الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة 8 ماي 1945 قالمة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم التجـارية

مطبوعة بيداغوجية بعنوان:

محاضـــرات في احصـــاء 2

موجهة لفائدة طلبة السنة الأولى جدع مشترك (السداسي الثاني)

إعداد الدكتور: مشعلي بلال

السنة الجامعية 2024/2023

تقديـــــــم

الحمـد لله على نعمـه وفضـله كمـا ينبغي لجـلال وجهـه وعظـيم سـلطانه والصـلاة والسـلام على الصادق الأمين محمد بن عبد الله ﷺ وبعد:

أضع بين يدي طلابي الأعزاء في شعبة العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير هذه المطبوعة بعنوان "محاضرات في احصاء 2" الخاصة بمقياس احصاء 2 ولقد اعتمدت في إعداد محتواها على البرنامج المقرر من طرف اللجنة البيداغوجية الوطنية، وحرصت في إعداد هذه المطبوعة على تدعيم الدروس بأمثلة متنوعة وتمارين محلولة تسهل الفهم وتبسط النظريات.

وقد تكونت المطبوعة من ثمانية محاور هي:

- المحور الاول: نظرية المجموعات
- المحور الثاني: التجربة والحدث
- المحور الثالث: التحليل التوفيقي
- المحور الرابع: الاحتمالات
- المحور الخامس: المتغيرات العشوائية المنفصلة وتوزيعها الاحتمالي
- المحور السادس: المتغيرات العشوائية المستمرة وتوزيعها الاحتمالي
- المحور السابع: العزوم والدالة المولدة للعزوم
- المحور الثامن: نظرية شيبيشيف ونظرية الأعداد الكبيرة

هذه محصلة جهدي لسنوات من التدريس أضعها بين يدي طلابي الأعزاء وزملائي الأفاضل، وإذ أدعـوهم إلى تثمين هـذا العمل بإبداء ملاحظاتهم وأفكارهم التي أقبلها بصدر رحب للاستفادة منها وتطوير هذا العمل.

وفي الختام لا يسعني إلا أن أشكر كل من ساعدني وساهم في إخراج هذه المطبوعة للقارئ الكريم.

والله ولي التوفيق

د/ مشعلي بلال

Table des Matières جـدول المــــواد

جـدول المــــواد Table des Matières

المحور الأول:

نظرية المجموعات

1. تعريف المجموعة
2. أنواع المجموعات
3. العمليات على المجموعات
4. قوانين نظرية المجموعات
5. تمارين المحور الأول

المحور الأول: نظرية المجموعات

لدراسة الاحتمالات والاحصاء الرياضي والرياضيات عموما يجب التطرق أولا لمفهوم المجموعات، أنواعها وقوانينها.

1. تعريف المجموعة: تُعرف المجموعة على أنها عدد من العناصر ترتبط مع بعضها البعض بشكل محدد وبصفات مميزة، مكونات المجموعة تسمى عناصر أو أعضاء، ويُرمز للمجموعة بالحروف اللاتينية الكبيرة ..... A , B , C, ولعناصرها بالحروف اللاتينية الصغيرة .... a , b , c,.

مثال 1: مجموعة الحروف اللاتينية تتكون من 26 حرف (عنصر) ويمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$A = \{a, b, c, \dots \dots, x, y, z\}$$

ونقول أن: $a \in A \quad , \quad b \in A$

مثال 2: ليكن لدينا المجموعة التالية:

$$B = \{1, 2, 3\}$$

نقول أن العنصر 1 ينتمي إلى المجموعة B وكذلك العنصران 2 و3 أي أنهم ينتمون إلى نفس المجموعة، وتشكل هذه العناصر الثلاثة بمجملها المجموعة B ونقول أن: $2 \in B \quad , \quad 1 \in B$

$$0 \notin B \quad , \quad 4 \notin B$$

تكون المجموعتان A و B متساويتان إذا كان كل عنصر من المجموعة A موجود في المجموعة B وكل عنصر من المجموعة B موجود في المجموعة A بغض النظر عن ترتيب هذه العناصر.

مثال 3: ليكن لدينا المجموعتان التاليتان:

$$A = \{10, G, 15, 30\} \qquad B = \{G, 10, 30, 15\}$$

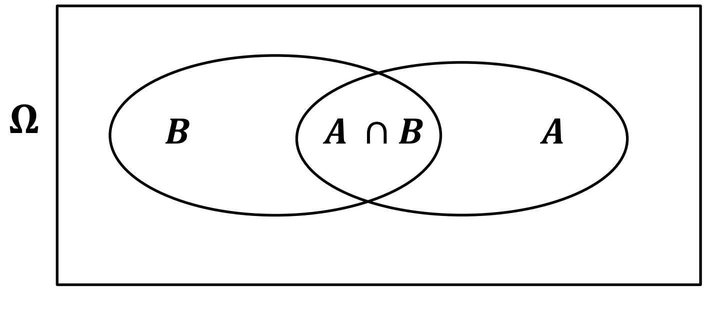
يلاحظ من عناصر كلا المجموعتان أن المجموعتين متساويتان.

2. أنواع المجموعات:

1.2. المجموعة الجزئية: إذا كان كل عنصر من A ينتمي بالضرورة إلى B نقول أن A محتواة في B، وهي بذلك مجموعة جزئية من B. ونكتب:

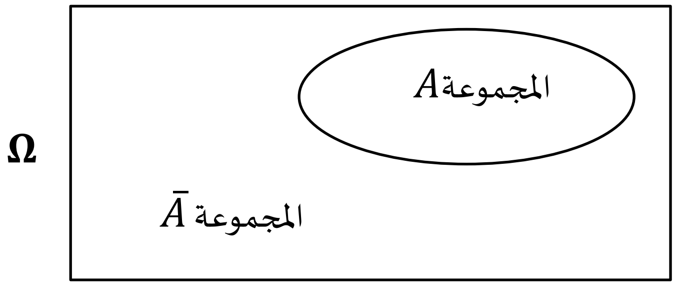
$$\mathrm{A} \subset B$$

2.2. المجموعة الكلية: نصطلح على تسمية هذه المجموعة بالفضاء، وهي التي تحتوي على كل العناصر المدروسة، نرمز لها عادة بالرمز Ω. ويُمكن توضيح المجموعة الكلية من خلال مخطط "فيين" الذي يوضح المجموعات الجزئية الممثلة بدوائر بيضاوية داخل المستطيل الممثل للمجموعة الكلية.



3.2. المجموعة المتممة: تعرف المجموعة $\bar{A}$ على أنها مجموعة متممة للمجموعة A إذا كانت عناصرها لا تنتمي للمجموعة A وتشكل المجموعتان معا المجموعة الكلية.

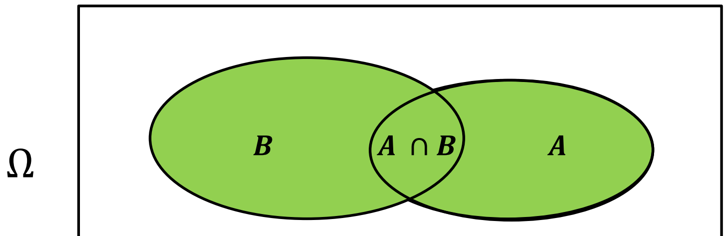
مثال 4: تتكون المجموعة A من ثلاثة أحرف هجائية $A=\{\text{أ},\text{ب},\text{ج}\}$ المجموعة المتممة $\bar{A}$ هي جميع الحروف الهجائية المتبقية ما عدا حروف المجموعة A. ويمكن توضيح هذا المثال من خلال شكل رسم "فيين" التوضيحي كما يلي:



4.2. المجموعة الخالية: تعرف المجموعة الخالية بأنها تلك المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر، ويرمز للمجموعة الخالية بالرمز $\emptyset$.

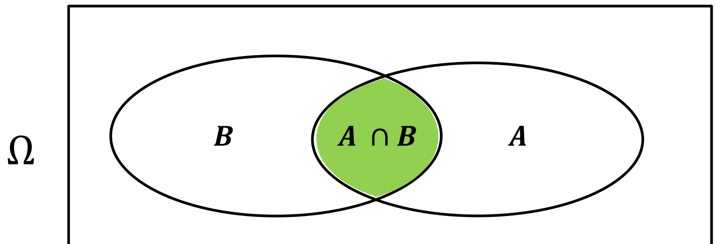
3. العمليات على المجموعات: يُمكن التعامل مع المجموعات باستخدام عمليتين، هما الاتحاد ويرمز له بالرمز $\cup$ والتقاطع ويرمز له بالرمز $\cap$.

الاتحاد: مجموعة جديدة تتكون من جميع عناصر المجموعات المتحدة دون تكرار العناصر المكررة في حالة وجودها، ويمكن التعبير عن الاتحاد كما يلي:



الاتحاد هو المساحة الخضراء الملونة

التقاطع: مجموعة جديدة تتكون من العناصر المشتركة بين المجموعات المتحدة دون تكرار العناصر المكررة في حالة وجودها، ويمكن التعبير عن التقاطع كما يلي:



التقاطع هو المساحة الخضراء الملونة

ملاحظة: من بين العمليات على المجموعات أيضا هو الفرق، وهو مجموعة العناصر المنتمية إلى A ولا تنتمي إلى B وتسمى الفرق بين A و B وتكتب $A-B$.

مثال 5: ليكن لدينا المجموعتان التاليتان: $A=\{1,\ 4,\ 4,\ 5,7\}$ $\quad B=\{2,\ 4,7,7,10\}$

أحسب المجموعتين التاليتين: $A \cup B$ و $A \cap B$؟

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 7, 10\}$$
$$A \cap B = \{4, 7\}$$

4. قوانين نظرية المجموعات: A, B, C ثلاثة مجموعات، ومنه:

- $A \subset B \ et\ B \subset C \Longrightarrow A \subset C$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $A - B = A \cap \bar{B}$
- $\overline{(\bar{A})} = A$

5. تمارين المحور الأول:

تمرين 1: إذا كانت لدينا A مجموعة أرقام العدد 3265 و B مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية التي هي أصغر من 8.

1. أكتب المجموعتين A و B ؟
2. أوجد $A \cup B$ و $A \cap B$؟

حل التمرين 1:

1. كتابة المجموعتين A و B:

$$A = \{2, 3, 5, 6\} \qquad B = \{1, 3, 5, 7\}$$

2. ايجاد: $A \cup B$ و $A \cap B$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$$
$$A \cap B = \{3, 5\}$$

تمرين 2: ليكن لدينا المجموعات التالية:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\dots, +\infty\} \qquad A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$B = \{4, 5, 6, 7\}\ C = \{5, 6, 7, 8, 9\}\ D = \{1, 3, 5, 7, 9\}\ \ E = \{2, 4, 6, 8\}$$

المطلوب: أحسب ما يلي: $A \cup B$، $B \cup D$، $A \cap C$، $\bar{A}$، $A - B$، $\overline{A - E}$.

حل تمرين 2:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $B \cup D = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $A \cap C = \{5\}$

- $\bar{A} = \Omega - \mathrm{A} = \{6, 7, 8, \dots\dots, +\infty\}$
- $A - B = \{1, 2, 3\}$
- $\overline{A - E} = \{1, 3, 5\}$

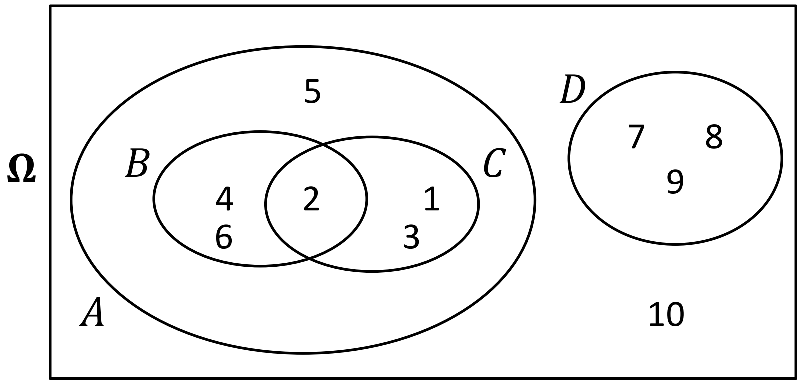
تمرين 3: ليكن لدينا المجموعات التالية:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \qquad A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$B = \{2, 4, 6\} \qquad C = \{1, 2, 3\} \qquad D = \{7, 8, 9\}$$

المطلوب: أرسم مخطط "فيين" لهذه المجموعات ثم أحسب ما يلي:

$$A \cup B,\ A \cap B,\ B \cap C,\ A \cap D,\ \overline{B \cup C},\ \overline{B \cap C}$$
$$(D \cap \bar{C}) \cup (\overline{A \cap B})$$

حل تمرين 3:



- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A \cap B = \{2, 4, 6\}$
- $B \cap C = \{2\}$
- $A \cap D = \emptyset$
- $\overline{B \cup C} = \bar{B} \cap \bar{C} = \{5, 7, 8, 9, 10\}$
- $\overline{B \cap C} = \bar{B} \cup \bar{C} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- $(D \cap \bar{C}) \cup (\overline{A \cap B}) = \{7, 8, 9, \} \cup \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\} = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$

المحور الثاني:

التجربة والحدث

1. التجربة العشوائية
2. فراغ العينة
3. الحدث
4. تمارين المحور الثاني

المحور الثاني: التجربة والحدث

1. التجربة العشوائية: هي تلك التجربة التي لا يمكن معرفة نتائجها مسبقا لكونها تعتمد على الصدفة أو الحظ، فإذا كررنا نفس التجربة ضمن نفس الشروط لا نحصل بالضرورة على نفس النتائج وهذا ما يعطيها صفة العشوائية، ويرمز لمجموعة النتائج بالرمز Ω. وكمثال على ذلك رمي زهرة النرد لا يُمكن تحديد الوجه الظاهر قبل رميها وكل نتائجها معروفة، ومنه:

$$\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

2. فراغ العينة: يطلق عليه أيضاً بفراغ الأحداث الأولية وهي مجموعة كل النتائج الممكنة للتجربة العشوائية، ويرمز له بالرمز Ω.

3. الحدث: كل ظاهرة أو تجربة عشوائية تؤدي إلى تحقيق نتيجة نسميها حدث، ويرمز للحدث بالحروف اللاتينية الكبيرة، وفي كل تجربة عشوائية يمكن أن نوجه اهتمامنا إلى نتيجة واحدة من النتائج الممكنة للتجربة أو عدة نتائج. ونميز بين عدة أنواع من الأحداث.

1.3. الحدث البسيط: نقول عن حدث انه بسيط إذا كان غير قابل للتجزئة، أي أنه يعبر عن عنصر واحد فقط من نتائج التجربة العشوائية مثل ظهور الرقم 3 عند رمي زهرة النرد أي أن: $\mathrm{A} = \{3\}$

2.3. الحدث المركب: نقول عن حدث أنه مركب إذا كان يمكن تفكيكه وتجزئته إلى أحداث بسيطة مثل ظهور عدد زوجي عند رمي زهرة النرد أي أن: $\mathrm{A} = \{2, 4, 6\}$

3.3. الحدث الأكيد: نقول عن حدث أنه أكيد إذا كان يحتوي على جميع الأحداث البسيطة الناتجة عن التجربة العشوائية مثل حدث ظهور الوجه أو الصورة عند رمي قطعة النقود.

4.3. الحدث المستحيل: نقول عن حدث انه مستحيل إذا كان غير قابل للتحقق أي أنه لا يتضمن أي حدث بسيط مثل حدث ظهور الرقم 0 عند رمي زهرة النرد.

5.3. الحدث المتمم (العكسي): إذا كان A حدث من المجموعة Ω فإن متمم الحدث هو مجموعة العناصر التي لم يحققها الحدث A ويرمز له بالرمز $\overline{\mathrm{A}}$ وعليه فإن: $\mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{A}} = \Omega$ و $\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{A}} = \emptyset$

4. تمارين المحور الثاني:

تمرين 1: عند إلقاء قطعة نقود متزنة مرتين متتاليتين، حدد فراغ العينة ثم عبر عن الأحداث التالية:

- (A) الحصول على الوجه P مرتين؟
- (B) الحصول على الوجه P مرة واحدة؟
- (C) الحصول على الوجه P في الرمية الأولى؟
- (D) الحصول على الصورة F في الرمية الأولى؟

حل تمرين 1: فراغ العينة:

$$\Omega = \{FF, FP, PF, PP\}$$

- (A) الحصول على الوجه P مرتين. (حدث بسيط)

$$A = \{PP\}$$

- (B) الحصول على الوجه P مرة واحدة. (حدث مركب)

$$B = \{PF, FP\}$$

- (C) الحصول على الوجه P في الرمية الأولى. (حدث مركب)

$$C = \{PF, PP\}$$

- (D) الحصول على الصورة F في الرمية الأولى. (حدث متمم)

$$D = \bar{C} = \{FP, FF\}$$

تمرين 2: عند إلقاء قطعة نرد متزنة مرة واحدة، حدد نوع الأحداث علما أن فراغ العينة ما يلي:

$$\Omega = \{1, 2,3,4, 5,6\}$$

حل تمرين 2:

الوصف	الحدث	النوع
ظهور الرقم 1	$\mathrm{A} = \{1\}$	حدث بسيط
ظهور رقم زوجي	$\mathrm{B} = \{2, 4, 6\}$	حدث مركب
عدم ظهور رقم زوجي	$\overline{\mathrm{B}} = \{1, 3, 5\}$	حدث متمم (عكسي)
ظهور أي رقم من فراغ العينة	$C = \{1, 2,3,4, 5,6\}$	حدث أكيد
ظهور الرقم 7	$D = \{7\}$	حدث مستحيل

تمرين 3: عند إلقاء قطعة نرد متزنة مرتان، حدد فراغ العينة ونوع الأحداث التالية:

- (A) الحصول على مجموع وجهين أكبر من أو يساوي 2.
- (B) الحصول على مجموع وجهين أكبر من 12.
- (C) الحصول على مجموع وجهين يساوي 12.
- (D) الحصول على مجموع وجهين أقل من أو يساوي 7.
- (E) الحصول على مجموع وجهين أكبر من 7.

حل تمرين3: فراغ العينة:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{Bmatrix}$$

- (A) الحصول على مجموع وجهين أكبر من أو يساوي 2

$$A = \begin{Bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{Bmatrix} \Longrightarrow A \text{ حدث أكيد}$$

- (B) الحصول على مجموع وجهين أكبر من 12

$$B = \emptyset \Longrightarrow B \text{ حدث مستحيل}$$

- (C) الحصول على مجموع وجهين يساوي 12.

$$C = \{66\} \Longrightarrow C \text{ حدث بسيط}$$

- (D) الحصول على مجموع وجهين أقل من أو يساوي 7 (العناصر باللون الأخضر)

$$D = \begin{Bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{Bmatrix} \Longrightarrow C \text{ حدث مركب}$$

- (E) الحصول على مجموع وجهين أكبر من 7 (العناصر باللون الأخضر)

$$E = \overline{D} = \begin{Bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{Bmatrix} \Longrightarrow \overline{D} \text{ حدث متمم}$$

المحور الثالث:

التحليل التوفيقي

1. المبدأ الأساسي للعد
2. التبديلات
3. الترتيبات
4. التوفيقات
5. تمارين المحور الثالث

المحور الثالث: التحليل التوفيقي

الهدف من التحليل التوفيقي (مبادئ العد) هو تعلم حساب عدد العناصر في مجموعة محدودة، والدارس للاحتمالات والاحصاء الرياضي عليه معرفة المبدأ الأساسي للعد، التبديلات، الترتيبات والتوفيقات.

1. المبدأ الأساسي للعد:

ينص هذا المبدأ على أنه إذا أمكن القيام بتجربة أولى بـ N_1 امكانية مختلفة وإذا أمكن القيام بتجربة ثانية بـ N_2 امكانية مختلفة فيمكن القيام بالتجربتين معاً بعدد مساوي لـ $N_1 \times N_2$ طريقة ويمكن تعميم هذا المبدأ على أكثر من تجربتين.

مثال 3: في تجربتي رمي زهرة النرد وقطعة النقود ما هو عدد الثنائيات التي يمكن الحصول عليها؟

- عدد نتائج رمي زهرة النـــرد:

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow \mathrm{N}_1 = 6$$

- عدد نتائج رمي قطعة النقود:

$$\Omega_2 = \{P, F\} \Rightarrow \mathrm{N}_2 = 2$$

وفقاً للمبدأ الأساسي للعد يكون لدينا $6 \times 2 = 12$ إمكانية مختلفة، ويمكن توضيح هذه النتائج كما يلي:

$$\Omega = \{(1,F),(2,F),(3,F),(4,F),(5,F),(6,F),(1,P),(2,P),(3,P),(4,P),(5,P),(6,P)\}$$

مثال 4: لتشغيل هاتف نقال يجب تشكيل 4 أرقام سرية، ما هو عدد الطرق لتشكيل الأرقام السرية؟

- لتشكيل الرقم السري الأول لدينا:

$$\Omega_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow \mathrm{N}_1 = 10 \text{ إمكانيات}$$

- لتشكيل الرقم السري الثاني لدينا:

$$\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow \mathrm{N}_2 = 10 \text{ إمكانيات}$$

- لتشكيل الرقم السري الثالث لدينا:

$$\Omega_3 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow \mathrm{N}_3 = 10 \text{ إمكانيات}$$

- لتشكيل الرقم السري الرابع لدينا:

$$\Omega_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow \mathrm{N}_4 = 10 \text{ إمكانيات}$$

وفقاً للمبدأ الأساسي للعد فإن عدد الطرق لتشكيل الأرقام السرية الأربعة هو:

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10000 \text{ إمكانيات}$$

2/ التبديلات Permutations:

التبديلة هي عملية ترتيب عناصر مجموعة في متسلسلة أو بترتيب معين. إذا كانت العناصر مرتبة، فعملية إعادة ترتيب العناصر تسمى تبديلا. ونميز بين التبدلات دون تكرار، التبديلات بتكرار، التبديلات الدائرية والتبديلات مع وجود عناصر متشابهة.

1.2. التبديلات دون تكرار: نسمي تبديلة دون تكرار كل مجموعة مرتبة بعناصر مختلفة، وعدد التبديلات دون تكرار يرمز لها بالرمز P_n حيث: $\mathrm{P}_n = n!$

ملاحظة: تسمى ! بـ n عاملي ($Factoriel$) حيث:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

شرط أن يكون n يختلف عن الصفر ونقبل أن $0! = 1$

مثال 5: بكم طريقة يُمكن ترتيب أربعة كتب في رف مكتبة؟

بما أننا بصدد ترتيب جميع الكتب نتكلم هنا عن التبديلة، وبما أنه لا يمكن وضع كتاب معين في مكانين مختلفين فالتبديلة تصبح دون تكرار، ومنه:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

2.2. التبديلات بتكرار: نسمي تبديلة بتكرار كل مجموعة مرتبة بعناصر يمكن تكرارها، وعدد التبديلات بتكرار يرمز لها بالرمز $\widehat{\mathrm{P}}_n$ حيث: $\widehat{\mathrm{P}}_n = n^n$

مثال 6: ليكن لدينا المجموعة التالية: $\Omega = \{5, 7, 9\}$ كم عدد مكون من ثلاثة أرقام يمكن تشكيله؟

بما أنه سيتم استخدام جميع الأرقام فيكون لدينا تبديلة وبما أنه يُمكن استخدام رقم معين أكثر من مرة فيصبح لدينا تبديلة بتكرار $\widehat{\mathrm{P}}_3 = 3^3 = 27$ ، هذه الأعداد هي:

$$555, 557, 559, 575, 595, 579, 597, 577, 599, 777, 775, 779, 757, 797, 759,$$
$$795, 755, 799, 999, 995, 997, 959, 979, 957, 975, 955, 977$$

لو لم يُسمح بتكرار الرقم يصبح لدينا تبديلة دون تكرار $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ هذه الأعداد هي:

$$579, 597, 759, 795, 957, 975$$

3.2. التبديلات الدائرية: تعتبر حالة استثنائية من التبديلات دون تكرار، عدد طرق تبديل مفردات عينة في وضعية دائرية هو:

$$P_n = (n-1)!$$

مثال 7: بكم طريقة يمكن لأربعة أشخاص أن يجلسوا حول طاولة مستديرة؟

بما أن شكل الطاولة مستدير فإنه يمكن لشخص واحد أن يختار في أي مكان يجلس والثلاثة المتبقون يختارون طرق عدة. ومنه:

$$P_4 = (4-1)! = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

4.2. التبديلات مع وجود عناصر متشابهة: في بعض الحالات يُلاحظ وجود عناصر أو مفردات غير مختلفة في المجموعة، عدد التبديلات في هذه الحالة هو:

$$\hat{P}_n = \frac{n!}{\alpha! \times \beta! \times \dots \times \gamma!}$$

مثال 8: كم كلمة ذات أربعة أحرف (بمعنى أو دون معنى) يمكن تشكيلها باستخدام حروف كلمة "محمد" (ص)؟

بما أننا سنستخدم جميع الأحرف فيكون لدينا تبديلة وبما أن هناك حرفين متشابهين فإن عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها هو:

$$\hat{P}_4 = \frac{4!}{2! \times 1! \times 1!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12$$

3. الترتيبات Arrangement:

الترتيبة هي مجموعة جزئية ذات r عنصر يتم اختيارها أو تشكيلها أو سحبها من مجموعة أخرى ذات n عنصر حيث $r < \mathrm{n}$ (لو يكون $r = \mathrm{n}$ الترتيبة تصبح تبديلة) وشرط الترتيب مهم، ونميز بين الترتيبات دون تكرار والترتيبات بتكرار.

1.3. الترتيبات دون تكرار: نسمي ترتيبة دون تكرار إذا كانت عناصرها متمايزة (مختلفة)، ويُرمز لعدد الترتيبات دون تكرار بالرمز: A_n^r ويمكن حساب عدد الترتيبات دون تكرار من خلال العلاقة التالية:

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال 9: ما هو عدد الأعداد المكونة من رقمين دون تكرار والتي يتم اختيارها من المجموعة التالية:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$$

في تشكيل الأعداد الترتيب مهم وقد اخترنا جزء من كل والعملية تتم دون تكرار إذن عدد الأعداد هو:

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$

هذه الأعداد هي: 12، 13، 14، 21، 23، 24، 31، 32، 34، 41، 42، 43.

