\tilde{B}(x)$,

E est une matrice unitaire telle que $ED\tilde{B}E^{-1}$ soit une matrice diagonale.

D'autre part, pour les fonctions $g(x)$ et $R(x, u, u')$ on suppose que :

(i) Il existe un R_0 tel que, si $|u| \leq R_0$, alors on a

$$|R(x, u, u')| \leq c_R(|u|^2 + |u||u'| + \varepsilon|u'|^2), \quad \forall x \in [0, 1], \quad (3.8)$$

où c_R est une constante indépendante de $x \in [0, 1]$.

(ii) Il existe $R_1 > 0$ tel que l'application $R(\cdot, u, u') : H_0^1 \longrightarrow H^{-1}$ soit continue dans

$$\{u \in H_0^1 \mid \|u\|_{H_0^1} \leq R_1\}.$$

(iii) $g \in L^2(0, 1; \mathbb{R}^n)$.

Avant d'entamer l'étude de l'équation (3.4), nous la transformons en une équation pour la fonction inconnue $\tilde{u}(x)$

$$\tilde{u}(x) = e^{\Gamma x} u(x),$$

on a donc $u(x) = e^{-\Gamma x} \tilde{u}(x)$, on a

$$\varepsilon(e^{-\Gamma x} \tilde{u}(x))'' + (e^{-\Gamma x} \tilde{u}(x))' B(x) + e^{-\Gamma x} \tilde{u}(x) C(x) = g(x) - R(x, u(x), u'(x)),$$

et donc

$$\varepsilon \tilde{u}(x)'' + (B(x) - 2\varepsilon\Gamma) \tilde{u}(x)' + (C(x) - B(x)\Gamma + \varepsilon\Gamma^2) \tilde{u}(x) = e^{\Gamma x} (g(x) - R(x, u(x), u'(x))).$$

En effet, en utilisant les notations $\tilde{B}(x)$ et $\tilde{C}(x)$ introduites ci-dessus, l'équation (3.4) se transforme en

$$\varepsilon \tilde{u}''(x) + \tilde{B}(x) \tilde{u}'(x) + \tilde{C}(x) \tilde{u}(x) = \tilde{g}(x) - \tilde{R}(x, \tilde{u}, \tilde{u}'), \quad (3.9)$$

où

$$\tilde{g}(x) = e^{\Gamma x} g(x),$$

$$\tilde{R}(x, \tilde{u}, \tilde{u}') = e^{\Gamma x} R(x, u, u').$$

La condition (3.2) se transforme évidemment en

$$\tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0. \quad (3.10)$$

Il est clair que l'existence d'une solution $\tilde{u}(x)$ de l'équation (3.9) avec la condition (3.10) équivaut à celle d'une solution $u(x)$ de l'équation (3.4) avec la condition (3.2). Pour cette raison, pour simplifier les notations, nous allons écrire (3.9) sans " \sim ", c'est-à-dire dans la forme

$$\varepsilon u''(x) + B(x)u'(x) + C(x)u(x) = g(x) - R(x, u(x), u'(x)), \quad (3.11)$$

sous les conditions

$$D(x)B(x) \text{ soit symétrique pour tout } x \in [0, 1], \quad (3.12)$$

$$u \cdot D(x)C(x)u \leq -K_0|u|^2 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in [0, 1], \quad (3.13)$$

$$\varepsilon \|D'\|_{L^\infty}^2 < 4m_D(K_0 - \|DB\|_{L^\infty}\|E'\|_{L^\infty} - \frac{1}{2} \max_k \|\lambda'_k\|_{L^\infty}). \quad (3.14)$$

L'expression de la condition (3.8) et l'hypothèse (ii) restent invariantes.

3.2 Equation linéarisée et estimations de sa solution

L'étude de l'existence de la solution locale sera obtenue à l'aide du théorème du point fixe de Schauder. L'idée générale qui nous adoptons est celle d'examiner d'abord les équations linéarisées et puis de chercher un point fixe d'un opérateur défini par la solution des équations linéarisées.

On considère l'équation linéarisée de (3.11)

$$\varepsilon u''(x) + B(x)u'(x) + C(x)u(x) = \gamma(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3.15)$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (3.16)$$

où γ est une fonction appartenant à la classe $L^2(0, 1; \mathbb{R}^n)$.

On rappelle en premier lieu l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.15)-(3.16) dans $H_0^1(0, 1; \mathbb{R}^n)$.

Lemme 3.2.1 *Le problème (3.15)-(3.16) admet une solution $u \in H_0^1(0, 1; \mathbb{R}^n)$ et une seule et on a*

$$\varepsilon \alpha_1 \|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \leq c_1 \|\gamma\|_{L^2}^2, \quad (3.17)$$

où α_1 et c_1 sont deux constantes strictement positives indépendantes de ε .

DÉMONSTRATION. On désigne par tA la matrice transposée de A , de sorte que ${}^t u$ sera le vecteur ligne u . En multipliant l'équation (3.15) par ${}^t u D$ et faisant l'intégral sur $[0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^1 {}^t u(x) D(x) u''(x) dx + \int_0^1 {}^t u(x) D(x) B(x) u'(x) dx + \int_0^1 {}^t u(x) D(x) C(x) u(x) dx = \\ = \int_0^1 {}^t u(x) D(x) \gamma(x) dx. \end{aligned}$$

Appliquant l'intégration par partie là où elle est utile, et grâce à la condition (3.16), on obtient

$$\begin{aligned} -\varepsilon \int_0^1 ({}^t u(x))' D(x) u'(x) dx - \varepsilon \int_0^1 {}^t u(x) D'(x) u'(x) dx + \int_0^1 {}^t u(x) D(x) B(x) u'(x) dx + \\ + \int_0^1 {}^t u(x) D(x) C(x) u(x) dx = \int_0^1 {}^t u(x) D(x) \gamma(x) dx. \end{aligned}$$

Comme DB est une matrice symétrique (voir (3.5)), il existe une matrice unitaire E telle que $EDBE^{-1}$ soit une matrice diagonale, dont nous désignons par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les éléments diagonaux; on a donc

$$\begin{aligned} {}^t uDBu' &= {}^t(Eu)EDBE^{-1}(Eu)' - {}^t uDBE^{-1}E'u = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{d}{dx} (\lambda_k v_k^2) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda'_k v_k^2 - {}^t uDBE^{-1}E'u, \end{aligned}$$

où $v_k = (Eu)_k$, on obtient

$$\begin{aligned} -\varepsilon \int_0^1 ({}^t u)' Du' dx - \varepsilon \int_0^1 {}^t u D' u' dx - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^1 \lambda'_k (Eu)_k^2 dx - \int_0^1 {}^t uDBE^{-1}E' u dx + \\ + \int_0^1 {}^t uDCu dx = \int_0^1 {}^t uD\gamma dx; \end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \varepsilon m_D \|u'\|_{L^2}^2 - \varepsilon \|D'\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|u'\|_{L^2} + (K_0 - \frac{1}{2} \max_k \|\lambda'_k\|_{L^\infty} - \|DB\|_{L^\infty} \|E'\|_{L^\infty}) \|u\|_{L^2}^2 \leq \\ \leq \|D\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|\gamma\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Or, d'après (3.14) il existe un nombre $0 < \beta \leq 1$ tel que

$$\varepsilon \|D'\|_{L^\infty}^2 = 4(1 - \beta) m_D (K_0 - \frac{1}{2} \max_k \|\lambda'_k\|_{L^\infty} - \|DB\|_{L^\infty} \|E'\|_{L^\infty}),$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \varepsilon \|D'\|_{L^\infty}^2 \|u\|_{L^2} \|u'\|_{L^2} \leq \\ \leq \sqrt{1 - \beta} \varepsilon m_D \|u'\|_{L^2}^2 + \sqrt{1 - \beta} (K_0 - \frac{1}{2} \max_k \|\lambda'_k\|_{L^\infty} - \|DB\|_{L^\infty} \|E'\|_{L^\infty}) \|u\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Donc, compte tenu des relations

$$1 - \sqrt{1 - \beta} > 0,$$

$$\|D\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|\gamma\|_{L^2} \leq \nu \|u\|_{L^2}^2 + \frac{\|D\|_{L^\infty}^2}{4\nu} \|\gamma\|_{L^2}^2 \quad \forall \nu > 0,$$

on déduit de (3.18) qu'il existe deux constantes $\alpha_1 > 0$ et $c_1 > 0$ telles que l'inégalité (3.17) soit vérifiée. L'inégalité (3.17) implique également l'existence et l'unicité de la solution $u \in H_0^1(0, 1; \mathbb{R}^n)$.

Lemme 3.2.2 *Si u est la solution du problème (3.15)-(3.16), alors on a*

$$\alpha_2 \varepsilon^3 \|u''\|_{L^2}^2 \leq c_1 \|\gamma\|_{L^2}^2, \quad (3.19)$$

où α_2 une constante strictement positive indépendante de ε .

DÉMONSTRATION. De l'équation (3.15), on obtient

$$\varepsilon \|u''\|_{L^2} \leq \|B\|_{L^\infty} \|u'\|_{L^2} + \|C\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} + \|\gamma\|_{L^2};$$

à partir de cette inégalité et l'inégalité (3.17) on déduit qu'il existe une constante α_2 indépendante de ε telle que l'inégalité (3.19) soit vérifiée. \square

3.3 Existence d'une solution du système d'équations différentielles ordinaires non linéaires

Soit \bar{u} une fonction donnée dans $H_0^1(0, 1; \mathbb{R}^n)$. On considère l'équation

$$\varepsilon u''(x) + B(x)u'(x) + C(x)u(x) = g(x) - R(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x)), \quad 0 < x < 1, \quad (3.20)$$

avec les conditions aux limites (3.16). Le lemme 3.2.1, joint à la condition (3.8), nous permet de définir l'opérateur $G : H_0^1(0, 1; \mathbb{R}^n) \longrightarrow H_0^1(0, 1; \mathbb{R}^n)$, qui, à $\bar{u} \in H_0^1(0, 1; \mathbb{R}^n)$, associe la solution $u \in H_0^1(0, 1; \mathbb{R}^n)$ de l'équation (3.20).

Retournons maintenant au système d'équations non-linéaires (3.15)-(3.16). Pour démontrer l'existence de la solution locale, commençons par le lemme suivant.

Lemme 3.3.1 *Si*

$$\|g\|_{L^2} \leq c_\alpha \varepsilon^{3/4}, \quad (3.21)$$

où

$$c_\alpha = \frac{\sqrt{3\bar{\alpha}}}{32c_1c_R}, \quad \bar{\alpha} = \min(1, \alpha_1, \alpha_2) \quad (3.22)$$

alors on a

$$G(W_\varepsilon) \subset W_\varepsilon, \quad (3.23)$$

où

$$W_\varepsilon = \{u \in H^2(0, 1; \mathbb{R}^n) \cap H_0^1(0, 1; \mathbb{R}^n) \mid$$

$$\varepsilon^3 \alpha_2 \|u''\|_{L^2}^2 + \varepsilon \alpha_1 \|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon^{3/2} K\},$$

$$K = \frac{\bar{\alpha}^2}{64c_1c_R^2}. \quad (3.25)$$

DÉMONSTRATION. On rappelle que, en vertu de (3.8), on a

$$\|R(\cdot, u, u')\|_{L^2} \leq c_R (\|u\|_{L^\infty} (\|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2}) + \varepsilon \|u'\|_{L^\infty} \|u'\|_{L^2}),$$

or, comme

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^2}^{1/2} \|u'\|_{L^2}^{1/2}, \quad \|u'\|_{L^\infty} \leq \|u'\|_{L^2}^{1/2} \|u''\|_{L^2}^{1/2},$$

on a, pour $0 < \varepsilon \leq 1$,

$$\begin{aligned} \|R(\cdot, u, u')\|_{L^2} &\leq c_R (\|u\|_{L^2}^{3/2} \|u'\|_{L^2}^{1/2} + \|u\|_{L^2}^{1/2} \|u'\|_{L^2}^{3/2} + \varepsilon \|u'\|_{L^2}^{3/2} \|u''\|_{L^2}^{1/2}) \\ &\leq \frac{c_R}{\varepsilon^{3/4}} (\varepsilon^{1/4} \|u\|_{L^2}^{3/2} \|u'\|_{L^2}^{1/2} + \varepsilon^{3/4} \|u\|_{L^2}^{1/2} \|u'\|_{L^2}^{3/2} + \varepsilon^{3/4} \|u'\|_{L^2}^{3/2} \varepsilon^{3/4} \|u''\|_{L^2}^{1/2}). \end{aligned}$$

On va estimer chaque terme individuellement, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1/4} \|u\|_{L^2}^{3/2} \|u'\|_{L^2}^{1/2} &\leq \varepsilon^{1/4} \|u\|_{L^2} \|u\|_{L^2}^{1/2} \|u'\|_{L^2}^{1/2} \\ &\leq \|u\|_{L^2} (\varepsilon^{1/2} \|u\|_{L^2} \|u'\|_{L^2})^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2} (\|u\|_{L^2}^2 + \varepsilon^{1/2} \|u\|_{L^2} \|u'\|_{L^2}) \\ &\leq \frac{1}{2} (\|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} (\|u\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|u'\|_{L^2}^2)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varepsilon^{3/4} \|u\|_{L^2}^{1/2} \|u'\|_{L^2}^{3/2} &\leq \varepsilon^{1/2} \|u'\|_{L^2} \varepsilon^{1/4} \|u'\|_{L^2}^{1/2} \|u\|_{L^2}^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2} (\varepsilon \|u'\|_{L^2}^2 + \varepsilon^{1/2} \|u'\|_{L^2} \|u\|_{L^2}) \\ &\leq \frac{1}{2} (\varepsilon \|u'\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon \|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2)), \end{aligned}$$

de plus, on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{3/4} \|u'\|_{L^2}^{3/2} \varepsilon^{3/4} \|u''\|_{L^2}^{1/2} &\leq \varepsilon^{1/2} \|u'\|_{L^2} \varepsilon^{1/4} \|u'\|_{L^2}^{1/2} \varepsilon^{3/4} \|u''\|_{L^2}^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{2} (\varepsilon \|u'\|_{L^2}^2 + \varepsilon^{1/2} \|u'\|_{L^2} \varepsilon^{3/2} \|u''\|_{L^2}) \\
&\leq \frac{1}{2} (\varepsilon \|u'\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon \|u'\|_{L^2}^2 + \varepsilon^3 \|u''\|_{L^2}^2)).
\end{aligned}$$

