République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat en Mathématiques

Option : Mathématiques

Contrôle dynamique de quelques systèmes fractionnaires non-locaux et leurs applications

Par
KERBOUA Mourad

DIRECTEUR DE THESE : DEBBOUCHE Amar MCA Univ-Guelma

Devant le jury

PRESIDENT :	BOUSSETILA Nadjib	Prof.	Univ-Guelma
EXAMINATEUR :	BALEANU Dumitru	Prof.	Univ- Cankaya
EXAMINATEUR :	DAHMANI Zoubir	Prof.	Univ-Mostaganem
EXAMINATEUR :	GUESMIA Amar	MCA	Univ-Skikda
EXAMINATEUR :	ELLAGGOUNE Fateh	MCA	Univ-Guelma

Année : 2016

Remerciements

C'est avec beaucoup de reconnaissance que j'exprime mes remerciements à Monsieur DEBBOUCHE Amar, M.C.A à l'université de Guelma pour avoir encadré ce travail de thèse. Sans ces précieux conseils et beaucoup de compétence et de disponibilité, cette thèse n'aurait jamais vu le jour. Je le prie de croire à l'expression de ma très profonde gratitude.

Un grand merci à Monsieur BALEANU Dumitru, Professeur à l'université de Cankaya Ankara- Turquie pour sa collaboration scientifique.

Je suis flatté de l'honneur que Monsieur BOUSSETILA Nadjib, Professeur à l'université de Guelma en présidant le Jury de cette thèse. Je lui exprime ma profonde reconnaissance.

Mes sincères remerciements vont aussi à Monsieurs :

Monsieur DAHMANI Zoubir, Professeur à l'université de Mostaganem.

Monsieur GUESMIA Amar, M.C.A à l'université de Skikda.

Monsieur ELLAGGOUNE Fateh, M.C.A à l'université de Guelma.

qui ont bien accepté, avec beaucoup de sympathie, de faire partie du Jury.

Mes remerciements vont aussi à toutes les personnes du département de mathématiques de l'université de Guelma.

Dédicaces

A ma très chère femme Naima, pour la patience et le soutien dont elle a fait preuve pendant toute la durée de cette thèse.

A mes enfants Anis et Tasnim.

A toute ma famille.

A la mémoire de mon père.

Abstract

This thesis is devoted to study the approximate controllability for two class of nonlocal fractional stochastic control systems of Sobolev type in Hilbert spaces. A new set of sufficient conditions for approximate controllability of Sobolev type nonlocal fractional stochastic dynamic systems are formulated and proved. Also, The approximate controllability results for a class of Sobolev type fractional stochastic nonlocal nonlinear differential equations in Hilbert spaces are obtained. The approach followed here is based on methods of fixed point technique, Hölder's inequality, fractional calculus, stochastic analysis, and methods adopted directly from deterministic control problems for the main results. In this thesis, adequate exemples are provided to illustrate the theory.

Keywords : approximate controllability, fractional Sobolev type equation, stochastic system, fixed point technique, fractional stochastic nonlocal condition, Hölder's inequality.
MSC(2010) : 26A33, 46E39, 34K50, 93B05.

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de la contrôlabilité approchée pour deux classes de systèmes de contrôle stochastiques fractionnaires non locaux de type Sobolev dans les espaces de Hilbert. Un nouvel ensemble de conditions suffisantes pour la contrôlabilité approchée des systèmes dynamiques de type Sobolev non locaux stochastiques fractionnaire sont formulés et prouvés. Ainsi, les résultats de la contrôlabilité approchée pour une classe d'équations différentielles stochastiques fractionnaires non locales non linéaires de type Sobolev dans les espaces de Hilbert sont obtenus. L'approche suivie ici est basée sur des méthodes de point fixe, l'inégalité de Hölder, le calcul fractionnaire, l'analyse stochastique, et d'autres méthodes inspirées de certains problèmes de contrôle déterministes pour les principaux résultats. Dans cette thèse, des exemples adéquats sont fournis pour illustrer la théorie.

Mots-clés : contrôlabilité approchée, équation fractionnaire de type Sobolev, système stochastique, la technique de point fixe, condition non locale stochastique fractionnaire, l'inégalité de Hölder.
MSC(2010) : 26A33, 46E39, 34K50, 93B05.

ملخص

يـــخصص هذا البحث لدراسة إمكانية التحكم التقريبي لفئتين من نظم الرقابة العشوائية الكسرية غير محلية من نوع سوبوليف في فضاءات هلبرت. مجموعة جديدة من الشروط الكافية لإمكانية التحكم التقريبية للأنظمة الديناميكية العشوائية الكسرية غير محلية من نوع سوبوليف تصاغ وثبت. وكذلك، فإن نتائج التحكم التقريبي لفئة من المعادلات التفاضلية العشوائية الكسرية غير خطية غير محلية من نوع سوبوليف في فضاءات هلبرت تم الحصول عليها. و التقريب المتبع هنا يعتمد على طرق تقنية النقطة الثابتة، متراجحة هولدر، وحساب التفاضل والتكامل الكسري، التحليل العشوائي، والطرق المعتمدة مباشرة من مسائل التحكم القطعية من أجل تحقيق النتائج الرئيسية. في هذه الأطروحة، قدمت أمثلة كافية لتوضيح الجانب النظري من هذه الدراسة.

الكلمات الإستدلالية : التحكم التقريبي، المعادلة الكسرية من نوع سوبوليف، نظام عشوائي، تقنية النقطة الثابتة، شرط عشوائي كسري غير محلي، متراجحة هولدر.

التصنيف الرياضي(MSC 2010) : 26A33, 46E39, 34K50, 93B05.

Table des matières

Introduction

0.1 Introduction générale

Le but du calcul fractionnaire est de généraliser les dérivées traditionnelles à des ordres non-entiers. Comme il est bien connu, beaucoup de systèmes dynamiques sont mieux caractérisés par un modèle dynamique d'ordre fractionnaire, basé en général sur la notion de différentiation ou d'intégration de l'ordre non-entier. L'étude des systèmes d'ordre fractionnaire est plus délicate que pour leurs homologues d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires sont, d'une part, considérés comme des systèmes à mémoire, notamment pour la prise en compte des conditions initiales et d'autre part ils présentent une dynamique beaucoup plus complexe.

Les origines du calcul fractionnaire remontaient à la fin du $17^{ème}$siècle, partant de quelques spéculations de G. W. LEIBNIZ concernant la question de l'Hôpital, posée le $30/09/1695$, sur la signification de $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$. Depuis, de nombreux mathématiciens ont contribué au développement de cette théorie, nous citons entre autres P. S. LAPLACE, J. B. J. FOURIER, N.H. ABEL, J. LIOUVILLE, A. K. GRUNWALD, A. V. LETNIKOV, O. HEAVISIDE, H. WEYL et M. RIESZ etc.
Au cours des dernières années un intérêt considérable est attribué aux applications des dérivées fractionnaires (d'ordre non-entier) dans plusieurs domaines. Beaucoup de contributions autant théoriques que pratiques ont montré l'importance des systèmes d'ordres fractionnaires et leur intérêt dans différentes disciplines telles que la mécanique, l'électricité, la biologie, la chimie, l'automatique etc.
La théorie des équations différentielles fractionnaires a été largement étudiée par plusieurs auteurs [3, 31, 47].
Les problèmes appliquées exigent la définition des dérivées fractionnaires permettant l'utilisation de conditions initiales physiquement interprétables qui contiennent $x(0),\ x^{`}(0)$, etc.
La dérivée fractionnaire au sens de Caputo satisfait à ces exigences. Pour plus de détails sur l'intégrale fractionnaire et la dérivée fractionnaire, on peut se référer aux monographies de KILBAS et AL. [42], LAKSHMIKANTHAM et AL. [46], MILLER et ROSS [56], PODLUBNY [62], SAMKO et AL. [70].