2.3. الترتيبات بتكرار: نسمي ترتيبة بتكرار إذا كانت عناصرها يُمكن تكرارها، ويرمز لعدد الترتيبات بتكرار بالرمز: $\widehat{\mathrm{A}}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{r}}$ ويمكن حساب عدد الترتيبات بتكرار من خلال العلاقة التالية:

$$\widehat{\mathrm{A}}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{r}}=n^{r}$$

مثال 10: بالعودة إلى المثال 9 أحسب عدد الأعداد التي يُمكن تشكيلها مع امكانية تكرار الرقم؟

في هذه الحالة نستخدم قانون الترتيبة بتكرار ومنه عدد الأعداد هو:

$$\widehat{\mathrm{A}}_{4}^{2}=4^{2}=16$$

هذه الأعداد هي:11، 12، 13، 14، 21، 22، 23، 24، 31، 32، 33، 34، 41، 42، 43، 44.

ملاحظة هامة: بعض أهم الحالات التي يكون فيها الترتيب مهم هي: تشكيل الأعداد، تشكيل الكلمات، المنافسات والمسابقات، ترتيب أشياء، تكوين اللجان مع تحديد المناصب والمهام، السحب على التوالي، وبهذا نميز ما بين الترتيبة والتوفيقة.

4. التوفيقات Combinaisons:

تُسمى أيضا في بعض المراجع بالتوليفات، إذن فالتوفيقة هي مجموعة جزئية ذات r عنصر يتم اختيارها أو تشكيلها أو سحبها من مجموعة أخرى ذات n عنصر حيث $r \leq \mathrm{n}$ وشرط الترتيب غير مهم، ونميز هنا أيضا بين التوفيقات دون تكرار والتوفيقات بتكرار.

1.4. التوفيقات دون تكرار: نسمي توفيقة دون تكرار إذا كان يُمكن اختيار مجموعة ذات r عنصر من بين مجموعة أُخرى ذات n عنصر دون تكرار نفس العنصر، ويُرمز لعدد التوفيقات دون تكرار بالرمز $\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{r}}$ ويُمكن حساب عدد التوفيقات في هذه الحالة كما يلي:

$$\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{r}}=\frac{\mathrm{A}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{r}}}{r!}=\frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$$

مثال 11: صندوق به 10 مصابيح نسحب منه في آن واحد 3 مصابيح بطريقة عشوائية، ما هو عدد امكانيات اجراء السحب؟

السحب يتم في آن واحد إذن الترتيب غير مهم ومنه نستخدم قانون التوفيقات لحساب عدد الامكانيات، كما يلي:

$$\mathrm{C}_{10}^{3}=\frac{10!}{(10-3)!\times 3!}=\frac{10!}{7!\times 3!}=\frac{10\times 9\times 8\times 7!}{7!\times 3\times 2}=120$$

خواص: $\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}-1}=n$ ؛ $\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{1}=n$ ؛ $\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}}=1$ ؛ $\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{0}=1$

2.4. التوفيقات بتكرار: نسمي توفيقة بتكرار إذا كان يُمكن اختيار مجموعة ذات r عنصر من بين مجموعة أُخرى ذات n عنصر مع امكانية تكرار نفس العنصر، ويُرمز لعدد التوفيقات بتكرار بالرمز $\widehat{\mathrm{C}}_{n}^{r}$ ويُمكن حساب عدد التوفيقات في هذه الحالة كما يلي:

$$\tilde{C}_n^r = C_{n+r-1}^r = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)! \times r!}$$

مثال 12: فرضاً أنه في مقهى يوجد شخص يريد الحصول على علبتي عصير من بين 3 أنواع موجودة في الثلاجة، كم طبق به علبتي عصير يمكن أن يُقدم له؟

بما أنه يُمكن شرب نفس النوع مرتين فان عدد الأطباق التي يُمكن أن تُقدم له هي:

$$\hat{C}_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = 6 \text{ أطباق}$$

إذن فالتحليل التوفيقي مهم جداً ومساعد في حساب الاحتمالات، يساعد في تحديد عدد الحالات الملائمة أو الكلية ودراسة القوانين الأساسية في الاحتمالات.

5. تماريـــــن المحور الثالث:

تمرين 1:

ما هو عدد الأرقام الهاتفية من الشكل التالي:

06	70	×	×	×	×	×	×

حل تمرين 1:

بداية نحسب عدد الامكانيات لتشكيل كل رقم على حدى: (مسموح اعادة تشكيل الرقم)

06	70	×	×	×	×	×	×
		10 امكانيات	10 امكانيات	10 امكانيات	10 امكانيات	10 امكانيات	10 امكانيات

بتطبيق المبدأ الأساسي للعد نجد:

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6 = 1000000$$

أي أن هناك مليون طريقة لتشكيل الأرقام الهاتفية

تمرين 2:

نريد تشكيل ثلاثة حروف من الحروف اللاتينية (26 حرف) متبوعة بثلاثة أرقام إلى يمين الأحرف. ما هو عدد التشكيلات في الحالات التالية:

1. عدم تكرار الرقم والحرف؟
2. تكرار الحرف وعدم تكرار الرقم؟
3. تكرار الحرف والرقم على أن يختلف الرقم الأول عن الصفر؟

حل تمرين 2: (المبدأ الأساسي للعد)

عملية التشكيل مكونة من 3 أحرف و3 أرقام، أي هي عملية مركبة تنقسم إلى 6 عمليات جزئية.

1. عدم تكرار الحرف والرقم:

الرقم الثالث	الرقم الثاني	الرقم الأول	الحرف الثالث	الحرف الثاني	الحرف الأول
8 امكانيات	9 امكانيات	10 امكانيات	24 امكانية	25 امكانية	26 امكانية

وفقاً للمبدأ الأساسي للعد فإن عدد التشكيلات في هذه الحالة هي:

$$26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 = 11232000$$

2. تكرار الحرف وعدم تكرار الرقم:

الرقم الثالث	الرقم الثاني	الرقم الأول	الحرف الثالث	الحرف الثاني	الحرف الأول
8 امكانيات	9 امكانيات	10 امكانيات	26 امكانية	26 امكانية	26 امكانية

وفقاً للمبدأ الأساسي للعد فإن عدد التشكيلات في هذه الحالة هي:

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 9 \times 8 = 12654720$$

3. تكرار الحرف والرقم على أن يختلف الرقم الأول عن الصفر:

الرقم الثالث	الرقم الثاني	الرقم الأول	الحرف الثالث	الحرف الثاني	الحرف الأول
10 امكانيات	10 امكانيات	9 امكانيات	26 امكانية	26 امكانية	26 امكانية

وفقاً للمبدأ الأساسي للعد فإن عدد التشكيلات في هذه الحالة هي:

$$26 \times 26 \times 26 \times 9 \times 10 \times 10 = 15818400$$

تمرين 3:

يرغب خمسة أشخاص في الجلوس بطريقة عشوائية في طاولة مستطيلة بها خمسة مقاعد.

1 . ما هو عدد الطرق الممكنة لذلك؟

2 . بكم طريقة يُمكن الجلوس إذا كان الشخصين أ و ب يوجدان بجنب بعضهما على أن يجلس الشخص أ قبل الشخص ب؟

حل تمرين 3: (تبديلة دون تكرار)

1. عدد الطرق الممكنة للجلوس: بما أن جميع الأشخاص معني بالجلوس (عدد المقاعد مساوي لعدد الأشخاص) فنتحدث هنا عن التبديلات، وبما أنه لا يُمكن لشخص معين أن يجلس في مكانين مختلفين في آن واحد فالتبديلة تكون دون تكرار.

$$P_n = n! \Longrightarrow P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ طريقة}$$

2. إذا كان الشخصين أ و ب يوجدان بجنب بعضهما على أن يجلس الشخص أ قبل الشخص ب، في هذه الحالة يمكن اعتبار الشخصين أ و ب كشخص واحد وبالتالي فعدد الحالات الممكنة هو عدد طرق جلوس 4 أشخاص، ومنه:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ طريقة}$$

تمرين 4:

كم كلمة بمعنى أو دون معنى يُمكن تشكيلها باستخدام حروف الكلمة "STATISTIQUE"؟

حل تمرين رقم 4: (تبديلة بتكرار أو تبديلة مع تشابه بعض عناصرها)

كلمة "STATISTIQUE" فيها بعض الحروف مكررة: حرف "S" (2)، حرف "T"(3)، حرف "A" (1)، حرف "I" (2)، حرف "Q"(1)، حرف "U"(1)، حرف "E"(1). بما أننا سنستخدم جميع الحروف مع وجود تشابه في بعضها فتصبح لدينا تبديلة بتكرار:

$$\widehat{P_n} = \frac{n!}{\alpha! \times \beta! \times \ldots \times \gamma!} \Longrightarrow \hat{P}_{11} = \frac{11!}{2! \times 3! \times 1! \times 2! \times 1! \times 1! \times 1!} = \frac{11!}{24}$$
$$= 1663200 \text{ كلمة}$$

تمرين 5:

من بين الأرقام التالية: 1، 2، 3، 4، 5 كم توجد من طريقة لتكوين كلمة السر المشكلة من ثلاثة أرقام في الحالتين التاليتين:

1. عدم تكرار الرقم المسحوب؟
2. تكرار الرقم المسحوب؟

حل التمرين 5: (ترتيبة بتكرار ودون تكرار)

من بين الأرقام التالية: 1، 2، 3، 4، 5 عدد الطرق الممكنة لتكوين كلمة السر المكونة من ثلاثة أرقام:

1. في حالة عدم تكرار الرقم المسحوب: ترتيبة (اختيار 3 أرقام من بين 5) دون تكرار، ومنه:

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \Longrightarrow A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60 \text{ طريقة}$$

2. في حالة تكرار الرقم المسحوب: ترتيبة بتكرار، ومنه:

$$\hat{A}_n^r = n^r \Longrightarrow \hat{A}_5^3 = 5^3 = 125 \text{ طريقة}$$

يُمكن أيضا الاجابة عن سؤالي هذا التمرين بالاعتماد على المبدأ الأساسي للعد

تمرين 6:

وعاء يحتوي على 10 كرات موزعة كما يلي: 3 سوداء و 7 بيضاء.

أ. نقوم بسحب 3 كرات معاً.

1 . بكم طريقة يُمكن إجراء هذا السحب؟

2 . بكم طريقة يُمكن سحب الكرات الثلاثة بشرط أن تكون اثنتان باللون الأبيض؟

3 . بكم طريقة يُمكن سحب الكرات الثلاثة بشرط وجود على الأكثر كرتان باللون الأسود؟

ب. نقوم بسحب 3 كرات على التوالي دون ارجاع.

1 . بكم طريقة يُمكن إجراء هذا السحب؟

2 . بكم طريقة يُمكن سحب الكرات الثلاثة بشرط أن تكون اثنتان باللون الأبيض؟

حل تمرين 6: (السحب معاً = توفيقة دون تكرار، السحب على التوالي دون ارجاع = ترتيبة دون تكرار)

وعاء يحتوي على 10 كرات مكون من: 3 سوداء (N)، 7 بيضاء (B).

أ. نقوم بسحب 3 كرات معاً.

1. عدد طرق اجراء السحب:

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \Longrightarrow C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\,(10-3)!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 7!} = 120 \text{ طريقة}$$

2. عدد طرق السحب بشرط أن تكون اثنتان باللون الأبيض:

$$C_7^2 \times C_3^1 = 21 \times 3 = 63 \text{ طريقة}$$

3. عدد طرق السحب بشرط وجود على الأكثر كرتان باللون الأسود:

$$C_3^2 \times C_7^1 + C_3^1 \times C_7^2 + C_3^0 \times C_7^3 = 3 \times 7 + 3 \times 21 + 35 = 119 \text{ طريقة}$$

ب. نقوم بسحب 3 كرات على التوالي دون ارجاع.

1. عدد طرق اجراء السحب:

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720 \text{ طريقة}$$

2. عدد طرق السحب بشرط أن تكون اثنتان باللون الأبيض:

$$BBN \cup BNB \cup NBB \Leftrightarrow 3(A_7^2 \times A_3^1) = 3 \times 42 \times 3 = 378 \text{ طريقة}$$

تمرين 7:

يتكون قسم دراسي من 15 تلميذ و8 تلميذات، يُراد تشكيل لجنة مؤلفة من 3 أعضاء لتمثيل ذلك القسم في الاجتماعات الادارية وقد حددت لهم المناصب التالية: رئيس لجنة، نائب أول ونائب ثاني.

1. كم لجنة يُمكن تشكيلها؟
2. كم لجنة يُمكن تشكيلها بحيث يكون فيها تلميذة لرئيس لجنة وتلميذان كنائب أول وثاني؟
3. كم لجنة يُمكن تشكيلها بحيث يكون فيها تلميذ كرئيس لجنة وتلميذة على الأكثر للنيابة؟

حل تمرين 7: (في حالة تحديد الوظائف أو المهام الترتيب يكون مهم)

1. عدد اللجان التي يُمكن تشكيلها:

$$A_{23}^{3} = \frac{23!}{(23-3)!} = \frac{23 \times 22 \times 21 \times 20!}{20!} = 10626 \text{ لجنة}$$

2. عدد اللجان التي يُمكن تشكيلها بحيث يكون فيها تلميذة لرئيس لجنة وتلميذان كنائب أول وثاني:

$$A_{8}^{1} \times A_{15}^{2} = 8 \times 210 = 1680 \text{ لجنة}$$

3. عدد اللجان التي يُمكن تشكيلها بحيث يكون فيها تلميذ كرئيس لجنة وتلميذة على الأكثر للنيابة:

$$A_{15}^{1} \times A_{8}^{1} \times A_{14}^{1} + A_{15}^{1} \times A_{14}^{1} \times A_{8}^{1} + A_{15}^{1} \times A_{14}^{2} = 1680 + 1680 + 2730 = 4410 \text{ لجنة}$$

تمرين 8:

في مؤسسة صناعية صغيرة تُشغل 8 عمال و4 عاملات يُراد تشكيل وفد من 3 عمال من بين هؤلاء العمال لتمثيلها في معرض للإنتاج المحلي.

1. بكم طريقة يُمكن تشكيل هذا الوفد؟
2. بكم طريقة يُمكن تشكيل هذا الوفد إذا كان من بينهم 2 عمال ذكور؟
3. بكم طريقة يُمكن تشكيل هذا الوفد إذا كان من بينهم عاملتان على الأكثر؟

حل تمرين 8: لم يتم تحديد المهام إذن الترتيب غير مهم

1. عدد الوفود المشكلة:

$$C_{12}^{3} = \frac{12!}{3!\,(12-3)!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3 \times 2 \times 9!} = 220 \text{ وفد}$$

2. عدد طرق تشكيل الوفد مع وجود 2 عمال ذكور:

$$C_{8}^{2} \times C_{4}^{1} = \frac{8 \times 7}{2} \times 4 = 112 \text{ وفد}$$

3. عدد طرق تشكيل الوفد إذا كان من بينهم عاملتان على الأكثر:

$$C_{4}^{2} \times C_{8}^{1} + C_{4}^{1} \times C_{8}^{2} + C_{4}^{0} \times C_{8}^{3} = 6 \times 8 + 4 \times 28 + 56 = 216 \text{ وفد}$$

تمرين 9:

أوجد قيمة n في الحالة التالية:

$$A_n^2 = 72$$

حل تمرين 9:

ايجاد القيمة n في الحالة التالية:

$$A_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1) = n^2 - n$$
$$= 72 \Leftrightarrow n^2 - n - 72 = 0$$
$$\left(\text{معادلة من الدرجة الثانية}\right) ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = 0$$

لحل هذه المعادلة يجب حساب قيمة المميز Δ

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-72) = 289$$

قيمة المميز موجبة إذن المعادلة تقبل حلين (جذرين) هما:

$$\begin{cases} n_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 + 17}{2} = 9 \ \left(\text{مقبول}\right) \\ n_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 - 17}{2} = -8 \ (\text{مرفوض لأن } n \geq 2) \end{cases}$$

$$A_9^2 = \frac{9!}{7!} = 9 \times 8 = 72$$

تمرين 10:

يراد اختيار لجنة مكونة من 5 أعضاء يتم انتخابهم من بين 10 أساتذة رجال و30 أستاذة. بكم طريقة يُمكن:

1. اختيار اللجنة؟
2. اختيار لجنة مكونة من أستاذين وثلاثة أستاذات؟
3. اختيار لجنة مكونة من أربعة أساتذة رجال على الأقل؟
4. اختيار لجنة مكونة من أستاذ واحد على الأكثر؟

حل تمرين 10:

في هذه الحالة الترتيب غير مهم لأنه لم يتم تحديد الوظيفة والمهام داخل اللجنة، لذلك نستخدم التوفيقات، ومنه:

1. $C_{40}^{5}=\frac{40!}{(40-5)!\times5!}=\frac{40\times39\times38\times37\times36\times35!}{35!\times5\times4\times3\times2}=13\times38\times37\times36=658008$
2. $C_{10}^{2}\times C_{30}^{3}=\frac{10!}{(10-2)!\times2!}\times\frac{30!}{(30-3)!\times3!}=45\times4060=182700$
3. $C_{10}^{4}\times C_{30}^{1}+C_{10}^{5}\times C_{30}^{0}=\frac{10!}{(10-4)!\times4!}\times30+\frac{10!}{(10-5)!\times5!}=210\times30+252=6552$
4. $C_{10}^{1}\times C_{30}^{4}+C_{10}^{0}\times C_{30}^{5}=10\times\frac{30!}{(30-4)!\times4!}+\frac{30!}{(30-5)!\times5!}=10\times27405+142506=416556$

تمرين 11:

كيس يحتوي على 8 كرات منها: 5 بيضاء مرقمة من 1 إلى 5، و 3 كرات حمراء مرقمة من 6 إلى 8. نقوم بسحب 3 كرات في آن واحد.

1. بكم طريقة يمكن سحب هذه الكرات الثلاثة؟
2. كم عدد مختلف يمكن تشكيله من جراء هذا السحب؟
3. بكم طريقة يمكن إجراء هذا السحب بشرط ظهور كرتين بيضاويتين؟

حل تمرين 11:

1. $C_{8}^{3}=\frac{8!}{(8-3)!\times3!}=\frac{8\times7\times6\times5!}{5!\times3\times2}=56$
2. $A_{8}^{3}=\frac{8!}{(8-3)!}=\frac{8\times7\times6\times5!}{5!}=336$
3. $C_{5}^{2}\times C_{3}^{1}=\frac{5!}{(5-2)!\times2!}\times3=30$

تمرين 12:

نفرض أن لدينا ثلاثة طلبة في فوج معين، ما هو عدد التواريخ التي لا يكون من بينهم أي اثنين أو أكثر لهم تاريخ الميلاد نفسه، أي ما عدد التواريخ التي تكون تواريخ ميلادهم مختلفة عن بعضها البعض؟

حل تمرين 12:

أي نقطة في الفضاء العيني هي عبارة عن ثلاثة أعداد مرتبة، العدد الأول هو تاريخ ميلاد الطالب الأول، العدد الثاني هو تاريخ ميلاد الطالب الثاني، العدد الثالث هو تاريخ ميلاد الطالب الثالث. وبما أن تاريخ ميلاد الطالب هو أحد أيام السنة أي أنه يوجد 365 يوما –نفرض أن سنة الميلاد عادية- يمكن أن يكون تاريخ ميلاد طالب واحد منهم.

إذا يكون عدد نقاط فضاء الأحداث الأولية هو $363\times364\times365$ هو عدد النقاط الملائمة للحدث المطلوب وذلك أن الطالب الأول أمامه 365 يوما ليكون تاريخ ميلاده فيه، والطالب الثاني يوجد

أمامه 364 فقط لأن تاريخ ميلاده لا يكون نفس تاريخ ميلاد الطالب الأول، وهكذا يوجد للطالب الثالث 363 يوما ليكون تاريخ ميلاده مختلف عن تاريخ ميلاد الطالبين الأول والثاني. إذن فعدد الحالات هو:

$$A_{365}^{3} = \frac{365!}{(365-3)!} = \frac{365 \times 364 \times 363 \times 362}{362} = 365 \times 364 \times 363$$

تمرين 13:

بكم طريقة يمكنك أن تقسم 30 طالب إلى أربع مجموعات تحتوي كل منها على 7، 10، 5، و10 طلبة على الترتيب.

حل تمرين 13:

المجموعة الأولى بها 7 طلبة يتم اختيارهم من 30 والمجموعة الثنية بها 10 طلبة يتم اختيارهم من البقية أي من 23 طالب والمجموعة الثالثة بها 5 طلبة يتم اختيارهم من 13 طالب والمجموعة الرابعة بها 8 طلبة يتم اختيارهم من 8 طلبة المتبقين. وبما أن الترتيب غير مهم فإن عدد الطرق هو:

$$C_{30}^{7} \times C_{23}^{10} \times C_{13}^{5} \times C_{8}^{8} = 2035800 \times 1144066 \times 1587$$
$$= 2997538267324000$$

تمرين 14:

تقدم للمشاركة في مسابقة 10 طلبة ضمنهم 7 طالبات، فإذا كانت اللجنة المشرفة على المسابقة تريد ترتيبهم في قاعة الامتحان حسب معدلاتهم الانتقائية.

1. بكم طريقة يمكن ترتيبهم؟
2. بكم طريقة يمكن ترتيبهم بحيث يتم جمع الطلاب لوحدهم والطالبات لوحدهن؟

حل تمرين 14:

1. عدد طرق الترتيب: جميع الطلبة معني بعملية الترتيب ودون تكرار ومنه نستخدم القانون الخاص بالتبديلة دون تكرار، إذن عدد التبديلات هو:

$$P_n = n!\,; \qquad P_{10} = 10! = 10 \times 9 \times \ldots \ldots \times 2 \times 1 = 3628800$$

2. عدد طرق ترتيب الطلبة بحيث يتم جمع الطلاب لوحدهم والطالبات لوحدهن:

$$P_3 \times P_7 + P_7 \times P_3$$
$$= (3 \times 2 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2)$$
$$+ (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2) = 60480$$

المحور الرابع:

الاحتمالات

1 . نظرية الاحتمال
1.1. مفهوم الاحتمال
2.1. طريقة حساب الاحتمال
2. خواص الاحتمال
3. القوانين الأساسية في الاحتمالات
1.3. قانون الجمع
2.3. قانون الضرب
3.3. الاحتمال الشرطي
4.3. الاحتمال الكلي
5.3. نظرية بايـــــز
4. تمارين المحور الرابع

المحور الرابع: الاحتمالات

نتطرق من خلال هذا المحور إلى مفهوم الاحتمال وطريقة حسابه وخواصه والقوانين الأساسية في حسابه (جمع وضرب الاحتمالات، الاحتمال الشرطي، الاحتمال الكلي ونظرية بايز).

1. نظرية الاحتمال

1.1. مفهوم الاحتمال: الاحتمال لغويا هو أحد الخيارات المتاحة أمام تجربة أو حادثة غير محسومة النتيجة أما رياضيا فهو عدد حقيقي محصور في المجال المغلق$[0-1]$ يشير الى امكانية وقوع حدث ما نتيجة تجربة عشوائية ويرمز له بالرمز $P(\mathrm{A})$.

2.1. طريقة حساب الاحتمال: في تجربة عشوائية إذا رمزنا للحدث بالرمز A فان احتمال وقوع هذا الحدث هو النسبة بين عدد الحالات الملائمة وعدد الحالات الممكنة (الكلية). ومنه فإن القانون العام للاحتمال هو:

$$P(\mathrm{A})=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}=\frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$
$$=\frac{number\ of\ favorable\ cases}{number\ of\ possible\ cases}$$

مثال1: بافتراض أن في عيادة طبية لوحظ أنه من بين 500 عملية جراحية تم اجراؤها سابقا تم تسجيل نجاح 450 عملية، تم اختيار عملية جراحية بصفة عشوائية، ما هو احتمال أن تكون ناجحة؟ نفرض أن A حدث يمثل اختيار عملية جراحية ناجحة، ومنه:

$$P(\mathrm{A})=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}=\frac{450}{500}=0{,}9=90\%$$

2. خصائص الاحتمال: من بين أهم خصائص الاحتمال ما يلي:

- احتمال وقوع الحدث A دوماً محصور بين الصفر والواحد، أي أن: $0 \leq \mathrm{P(A)} \leq 1$؛
- إذا كان: $P(\mathrm{A})=0$ نقول أن احتمال وقوع الحدث A مستحيل؛
- إذا كان: $P(\mathrm{A})=1$ نقول أن احتمال وقوع الحدث A أكيد؛
- مجموع احتمالات الأحداث الأولية دوما يساوي الواحد: $P(\Omega)=1$؛
- مجموع احتمال الحدث والحدث المتمم (العكسي) له يساوي الواحد:
  $P(\mathrm{A})+P(\overline{\mathrm{A}})=1$ ومنه نستنتج أن: $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})=1-\mathrm{P(A)}$
- إذا كان A و B حدثان متنافيان فإن : $\mathrm{P(A \cup B)=P(A)+P(B)}$

مثال 2: بالعودة لمعطيات المثال 1 احسب احتمال فشل عملية جراحية تم اختيارها بطريقة عشوائية؟

احتمال الفشل هو حدث متمم لحدث النجاح، وبما أنه تم حساب احتمال النجاح سابقاً فإن احتمال الفشل هو:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}9 = 0.1 = 10\%$$

3. القوانين الأساسية في الاحتمالات

في بعض الحالات يسهل علينا حساب احتمال وقوع الأحداث البسيطة (الأولية) أما في حالات أخرى يصعب حساب الاحتمالات إذا كانت الأحداث مركبة وهذا يبدوا جلياً إذا ما كانت هناك علاقة بين الأحداث ، وهو ما يجعلنا ننتقل إلى دراسة القوانين الأساسية التي تساعدنا في حساب الاحتمالات، من بين القوانين نجد قانون الجمع، قانون الضرب، الاحتمال الشرطي، الاحتمال الكلي ونظرية بايز.