Enfin, en faisant la somme de ces trois termes, on obtient

$$\|R(\cdot, u, u')\|_{L^2} \leq c_R \frac{1}{\varepsilon^{3/4}} (\|u\|_{L^2}^2 + \varepsilon \frac{7}{4} \|u'\|_{L^2}^2 + \varepsilon^3 \frac{1}{4} \|u''\|_{L^2}^2).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\|R(\cdot, u, u')\|_{L^2} &\leq \frac{2c_R}{\varepsilon^{3/4}} (\|u\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|u'\|_{L^2}^2 + \varepsilon^3 \|u''\|_{L^2}^2) \leq \quad (3.26) \\
&\leq \frac{2c_R}{\alpha \varepsilon^{3/4}} (\|u\|_{L^2}^2 + \varepsilon \alpha_1 \|u'\|_{L^2}^2 + \varepsilon^3 \alpha_2 \|u''\|_{L^2}^2),
\end{aligned}$$

d'où on obtient

$$\|g - R(\cdot, \bar{u}, \bar{u}')\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^2} + \frac{2c_R}{\alpha \varepsilon^{3/4}} (\|\bar{u}\|_{L^2}^2 + \varepsilon \alpha_1 \|\bar{u}'\|_{L^2}^2 + \varepsilon^3 \alpha_2 \|\bar{u}''\|_{L^2}^2). \quad (3.27)$$

Donc

$$\|g - R(\cdot, \bar{u}, \bar{u}')\|_{L^2}^2 \leq 2(\|g\|_{L^2}^2 + (\frac{2c_R}{\alpha \varepsilon^{3/4}} (\|\bar{u}\|_{L^2}^2 + \varepsilon \alpha_1 \|\bar{u}'\|_{L^2}^2 + \varepsilon^3 \alpha_2 \|\bar{u}''\|_{L^2}^2))^2). \quad (3.28)$$

Donc, en vertu du lemme 3.2.1 et de (3.21), on a

$$\varepsilon^3 \alpha_2 \|u''\|_{L^2}^2 + \varepsilon \alpha_1 \|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \leq$$

$$4c_1 \left(c_\alpha^2 \varepsilon^{3/2} + \frac{4c_R^2}{\bar{\alpha}^2 \varepsilon^{3/2}} (\varepsilon^3 \alpha_2 \|\bar{u}''\|_{L^2}^2 + \varepsilon \alpha_1 \|\bar{u}'\|_{L^2}^2 + \|\bar{u}\|_{L^2}^2)^2 \right),$$

ce qui implique que, si

$$\varepsilon^3 \alpha_2 \|\bar{u}''\|_{L^2}^2 + \varepsilon \alpha_1 \|\bar{u}'\|_{L^2}^2 + \|\bar{u}\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon^{3/2} K,$$

où K est la constante définie dans (3.25), alors on a

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \alpha_2 \|u''\|_{L^2}^2 + \varepsilon \alpha_1 \|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 &\leq 4c_1 \left(c_\alpha^2 \varepsilon^{3/2} + \frac{4c_R^2}{\bar{\alpha}^2 \varepsilon^{3/2}} \frac{(\varepsilon^{3/2})^2 \bar{\alpha}^4}{(64)^2 c_1^2 c_R^4} \right), \\ &= 4c_1 \left(\frac{3\bar{\alpha}^2}{(32)^2 c_1^2 c_R^2} \varepsilon^{3/2} + \frac{4\bar{\alpha}^2}{(64)^2 c_1^2 c_R^2} \varepsilon^{3/2} \right), \\ &= 4c_1 \varepsilon^{3/2} \left(\frac{3\bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha}^2}{(32)^2 c_1^2 c_R^2} \right), \\ &= \varepsilon^{3/2} \frac{16\bar{\alpha}^2}{(32)^2 c_1 c_R^2}, \\ &= \varepsilon^{3/2} K, \end{aligned}$$

c'est-à-dire la relation (3.23) est vérifiée. \square

Proposition 3.3.1 *Si g vérifie la condition (3.21)-(3.22), alors l'équation (3.11) admet au moins une solution u appartenant à $H^2(0, 1; \mathbb{R}^n) \cap H_0^1(0, 1; \mathbb{R}^n)$.*

DÉMONSTRATION. On considère d'abord l'équation (3.15) avec deux fonctions données γ_1 et γ_2 . En raisonnant de manière analogue à la démonstration du lemme 3.2.1, on obtient

$$\varepsilon \|v'\|_{L^2}^2 + \tilde{c}_1 \|v\|_{L^2}^2 \leq \tilde{c}_2 \|\gamma_1 - \gamma_2\|_{H^{-1}},$$

où \tilde{c}_1 et \tilde{c}_2 sont deux constantes strictement positives et

$$v = u^{(1)} - u^{(2)},$$

$u^{(i)}$ étant la solution du problème (3.15)-(3.16) avec $\gamma = \gamma_i$, $i = 1, 2$. Cela étant, en rappelant l'hypothèse (ii), on peut conclure que l'opérateur G qui, à $\bar{u} \in W_\varepsilon$, associe la solution $u \in H_0^1(0, 1; \mathbb{R}^n)$ de l'équation (3.20) est continu (si on considère G comme opérateur : $H_0^1(0, 1; \mathbb{R}^n) \rightarrow H_0^1(0, 1; \mathbb{R}^n)$ restreint au domaine W_ε), pourvu que

$$\varepsilon^{3/2} K + \varepsilon^{1/2} \frac{K}{\alpha_1} \leq R_1^2. \quad (3.29)$$

Comme W_ε est borné dans $H^2(0, 1; \mathbb{R}^n)$ et fermé aussi dans $H^1(0, 1; \mathbb{R}^n)$, d'après le théorème de l'injection compacte, W_ε est compact dans $H^1(0, 1; \mathbb{R}^n)$. Il est en outre convexe ; par suite, d'après le **théorème de point fixe de Schauder** (voir par exemple [13]), il existe un élément u de W_ε tel que

$$G(u) = u,$$

ce qui achève la démonstration. \square

Chapitre 4

Existence d'une solution stationnaire du mouvement de l'air

Dans ce chapitre, en nous basant sur les propriétés d'une classe de systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires du second ordre étudiée dans le chapitre précédent, on va montrer que, pour l'équation monodimensionnelle du mouvement stationnaire d'un gaz visqueux et calorifère en coordonnées eulériennes, la petitesse des coefficients de viscosité et de thermoconductibilité nous permet de trouver une solution avec la condition de l'entrée et de la sortie du domaine du gaz dans un voisinage de la solution de l'équation sans viscosité et thermoconductibilité.

4.1 Position du problème

Considérons l'écoulement stationnaire d'un gaz visqueux et calorifère dans une couche proche de la surface ou, ce qui est équivalent mais plus facile à imaginer, dans un tuyau que nous construisons dans notre esprit. Il nous est commode de le décrire, dans une approximation, par le système d'équations en une dimension, en utilisant les variables spatiales représentant la position

dans le tuyau dans la direction du tuyau. Une forme de système d'équations applicable à de différentes situations est

$$\frac{d}{dx}(\rho S w) = 0, \quad (4.1)$$

$$\rho w w' + p' = \varepsilon(a_0 w + a_1 w' + a_2 w'') + \rho f + f_0, \quad (4.2)$$

$$\rho c_v w T' + p w' = \varepsilon(b_0 T + b_1 T' + b_2 T'') + \varepsilon(d_0 w^2 + d_1 w w' + d_2 (w')^2) + \rho h + h_0. \quad (4.3)$$

Dans les équations (4.2) et (4.3) les termes $\varepsilon(a_0 w + a_1 w' + a_2 w'')$ et $\varepsilon(b_0 T + b_1 T' + b_2 T'')$ sont dûs à la viscosité et à la conductibilité thermique et le terme $\varepsilon(d_0 w^2 + d_1 w w' + d_2 (w')^2)$ doit correspondre à la source de la chaleur due à la friction interne du gaz, ε étant une constante positive. Nous supposons que

$$\inf_x a_2(x) > 0, \quad \inf_x b_2(x) > 0. \quad (4.4)$$

Dans (4.2)-(4.3) on suppose que les coefficients $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, d_0, d_1, d_2$ ainsi que les fonctions f, f_0, h, h_0 sont régulières et bornées.

Le système d'équations (4.1)-(4.3) est une version de (1.1) du chap. II de [1], version adaptée à l'éventuelle courbure du tuyau et à l'éventuelle présence des forces extérieures $\rho f + f_0$ et des sources de la chaleur $\rho h + h_0$. Pour les propriétés physiques du système d'équations, on peut consulter par exemple [16].

L'équation (4.1) nous permet de réduire $\rho(x)$ à une fonction de $w(x)$, c'est-à-dire on aura

$$\rho(x) = \frac{K_\rho}{S(x)w(x)}, \quad (4.5)$$

où K_ρ est une constante ; sans restreindre la généralité, on peut supposer que $K_\rho > 0$ (le cas $K_\rho = 0$ ne nous intéresse pas). En substituant (2.5) et (4.5) dans (4.2) et (4.3) on obtient le système d'équations ayant deux seules fonctions inconnues w et T

$$\frac{K_\rho}{S} w' + R_1 K_\rho \left(\frac{T}{Sw}\right)' = \varepsilon (a_0 w + a_1 w' + a_2 w'') + \frac{K_\rho}{Sw} f + f_0, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{K_\rho}{S} c_v T' + R_1 \frac{K_\rho}{S} \frac{T}{w} w' = \\ = \varepsilon (b_0 T + b_1 T' + b_2 T'') + \varepsilon (d_0 w^2 + d_1 w w' + d_2 (w')^2) + \frac{K_\rho}{Sw} h + h_0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

On va montrer l'existence de la solution (w, T) du système d'équations du mouvement stationnaire d'un gaz en une dimension (4.6)-(4.7) avec un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit dans un voisinage de la solution (\bar{w}, \bar{T}) du système (4.6)-(4.7) avec $\varepsilon = 0$. Il nous est utile de rappeler que, dans les gaz généraux les coefficients de viscosité et de thermoconductibilité sont très petits devant les coefficients des termes de dérivées premières. Dans le chapitre suivant on va montrer, par un calcul numérique, que $(w - \bar{w})$ et $(T - \bar{T})$ sont petits.

Considérons les équations correspondantes à (4.6)-(4.7) avec $\varepsilon = 0$; en écrivant \bar{w} et \bar{T} les fonctions inconnues, on a à considérer

$$\frac{K_\rho}{S} \bar{w}' + R_1 K_\rho \left(\frac{\bar{T}}{S\bar{w}}\right)' = \frac{K_\rho}{S\bar{w}} f + f_0, \quad (4.8)$$

$$\frac{K_\rho}{S} c_v \bar{T}' + R_1 \frac{K_\rho}{S} \frac{\bar{T}}{\bar{w}} \bar{w}' = \frac{K_\rho}{S\bar{w}} h + h_0. \quad (4.9)$$

Nous supposons que le système d'équations (4.8)-(4.9) dans l'intervalle $[0, 1]$ admet une solution (\bar{w}, \bar{T}) et que \bar{w} et \bar{T} appartient à $H^2(0, 1)$ et vérifient les

relations

$$\inf_{0 \leq x \leq 1} \bar{T}(x) > 0, \quad \inf_{0 \leq x \leq 1} \bar{w}(x) > 0. \quad (4.10)$$

En posant

$$\bar{w}_0 = \bar{w}(0), \quad \bar{w}_1 = \bar{w}(1), \quad \bar{T}_0 = \bar{T}(0), \quad \bar{T}_1 = \bar{T}(1), \quad (4.11)$$

nous allons considérer le système d'équations (4.6)-(4.7) avec les conditions aux limites

$$w(0) = \bar{w}_0, \quad w(1) = \bar{w}_1, \quad T(0) = \bar{T}_0, \quad T(1) = \bar{T}_1. \quad (4.12)$$

4.2 Equation linéarisée

On considère le système d'équations (4.6)-(4.7) dans le domaine en une dimension $[0, 1]$, aux extrémités duquel nous posons les conditions aux limites non-homogènes (4.12). Il nous est commode de considérer, au lieu de w , la fonction inconnue u et au lieu de T , la fonction inconnue ϑ définie par

$$u = w - \bar{w}, \quad \vartheta = T - \bar{T}. \quad (4.13)$$

Les conditions aux limites deviennent conditions homogènes

$$u(0) = u(1) = \vartheta(0) = \vartheta(1) = 0. \quad (4.14)$$

En substituant la relation (4.13) dans les équations (4.6)-(4.7) et après des calculs, nous pouvons transformer (4.6)-(4.7) en des équations en fonction de u et ϑ

$$\varepsilon a_2 u'' + B_{11} u' + B_{12} \vartheta' + C_{11} u + C_{12} \vartheta = F(\bar{w}, \bar{T}, u, \vartheta), \quad (4.15)$$

$$\varepsilon b_2 \vartheta'' + B_{21} u' + B_{22} \vartheta' + C_{21} u + C_{22} \vartheta = G(\bar{w}, \bar{T}, u, \vartheta), \quad (4.16)$$

où $F(\bar{w}, \bar{T}, u, \vartheta) = -\varepsilon A_1(\bar{w}) - N_1(u, \vartheta)$ et $G(\bar{w}, \bar{T}, u, \vartheta) = -\varepsilon A_2(\bar{T}, \bar{w}) - N_2(u, \vartheta)$ sont des sommes des termes non linéaires avec

$$A_1(\bar{w}) = a_0 \bar{w} + a_1 \bar{w}' + a_2 \bar{w}'',$$

$$A_2(\bar{T}, \bar{w}) = b_0 \bar{T} + b_1 \bar{T}' + b_2 \bar{T}'' + d_1 \bar{w}^2 + d_1 \bar{w} \bar{w}' + d_2 (\bar{w}')^2,$$

$$N_1(u, \vartheta) = -R_1 K_\rho \left[\left(\frac{\bar{T} + \vartheta}{S(\bar{w} + u)} \right)' - \left(\frac{\bar{T}}{S\bar{w}} \right)' + \frac{\bar{T}}{S\bar{w}^2} u' - \frac{\vartheta'}{S\bar{w}} + \left(\bar{T}' \frac{1}{S} + \bar{T} \left(\frac{1}{S} \right)' \right) \frac{u}{\bar{w}^2} + \right. \\ \left. + \frac{(S\bar{w})'}{S^2 \bar{w}^2} \vartheta \right] + \frac{K_\rho}{S} f \left[\frac{1}{\bar{w} - u} - \frac{1}{\bar{w}} + \frac{u}{\bar{w}^2} \right],$$

$$N_2(u, \vartheta) = \frac{-R_1 K_\rho}{S} \left[\frac{\bar{T} + \vartheta}{\bar{w} + u} (\bar{w} + u)' - \frac{\bar{T}}{\bar{w}} \bar{w}' - \frac{\bar{T}}{\bar{w}} u' - \frac{\bar{T}}{\bar{w}^2} \bar{w}' u - \frac{\bar{w}'}{\bar{w}} \vartheta \right] + \\ + \frac{K_\rho}{S} h \left[\frac{1}{\bar{w} - u} - \frac{1}{\bar{w}} + \frac{u}{\bar{w}^2} \right] + \varepsilon (d_0 u^2 + d_1 u u' + d_2 (u')^2),$$

et $B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}, C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ sont des coefficients des parties linéaires définies comme suit

$$B_{11} = -\frac{K_\rho}{S} + R_1 K_\rho \frac{\bar{T}}{S\bar{w}^2} + \varepsilon a_1, \quad B_{12} = -R_1 \frac{K_\rho}{\bar{w}S},$$

$$B_{21} = -R_1 \frac{K_\rho \bar{T}}{S \bar{w}} + \varepsilon(d_1 \bar{w} + 2d_2 \bar{w}'), \quad B_{22} = -\frac{K_\rho}{S} c_v + \varepsilon b_1,$$

$$C_{11} = R_1 \frac{K_\rho \bar{T}'}{S \bar{w}^2} + R_1 \frac{K_\rho S' \bar{T}}{S^2 \bar{w}^2} - \frac{K_\rho f}{S \bar{w}^2} + \varepsilon a_0, \quad C_{12} = R_1 \frac{K_\rho}{\bar{w}^2 S^2} (S \bar{w})',$$

$$C_{21} = R_1 \frac{K_\rho \bar{T} \bar{w}'}{S \bar{w}^2} - \frac{K_\rho}{S \bar{w}^2} h + \varepsilon(2d_0 \bar{w} + d_1 \bar{w}'), \quad C_{22} = -R_1 \frac{K_\rho \bar{w}'}{S \bar{w}} + \varepsilon b_0.$$

Pour résoudre le système non linéaire (4.15)-(4.16) avec les conditions aux limites (4.14) , nous commençons par étudier les équations linéarisées

$$\varepsilon a_2 u'' + B_{11} u' + B_{12} \vartheta' + C_{11} u + C_{12} \vartheta = \bar{F}, \quad (4.17)$$

$$\varepsilon b_2 \vartheta'' + B_{21} u' + B_{22} \vartheta' + C_{21} u + C_{22} \vartheta = \bar{G}. \quad (4.18)$$

Le système d'équations (4.17)-(4.18) doit être envisagé avec les conditions aux limites (4.14).