Le problème de Cauchy non local, à savoir, l'équation différentielle avec une condition initiale non local $x(t_0) + g(t_1, ..., t_p, x) = x_0(0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_p \leq t_0 + a$ et g est une fonction donnée) est l'un des sujets importants dans la théorie des équations différentielles non-classiques. L'intérêt pour un tel problème provient principalement de l'effet de mieux la condition initiale non locale que celui habituel dans le traitement des problèmes physiques. En fait, la condition initiale non locale $x(t_0) + g(t_1, ..., t_p, x) = x_0$ modélise de nombreuses phénomènes naturels intéressants dans laquelle la condition initiale normale $x(0) = x_0$ peut ne pas tenir. Par exemple, la fonction $g(t_1, ..., t_p, x)$ peut être donné par

$$g(t_1, ..., t_p, x) = \sum_{i=1}^{p} c_i x\left(t_i\right)$$

($c_i, i = 1, ..., p$ sont des constantes). Dans ce cas, nous sommes autorisés à avoir les mesures à $t = 0, t_1, ..., t_p$, plutôt que juste à $t = 0$. Ainsi plus d'informations est disponible. Plus spécialement, soit $g(t_1, ..., t_p, x) = -x(t_p)$ et $x_0 = 0$ donne un problème périodique, ou $g(t_1, ..., t_p, x) = -x(t_0) + x(t_p)$ qui donne un problème rétrograde.

En utilisant la méthode des semi-groupes, diverses solutions d'équations d'evolution non linéaires et semilinéaires ont été examinées par PAZY [61] et le problème non local pour les mêmes équations a d'abord été étudiée par BYSZEWSKI [16].

Les équations de type Sobolev apparaissent dans une variété de problèmes physiques tels que le flux de fluide à travers les roches fissurées [11], la thermodynamique, la propagation des ondes longues de faible amplitude. En particulier, l'équation de type Sobolev admet des représentations abstraites sous la forme d'équations différentielles opérateur implicites avec un coefficient d'opérateur arbitraire multipliant le dérivé le plus élevé. Il existe une abondante littérature dans laquelle les équations de type Sobolev sont étudiées, dans le cadre abstrait, voir par exemple [1, 7, 8, 15, 71].

Les équations différentielles stochastiques (EDS) sont des EDO au processus stochastiques qui peuvent modéliser le comportement imprévisible de la vie réelle de tout système continu. Ils sont une combinaison de EDS, la théorie des probabilités et processus stochastique. L'EDS se posent dans la modélisation de divers phénomènes dynamiques aléatoires en physique, biologique, l'ingénierie et les sciences sociales. Il existe de nombreux résultats intéressants sur la théorie et les applications des équations différentielles stochastiques, (voir [17, 21, 54, 68] et les références citées).
Un des importants concepts fondamentaux de la théorie du contrôle mathématique est la contrôlabilité, elle joue un rôle vital dans les deux systèmes de contrôle déterministes et stochastiques. Depuis, la notion de la contrôlabilité a de vastes applications industrielles et biologiques, dans la littérature, il ya beaucoup de notions différentes de la contrôlabilité, à la fois pour les systèmes dynamiques linéaires et non linéaires.
Le problème de la contrôlabilité peut être formulé comme suit : Considérons un système d'évolution décrit soit en termes d'équations aux dérivées partielles ou ordinaires. On laisse agir sur les trajectoires du système au moyen d'une commande appropriée. Ensuite, étant donné un temps $t \in [0, T]$ et états initiaux et finaux, nous devons trouver un contrôle tel que la solution correspond à la fois l'état initial à l'instant $t = 0$ et le dernier à l'instant $t = T$.
La contrôlabilité des systèmes de contrôle dynamique déterministes et stochastiques dans des espaces de dimension infinie est bien développée en utilisant différents types d'approches. Il convient de mentionner que la théorie de la contrôlabilité des systèmes dynamiques non linéaires fractionnaires est encore prématurée. Il existe peu de travaux à des problèmes de contrôlabilité pour certains systèmes décrits par des équations différentielles fractionnaires [63, 64].

La contrôlabilité exacte pour le système semilinéaire d'ordre fractionnaire, lorsque le terme non linéaire est indépendant de la fonction de contrôle, est prouvé par de nombreux auteurs [12, 25, 65]. Dans ces articles, les auteurs ont démontré la contrôlabilité exacte en supposant que l'opérateur de la contrôlabilité a un inverse induit sur un espace quotient. Toutefois, si le semi-groupe associé au système est compact, alors l'opérateur de contrôlabilité est également compact et donc n'admet pas un inverse, parce que l'espace d'état est de dimension infinie [76]. Ainsi, le concept de la contrôlabilité exacte est trop fort et a une portée limitée et la contrôlabilité approchée est un concept plus faible que la contrôlabilité complète et il est tout à fait convenable dans les applications de ces systèmes de contrôle.
Dans [24, 75], la contrôlabilité approchée des systèmes de contrôle de retard du premier ordre a été prouvé quand le terme non linéaire est une fonction à la fois la fonction de l'état et de la fonction de contrôle en supposant que le système linéaire correspondant soit approximativement contrôlable. Pour prouver la contrôlabilité approchée d'un système du premier ordre, avec ou sans retard, une relation entre l'ensemble atteignable d'un système semi-linéaire et le système linéaire correspondant est démontré dans [13, 22, 35, 36, 73]. Il y a plusieurs articles consacrés à la contrôlabilité approchée pour les systèmes de contrôle semi-linéaire, lorsque le terme non linéaire est indépendant de la fonction de contrôle [45, 66, 67, 74].
Dans la littérature actuelle il y a seulement un nombre limité de documents qui traitent la contrôlabilité approchée de divers types de systèmes stochastiques fractionnaires et équations d'évolution fractionnaires de type Sobolev qui ont été étudiés par les auteurs suivants :
Dans [50] N. I. MAHMUDOV a examiné la contrôlabilité approchée du système de contrôle semilinéaire stochastique dans un espace de Hilbert X de la forme suivante :

$$\begin{aligned} dx(t) &= [Ax(t) + Bu(t) + f(t, x(t), u(t))]\, dt + g(t, x(t), u(t))dw(t), \\ x(0) &= x_0, \quad t \in I = [0, T]\,. \end{aligned}$$

Les résultats sont obtenus en utilisant de nouvelles propriétés des opérateurs symétriques, semi-groupes compacts, le théorème du point fixe de Schauder, et / ou le principe de l'application contractante.

Dans [64] R. SAKTHIVEL, R. GANESH, S. SUGANYA ont étudié la contrôlabilité approchée de l'équation intégro-différentielle stochastique neutre fractionnaire avec un retard infini de la forme suivante :

$$\begin{cases} {}^{c}D_{t}^{q}\left(x_{t}+g\left(t,x_{t}\right)\right)=-Ax(t)+Bu(t)+f\left(t,x_{t}\right) \\ \qquad +\int_{-\infty}^{t}\sigma\left(t,s,x_{s}\right)dw\left(s\right), \quad t\in J=\left[0,b\right], \\ \qquad x(t)=\varphi\left(t\right), \quad t\in\left(-\infty,0\right]. \end{cases}$$

où ${}^{c}D_{t}^{q}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $0<q<1$; les variables d'état $x(\cdot)$ prennent des valeurs dans l'espace réel séparable de Hilbert H ;
$-A:D(-A)\subset H\rightarrow H$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu des opérateurs linéaires bornés $T(t),\ t\geq 0$, dans l'espace de Hilbert H.

Dans [48] F. LI, J. LIANG ET H. K. XU ont obtenu des résultats pour l'existence et la contrôlabilité des équations integro-différentielles fractionnaires de type Sobolev dans un espace de Banach séparable X :

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{q}\left(Bu(t)\right) &= Au(t)+Bf\left(t,u(t),\int_{0}^{t}\rho\left(t,s\right)h\left(t,s,u(s)\right)ds\right), \quad t\in\left[0,T\right], \\ Bu(0) &= B\left(u_{0}-g\left(u\right)\right). \end{aligned}$$

où $T>0,\ 0<q<1$, ${}^{c}D^{q}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. A et B sont des opérateurs linéaires fermés (bornés) avec des domaines contenus dans X,
$\rho:\Delta\rightarrow\mathbb{R},\ h:\Delta\times X\rightarrow X$ $(\Delta=\{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]:t\geq s\})$,
$f:[0,T]\times X\times X\rightarrow D(B)\subset X,\ g:C([0,T],X)\rightarrow D(B)\subset X$ sont des fonctions données, $u_{0}-g(u)\in D(B)$.