1.3. قانون الجمع:

قانون الجمع يُقصد به الاتحاد في المجموعات ($\cup$)، أي إذا أردنا حساب احتمال وقوع الحدث A أو الحدث B في حالة الاهتمام بحدثين. ونميز هنا بين الأحداث المتنافية والأحداث غير المتنافية.

1.1.3. الأحداث المتنافية: نقول أن A و B حدثان متنافيان إذا كانت مجموعة التقاطع بينهما خالية أي لا يوجد عناصر مشتركة بينهما، ومنه فاحتمال وقوع A أو B هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال 3: صندوق يوجد به 20 بطاقة مرقمة من 1 إلى 20. نقوم بسحب بطاقة بطريقة عشوائية ما احتمال الحصول على بطاقة بها رقم يقبل القسمة على 5 أو بطاقة بها رقم يقبل القسمة على 7؟

ليكن لدينا: A حدث سحب بطاقة بها رقم يقبل القسمة على 5 وB حدث سحب بطاقة بها رقم يقبل القسمة على 7.

$$A = \{5, 10, 15, 20\}$$
$$B = \{7, 14\}$$

بما أن الحدثين متنافيين (مجموعة التقاطع هي مجموعة خالية) فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{20} + \frac{2}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

2.1.3. الأحداث غير المتنافية: نقول أن A و B حدثان غير متنافيان إذا كانت مجموعة التقاطع بينهما غير خالية أي يوجد عناصر مشتركة بينهما، في هذه الحالة احتمال وقوع A أو B هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال 4: يقوم شخص بإلقاء قطعة نرد، فما احتمال ظهور عدد فردي أو عدد يقبل القسمة على 3؟

ليكن لدينا: $A = \{1, 3, 5\}$ حدث ظهور عدد فردي و$B = \{3, 6\}$ حدث ظهور عدد يقبل القسمة على 3، نلاحظ ان الحدثان غير متنافيان (يشتركان في العدد 3) أي أن $A \cap B = 3$، ومنه احتمال وقوع A أو B هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = 0{,}67$$

لو لم نقم بانقاص التقاطع من المجموع لحسبنا العدد 3 مرتين؛ مرة كعدد فردي وأخرى كعدد يقبل القسمة على 3 وهذا خطأ.

ملاحظة: قانون الجمع في حالة ثلاثة أحداث هو:

حالة الأحداث المتنافية:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

حالة الأحداث غير المتنافية:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

مثال 5: يتم اختيار عشوائيا رقم من 1 إلى 25، ما احتمال اختيار رقم يقبل القسم على 6 أو رقم يقبل القسمة على 3 أو رقم أكبر من أو يساوي 20؟

ليكن لدينا: $A = \{6, 12, 18, 24\}$ اختيار رقم يقبل القسمة على 6

و $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$ اختيار رقم يقبل القسم على 3

و $C = \{20, 21, 22, 23, 24, 25\}$ رقم أكبر من أو يساوي 20

نلاحظ ان الأحداث غير متنافيان ومنه:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = \frac{4}{25} + \frac{8}{25} + \frac{6}{25} - \frac{4}{25} - \frac{1}{25} - \frac{2}{25} + \frac{1}{25} = \mathbf{\frac{12}{25}}$$

2.3. قانون الضرب:

قانون الضرب يُقصد به التقاطع في المجموعات ($\cap$)، أي إذا أردنا حساب احتمال وقوع الحدث A والحدث B في حالة الاهتمام بحدثين. ونميز هنا بين الأحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة.

1.2.3. الأحداث المستقلة: نقول أن A و B حدثان مستقلان إذا كان وقوع أحدهما ليس مشروط بوقوع الآخر، ومنه فاحتمال وقوع A و B في هذه الحالة هو:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

مثال 6: شخص يقوم بإطلاق رميتين متتاليتين على هدف معين، حيث احتمال أن يصيب في الرمية الأولى هو $0,50$ واحتمال أن يصيب في الرمية الثانية هو $0,60$. علماً أن التجربتان مستقلتان عن بعضهما البعض ما احتمال إصابة الرمية الأولى وإصابة الرمية الثانية؟

ليكن لدينا الحدثين: B_1 إصابة الرمية الأولى وB_2 إصابة الرمية الثانية، ومنه:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2) = 0,50 \times 0,60 = 0,30$$

2.2.3. الأحداث غير المستقلة: نقول أن A و B حدثان غير مستقلان إذا كان وقوع أحدهما مشروط ومرهون بوقوع الآخر، ومنه فاحتمال وقوع A و B في هذه الحالة هو:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

الاشارة $(/)$ تُقرأ علماً، وتقرأ العبارة: $P(B/A)$ احتمال وقوع الحدث B علماً أن الحدث A محقق.

مثال 7: صندوق يوجد به 10 كرات مقسمة حسب اللون إلى: 5 بيضاء، 3 حمراء و2 سوداء. ما هو احتمال سحب كرتان بيضاوتان في حالة السحب على التوالي دون ارجاع؟

ليكن لدينا الحدثين: B_1 الكرة الأولى بيضاء وB_2 الكرة الثانية بيضاء، وبما أن الحدثين غير مستقلين فإن:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2/B_1) = \frac{A_5^1}{A_{10}^1} \times \frac{A_4^1}{A_9^1} = \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{20}{90} = 0,22$$

مثال 8: صندوق به 10 مصابيح كهربائية منها 7 صالحة للإضاءة و3 غير صالحة، نسحب من الصندوق بطريقة عشوائية مصباحين على التوالي مع إرجاع المصباح المسحوب للصندوق. ما احتمال أن يكون المصباح الأول صالح للإضاءة والمصباح الثاني غير صالح للإضاءة؟

ليكن لدينا الحدثين: A_1 المصباح الأول صالح للإضاءة و A_2 المصباح الثاني صالح للإضاءة، ومنه احتمال أن يكون المصباح الأول صالح للإضاءة والمصباح الثاني غير صالح للإضاءة هو:

$$P(A_1 \cap \bar{A}_2) = P(A_1) \times P(\bar{A}_2/A_1) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{21}{100} = 0,21$$

3.3. الاحتمال الشرطي:

الاحتمال الشرطي هو احتمال وقوع حدث ما مع العلم بوقوع حدث آخر، ليكن لدينا الحدثان A و B حيث $P(A) \neq 0$ نرمز لاحتمال وقوع الحدث B علماً A بالرمز $P(\quad/A)$ ويُحسب الاحتمال الشرطي بالعلاقة التالية:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

مثال 9: عند رمي زهرة نرد، ما هو احتمال الحصول على العدد 6 علماً أن العدد الذي ظهر زوجي؟

ليكن لدينا: $A=\{2,4,6\}$ حادث ظهور عدد زوجي و $B=\{6\}$ حدث ظهور العدد 6، احتمال ظهور العدد 6 علما أن العدد الظاهر زوجي هو:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/6}{3/6}=\frac{1}{3}=0{,}33$$

مثال 10: احتمال فوز أحد الفرق على ميدانه هو 0,7 واحتمال الفوز خارج ميدانه هو 0,5 واحتمال الفوز في ميدانه وخارجه هو 0,3. في مباراتان اختيرتا عشوائياً واحدة في ميدانه والأخرى خارجه ما احتمال:

1. أن يفوز خارج ميدانه علماً أنه قد فاز في ميدانه في المباراة الأخرى؟
2. أن يفوز في ميدانه علماً أنه قد فاز خارج ميدانه في المباراة الأخرى؟

ليكن لدينا الحدثين: A الفوز في ميدانه و B الفوز خارج ميدانه، إذن:

$P(A)=0{,}7$ و $P(B)=0{,}5$ و $P(A\cap B)=0{,}3$ المطلوب:

1. حساب $P(B/A)$:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0{,}3}{0{,}7}=0{,}49$$

2. حساب $P(A/B)$:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}3}{0{,}5}=0{,}60$$

مثال 11: رُميت قطعة نقود متزنة ثلاث مرات متتالية، نرمز لظهور الوجه بالرمز P ولظهور الصورة بالرمز F، إذا عُلم ظهور الوجه في الرمية الأولى فما احتمال ظهور الوجهان في الرميتين الثانية والثالثة؟

جميع الحالات الممكنة موضحة كما يلي:

$$\Omega=\begin{Bmatrix} F & F & F\\ F & P & F\\ F & F & P\\ F & P & P\\ P & P & P\\ P & F & P\\ P & P & F\\ P & F & F \end{Bmatrix}$$

نفرض أن الحدث A يمثل ظهور الوجه في الرمية الأولى والحدث B ظهور الوجهان في الرميتين الثانية والثالثة، المطلوب: $P(B/A)$

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P\ P\ P}{PPP\ ;P\ F\ P;PP\ F;P\ FF}=\frac{1/8}{4/8}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

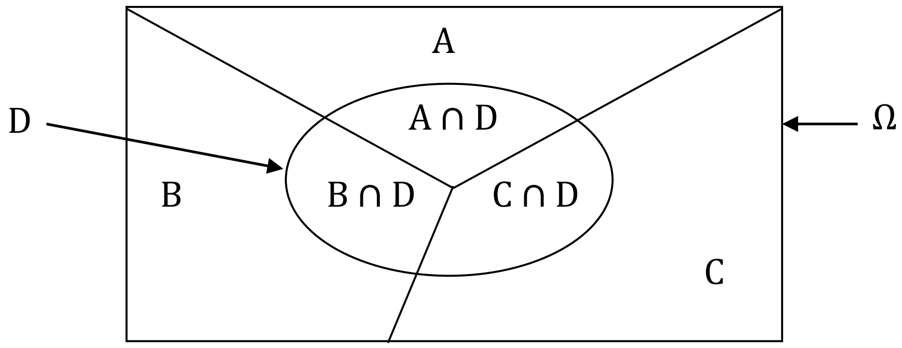
4.3. الاحتمال الكلي

قبل التطرق إلى مفهوم وقانون الاحتمال الكلي لا بد من معرفة ماذا يُقصد بالتجزئة للمجموعة الكلية Ω أو كما تسمى أيضاً بالجملة التامة (الكاملة).

تعريف الجملة التامة: ليكن لدينا $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ متتالية من الأحداث، نقول عن هذه المتتالية أنها تُشكل تجزئة للمجموعة الكلية (جملة تامة) إذا تحقق ما يلي:

- $\forall\ i \in \aleph, A_i \neq \emptyset \Leftrightarrow P(A_i) \neq 0$ جميع الأحداث غير خالية
- $\forall\ i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset \Leftrightarrow P(A_i \cap A_j) = 0$ جميع الأحداث متنافية مثنى مثنى
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ اتحاد الأحداث يعطينا المجموعة الكلية

الآن من أجل شرح معنى الاحتمال الكلي نفرض أنه لدينا ثلاثة أحداث A, B, C تُشكل تجزئة للمجموعة الكلية (جملة تامة) ولدينا الحدث D لا يتحقق إلا بتحقق أحد الأحداث الجزئية الثلاثة السابقة كما هو موضح في الشكل التالي:



نلاحظ أن الأحداث A ∩ D, B ∩ D, C ∩ D هي أحداث متنافية مثنى مثنى ومنه حسب قانون الجمع فإن:

$$\mathrm{P}(D)=P[(\mathrm{A}\cap\mathrm{D})\cup(\mathrm{B}\cap\mathrm{D})\cup(\mathrm{C}\cap\mathrm{D})]=P(\mathrm{A}\cap\mathrm{D})+P(\mathrm{B}\cap\mathrm{D})+(\mathrm{C}\cap\mathrm{D})$$
$$\mathrm{P}(D)=P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)$$

تعميم قانون الاحتمال الكلي: ليكن لدينا الأحداث التالية: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ والتي تمثل تجزئة للمجموعة الكلية وليكن لدينا الحدث B الذي لا يتحقق إلا بتحقق أجزاء الجملة التامة، ومنه فإن:

$$\mathrm{P}(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P\left({}^{B}/_{A_i}\right)$$

مثال 12: ليكن لدينا ثلاثة صناديق متماثلة الأول فيه 5 كرات بيضاء و3سوداء، الثاني فيه 8بيضاء و4 سوداء والثالث فيه 6 بيضاء و2 سوداء. نرمي قطعة نقود متزنة ثلاثة مرات متتالية فإذا ظهر الوجه (P) ثلاثة مرات نختار الصندوق الأول، وإذا ظهر مزيج بين الوجوه والصور نختار الصندوق الثاني وإذا ظهرت الصورة (F) ثلاثة مرات نختار الصندوق الثالث. يتم اختيار الصندوق المناسب ثم نسحب منه كرتين على التوالي دون ارجاع. أحسب احتمال أن تكونا الكرتان المسحوبتان سوداوتان؟

نفرض أن لدينا الأحداث التالية:A اختيار الصندوق الأول، B اختيار الصندوق الثاني، C اختيار الصندوق الثالث، N الكرتان المسحوبتان سوداويتان.

كما لاحظنا في المثال 11 فإن عدد الحالات الاجمالية عند رمي قطعة نقود ثلاثة مرات هو ثمانية، ومنه:

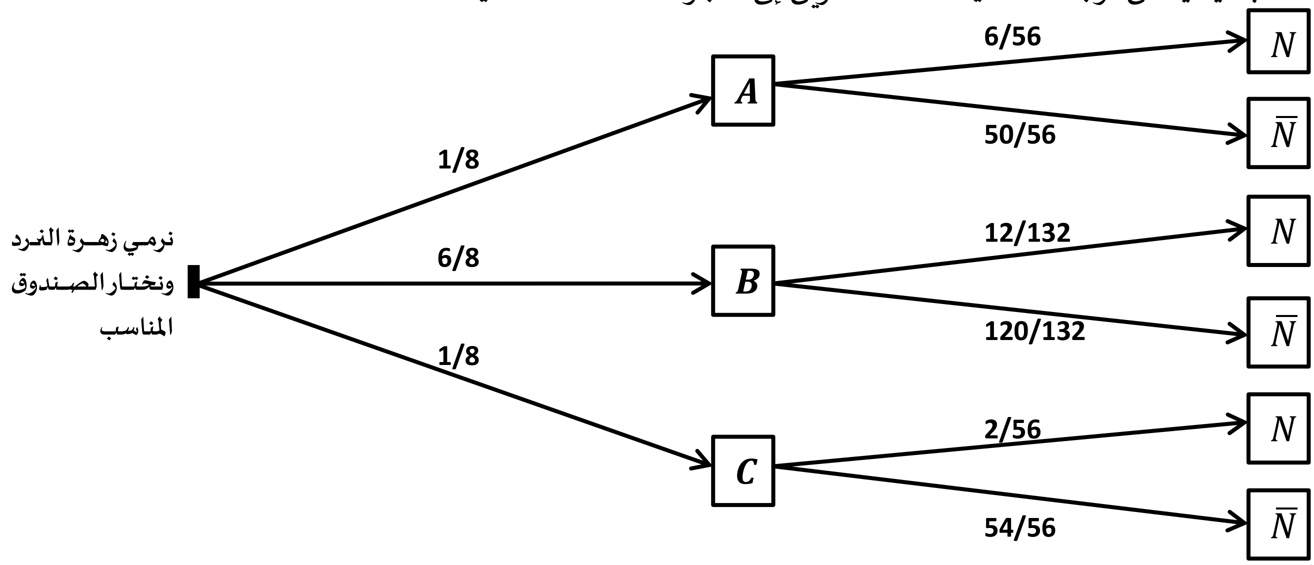
$$P(A) = \frac{1}{8} \qquad P(N/A) = \frac{A_3^2}{A_8^2} = \frac{6}{56}$$

$$\mathrm{P}(B) = \frac{6}{8} \qquad P(N/B) = \frac{A_4^2}{A_{12}^2} = \frac{12}{132}$$

$$\mathrm{P}(C) = \frac{1}{8} \qquad P(N/C) = \frac{A_2^2}{A_8^2} = \frac{2}{56}$$

المطلوب: ترجم معطيات هذا المثال في شجرة احتمالية ثم احسب احتمال أن تكونا الكرتين المسحوبتين سوداويتين أي حساب $P(N)$

بداية يُمكن ترجمة معطيات هذا التمرين إلى شجرة الاحتمالات التالية:



بما أن الأحداث A, B, C تشكل تجزئة للمجموعة الكلية والحدث N لا يتحقق إلا بتحقق الأحداث السابقة، ومنه باستخدام قانون الاحتمال الكلي نجد:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(N) &= P(A)P(N/A) + P(B)P(N/B) + P(C)P(N/C)\\ &= \frac{1}{8}\times\frac{6}{56} + \frac{6}{8}\times\frac{12}{132} + \frac{1}{8}\times\frac{2}{56} = \frac{3}{224} + \frac{9}{132} + \frac{1}{224}\\ &= \frac{396 + 2016 + 132}{29568} = 0{,}086 = 8{,}6\%\end{aligned}$$

مثال 13: تشكلت لجنة مكونة من 18 عضو لتمثيل الأقسام الأربعة في إحدى الكليات كالآتي:

3 أعضاء من القسم الأول منهم طالبتـــان؛

5 أعضاء من القسم الثاني منهم طالبتـــان؛

6 أعضاء من القسم الثالث منهم 3 طالبات؛

4 أعضاء من القسم الرابع منهم طالبتـــــان.

نسحب وبصورة عشوائية عضو من هذه اللجنة، ما احتمال أن يكون هذا العضو طالب؟

نفرض أن لدينا الأحداث التالية: A العضو من القسم الأول، B العضو من القسم الثاني، C العضو من القسم الثالث، D العضو من القسم الرابع، E العضو طالب.

تكتب المعطيات كما يلي:

$$P(A)=\frac{3}{18} \qquad P(E/A)=\frac{1}{3}$$
$$P(B)=\frac{5}{18} \qquad P(E/B)=\frac{3}{5}$$
$$P(C)=\frac{6}{18} \qquad P(E/C)=\frac{3}{6}$$
$$P(D)=\frac{4}{18} \qquad P(E/D)=\frac{2}{4}$$

المطلوب: حساب احتمال أن يكون العضو طالب أي حساب $\mathrm{P}(E)$

بما أن الأحداث A, B, C, D تشكل تجزئة للمجموعة الكلية والحدث E لا يتحقق إلا بتحقق الأحداث السابقة، ومنه بالاعتماد على قانون الاحتمال الكلي نجد:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E) &= P(A)P(E/A)+P(B)P(E/B)+P(C)P(E/C)+P(D)P(E/D)\\ &=\frac{3}{18}\times\frac{1}{3}+\frac{5}{18}\times\frac{3}{5}+\frac{6}{18}\times\frac{3}{6}+\frac{4}{18}\times\frac{2}{4}=\frac{1+3+3+2}{18}=\frac{9}{18}\\ &=0{,}50\end{aligned}$$

5.3. نظرية بايز (دستور بايز) théorème de Bayes:

تعتمد هذه النظرية على مختلف القوانين السابقة، وهي تعالج كيفية حساب الاحتمالات الشرطية لحوادث متنافية تشكل تجزئة للمجموعة الكلية بالنسبة للحادث الذي لا يتحقق إلا بتحققهم.

ليكن لدينا ثلاثة حوادث A, B, C تُشكل تجزئة للمجموعة الكلية (جملة تامة) ولدينا الحدث D لا يتحقق إلا بتحقق أحد الأحداث الجزئية الثلاثة السابقة، ونريد أن نحسب الاحتمالات الشرطية التالية:

$$P(A/D)? \quad P(B/D)? \quad P(C/D)?$$

نأخذ مثلاً الحالة الأولى: $P(A/D)$ وفقاً لقانون الضرب (تقاطع الأحداث غير المستقلة) لدينا:

$$P(A \cap D) = P(A)P(D/A) = P(D)P(A/D)$$

$$\Rightarrow P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)}$$

إذن:

$$P(A/D) = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)}$$

وتسمى بنظرية بايز

تعميم نظرية بايز: لدينا الأحداث التالية: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ والتي تمثل تجزئة للمجموعة الكلية وليكن لدينا الحدث B الذي لا يتحقق إلا بتحقق أجزاء الجملة التامة، ومنه فإن:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}$$

مثال 14: بالعودة إلى المثال رقم 13 أحسب احتمال أن يكون العضو من القسم الرابع علماً أنه طالب؟

نفرض أن لدينا الأحداث التالية: A العضو من القسم الأول، B العضو من القسم الثاني، C العضو من القسم الثالث، D العضو من القسم الرابع، E العضو طالب.

المطلوب حساب: $\mathrm{P}(D/E)$ بما أن تمثل الأقسام الأربعة تمثل تجزئة للمجموعة الكلية ومنه بتطبيق قانون بايز نجد:

$$\mathrm{P}(D/E) = \frac{P(E \cap D)}{P(E)}$$

$$= \frac{P(D)P(E/D)}{P(A)P(E/A) + P(B)P(E/B) + P(C)P(E/C) + P(D)P(E/D)}$$

$$= \frac{\frac{4}{18} \times \frac{2}{4}}{\frac{3}{18} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{18} \times \frac{3}{5} + \frac{6}{18} \times \frac{3}{6} + \frac{4}{18} \times \frac{2}{4}} = \frac{\frac{2}{18}}{\frac{9}{18}} = \frac{2}{9} = 0,22$$

هذه النتيجة معناها أن 22% من الطلبة (الذكور) يدرسون في القسم الرابع.

مثال 15: في مؤسسة لوحظ أن 10% من الموظفين يحملون شهادات عليا وأن 70% من هؤلاء الموظفين الحاملين للشهادات العليا يقومون بأعمال إدارية، علماً أن 30% من موظفي هذه المؤسسة

الـذين لا يحملـون شـهادات عليـا هـم أيضـا يقومـون بأعمـال إداريـة. سـحبنا موظفـاً إداريـاً مـن هـذه المؤسسة أحسب احتمال أن يكون هذا الموظف من حاملي الشهادات العليا؟

نفرض أن لدينا الحدثين التاليين: A الموظف حامل لشهادة عليا، B الموظف يقوم بأعمال إدارية

تكتب المعطيات كما يلي:

$$P(A) = 0{,}1 \qquad P(B/A) = 0{,}7$$
$$\mathrm{P}(\bar{A}) = 0{,}9 \qquad P(B/\bar{A}) = 0{,}3$$

المطلوب: حساب $\mathrm{P}(A/B)$ باستخدام قانون بايز نجد ما يلي:

$$\mathrm{P}(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B/A)}{P(A)P(B/A) + P(\bar{A})P(B/\bar{A})}$$
$$= \frac{0{,}1 \times 0{,}7}{0{,}1 \times 0{,}7 + 0{,}9 \times 0{,}3} = \frac{0{,}07}{0{,}34} = 0{,}2059 = 20{,}59\%$$

هذه النتيجة معناها أن 20,59% من الموظفين الاداريين هم حاملين للشهادات العليا.

4. تماريـــــن المحور الرابع:

تمرين 1:

1. عنـد رمي زهـرة النـرد مرة واحـدة. أحسـب احتمـال ظهـور رقـم أصـغر مـن 3 أو رقـم أكبـر مـن أو يساوي 3؟
2. نسحب بطريقة عشوائية بطاقة من مجموعة بطاقات عددها 20 مرقمة من 1 إلى 20. أحسب احتمال الحصول على بطاقـة بها عـدد يقبل القسـمة على 5 أو بطاقـة بها عـدد يقبل القسـمة على 3؟

حل تمرين 1:

1. عنـد رمي زهـرة النـرد مرة واحـدة. احتمـال A "ظهـور رقـم أصـغر مـن 3"أو B "ظهـور رقـم أكبـر مـن أو يساوي 3":

$$A = \{1,2\} \qquad B = \{3,4,5,6\}$$

نلاحظ أن الحدثين متنافيين $A \cap B = \emptyset$ ومنه فاتحاد المجموعتين هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1$$

2. نسحب بطريقـة عشـوائية بطاقـة مـن مجموعـة بطاقـات عـددها 20 مرقمـة مـن 1 إلى 20. احتمـال الحصـول على A "بطاقـة بهـا عـدد يقبـل القسـمة على 5" أو B "الحصـول على بطاقـة بهـا عـدد يقبـل القسمة على 3":

$$A = \{5,10,15,20\} \qquad B = \{3,6,9,12,15,18\}$$

نلاحظ أن الحدثين غير متنافيين $A \cap B = \{15\}$ ومنه فاتحاد المجموعتين هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{20} + \frac{6}{20} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$$

تمرين 2:

ليكن لدينا علبة بها 8 كرات بيضاء و4 سوداء، نريد سحب كرتين من هذه العلبة. ما احتمال أن يكونا بيضاوتان في الحالات التالية:

1. سحب كرتان معاً (في آن واحد)؟
2. سحب كرتان على التوالي مع الارجاع؟

حل تمرين 2:

1. احتمال أن تكونا الكرتان بيضاوتان في حالة السحب معاً: الترتيب غير مهم والعملية دون تكرار (توفيقة)

$$P(BB) = \frac{C_8^2}{C_{12}^2} = \frac{28}{66} = 0{,}42$$

2. احتمال أن تكونا الكرتان بيضاوتان في حالة السحب على التوالي مع الارجاع: الترتيب مهم والعملية بتكرار (ترتيبة بتكرار)

$$P(BB) = P(B_1 \cap B_1) = \frac{\widehat{A_8^2}}{\widehat{A_{12}^2}} = \frac{8^2}{12^2} = \frac{8 \times 8}{12 \times 12} = 0{,}44$$

تمرين 3:

صندوق به 10 كريات مرقمة من 1 إلى 10، نسحب منه بطريقة عشوائية كرة واحدة، نعتبر الحدثين A "الحصول على رقم زوجي"، B "الحصول على رقم مضاعف لـ 3".

1. ما هو احتمال الحصول على كرة تحمل رقم زوجي أو رقم مضاعف لـ 3؟
2. ما هو احتمال الحصول على كرة تحمل رقم من مضاعفات لـ 3 علما أنه رقم فردي؟
3. ما هو احتمال الحصول على كرة تحمل رقم فردي علما أنه مضاعف لـ 3 ؟

حل تمرين 3:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad \mathrm{A} = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad \mathrm{B} = \{3, 6, 9\}$$
$$A \cap B = \{6\}$$

1. احتمال الحصول على كرة تحمل رقم زوجي أو رقم مضاعف لـ 3:

$$\mathrm{P(A \cup B)} = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

2. احتمال الحصول على كرة تحمل رقم من مضاعفات لـ 3 علما أنه رقم فردي:

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{B}/_{A}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{5}{10}}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}=0{,}2$$

3. احتمال الحصول على كرة تحمل رقم فردي علما أنه مضاعف لـ 3:

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A}/_{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$$

تمرين 4:

صندوق به 6 كرات حمراء و3 خضراء لا نفرق بينها باللمس، نسحب كرتين على التوالي ودون ارجاع.

1. أحسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة الأولى حمراء؟
2. أحسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة الثانية خضراء؟
3. أحسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة الثانية خضراء علما أن الكرة المسحوبة الأولى حمراء؟
4. استنتج قيمة: $P(R\cap V)$؟

حل تمرين 4:

نفرض أن لدينا الحدثين: R "الكرة المسحوبة الأولى حمراء"، V "الكرة المسحوبة الثانية خضراء".

1. احتمال أن تكون الكرة المسحوبة الأولى حمراء:

$$P(R)=\frac{A_6^1}{A_9^1}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

2. احتمال أن تكون الكرة المسحوبة الثانية خضراء:

$$P(V)=\frac{A_6^1\times A_3^1}{A_9^2}+\frac{A_3^2}{A_9^2}=\frac{24}{72}=\frac{1}{3}$$

3. احتمال أن تكون الكرة المسحوبة الثانية خضراء علما أن الكرة المسحوبة الأولى حمراء:

$$P\left(V/_{R}\right)=\frac{A_6^1\times A_3^1}{A_9^2}=\frac{18}{72}=\frac{1}{4}$$

4. استنتاج قيمة: $P(R\cap V)$؟

$$P(R\cap V)=P(R)\times \mathrm{P}\left(\mathrm{V}/_{R}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$$

تمرين 5:

يضم كيس 5 كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 5 وثلاثة كرات حمراء مرقمة من 6 إلى 8 وكرتان خضراوتان تحملان الرقمان 9 و 10. نسحب عشوائيا كرتان في آن واحد. احسب احتمال وقوع الأحداث التالية:

1. A "الكرتان تحملان رقمان فرديان"؟
2. B "الكرتان من نفس اللون"
3. هل الحدثين A و B مستقلان؟

حل تمرين 5:

1. حساب احتمال أن تحملان الكرتان رقمان فرديان:

$$P(A) = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{10}{45}$$

2. حساب احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون:

$$P(A) = \frac{C_5^2 + C_3^2 + C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{14}{45}$$

3. الحدثين A و B مستقلان أو لا: بداية بافتراض أن الحدثان مستقلان يكون لدينا

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{10}{45} \times \frac{14}{45} = \frac{140}{2025} = 0{,}069$$

ثم يجب حساب احتمال التقاطع من خلال معطيات التمرين ومقارنتها مع النتيجة السابقة (0,069) وكملاحظة أنه يمكن اختيار كرتين تحملان رقمين فرديين إلا من الكرات الحمراء.

$$P(A) = \frac{C_3^2 + 0 + 0}{C_{10}^2} = \frac{3}{45} = 0{,}067 \neq 0{,}069$$

ومنه نستنتج أن الحدثان A و B غير مستقلان

تمرين 6:

لوحظ أن نسبة الأشخاص الذين عيونهم سوداء (Y) في مدينة ماء هي 70% ونسبة الذين شعرهم أسود (C) هي 40%، كما لوحظ أن نسبة الأشخاص الذين لهم عيون سوداء وشعر أسود هي 30%، تم اختيار شخص بطريقة عشوائية من هذه المدينة، أحسب الاحتمالات التالية:

1. ما احتمال أن يكون عيونه سوداء أو شعره أسود؟
2. أن يكون عيونه سوداء علما أن شعره أسود ؟
3. أن يكون شعره اسود علما أن عيونه سوداء؟

4. أن يكون عيونه غير سوداء وشعره غير أسود؟

حل تمرين 6:

$$P(Y) = 0{,}70\ ,\ \ P(C) = 0{,}40\ ,\ \ P(Y \cap\ C\ ) = 0{,}30$$

1 . $\mathrm{P(Y \cup C) = P(Y) + P(C) - \ P(Y \cap\ C\ ) = 0{,}7 + 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}80}$

2 . $P(\mathrm{Y}/\ \mathrm{C}\ ) = \ \frac{\mathrm{P}(Y\cap C\ )}{\mathrm{P(C)}} = \frac{0{,}30}{0{,}40} = 0{,}75$

3 . $\mathrm{P(C/\ Y\ )} = \ \frac{\mathrm{P}(Y\cap C\ )}{\mathrm{P(Y)}} = \frac{0{,}30}{0{,}70} = 0{,}43$

4 . $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{Y}} \cap\ \overline{\mathrm{C}}) = \ 1 - \mathrm{P}\overline{(\mathrm{Y} \cap\ \mathrm{C})} = 1 - \ \mathrm{P(Y \cup C)} = 1 - 0{,}80 = 0{,}20$

تمرين 8:

في مؤسسة خاصة بإنتاج المصابيح توجد علبة بها 8 مصابيح جيّدة و4 مصابيح تالفة. نريد سحب مصباحين من هذه العلبة.

الحالة الأولى: في حالة سحب مصباحين معاً، أحسب الاحتمالات التالية: 1. سحب مصباحين جيّدين 2. سحب مصباحين تالفين 3. سحب مصباح جيّد وآخر تالف 4. سحب مصباح جيّد على الأقل.

الحالة الثانية: في حالة سحب مصباحين على التوالي مع الإرجاع، أحسب الاحتمالات التالية: 1. سحب مصباحين جيّدين 2. أن يكون المصباح الثاني جيّد 3. أن يكون المصباح الأوّل جيّد علماً أن المصباح الثاني جيّد.

حل تمرين 8:

ليكن لدينا الحدثين التاليين: B رمز للمصباح الجيّد وE رمز للمصباح التالف

الحالة الأولى: سحب مصباحين معاً (الترتيب غير مهم)	**الحالة الثانية: سحب مصباحين على التوالي مع الإرجاع (الترتيب مهم)**
1. $P(BB) = \frac{C_8^2}{C_{12}^2} = \frac{28}{66} = 0{,}42$ 2. $P(EE) = \frac{C_4^2}{C_{12}^2} = \frac{6}{66} = 0{,}09$ 3. $P(BE) = \frac{C_8^1 \times C_4^1}{C_{12}^2} = \frac{8 \times 4}{66} = \frac{32}{66} = 0{,}48$ 4. $P(BE \cup BB) = \frac{C_8^1 \times C_4^1 + C_8^2}{C_{12}^2} = \frac{60}{66} = 0{,}91$	1. $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2/B_1) = \frac{8}{12} \times \frac{8}{12} = 0{,}44$ 2. $P(B_2) = P(B_1)P(B_2/B_1) + P(E_1)P(B_2/E_1) = \frac{8}{12} \times \frac{8}{12} + \frac{4}{12} \times \frac{8}{12} = \frac{96}{144} = 0{,}67$ 3. $P(B_2/B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{0{,}44}{0{,}67} = 0{,}66$

تمرين 9:

يمتلك أحد المستثمرين 10 أوراق مالية مشكلة من 6 أسهم (سهمين لمؤسستين خاصتين و4 أسهم لمؤسسات عمومية) و4 سندات (سند واحد لمؤسسة خاصة و3 سندات لمؤسسات عمومية)، تم اختيار ورقة مالية بطريقة عشوائية.

1. أحسب احتمال أن تكون الورقة المالية المسحوبة عشوائياً لمؤسسة خاصة؟
2. إذا علمت أن الورقة المالية المسحوبة لمؤسسة خاصة، ما احتمال أن تكون سهم؟
3. إذا علمت أن الورقة المالية المسحوبة لمؤسسة عمومية، ما احتمال أن تكون سند؟

حل تمرين 9:

يرمز للسهم بـ A ويرمز للسند بـ B ويرمز للمؤسسة الخاصة بـ D

$P(A) = \frac{6}{10} = 0,6$ $\qquad P\left({xD}/{A}\right) = \frac{2}{6} = 0,33$ $\qquad P\left({\overline{D}}/{A}\right) = \frac{4}{6} = 0,67$

$P(B) = \frac{4}{10} = 0,4$ $\qquad P\left({D}/{B}\right) = \frac{1}{4} = 0,25$ $\qquad P\left({\overline{D}}/{B}\right) = \frac{3}{4} = 0,75$

1. $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = P(A) \times P\left({D}/{A}\right) + P(B) \times P\left({D}/{B}\right)$

$$= 0,6 \times 0,33 + 0,4 \times 0,25 = 0,30$$

2. $P\left({A}/{x}\right) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(A) \times P\left({D}/{A}\right)}{P(D)} = \dfrac{0,6 \times 0,33}{0,30} = \dfrac{0,20}{0,30} = 0,67$

3. $P\left({B}/{\bar{x}}\right) = \dfrac{P(B \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \dfrac{P(B) \times P\left({\overline{D}}/{B}\right)}{1 - P(D)} = \dfrac{0,4 \times 0,75}{0,70} = \dfrac{0.30}{0.70} = 0,43$

المحور الخامس:

المتغيرات العشوائية المتقطعة وتوزيعها الاحتمالي

1. مفهوم المتغير العشوائي
2. التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل
3. دالة التوزيع الاحتمالي $F(x)$ للمتغير العشوائي المنفصل
4. المميزات العددية للمتغير العشوائي المتقطع
5. بعض التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل
6. تمارين المحور الخامس

المحور الخامس: المتغيرات العشوائية المتقطعة وتوزيعها الاحتمالي

كل تجربة عشوائية تؤدي إلى مجموعة من الحوادث الأولية لكن ليس بالضرورة أن تكون تلك النتائج عددية (كمية) بل يُمكن أن تكون نوعية (كيفية)،فعند رمي قطعة النقود ومراقبة الوجه الظاهر نلاحظ أن النتيجة ستكون إما وجه F أو صورة P لكننا يُمكن أن نحول النتائج النوعية إلى عددية من خلال إعطاء قيم عددية للنتائج الظاهرة، فمثلا عند ظهور الوجه يُعبر عنه بالقيمة 1 وعند ظهور الصورة يُعبر عنه بالقيمة 0.

إن القيم العددية هذه هي ما نعبر عنه بقيم المتغير العشوائي، حيث نحاول التطرق من خلال هذا الفصل إلى تعريف المتغير العشوائي، أنواعه وكذا مميزاته العددية.

1/ مفهوم المتغير العشوائي

إن المتغير العشوائي هو مقدار يصف كمياً جميع النتائج الممكنة لتجربة عشوائية، ويأخذ مجموعة من القيم منتهية أو غير منتهية مرفقة بمجموعة من الاحتمالات، ويُرمز عادة للمتغير العشوائي بأحرف كبيرة Y, Z , أما القيم الممكنة التي تأخذها المتغيرات العشوائية فيُرمز لها بأحرف صغيرة x, y, z.

كما يُمكن تعريف المتغير العشوائي أيضاً (تعريف رياضي) على أنه دالة حقيقية معرفة من المجموعة Ω إلى مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathcal{R}$ وفقاً للتطبيق التالي:

$$\begin{cases} X: \Omega \longrightarrow \mathcal{R} \\ \quad w \longrightarrow X(w) \quad ; \quad w \in \Omega \end{cases}$$

مثال 1: عند رمي قطعة نرد نجد: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ نُعرف المتغير العشوائي بالدالة التالية:

$X(w) = 3w + 2$ حيث $w \in \Omega$

المطلوب حدد القيم لمختلفة التي يأخذها المتغير العشوائي X؟

الحل:

$$\begin{cases} X: \Omega \longrightarrow \mathcal{R} \\ \quad w \longrightarrow X(w) = 3w + 2 \quad ; \quad w \in \Omega \end{cases}$$

ومنه مختلف القيم المشكلة للمتغير العشوائي X هي:

$$X(\Omega) = \{X(1), X(2), X(3), X(4), X(5), X(6)\} = \{5, 8, 11, 14, 17, 19\}$$

ومن أجل حساب الاحتمالات المرفقة بكل قيمة يأخذها المتغير العشوائي لا بد من التمييز بين نوعين من المتغيرات العشوائية؛ متغير عشوائي متقطع وآخر مستمر.

2. التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع:

نقول عن متغير عشوائي X أنه متقطع (منفصل) إذا كانت القيم التي يأخذها محدودة ومنتهية ضمن مجال تغيره أي أن: $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$

مثال 2: نتائج تجربة رمي قطعة النقود ثلاثة مرات متتالية: نعرف المتغير العشوائي X على أنه عدد الصور الظاهرة.

الحل: ليكن لدينا: الحدث P ظهور الوجه والحدث F ظهور الصورة، ومنه فإن مجموعة النتائج المحصلة هي:

$$\Omega = \{FFF, FFP, FPF, PFF, PPP, PPF, PFP, FPP\}$$

$$\begin{cases} X: \Omega = \{FFF, FFP, FPF, PFF, PPP, PPF, PFP, FPP\} \longrightarrow \mathcal{R} \\ w \longrightarrow X(\mathrm{w}) = \begin{cases} 0; & w = PPP \\ 1; & w = FPP, PFP, PPF \\ 2; & w = FFP, FPF, PFF \\ 3; & w = FFF \end{cases} \end{cases} \Rightarrow X(\Omega) = \{0, 1, 2,3\}$$

قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع X هو الاحتمالات المرفقة بقيم المتغير العشوائي والذي يأخذ قيمه في المجال $[0, 1]$ وفقاً للتطبيق التالي :

$$\begin{cases} P_x: X(\Omega) \longrightarrow [0, 1] \\ \quad x \longrightarrow P(x) \ ; \quad x \in \mathrm{X}(\Omega) \end{cases}$$

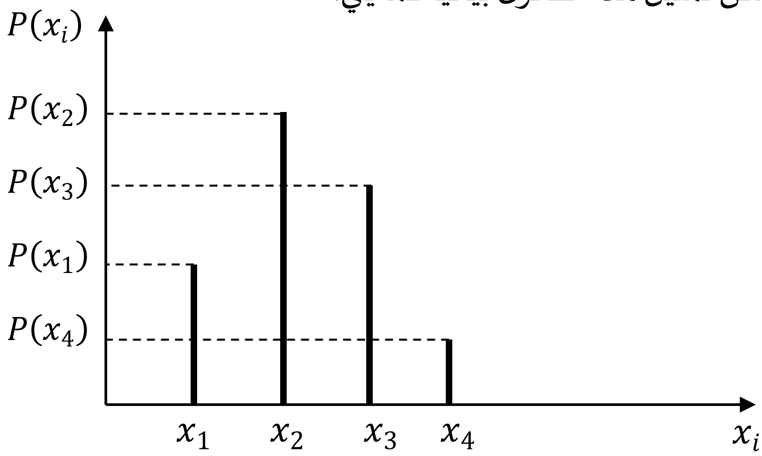
ويُمكن توضيح قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع كما يلي:

X	x_1	x_2	x_3	....	x_n	Σ
$P(X)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$P(x_3)$	....	$P(x_n)$	1

نتيجة: حتى نقول أن المتغير العشوائي X قانون توزيع احتمالي يجب تحقق الشرطين التاليين:

$$\forall\, i \in \aleph; \qquad P(x_i) \geq 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$$

كما يُمكن تمثيل هذا القانون بيانياً كما يلي:



مثال 3: بالاعتماد على معطيات المثال رقم 2 حدد القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X (عدد الأوجه الظاهرة) ومثله بيانياً.

الحل: سبق وأن وجدنا القيم الممكنة للمتغير العشوائي X وهي: $X(\Omega) = \{0, 1, 2,3\}$

الآن نحسب الاحتمالات المرفقة بكل قيمة يأخذها المتغير العشوائي X كما يلي:

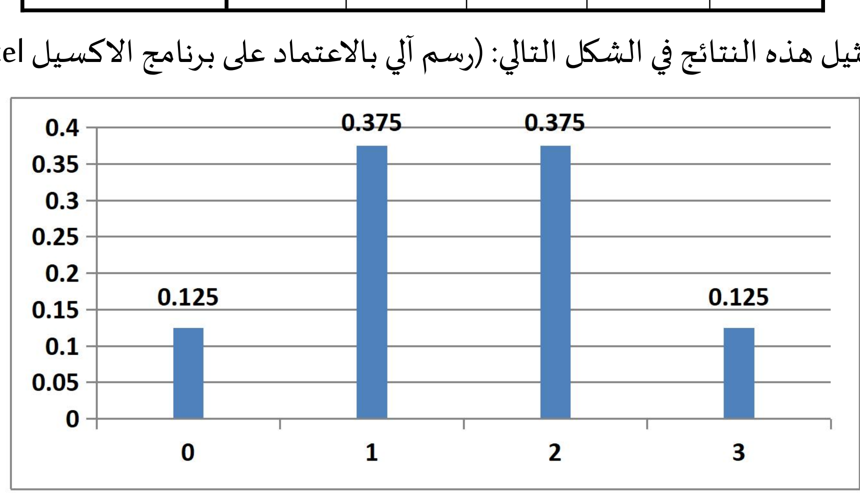
$$\Omega = \{FFF, FFP, FPF, PFF, PPP, PPF, PFP, FPP\}$$

- $(PPP) \Rightarrow P(X = 0) = 1/8 = 0{,}125$
- $(FPP, PFP, PPF) \Rightarrow P(X = 1) = 3/8 = 0{,}375$
- $(FFP, FPF, PFF) \Rightarrow P(X = 2) = 3/8 = 0{,}375$
- $(FFF) \Rightarrow P(X = 3) = 1/8 = 0{,}125$

ويُمكن توضيح هذه النتائج في الجدول التالي:

X	0	1	2	3	Σ
$P(X)$	0,125	0,375	0,375	0,125	*1*

كما يُمكن تمثيل هذه النتائج في الشكل التالي: (رسم آلي بالاعتماد على برنامج الاكسيل Excel)



3. دالة التوزيــع الاحتمالي F(X) للمتغير العشوائي المتقطع:

دالة التوزيع للمتغير العشوائي المتقطع X هي تلك الدالة التي تعطينا احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X أية قيمة أصغر من أو تساوي قيمة معينة x ، يُرمز لدالة التوزيع بالرمز $F(x)$ ويُعبر عنها بالصيغة الرياضية التالية:

$$F(x) = P(X \leq x_i) = \sum_{X \leq x_i} P(x_i)$$

وفي بعض المراجع تسمى دالة التوزيع الاحتمالي بالدالة التراكمية أو التجميعية Fonction Cumulative لأنه يتم تجميع الاحتمالات التي هي أقل من أو تساويx.

إذا كان لدينا جدول قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X التالي:

X	x_1	x_2	x_3	....	x_n	Σ
$P(X)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$P(x_3)$	………	$P(x_n)$	1

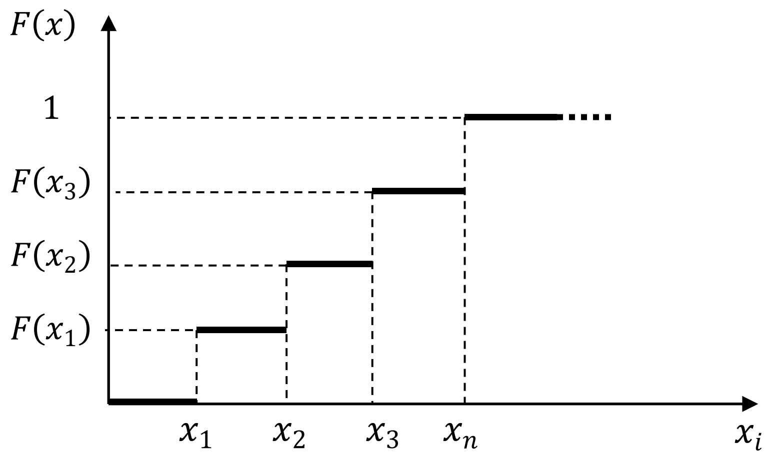
ومنه فإن دالة التوزيع تكون على الشكل الموالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ P(x_1) & x_1 \leq x < x_2 \\ P(x_1) + P(x_2) & x_2 \leq x < x_3 \\ P(x_1) + \dots + P(x_3) & x_3 \leq x < x_4 \\ \quad\quad\quad\quad\quad \dots\dots\dots\dots\dots & \\ P(x_1) + \dots + P(x_n) & x \geq x_n \end{cases}$$

نتائج: من أجل كل عددان حقيقيان a, b فإن :

$$P(X \leq a) = F(a)$$
$$P(X > b) = 1 - P(X \leq b) = F(b)$$
$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a); \qquad a < b$$

كما يُمكن تمثيل دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع كما يلي:



مثال 4: في تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة، نفرض أن X متغير عشوائي متقطع يُمثل الوجه العلوي الظاهر. حدد دالة التوزيع الاحتمالي لـ X ومثله بيانياً ثم احسب: $P(X \leq 5)$, $P(1 < X \leq 3)$ و $P(X > 3)$

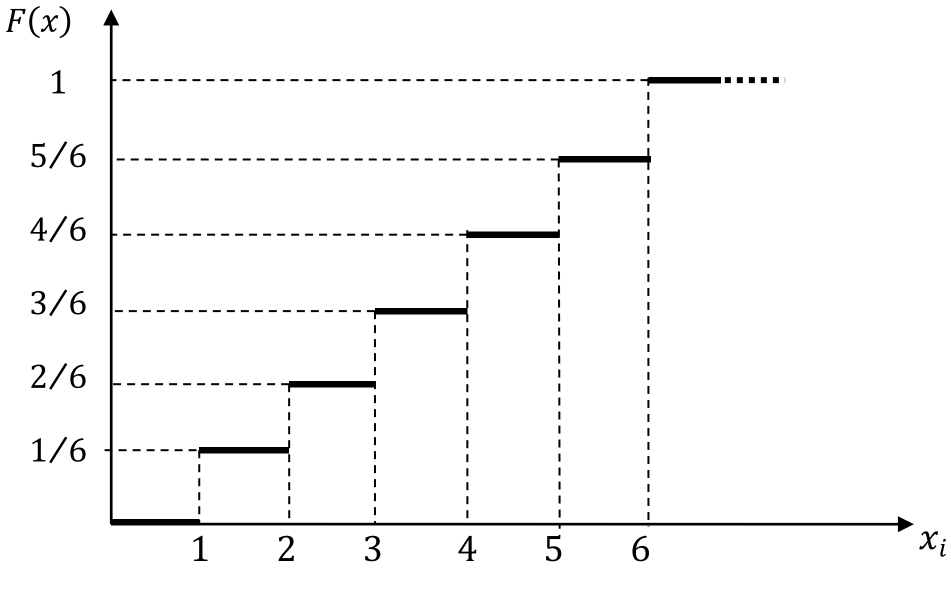
الحل: نتائج رمي زهرة النرد هي: $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وكل الأوجه لها نفس الاحتمال $1/6$

ومنه:

X	1	2	3	4	5	6	Σ
$P(X)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	1

$F(x) = P(X \leq x_i)$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ P(x=1) = 1/6 & 1 \leq x < 2 \\ P(x=1) + P(x=2) = 2/6 & 2 \leq x < 3 \\ P(x=1) + \dots + P(x=3) = 3/6 & 3 \leq x < 4 \\ P(x=1) + \dots + P(x=4) = 4/6 & 4 \leq x < 5 \\ P(x=1) + \dots + P(x=5) = 5/6 & 5 \leq x < 6 \\ P(x=1) + \dots + P(x=6) = 6/6 & x \geq 6 \end{cases}$$



$P(X \leq 5) = F(5) = 5/6$

$P(1 < X \leq 3) = F(3) - F(1) = 3/6 - 1/6 = 2/6$

$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 3/6 = 3/6$

4. التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي المتقطع

يُطلق على كل من التوقع (الأمل) الرياضي، التباين والانحراف المعياري بالمميزات العددية للمتغير العشوائي المتقطع والتي تعطينا اختصار لكيفية انتشار القيم.

1.4. التوقع الرياضي L'Espérance Mathématique: ليكن لدينا المتغير العشوائي X حيث: $X(\Omega) = \{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n\}$ التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتقطع X هو العدد الحقيقي $E(X)$ المعرف كما يلي:

$$E(X) = \sum XP(X)$$

إذا كان X متغير عشوائي منفصل و a , b عددان حقيقيان فإن:

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

مثال 5: ليكن لدينا دارة كهربائية تتكون من عنصرين مربوطين على التسلسل، إذا كان احتمال توقف كل عنصر عن العمل خلال فترة زمنية هو: 0,2 وليكن X متغير عشوائي منفصل يُمثل عدد العناصر المتوقفة خلال الفترة الزمنية. حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع X ثم أحسب: التوقع الرياضي و $E(2X + 1)$.

الحل: قيم المتغير العشوائي الممكنة هي: $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$$X = 0 \rightarrow P(X = 0) = 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}64$$

$$X = 1 \rightarrow P(X = 1) = (0{,}2 \times 0{,}8) + (0{,}8 \times 0{,}2) = 0{,}32$$

$$X = 2 \rightarrow P(X = 2) = 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04$$

X	0	1	2	Σ
$P(X)$	0,64	0,32	0,04	1

$$E(X) = \sum XP(X) = 0 \times (0{,}64) + 1 \times (0{,}32) + 2 \times (0{,}04) = 0{,}40$$

$$E(2X + 1) = 2E(X) + 1 = 2 \times (0{,}40) + 1 = 1{,}80$$

2.4. التباين والانحراف المعياري:

1.2.4. التباين La Variance: يُدعى التوقع الرياضي لمربع انحراف قيم المتغير العشوائي X عن توقعها الرياضي بتباين X ويُرمز له بالرمز $V(X)$ ويُحسب بالاعتماد على العلاقة التالية :

$$V(X) = E\big(X - E(X)\big)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \sum X^2 P(X)$$

إذا كان X متغير عشوائي متقطع و a , b عددان حقيقيان فإن:

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

2.2.4. الانحراف المعياري L'Ecart Type: الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين أي هو الجذر التربيعي لمتوسط الانحرافات المربعة للقيم عن توقعها الرياضي، ويُرمز له بالرمز σ_x حيث:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E\big(X - E(X)\big)^2} = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2}$$

$$\sigma_x = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2}$$

مثال 6: بالعودة لمعطيات المثال رقم 5. أحسب التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0{,}48 - (0{,}40)^2 = 0{,}32$$

$$E(X^2) = \sum X^2 P(X) = 0^2 \times (0{,}64) + 1^2 \times (0{,}32) + 2^2 \times (0{,}04) = 0{,}48$$

$$V(X) = 0{,}32 \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}32} = 0{,}57$$

5. بعض التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع

1.5. قانون بارنولي:

يتعين قانون أو توزيع بارنولي BERNOULLI من خلال تجربة أحادية المحاولة والتي تحتمل نتيجتين متنافيتين A و$\overline{A}$ نسمي A نجاح ونسمي $\overline{A}$ فشل.