Pour obtenir l'existence d'une solution (u, ϑ) des équations (4.15)-(4.16), on considère d'abord les équations linéarisées, pour lesquelles on obtiendra une estimation du type

$$\varepsilon^3 (\|u''\|_{L^2}^2 + \|\vartheta''\|_{L^2}^2) + \varepsilon (\|u'\|_{L^2}^2 + \|\vartheta'\|_{L^2}^2) + \|u\|_{L^2}^2 + \|\vartheta\|_{L^2}^2 \leq C (\|\bar{F}\|_{L^2}^2 + \|\bar{G}\|_{L^2}^2). \quad (4.19)$$

4.3 Existence de la solution du système d'équations non linéaire

Retournant aux système d'équations non linéaire, pour résoudre les équations (4.15)-(4.16) et estimer d'une manière convenable les termes $F(\bar{w}, \bar{T}, u, \vartheta)$ et $G(\bar{w}, \bar{T}, u, \vartheta)$. On a la proposition suivante.

Proposition 4.3.1 *On suppose que*

$$\bar{w}, \bar{T} \in H^2([0, 1]), \quad \inf_{0 \leq x \leq 1} \bar{w}(x) > 0, \quad (4.20)$$

$$2c_v \leq \frac{R_1 \bar{T}}{w^2} (c_v + R_1), \quad \forall x \in [0, 1], \quad (4.21)$$

$$S \in \mathcal{C}^1([0, 1]); \quad f, h \in \mathcal{C}^0([0, 1]), \quad \inf_{0 \leq x \leq 1} S(x) > 0. \quad (4.22)$$

Alors il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que, si $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, le système d'équations (4.15)-(4.16) avec les conditions aux limites (4.14) admet une solution (u, ϑ) appartenant à $H^2(0, 1; \mathbb{R}^n) \cap H_0^1(0, 1; \mathbb{R}^n)$.

On rappelle que l'hypothèse (4.21) implique implicitement la condition $\inf_{0 \leq x \leq 1} \bar{T}(x) > 0$.

DÉMONSTRATION. Par des calculs élémentaires et les conditions (4.20)-(4.22), on peut constater que la fonction

$$R(\cdot, u, \vartheta, u', \vartheta') = (N_1(u, \vartheta), N_2(u, \vartheta))$$

vérifie les conditions (i) et (ii) de la section 3.1 (avec des modifications évidentes de notations).

D'après la condition (4.21), on peut garantir que la matrice $\widehat{B} = \int_0^1 B dx$ est inversible, donc on peut définir la matrice Γ indépendante de x donnée par

$$\Gamma = [\bar{k} + 1]^+ \widehat{B}^{-1}, \quad \bar{k} = \sup_{|\nu|=1} {}^t \nu C \nu.$$

Pour $\varepsilon > 0$, on définit les matrices \widetilde{B} , \widetilde{C} et D données par

$$\widetilde{B}(x) = B(x) - 2\varepsilon\Gamma,$$

$$\widetilde{C}(x) = C(x) - B(x)\Gamma + \varepsilon\Gamma^2,$$

$$D(x) = \begin{pmatrix} \frac{\widetilde{B}_{21}}{\widetilde{B}_{12}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\frac{\widetilde{B}_{21}}{\widetilde{B}_{12}} \rightarrow \bar{T}$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$, il n'est pas difficile de voir qu'il existe un $\varepsilon_0^{(1)} > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0^{(1)}$ les conditions (3.5)-(3.7) soient vérifiées.

Pour appliquer la proposition 3.3.1, on pose

$$g = (g_1, g_2), \quad g_1 = \varepsilon A_1(\bar{w}), \quad g_2 = \varepsilon A_2(\bar{T}, \bar{w}).$$

Nous remarquons que $A_1(\bar{w})$ et $A_2(\bar{T}, \bar{w})$ sont indépendants de ε ; donc en vertu de la condition (4.20), on a

$$\|g_1\|_{L^2} \leq \varepsilon C_1, \quad \|g_2\|_{L^2} \leq \varepsilon C_2,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes indépendantes de ε . On a donc

$$\|g\|_{L^2} \leq \varepsilon (C_1^2 + C_2^2)^{1/2}.$$

Il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_0^{(1)}$ et que pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ la condition (3.21) soit vérifiée, c'est-à-dire

$$\|g\|_{L^2} = (\|g_1\|_{L^2}^2 + \|g_2\|_{L^2}^2)^{1/2} \leq c_\alpha \varepsilon^{3/4},$$

et donc d'après la proposition 3.3.1 le système d'équations (4.15)-(4.16) avec les conditions aux limites (4.14) admette une solution (u, ϑ) appartenant à $H^2(0, 1; \mathbb{R}^2) \cap H_0^1(0, 1; \mathbb{R}^2)$. \square

Corollaire 4.3.1 *Le système d'équations (4.6)-(4.7) avec les conditions aux limites (4.12) admet une solution (w, T) appartenant à $H^2(0, 1; \mathbb{R}^2) \cap H_0^1(0, 1; \mathbb{R}^2)$.*

En ce qui concerne l'unicité de la solution, la méthode utilisée ne nous permettra, dans l'immédiat, d'obtenir que l'existence d'une solution et il nous semble que la question de l'unicité de la solution devra être étudiée avec une nouvelle méthode.

Chapitre 5

Etude numérique de l'équation du mouvement de l'air

Il sera très utile si on peut montrer la validité de notre modélisation par des simulations numériques. Dans ce chapitre nous présentons deux exemples numériques d'un mouvement de l'air qui passe sur une montagne, c'est-à-dire sur des lieux élevés, un cas d'air sec et un cas d'air avec vapeur d'eau. Les résultats du calcul numérique sont obtenus pour des équations stationnaires du mouvement de l'air en une dimension. Les équations considérées concernent la vitesse, la température, la densité et la pression de l'air.

5.1 Exemple 1 : Mouvement de l'air qui passe sur une montagne (cas d'air sec)

Dans le premier exemple nous présentons les résultats de calcul pour l'équation du mouvement stationnaire d'un air sec en une dimension passant sur des lieux élevés ; nous allons traiter l'équation sans viscosité et sans thermoconductibilité et l'équation analogue avec la viscosité et la thermoconductibilité. On verra que les deux solutions numériques ne diffèrent pas sensiblement, ce

qui confirme le résultat du chapitre précédent c'est-à-dire dans le voisinage de la solution (\bar{w}, \bar{T}) du système d'équations sans viscosité et sans thermoconductibilité, on peut trouver une solution (w, T) du système d'équations avec viscosité et avec thermoconductibilité. Dans notre calcul il résulte que la solution (w, T) est effectivement proche de la solution (\bar{w}, \bar{T}) du système d'équations sans viscosité, pourvu que les coefficients de viscosité et de conductibilité thermiques soient suffisamment petits.

Sur le plan technique, nous utilisons la **méthode de différences finies** (pour les généralités de la **méthode de différences finies** et ses applications aux équations de ce type, voir par exemple [23], [22]).

Nous retournons aux équations du mouvement stationnaire de l'air en une dimension spatiale (2.20) et (2.21) étudiées dans le chapitre 2. Nous résolvons les équations (2.20) et (2.21) avec la fonction $S(x)$ donnée et pour la commodité du calcul, nous choisissons $S \equiv 1$. L'écoulement de l'air peut être décrit par l'équation de la quantité de mouvement

$$K_\rho \frac{d}{dx} w = f_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + f_2 w \quad (5.1)$$

$$- \frac{R_1 K_\rho}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{1+h'^2} \frac{T}{w} \right) - h' \frac{K_\rho}{w} g - \alpha w + \gamma,$$

et l'équation du bilan de l'énergie

$$K_\rho c_v \frac{dT}{dx} = \kappa \frac{d^2 T}{dx^2} - R_1 \frac{K_\rho \sqrt{1+h'^2}}{w} T \frac{d}{dx} \left(\frac{w}{\sqrt{1+h'^2}} \right) + \quad (5.2)$$

$$+ g_1 \left(\frac{d}{dx} w \right)^2 + g_2 w \frac{d}{dx} w + g_3 w^2.$$

Comme on le voit immédiatement, dans le cas où $\eta = \zeta = \kappa = 0$, le système d'équations se réduit à

$$K_\rho \frac{d}{dx} \bar{w} + \frac{R_1 K_\rho}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx} (\sqrt{1+h'^2} \frac{\bar{T}}{\bar{w}}) = -\frac{K_\rho}{\bar{w}} h' g - \alpha \bar{w} + \gamma, \quad (5.3)$$

$$K_\rho c_v \frac{d\bar{T}}{dx} + R_1 \frac{K_\rho \sqrt{1+h'^2}}{\bar{w}} \bar{T} \frac{d}{dx} \left(\frac{\bar{w}}{\sqrt{1+h'^2}} \right) = 0. \quad (5.4)$$

5.2 Schéma numérique

Pour calculer la solution du système d'équations (5.3)-(5.4) et celle de (5.1)-(5.2), nous utilisons la **méthode de différences finies** avec l'approximation centrée

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=i} \approx \frac{w(i+1) - w(i-1)}{2\delta},$$

$$\left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_{x=i} \approx \frac{w(i+1) - 2w(i) + w(i-1)}{\delta^2}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N-1$$

et analoguement pour T , où $\delta = \frac{L}{N}$ et L est la longueur du domaine. En discrétisant l'équation (5.1), on a

$$\begin{aligned} K_\rho \frac{w(i+1) - w(i-1)}{2} \frac{N}{L} &= f_1(i)(w(i+1) - 2w(i) + w(i-1)) \frac{N^2}{L^2} + \\ &+ f_2(i)w(i) - \frac{K_\rho R_1}{\sqrt{1+h'^2(i)}} \left[\left(\frac{d\sqrt{1+h'^2}}{dx} \right)(i) \frac{T(i)}{w(i)} + \right. \\ &+ \left. \sqrt{1+h'^2(i)} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{w(i+1)} - \frac{1}{w(i-1)} \right] \frac{N}{L} T(i) + \right. \\ &+ \left. \frac{\sqrt{1+h'^2(i)}}{2} \frac{T(i+1) - T(i-1)}{w(i)} \frac{N}{L} \right] - h'(i) K_\rho g \frac{1}{w(i)} \\ &- \alpha w(i) + \gamma, \quad i = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (5.5)$$

tandis que la version discrétisée de (5.2) sera

$$\begin{aligned}
K_\rho c_v \frac{T(i+1) - T(i-1)}{2} \frac{N}{L} &= \kappa [T(i+1) - 2T(i) + T(i-1)] \frac{N^2}{L^2} \quad (5.6) \\
-R_1 K_\rho \sqrt{1+h'^2(i)} \frac{T(i)}{w(i)} &\left[\frac{w(i+1) - w(i-1)}{2} \frac{N}{L} \left(\frac{1}{\sqrt{1+h'^2(i)}} \right) \right. \\
&+ \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{1+h'^2}}(i) w(i) \left. \right] + g_1(i) \left(\frac{w(i+1) - w(i-1)}{2} \frac{N}{L} \right)^2 \\
&+ g_2(i) w(i) \frac{w(i+1) - w(i-1)}{2} \frac{N}{L} + g_3(i) w(i)^2, \\
&i = 1, \dots, N-1.
\end{aligned}$$

Pour la commodité du calcul nous réécrivons les équations (5.5) et (5.6) dans la forme

$$\begin{aligned}
w(i+1) \left[\frac{K_\rho N}{2} \frac{1}{L} - f_1(i) \frac{N^2}{L^2} - \frac{K_\rho R_1 N}{2} \frac{T(i)}{L w(i)^2} \right] &+ T(i+1) \left[\frac{K_\rho R_1 N}{2} \frac{1}{L w(i)} \right] = \quad (5.7) \\
&= \frac{K_\rho}{2} w(i-1) \frac{N}{L} + f_1(i) (-2w(i) + w(i-1)) \frac{N^2}{L^2} + f_2(i) w(i) \\
&- \frac{K_\rho R_1}{\sqrt{1+h'^2(i)}} \left[\left(\frac{d\sqrt{1+h'^2}}{dx} \right)(i) \frac{T(i)}{w(i)} + \sqrt{1+h'^2(i)} \frac{w(i-1)T(i)}{2w(i)^2} \frac{N}{L} \right. \\
&\left. - \frac{\sqrt{1+h'^2(i)} T(i-1)}{2} \frac{N}{w(i) L} \right] - h'(i) K_\rho g \frac{1}{w(i)} - \alpha w(i) + \gamma, \quad i = 1, \dots, N-1,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
w(i+1) \left[R_1 \frac{K_\rho N}{2} \frac{T(i)}{L w(i)} - \frac{1}{2} g_2(i) \frac{N}{L} w(i) - g_1(i) \frac{w(i) - w(i-1)}{2} \frac{N^2}{L^2} \right] &\quad (5.8) \\
+ T(i+1) \left[\frac{K_\rho c_v N}{2} \frac{1}{L} - \kappa \frac{N^2}{L^2} \right] &= \frac{K_\rho c_v N}{2} \frac{1}{L} T(i-1) + \kappa [-2T(i) + T(i-1)] \frac{N^2}{L^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -R_1 K_\rho \sqrt{1+h'^2(i)} \frac{T(i)}{w(i)} \left[\frac{-w(i-1)N}{2} \frac{1}{L} \left(\frac{1}{\sqrt{1+h'^2(i)}} \right) + w(i) \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{1+h'^2(i)}}(i) \right] \\
& -g_1(i) w(i-1) \left(w(i) - \frac{1}{2} w(i-1) \right) \frac{N^2}{L^2} - g_2(i) w(i) \frac{w(i-1)N}{2} \frac{1}{L} \\
& + g_3(i) w(i)^2, \quad i = 1, \dots, N-1.
\end{aligned}$$

Ici nous avons également adopté l'approximation

$$g_1(i) \left(\frac{w(i+1) - w(i-1)N}{2} \frac{1}{L} \right)^2 \approx g_1(i) \left(\frac{w(i+1) - w(i-1)N}{2} \frac{1}{L} \right) (w(i) - w(i-1)) \frac{1}{L},$$

du terme non-linéaire pour rendre explicite le schéma numérique.