Dans [26] A. DEBBOUCHE, D. BALEANU ET R. P. AGARWAL ont prouvé l'existence de solutions mild et fortes pour les équations integro-différentielles non linéaires fractionnaires de type Sobolev avec des conditions non-locales dans les espaces de Banach

$$\begin{aligned} \frac{d^{\alpha}\left(Bu(t)\right)}{dt^{\alpha}}+Au(t) &= f\left(t,W\left(t\right)\right)+\int_{0}^{t}g\left(t,s,W(s)\right)ds, \\ u(0)+\sum_{k=1}^{p}c_{k}u(t_{k}) &= u_{0}. \end{aligned}$$

où $\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}, 0<\alpha\leq 1$ est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, $0\leq t_1<\cdots<t_p\leq a$, $c_1,...,c_p$ sont des nombres réels, B et A sont des opérateurs linéaires fermés $B:D\left(B\right)\subset X\rightarrow Y$ et $A:D\left(A\right)\subset X\rightarrow Y$, où X et Y sont deux espaces de Banach. $W(t)=(B_1(t)u(t),...,B_{\tau}(t)u(t))$, $\{B_i(t):i=1,...,\tau,\ t\in I=[0,a]\}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés définis sur des ensembles denses $S_1,...,S_{\tau}\supset D(A)\supset D(B)$ respectivement de X dans X, $f:I\times X^{\tau}\rightarrow Y$ et $g:\Delta\times X^{\tau}\rightarrow Y$ sont des fonctions abstraites données. Ici $\Delta=\{(s,t):0\leq s\leq t\leq a\}$.
Dans [34] M. FECKAN, J. R. WANG ET Y. ZHOU ont présenté les résultats de contrôlabilité correspondant à deux ensembles de contrôle admissibles pour des équations de fonctions d'évolution fractionnaires de type Sobolev de la forme

$$\begin{cases} {}_{0}^{c}D_{t}^{q}\left(Ex(t)\right)+Ax(t)=f\left(t,x_{t}\right)+Bu(t), \quad t\in J:=[0,a] \\ x(t)=\phi(t), \quad -\tau\leq t\leq 0. \end{cases}$$

dans les espaces de Banach avec l'aide de deux nouveaux caractéristiques d'opérateurs solutions et de leurs propriétés (la bornitude, la compacité), les résultats de la contrôlabilité obtenus en utilisant le théorème de point fixe de Schauder.
En s'inspirant des travaux ci-dessus, dans cette thèse deux axes principaux sont abordés. Le premier axe concerne la contrôlabilité approchée des systèmes dynamiques stochastiques fractionnaires non locaux de type Sobolev dans les espaces de Hilbert. Le second axe concerne la contrôlabilité approchée des équations différentielles stochastiques fractionnaires non linéaires non locales de type Sobolev dans les espaces de Hilbert.

0.2 Organisation de la thèse

Cette thèse a pour objet l'étude de la contrôlabilité approchée pour quelques classes de systèmes de contrôle stochastiques fractionnaires de type Sobolev dans les espaces de Hilbert, elle est structurée comme suit :

Dans **le premier chapitre**, nous introduisons quelques notions essentielles en calcul fractionnaire, théorie de semigroupe, l'analyse stochastique et la théorie du contrôle qui seront utilisés pour obtenir nos principaux résultats.

Dans le deuxième et troisième chapitres, nous discutons la contrôlabilité approchée des systèmes de contrôles stochastiques fractionnaire dans des espaces de Hilbert. **Le deuxième chapitre** est basé sur les résultats de M. KERBOUA, A. DEBBOUCHE et D. BALEANU [40]. Nous affirmons et nous prouvons les résultats d'existence et de la contrôlabilité approchée pour le système stochastique fractionnaire de type Sobolev de la forme

$$\begin{cases} {}^{C}D_t^q \left[Lx\left(t\right)\right] = Mx(t) + Bu(t) + f\left(t, x\left(t\right)\right) \\ \qquad +\sigma\left(t, x\left(t\right)\right) \frac{dw(s)}{dt}, \\ x\left(0\right) + g\left(x(t)\right) = x_0, \end{cases}$$

dans un espace de Hilbert. Les résultats sont obtenus en utilisant la technique du point fixe, le calcul fractionnaire, l'analyse stochastique et des méthodes adoptées directement à partir de problèmes de contrôle déterministes. Nous formulons et nous prouvons également une nouvelle série de conditions suffisantes pour la contrôlabilité approchée. Un exemple est également donné pour consolider la théorie dévelopée.

Le troisième chapitre est basé sur les résultats de M. KERBOUA, A. DEBBOUCHE et D. BALEANU [41]. Nous introduisons une nouvelle notion appelée condition non locale stochastique fractionnaire, puis nous étudions la contrôlabilité approchée d'une classe des équations différentielles stochastiques fractionnaires non linéaires de type Sobolev de la forme

$$\begin{cases} {}^{C}D_t^q\left[Lx\left(t\right)\right] = Mx(t) + Bu(t) + f\left(t, x\left(t\right)\right) \\ \qquad +\sigma_1\left(t, x\left(t\right)\right)\frac{dw_1(s)}{dt}, \\ {}^{L}D_t^{1-q}\, x\left(t\right)\big|_{t=0} = \sigma_2\left(t, x\left(t\right)\right)\frac{dw_2(s)}{dt}, \end{cases}$$

dans un espace de Hilbert. Nous utilisons l'inégalité de Hölder, la technique de point fixe, le calcul fractionnaire, l'analyse stochastique et des méthodes adoptées directement dans des problèmes de contrôle déterministes pour les principaux résultats. Un nouvel ensemble de conditions suffisantes est formulé et prouvé pour le système de contrôle stochastique fractionnaire approximativement contrôlable. Un exemple est donné pour illustrer les résultats abstraits.

Enfin, on rappellera dans la dernière section de cette thèse "Conclusion et perspectives" les différentes contributions apportées par cette thèse ainsi que les perspectives envisagées.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous donnons quelques définitions, notations, propriétés et lemmes fondamentaux, qui seront utilisés tout au long du travail. En particulier, nous rappelons les propriétés principales du calcul fractionnaire [38, 56, 62], des notions de base bien connues dans la théorie des semi-groupes [39, 61, 79] et les principes élémentaires de l'analyse stochastique [23, 54].

1.1 Calcul fractionnaire

Cette section est consacrée à la présentation de certains éléments du calcul fractionnaire. Nous commençons par l'introduction des espaces fonctionnels adéquats ainsi que deux fonctions spéciales, ensuite nous rappelons les définitions et quelques propriétés de l'intégrale et dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et au sens de Caputo.

1.1.1 Espaces fonctionnels

Avant de présenter les définitions des opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires, il convient d'introduire les espaces fonctionnels suivants :
Soit $\Omega = [a, b]$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.1. *Pour* $1 \leq p \leq \infty$, *on définit*

1. *L'espace* $L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$, *des (classes de) fonctions* f *réelles ou complexes sur* Ω *telles que* f *est mesurable et* $\int_a^b |f(t)|^p \, dt < \infty$, *muni de la norme*
$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \;\; 1 \leq p \leq \infty.$$
2. *L'espace* $L^\infty(\Omega), \; p = \infty$, *des (classes de) fonctions mesurables bornées presque partout (p.p.) sur* Ω *muni de la norme*
$$\|f\|_\infty = \underset{t \in \Omega}{ess\sup} |f(t)| = \inf \{K \geq 0; \; |f(t)| \leq K, \; p.p. \; sur \; \Omega\}.$$

Définition 1.1.2. *Soit* $\Omega = [a, b]$ *un intervalle fini de* $\mathbb{R}$, *alors l'espace des fonctions absolûment continues, noté* $AC^1(\Omega)$, *est défini comme l'espace des fonctions* $f : \Omega \to \mathbb{C}$, *dérivable presque partout telle que* $f' \in L^1(\Omega)$.
On a ainsi
$$f \in AC^1(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s) \, ds, \;\; t \in \Omega.$$
Pour $n \geq 2$ nous notons par $AC^n(\Omega)$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$, telles que $f^{(k)} \in \mathcal{C}(\Omega)$ $k = 1, ..., n-1$ et $f^{(n-1)} \in AC^1(\Omega)$.