ويمثل P احتمال وقوع الحدث الأولي A(احتمال النجاح) وبالتالي $1 - P$ هو احتمال وقوع الحدث $\overline{A}$ (احتمال الفشل)، ويرمز لقانون بارنولي كما يلي:

$$X \sim B(1; P)$$

وإذا اعتبرنا المتغير العشوائي X يأخذ القيمة 1 عند وقوع حدث النجاح والقيمة 0 عند وقوع حدث الفشل يصبح لدينا:

$$P(X)=\begin{cases}P & ,x=1\\ 1-P & ,x=0\end{cases}$$

ويصبح قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي في هذه الحالة كما يلي:

X	0	2	Σ
$P(X)$	$1-P$	P	1

خصائص توزيع برنولي:

التوقع الرياضي: لدينا:

$$E(X)=\Sigma XP(X)=0\times(1-P)+1(P)=P$$
$$E(X)=P$$

التباين: لدينا:

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=[0^2\times(1-P)+1^2(P)]-P^2=P-P^2$$
$$=P(1-P)$$
$$V(X)=P(1-P)$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{P(1-P)}$$

2.5. قانون ثنائي الحد:

في كثير من التجارب تكون النتيجة فيها أحد من أمرين إما نجاح أو فشل، وتتكون هذه التجارب من تكرار واعادة المحاولات المستقلة عن بعضها البعض، فمثلا عند رمي زهرة النرد فان النتيجة تكون إما عددا زوجيا أو فرديا وتكون نتيجة كل محاولة مستقلة عن أي محاولة أخرى، إن مثل هذه التجربة تسمى تجربة ذات الحدين.

وقانون ثنائي الحد ينطبق على كل تجربة احتمالية تتحقق فيها الشروط التالية:

- نتيجة كل محاولة للتجربة إما نجاح أو فشل؛
- نتيجة كل محاولة مستقلة عن نتيجة أي محاولة أخرى؛
- احتمال النجاح في كل محاولة ثابت وليكن P وبالتالي فاحتمال الفشل هو 1-P؛

- التجربة تتكرر عدد معين من المرات أي يكون هناك n من المحاولات (إذا كان n=1 فالتجربة تسمى تجربة برنولي).

بتحقق كل الشروط السابقة يمكن القول أن المتغير العشوائي المتقطع X يتبع قانون ثنائي الحد:

$$X \backsim B(n; P)$$

وقانون ثنائي الحد يكتب على الشكل التالي:

$$P(X = k) = C_n^k P^k (1 - P)^{n-k}$$

حيث: n عدد مرات تكرار التجربة، k عدد مرات النجاح، P احتمال النجاح، 1-P احتمال الفشل للحدث الأولي.

مثال 7: ليكن لدينا صندوق يحتوي على 5كريات بيضاء و 3 كريات سوداء، نسحب على التوالي مع الارجاع كرية واحدة 3 مرات.

- ما هو احتمال ان تكون كل الكريات الثلاثة المسحوبة بيضاء؟
- ما هو احتمال الحصول على كرية واحدة بيضاء من بين الكريات الثالثة المسحوبة؟

الحل: الملاحظ في هذا المثال هو تحقق شروط تطبيق قانون ثنائي الحد بالنسبة للحدث الأولي (X سحب كرية بيضاء):

- نتيجة كل محاولة سحب هو اما ان تكون بيضاء أو ليست بيضاء؛
- نتيجة كل عملية سحب مستقلة عن نتيجة أي محاولة أخرى؛
- نفس احتمال سحب كرية بيضاء في كل محاولة أي نسبة النجاح ثابتة $P = \frac{5}{8}$ واحتمال عدم سحب كرية بيضاء أي احتمال الفشل هو $1 - P = \frac{3}{8}$
- عدد المحاولات هو عدد مرات اجراء السحب $n = 3$.

ومنه X يتبع قانون ثنائي الحد: $X \backsim B(3; \frac{5}{8})$

- احتمال ان تكون كل الكريات الثالثة المسحوبة بيضاء هو:

بما أن شروط قانون ثنائي الحد محققة فإن:

$$P(X=k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}\Leftrightarrow P(X=3)=C_3^3P^3(1-P)^0=\left(\frac{5}{8}\right)^3=\frac{125}{512}=0{,}24$$

- احتمال الحصول على كرية واحدة بيضاء من بين الكريات الثالثة المسحوبة هو:

$$P(X=1)=C_3^1P^1(1-P)^2=3\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{135}{512}=0{,}26$$

مثال 8: نرمي قطعة نرد 7 مرات، ما هو احتمال أن نتحصل على 5 مرات الرقم 2؟

الحل: الحدث الأولي: X عدد مرات الحصول على الرقم 2. في هذا المثال تتوفر شروط قانون ثنائي الحد والتي هي:

- نتيجة كل أحداث التجربة هي ظهور الرقم 2 أو عدم ظهوره؛
- الرميات السبعة عبارة عن أحداث مستقلة عن بعضها البعض؛
- نفس احتمال ظهور الرقم 2 في كل تجربة ، أي احتمال النجاح ثابت ويساوي $\left(\frac{1}{6}\right)$ وعدم ظهور الرقم 2 أي احتمال الفشل هو $\left(\frac{5}{6}\right)$؛
- عدد المحاولات هو عدد مرات اجراء السحب $n=7$.

ومنه X يتبع قانون ثنائي الحد: $X \sim B(7;\frac{1}{6})$

$$P(X=k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}\Leftrightarrow P(X=5)=C_7^5P^5(1-P)^2=21\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{525}{279936}=0{,}0019$$

التوقع الرياضي:

$$E(X)=nP$$

التباين:

$$V(X)=nP(1-P)$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{nP(1-P)}$$

مثال 9: بالعودة لمعطيات المثال رقم 7 أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X؟

التوقع الرياضي:

$$E(X) = nP = 3 \times \frac{5}{8} = \frac{15}{8} = 1,875$$

التباين:

$$V(X) = nP(1-P) = 3 \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{45}{64} = 0,70$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{nP(1-P)} = \sqrt{0,70} = 0,84$$

3.5. قانون بواسون:

إن التجارب التي تعطينا عدد من النجاحات في فترة زمنية معينة أو منطقة محددة تسمى تجارب بواسون، والفترة الزمنية يمكن أن تكون ثانية أو دقيقة أو يوم أو أسبوع أو شهر أو غير ذلك والمنطقة المحددة يمكن أن تكون صفحة من كتاب أو مترا مربعا من المساحة أو سم ^{3} من الحجم وغير ذلك.

فعدد الزبائن الذين يدخلون إلى مكتب البريد كل خمسة دقائق، وعدد السيارات التي تمر عبر نفق كل دقيقة، وعدد حوادث السيارات في تقاطع معين كل أسبوع، وعدد الجرذان في المتر المربع من حقل القمح، وعدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مكتب كل عشر دقائق، وعدد الأخطاء المطبعية في كتاب، كلها أمثلة عن تجارب بواسون.

ونستخدم قانون بواسون لتحديد احتمال وقوع عدد معين من النجاحات في وحدة الزمن أو في مكان محدد ويكتب:

$$X \sim P(\lambda)$$

ويحسب الاحتمال في هذه الحالة وفقا للعلاقة التالية:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

حيث:

- K عدد النجاحات ..... k=0 , 1, 2؛
- $P(X = k)$احتمال عدد النجاحات؛
- λ متوسط عدد النجاحات في وحدة الزمن أو المكان ويجب أن يكون ثابت.

التوقع الرياضي والتباين:

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

مثال 10: يتلقى قسم الطوارئ لدى الحماية المدنية 5 مكالمات في الساعة. ما هو احتمال أنه في ساعة معينة عشوائيا يتلقى القسم مكالمتين فقط؟

الحل: X متغير عشوائي يمثل عدد المكالمات في الساعة، وبما أن متوسط عدد المكالمات المستقبلة ثابت خلال وحدة الزمن (5 مكالمات في الساعة) فإن X يتبع قانون بواسون:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \Leftrightarrow P(X = 2) = \frac{5^2 e^{-5}}{2!} = 0{,}084$$

مثال 11: إذا علمت أن عدد زوار جامعة قالمة يبلغ 10 زوار كمتوسط يومي، ما هو احتمال أنه في يوم ما يكون عدد الزوار 4؟

الحل: X متغير عشوائي يمثل عدد الزوار لجامعة قالمة يوميا، وبما أن متوسط عدد الزوار ثابت خلال وحدة الزمن (10 يوميا) فإن X يتبع قانون بواسون:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \Leftrightarrow P(X = 4) = \frac{10^4 e^{-10}}{4!} = 0{,}019$$

6. تمارين المحور الخامس:

تمرين 1:

نقوم برمي قطعة نقود من فئة 20 دج غير مغشوشة أربعة مرات متتالية، نفرض أن X متغير عشوائي منفصل يمثل عدد مرات ظهور الوجه P.

1. عين فضاء الحوادث الأولية؟
2. حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X؟
3. حدد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X؟
4. ما هو احتمال ظهور الوجه P مرتين؟
5. أحسب كل من: الأمل الرياضي، التباين، والانحراف المعياري؟

حل تمرين 1:

1. تعيين فضاء الحوادث الأولية:

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

أي أن:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} FFFF; FFFP; FFPF; FFPP; FPFF \\ FPFP; FPPF; FPPP; PFFF; PFFP \\ PFPF; PFPP; PPFF; PPFP; PPPF \\ PPPP \end{Bmatrix}$$

2. تحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

X	0	1	2	3	4	Σ
$P(X)$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16	1

3. تحديد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

$$F(X) = P(X \leq x_i\ )$$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ P(x=0) = 1/16 & 0 \leq x < 1 \\ P(x=0) + P(x=2) = 5/16 & 1 \leq x < 2 \\ P(x=0) + \dots + P(x=2) = 11/16 & 2 \leq x < 3 \\ P(x=0) + \dots + P(x=3) = 15/16 & 3 \leq x < 4 \\ P(x=0) + \dots + P(x=4) = 16/16 & x \geq 4 \end{cases}$$

4. احتمال ظهور الوجه P مرتين على الأقل:

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 11/16$$

5. حساب الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري:

X	0	1	2	3	4	Σ
$P(X)$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16	1
$E(X)$	0	4/16	12/16	12/16	4/16	2
X^2	0	1	4	9	16	1
$E(X^2)$	0	4/16	24/16	36/16	16/16	5

$$E(X) = \sum XP(X) = 2$$

$$V(X) = E\big(X - E(X)\big)^2 = E(X^2) - E(X)^2 = 5 - 2^2 = 1$$

$$E(X^2) = \sum X^2 P(X)$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1} = 1$$

تمرين 2:

يُطلق شخص سهم على منطقة معينة، حيث يكسب 16 نقطة إذا أصاب تلك المنطقة ويخسر 8 نقاط إذا لم يصب تلك المنطقة. إذا كان احتمال اصابته لتلك المنطقة هو 0,6 فما توقعك لعدد النقاط التي يحصل عليها هذا الشخص بعد رمية واحدة؟

حل تمرين 2:

نفرض أن X متغير عشوائي يمثل عدد النقاط التي يكسبها أو يخسرها الشخص، ويمكن تشكيل التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير كما يلي:

X	-8	16	Σ
$P(X)$	$0,4$	$0,6$	1

$$E(X) = \sum XP(X) = (-8)(0,4) + 16(0,6) = 9,6 - 3,2 = 6,4$$

إذن التوقع بعدد النقاط التي يمكن أن يكسبها هي 6,4

تمرين 3:

استشارك مستثمر فيما إذا كان الأفضل له استثمار قيمة مالية قدرها 1000000 دج (مليون دج) في شراء سندات ذات فائدة سنوية ثابتة تُقدر بـ 6% أو شراء أسهم حيث أنه من المتوقع أن تزيد قيمة هذه الأسهم بنسبة 20% باحتمال قدره 0,5 أو تنخفض قيمتها بنسبة 10% باحتمال قدره 0,2 أو تبقى قيمتها ثابتة (دون تغيير) باحتمال قدره 0,3.

حل تمرين 3:

1. قيمة المبلغ المالي بعد سنة في حالة شراء سندات هو: 1000000 * 1,06 = 1060000 دج

2. قيمة المبلغ المالي بعد سنة في حالة شراء الأسهم هو: بداية نحدد قانون التوزيع الاحتمالي

X	$1000000 \times (1,2) = 1200000$	$1000000 \times (0,9) = 900000$	$1000000 \times (1) = 1000000$	Σ
$P(X)$	$0,5$	$0,2$	$0,3$	1

ومنه فالقيمة المتوقعة تساوي:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3} XP(X)=1200000(0,5)+900000(0,2)+1000000(0,3)$$
$$=1080000$$

بإجراء مقارنة بين المبلغين الماليين بعد سنة في كلتا الحالتين، ننصح هذا المستثمر بالاستثمار في الأسهم.

تمرين 4:

أحسب توقع عدد الأطفال الإناث في عائلة لديها ثلاثة أطفال؟

حل تمرين 4:

نفرض أن X متغير عشوائي يمثل عدد الأطفال الإناث، نرمز بالحرف F للأنثى والحرف G للذكر، ومنه:

$$\Omega=\begin{Bmatrix} FFF; FFG; FGF; GFF; GGG \\ GGF; GFG; FGG \end{Bmatrix}$$
$$X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$$

X	0	1	2	3	Σ
$P(X)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

$$E(X)=\sum XP(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{12}{8}=1,5$$

تمرين 5:

صندوق يحتوي على 4 كرات حمراء و3 كرات بيضاء ، نسحب في آن واحد كرتين معا، فإذا افترضنا أن Xمتغير عشوائي منفصل يمثل عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

1. حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X؟
2. حدد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X؟
3. ما احتمال سحب كرة حمراء على الأكثر؟
4. ما احتمال سحب كرة بيضاء على الأقل؟
5. أحسب الأمل الرياضي؟
6. بافتراض أن السحب يتم على التوالي دون ارجاع حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في هذه الحالة؟

حل تمرين 5:

نرمز بـ R للكرة الحمراء المسحوبة و B للكرة البيضاء المسحوبة

1. تحديد قانون التوزيع الاحتمالي لـ X:

$$X(\Omega) = \{0; \quad 1; \quad 2\}$$

X	0	1	2	Σ
$P(X)$	$\frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21}$	$\frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_7^2} = \frac{12}{21}$	$\frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{6}{21}$	1

2. تحديد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

$$F(X) = P(X \leq x_i)$$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ P(x=0) = 3/21 & 0 \leq x < 1 \\ P(x=0) + P(x=1) = 15/21 & 1 \leq x < 2 \\ P(x=0) + \dots + P(x=2) = 21/21 & x \geq 2 \end{cases}$$

3. احتمال سحب كرة حمراء على الأكثر:

$$P(X \leq 1) = P(X=1) + P(X=0) = \frac{15}{21} = 0{,}71$$

4. احتمال سحب كرة بيضاء على الأقل: سحب كرة بيضاء على الأقل معناه سحب كرة حمراء على الأكثر، ومنه الاجابة تكون كما يلي:

$$P(BR; BB) = P(X \leq 1) = P(X=1) + P(X=0) = \frac{15}{21} = 0{,}71$$

5. حساب الأمل الرياضي:

$$E(X) = \sum XP(X) = (0)\frac{3}{21} + (1)\frac{12}{21} + (2)\frac{6}{21} = \frac{27}{21} = 1{,}29$$

6. بافتراض أن السحب يتم على التوالي دون ارجاع فان قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في هذه الحالة يكون على الشكل التالي:

X	0	1	2	Σ
$P(X)$	$\frac{A_3^2}{A_7^2} = \frac{6}{42}$	$\frac{A_3^1 \times A_4^1 + A_4^1 \times A_3^1}{A_7^2} = \frac{24}{42}$	$\frac{A_4^2}{A_7^2} = \frac{12}{42}$	1

تمرين 6:

يقوم رجل أعمال بالاستثمار في ثلاثة مشاريع تجارية في مناطق مختلفة (Pr1, Pr2, Pr3) حيث أن احتمال نجاح كل مشروع هو 0,9. ليكن X متغير عشوائي يُمثل عدد المشروعات الاستثمارية الناجحة.

1. حدد فراغ الحوادث الأولية؟
2. حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ؟
3. حدد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X؟
4. أحسب احتمال أن ينجح مشروعين على الأقل؟
5. أحسب احتمال أن يفشل مشروعين على الأكثر؟
6. أحسب: الأمل الرياضي، التباين، الانحراف المعياري؟
7. أحسب: $E(3X+2)$ ، $V(4X-2)$؟

حل تمرين 6:

1. $\Omega = \{0, \quad 1, \quad 2, \quad 3\}$

2.

X	0	1	2	3	Σ
$P(X)$	0,001	0,027	0,243	0,729	1

$P(X=0) = 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}001$

$P(X=1) = 3 \times 0{,}9 \times 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}027$

$P(X=2) = 3 \times 0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}1 = 0{,}243$

$P(X=3) = 0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}729$

$$3.\ F(X) = P(X<x_i) \Leftrightarrow F(X) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 0{,}001 & 0 \leq x<1 \\ 0{,}028 & 1 \leq x<2 \\ 0{,}271 & 2 \leq x<3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

4. $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = 0{,}243 + 0{,}729 = 0{,}972$

5. $P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0{,}027 + 0{,}243 + 0{,}729 = 0{,}999$

6. $E(X) = \sum XP(X) = 0 \times 0{,}001 + 1 \times 0{,}027 + 2 \times 0{,}243 + 3 \times 0{,}729 = 2{,}7$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 7{,}56 - (2{,}7)^2 = 0{,}27$

$E(X^2) = \sum X^2P(X) = 0^2 \times 0{,}001 + 1^2 \times 0{,}027 + 2^2 \times 0{,}243 + 3^2 \times 0{,}729 = 7{,}56$

$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}27} = 0{,}520$

7. $E(3X+2) = 3 \times E(X) + 2 = 3 \times 2{,}7 + 2 = 10{,}1$

$V(4X-2) = 4^2V(X) = 16 \times 0{,}27 = 4{,}32$

تمرين 7:

ليكن لدينا التوزيع الاحتمالي التالي:

X	0	10	20	30
$P(X)$	0,25	0,30	P_3	0,24

1. أوجد قيمة P_3؟
2. حدد قيم دالة التوزيع الاحتمالي F(X)؟
3. أحسب: $E(2X-1)$ بطريقتين؟
4. أحسب: $V(2X-1)$ بطريقتين؟

حل تمرين 7:

1.تحديد قيمة P_3: لدينا:

$$\sum P(X) = 0{,}25 + 0{,}30 + P_3 + 0{,}24 = 1$$
$$P_3 = 1 - (0{,}25 + 0{,}30 + 0{,}24) = 0{,}21$$

2. حساب قيم دالة التوزيع:

$$F(X) = P(X < x_i) \Leftrightarrow F(X) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0,25 & 0 \leq x < 1 \\ 0,55 & 1 \leq x < 2 \\ 0,76 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

3. حساب $E(2X-1)$ بطريقتين:

X	0	10	20	30	Σ
$P(X)$	0,25	0,30	0,21	0,24	1
$XP(X)$	0	3	4,2	7,2	14,4
$2X-1$	-1	19	39	59	$-$
$(2X-1)P(X)$	$-0,25$	5,7	8,19	14,16	27,8

a. $E(2X-1) = (2X-1)P(X) = 27{,}8$

b. $E(2X-1) = 2E(X) - 1 = 2(14{,}4) - 1 = 27{,}8$

4. حساب $V(2X-1)$ بطريقتين:

X	0	10	20	30	Σ
$P(X)$	0,25	0,30	0,21	0,24	1
X^2	0	100	400	900	$-$
$E(X^2)$	0	30	84	216	330
$2X-1$	-1	19	39	59	$-$
$(2X-1)^2$	1	361	1521	3481	$-$
$(2X-1)^2P(X)$	0,25	108,3	319,41	835,44	1263,4

a. $V(2X-1) = E[(2X-1)^2] - E(2X-1)^2 = 1263{,}4 - (27{,}8)^2 =$

$490{,}56$

b. $V(2X-1) = 2^2V(X) = 4\left[E\left(X^2\right) - E(X)^2\right] = 4[330 - (14{,}4)^2] =$

$4(330 - 207{,}36) = 490{,}56$

تمرين 8:

ليكن X متغير عشوائي، قانون توزيعه الاحتمالي موضح في الجدول التالي:

X	0	1	2	Σ
$P(X)$	P_1	P_2	P_3	1

1. إذا علمت أن: $E(X) = 1,2$ وأن: $V(X) = 0,76$ أحسب قيم كل من:

P_1، P_2، P_3.

2. عين دالة التوزيع الاحتمالي $F(X)$؟

3. حسب الاحتمالات التالية: $P(X < 2)$ ، $P(X < 1)$، $P\left({}^{X<1}/_{x<2}\right)$؟

حل تمرين 8:

1. تعيين قيم: P_1، P_2، P_3.

$$V(X) = 0,76 = E(X^2) - E(X)^2$$
$$\Rightarrow E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 0,76 = (1,2)^2 = 2,2$$

$$\begin{cases} E(X) = \sum xp(x) = (0)P_1 + (1)P_2 + (2)P_3 = 1,2 \ldots\ldots\ldots\ldots (I) \\ E(X^2) = \sum x^2p(x) = (0)^2P_1 + (1)^2P_2 + (2)^2P_3 = 2,2 \ldots\ldots\ldots (II) \\ \sum P(x) = P_1 + P_2 + P_3 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III) \end{cases}$$

بضرب (I) في (-1) وجمعها مع (II) نجد:

$$2P_3 = 1 \Rightarrow P_3 = 0,5$$

بتعويض قيمة P_3 في (I) نجد:

$$P_2 + 2(0,5) = 1,2 \Rightarrow P_2 = 0,2$$

بتعويض قيمة P_3 و P_2 في (III) نجد:

$$P_1 + 0,2 + 0,5 = 1 \Rightarrow P_1 = 0,3$$

X	0	1	2	Σ
$P(X)$	0,3	0,2	0,5	1

2. تعيين دالة التوزيع:

$$F(X) = P(X < x_i)$$

$$F(X)=\begin{cases}0 & x<0\\ 0,3 & 0\le x<1\\ 0,5 & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

3. حساب الاحتمالات التالية: $P(X<2)$ ، $P(X<1)$ ، $P(^{x<1}/_{x<2})$

a. $P(x<2)=P(x=0)+P(x=1)=0,3+0,2=0,5$

b. $P(x<1)=P(x=0)=0,3$

c. $P(^{x<1}/_{x<2})=\frac{P[(x<1)\cap(x<2)]}{P(x<2)}=\frac{P(x<1)}{P(x<2)}=\frac{0,3}{0,5}=0,6$

تمرين 9:

ليكن X متغير عشوائي، قانون توزيعه الاحتمالي موضح في الجدول التالي:

X	2	4	6	8	10
$P(X)$	0,24	0,40	P_3	0,12	P_5

1. عين القيمتين P_3 و P_5 حيث: $P_3=P_5^2$ ثم مثل بيانيا قانون التوزيع الاحتمالي لـ X؟

2. عين دالة التوزيع الاحتمالي لـ X ومثله بيانيا؟

حل تمرين 9:

1. تعيين القيمتين: P_3 و P_5 حيث: $P_3=P_5^2$، ثم رسم التمثيل البياني لقانون التوزيع الاحتمالي لـ X:

$$\begin{cases}P_3=P_5^2\\ P_3+P_5+0,76=1\end{cases}\Leftrightarrow P_5^2+P_5-0,24=0$$

$$ax^2+\mathrm{b}x+\mathrm{c}=0$$

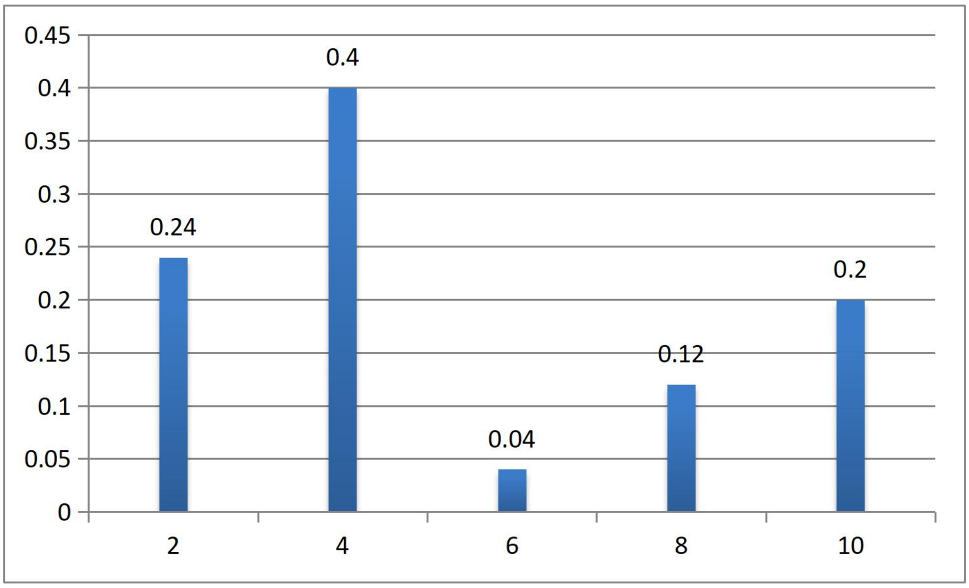
معادلة من الدرجة الثانية وحل هذه المعادلة يجب حساب قيمة المميز Δ

$$\Delta=b^2-4\times a\times c=1^2-4\times 1\times(-0,24)=1,96$$

قيمة المميز موجبة إذن المعادلة تقبل حلين (جذرين) هما:

$$\begin{cases}P_{5.1}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+1,4}{2}=0,2\ (\text{مقبول})\\ P_{5.2}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-1,4}{2}=-1,2\ (\text{مرفوض})\end{cases} ; \qquad F_5=0,20\Rightarrow F_3=0,04$$

X	2	4	6	8	10
$P(X)$	0,24	0,40	0,04	0,12	0,20



2. تعيين دالة التوزيع الاحتمالي لـ X وتمثيله بيانيا:

$$F(X) = P(X < x_i)$$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 0{,}24 & 2 \le x < 4 \\ 0{,}64 & 4 \le x < 6 \\ 0{,}68 & 6 \le x < 8 \\ 0{,}80 & 8 \le x < 10 \\ 1 & x \ge 10 \end{cases}$$

تمرين 10:

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع قانون ثنائي الحد، حيث:

$$X \backsim B\left(5\,;\ \frac{1}{3}\right)$$

1. أحسب احتمال أن يساوي المتغير العشوائي القيمة 1؟
2. أحسب التوقع الرياضي والتباين لهذا المتغير؟

حل تمرين 10:

1. حساب احتمال أن يساوي المتغير العشوائي القيمة 1:

$$P(X = k) = C_n^k P^k (1 - P)^{n-k}$$

$$P(X = 1) = C_5^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{80}{243} = 0{,}30$$

2. حساب التوقع الرياضي والتباين لهذا المتغير:

$$E(X) = n \times P = 5 \times \frac{1}{3} = 1{,}67$$
$$V(X) = n \times P \times (1 - P) = 5 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9} = 1{,}11$$

تمرين 11:

إن نسبة الانتاج التالف لأحد مصانع المصابيح هي 10%. إذا أخذت عينة مكونة من 5 مصابيح فأوجد الاحتمالات التالية:

1. الحصول على مصباح واحد تالف؟
2. الحصول على جميع المصابيح تالفة؟
3. الحصول على مصباح واحد تالف على الأكثر؟
4. الحصول على أربعة مصابيح تالفة على الأقل؟
5. الحصول على أربعة مصابيح جيدة على الأقل؟

حل تمرين 11:

الملاحظ في هذا التمرين هو تحقق شروط قانون ثنائي الحد بالنسبة للحدث الأولي (X الحصول على مصباح تالف):

- نتيجة كل محاولة سحب هو إما أن تكون تالفة أو جيدة؛

- نتيجة كل عملية سحب مستقلة عن نتيجة أي محاولة أخرى؛

- نفس احتمال الحصول على مصباح تالف في كل محاولة أي أن نسبة النجاح ثابتة $P = 0{,}1$ واحتمال الحصول على مصباح جيد ثابتة أي أن احتمال الفشل هو $1 - P = 0{,}9$؛

- عدد المحاولات هو حجم العينة (خمسة مصابيخ).