5.3 Résultat du calcul numérique

Nous avons effectué le calcul selon le schéma illustré ci-dessus, en choisissant le domaine $0 \leq x \leq L$, où $L = 2 \cdot 10^5$ m dévisé en 200 pas ($i = 0, 1, \dots, 200$).

$$h(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-10^5}{8 \cdot 10^4} + 1 \right)^4 \left(\frac{x-10^5}{8 \cdot 10^4} - 1 \right)^4 & \text{si } 2 \cdot 10^4 \leq x \leq 18 \cdot 10^4, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

En outre nous avons utilisé les valeurs suivantes : l'accélération de la pesanteur $g = 9,8 \text{ m}^2/\text{s}^2$, la constante universelle des gaz $R = 8,31 \cdot 10^7 \text{ erg/mole} \cdot \text{K}$, la masse moléculaire moyenne de l'air $\mu_m = 28,96 \text{ g/mole}$, la chaleur spécifique $c_v = \frac{5}{2} \frac{R}{\mu_m}$, la pression au point initial ($i = 0$) 1013 mbar [dans le calcul nous utilisons la constante conventionnelle K_ρ calculée à partir de pression au point initial et la densité ρ], le coefficient de friction $\alpha = 0,1$ et le gradient de pression de base $\gamma = 0,2$ [ça correspond à la différence de $0,4 \text{ mbar}$ de la pression en 200 Km].

Calculons d'abord la solution (\bar{w}, \bar{T}) de l'équations (5.7)-(5.8) avec $\eta = \zeta = \kappa = 0$. Comme le système d'équations (5.7)-(5.8) a besoin d'être complété par les conditions initiales, nous choisissons les valeurs initiales

$$\bar{w}(i = 0) = 2 \text{ m/s}, \quad \bar{T}(i = 0) = 293,150^\circ \text{ K}.$$

D'après notre calcul, il résulte que leurs valeurs "finales" sont

$$\bar{w}(i = 200) \approx 2,0000 \text{ m/s} \quad \bar{T}(i = 200) \approx 293,149^\circ \text{ K}.$$

En ce qui concerne les coefficients de viscosité et celui de thermoconductibilité, qui sont très petits par rapport aux autres coefficients, dans les calculs effectués nous avons constaté que le choix de leur valeur ne modifie pratiquement pas le résultat. Nous avons donc choisi leur valeur arbitraire pour la commodité de calcul. Ainsi, nous avons calculé la solution (w, T) d'équations (5.7)-(5.8) avec $\eta = 120$, $\zeta = 40$, $\kappa = 100$ et avec les conditions aux limites

$$w(0) = \bar{w}(i = 0) = 2,0000 \text{ m/s}, \quad w(i = 200) \approx \bar{w}(i = 200) = 2,0000 \text{ m/s},$$

$$T(0) = \bar{T}(i = 0) = 293,150^\circ \text{ K}, \quad T(i = 200) \approx \bar{T}(i = 200) = 293,149^\circ \text{ K}.$$

Par la méthode de "shooting" (solution qui approche le mieux les valeurs finales $w(i = 200) = 2,0000 \text{ m/s}$, $T(i = 200) = 293,149^\circ \text{ K}$ son idée de base se trouve dans de nombreux manuels, par exemple [7] et [8]) nous avons obtenu la solution (w, T) de (5.7)-(5.8).

Nous illustrons ci-dessous les valeurs de la solution $(\bar{w}(i), \bar{T}(i))$ du système d'équations avec $\eta = \zeta = \kappa = 0$ et celles de la solution $(w(i), T(i))$ du système d'équations avec $\eta = 120$, $\zeta = 40$, $\kappa = 100$, pour $i = 0, 50, 75, 100, 125, 150, 200$:

La vitesse du vent

	SANS VISCOSITE	AVEC LA VISCOSITE
$i = 0$	$\bar{w} = 2.0000$	$w = 2.0000$
$i = 50$	$\bar{w} = 2.0000$	$w = 2.0000$
$i = 75$	$\bar{w} = 2.0239$	$w = 2.0248$
$i = 100$	$\bar{w} = 2.1768$	$w = 2.1766$
$i = 125$	$\bar{w} = 2.0239$	$w = 2.0224$
$i = 150$	$\bar{w} = 2.0000$	$w = 1.9995$
$i = 200$	$\bar{w} = 2.0000$	$w = 1.9997$

La température

	SANS VISCOSITE	AVEC LA VISCOSITE
$i = 0$	$\bar{T} = 293.150$	$T = 293.150$
$i = 50$	$\bar{T} = 293.150$	$T = 293.149$
$i = 75$	$\bar{T} = 291.809$	$T = 291.949$
$i = 100$	$\bar{T} = 283.382$	$T = 283.366$
$i = 125$	$\bar{T} = 291.809$	$T = 291.642$
$i = 150$	$\bar{T} = 293.149$	$T = 293.121$
$i = 200$	$\bar{T} = 293.149$	$T = 293.149$

5.4 Conclusion

Ces résultats confirment, nous pensons, que dans le voisinage de la solution (\bar{w}, \bar{T}) du système d'équations sans viscosité et sans thermoconductibilité, on peut trouver une solution (w, T) du système d'équations avec viscosité et thermoconductibilité, pourvu que les coefficients de viscosité et de conductibilité thermiques soient suffisamment petits. En outre, ces résultats coïncident de manière satisfaisante avec la théorie physique et ce que l'on observe dans l'atmosphère réelle.

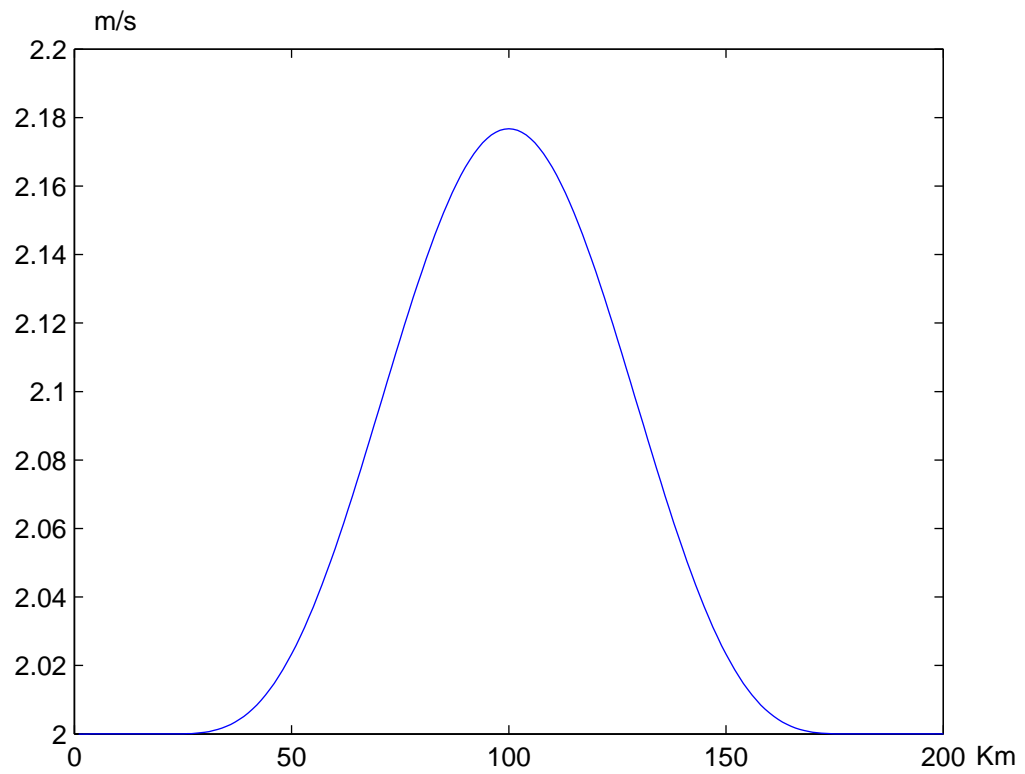


FIGURE 5.1 – La vitesse sans viscosité et sans thermoconductibilité

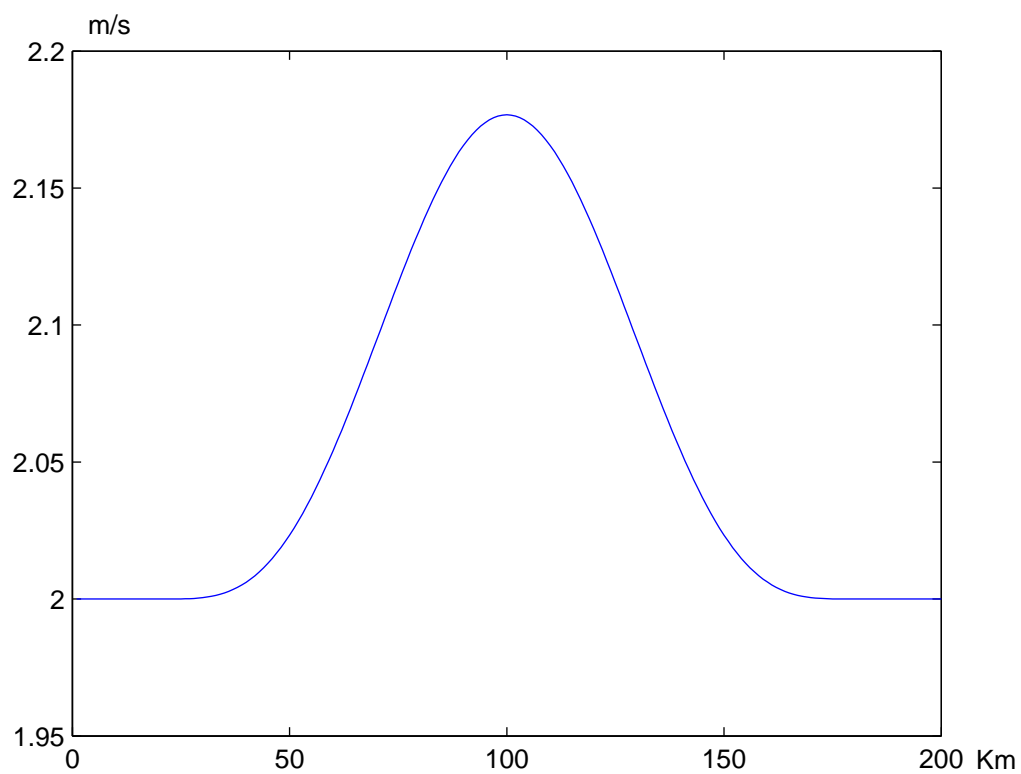


FIGURE 5.2 – La vitesse avec viscosité et avec thermoconductibilité

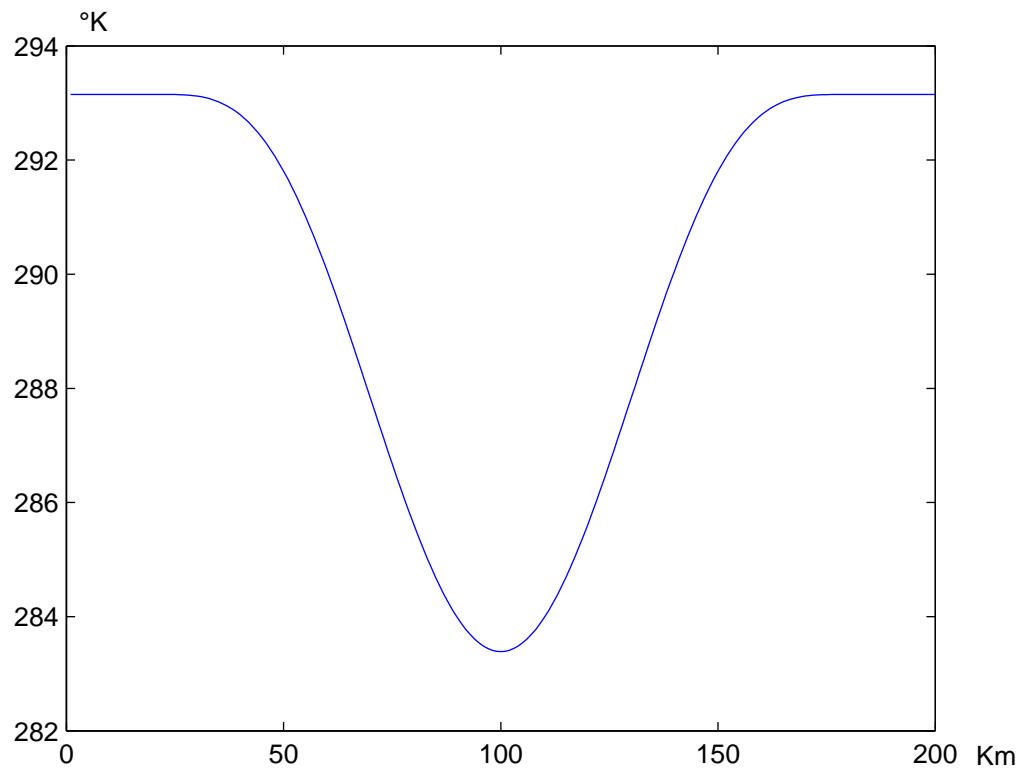


FIGURE 5.3 – La température sans viscosité et sans thermoconductibilité

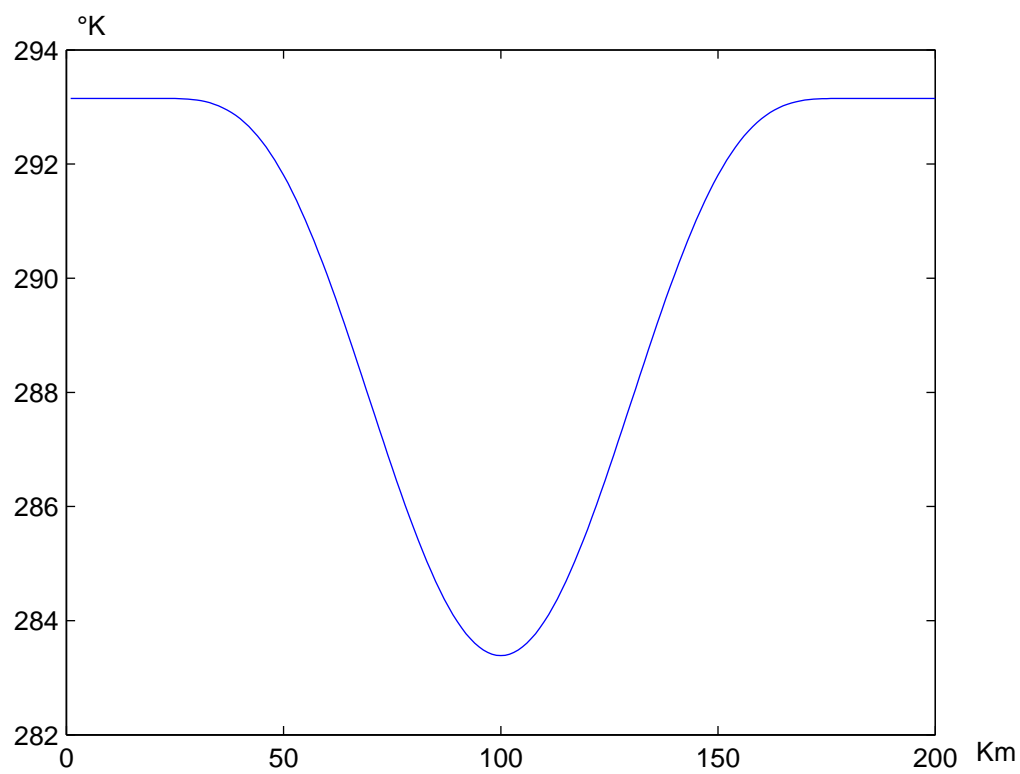


FIGURE 5.4 – La température avec viscosité et avec thermoconductibilité

5.5 Exemple 2 : Mouvement de l'air qui passe sur une montagne en formant des nuages

Le phénomène de la formation de nuage par le vent passant sur une montagne est couramment observé et expliqué par les principes de la thermodynamique : l'ascension de l'air provoque la diminution de la pression et donc également la température diminue, ce qui, à son tour, provoque la condensation de la vapeur d'eau contenue dans l'air et le réchauffement relatif de l'air par la chaleur latente.