Notation : On notera $AC^1(\Omega)$ par $AC(\Omega)$. L'espace $AC^n(\Omega)$ est caractérisé par le résultat suivant

Lemme 1.1.1. *Une fonction* $f \in AC^n(\Omega)$, *si et seulement si elle s'écrit sous la forme*
$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f^{(n)}(s) \, ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k, \; \forall t \in \Omega.$$

1.1.2 Fonctions spéciales

Dans ce paragraphe nous présentons des définitions et quelques propriétés pour les fonctions : Gamma et Bêta.

Fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est une fonction de base du calcul fractionnaire. Cette fonction généralise le factoriel $n!$.

Définition 1.1.3. *La fonction Gamma est définie par l'intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad Re(z) > 0,$$

où $t^{z-1} := e^{(z-1)\ln t}$.

Théorème 1.1.1. *La fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout* $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_-$, *où* $\mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, *on a*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

en particulier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\Gamma(n) = n!.$$

2. *On peut également définir* $\Gamma(z)$ *à l'aide de la limite*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \ Re(z) > 0,$$

la condition $Re(z) > 0$, *peut être étendue à* $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_-$.

3. *La fonction* $\Gamma(z)$ *est analytique dans* $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_-$.

Fonction Bêta

Parmi les fonctions de base du calcul fractionnaire : la fonction Bêta. Cette fonction joue un rôle important spécialement dans une certaine combinaison avec la fonction Gamma.

Définition 1.1.4. *La fonction Bêta est donnée par*

$$B(z, \omega) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{\omega-1} dt, \ Re(z) > 0, \ Re(\omega) > 0.$$

Remarque 1.1.1. La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma comme suit

$$B(z,\omega)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)},\ \forall z,\omega:\ Re(z)>0,\ Re(\omega)>0.$$

1.1.3 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'approche de Riemann-Liouville relative à la définition de l'intégrale fractionnaire s'appuie sur la formule de Cauchy pour le calcul de l'intégrale répétée n fois qui est donnée par

$$I^n f(t)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)\,ds;\ t>a \text{ et } n\in\mathbb{N}^*.$$

En généralisant cette formule à un ordre α réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma on aura la définition suivante :

Définition 1.1.5. *L'intégrale fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha>0$ d'une fonction $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $-\infty<a<b<+\infty$, est formellement définie par*

$$I_a^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds,\ a<t<b,$$

où Γ est la fonction Gamma. Lorsque $a=0$ nous écrivons $I_a^\alpha f(t)=(g_\alpha * f)(t)$ où

$$g_\alpha(t):=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}, & t>0,\\ 0, & t\leq 0,\end{cases}$$

et $\lim\limits_{\alpha\longrightarrow 0} g_\alpha(t)=\delta(t)$.

Propriétés :

1. Si $f\in L^1[a,b]$ avec a fini, alors $I_a^\alpha f(t)$ existe pour presque tout $t\in[a,b]$ et on a $I_a^\alpha\in L^1[a,b]$.
2. L'opérateur d'intégration fractionnaire I_a^α est borné dans $L^p[a,b]$, $(1\leq p\leq\infty)$ et on a

$$\|I_a^\alpha f\|_p\leq K\|f\|_p,$$

pour toute $f\in L^p[a,b]$.

3. Soit $\alpha, \beta > 0$, alors pour toute $f \in L^1[a,b]$ on a

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(t) = I_a^{\alpha+\beta} f\left(t\right) = I_a^\beta I_a^\alpha f(t),$$

pour presque tout $t \in [a,b]$.

1.1.4 Dérivée fractionnaire

Plusieurs approches ont été développées pour donner un sens à $\frac{d^n f}{dt^n}$ lorsque $n \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Dans la présente sous-section on se limite à la présentation de deux approches de dérivation fractionnaire à savoir l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo.

Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.1.6. *Pour $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$, la dérivée fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est formellement définie par*

$${}^L D_a^\alpha f\left(t\right) = D^n I_a^{n-\alpha} f\left(t\right) = \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \left(t-s\right)^{n-\alpha-1} f\left(s\right) ds,\ a < t < b,$$

où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$.

Remarque 1.1.2. • Contrairement à la dérivée usuelle d'une fonction $f(t)$ en un point qui ne dépend que des valeurs de $f(t)$ au voisinage de ce point, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre non-entier dépend de toutes les valeurs de $f(t)$ dans l'intervalle (a,t). On dit qu'elle est à caractère non-local.

• Pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coincide avec la dérivée ordinaire.

Remarque 1.1.3. En général, la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville est ni nulle ni constante. A titre d'exemple si $\alpha > 0$ est non entier alors

$${}^L D_a^\alpha K = \frac{K\left(t-a\right)^{-\alpha}}{\Gamma\left(1-\alpha\right)},\ a < t < b,$$

pour toute constante $K \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Propriétés :

Nous allons présenter maintenant quelques propriétés de l'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville.

1. Une fonction possédant une dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville n'est pas nécessairement continue.
2. Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville existent. Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ${}^{L}D_{a}^{\alpha}\left(\lambda f+\mu g\right)$ existe, et l'on a

$$^{L}D_{a}^{\alpha}\left(\lambda f\left(t\right)+\mu g\left(t\right)\right)=\lambda^{L}D_{a}^{\alpha}f\left(t\right)+\mu^{L}D_{a}^{\alpha}g\left(t\right).$$

3. Soient $\alpha>0$ et $f\in L^{1}[a,b]$, alors l'égalité

$$^{L}D_{a}^{\alpha}I_{a}^{\alpha}f\left(t\right)=f\left(t\right),$$

est vraie pour presque tout $t\in[a,b]$.

4. Soient $\alpha,\beta>0$ tels que $n-1\leq\alpha<n,\ m-1\leq\beta<m\ (n,m\in\mathbb{N}^{*})$, alors on a

a) Si $\alpha>\beta>0$, alors pour tout $f\in L^{1}[a,b]$ la relation

$$^{L}D_{a}^{\beta}\left(I_{a}^{\alpha}f\right)\left(t\right)=I_{a}^{\alpha-\beta}f\left(t\right),$$

est vraie presque partout sur $[a,b]$.

b) Si $\beta\geq\alpha>0$, et si la dérivée fractionnaire ${}^{L}D_{a}^{\beta-\alpha}$ existe, alors on a

$$^{L}D_{a}^{\beta}\left(I_{a}^{\alpha}f\right)\left(t\right)=^{L}D_{a}^{\beta-\alpha}f\left(t\right).$$

c) Si $f\in L^{1}[a,b]$ et $I_{a}^{n-\alpha}f\in AC^{n}[a,b]$, alors l'égalité

$$I_{a}^{\alpha L}D_{a}^{\alpha}f\left(t\right)=f\left(t\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{D_{a}^{n-k}\left[I_{a}^{n-\alpha}f\right]\left(a\right)}{\Gamma\left(\alpha-k+1\right)}\left(t-a\right)^{n-k},$$

est vraie presque partout sur $[a,b]$. En particulier, pour $0<\alpha<1$

$$I_{a}^{\alpha L}D_{a}^{\alpha}f\left(t\right)=f\left(t\right)-\frac{\left(t-a\right)^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}I_{a}^{1-\alpha}f\left(a\right),\ \ p.p.\ t\in[a,b].$$

Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Beaucoup de problèmes concrets utilisent les dérivées fractionnaires assujetties à des conditions initiales plus au moins naturelles. Malheureusement, l'approche de Riemann-Liouville mène à des conditions initiales contenant des valeurs limites de dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville en la borne inférieure $t = a$. Malgré la possibilité de résoudre mathématiquement avec de telles conditions initiales, leurs solutions ne sont pas encore bien comprises, puisque il n'y a pas d'interprétation physique adéquate de tel type de conditions initiales.
En 1967 M. CAPUTO [19] proposa un concept modifié de la dérivation fractionnaire, qui prévoit la formulation des conditions initiales sous forme qui fait apparaitre seulement les valeurs limites des dérivées d'ordre entier en la borne inférieure (l'instant initial) $t = a$ comme $f(a),\ f'(a), f''(a), ...$
La définition formelle de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est donnée par
Définition 1.1.7. *La dérivée fractionnaire à gauche au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est donnée par*

$$^{C}D_{a}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds,\ a < t < b,$$

avec

$$n = [\alpha] + 1 \text{ si } \alpha \notin \mathbb{N};\ n = \alpha \text{ pour } \alpha \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Remarque 1.1.5. La dérivée fractionnaire de Caputo est aussi à caractère non local.
Conséquence : Contrairement à la dérivée de Riemann-Liouville, la dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction constante $f = K$ est nulle.
Propriétés :
La relation entre la dérivée fractionnaire de Caputo et celle de Riemann-Liouville sur l'intervalle $[a, b]$ est décrite par le théorème suivant :
Théorème 1.1.2. *Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$. Si f possède $n - 1$ dérivées en a et si $^{L}D_{a}^{\alpha} f$ existe, alors*

$$^{C}D_{a}^{\alpha} f(t) =^{L} D_{a}^{\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^{k} \right],$$

presque partout sur $[a, b]$.

Remarque 1.1.6. On constate que la dérivée au sens de Caputo n'est définie que si celle de Riemann-Liouville existe et que la fonction est $(n-1)$ fois dérivable au sens ordinaire.

Nous notons, que la dérivée fractionnaire de Caputo existe partout sur $[a, b]$ pour toute fonction de $AC^n[a, b]$.

Corollaire 1.1.1. *Si* ${}^C D_a^\alpha f$ *et* ${}^L D_a^\alpha f$ *existent, et si l'on suppose que* $f^{(k)}(a) = 0$ *pour tout* $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$*, alors la dérivée fractionnaire de Caputo coincide avec celle de Riemann-Liouville, i.e.*

$$^C D_a^\alpha f(t) =^L D_a^\alpha f(t), \ p.p. \ t \in [a, b].$$

La dérivée fractionnaire de Caputo est également l'inverse à gauche de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

Lemme 1.1.4. $\alpha > 0$, *n est donné par* (1.1) *et si* $f \in C[a, b]$*, alors*

$$^C D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t), \ a \leq t \leq b.$$

La dérivée de Caputo n'est pas l'inverse à droite de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville comme le montre le théorème suivant :

Théorème 1.1.3. *Soient* $\alpha > 0$*, et n est donné par* (1.1)*. Si* $f \in AC^n[a, b]$*, alors*

$$I_a^{\alpha C} D_a^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k, \ \forall t \in [a, b].$$

1.2 Semi-groupes des opérateurs linéaires

Dans cette section nous présentons les notions de base de la théorie des semi-groupes qui seront utilisées tout au long de ce travail.

Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe muni d'une norme noté $\|.\|$ et le produit scalaire $\langle ., . \rangle$. $\mathcal{L}(H)$ est l'espace des opérateurs linéaires bornés de H dans lui même dont la norme est

$$\|U\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|},$$

pour tout $U \in \mathcal{L}(H)$, $\mathcal{L}(H)$ est un espace de Banach.

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1. *Une famille d'opérateurs $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ linéaires bornés définis sur H est dite semi-groupe fortement continu (ou de classe C_0), ou simplement C_0-semi-groupe si on a :*

(i) $S(0) = I$ *(I est l'opérateur d'identité dans $\mathcal{L}(H)$).*

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ *pour tout $s, t \geq 0$. (propriété algébrique)*

(iii) $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \|S(t)x - x\| = 0$ *pour tout x dans H.(propriété topologique)*

Si en remplace (iii) par :

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \|S(t) - I\| = 0,\ t \geq 0,$$

il s'agit d'un semi-groupe uniformément continu.

Théorème 1.2.1. *Pour $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur H, alors on a les propriétés suivantes :*

(i) $t \longrightarrow |S(t)|_{\mathcal{L}(H)}$ *est bornée sur tout intervalle compact $[0, t_1]$;*

(ii) *Pour tout x dans H, la fonction $t \longrightarrow S(t)x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;*

(iii) *Il existe des constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que :*

$$|S(t)|_{\mathcal{L}(H)} \leq Me^{\omega t},\ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Définition 1.2.2.

L'opérateur A défini par : $D(A) = \left\{x \in H : \lim\limits_{t\longrightarrow 0} \frac{S(t)x-x}{t} \text{ existe pour tout } t > 0\right\}$ et

$$Ax = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} = \frac{d}{dt} S(t)x|_{t=0},\ \text{pour } x \in D(A)$$

est dit générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe.

L'espace $D(A)$ est muni de la norme du graphe $\|x\|_{D(A)} = \|x\| + \|Ax\|,\ x \in D(A)$.

Remarque 1.2.1. Si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés de générateur infinitésimal A, alors il est unique.

Exemple d'un C_0-semi-groupe.

Dans $L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p \leq +\infty)$, la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est définie par :

$[S(t)x](s) = x(t+s), \forall t \geq 0,\ s \in \mathbb{R}$ et $x \in L^p(\mathbb{R})$.

On définit ensuite l'opérateur A sur $L^p(\mathbb{R})$ par :

$$D(A) = \{x \in L^p(\mathbb{R}) :\ x \text{ est localement absolument continue, et } x' \in L^p(\mathbb{R})\}$$

$Ax = x'$ pour tout $x \in D(A)$.

Proposition 1.2.1. *Propriétés d'un C_0-semi-groupe*

(i) *Si $x \in D(A),\ S(t)x \in D(A),\ 0 \leq t < \infty$.*

(ii) *A est un opérateur linéaire fermé de domaine dense dans H $\left(\overline{D(A)} = H\right)$;*

(iii) *Pour tout $x \in H,\ t > 0$ on a :*

$$\int_0^t S(s)xds \in D(A) \text{ et } A\left(\int_0^t S(s)xds\right) = S(t)x - x.$$

(iv) *Si $x \in D(A)$, alors la fonction $t \to S(t)x$ est continûment différentiable de $\mathbb{R}_+ \to H$, et on a :*

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

(v) *Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $Re\lambda > \omega$ et $x \in H$, l'opérateur résolvant est défini par*

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt$$

où $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$(c'est la transformée de la place du semi-groupe).

1.2.2 Théorème de Hille-Yosida

Nous présentons le théorème de Hille-Yosida qui constitue une caractérisation d'un générateur d'un C_0-semi-groupe.

Théorème 1.2.2. (Hille-Yosida).

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur A fermé à domaine dense dans H $\left(\overline{D(A)} = H\right)$ soit générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est qu'il existe des constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que

$$(i)\ \{\lambda :\ \lambda \in \mathbb{C},\ Re(\lambda) > \omega\} \subset \rho(A)\ (\text{l'ensemble résolvant de } A);$$

$$(ii)\ |R(\lambda, A)^n|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{M}{(Re(\lambda) - \omega)^n},\ \forall Re(\lambda) > \omega,\ n = 1, 2, ...$$

où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant défini par

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}/\ (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe et borné dans } H\right\}.$$

La preuve de ce théorème utilise l'écriture intégrale de l'opérateur résolvant (propriètè (v) de Proposition 1.2.1.).

Etant donné un opérateur linéaire A vérifiant les conditions du Théorème 1.2.2., il est commode d'introduire une séquence d'opérateurs linéaires (appelé les approximations de Yosida de A). Ils sont définis par

$$A_n = nAR(n, A) = n^2 R(n, A) - n$$

Lemme 1.2.1. *On a*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} nR(n, A)x = x \quad \text{pour tout } x \in H,$$

et

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} A_n x = Ax \quad \text{pour tout } x \in D(A).$$

1.2.3 La dualité d'un C_0-semi-groupe

Soit H un espace de Hilbert et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs linéaires dans H.