ومنه X يتبع قانون ثنائي الحد $X \sim B(5\ ;\ 0{,}1)$ وفقا للقانون التالي:

$$P(X = k) = C_n^k P^k (1 - P)^{n-k}$$

1. احتمال ا لحصول على مصباح واحد تالف:

$$P(X = 1) = C_5^1 (0{,}1)^1 (0;9)^4 = 0{,}33$$

2. احتمال الحصول على جميع المصابيح تالفة:

$$P(X=5)=C_5^5(0,1)^5(0,9)^0=0,00001$$

3. احتمال الحصول على مصباح واحد تالف على الأكثر:

$$P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=C_5^0(0,1)^0(0;9)^5+C_5^1(0,1)^1(0;9)^4$$
$$=0,92$$

4. احتمال الحصول على أربعة مصابيح تالفة على الأقل:

$$P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)=C_5^4(0,1)^4(0;9)^1+C_5^5(0,1)^5(0;9)^0$$
$$=0,00046$$

5. احتمال الحصول على أربعة مصابيح جيدة على الأقل: الحصول على أربعة مصابيح جيدة على الأقل

معناه الحصول على مصباح تالف على الأكثر، ومنه:

$$P(X\leq 1)=0,92$$

تمرين 12:

تفيد احصائيات مصلحة التدريس للكلية أن نسبة النجاح لطلبة السنة الأولى تقدر بـ 60%، نختار عشوائيا 4 طلبة من مجموع طلبة السنة الأولى. ليكن لديا X متغير عشوائي يمثل عدد الناجحين من بين 4 طلبة.

1. حدد قانون التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوئي X؟
2. أحسب الاحتمالات التالية:

$$P(1<X\leq 4)\ ;\ P(X>3)$$

3. أحسب التوقع الرياضي والتباين؟

حل تمرين 12:

لدينا X متغير عشوائي يمثل عدد الطلبة الناجحين ، حيث:

$$X \backsim B(4\ ;\ 0,6)$$

1. حدد قانون التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوئي X:

X	0	1	2	3	4	Σ
$P(X)$	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296	1
$F(X)$	0,0256	0,1792	0,5248	0,8704	1	−

- $P(X=0)=C_4^0(0,6)^0(0,4)^4=0,0256$

- $P(X=1)=C_4^1(0{,}6)^1(0{,}4)^3=0{,}1536$

- $P(X=2)=C_4^2(0{,}6)^2(0{,}4)^2=0{,}3456$

- $P(X=3)=C_4^3(0{,}6)^3(0{,}4)^1=0{,}3456$

- $P(X=4)=C_4^4(0{,}6)^4(0{,}4)^0=0{,}1296$

2. حساب الاحتمالات التالية:

$$P(1<X\leq 4)=F(4)-F(1)=1-0{,}1792=0{,}8208$$
$$P(X>3)=1-P(X\leq 3)=1-F(3)=1-0{,}8704=0{,}1296$$

3. حساب التوقع الرياضي والتباين:

$$E(X)=n\times P=4\times 0{,}6=2{,}4$$
$$V(X)=n\times P\times(1-P)=4\times 0{,}6\times 0{,}4=0{,}96$$
$$\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{nP(1-P)}=\sqrt{960,}=0{,}98$$

تمرين 13:

إذا كان متوسط عدد المكالمات الهاتفية الخاطئة التي تصل إلى مصلحة ما هو 2 مكالمة في اليوم، فما احتمال:

1. عدم وصول أي مكالمة خاطئة في اليوم؟
2. وصول ثلاثة مكالمات خاطئة في اليوم؟
3. وصول ما بين مكالمة واحدة خاطئة وأربعة مكالمات خاطئة في اليوم؟

حل تمرين 13:

ليكن لدينا X متغير عشوائي يمثل عدد المكالمات الخاطئة يوميا، بما أن متوسط عدد المكالمات الهاتفية الخاطئة ثابت خلال فترة الزمن $\lambda=2$ فإن X يتبع قانون بواسون:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

1. احتمال عدم وصول أي مكالمة خاطئة في اليوم:

$$P(X=0)=\frac{2^0e^{-2}}{0!}=0{,}135$$

2. احتمال وصول ثلاثة مكالمات خاطئة في اليوم:

$$P(X=3)=\frac{2^3e^{-2}}{3!}=0{,}180$$

3. وصول ما بين مكالمة واحدة خاطئة وأربعة مكالمات خاطئة في اليوم:

$$\begin{aligned}P(1\leq X\leq 4)&=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\\&=\frac{2^1e^{-2}}{1!}+\frac{2^2e^{-2}}{2!}+\frac{2^3e^{-2}}{3!}+\frac{2^4e^{-2}}{4!}\\&=0{,}271+271+0{,}180+0{,}090=0{,}812\end{aligned}$$

تمرين 14:

في أحد البنوك، وحسب التجربة والخبرة الميدانية، لوحظ استلامه في المتوسط 5 شيكات دون رصيد في اليوم. فما احتمال أن يستلم:

1. 6 شيكات دون رصيد في اليوم الموالي؟
2. على الأقل 4 شيكات دون رصيد في اليوم الموالي؟
3. 10 شيكات دون رصيد في الأسبوع الموالي؟
4. على الأكثر شيكين دون رصيد في الأسبوع الموالي؟

حل تمرين 14:

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع توزيع بواسون، حيث المتغير العشوائي X يمثل عدد الشيكات دون رصيد يوميا، و $\lambda=5$ يمثل متوسط عدد الشيكات دون رصيد يوميا.

1. احتمال استلام 6 شيكات دون رصيد في اليوم الموالي:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\Leftrightarrow P(X=6)=\frac{5^6e^{-5}}{6!}=0{,}15$$

2. حساب احتمال استلام على الأقل 4 شيكات دون رصيد في اليوم الموالي:

$$\begin{aligned}P(X\geq 4)=1-P(X\geq 4))1\\-[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)]\end{aligned}$$

$$P(X\geq 4)=1-\left(\frac{5^0e^{-5}}{0!}+\frac{5^1e^{-5}}{1!}+\frac{5^2e^{-5}}{2!}+\frac{5^3e^{-5}}{3!}\right)$$

$$P(X\geq 4)=1-(1+5+12{,}5+20{,}83)e^{-5}=0{,}73$$

3. حساب احتمال استلام 10شيكات دون رصيد في الأسبوع الموالي:

متوسط عدد الشيكات المستلمة في أسبوع هو:

$$\lambda_2 = 7 \times \lambda = \times 5 = 35$$

ونرمز للمتغير العشوائي الممثل لعدد الشيكات دون رصيد المستلمة في الأسبوع بالرمز Y ومنه:

$$P(Y = 10) = \frac{35^{10} e^{-35}}{10!} = 0{,}76 \times 10^{-44}$$

4. حساب احتمال استلام على الأكثر شيكين دون رصيد في الأسبوع الموالي:

$$P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)$$
$$P(Y \leq 2) = \frac{35^0 e^{-35}}{0!} + \frac{35^1 e^{-35}}{1!} + \frac{35^2 e^{-35}}{2!}$$
$$P(Y \leq 2) = (1 + 35 + 612{,}5) \times e^{-35} = 0{,}65 \times e^{-35}$$

المحور السادس:

المتغيرات العشوائية المتصلة وتوزيعها الاحتمالي

1. التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل
2. دالة التوزيع الاحتمالي $F(x)$ للمتغير العشوائي المتصل
3. المميزات العددية للمتغير العشوائي المتصل
4. بعض التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل
5. تمارين المحور السادس

المحور السادس: المتغيرات العشوائية المستمرة وتوزيعها الاحتمالي

يُصادفنا في كثير من الأحيان متغيرات عشوائية تأخذ جميع القيم في مجال ما، مثل هذه المتغيرات تسمى متغيرات عشوائية مستمرة. وكمثال على ذلك طول تلميذ في عمر 16 سنة يُعتبر متغير عشوائي مستمر لأنه يُمكن أن يأخذ أي قيمة في المجال 150 سم إلى 180 سم واحتمال أن يكون طول أحد التلاميذ قيمة محددة واحدة مثل 170 سم سيكون صفرا لان الاحتمال في حالة المتغير العشوائي المستمر عبارة عن المساحة تحت منحنى التمثيل البياني ونقطتين معينتين، ومن المعروف أن المساحة فوق نقطة واحدة تساوي الصفر.

1. التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر:

إذا كان لدينا X متغير عشوائي مستمر فإن قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X يُعطى في شكل دالة تسمى بدالة الكثافة يرمز لها بالرمز $f(x)$ ومُعرفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} f(x) & a\le x\le b \\ 0 & sinon \text{ (ما عدا ذلك)} \end{cases}$$

ملاحظات:

- انطلاقاً من القانون السابق يُمكننا حساب قيمة الاحتمالات لأي مجال $[\ ,\ b]$ كما يلي:

$$P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)dx$$

$$P(X=a)=\int_a^a f(x)dx=0$$

- نقول بأن $f(x)$ دالة كثافة احتمالية إذا تحقق الشرطين التاليين:

$$\forall x\in R, f(x)\ge 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

- الإشارتان $\le$ و $>$ متكافئتان ونفس الشيء بالنسبة للإشارتين $\ge$ و $<$ وعليه فإن:

1. $\int_a^b f(x)dx = P(a \leq x \leq b) = P(a < x < b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq X < b)$
2. $P(X < a) = P(x \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$
3. $P(X > a) = 1 - P(x \leq a) = 1 - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

مثال 1: ليكن لدينا X متغير عشوائي مستمر مُعرف بدالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

أُحسب الاحتمالات التالية: $P(0 < x < 1)$ ، $P(x > 1)$ ، $P(-2 \leq x \leq 2)$

الحل:

$$P(0 < x < 1) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{9}x^2\right) dx = \left[\frac{1}{27}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{27}$$

$$P(x > 1) = 1 - P(x \leq 1) = 1 - \int_0^1 f(x)dx = 1 - \left[\frac{1}{27}x^3\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$$

$$P(-2 < x < 2) = \int_{-2}^{0} 0dx + \int_0^2 \left(\frac{1}{9}x^2\right) dx = 0 + \left[\frac{1}{27}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{27}$$

مثال 2: ليكن لدينا X متغير عشوائي مستمر مُعرف بالدالة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} cx & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

أحسب قيمة الثابت c حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية ومثلها بيانياً ثم أحسب $P(1 \leq x \leq 2)$؟

الحل: حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية يجب أن يكون:

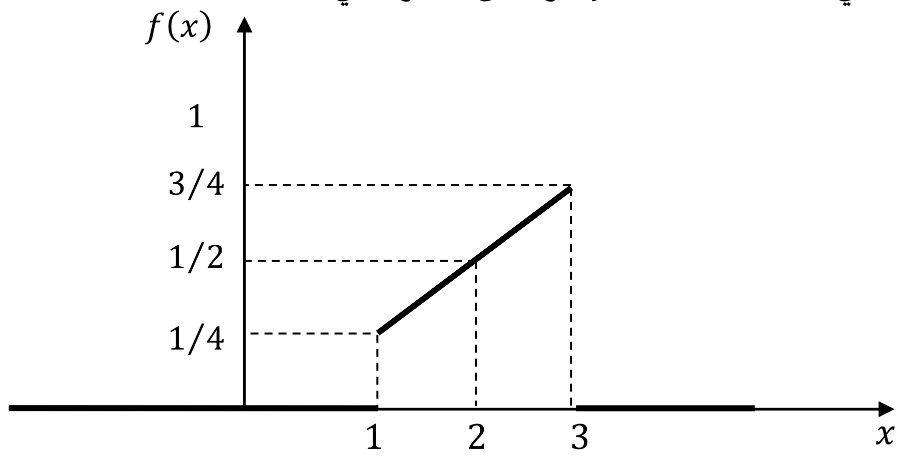
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_1^3 cxdx + \int_3^{+\infty} 0dx = 1 \Leftrightarrow c\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow c\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{4}$$

وعليه يصبح لدينا:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

ومنه التمثيل البياني لدالة الكثافة $f(x)$ يكون على النحو التالي:



$$P(1 \leq x \leq 2) = \int_1^2 \left(\frac{1}{4}x\right) dx = \left[\frac{1}{8}x^2\right]_1^2 = \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

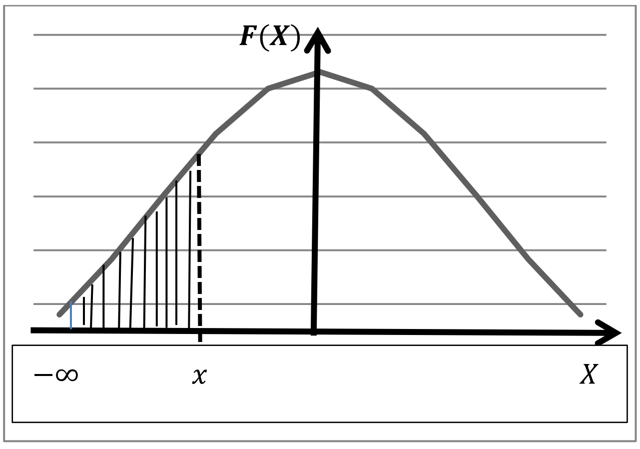
2. دالة التوزيــع الاحتمالي للمتغيرالعشوائي المستمر

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر X هي تلك الدالة الذي تعطينا احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X أية قيمة أصغر من أو تساوي قيمة معينة x ، يُرمز لدالة التوزيع بالرمز $F(x)$.

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي $F(x)$ قابلة للاشتقاق من أجل كل قيمة x تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية فإنه يكون لدينا:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

وتسمى $f(x)$ بدالة الكثافة الاحتمالية، ويعبر عن دالة التوزيع الاحتمالي بالمساحة المظللة في الشكل الموالي:



مثال 3: حدد دالة التوزيع الاحتمالي لدالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

الحل:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

1. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0 \quad ; \quad x < 0$
2. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} 2xdx = 0 + [x^2]_0^x = x^2 \quad ; 0 < x < 1$
3. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} 2xdx + \int_{1}^{x} 0dx = 0 + [x^2]_0^1 + 0 = 1 \quad ; \quad x > 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 < x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

خواص دالة التوزيع الاحتمالي:

1. $P(b < X < a) = F(a) - F(b)$
2. $P(X < a) = F(a)$
3. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
4. $F(-\infty) = 0 \; et \; F(+\infty) = 1) \implies 0 \leq F(x) \leq 1$

مثال 4: بالعودة لمعطيات المثال 3 أحسب الاحتمالات التالية:

1. $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right)$
2. $P\left(X < \frac{3}{4}\right)$
3. $P\left(X > \frac{1}{4}\right)$

الحل: بتطبيق خواص دالة التوزيع الاحتمالي نجد:

1. $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$
2. $P\left(X < \frac{3}{4}\right) = F\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$
3. $P\left(X > \frac{1}{4}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

3. التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي المستمر

يطلق أيضا على كل من التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري بالمميزات العددية للمتغير العشوائي المستمر.

1.3. التوقع الرياضي:

ليكن لدينا X متغير عشوائي مستمر ذو كثافة احتمالية $f(x)$. التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المستمر X هو العدد الحقيقي $E(X)$ المعرف كما يلي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

2.3. التباين والانحراف المعياري

في حالة المتغير العشوائي المستمر يُدعى التوقع الرياضي لمربع انحراف قيم المتغير العشوائي X عن توقعها الرياضي بتباين X ويُرمز له بالرمز $V(X)$ ويُحسب بالاعتماد على العلاقة التالية:

$$V(X) = E\big(X - E(X)\big)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(X - E(X)\big)^2 \times f(x)dx = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

علماً أن: $E(X^2) = \sum X^2 f(x)dx$

أما الانحراف المعياري فهو الجذر التربيعي للتباين أي هو الجذر التربيعي لمتوسط الانحرافات المربعة للقيم عن توقعها الرياضي، ويُرمز له بالرمز σ_x حيث:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E\big(X - E(X)\big)^2} = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2}$$

$$\sigma_x = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2}$$

مثال 4: ليكن لدينا دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

أحسب كل من التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1. الأمل الرياضي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x(0)dx + \int_{0}^{1} x(2x)dx + \int_{1}^{+\infty} x(0)dx$$

$$E(X) = 0 + \int_{0}^{1} 2x^2dx + 0 = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1$$

$$E(X) = \frac{2}{3}$$

2. التباين:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2(0)dx + \int_{0}^{1} x^2(2x)dx + \int_{1}^{+\infty} x^2(0)dx$$

$$E(X^2) = 0 + \int_{0}^{1} 2x^3 dx + 0 = \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

3. الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

4. بعض التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر

هناك العديد من التوزيعات الاحتمالية الخاصة بالمتغيرات العشوائية المستمرة، مثل التوزيع المنتظم والتوزيع الأسي، ويعتبر التوزيع الطبيعي (قانون لابلاس قوس) من أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة.

1.4. التوزيع المنتظم:

نقول عن متغير عشوائي أنه يتوزع بانتظام على مجال معين إذا كانت كثافة احتماله ثابتة على هذا المجال ومعدومة خارجه.

1.1.4 دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المنتظم: تكتب دالة الكثافة الاحتمالية في هذه الحالة بالشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & sinon \end{cases}$$

برهان: ليكن لدينا دالة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} C & a \leq x \leq b \\ 0 & sinon \end{cases}$$

التوزيع المنتظم دالة كثافته ثابتة ومنه نحسب قيمة الثابت C: $f(x)$ دالة كثافة احتمالية معناه:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C \geq 0 \\ \int_{a}^{b} Cdx = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C \geq 0 \\ [Cx]_a^b = 1 \end{cases}$$

$$[Cx]_a^b = 1 \Leftrightarrow Cb - Ca = 1 \Leftrightarrow C(b-a) = 1$$

$$C = \frac{1}{b-c}$$

ومنه التوزيع المنتظم يكتب على الشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & sinon \end{cases}$$

2.1.4 دالة التوزيع الاحتمالي للتوزيع المنتظم: دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المنتظم هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & sinon \end{cases}$$

ومنه دالة التوزيع الاحتمالي يكون على الشكل التالي:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

1. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0 \quad ; \quad x < a$
2. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_{a}^{x} \left(\frac{1}{b-a}\right) dx = 0 + \left[\frac{x}{b-a}\right]_{a}^{x} = \left(\frac{x}{b-a}\right) - \left(\frac{a}{b-a}\right) = \frac{x-a}{b-a} \quad ; \; a \le x \le b$
3. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_{a}^{b} \left(\frac{1}{b-a}\right) dx + \int_{b}^{x} 0dx = 0 + \left[\frac{x}{b-a}\right]_{a}^{b} + 0 = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = 1 \quad ; \; x > b$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

3.1.4 المميزات العددية للتوزيع المنتظم:

التوقع الرياضي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{a} x(0)dx + \int_{a}^{b} x\left(\frac{1}{b-a}\right) dx + \int_{b}^{+\infty} x(0)dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{a} (0)dx + \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a} dx + \int_{b}^{+\infty} (0)dx$$

$$E(X) = 0 + \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_{a}^{b} + 0 = \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)}$$

$$E(X)=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}$$

$$E(X)=\frac{b+a}{2}$$

التباين والانحراف المعياري:

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{a}x^2(0)dx+\int_{a}^{b}x^2\left(\frac{1}{b-a}\right)dx+\int_{b}^{+\infty}x^2(0)dx$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{a}(0)dx+\int_{a}^{b}\frac{x^2}{b-a}dx+\int_{b}^{+\infty}(0)dx$$

$$E(X^2)=0+\left[\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_a^b+0=\frac{b^3}{3(b-a)}-\frac{a^3}{3(b-a)}$$

$$E(X^2)=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{(b-a)(b^2+ba+a^2)}{3(b-a)}$$

$$E(X^2)=\frac{(b^2+ba+a^2)}{3}$$

$$V(X)=\frac{(b^2+ba+a^2)}{3}-\left(\frac{b+a}{2}\right)^2=\frac{b^2+ba+a^2}{3}-\frac{b^2+2ba+a^2}{4}$$

$$V(X)=\frac{b^2+ba+a^2}{3}-\frac{b^2+2ba+a^2}{4}=\frac{b^2-2ba+a^2}{12}$$

$$V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

مثال 5: ليكن لدينا دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 1\le x\le 3\\ 0 & sinon\end{cases}$$

أحسب كل من دالة التوزيع الاحتمالي، $P(X\ge 2)$، التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري ؟

الحل: بداية نلاحظ أن دالة الكثافة المعطاة هي عبارة عن توزيع منتظم لأنها ثابتة في المجال $[1;3]$ ويساوي الصفر خلاف ذلك، ومنه يمكن تطبيق خواص التوزيع المنتظم للإجابة على أسئلة المثال.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

- دالة التوزيع الاحتمالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{x-1}{3-1} & 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{x-1}{2} & 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

- $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

- التوقع الرياضي:

$$E(X) = \frac{b+a}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

- التباين والانحراف المعياري:

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2.4. التوزيع الطبيعي: إن التوزيع الطبيعي هو أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما في التحليل الاحصائي، فكثير من التوزيعات الموجودة فعلا في الطبيعة وفي الصناعة وفي السوق تتبع التوزيع الطبيعي، وأمثلة ذلك مقاييس الأوزان ومقاييس الذكاء، أطوال عدد كبير من الناس. ويستخدم التوزيع الطبيعي في كثير من المرات كتقريب لتوزيع ثنائي الحد وتوزيع بواسون.