Le but de ce travail est de construire la solution numérique du système d'équations du mouvement de l'air comprenant la condensation de la vapeur d'eau dans l'air. Pour décrire ce phénomène de manière scientifique et cohérente, nous avons besoin de la description du mouvement de l'air en tant que fluide et donc des équations fondamentales de la mécanique des fluides (voir par exemple [16]). La complexité du système d'équations de la dynamique des gaz et la non-linéarité des équations qui décrivent le processus de condensation de la vapeur d'eau rendent difficile la construction de la solution du système d'équations qui régit ce phénomène. Maintenant, d'une manière analogue à l'exemple 1, on considère les équations fondamentales du mouvement de l'air et de la transition de phase de l'eau et, en proposant un schéma numérique adéquat, donne la description numérique de la variation de la température et de la quantité de condensation durant le passage du vent humide sur une montagne.

Du point de vue technique, comme dans le cas de l'exemple 1 (cas de l'air sec), nous utilisons la *méthode de différences finies*. Toutefois, pour surmonter les difficultés surgissant de l'introduction de la condensation de la vapeur, nous

introduisons des techniques particulières adaptées au cas.

5.6 Système d'équations

Nous considérons l'approximation en une dimension du courant d'air qui passe sur une montagne dans un régime stationnaire, un système similaire à l'exemple 1 (cas de l'air sec). Donc nous considérons d'abord le système d'équations (5.1)-(5.2); pour l'équation de la quantité de mouvement nous utilisons formellement la même équation (5.1).

D'autre part, pour le bilan de l'énergie, outre les éléments ordinaires déjà formulés dans l'équation (5.2), nous devons prendre en considération l'effet de la chaleur latente de la condensation de la vapeur d'eau (ou de l'évaporation des gouttelettes suspendues dans l'air). Donc, en désignant par T , L_{gl} et H_{gl} la température, la chaleur latente (de la transition de phase de l'état gazeux à l'état liquide de H_2O) et la quantité de condensation respectivement, nous considérons l'équation

$$K_\rho c_v \frac{dT}{dx} = \kappa \frac{d^2 T}{dx^2} - R_1 \frac{K_\rho \sqrt{1+h'^2}}{w} T \frac{d}{dx} \left(\frac{w}{\sqrt{1+h'^2}} \right) + \quad (5.9)$$

$$+ g_1 \left(\frac{d}{dx} w \right)^2 + g_2 w \frac{d}{dx} w + g_3 w^2 + L_{gl} H_{gl},$$

où g_1 , g_2 , g_3 sont des fonctions dérivant des coefficients de viscosité définies précédemment.

Nous allons considérer le système d'équations (5.1), (5.9) dans le domaine $[0, L]$. Les équations du type (5.1), (5.9) sont usuellement considérées avec les conditions aux limites. Toutefois la présence des termes dûs à la condensation de la vapeur d'eau, qui ne sont pas suffisamment réguliers pour le raisonne-

ment usuel pour ce type d'équations, rend difficile de les considérer avec les conditions aux limites. Nous proposons donc de les considérer avec les conditions initiales

$$\varrho(0) = \varrho_0, \quad w(0) = w_0, \quad \left. \frac{dw(x)}{dx} \right|_{x=0} = w_1, \quad T(0) = T_0, \quad \left. \frac{dT(x)}{dx} \right|_{x=0} = T_1.$$

Le résultat du calcul numérique montrera qu'à l'autre extrémité du domaine $[0, L]$ les fonctions auront des valeurs très proches des conditions aux limites naturelles, ce qui est confirmé également à l'argumentation de la méthode de "shooting" citée à propos du résultat du calcul numérique pour l'exemple 1. L'approfondissement théorique de ce problème est un des thèmes que nous devons envisager dans le futur prochain (voir les *Perspectives*).

D'autre part, pour les difficultés techniques, dans l'expression concernant la condensation, au lieu de H_{gl} défini dans (2.10), on considère les approximations suivantes : si la densité de la vapeur au début de l'écoulement est π_0 , alors la densité de H_2O (de tous les états) au point x sera

$$\pi(x) = \frac{\pi_0}{\varrho_0} \varrho(x),$$

(ϱ_0 étant la densité de l'air au début de l'écoulement). Donc, si on pose

$$q_0 = \frac{\pi_0}{\varrho_0},$$

la quantité par unité de volume de l'excédent de H_2O par rapport à la densité de la vapeur saturée $\bar{\pi}_{vs}(T)$ est donnée par

$$E_l = \max[0, q_0 \varrho(x) - \bar{\pi}_{vs}(T)] = [q_0 \varrho(x) - \bar{\pi}_{vs}(T)]^+,$$

où $[\]^+$ désigne la partie positive. Nous supposons que cette quantité E_l sera la quantité totale de l'eau liquide dans l'air et que donc la quantité par unité de temps de condensation ou d'évaporation est donnée par la dérivée de E_l , c'est-à-dire la quantité de condensation ou d'évaporation est donnée par la variation de l'excédent de H_2O dans l'air par rapport à la densité de la vapeur saturée $\bar{\pi}_{vs}(T)$. Comme, suivant l'écoulement, x est une fonction de t , c'est-à-dire $x = x(t)$, et que

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{w}{\sqrt{1+h'^2}},$$

on a

$$H_{gl} = \frac{d}{dt}[q_0\rho(x) - \bar{\pi}_{vs}(T(x))]^+ = \frac{w}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx}[q_0\rho(x) - \bar{\pi}_{vs}(T(x))]^+. \quad (5.10)$$

Dans (5.10) $\frac{d}{dt}$ désigne la dérivée matérielle.

Pour le calcul numérique, le terme $L_{gl}H_{gl}$ dans (5.9) avec L_{gl} et H_{gl} définis dans (2.7) et (5.10) crée quelques difficultés pour la résolution numérique des équations (5.1), (5.9). En premier lieu, la dérivée de la partie positive d'une fonction est généralement discontinue, ce qui peut provoquer l'instabilité du calcul numérique. Donc, pour résoudre nos équations on a besoin d'introduire un système de calcul particulier. En effet pour surmonter cette difficulté nous utilisons une approximation "pondérée de la dérivée".

D'autre part, pour définir la quantité de condensation est commode d'utiliser l'approximation successive, mais à cause de la non-linéarité forte de la fonction H_{gl} par rapport à T et de la propriété de la chaleur latente qui provoque une oscillation d'approximation successive usuel, nous utilisons une **approximati-**

mation successive accumulative, comme nous le verrons dans la suite.

Pour formuler l'approximation successive de la solution de notre problème, désignons par $(\rho, w, T) = G(\bar{\rho}, \bar{w}, \bar{T})$ la solution (ρ, w, T) du système d'équations (2.15), (5.1), (5.9) avec $L_{gl}H_{gl} = L_{gl}(\bar{T})H_{gl}(\bar{\rho}, \bar{T})$. Alors on peut définir la suite de solutions approchées par

$$(\rho^{[n+1]}, w^{[n+1]}, T^{[n+1]}) = G(\rho^{[n]}, w^{[n]}, T^{[n]}) \quad (\rho^{[0]}, T^{[0]} : \text{données convenables}).$$

Mais on a

$$\frac{\partial}{\partial T} [q_0 \rho - \bar{\pi}_{vs}(T)]^+ < 0 \quad \text{quand } [q_0 \rho - \bar{\pi}_{vs}(T)]^+ > 0,$$

ce qui, joint à la valeur relativement grande de $L_{gl}(T)$, empêche la convergence de l'approximation successive. Mais on peut surmonter cet inconvénient par l'idée illustrée par la remarque suivante.

REMARQUE. Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe deux constantes $M_1, M_2 > 0$ telles que

$$-\infty < -M_1 \leq \varphi'(x) \leq -M_2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5.11)$$

Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ (arbitraire). Si on définit

$$x_{n+1} = \varphi(\bar{\xi}_n), \quad \bar{\xi}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k,$$

alors la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers le point fixe $\bar{x} \in \mathbb{R}$ de la fonction φ (c'est-à-dire $\bar{x} = \varphi(\bar{x})$).

IDÉE DE DÉMONSTRATION.

Pour nous convaincre de la validité de cette affirmation, considérons $n \geq M_1$. D'après la définition de $\bar{\xi}_{n+1}$ on a

$$|\bar{\xi}_{n+1} - \bar{x}| = \left| \frac{1}{n+1} (\varphi(\bar{\xi}_n) - \varphi(\bar{x})) + \frac{n}{n+1} (\bar{\xi}_n - \bar{x}) \right|. \quad (5.12)$$

Or, on remarque que

$$\text{si } \bar{\xi}_n > \bar{x} \quad \text{alors} \quad \varphi(\bar{\xi}_n) < \varphi(\bar{x}),$$

$$\text{si } \bar{\xi}_n < \bar{x} \quad \text{alors} \quad \varphi(\bar{\xi}_n) > \varphi(\bar{x}).$$

Donc on a

$$|\bar{\xi}_{n+1} - \bar{x}| \leq \max\left(\frac{1}{n+1} |\varphi(\bar{\xi}_n) - \varphi(\bar{x})|, \frac{n}{n+1} |\bar{\xi}_n - \bar{x}|\right). \quad (5.13)$$

D'autre part, comme φ est une fonction décroissante, d'après le **théorème des accroissements finis** et en vertu de (5.11), on a

$$|\varphi(\bar{\xi}_n) - \varphi(\bar{x})| \leq M_1 |\bar{\xi}_n - \bar{x}|.$$

Donc, de (5.13) on obtient

$$|\bar{\xi}_{n+1} - \bar{x}| \leq \max\left(\frac{M_1}{n+1}, \frac{n}{n+1}\right) |\bar{\xi}_n - \bar{x}|.$$

Or, comme $n \geq M_1$, on a

$$|\bar{\xi}_{n+1} - \bar{x}| \leq \frac{n}{n+1} |\bar{\xi}_n - \bar{x}|.$$

Comme cette inégalité est valable pour tout $n \geq M_1$, on en déduit que

$$\begin{aligned} |\bar{\xi}_{n+2} - \bar{x}| &\leq \frac{n+1}{n+2} |\bar{\xi}_{n+1} - \bar{x}| \leq \frac{n+1}{n+2} \frac{n}{n+1} |\bar{\xi}_n - \bar{x}| = \frac{n}{n+2} |\bar{\xi}_n - \bar{x}|, \\ &\vdots \\ |\bar{\xi}_{n+N} - \bar{x}| &\leq \frac{n+N-1}{n+N} |\bar{\xi}_{n+N-1} - \bar{x}| \leq \dots \leq \frac{n}{n+N} |\bar{\xi}_n - \bar{x}|. \end{aligned}$$

En passant à la limite, on obtient

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} |\bar{\xi}_{n+N} - \bar{x}| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{n+N} |\bar{\xi}_n - \bar{x}| = 0,$$

ce qui implique la convergence de $\bar{\xi}_n$ et donc celle de x_n vers \bar{x} . \square

De l'affirmation de cette remarque résulte immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE. Soit D un intervalle de \mathbb{R} ; soit $\varphi \in C^1(D; \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe \bar{x} appartenant à l'intérieur de D tel que $\bar{x} = \varphi(\bar{x})$. Si $\varphi'(\bar{x}) < 0$, alors il existe un voisinage U de \bar{x} tel que, si $x_1 \in U$ et si on définit

$$x_{n+1} = \varphi(\bar{\xi}_n), \quad \bar{\xi}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k,$$

alors la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers \bar{x} .

En s'inspirant de l'idée de ces remarques, on propose l'approximation successive suivante. Choisissons $H_{gl}^{[0]}$ et $L_{gl}^{[0]}$ de manière convenable. On va d'abord résoudre le système d'équations

$$\begin{aligned} &K_\varrho \frac{dw^{[1]}}{dx} = \\ &= f_1 \frac{d^2 w^{[1]}}{dx^2} + f_2 w^{[1]} - R_1 \frac{1}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{K_\varrho \sqrt{1+h'^2}}{w^{[1]}} T^{[1]} \right) - \frac{h' K_\varrho}{w^{[1]}} g - \alpha w^{[1]} + \gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& K_{\rho} c_{\nu} \frac{dT^{[1]}}{dx} = \\
& = \kappa \frac{d^2 T^{[1]}}{dx^2} - R_1 \frac{K_{\rho} \sqrt{1+h'^2}}{w^{[1]}} T^{[1]} \frac{d}{dx} \left(\frac{w^{[1]}}{\sqrt{1+h'^2}} \right) + \\
& + g_1 \left(\frac{dw^{[1]}}{dx} \right)^2 + g_2 w^{[1]} \frac{dw^{[1]}}{dx} + g_3 (w^{[1]})^2 + L_{gl}^{[0]} H_{gl}^{[0]};
\end{aligned}$$

ça nous donne la solution $(w^{[1]}, T^{[1]})$.