Définition 1.2.3. *L'adjoint de A noté A^* engendre le semi-groupe $\{S^*(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{L}(H)$, où, pour tout $t \geq 0$, $S^*(t)$ est l'adjoint de $S(t)$ qui est également fortement continu sur H.*

Lemme 1.2.2. *Si $U \in \mathcal{L}(H)$ alors $U^* \in \mathcal{L}(H)$ et on a*

$$\|U\|_{\mathcal{L}(H)} = \|U^*\|_{\mathcal{L}(H)}.$$

Lemme 1.2.3. *Soit* $A : D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ *un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans* H*. Si* $\lambda \in \rho(A)$*, alors* $\lambda \in \rho(A^*)$*, et on a*

$$R(\lambda, A^*) = R(\lambda, A)^* .$$

1.2.4 Semi-groupe d'opérateurs compacts

Définition 1.2.4.

En dimension infinie, un C_0-*semi-groupe* $S(t)$ *est dit compact pour* $t > t_0$ *si pour tout* $t > t_0$*,* $S(t)$ *est un opérateur compact.* $S(t)$ *est dit compact s'il est compact pour* $t > 0$*.*

Remarque 1.2.2. Si $S(t)$ est compact pour $t \geq 0$, alors l'identité est compacte et H est de dimension finie. De plus, s'il existe $t_0 > 0$ tel que $S(t_0)$ est compact alors $S(t)$ l'est aussi pour tout $t \geq t_0$ car $S(t) = S(t - t_0) S(t_0)$ et $S(t - t_0)$ est borné.

Nous rappelons un résultat intéressant concernant les semi-groupes compacts.

Théorème 1.2.3.

Soit $S(t)$ *un* C_0-*semi-groupe. Si* $S(t)$ *est compact pour* $t > t_0$*, alors* $S(t)$ *est continu par rapport à la topologie uniforme des opérateurs pour* $t > t_0$*.*

Corollaire 1.2.1.

Soit $S(t)$ *un* C_0-*semi-groupe et soit* A *son générateur infinitésimal. Si* $R(\lambda, A)$ *est compact pour un certain* $\lambda \in \rho(A)$ *et* $S(t)$ *est continu par rapport à la topologie uniforme des opérateurs pour* $t > t_0$*, alors* $S(t)$ *est compact pour* $t > t_0$*.*

Nous concluons cette section en introduisant le concept d'une solution "mild".

1.2.5 Solution mild (Solution au sens de semi-groupes)

Considérons le problème déterministe suivant

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t), & 0 < t < T, \\ u(0) = x, & x \in H \end{cases} \tag{1.2}$$

où H est un espace de Hilbert réel séparable et A est un opérateur non borné qui engendre un C_0-semi-groupe $S(t)$.

Définition 1.2.5. *La fonction* $u : [0, T[\to H$ *est une solution (classique) du problème* (1.2) *sur* $[0, T[$ *si* u *est continue sur* $[0, T[$*, continûment différentiable sur* $]0, T[$ *et* $u(t) \in D(A)$ *pour* $t \in]0, T[$.

Si A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, alors pour tout $x \in D(A)$, la fonction $u^x(t) = S(t)x, \ t \geq 0$ est une solution du (1.2). D'autre part, pour $x \notin D(A)$, $u^x(t)$ n'est pas une solution classique, mais elle peut être considéré comme une "solution généralisée" qui sera appelée une "solution mild".

En fait, le concept de solution mild peut être introduit pour étudier le problème à valeur initiale non homogène suivant

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), & 0 < t < T, \\ u(0) = x, & x \in H, \end{cases} \tag{1.3}$$

où $f : [0, T[\to H$.

Nous définissons maintenant le concept d'une solution mild

Définition 1.2.6. *Soit* A *un générateur infinitésimal d'un* C_0-*semi-groupe* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *sur* H*,* $x \in H$*, et* $f \in L^1([0, T], H)$ *l'espace des fonctions Bochner - intégrables sur* $[0, T]$ *à valeurs dans* H*. La fonction* $u \in C([0, T], H)$ *donnée par*

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s) f(s) \, ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

est la solution mild du problème à valeur initiale (1.3) *sur* $[0, T]$.

Remarque 1.2.2. Notons que pour $x \in H$ et $f \equiv 0$, la solution mild est $S(t)x$, qui n'est pas en général une solution classique.

1.3 Processus de Wiener et intégrales stochastiques dans un espace de Hilbert

Dans cette section, nous définissons les processus de Wiener et dévelopons l'intégrale stochastique dans un espace de Hilbert.

Soit $\left(\Omega, \Gamma, (\Gamma_t)_{t\in[0,T]}, P\right)$ un espace probabilisé filtré. Considérons deux espaces de Hilbert H et E, et un opérateur symétrique positif $Q \in \mathcal{L}(E)$ satisfait $trQ < +\infty$. Alors il existe un système orthonormé complet $\{e_k\}_{k\geq 1}$ dans E, et une suite bornée de nombres réels positifs λ_k telle que

$$Qe_k = \lambda_k e_k, \quad k = 1, 2, ...$$

1.3.1 Processus de Wiener

Définition 1.3.1. *Un processus stochastique $(w(t))_{t\geq 0}$ à valeurs dans E, est appelé un processus $Q-$Wiener si*

(i) $w(0) = 0$

(ii) w *a trajectoires continues,*

(iii) w *a accroissements indépendants,*

(iv) $L(w(t) - w(s)) = \mathcal{N}(0, (t-s)Q)\,,\ t \geq s \geq 0.$

Si un processus $w(t)\,,\ t \in [0,T]$ satisfait (i)-(iii) et (iv) pour $t, s \in [0,T]$ alors nous disons que w est un processus $Q-$Wiener sur $[0,T]$.

Proposition 1.3.1. *Supposons que w est un processus $Q-$Wiener, avec $trQ < +\infty$. Alors on a*

(i) *w est un processus Gaussien sur E et*

$$\mathbf{E}(w(t)) = 0, \quad Cov(w(t)) = tQ, \quad t \geq 0. \tag{1.4}$$

(ii) *Pour $t \in [0,T]$ et $e \in E$, w ayant la forme*

$$\langle w(t), e\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\,\langle e_k, e\rangle\,\beta_k(t) \tag{1.5}$$

où $\{\beta_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ désigne une famille de mouvements browniens mutuellement indépendants sur $\left(\Omega, \Gamma, (\Gamma_t)_{t\in[0,T]}, P\right)$. De plus, la série (1.5) converge dans $L^2(\Omega, \Gamma, P)$.

1.3.2 L'intégrale stochastique

Ce paragraphe est consacré pour une construction de l'intégrale stochastique

$$\int_0^t \phi(s)\,dw(s)\,,\quad t\in[0,T]$$

où w est un processus $Q-$Wiener dans (Ω,Γ,P) à valeurs dans E est un processus avec des valeurs qui sont des opérateurs linéaires mais pas nécessairement bornés de E dans H.

Fixons $T<\infty$. Soit $(\phi(t))_{t\in[0,T]}$ un processus à valeurs dans $\mathcal{L}=\mathcal{L}(E,H)$ prenant qu'un nombre fini de valeurs est dite *élémentaire* si il existe une suite
$0=t_0<t_1<...<t_k=T$ et une suite finie de variables aléatoires $\phi_0,\phi_1,...,\phi_{m-1}$ à valeurs dans $\mathcal{L}$ telle que ϕ_m est $\Gamma_{t_m}-$mesurable et

$$\phi(t)=\phi_m,\qquad \text{pour } t\in\left]t_m,t_{m+1}\right],\quad m=0,1,...,k-1.$$

Pour les processus élémentaires ϕ on définit l'intégrale stochastique par le formule

$$\int_0^t \phi(s)\,dw(s)=\phi\cdot w(t)=\sum_{m=0}^{k-1}\phi_m\left(w_{t_{m+1}\wedge t}-w_{t_m\wedge t}\right),\ t\in[0,T]\,. \tag{1.6}$$

Il est utile, à ce moment, d'introduire le sous-espace $E_0=Q^{1/2}E$ de E muni du produit scalaire

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle_0 &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\langle u,e_k\rangle\langle v,e_k\rangle \\ &= \left\langle Q^{-1/2}u,Q^{-1/2}v\right\rangle\end{aligned} \tag{1.7}$$

est un espace de Hilbert.