نقول عن متغير عشوائي مستمر أنه يتبع التوزيع الطبيعي $N(m, \sigma_x)$ إذا كانت دالة كثافته تأخذ الشكل التالي:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \times e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma_x}\right)^2\right]}$$

حيث: $m = E(X)$ متوسط التوزيع وσ_x الانحراف المعياري، $\pi = 3,14$ ،$e = 2,178$

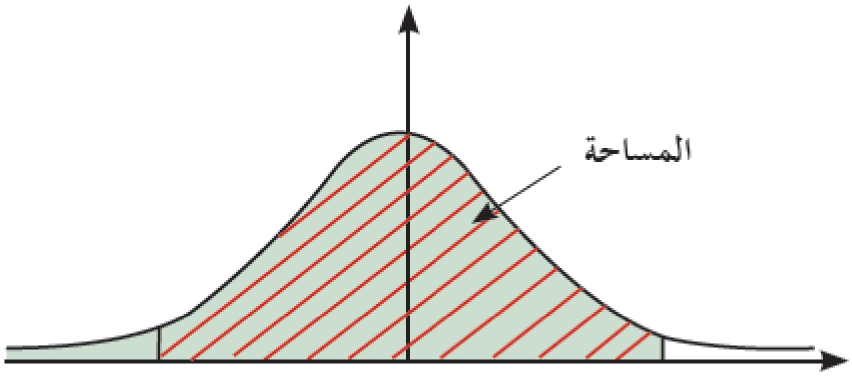
1.2.4 التوزيـع الطبيعي القياسـي: هـو توزيـع طبيعي فيـه $m = 0$ و $_x = 1$ ويرمـز لـه بـالرمز $N(0,1)$، ويمكـن تحويـل أي توزيـع طبيعي $N(m, \sigma_x)$ إلى توزيـع طبيعي قياسـي بتحويـل المتغير العشوائي X إلى المتغير العشوائي القياسي Z حيث:

$$Z = \frac{X - m}{\sigma_x} \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

ودالة كثافة التوزيع الطبيعي القياسي تأخذ الشكل التالي:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{\left(-\frac{1}{2}z^2\right)}$$

ومن بين خصائص التوزيع الطبيعي القياسي من أجل الجدول $Q(t) = P(Z \leq t)$، أي أن حساب الاحتمال مرتبط بحساب المساحة المظللة والمحصورة بين محور الفواصل والمنحنى للمثل لدالة التوزيع الاحتمالي كما في الشكل الموالي:



الخاصية الأولى: الجدول يعطي القيم $Q(t)$ مباشرة من أجل t موجب، مثلا:

$$Q(0{,}52) = 0{,}6985$$
$$Q(1{,}51) = 0{,}9344$$

الخاصية الثانية: من أجل t سالب فإن:

$$Q(-t) = P(Z \leq -t) = 1 - Q(+t)$$

مثال 6: أحسب $Q(-1{,}56)$

الحل: $Q(-1{,}56) = 1 - Q(1{,}56) = 1 - 0{,}9406 = 0{,}0594$

الخاصية الثالثة: $P(Z \geq t) = 1 - P(Z \leq t) = 1 - Q(t)$

مثال 7: أحسب $P(Z \geq 0{,}19)$، $P(Z \geq -1{,}34)$

الحل:

1. $P(Z \geq 0{,}19) = 1 - P(Z \leq 0{,}19) = 1 - Q(0{,}19) = 1 - 0{,}5753 = 0{,}4247$

2. $P(Z \geq -1{,}34) = 1 - P(Z \leq -1{,}34) = 1 - Q(-1{,}34) = 1 - [1 - Q(1{,}34)] = Q(1{,}34) = 0{,}9099$

الخاصية الرابعة: $P(t_1 \leq Z \leq t_2) = Q(t_2) - Q(t_1)$

مثال 7: أحسب كل من:

$$P(0{,}25 \leq Z \leq 1{,}13)$$
$$P(-0{,}14 \leq Z \leq 2{,}11)$$
$$P(-0{,}23 \leq Z \leq -0{,}17)$$

الحل:

1. $P(0{,}25 \leq Z \leq 1{,}13) = Q(1{,}13) - Q(0{,}25) = 0{,}8708 - 0{,}5987 = 0{,}2721$
2. $P(-0{,}14 \leq Z \leq 2{,}11) = Q(2{,}11) - Q(-0{,}14) = Q(2{,}11) - [1 - Q(0{,}14)] = Q(2{,}11) - 1 + Q(0{,}14) = 0{,}9826 - 1 + 0{,}5557 = 0{,}5383$
3. $P(-0{,}23 \leq Z \leq -0{,}17) = Q(-0{,}17) - Q(-0{,}23) = [1 - Q(0{,}17)] - [1 - Q(0{,}23)] = Q(0{,}23) - Q(0{,}17) = 0{,}5910 - 0{,}5675 = 0{,}0235$

مثال 8: ليكن لدينا: $X \backsim N(160, 25)$ أحسب ما يلي:

$$P(170 \leq X \leq 190)$$
$$P(X \geq 150)$$
$$P(X \leq 140)$$

الحل: قبل البدء في حساب الاحتمالات يجب التحول من القانون الطبيعي إلى القانون الطبيعي القياسي .

$$X \backsim N(m, \sigma_x) \Longrightarrow Z = \frac{X - m}{\sigma_x} \quad ; \quad Z \backsim N(0, 1)$$

1. $P(170 \leq X \leq 190) = P\left(\frac{170-160}{25} \leq \frac{X-160}{25} \leq \frac{190-160}{25}\right) = P(0{,}40 \leq Z \leq 1{,}20) = Q(1{,}20) - Q(0{,}40) = 0{,}8849 - 0{,}6554 = 0{,}2295$
2. $P(X \geq 150) = P\left(\frac{X-160}{25} \geq \frac{150-160}{25}\right) = P(Z \geq -0{,}40) = 1 - P(Z \leq -0{,}40) = 1 - [1 - P(Z \leq 0{,}40)] = Q(0{,}40) = 0{,}6554$
3. $P(X \leq 140) = P\left(\frac{X-160}{25} \leq \frac{140-160}{25}\right) = P(Z \leq -0{,}80) = 1 - P(Z \leq 0{,}80) = 1 - 0{,}7881 = 0{,}2119$

الخاصية الخامسة: $Q(0) = 0{,}5$ وكنتيجة لهذه العلاقة نجد:

1. $P(Z \leq t) < \frac{1}{2} \Longrightarrow t$ سالب

2. $P(Z \leq t) > \frac{1}{2} \Longrightarrow t$ موجب

3. $P(Z \geq t) < \frac{1}{2} \Longrightarrow t$ موجب

4. $P(Z \geq t) > \frac{1}{2} \Longrightarrow t$ سالب

مثال 9: أوجد t بحيث:

$$P(Z \leq t) = 0,2578$$

الحل: لدينا $P(Z \leq t) = 0,2578 < \frac{1}{2}$ ومنه اشارة t سالبة

$$Q(t) = 1 - Q(-t) = 0,2577$$
$$Q(-t) = 1 - 0,2577 \Leftrightarrow Q(-t) = 0,7423$$
$$\Longrightarrow -t = 0,65 \Longrightarrow t = -065$$

مثال 10: ليكن X متغير عشوائي يتبع القانون الطبيعي $N(400; 15,4)$ أوجد x حيث:

$$P(X > x) = 0,7549$$

الحل:

$$P\left(\frac{X-400}{15,4} \geq \frac{x-400}{15,4}\right) \Leftrightarrow P(Z > t) = 0,7549$$
$$P(Z > t) = 0,7549 > \frac{1}{2} \Longrightarrow t \text{ سالب}$$
$$P(Z > t) = 1 - Q(t) = 0,7549 \Leftrightarrow 1 - [1 - Q(-t)] = 0,7549$$
$$Q(-t) = 0,69 \Longrightarrow -t = 0,69$$
$$t = 0,69 \Longrightarrow x = t \times 15,4 + 400 = 0,69 \times 15,4 + 400 = 506,26$$
$$x = 506,26$$

2.2.4 تقريب توزيع ثنائي الحد إلى التوزيع الطبيعي

يمكن تقريب توزيع ثنائي الحد إلى التوزيع الطبيعي، وذلك لأنه إذا تحققت مجموعة من الشروط في التجربة الاحتمالية التي تتبع التوزيع ثنائي الحد، فإنه عند استخدام قانون ثنائي الحد تكون العمليات الحسابية صعبة جدا في الغالب، وفي نفس الوقت فإن استخدام قانون التوزيع الطبيعي في هذه الشروط يعطي نتائج مشابهة وقريبة جدا، لذلك يتم استخدام قانون التوزيع الطبيعي إذا كان $n \geq 18$ واحتمال النجاح P ليست صغيرة، ومنه فإن: $B(n; P)$ تقرب إلى القانون الطبيعي $N\left(nP\,; \sqrt{nP(1-P)}\right)$.

مثال 11: ليكن لدينا: $X \sim B(30\,; 0,6)$

أحسب $P(X \leq 15)$ باستخدام التوزيع الطبيعي وتوزيع ثنائي الحد؟

الحل:

1. حساب $P(X \leq 15)$ باستخدام التوزيع الطبيعي:

$$X \leadsto N(18\,;2{,}68)$$
$$P(X \leq 3) = P\left(\frac{X-18}{2{,}68} \leq \frac{3-18}{2{,}68}\right)$$
$$P(Z \leq -1{,}11) = Q(-1{,}11) = 1 - Q(1{,}11) = 1 - 0{,}8665 = 0{,}1335$$

2. حساب $P(X \leq 15)$ باستخدام توزيع ثنائي الحد:

$$P(X \leq 15) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$
$$+ \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots . +P(X = 15)$$
$$P(X \leq 15) = 0{,}1335$$

كما يجب الاشارة إلى أنه يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع بواسون إذا كانت $\lambda \geq 10$

حيث يكون $\sigma_x^2 = m = \lambda$

5. تمارين المحور السادس:

تمرين 1:

1. أثبت أن الدالة التالية هي دالة كثافة احتمالية

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

2. أُحسب الاحتمالات التالية: $P(0 < x < 1)$ ، $P(x > 1)$ ، $P(-2 \leq x \leq 2)$

حل تمرين 1:

نقول بأن $f(x)$ دالة كثافة احتمالية إذا تحقق الشرطين التاليين:

$$\forall x \in R, f(x) \geq 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

الشرط الأول محقق يكفي التحقق من صحة الشرط الثاني فقط:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} (0)dx = \int_{1}^{5} \left(\frac{1}{4}\right) dx + \int_{5}^{+\infty} (0)dx = \left[\frac{1}{4}x\right]_1^5 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}$$
$$= 1$$

الشرط محقق ومنه $f(x)$ دالة كثافة احتمالية

2. حسب الاحتمالات التالية:

$$P(0 < x < 1) = \int_{0}^{1} (0)dx = 0$$

$$P(x>1)=\int_{1}^{+\infty} f(x)dx=\int_{1}^{5}\left(\frac{1}{4}\right)dx+\int_{5}^{+\infty}(0)dx=1$$

$$P(-2\leq x\leq 2)=\int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{-2}^{1}(0)dx+\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{4}\right)dx=\left[\frac{1}{4}x\right]_{1}^{2}=\frac{2}{4}-\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}$$

تمرين 2:

ليكن لدينا X متغير عشوائي مستمر معرف بدالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x)=\begin{cases} ce^{-3x} & x>0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

أحسب قيمة الثابت c ثم أوجد: $P\left(\frac{1}{2}\leq x\leq 1\right)$

حل تمرين 2:

$f(x)$ دالة كثافة احتمالية معناه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0}(0)dx+\int_{0}^{+\infty}(ce^{-3x})dx=1$$

$$\int_{0}^{+\infty}(ce^{-3x})dx=c\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_{0}^{+\infty}=-\frac{1}{3}c[e^{-3x}]_{0}^{+\infty}=1$$

$$=-\frac{1}{3}c(0-1)=1\Longrightarrow \frac{1}{3}c=1\Longrightarrow c=3$$

ومنه:

$$f(x)=\begin{cases} 3e^{-3x} & x>0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$P\left(\frac{1}{2}\leq x\leq 1\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(ce^{-3x})dx=[-e^{-3x}]_{\frac{1}{2}}^{1}=-e^{-3}+e^{\frac{-3}{2}}=e^{\frac{-3}{2}}-e^{-3}$$

$$P\left(\frac{1}{2}\leq x\leq 1\right)=0{,}124$$

تمرين 3:

ليكن X متغير عشوائي مستمر معرف بالدالة التالية:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{cx(9-x^2)}{14} & 0\leq x\leq 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. حدد قيمة الثابت c حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية؟
2. حدد قمية التوقع الرياضي؟
3. عين دالة التوزيع؟
4. ليكن لدينا كل من: $A=\{1<X<2\}$ و $B=\{|X|<1\}$ أحسب ما يلي:

$$P(A);\ P(B);\ P\left(A/_B\right);\ P\left(B/_A\right);\ P(A\cup B)?$$

حل تمرين 3:

1. تحديد قيمة الثابت c حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية:

$f(x)$ دالة كثافة احتمالية معناه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0}(0)dx + \int_{0}^{2}\left(\frac{cx(9-x^2)}{14}\right)dx + \int_{2}^{+\infty}(0)dx = 1$$

$$\int_{0}^{2}\left(\frac{cx(9-x^2)}{14}\right)dx = \int_{0}^{2}\left(\frac{c(9x-x^3)}{14}\right)dx = \frac{c}{14}\left[\frac{9}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 1$$

$$= \frac{c}{14}(18-4) = 1 \Rightarrow \frac{14}{14}c = 1 \Rightarrow c = 1$$

ومنه:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(9-x^2)}{14} & 0\le x\le 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

2. تحديد قمية التوقع الرياضي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0}x(0)dx + \int_{0}^{2}x\left(\frac{x(9-x^2)}{14}\right)dx + \int_{2}^{+\infty}x(0)dx$$

$$E(X) = 0 + \int_{0}^{2}\left(\frac{x^2(9-x^2)}{14}\right)dx + 0 = \int_{0}^{2}\left(\frac{9x^2-x^4}{14}\right)dx$$

$$= \frac{1}{14}\left[3x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = F(2)-F(0) = \frac{1}{14}\left(24-\frac{32}{5}\right)$$

$$E(X) = \frac{24-6{,}4}{14} = 1{,}26$$

3. تعيين دالة التوزيع:

$$F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0 \quad ; \quad x<0$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x}\left(\frac{x(9-x^2)}{14}\right)dx$$

$$= 0 + \frac{1}{14}\left[3x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_0^x = \frac{1}{14}\left(3x^3-\frac{1}{5}x^5\right) \qquad ;0<x<2$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{2}\left(\frac{x(9-x^2)}{14}\right)dx+\int_{2}^{x}0dx$$

$$=0+\frac{1}{14}\left[\frac{9}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^2+0=\frac{1}{14}(18-4)=1 \quad ; \quad x>1$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{14}\left(\frac{9}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right) & 0<x<2\\ 1 & x>2\end{cases}$$

4. ليكن لدينا كل من: $A=\{1<X<2\}$ و $B=\{|X|<1\}$ حساب ما يلي:

$$P(A)=\int_{1}^{2}\left(\frac{x(9-x^2)}{14}\right)dx=F(2)-F(1)=1-\frac{17}{56}=\frac{39}{56}=0{,}70$$

$$P(B)=P(-1<X<1)=\int_{-1}^{1}\left(\frac{x(9-x^2)}{14}\right)dx=F(1)-F(-1)=\frac{17}{56}$$
$$=0{,}3$$

$$P\left({}^{A}/_{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P[(-1<X<1)\cap(1<X<2)]}{P(B)}=\frac{0}{0{,}3}=0$$

$$A\cap B=\emptyset$$

$$P\left({}^{B}/_{A}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P[(-1<X<1)\cap(1<X<2)]}{P(A)}=\frac{0}{0{,}3}=0$$

$$A\cap B=\emptyset$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{39}{56}+\frac{17}{56}=1$$

تمرين 4:

ليكن X متغير عشوائي مستمر معرف بدالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & 0\le x\le 2\\ 0 & sinon\end{cases}$$

1. حدد قمية التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟
2. عين دالة التوزيع؟
3. أحسب ما يلي:

$$P(1<X<4);\ P\left(|X-1|<\frac{1}{2}\right);\ E(3X+1); V(2X-1)\ ?$$

حل تمرين 4:

1. حدد قمية التوقع الرياضي،التباين والانحراف المعياري:

التوقع الرياضي:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x(0)dx+\int_{0}^{2} x\left(\frac{x}{2}\right)dx+\int_{2}^{+\infty} x(0)dx$$

$$E(X)=0+\int_{0}^{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)dx+0==\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-0\right)$$

$$E(X)=\frac{4}{3}$$

التباين:

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x^2(0)dx+\int_{0}^{2} x^2\left(\frac{x}{2}\right)dx+\int_{2}^{+\infty} x^2(0)dx$$

$$E(X^2)=0+\int_{0}^{2}\left(\frac{x^3}{2}\right)dx+0=\left[\frac{1}{8}x^4\right]_0^2$$

$$E(X^2)=2$$

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=2-\frac{4}{9}=\frac{14}{9}$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{14}{9}}=\frac{\sqrt{14}}{3}$$

2. تعيين دالة التوزيع:

$$F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dx=0 \quad ; \quad x<0$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{x}\left(\frac{x}{2}\right)dx=0+\left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^x=\frac{1}{4}x^2$$

$$;0<x<2$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{2}\left(\frac{x}{2}\right)dx+\int_{2}^{x} 0dx=0+\left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^2+0$$

$$=1-0=1 \quad ; \quad x>1$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{4}x^2 & 0<x<2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$$

3. حساب ما يلي:

$$P(1 < X < 4) = F(4) - F(1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P\left(|X-1| < \frac{1}{2}\right) = P\left(-\frac{1}{2} < X - 1 < \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2} < X - 1 < \frac{3}{2}\right)$$

$$= F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$E(3X+1) = 3E(X) + 1 = 3 \times \frac{4}{3} + 1 = 5$$

$$V(2X-1) = 2^2 V(X) = 4 \times \frac{14}{9} = \frac{56}{9}$$

تمرين 5:

ليكن لدينا دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 4 \leq x \leq 8 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. أحسب دالة التوزيع الاحتمالي
2. أحسب: $P(X \geq 7)$
3. التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري ؟

حل تمرين 5: بداية نلاحظ أن دالة الكثافة المعطاة هي عبارة عن توزيع منتظم لأنها ثابتة في المجال $[4; 8]$ ويساوي الصفر خلاف ذلك. ومنه بتطبيق خواص التوزيع المنتظم نجد:

1. حساب دالة التوزيع الاحتمالي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < 4 \\ \frac{x-4}{8-4} & 4 \leq x \leq 8 \\ 1 & x > 8 \end{cases} \Rightarrow F(x)$$

$$= \begin{cases} 0 & x < 4 \\ \frac{x-4}{4} & 4 \leq x \leq 8 \\ 1 & x > 8 \end{cases}$$

2. حساب: $P(X \geq 7)$:

$$P(X \geq 7) = 1 - P(X < 7) = 1 - F(7) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

3. التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري:

- التوقع الرياضي:

$$E(X) = \frac{b+a}{2} = \frac{8+4}{2} = 6$$

- التباين والانحراف المعياري:

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

تمرين 6:

متوسط طول الأسماك في نهر معين هو 10 سم، بانحراف معياري معين يقدر بـ 2 سم. بافتراض أن طول السمك يتبع التوزيع الطبيعي، أحسب احتمال أن يتم صيد سمكة طولها:

1. أقل من 11 سم؟
2. أقل من 10 سم؟
3. أقل من 6 سم؟
4. أقل من 20 سم؟
5. محصور بين 6 سم و11 سم؟

حل تمرين 6:

نفرض أن X متغير عشوائي يمثل وزن العبوة، ومنه: $X \backsim N(10\,;\,2)$. حساب احتمال أن يتم صيد سمكة طولها:

1. أقل من 11 سم:

$$P(X < 11) = P\left(\frac{X-10}{2} < \frac{11-10}{2}\right)$$

$$P\left(Z < \frac{1}{2}\right) = Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}6915$$

2. أقل من 10 سم:

$$P(X < 10) = P\left(\frac{X-10}{2} < \frac{10-10}{2}\right)$$

$$P(Z < 0) = Q(0) = 0{,}5000$$

3. أقل من 6 سم:

$$P(X<6)=P\left(\frac{X-10}{2}<\frac{6-10}{2}\right)$$
$$P(Z<-2)=1-Q(2)=1-0{,}9775=0{,}0225$$

4. أقل من 20 سم:

$$P(X<20)=P\left(\frac{X-10}{2}<\frac{20-10}{2}\right)$$
$$P(Z<5)=Q(5)=1$$

5. محصور بين 6 سم و11 سم:

$$P(6<X<11)=P\left(\frac{6-10}{2}<\frac{X-10}{2}<\frac{11-10}{2}\right)$$
$$P\left(-2<Z<\frac{1}{2}\right)=Q\left(\frac{1}{2}\right)-Q(-2)=Q\left(\frac{1}{2}\right)-1+Q(2)$$
$$=0{,}6915+0{,}9775-1=0{,}6690$$

تمرين 7:

تتبع أوزان عبوات احدى أنواع الحلوى توزيع طبيعي متوسطه 85 غ وانحرافه المعياري 2,5 غ.

1. ما هو احتمال أن وزن احدى العبوات المأخوذة بطريقة عشوائية يزيد عن 90 غ؟
2. ما هو احتمال أن وزن احدى العبوات المأخوذة بطريقة عشوائية يقل عن 82 غ؟
3. ما هو احتمال أن وزن احدى العبوات المأخوذة بطريقة عشوائية يكون محصور بين 82 غ و90غ؟

حل تمرين 7:

نفرض أن X متغير عشوائي يمثل وزن العبوة، ومنه: $X \backsim N(85\,;\,2{,}5)$

1. احتمال أن وزن احدى العبوات المأخوذة بطريقة عشوائية يزيد عن 90 غ:

$$P(X\geq 90)=P\left(\frac{X-85}{2{,}5}\geq\frac{90-85}{2{,}5}\right)$$
$$P(Z\geq 2)=1-P(Z\leq 2)=1-Q(2)=1-0{,}9772=0{,}0228$$

2. احتمال أن وزن احدى العبوات المأخوذة بطريقة عشوائية يقل عن 82 غ:

$$P(X\leq 82)=P\left(\frac{X-85}{2{,}5}\leq\frac{82-85}{2{,}5}\right)$$
$$P(Z\leq -1{,}2)=1-P(Z\leq 1{,}2)=1-Q(1{,}2)=1-0{,}8849=0{,}1151$$

3. احتمال أن وزن احدى العبوات المأخوذة بطريقة عشوائية يكون محصور بين 82 غ و90غ؟

$$P(82\leq X\leq 90)=P\left(\frac{82-82}{2{,}5}\leq\frac{X-85}{2{,}5}\leq\frac{82-90}{2{,}5}\right)$$
$$P(1{,}2\leq Z\leq 2)=Q(2)-Q(1{,}2)=0{,}9772-0{,}8849=0{,}0923$$

تمرين 8:

إذا كانت العلامات النهائية للطلبة في إحدى المسابقات تتبع توزيع طبيعي متوسطه 15 وانحرافه المعياري 2.

إذا كان أعلى 11,9% من الطلبة يحصلون على تقدير ممتاز فما هي أقل علامة تحصل على تقدير ممتاز؟

حل تمرين 8:

نفرض أن X متغير عشوائي يمثل العلامة المتحصل عليها، ومنه: $X \sim N(15\,;\,2)$

المطلوب هو حساب $P(X \geq k) = 0,119$

$$P(X \geq k) = 0,15 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-15}{2} \geq \frac{k-15}{2}\right) = 0,119$$
$$P(Z \geq z) = 0,15 \Leftrightarrow 1 - P(Z \leq z) = 0,119$$
$$P(Z \leq z) = 0,881 \Rightarrow z = 1,18$$
$$z = 1,18 = \frac{k-15}{2} \Rightarrow k = 17,36$$

ومنه أقل علامة تحصل على تقدير ممتاز هي 17,36

المحور السابع:

العزوم والدالة المولدة للعزوم

1. العزوم
2. الدالة المولدة للعزوم
3. تمارين المحور السابع

المحور السابع: العزوم والدالة المولدة للعزوم

نتطرق في هذا المحور لكل من العزوم (البسيطة والمركبة) والدالة المولدة للعزوم

1. العزوم: العزوم عبارة عن قيم احصائية تكون حول نقطة البدء (الصفر) أو حول المتوسط الحسابي $E(x)$، أما رتبة العزم فتتحدد بدرجة القوة (الأس) التي ترفع إليها القيم أو انحرافاتها عن الصفر أو المتوسط الحسابي، وتستخدم في حالة التوزيعات المنفصلة والتوزيعات المتصلة.

وعلى هذا الأساس نميز نوعان من العزوم: العزوم البسيطة (اللامركزية) والعزوم المركزية (المركبة).

1.1 **العزوم البسيطة**: تدعى أيضا بالعزوم اللامركزية وهي معرفة كما يلي

$$m_k = E(X^k)$$

ويتم حساب العزوم البسيطة الأربعة الأولى بالعلاقات التالية:

$$m_1 = E(X)$$
$$m_2 = E(X^2)$$
$$m_3 = E(X^3)$$
$$m_4 = E(X^4)$$

2.1 العزوم المركبة: تدعى أيضا بالعزوم المركزية وهي معرفة كما يلي

$$\mu_k = E[X - E(X)]^k$$

ويتم حساب العزوم البسيطة الأربعة الأولى بالعلاقات التالية:

$$\mu_1 = E[X - E(X)] = 0$$
$$\mu_2 = E[X - E(X)]^2 = V(X)$$
$$\mu_3 = E[X - E(X)]^3$$
$$\mu_4 = E[X - E(X)]^4$$

كما يمكن حساب قيم العزوم المركبة بالاعتماد على العزوم البسيطة من خلال العلاقات التالية:

$$\mu_1 = 0$$
$$\mu_2 = m_2 - m_1^2$$
$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$$
$$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$$

كما تجدر الاشارة إلى أن أهمية العزوم المركزية واللامركزية تكمن في التعرف على كيفية انتشار البيانات وتوزيعها وهو ما يدفعنا أيضا لحساب معاملات تعطينا التقديرات الكمية إما للالتواء (معامل الالتواء) أو التفرطح (معامل التفرطح).

- **معامل الالتواء**: يقيس الالتواء (Skewness) درجة تماثل البيانات حول التوقع الرياضي، ويحسب معامل فيشر للالتواء Fisher's coefficient ويُعبر عنه رياضياً بالعلاقة التالية:

$$\gamma_F = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$$

- إذا كان $\gamma_F < 0$ منحنى التوزيع الاحتمالي ملتوي نحو اليسار؛
- إذا كان $\gamma_F > 0$ منحنى التوزيع الاحتمالي ملتوي نحو اليمين؛
- إذا كان $\gamma_F = 0$ منحنى التوزيع الاحتمالي ملتوي متماثل.

- **معامل التفرطح:** يقيس التفرطح (Kurtosis) درجة التحدب في منحنى التوزيع التكراري، فإذا كان التوزيع محدباً في قمته يُقال أنه حاد (مدبب) القمة وإذا كان منبسط القمة يقال عنه أنه مفرطح القمة وفي حالة أخرى يكون التوزيع معتدل (متوسط التفرطح) ويسمى بالتوزيع الطبيعي. ويحسب التفرطح بالاعتماد على العلاقة الرياضية التالية:

$$K = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4}$$

- إذا كان $K < 3$ فإن التوزيع يكون مفرطح القمة؛
- إذا كان $K > 3$ فإن التوزيع يكون مدبب القمة؛
- إذا كان $K = 3$ فإن التوزيع يكون معتدل (متماثل القمة).