Maintenant nous supposons d'avoir la solution $(w^{[n]}, T^{[n]})$ de la n -ième approximation. Alors nous pouvons définir $\varrho^{[n]}$ et $\bar{\pi}_{vs}^{[n]}(\vartheta^{[n]})$ par les relations

$$\varrho^{[n]} = \frac{K_{\rho} \sqrt{1+h'^2}}{w^{[n]}},$$

$$\bar{\pi}_{vs}^{[n]}(\vartheta^{[n]}) = \frac{\mu h}{R \vartheta^{[n]}} E_0 10^{\frac{7,63(\vartheta^{[n]} - 273,15)}{\vartheta^{[n]} - 31,25}}, \quad \vartheta^{[n]} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^{[k]},$$

c'est-à-dire, $\vartheta^{[n]}$ est la moyenne de $T^{[k]}$, pour $k = 1, \dots, n$. Avec $\varrho^{[n]}$ et $\bar{\pi}_{vs}^{[n]}(\vartheta^{[n]})$ nous définissons

$$H_{gl}^{[n]} = \frac{w^{[n]}}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx} [q_0 \varrho^{[n]} - \pi_{vs}^{[n]}(\vartheta^{[n]})]^+, \quad L_{gl}^{[n]} = (3244 - 2.72 \cdot \vartheta^{[n]}) 10^3,$$

ce qui nous permet de résoudre le système d'équations de la $n+1$ -ième solution approchée $(w^{[n+1]}, T^{[n+1]})$

$$\begin{aligned}
& K_{\rho} \frac{dw^{[n+1]}}{dx} = \tag{5.14} \\
& = f_1 \frac{d^2 w^{[n+1]}}{dx^2} + f_2 w^{[n+1]} - \frac{R}{\mu_m} \frac{1}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{K_{\rho} \sqrt{1+h'^2}}{w^{[n+1]}} T^{[n+1]} \right) - \frac{h' K_{\rho}}{w^{[n+1]}} g \\
& \quad - \alpha w^{[n+1]} + \gamma,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& K_\rho c_v \frac{dT^{[n+1]}}{dx} = \tag{5.15} \\
& = \kappa \frac{d^2 T^{[n+1]}}{dx^2} - \frac{R}{\mu_m} \frac{K_\rho \sqrt{1+h'^2}}{w^{[n+1]}} \times T^{[n+1]} \frac{d}{dx} \left(\frac{w^{[n+1]}}{\sqrt{1+h'^2}} \right) + \\
& + g_1 \left(\frac{dw^{[n+1]}}{dx} \right)^2 + g_2 w^{[n+1]} \frac{dw^{[n+1]}}{dx} + g_3 (w^{[n+1]})^2 + L_{gl}^{[n]} H_{gl}^{[n]}.
\end{aligned}$$

Le résultat numérique effectué montre que la suite $(w^{[1]}, T^{[1]}), \dots, (w^{[n]}, T^{[n]}), \dots$ ainsi construite converge (au moins comme solution numérique).

5.7 Schéma numérique

Pour effectuer le calcul, nous utilisons la *méthode de différences finies* avec un schéma numérique similaire à celui que nous avons utilisé dans le cas précédent (sans condensation). Mais la propriété de la condensation et la chaleur latente peut créer l'oscillation du calcul. en effet, le terme $\frac{d}{dx} [q_0 \rho - \bar{\pi}_{vs}(T)]^+$ est en général discontinue, ce qui, joint à la valeur relativement grande de L_{gl} ; peut provoquer l'instabilité du calcul numérique. Pour surmonter cette difficulté nous utilisons une approximation par la "dérivée pondérée", qui a la forme suivante

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=i} \approx \frac{\frac{7}{12} w(i+1) - \frac{1}{4} (w(i) + w(i-1)) + \frac{1}{3} w(i-2)}{\delta};$$

pour la dérivée seconde nous utilisons la forme centrée

$$\left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_{x=i} \approx \frac{w(i+1) - 2w(i) + w(i-1)}{\delta^2},$$

et par analogie pour T . Ici L est la longueur du domaine, tandis que $\delta = \frac{L}{N}$, $i = 1, \dots, N-1$. La version discrétisée des équations (5.1) et (5.9) avec ces approximations des dérivées est la suivante :

$$\begin{aligned}
& K_\rho \left[\frac{7}{12} w(i+1) - \frac{1}{4} (w(i) + w(i-1)) + \frac{1}{3} w(i-2) \right] \frac{N}{L} = \quad (5.16) \\
& = f_1(i) (w(i+1) - 2w(i) + w(i-1)) \frac{N^2}{L^2} + f_2(i) w(i) - R_1 \frac{1}{\sqrt{1+h'^2(i)}} \left[\frac{K_\rho}{w(i)} T(i) \times \right. \\
& \times \left(\frac{d\sqrt{1+h'^2}}{dx} \right) (i) + K_\rho \sqrt{1+h'^2(i)} \left[-\frac{7}{12} w(i+1) + \frac{1}{4} (w(i) + w(i-1)) + \frac{1}{3} w(i-2) \right] \frac{N}{L} \frac{T(i)}{w(i)^2} \\
& \left. + \frac{K_\rho \sqrt{1+h'^2(i)}}{w(i)} \left[\frac{7}{12} T(i+1) - \frac{1}{4} (T(i) + T(i-1)) + \frac{1}{3} T(i-2) \right] \frac{N}{L} \right] - \frac{h'(i) K_\rho}{w(i)} g \\
& - \alpha w(i) + \gamma, \quad i = 1, \dots, N-1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& K_\rho c_\nu \left[\frac{7}{12} T(i+1) - \frac{1}{4} (T(i) + T(i-1)) + \frac{1}{3} T(i-2) \right] \frac{N}{L} = \quad (5.17) \\
& \kappa (T(i+1) - 2T(i) + T(i-1)) \frac{N^2}{L^2} - R_1 \frac{K_\rho \sqrt{1+h'^2(i)}}{w(i)} T(i) \left[w(i) \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{1+h'^2}} \right) (i) \right) + \right. \\
& \left. \frac{1}{\sqrt{1+h'^2(i)}} \left[\frac{7}{12} w(i+1) - \frac{1}{4} (w(i) + w(i-1)) + \frac{1}{3} w(i-2) \right] \frac{N}{L} \right] \\
& + g_1(i) \left(\left[\frac{7}{12} w(i+1) - \frac{1}{4} (w(i) + w(i-1)) + \frac{1}{3} w(i-2) \right] \frac{N}{L} \right)^2 + g_2(i) w(i) \left[\frac{7}{12} w(i+1) - \frac{1}{4} (w(i) + \right. \\
& \left. + w(i-1) + \frac{1}{3} w(i-2)) \right] \frac{N}{L} + g_3(w(i))^2 + L_{g_l(i)} H_{g_l(i)}, \\
& i = 1, \dots, N-1.
\end{aligned}$$

Pour la commodité du calcul nous réécrivons les équations (5.16) et (5.17) dans la forme

$$\begin{aligned}
& w(i+1)[K_\rho \frac{N}{L} \frac{7}{12} - f_1(i) \frac{N^2}{L^2} - R_1 K_\rho \frac{T(i)}{w(i)^2} \frac{7}{12} \frac{N}{L}] + T(i+1)[\frac{7}{12} R_1 \frac{K_\rho}{w(i)} \frac{N}{L}] \quad (5.18) \\
& = K_\rho \frac{1}{4} (w(i) + w(i-1) + \frac{1}{3} w(i-2)) \frac{N}{L} + f_1(i) (-2w(i) + w(i-1)) \frac{N^2}{L^2} + f_2(i) w(i) \\
& - R_1 \frac{1}{\sqrt{1+h'^2(i)}} [\frac{K_\rho}{w(i)} T(i) (\frac{d\sqrt{1+h'^2}}{dx})(i) + K_\rho \sqrt{1+h'^2(i)} \frac{1}{4} (w(i) + w(i-1) + \\
& + \frac{1}{3} w(i-2)) \frac{N}{L} \frac{T(i)}{w(i)^2} - \frac{1}{4} \frac{K_\rho \sqrt{1+h'^2(i)}}{w(i)} (T(i) + T(i-1) + \frac{1}{3} T(i-2)) \frac{N}{L}] \\
& - h'(i) K_\rho g \frac{1}{w(i)} - \alpha w(i) + \gamma, \quad i = 1, \dots, N-1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& w(i+1)[R_1 \frac{7}{12} \frac{K_\rho \sqrt{1+h'^2(i)}}{w(i)} T(i) \frac{1}{\sqrt{1+h'^2(i)}} \frac{N}{L}] \quad (5.19) \\
& - g_1(i) \frac{7}{12} \frac{N^2}{L^2} (w(i) - w(i-1)) - g_2(i) w(i) \frac{7}{12} \frac{N}{L}] + T(i+1)[\frac{7}{12} (K_\rho c_\nu \frac{N}{L} - \kappa \frac{N^2}{L^2}) = \\
& (K_\rho c_\nu [\frac{1}{4} (T(i) + T(i-1) + \frac{1}{3} T(i-2))] \frac{N}{L} + \kappa (-2T(i) + T(i-1)) \frac{N^2}{L^2} \\
& - R_1 \frac{K_\rho \sqrt{1+h'^2(i)}}{w(i)} T(i) [\frac{d}{dx} (\frac{1}{\sqrt{1+h'^2}})(i) w(i) \\
& - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{1+h'^2(i)}} [(w(i) + w(i-1) + \frac{1}{3} w(i-2)) \frac{N}{L}] - \frac{1}{4} g_1(i) [w(i) + w(i-1) + \frac{1}{3} w(i-2)] \times \\
& \times (w(i) - w(i-1)) \frac{N^2}{L^2} - \frac{1}{4} g_2(i) w(i) [w(i) + w(i-1) + \frac{1}{3} w(i-2)] \frac{N}{L} + g_3(i) w(i)^2 \\
& + L g_l(i) H_{g_l}(i), \quad i = 1, \dots, N-1.
\end{aligned}$$

Ici nous avons également adopté l'approximation

$$\begin{aligned}
& g_1(i) [(\frac{7}{12} w(i+1) - \frac{1}{4} (w(i) + w(i-1) + \frac{1}{3} w(i-2))) \frac{N}{L}]^2 \approx \\
& \approx g_1(i) [\frac{7}{12} w(i+1) - \frac{1}{4} (w(i) + w(i-1) + \frac{1}{3} w(i-2))] (w(i) - w(i-1)) \frac{N^2}{L^2}
\end{aligned}$$

du terme non-linéaire pour rendre explicite le schéma numérique.

5.8 Résultat du calcul numérique

Comme il est logique, la température et la quantité de H_2O condensée dépendent sensiblement de l'humidité de l'air qui entre dans notre domaine. Selon notre calcul, dans le cas où l'humidité, c'est-à-dire la masse de H_2O divisée par la masse de l'air, $\frac{\pi}{\rho}$, au point de départ $x = 0$ est 0.012, il résulte qu'au sommet de la montagne (de hauteur 1000m) la température descend de 6.54 degrés et la densité de l'eau liquide (quantité de H_2O condensée) atteint $1.48g/m^3$. Naturellement les résultats du calcul dépendent de la quantité de humidité au point de départ $x = 0$.

Le tableau suivant présente : le montant maximum de l'eau condensée (sur 1000m) (g/m^3) et la température minimale T_{\min} (sur 1000m) ($^{\circ}K$) de plus la différence entre la température initiale $T_0 = 293.15^{\circ}K$ et la température minimale T_{\min} par rapport au choix de la valeur de la densité de la vapeur d'eau au point initial $x = 0$ (g/m^3), valeur exprimée par le rapport entre la densité de la vapeur d'eau π_0 et la densité de l'air ρ_0 .

$\frac{\pi_0}{\rho_0}$	$E_{l,\max}$	T_{\min}	$T_0 - T_{\min}$
$0,876 \cdot 10^{-2}$	0	283,3865	9,7635
$1,0 \cdot 10^{-2}$	0,6154	284,7525	8,3975
$1,2 \cdot 10^{-2}$	1,4844	286,6018	6,5482
$1,4 \cdot 10^{-2}$	2,3051	288,3121	4,8379

Dans le résultat des calculs on voit que le réchauffement par la chaleur latente de la condensation dépend strictement de la quantité de la condensation et que cette dernière dépend essentiellement de la densité initiale de la vapeur. Dans le calcul du résultat illustré ci-dessus nous avons tenu compte également de la viscosité et de la thermoconductibilité de l'air. Mais les résultats des calculs montrent que leur influence demeure très modeste, comme d'ailleurs on

pouvait l'imaginer par analogie avec le résultat du premier exemple.

5.9 Conclusion

Du résultat obtenu nous pouvons déduire que les équations fondamentales de la mécanique des fluides accouplées avec l'équation de la quantité de condensation et d'évaporation de H_2O , au moins dans l'écoulement de l'air le long du profil du terrain suffisamment régulier, décrivent avec une précision appréciable la variation de la température due à la transformation adiabatique de l'air et au réchauffement par la chaleur latente de la condensation. Ces résultats coïncident de manière satisfaisante avec la théorie physique et ce qui est observé dans l'atmosphère réelle.