Les opérateurs Hilbert–Schmidt jouent un rôle important dans la construction des processus et des intégrales stochastiques à valeurs dans des espaces de Hilbert.

Notons par $L_2^0=L_2(E_0,H)$ l'espace de tous les opérateurs Hilbert-Schmidt de E_0 en H. L'espace L_2^0 est aussi un espace de Hilbert séparable, muni de la norme

$$\begin{aligned}\|\psi\|_{L_2^0}^2 &= \sum_{h,k=1}^{\infty}|\langle\psi_{g_h},f_k\rangle|^2=\sum_{h,k=1}^{\infty}\lambda_h|\langle\psi_{e_h},f_k\rangle|^2 \\ &= \left\|\psi Q^{\frac{1}{2}}\right\|^2=tr\left[\psi Q\psi^*\right]\end{aligned} \tag{1.8}$$

où $\{g_j\}$, avec $g_j = \sqrt{\lambda_j} e_j,\ j = 1, 2, ...,\ \{e_j\}$ et $\{f_j\}$ sont des bases orthonormées dans $E_0,\ E$ et H respectivement.

Soit $(\phi(t))_{t\in[0,T]}$ un processus mésurable à valeurs dans L_2^0; nous définissons les normes

$$\begin{aligned} \|\phi\|_t &= \left\{\mathbf{E}\int_0^t \|\phi(s)\|_{L_2^0}^2 ds\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (1.9) \\ &= \left\{\mathbf{E}\int_0^t tr\left(\phi(s) Q^{1/2}\right)\left(\phi(s) Q^{1/2}\right)^* ds\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad t\in[0,T]. \end{aligned}$$

Proposition 1.3.2. *Si ϕ un processus élémentaire et $\|\phi\|_T < \infty$ alors le processus $\phi \cdot w$ à valeurs dans H est continu, à carré intégrable sur $[0,T]$ et*

$$\mathbf{E}\left|\phi\cdot w(t)\right|^2 = \|\phi\|_t^2, \quad 0\le t\le T. \qquad (1.10)$$

1.4 Contrôlabilité en dimension infini

La contrôlabilité est l'un des aspects qualitatifs les plus importants d'un système dynamique. Le problème de la contrôlabilité est de prouver l'existence d'une fonction de contrôle, qui entraîne la solution du système à partir de son état initial à un état final, où les états initiaux et finaux peuvent varier dans tout l'espace.

1.4.1 Définitions

Soient H et U deux espace de Hilbert et considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), & t\in[0,T], \\ x(0) = x_0, & x_0 \in H, \end{cases} \qquad (1.11)$$

où $T > 0$ fixé, $u \in L^2(0,T;U)$, A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $S(\cdot)$ dans H et B est un opérateur borné de U dans H. Ici H représente l'espace des *états* et U l'espace des *contrôles* du système.

Nous savons que le problème (1.11) a un unique solution mild
$x = x(t;x_0,u) \in C([0,T];H)$ donné par

$$x(t;x_0,u) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds, \quad t\in[0,T].$$

Définition 1.3.1. *On dira que le contrôle u transfère un état a à un état b au temps $T > 0$ si*

$$x\,(T; a, u) = b.$$

On dit aussi que l'état b est atteignable à partir de a au temps T.

Définition 1.3.2. *On dira que le système (1.11) est contrôlable au temps $T > 0$, si pour tout $a \in H$ et tout $b \in H$, il existe une fonction de contrôle $u \in L^2(0, T; U)$ telle que :*

$$x\,(T; a, u) = b.$$

On dit aussi que la paire (A, B) est contrôlable au temps $T > 0$.

Considérons sur $(0, T)$ le système dynamique suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} x'\,(t) = Ax\,(t) + Bu\,(t)\,, \\ x\,(0) = 0 \end{array} \right. \tag{1.12}$$

La solution peut s'écrire pour tout $t \in [0, T]$:

$$x\,(t, u) = L_t u,$$

où L_t est l'opérateur linéaire borné défini par :

$$L_t : \left\{ \begin{array}{c} L^2(0, t; U) \longrightarrow H \\ u \longrightarrow \int_0^t S\,(t-s)\,Bu\,(s)\,ds \end{array} \right. \tag{1.13}$$

Proposition 1.3.1. *Le système (1.11) est contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement si l'opérateur L_T est surjectif.*

Preuve.

Soit $a, b \in H$ deux états quelconques. L'équation en u :

$$x\,(T; a, u) = b \tag{1.14}$$

a une solution dans $L^2(0, T; U)$ si et seulement si l'équation

$$L_T u = b - S\,(T)\,a, \tag{1.15}$$

a une solution dans $L^2(0, T; U)$.

L'équivalence des équations (1.14) et (1.15) entraine la proposition.

1.4.2 Le Gramien de contrôlabilité

L'opérateur adjoint de $\mathbf{L}_T$

L'opérateur L_T est défini de l'espace de Hilbert $L^2([0,T],U)$ dans l'espace de Hilbert H. C'est un opérateur borné. On a

$$L_T^* : \begin{cases} H \longrightarrow L^2(0,T;U) \\ x \longrightarrow L_T^* x = v, \end{cases}$$

où v est défini par :

$$\langle L_T^* x, u\rangle = (x, L_T u), \quad \forall u \in L^2(0,T;U),\ \forall x \in H$$

où $\langle .,.\rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(0,T;U)$ et $(.,.)$ désigne le produit scalaire dans H. Or

$$\begin{aligned} (x, L_T u) &= \left(x, \int_0^T S(t-s)\, Bu(s)\, ds\right) \\ &= \int_0^T (x, S(t-s)\, Bu(s))\, ds \\ &= \int_0^T (B^* S^*(T-s), u(s))\, ds \\ &= \langle B^* S^*(T-.)\, x, u\rangle . \end{aligned}$$

où B^*(resp. $S^*(t-s)$) est l'opérateur adjoint de B(resp. $S(t-s)$). Donc :

$$L_T^* = B^* S^*(T-.) .$$

Définition 1.3.3. *On définit, $R_T(a)$, l'ensemble des états atteignables au temps T à partir de a.*

On a :

$$R_T(a) = S(T)\, a + R(L_T) .$$

L'étude de la contrôlabilité au temps T revient à l'étude de $\cup_{a\in H} R_T(a) = R_T(H)$. Du fait de la dimension infinie, on peut avoir

$$R_T(H) \neq \overline{R_T(H)} \text{ et } S(T)\, H \neq H.$$

On introduit maintenant l'opérateur de contrôlabilité dit "Gramien de contrôlabilité".

Gramien de contrôlabilité

Posons

$$Q_T := L_T L_T^* = \int_0^T S(T-s) BB^* S^*(T-s)\, ds, \quad T > 0. \tag{1.15}$$

L'opérateur Q_T est dans $\mathcal{L}(H)$ et

$$\langle Q_T x, x \rangle = \int_0^T |B^* S^*(T-s)x|^2\, ds = \|L_T^* x\|^2 \geq 0, \quad \forall x \in H.$$

Définition 1.3.3. $Q_T := L_T L_T^*$ *s'appelle Gramien de contrôlabilité.*

Proposition 1.3.2.

$$R(L_T) = R\left(Q_T^{1/2}\right).$$

1.4.3 Contrôlabilité approchée

Définition 1.3.4. *La paire* (A, B) *est approximativement contrôlable au temps* $T > 0$ *si*

$$\overline{R(L_T)} = H.$$

Chapitre 2

Contrôlabilité approchée des systèmes dynamiques stochastiques fractionnaires non locaux de type Sobolev dans les espaces de Hilbert

Dans ce chapitre nous étudions une classe de systèmes de contrôles dynamiques stochastiques fractionnaires de type Sobolev dans les espaces de Hilbert. Nous utilisons la technique de point fixe, le calcul fractionnaire, l'analyse stochastique et quelques méthodes adoptées directement à partir des problèmes de contrôle déterministes pour les principaux résultats. Un nouvel ensemble de conditions suffisantes pour la contrôlabilité approchée est formulé et prouvé. Un exemple est également donné pour valoriser la théorie developpées pour les problèmes en question.