مثال 1: إذا كان لدينا جدول قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X التالي:

X	0	1	2	3	Σ
$P(X)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

1. أحسب العزوم البسيطة (المركزية) الأربعة الأولى؟
2. أحسب بطريقتين العزوم المركبة (اللامركزية) الأربعة الأولى؟
3. أحسب معامل الالتواء ومعامل التفرطح وماذا تستنتج؟

الحل:

1. حساب العزوم البسيطة (المركزية) الأربعة الأولى:

$$m_k = E(X^k)$$

$$m_1 = E(X) = \sum XP(X) = \frac{2}{10} + \frac{6}{10} + \frac{12}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

$$m_2 = E(X^2) = \sum X^2P(X) = \frac{2}{10} + \frac{12}{10} + \frac{36}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

$$m_3 = E(X^3) = \sum X^3 P(X) = \frac{2}{10} + \frac{24}{10} + \frac{108}{10} = \frac{134}{10} = 13{,}4$$

$$m_4 = E(X^4) = \sum X^4 P(X) = \frac{2}{10} + \frac{48}{10} + \frac{324}{10} = \frac{374}{10} = 37{,}4$$

2. حساب العزوم المركبة (اللامركزية) الأربعة الأولى:

الطريقة الأولى: حساب العزوم المركبة بالاعتماد على العلاقة التالية:

$$\mu_k = E[X - E(X)]^k$$

$$\mu_1 = E[X - E(X)] = 0$$

$$\mu_2 = E[X - E(X)]^2 = V(X) = \frac{10}{10} = 1 \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\mu_3 = E[X - E(X)]^3 = \frac{-6}{10} = -0{,}6$$

$$\mu_4 = E[X - E(X)]^4 = \frac{22}{10} = 2{,}2$$

X	0	1	2	3	Σ
$P(X)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	1
$X - E(X)$	-2	-1	0	1	-
$[X - E(X)]^2$	4	1	0	1	-
$E[X - E(X)]^2$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{4}{10}$	$\frac{10}{10}$
$[X - E(X)]^3$	-8	-1	0	1	-
$E[X - E(X)]^3$	$\frac{-8}{10}$	$\frac{-2}{10}$	0	$\frac{4}{10}$	$\frac{-6}{10}$
$[X - E(X)]^4$	16	1	0	1	-
$E[X - E(X)]^4$	$\frac{16}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{4}{10}$	$\frac{22}{10}$

الطريقة الثانية: حساب العزوم المركبة بالاعتماد على العزوم البسيطة:

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = 5 - 2^2 = 1$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 = 13{,}4 - 3 \times 5 \times 2 + 2 \times 2^3 = -0{,}6$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$$
$$= 37{,}4 - 4 \times 13{,}4 \times 2 + 6 \times 5 \times 2^2 - 3 \times 2^4 = 2{,}2$$

3. حساب معامل الالتواء ومعامل التفرطح:

- معامل الالتواء:

$$\gamma_F = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} = \frac{-0,6}{1^3} = -0,6$$

نستنتج أن منحنى التوزيع الاحتمالي ملتوي نحو اليسار.

معامل الترفرطح:

$$K = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} = \frac{2,2}{1^4} = 2,2 < 3$$

نستنتج أن منحنى التوزيع الاحتمالي مفرطح القمة.

2. الدالة المولدة للعزوم: هي عبارة عن توقعات وتستخدم في حالة التوزيعات المنفصلة والتوزيعات المتصلة.

إذا كان X متغير عشوائي منفصل بدلالة كثافة احتمالية $P(X)$ فان:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum e^{tx} P(x)$$

إذا كان X متغير عشوائي متصل بدلالة كثافة احتمالية $f(X)$ فان:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$$

وإن المشتقة الأولى للدالة المتجددة للعزوم بالنسبة إلى t وتعويضه بصفر نحصل على العزم البسيط الأول والذي هو E(X)

وإن المشتقة الثانية للدالة المتجددة للعزوم بالنسبة إلى t وتعويضه بصفر نحصل على العزم البسيط الثاني والذي هو $E(X^2)$

مثال 2: إذا كان لدينا جدول قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X التالي:

X	0	1	2	3	Σ
$P(X)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

أوجد التباين بالاعتماد على الدالة المولدة للعزوم

الحل:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

لإيجاد قيم العزم البسيط الأول والعزم البسيط الثاني نعتمد على الدالة المولدة للعزوم في حالة التوزيعات المنفصلة:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum e^{tx} P(x)$$

$$M_X(t) = \frac{1}{8}e^{t(0)} + \frac{3}{8}e^{t(1)} + \frac{3}{8}e^{t(2)} + \frac{1}{8}e^{t(3)}$$

$$M_X(t) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}e^{t} + \frac{3}{8}e^{2t} + \frac{1}{8}e^{3t}$$

نقوم بالاشتقاق الاول للدالة المولدة للعزوم بالنسبة لـ t نجد:

$$M'_X(t) = 0 + \frac{3}{8}e^{t} + \frac{6}{8}e^{2t} + \frac{3}{8}e^{3t}$$

نعوض قيمة t بصفر في المشتقة الأولى نجد:

$$M'_X(0) = \frac{3}{8}e^{0} + \frac{6}{8}e^{2(0)} + \frac{3}{8}e^{3(0)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = E(X)$$

نقوم بالاشتقاق الثاني للدالة المولدة للعزوم بالنسبة لـ t نجد:

$$M''_X(t) = 0 + \frac{3}{8}e^{t} + \frac{12}{8}e^{2t} + \frac{9}{8}e^{3t}$$

نعوض قيمة t بصفر في المشتقة الثانية نجد:

$$M'_X(0) = \frac{3}{8}e^{0} + \frac{12}{8}e^{2(0)} + \frac{9}{8}e^{3(0)} = \frac{24}{8} = 3 = E(X^2)$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

مثال 3: أوجد الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي المتصل الذي توزيعه الاحتمالي كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

الحل:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{tx}(0)dx + \int_{0}^{+\infty} e^{tx}e^{-x}dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{tx-x}dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-x(1-t)}dx$$

$$M_X(t) = \left[\frac{-1}{1-t}e^{-x(1-t)}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \left[\frac{-1}{1-t}e^{-\infty(1-t)}\right] - \left[\frac{-1}{1-t}e^{-0(1-t)}\right]$$

$$= \left[\frac{-1}{1-t} e^{-\infty}\right] - \left[\frac{-1}{1-t} e^{-0}\right]$$
$$= 0 - \frac{-1}{1-t}$$
$$M_X(t) = \frac{1}{1-t}$$

تمارين المحور السابع:

تمرين 1:

إذا كان لدينا جدول قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X التالي:

X	0	1	2	3	Σ
$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

1. أحسب بطريقتين العزوم البسيطة (المركزية) الأربعة الأولى؟
2. أحسب بطريقتين العزوم المركبة (اللامركزية) الأربعة الأولى؟
3. أحسب معامل الالتواء ومعامل التفرطح وماذا تستنتج؟

حل تمرين 1:

1. حساب العزوم البسيطة (المركزية) الأربعة الأولى:

- الطريقة 1: بالاعتماد على القانون المباشر:

$$m_k = E(X^k)$$
$$m_1 = E(X) = \sum XP(X) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$
$$m_2 = E(X^2) = \sum X^2 P(X) = \frac{2}{6} + \frac{8}{6} + \frac{9}{6} = \frac{19}{6}$$
$$m_3 = E(X^3) = \sum X^3 P(X) = \frac{2}{6} + \frac{16}{6} + \frac{27}{6} = \frac{45}{6}$$
$$m_4 = E(X^4) = \sum X^4 P(X) == \frac{2}{6} + \frac{32}{6} + \frac{81}{6} = \frac{115}{6}$$

- الطريقة 2: بالاعتماد على الدالة المولدة للعزوم:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum e^{tx} P(x)$$
$$M_X(t) = \frac{1}{6} e^{t(0)} + \frac{2}{6} e^{t(1)} + \frac{2}{6} e^{t(2)} + \frac{1}{6} e^{t(3)}$$
$$M_X(t) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} e^{t} + \frac{2}{6} e^{2t} + \frac{1}{6} e^{3t}$$

نقوم بالاشتقاق الاول للدالة المولدة للعزوم بالنسبة لـ t نجد:

$$M_X'(t) = 0 + \frac{2}{6}e^{t} + \frac{4}{6}e^{2t} + \frac{3}{6}e^{3t}$$

نعوض قيمة t بصفر في المشتقة الأولى نجد:

$$M_X'(0) = \frac{2}{6}e^{0} + \frac{4}{6}e^{2(0)} + \frac{3}{6}e^{3(0)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = E(X)$$

نقوم بالاشتقاق الثاني للدالة المولدة للعزوم بالنسبة لـ t نجد:

$$M_X''(t) = 0 + \frac{2}{6}e^{t} + \frac{8}{6}e^{2t} + \frac{9}{6}e^{3t}$$

نعوض قيمة t بصفر في المشتقة الثانية نجد:

$$M_X''(0) = \frac{2}{6}e^{0} + \frac{8}{6}e^{2(0)} + \frac{9}{6}e^{3(0)} = \frac{19}{6} = E(X^2)$$

نقوم بالاشتقاق الثالث للدالة المولدة للعزوم بالنسبة لـ t نجد:

$$M_X'''(t) = 0 + \frac{2}{6}e^{t} + \frac{16}{6}e^{2t} + \frac{27}{6}e^{3t}$$

نعوض قيمة t بصفر في المشتقة الثالثة نجد:

$$M_X'''(0) = \frac{2}{6}e^{0} + \frac{16}{6}e^{2(0)} + \frac{27}{6}e^{3(0)} = \frac{45}{6} = E(X^3)$$

نقوم بالاشتقاق الرابع للدالة المولدة للعزوم بالنسبة لـ t نجد:

$$M_X''''(t) = 0 + \frac{2}{6}e^{t} + \frac{32}{6}e^{2t} + \frac{81}{6}e^{3t}$$

نعوض قيمة t بصفر في المشتقة الرابعة نجد:

$$M_X''''(0) = \frac{2}{6}e^{0} + \frac{32}{6}e^{2(0)} + \frac{81}{6}e^{3(0)} = \frac{115}{6} = E(X^4)$$

نلاحظ أننا تحصلنا على نفس النتائج بطريقتين مختلفتين

2. حساب العزوم المركبة (اللامركزية) الأربعة الأولى:

الطريقة الأولى: حساب العزوم المركبة بالاعتماد على العلاقة التالية:

$$\mu_k = E[X - E(X)]^k$$

$$\mu_1 = E[X - E(X)] = 0$$

$$\mu_2 = E[X - E(X)]^2 = V(X) = \frac{22}{24} = \frac{11}{12} \Longrightarrow \sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{11}{12}}$$

$$\mu_3 = E[X - E(X)]^3 = 0$$

$$\mu_4 = E[X - E(X)]^4 = \frac{166}{96}$$

X	0	1	2	3	Σ
$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
$X - E(X)$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-
$[X - E(X)]^2$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	-
$E[X - E(X)]^2$	$\frac{9}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{22}{24}$
$[X - E(X)]^3$	$-\frac{27}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{27}{8}$	-
$E[X - E(X)]^3$	$-\frac{27}{48}$	$-\frac{2}{48}$	$\frac{2}{48}$	$\frac{27}{48}$	0
$[X - E(X)]^4$	$\frac{81}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{81}{16}$	-
$E[X - E(X)]^4$	$\frac{81}{96}$	$\frac{2}{96}$	$\frac{2}{96}$	$\frac{81}{96}$	$\frac{166}{96}$

الطريقة الثانية: حساب العزوم المركبة بالاعتماد على العزوم البسيطة:

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = \frac{19}{6} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{19}{6} - \frac{9}{4} = \frac{22}{24} = \frac{11}{22}$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 = \frac{45}{6} - 3 \times \frac{19}{6} \times \frac{3}{2} + 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$= \frac{45}{6} - \frac{171}{12} + \frac{54}{8} = \frac{90}{12} - \frac{171}{12} + \frac{54}{8} = \frac{54}{8} - \frac{81}{12} = \frac{27}{4} - \frac{27}{4} = 0$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$$

$$= \frac{115}{6} - 4 \times \frac{45}{6} \times \frac{3}{2} + 6 \times \frac{19}{6} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^4$$

$$\mu_4 = \frac{115}{6} - \frac{540}{12} + \frac{1026}{24} - \frac{243}{16} = \frac{406}{24} - \frac{243}{16} = \frac{664}{384} = \frac{166}{96}$$

3. حساب معامل الالتواء ومعامل التفرطح:

- معامل الالتواء:

$$\gamma_F = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} = \frac{0}{\sqrt{\frac{11}{12}}^3} = 0$$

نستنتج أن منحنى التوزيع الاحتمالي متماثل.

معامل الترفرطح:

$$K=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}=\frac{\mu_4}{\sigma_x^4}=\frac{\frac{166}{96}}{\sqrt{\frac{11}{12}}^4}=\frac{\frac{166}{96}}{\frac{121}{144}}2{,}06<3$$

نستنتج أن منحنى التوزيع الاحتمالي مفرطح القمة.

تمرين 2:

ليكن لدينا المتغير العشوائي المتصل X والذي توزيعه الاحتمالي كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & x>0\\ 0 & sinon\end{cases}$$

1. عين الدالة المولدة للعزوم؟
2. أحسب التباين والانحراف المعياري؟

حل تمرين 2:

1. تعيين الدالة المولدة للعزوم:

$$M_X(t)=E(e^{tx})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{tx}(0)dx+\int_{0}^{+\infty}e^{tx}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}e^{tx-\frac{1}{2}x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}e^{-x(\frac{1}{2}-t)}dx$$

$$M_X(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{\frac{1}{2}-t}e^{-x(1-t)}\right]_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{\frac{1}{2}-t}e^{-\infty(1-t)}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{\frac{1}{2}-t}e^{-0(1-t)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{\frac{1}{2}-t}e^{-\infty}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{\frac{1}{2}-t}e^{-0}\right]$$

$$= 0 - \frac{-1}{2\left(\frac{1}{2} - t\right)}$$

$$M_X(t) = \frac{1}{1 - 2t}$$

2. حساب التباين والانحراف المعياري:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

لإيجاد قيم العزم البسيط الأول والعزم البسيط الثاني نعتمد على الدالة المولدة للعزوم في حالة التوزيعات المتصلة:

$$M_X(t) = \frac{1}{1 - 2t}$$

نقوم بالاشتقاق الأول للدالة المولدة للعزوم بالنسبة لـ t نجد:

$$M_X'(t) = \frac{-1 \times (-2)}{(1 - 2t)^2} = \frac{2}{(1 - 2t)^2}$$

نعوض قيمة t بصفر في المشتقة الأولى نجد:

$$M_X'(0) = \frac{2}{(1 - 2 \times O)^2} = 2 = E(X)$$

نقوم بالاشتقاق الثاني للدالة المولدة للعزوم بالنسبة لـ t نجد:

$$M_X''(t) = \frac{2}{1 - 4t + (2t)^2} = \frac{-2(-4 + 8t)}{(1 - 2t)^4} = \frac{8(1 - 2t)}{(1 - 2t)^4} = \frac{8}{(1 - 2t)^3}$$

$$M_X''(t) = \frac{8}{(1 - 2t)^3}$$

نعوض قيمة t بصفر في المشتقة الثانية نجد:

$$M_X''(0) = \frac{8}{(1 - 2 \times O)^3} = 8 = E(X^2)$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 8 - (2)^2 = 4$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = 2$$

تمرين 3:

ليكن لدينا المتغير العشوائي المتصل X والذي توزيعه الاحتمالي كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

أثبت أن الدالة المولدة للعزوم تأخذ الشكل الموالي:

$$M_X(t) = \frac{e^{2x} - e^{-x}}{3t}?$$

حل تمرين 3:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} e^{tx}(0) dx + \int_{-1}^{2} e^{tx}\left(\frac{1}{3}\right) dx + \int_{2}^{+\infty} e^{tx}(0) dx$$

$$= 0 + \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} e^{tx} dx + 0$$

$$M_X(t) = \frac{1}{3t}[e^{tx}]_{-1}^{2}$$

$$\frac{e^{2x} - e^{-x}}{3t}$$

المحور الثامن:

نظرية شيبيشيف ونظرية الأعداد الكبيرة

1. نظرية شيبيشيف
2. نظرية الأعداد الكبيرة
3. تمارين المحور الثامن

المحور الثامن: نظرية شيبيشيف ونظرية الأعداد الكبيرة

نتطرف من خلال المحور التاسع إلى كل من نظرية شيبيشيف ونظرية الأعداد الكبيرة؟

1. نظرية شيبيشيف:

نظرية أو متباينة شيبيشيف هي متراجحة مشهورة تلعب دورا مهما في نظرية الاحتمالات والاحصاء، وسُميت هذه المتراجحة بهذا الاسم نسبة إلى عالم الرياضيات الروسي "بافنوتي تشيبيشيف"، وتنص هذه النظرية على أنه إذا كان X متغيرا عشوائيا وسطه $E(X)$ وانحرافه المعياري σ_x فإنه لأي عدد موجب k يكون لدينا:

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

حيث: $\delta = K\sigma_x$

وبما أن: $\sigma_x = \sqrt{V(X)} \Leftrightarrow V(X) = \sigma_x^2$

ومنه تكتب متراجحة شيبيشيف كما يلي:

$$P(|X - E(X)| \geq K\sigma_x) \leq \frac{1}{K^2}$$

أي أن متراجحة شيبيشيف تسمح بتقدير احتمال القيمة المطلقة للفرق بين القيمة التي يأخذها المتغير العشوائي X وتوقعه الرياضي $E(X)$ عندما يفوق هذا الفرق قيمة معينة $K\sigma_x$، ويكون دوما هذا الاحتمال أقل من أو يساوي $\frac{1}{K^2}$ حيث $k \geq 1$.

مثال 1: إذا كان طول طلبة الجامعة يتبع توزيعاً طبيعياً توقعه الرياضي 170سم مع انحراف معياري 8سم. استخدم متباينة شيبيشيف لإيجاد حد أعلى لاحتمال أن يكون أحد الطلبة المختار عشوائيا أطول أو أقصر بـ 12سم من التوقع الرياضي؟.

الحل:

$$P(|X - 170| \geq 8K) \leq \frac{1}{K^2}$$

$$E(X) + k\sigma_x = 170 + k \times 8 = 170 + 12 \Rightarrow k = \frac{182 - 170}{8} = \frac{12}{8} = 1{,}5$$

$$E(X) - k\sigma_x = 170 - k \times 8 = 170 - 12 \Rightarrow k = \frac{170 - 158}{8} = \frac{12}{8} = 1{,}5$$

إذن بتعويض قيمة $K = 1{,}5$

$$P(|X - 170| \geq 12) \leq \frac{1}{K^2} = \frac{1}{(1{,}5)^2} = 0{,}44 = 44\%$$

$$P(|X-170| \geq 12) \leq \frac{1}{(1,5)^2}$$
$$P(|X-170| \geq 12) \leq 0,44$$
$$P(|X-170| \geq 12) \leq 44\%$$

ومنه الحد الأعلى لاحتمال أن يكون أحد الطلبة أطول أو أقصر بـ 12 سم من التوقع الرياضي هو 44%.

ملاحظات:

- إن استعمال هذه المتراجحة لا يستدعي معرفة طبيعة قانون التوزيع الاحتمالي، وتبقى معرفة التوقع الرياضي والانحراف المعياري للتوزيع كافية؛

- لا توجد لهذه المتراجحة فائدة كبيرة (عملياً أو نظرياً) لأنها لا تسمح بإيجاد احتمال وانما تكتفي بتحديد قيمة للاحتمال من الأعلى.

2. نظرية الأعداد الكبيرة:

نظرية الأعداد الكبيرة هي قاعدة احصائية تنص على ارتفاع دقة التنبؤات كلما زاد حجم العينة المختبرة، ومنه فالتردد النسبي للحادثة العشوائية يقترب أكثر فأكثر من احتمالها النظري مع ازدياد عدد مرات إعادة التجربة العشوائية.

مثال 2: نرمي قطعة نقود

عدد الرميات	عدد ظهور الصورة		نسبة ظهور الصورة		الفرق المطلق	الفرق النسبي
	نظري	تطبيقي	نظري	تطبيقي		
100	50	48	0,500	0,480	2	0,020
1000	500	491	0,500	0,491	9	0,009
10000	5000	4970	0,500	0,497	30	0,003

نلاحظ من خلال الجدول أعلاه أنه كلما زاد عدد الرميات فإن الفرق بين النسبة النظرية والنسبة التطبيقية ينقص وهذا هو المقصود بنظرية الأعداد الكبيرة.

ويعبر عن نظرية الأعداد الكبيرة بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\min_{n \rightarrow +\infty} [E(X) - m] = 0$$

أي أنه كلما زاد حجم العينة بكمية كافية فإن الفرق بين التوقع الرياضي للعينة والتوقع الرياضي للمجتمع (التوقع النظري) يساوي الصفر.

تمارين المحور الثامن:

تمرين 1:

نفرض أن لدينا التوقع الرياضي يساوي 60 والانحراف المعياري يساوي 8 وحجم العينة يساوي 100، على الأقل كم هو عدد المشاهدات المحصورة بين 44 و76؟.

حل تمرين 1:

$$E(X) = 60 \quad \sigma_x = 8 \quad n = 100$$

حسب نظرية شيبيشيف لدينا:

$$E(X) + k\sigma_x = 60 + k \times 8 = 76 \Rightarrow k = \frac{76 - 60}{8} = \frac{12}{8} = 2$$

$$E(X) - k\sigma_x = 60 - k \times 8 = 44 \Rightarrow k = \frac{60 - 44}{8} = \frac{12}{8} = 2$$

$$P(|X - 60| \geq 16) \leq \frac{1}{K^2} \Rightarrow P(|X - 60| \geq 16) \geq 1 - \frac{1}{K^2}$$

$$P(|X - 60| \geq 16) \geq 1 - \frac{1}{(2)^2}$$

$$P(|X - 60| \geq 16) \geq 1 - 0{,}25$$

$$P(|X - 60| \geq 16) \geq 0{,}75$$

$$P(|X - 60| \geq 16) \geq 75\%$$

ومنه عدد المشاهدات المحصورة بين 44 و76 هي: مشاهدة $75 = 0{,}75 \times 100$

تمرين 2:

1. أحسب احتمال ابتعاد قيمة المتغير العشوائي X أكثر من ثلاثة أضعاف $k = 3$ قيمة الانحراف المعياري من توقعها الرياضي؟

2. حدد قيمة k من أجل: $P(|X - E(X)| \geq k\sigma_x) \leq 0{,}1$

حل تمرين 2:

1. نعوض مباشرة قيمة في متباينة شيبيشيف نجد:

$$P(|X - E(X)| \geq 3\sigma_x) \leq \frac{1}{3^2}$$

$$P(|X - E(X)| \geq 3\sigma_x) \leq \frac{1}{9}$$

$$P(|X - E(X)| \geq 3\sigma_x) \leq 0{,}11$$

ومنه فاحتمال ابتعاد قيمة المتغير العشوائي X أكثر من ثلاثة أضعاف $k = 3$ قيمة الانحراف المعياري من توقعها الرياضي لا يفوق 0,11%.

2. تحديد قيمة k من أجل: $P(|X - E(X)| \geq k\sigma_x) \leq 0{,}1$

من أجل ايجاد قيمة k حيث $k \geq 1$ علينا أن نبحث عن قيمة لـ k تحقق ما يلي :

$$P(|X - E(X)| \geq k\sigma_x) \leq \frac{1}{K^2} \leq 0{,}1$$

$\frac{1}{K^2} \leq 0{,}1$ أقل قيمة يمكن يأخذها K في هذه الحالة هي $k = 4$ لأن: $\frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} \leq 0{,}1$ إذن فالعلاقة محققة ومنه:

$$P(|X - E(X)| \geq 4\sigma_x) \leq 0{,}1$$

قائمة المراجع

قائمة المراجع

1. أبو صالح محمد صبحي وعوض عدنان محمد، **مقدمة في الإحصاء – مبادئ وتحليل باستخدام SPSS**، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، عمان (الأردن).
2. موساوي عبد النور وبركان يوسف، **الإحصاء 2 Statistique**، دار العلوم للنشر والتوزيع، عنابة (الجزائر)، 2010.
3. العابد محمد، **دروس ملخصة وتمارين محلولة في الاحتمالات**، مطبوعة بيداغوجية خاصة بمقاس إحصاء 2 موجهة لطلبة السنة الأولى علوم اقتصادية، جامعة 8 ماي 1945، السنة الجامعية 2019/2018.
4. بشيشي وليد؛ سماعلي فوزي، **الإحصاء II**، مطبوعة بيداغوجية خاصة بمقاس إحصاء 2 موجهة لطلبة السنة الأولى علوم اقتصادية، جامعة 8 ماي 1945، السنة الجامعية 2020/2019.
5. صياغ أحمد رمزي ونمر محمد الخطيب، **مدخل إلى حساب الاحتمالات**، مطبوعة بيداغوجية خاصة بمقاس إحصاء 2 موجهة لطلبة السنة الأولى علوم اقتصادية، جامعة قاصدي مرباح ورقلة، السنة الجامعية 2019/2018.
6. طويطي مصطفى، **محاضرات في الاحصاء 2 – دروس وتمارين محلولة**، مطبوعة بيداغوجية خاصة بمقاس إحصاء 2 موجهة لطلبة السنة الأولى علوم اقتصادية، جامعة غرداية، السنة الجامعية 2018/2017.
7. قطوش عبد الحميد، **الإحصاء 2 – مدعم بتمارين وامتحانات محلولة**، مطبوعة بيداغوجية خاصة بمقاس إحصاء 2 موجهة لطلبة السنة الأولى علوم اقتصادية، جامعة محمد بوضياف، السنة الجامعية 2019/2018.
8. العمري علي وآخرون، **الإحصاء 2 – مدعمة بأمثلة تطبيقية وسلاسل تمارين للأعمال الموجهة**، مطبوعة بيداغوجية خاصة بمقاس إحصاء 2 موجهة لطلبة السنة الأولى علوم اقتصادية، جامعة محمد بوضياف، السنة الجامعية 2020/2019.
9. HAMDAOUI Abdenour, **Probabilité – Cours et exercices d'applications**, Polycopié, Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf – Oran, Algérie, 2019.
10. Bert Wiest, **Probabilités**, Polycopié de Probabilités - Licence 2 -ISTIC - Université de Rennes 1.

جـــدول التوزيـع
الطبيعي المعياري

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000