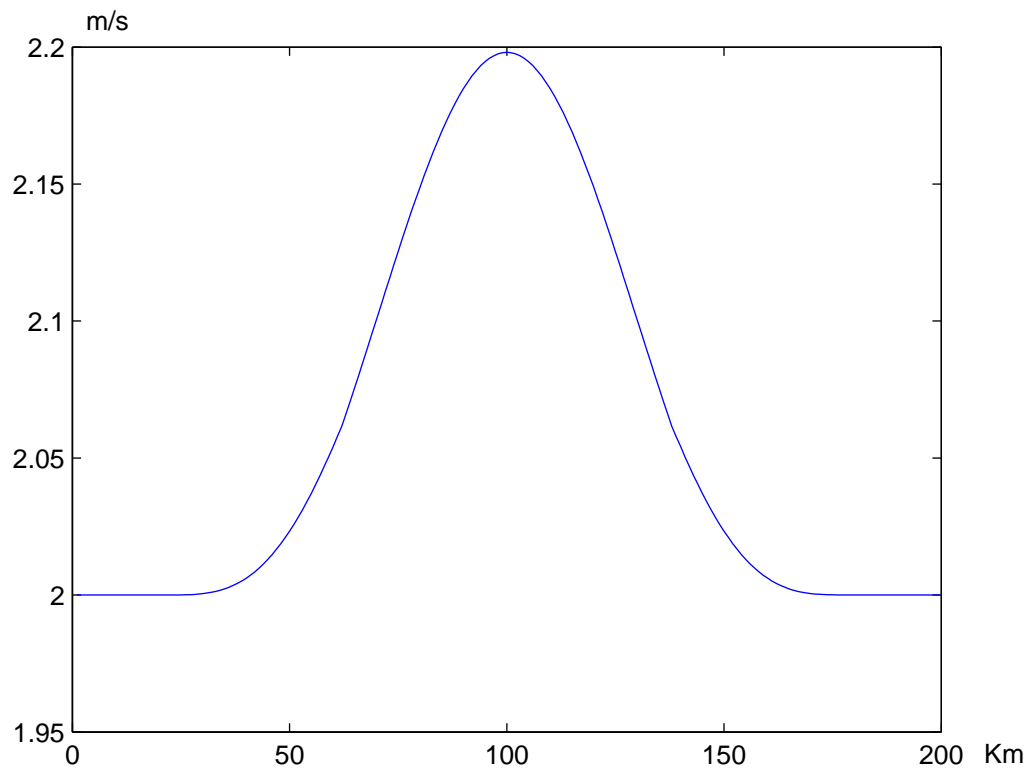


FIGURE 5.5 – La vitesse dans le cas de condensation

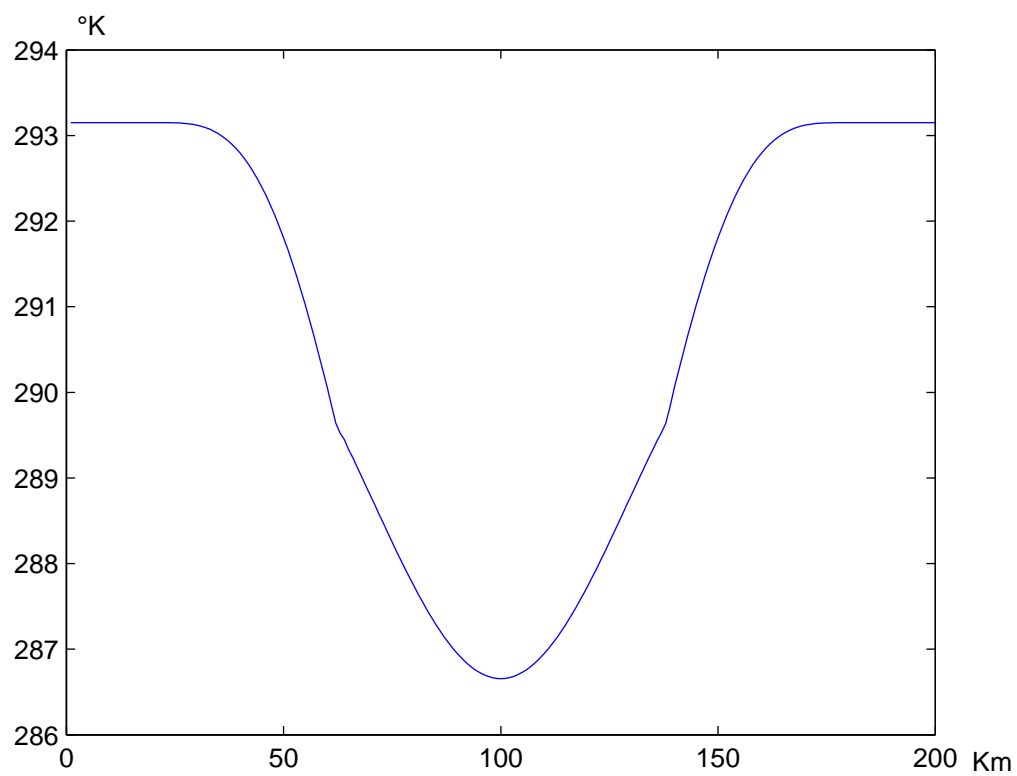


FIGURE 5.6 – La température dans le cas de condensation

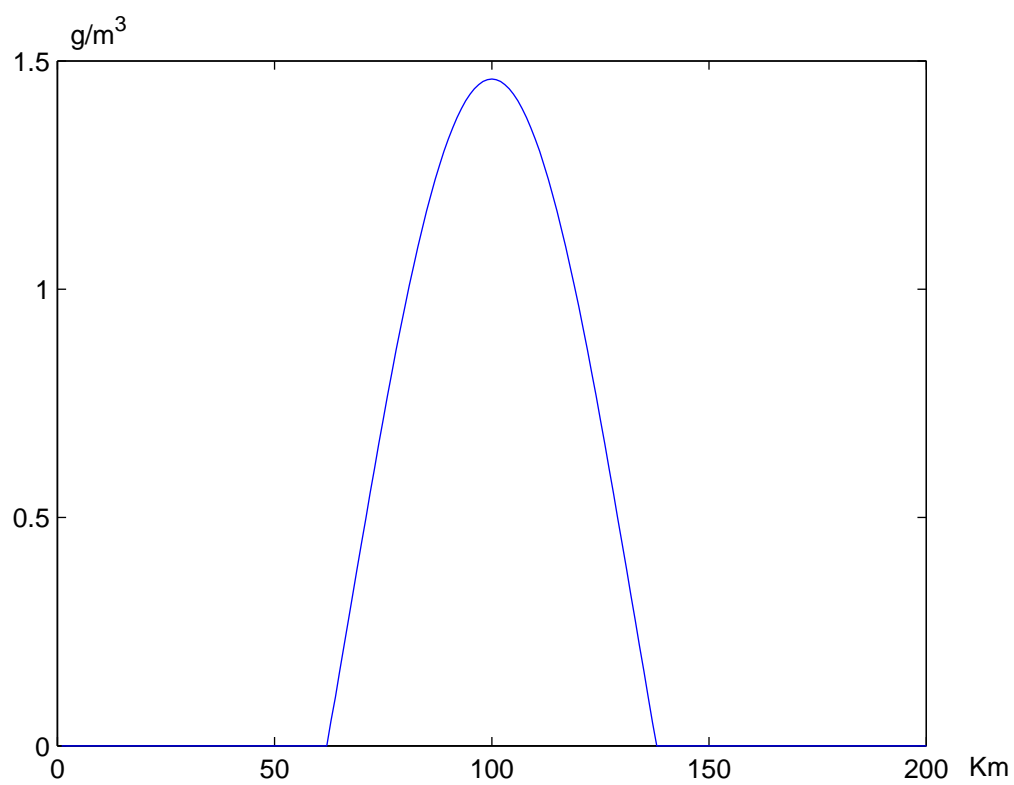


FIGURE 5.7 – La quantité d'eau condensée

Chapitre 6

Perspectives

6.1 Problème de l'existence d'une solution de l'équation monodimensionnelle du mouvement stationnaire avec la condensation de la vapeur d'eau

Dans la seconde partie du chapitre 5 (et dans [11]) nous avons réalisé le calcul pour obtenir la solution numérique de l'équation monodimensionnelle du mouvement stationnaire avec la condensation de la vapeur d'eau. Cette équation a des aspects similaires à l'équation que nous avons étudiée dans le chapitre 4 et dans la première partie du chapitre 5. Le fait que dans le chapitre 4 nous avons démontré l'existence d'une solution de cette équation nous suggère la possibilité d'une analogue étude sur la question de l'existence d'une solution de l'équation que nous avons étudiée dans la seconde partie du chapitre 5. Toutefois, comme nous l'avons déjà remarqué dans le chapitre 5, les propriétés de la fonction qui représente la quantité de la condensation et de celle qui représente son effet thermique ne nous permettent pas d'appliquer facilement les techniques développées pour l'équation sans condensation. Dans la suite nous présentons le schéma de la première partie d'un possible raisonnement

pour ce problème, en laissant à la future étude la suite de cette recherche.

6.1.1 Position du problème

Notre objectif est de démontrer l'existence d'une solution dans le voisinage de la solution de l'équation sans viscosité et sans conductivité thermique. Pour cela, avant tout nous prenons en considération les équations (5.1)-(5.9) avec $\eta = \zeta = \kappa = 0$; c'est-à-dire, en écrivant \bar{w} au lieu de w et \bar{T} au lieu de T , nous considérons les équations

$$K_\rho \frac{d}{dx} \bar{w} + \frac{R_1 K_\rho}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{1+h'^2} \frac{\bar{T}}{\bar{w}} \right) = -K_\rho \frac{h'}{\bar{w}} g - \alpha \bar{w} + \gamma, \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} c_v K_\rho \frac{d\bar{T}}{dx} + R_1 K_\rho \sqrt{1+h'^2} \frac{\bar{T}}{\bar{w}} \frac{d}{dx} \left(\frac{\bar{w}}{\sqrt{1+h'^2}} \right) = \\ = L_{gl} \frac{\bar{w}}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx} \left[\max \left(0, \frac{\pi_0 K_\rho \sqrt{1+h'^2}}{\rho_0 \bar{w}} - \bar{\pi}_{vs}(\bar{T}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Nous supposons que le système d'équations (6.1)-(6.2) avec les conditions initiales (condition à une seule extrémité)

$$\bar{w}(0) = \bar{w}_0 > 0, \quad \bar{T}(0) = \bar{T}_0,$$

admet dans l'intervalle $[0, 1]$ une solution (\bar{w}, \bar{T}) et que \bar{w} et \bar{T} appartiennent à $H^1(0, 1)$ et vérifient les relations

$$\inf_{0 \leq x \leq 1} \bar{T}(x) > 0, \quad \inf_{0 \leq x \leq 1} \bar{w}(x) > 0. \quad (6.3)$$

En revenant aux équations (5.1)-(5.9), nous les considérons avec les conditions aux limites

$$w(0) = \bar{w}(0) = \bar{w}_0, \quad w(1) = \bar{w}_1, \quad T(0) = \bar{T}(0) = \bar{T}_0, \quad T(1) = \bar{T}_1. \quad (6.4)$$

6.1.2 Transformation des équations

On considère le système d'équations (5.1)-(5.9) dans le domaine en une dimension $[0, 1]$, aux extrémités duquel nous posons les conditions aux limites non-homogènes (6.4). Il nous est commode de transformer les équations (5.1), (5.9) en des équations pour les fonctions inconnues

$$u = w - \bar{w}, \quad \vartheta = T - \bar{T}. \quad (6.5)$$

En effet, les conditions aux limites (6.4) se réduisent en les conditions homogènes

$$u(0) = u(1) = 0, \quad \vartheta(0) = \vartheta(1) = 0. \quad (6.6)$$

Maintenant nous écrivons les équations (5.1)-(5.9) dans une forme relative aux nouvelles fonctions inconnues u et ϑ . Pour simplifier la notation, nous posons

$$\sigma(x) = \sqrt{1 + (h'(x))^2}. \quad (6.7)$$

Ainsi nous pouvons les écrire dans la forme

$$f_1 u'' + B_{11} u' + B_{12} \vartheta' + C_{11} u + C_{12} \vartheta = N_1(\bar{w}, \bar{T}, u, \vartheta), \quad (6.8)$$

$$\kappa \vartheta'' + B_{21} u' + B_{22} \vartheta' + C_{21} u + C_{22} \vartheta = N_2(\bar{w}, \bar{T}, u, \vartheta) + \Psi(u, \vartheta), \quad (6.9)$$

où

$$B_{11} = -K_\rho + R_1 K_\rho \frac{\bar{T}}{\bar{w}^2}, \quad B_{12} = -R_1 \frac{K_\rho}{\bar{w}},$$

$$B_{21} = -R_1 K_\rho \frac{\bar{T}}{\bar{w}} + 2g_1 \bar{w}' + g_2 \bar{w}, \quad B_{22} = -K_\rho c_\nu,$$

$$C_{11} = R_1 K_\rho \frac{\sigma'}{\sigma} \frac{\bar{T}}{\bar{w}^2} + R_1 K_\rho \frac{\bar{T}'}{\bar{w}^2} + f_2 - \alpha - K_\rho \frac{h'}{\bar{w}^2} g, \quad C_{12} = R_1 K_\rho \frac{\bar{w}'}{\bar{w}^2} - \frac{R_1 K_\rho}{\bar{w}} \frac{\sigma'}{\sigma},$$

$$C_{21} = R_1 K_\rho \bar{T} \frac{\bar{w}'}{\bar{w}^2} + g_2 \bar{w}' + 2g_3 \bar{w};$$

$$C_{22} = -R_1 K_\rho \frac{\bar{w}'}{\bar{w}} - R_1 K_\rho \sigma \left(\frac{1}{\sigma} \right)',$$

$$\begin{aligned} \Psi(u, \vartheta) = & -L_{gl} \frac{u + \bar{w}}{\sigma} \frac{d}{dx} \left[\max\left(0, \frac{\pi_0 K_\rho \sigma}{\rho_0 (u + \bar{w})} + \bar{\pi}_{vs}(\vartheta + \bar{T})\right) \right] + \\ & + L_{gl} \frac{\bar{w}}{\sigma} \frac{d}{dx} \left[\max\left(0, \frac{\pi_0 K_\rho \sigma}{\rho_0 \bar{w}} - \bar{\pi}_{vs}(\bar{T})\right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_1(\bar{w}, \bar{T}, u, \vartheta) = & \frac{R_1 K_\rho}{\sigma} \left[\sigma' \vartheta \left(\frac{1}{u + \bar{w}} - \frac{1}{\bar{w}} \right) + \sigma' \bar{T} R_1(u) + \sigma \vartheta' \left(\frac{1}{u + \bar{w}} - \frac{1}{\bar{w}} \right) + \right. \\ & + \sigma \bar{T}' R_1(u) - \sigma \vartheta u' \left(\frac{1}{\bar{w}^2} + \left(\frac{1}{(u + \bar{w})^2} - \frac{1}{\bar{w}^2} \right) \right) - \sigma \vartheta \bar{w}' \left(\frac{1}{(u + \bar{w})^2} - \frac{1}{\bar{w}^2} \right) \\ & \left. - \sigma \bar{T} u' \left(\frac{1}{(u + \bar{w})^2} - \frac{1}{\bar{w}^2} \right) - \sigma \bar{T} \bar{w}' \left(\frac{1}{(u + \bar{w})^2} - \frac{1}{\bar{w}^2} \right) \right] \\ & - f_1 \bar{w}'' - f_2 \bar{w} + K_\rho h' g R_1(u), \end{aligned}$$

$$N_2(\bar{w}, \bar{T}, u, \vartheta) = R_1 K_\rho \sigma \left[\vartheta \left(\frac{1}{u + \bar{w}} - \frac{1}{\bar{w}} \right) \left(\frac{\bar{w}'}{\sigma} + \left(\frac{1}{\sigma} \right)' \bar{w} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +\vartheta\left(\frac{1}{\bar{w}} + \left(\frac{1}{u+\bar{w}} - \frac{1}{\bar{w}}\right)\right)\left(\frac{u'}{\sigma} + \left(\frac{1}{\sigma}\right)'u\right) + \bar{T}\left(\frac{1}{u+\bar{w}} - \frac{1}{\bar{w}}\right)\left(\frac{u'}{\sigma} + \left(\frac{1}{\sigma}\right)'u\right) + \\
& + \bar{T}R_1(u)\left(\frac{\bar{w}'}{\sigma} + \bar{w}\left(\frac{1}{\sigma}\right)'\right) - \kappa\bar{T}'' - g_1(u'^2 + \bar{w}'^2) - g_2(uu' + \bar{w}\bar{w}') - g_3(u^2 + \bar{w}^2).
\end{aligned}$$

6.1.3 Equations linéarisées avec la condensation donnée

Soit $(\tilde{u}, \tilde{\vartheta})$ un élément de $H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1)$ appartenant à un voisinage de $(0, 0)$. Nous considérons l'équation obtenue de (6.9) en remplaçant $\Psi(u, \vartheta)$ par

$$\tilde{\Psi} = \Psi(\tilde{u}, \tilde{\vartheta}),$$

c'est-à-dire le système d'équations

$$f_1 u'' + B_{11} u' + B_{12} \vartheta' + C_{11} u + C_{12} \vartheta = N_1(\bar{w}, \bar{T}, u, \vartheta), \quad (6.10)$$

$$\kappa \vartheta'' + B_{21} u' + B_{22} \vartheta' + C_{21} u + C_{22} \vartheta = N_2(\bar{w}, \bar{T}, u, \vartheta) + \tilde{\Psi}. \quad (6.11)$$

En posant $Y = (u, \vartheta)$, $N = (N_1, N_2 + \tilde{\Psi} + g_1 u'^2)$, $Q_1 = (0, -g_1 u'^2)$,

$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix}$, le système (6.10)-(6.11) peut être écrit dans la forme vectorielle

$$\tilde{\varepsilon} Y'' + B Y' + C Y = N + Q_1 \quad (6.12)$$

avec les conditions aux limites

$$Y(0) = Y(1) = 0. \quad (6.13)$$

Pour montrer l'existence d'une solution du problème non linéaire (6.12)-(6.13) dans $H_0^1(0, 1; \mathbb{R}^2)$, nous transformons encore l'équation (6.12) dans une forme convenable.

En effet, sous la condition

$$2c_\nu \leq \frac{R_1 \bar{T}}{w^2} (c_\nu + R_1), \quad (6.14)$$

qui garantit l'inversibilité de la matrice $\widehat{B} = \int_0^1 B dx$, nous définissons une matrice Γ indépendante de $x \in [0, 1]$ par

$$\Gamma = [\bar{k} + 1]^+ \widehat{B}^{-1}, \quad \bar{k} = \sup_{|\nu|=1} {}^t \nu C \nu,$$

et avec ceci les matrices $\widetilde{B}, \widetilde{C}$ par les relations

$$\widetilde{B}(x) = B(x) - 2\varepsilon \Gamma,$$

$$\widetilde{C}(x) = C(x) - B(x)\Gamma + \varepsilon \Gamma^2.$$

Nous définissons également la matrice $D(x)$ par

$$D(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_{21} & 0 \\ \widetilde{B}_{12} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de sorte que $D(x)\widetilde{B}(x)$ est symétrique pour tout $x \in [0, 1]$, il existe une matrice unitaire E telle que $ED\widetilde{B}E^{-1}$ soit une matrice diagonale, dont nous désignons par λ_1, λ_2 deux éléments diagonaux.

Nous supposons qu'il existe une constante $K_0 > 0$ telle que

$$u \cdot D(x)\widetilde{C}(x)u \leq -K_0|u|^2 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in [0, 1], \quad (6.15)$$

$$K_0 - \|D\widetilde{B}\|_{L^\infty} \|E'\|_{L^\infty} - \frac{1}{2} \max_k \|\lambda'_k\|_{L^\infty} > 0, \quad (6.16)$$

et que ε satisfait à l'inégalité

$$\varepsilon < \frac{3m_D(K_0 - \|D\tilde{B}\|_{L^\infty}\|E'\|_{L^\infty} - \frac{1}{2}\max_k\|\lambda'_k\|_{L^\infty})}{4\|D'\|_{L^\infty}^2}, \quad (6.17)$$

où

$$m_D = \inf\{ {}^t u D u \mid u \in \mathbb{R}^n, |u| = 1 \}.$$

Si on pose

$$\tilde{Y}(x) = e^{x\Gamma} Y(x),$$

l'équation (6.12) se transforme en

$$\tilde{\varepsilon}\tilde{Y}''(x) + \tilde{B}(x)\tilde{Y}'(x) + \tilde{C}(x)\tilde{Y}(x) = \tilde{N} + \tilde{Q}_1, \quad (6.18)$$

où

$$\tilde{N} = e^{x\Gamma} N(x), \quad \tilde{Q}_1 = e^{x\Gamma} Q_1(x),$$

tandis que la condition (6.13) se transforme en

$$\tilde{Y}(0) = \tilde{Y}(1) = 0. \quad (6.19)$$

Pour résoudre le système non linéaire (6.18) avec la condition aux limites (6.19), nous commençons par étudier l'équation linéarisée

$$\tilde{\varepsilon}\tilde{Y}'' + \tilde{B}\tilde{Y}' + \tilde{C}\tilde{Y} = \overline{\tilde{N}} + \overline{\tilde{Q}_1}, \quad (6.20)$$

où $\overline{\tilde{N}}$ et $\overline{\tilde{Q}_1}$ sont donnée dans $L^2(0, 1)$ et $L^1(0, 1)$ respectivement.

LEMME. *Le problème (6.20)-(6.19) admet une solution $\tilde{Y} \in H_0^1(0, 1)$ et une seule et on a*

$$\varepsilon \alpha_1 \|\tilde{Y}'\|_{L^2}^2 + \frac{F}{2} \|\tilde{Y}\|_{L^2}^2 \leq c_1 \|\tilde{N}\|_{L^2}^2 + \frac{c_2}{\varepsilon^{1/2}} \|\tilde{Q}_1\|_{L^1}^2, \quad (6.21)$$

où $\varepsilon = \min(\inf_{0 \leq x \leq 1} f_1(x), \kappa)$, $F = K_0 - \frac{1}{2} \max_k \|\lambda'_k\|_{L^\infty} - \|D\tilde{B}\|_{L^\infty} \|E'\|_{L^\infty}$, α_1 , c_1 et c_2 sont des constantes strictement positives indépendantes de ε

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION. On a

$$\begin{aligned} {}^t\tilde{Y}D\tilde{B}\tilde{Y}' &= {}^t(E\tilde{Y})ED\tilde{B}E^{-1}(E\tilde{Y})' - {}^t\tilde{Y}D\tilde{B}E^{-1}E'\tilde{Y} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \frac{d}{dx} (\lambda_k v_k^2) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \lambda'_k v_k^2 - {}^t\tilde{Y}D\tilde{B}E^{-1}E'\tilde{Y}, \end{aligned}$$

où $v_k = (E\tilde{Y})_k$. Cela étant, en multipliant l'équation (6.20) par ${}^t\tilde{Y}D$ et en l'intégrant sur $[0, 1]$ avec l'intégration par partie là où elle est utile, on obtient

$$\begin{aligned} -\varepsilon \int_0^1 ({}^t\tilde{Y})' D\tilde{Y}' dx - \varepsilon \int_0^1 {}^t\tilde{Y} D' \tilde{Y}' dx - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \int_0^1 \lambda'_k (E\tilde{Y})_k^2 dx - \int_0^1 {}^t\tilde{Y} D\tilde{B}E^{-1}E'\tilde{Y} dx + \\ + \int_0^1 {}^t\tilde{Y} D\tilde{C}\tilde{Y} dx \leq \int_0^1 {}^t\tilde{Y} D\tilde{N} dx + \int_0^1 {}^t\tilde{Y} D\tilde{Q}_1 dx; \end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \varepsilon m_D \|\tilde{Y}'\|_{L^2}^2 - \varepsilon \|D'\|_{L^\infty} \|\tilde{Y}\|_{L^2} \|\tilde{Y}'\|_{L^2} + (K_0 - \frac{1}{2} \max_k \|\lambda'_k\|_{L^\infty} - \|D\tilde{B}\|_{L^\infty} \|E'\|_{L^\infty}) \|\tilde{Y}\|_{L^2}^2 \leq \\ \leq \|D\|_{L^\infty} \|\tilde{Y}\|_{L^2} \|\tilde{N}\|_{L^2} + \|D\|_{L^\infty} \|\tilde{Y}\|_{L^\infty} \|\tilde{Q}_1\|_{L^1}. \end{aligned}$$

De cette inégalité on déduit qu'il existe des constantes $\alpha_1 > 0$, $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que l'inégalité (6.21) soit vérifiée. L'inégalité (6.21) implique également l'existence et l'unicité de la solution $\tilde{Y} \in H_0^1(0, 1)$. \square

6.1.4 Pour obtenir une solution de l'équation non linéaire

Avant tout nous devons résoudre l'équation non linéaire (6.18) avec la condition aux limites (6.19). Pour ce faire, nous ne pouvons pas appliquer directement l'argumentation du chapitre 4, car nous n'avons pas d'estimation sur la norme $\|\tilde{Y}''\|_{L^2}^2$. Nous devons trouver une autre voie pour surmonter cette difficulté.

Nous rappelons que dans l'équation (6.12) il y a le terme $N = (N_1, N_2 + \tilde{\Psi} + g_1 u'^2)$ et que $\tilde{\Psi} = \Psi(\tilde{u}, \tilde{\vartheta})$ avec les fonctions données \tilde{u} et $\tilde{\vartheta}$. La fonction $\Psi(\cdot, \cdot)$ a deux aspects difficiles à traiter. Premièrement elle contient le facteur

$$\frac{d}{dx} \left[\max\left(0, \frac{\pi_0 K_\varrho \sigma}{\varrho_0(u + \bar{w})} - \bar{\pi}_{vs}(\vartheta + \bar{T})\right) \right],$$

ce qui fait perdre la régularité dans le point où la fonction $\frac{\pi_0 K_\varrho \sigma}{\varrho_0(u + \bar{w})} - \bar{\pi}_{vs}(\vartheta + \bar{T})$ change le signe. En second lieu le coefficient L_{gl} est suffisamment grand de sorte que nous ne pouvons pas obtenir la convergence de l'approximation successive (comme nous l'avons déjà remarqué dans le chapitre 5). Donc nous aurons besoin d'une argumentation particulière pour surmonter cette difficulté.

Si nous pouvons surmonter toutes ces difficultés, l'existence de la solution locale pourra être éventuellement obtenue à l'aide, par exemple, du **théorème du point fixe de Schauder**, ce que nous espérons et pour lequel nous faisons des efforts.

6.2 Perspectives générales

Les perspectives de la recherche par l'utilisation du calcul numérique sont très vastes. L'objectif principal de notre recherche sera d'envisager le phéno-

mène de la formation des nuages par le vent qui passe sur une montagne dans un domaine en deux ou trois dimensions ayant une direction privilégiée (direction principale de l'écoulement de l'air). Pour cela, on aura besoin de développer notre schéma de calcul à partir de celui qui a été étudié dans l'exemple 2 du chapitre 5, le cas de l'air avec vapeur d'eau, et d'améliorer la méthode de calcul de manière que l'irrégularité de la surface terrestre ne provoque pas l'instabilité dans le calcul et en particulier de manière que le calcul soit praticable dans un domaine de deux ou trois dimensions.

Bibliographie

- [1] Antontsev, S. N., Kazhikhov, A. V., Monakhov, V. N. : *Boundary value problems in mechanics of non homogeneous fluids* (translated from Russian). North-Holland, 1990.
- [2] Ayachi, A., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H. : *Calcul numérique pour le système d'équations monodimensionnelles du mouvement de l'air passant sur une montagne*. Quaderno, N. 9/2011, Dip. Mat. Univ. Torino.
- [3] Ayachi, A., Aissaoui, M. Z., Guebbai, H., Fujita Yashima, H. : *Système d'équations décrivant certains mouvements stationnaires en une dimension d'un gaz visqueux et calorifère*. A paraître sur Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova.
- [4] Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H. : *Equations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau*. *Sciences Technologie Univ. Constantine*, vol. **31** (2011), pp. 9-17.
- [5] Benabidallah, R., Taleb, L., Fujita Yashima, H. : *Existence d'une solution stationnaire d'un système d'équations d'un fluide visqueux compressible et calorifère modélisant la convection*. *Bollettino U.M.I.* vol. (8) 10-B (2007), pp. 1101-1124.
- [6] Brezis, H. *Analyse fonctionnelle (théorie et applications)*. Masson 1981.

- [7] Burden, R. L., Faires, D. J. (2001) : *Análisis numérica (7a ed.)*. I.T.P. Latin America.
- [8] Faragó, I. (2014) : *Numerical methods for ordinary differential equations*. Typo Tech (Budapest).
- [9] Farwig, R. : *Stationary solution of compressible Navier-Stokes equations with slip boundary conditions*. *Comm. Part. Diff. Eq.*, vol. 14 (1989), pp. 1579-1606.
- [10] Fujita Yashima, H. : *Modelación matemática del movimiento de la atmósfera con la transición de fase del agua*. *Rev. Invest. Operac.*, vol. 34 (2013), pp. 93-104.
- [11] Fujita Yashima, H., Ayachi, A., Aissaoui, M. Z. : *Ecuaciones del movimiento del air en una dimensión y cálculo para la formación de nubes por un viento*. *Investigación operacional*, vol. 36 (2015), pp. 133-139.
- [12] Fujita Yashima, H., Campana, V., Aissaoui, M. Z. : *Système d'équations d'un modèle du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère*. *Ann. Math. Afr.*, vol. 2 (2011), pp. 66-92.
- [13] Kantorovitch, L. V., Akilov, G. P. : *Analyse fonctionnelle, tome 2* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1981.
- [14] Kazhikhov, A. V. : *Sur la solubilité des problèmes monodimensionnels aux valeurs initiales-limitées pour les équations d'un gaz visqueux et calorifère*. *C. R. Acad. Sc. Pris*, vol. 284 (1977), Série A, pp. 317-320.
- [15] Kazhikhov, A. V., Shelukhin, V. V. : *Unique global solution with respect to time of initial-boundary value problems for one-dimensional equations of a visous gas*. *Prikl. Mat. Mekh.* vol. 41 (1977), pp. 282-291.

- [16] Landau, L. L., Lifchitz, E. M. : *Mécanique des fluides (Physique théorique, tome 6)* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1989.
- [17] Lions, J.-L. : *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal*. Lecture Notes Math. 323, Springer, 1973.
- [18] Matveev, L. T. : *Physique de l'atmosphère* (en russe). Gidrometeoizdat, Leningrad-S. Peterburg, 1965, 1984, 2000.
- [19] Novotný, A., Padula, M. : *Existence et unicité de la solution stationnaire des équations d'un fluide compressible visqueux et calorifère en présence d'une grande force extérieure potentielles et d'une petite non-potentielle* (en russe). Sibir. Mat. Zhurnal, **34** (1993), pp. 120–146.
- [20] Rozhdestvenskii, B. L., Yanenko, N. N. : *Systèmes d'équations quasi-linéaires et leur applications à la dynamique des gaz* (en russe). Nauka, Moscou, 1978.
- [21] Prodi, F., Battaglia, A. : *Meteorologia - Parte II, Microfisica*. Grafica Pucci, Roma, 2004.
- [22] Samarskii, A. A. : *Théorie des schémas de différences finies* (en russe). Nauka (Moscou), 1977.
- [23] Samarskii, A. A., Vabishchevich : *Méthodes numériques pour la résolution des problèmes de convection-diffusion, 4 éd.* (en russe). Librokom (Moscou), 2009.
- [24] Selvaduray, S., Fujita Yashima, H. : *Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati : gassoso, liquido e solido*. Accad. Sci. Torino, Memorie Cl. Sci. Fis., Serie V, Vol. **35** (2011), pp. 37-69.

- [25] Sheng, P.-X., Mao, J.-T., Li, J.-G., Zhang, A.-C., Sang, J.-G., Pan, N.-X. : *Physique de l'atmosphère* (en chinois). Publ. Univ. Pékin, Pékin, 2003.
- [26] Skamarock, W. C., Klemp, J. B., Dudhia, J, Gill, D. O., Barker, D. M., Duda, M. G., Huang, X. Y., Wang, W. and Powers, J. G. (2008) : A description of the advanced research WRF Version 3. **NCAR/TN-475+STR, NCAR Technical note**, NCAR.
- [27] Vlasov, V. I., Skorokhod, S. L., Fujita Yashima, H. : *Simulation of air flow in a typhoon lower layer. Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, vol. **26** (2011), pp. 85-111.