2.1 Position du problème

Ci-dessous, nous discutons le système stochastique fractionnaire non local de type Sobolev suivant :

$$^{C}D_t^q[Lx(t)] = Mx(t) + Bu(t) + f(t, x(t)) + \sigma(t, x(t))\frac{dw(t)}{dt}, \tag{2.1}$$

$$x(0) + g(x(t)) = x_0, \tag{2.2}$$

où $^{C}D_t^q$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre q, $0 < q \leq 1$, et $t \in J = [0, b]$. Soient X et Y deux espaces de Hilbert, et l'état $x(\cdot)$ prend ses valeurs dans X. Nous supposons que les opérateurs $L : \ D(L) \subset X \to Y$ et $M : \ D(M) \subset X \to Y$. La fonction de contrôle $u(\cdot)$ est donnée dans $L_\Gamma^2(J, U)$ l'espace des fonctions de contrôles admissibles, U est un espace de Hilbert. B est un opérateur linéaire borné de U en Y; $f : J \times X \to Y, \ g : C(J : X) \to Y$ et $\sigma : J \times X \to L_2^0$ sont des fonctions appropriées ; x_0 sont des variables aléatoires à valeurs dans $X, \ \Gamma_0-$ mesurable indépendante de w. $\Gamma, \ \Gamma_0$ et w seront précisés plus tard.

Ensuite, nous faisons quelques hypothèses sur les opérateurs L et M.

(H_1) L et M sont des opérateurs linéaires et M est fermée.

(H_2) $D(L) \subset D(M)$ et L est bijective.

(H_3) $L^{-1} : Y \longrightarrow D(L) \subset X$ est un opérateur linéaire et compact.

De (H_3), nous concluons que L^{-1} est un opérateur borné et on note par $C = \|L^{-1}\|$. Notons que (H_3) implique également que L est fermé parceque L^{-1} est fermé et injective, alors son inverse est également fermé. En utilisant $(H_1) - (H_3)$ et le théorème du graphe fermé, on obtient le caractère borné de l'opérateur linéaire $ML^{-1} : Y \to Y$. Ainsi ML^{-1} génère un semi-groupe $\{S(t) := e^{ML^{-1}t}, t \geq 0\}$. Nous supposons également que $M_0 := \sup_{t \geq 0} \|S(t)\| < \infty$.

En conséquence, Il convient de réécrire le problème (2.1)-(2.2) selon l'équation intégrale équivalente

$$\begin{aligned} Lx(t) &= L[x_0 - g(x)] + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1}[Mx(s) + Bu(s) + f(s, x(s))]ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \sigma(s, x(s)) dw(s), \end{aligned} \tag{2.3}$$

en supposant que l'intégrale dans (2.3) existe (prise au sens de Bochner).

Avant l'introduction de la définition de la solution mild de (2.1)-(2.2), nous présentons les définitions, corollaires, lemmes et les notations suivantes.

Soit $\left(\Omega, \Gamma, (\Gamma_t)_{t\in J}, P\right)$ un espace probabilisé filtré. Nous considérons quatre espaces séparables réels $X,\ Y,\ E$ et U, w un processus $Q-$Wiener sur (Ω, Γ_b, P) avec Q est l'opérateur de covariance, positif, linéaire et borné tel que $trQ < \infty$ et $\Gamma_t = \Gamma_t^w$, où $\Gamma_t^w = \sigma\{w(s) :\ 0 \leq s \leq t\}$. Soit $L_2^0 = L_2\left(Q^{1/2}E, X\right)$ l'espace de tous les opérateurs Hilbert-Schmidt de $Q^{1/2}E$ en X muni de la norme $\|\psi\|_{L_2^0}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left\|\psi Q^{\frac{1}{2}} e_k\right\|^2 = tr[\psi Q \psi^*]$, $\psi \in L_2^0$, où $\{e_k\}$ est un système orthonormé complet dans E. Soit $L_2(\Gamma_b, X)$ l'espace de Banach de toutes les variables aléatoires à valeurs dans l'espace de Hilbert X, carrées intégrables et Γ_b-mesurable, $\mathbf{E}(\cdot)$ désigne l'espérance par rapport à la mesure P. Soit $C(J, L^2(\Gamma, X))$ l'espace de Hilbert des applications continues de J dans $L^2(\Gamma, X)$ tel que $\sup_{t\in J} E\,||x(t)||^2 < \infty$. Soit $H_2(J, X)$ le sous-espace fermé de $C(J, L^2(\Gamma, X))$ constitué de processus à valeurs dans X et Γ_t-mesurable $x \in C(J, L^2(\Gamma, X))$ muni de la norme $||x||_{H_2} = (\sup_{t\in J} E\,||x(t)||_X^2)^{1/2}$. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à ([23, 69] et les références citées).

Les résultats suivants sont utilisés dans les preuves

Lemme 2.1.1. (voir [50]) *Soit $G : J \times \Omega \to L_2^0$ une application fortement mesurable telle que $\int_0^b \mathbf{E}\,||G(t)||_{L_2^0}^p\, dt < \infty$. Alors*

$$\mathbf{E}\left|\left|\int_0^t G(s)dw(s)\right|\right|^p \leq L_G \int_0^t \mathbf{E}\,||G(s)||_{L_2^0}^p\, ds$$

pour tous $0 \leq t \leq b$ et $p \geq 2$, où L_G est une constante dépend de p et b.

L'étape suivante consiste à présenter la solution mild du problème (2.1)-(2.2).

Définition 2.1.1. (comparer avec [27, 32] et [34, 80]) *Un processus stochastique $x \in H_2(J,X)$ est une solution mild de* (2.1)–(2.2) *si pour chaque contrôle $u \in L^2_\Gamma(J,U)$, elle satisfait l'équation intégrale suivante,*

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & \mathcal{S}(t)L\left[x_0 - g\left(x\right)\right] + \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)[Bu(s) + f(s,x(s))]ds \\ & & + \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\sigma(s,x(s))dw(s), \end{array} \tag{2.4}$$

où $\mathcal{S}(t)$ et $\mathcal{T}(t)$ sont des opérateurs caractéristiques donnés par

$$\mathcal{S}(t) = \int_0^\infty L^{-1}\xi_q(\theta)S(t^q\theta)d\theta \text{ et } \mathcal{T}(t) = q\int_0^\infty L^{-1}\theta\xi_q(\theta)S(t^q\theta)d\theta.$$

Ici, $S(t)$ est un C_0-semi-groupe généré par l'opérateur linéaire $ML^{-1} : Y \to Y$; ξ_q est une fonction de densité de probabilité définie sur $(0,\infty)$, où $\xi_q(\theta) \geq 0,\ \theta \in (0,\infty)$ et $\int_0^\infty \xi_q(\theta)d\theta = 1$.

Lemme 2.1.1. (voir [77, 78, 80]) *Les opérateurs $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$ sont fortement continus, i.e., pour $x \in X$ et $0 \leq t_1 < t_2 \leq b$, on a $||\mathcal{S}(t_2)x - \mathcal{S}(t_1)x|| \to 0$ et $||\mathcal{T}(t_2)x - \mathcal{T}(t_1)x|| \to 0$ quand $t_2 \to t_1$.*

Ci-dessous nous imposons les conditions suivantes sur les données de notre problème :

(i) Pour tout $t \geq 0$ fixé, $\mathcal{S}(t)$ et $\mathcal{T}(t)$ sont des opérateurs linéaires bornés, i.e., pour tout $x \in X$,

$$\|\mathcal{S}(t)x\| \leq CM_0\|x\|,\ \ \|\mathcal{T}(t)x\| \leq \frac{CM_0}{\Gamma(q)}\|x\|.$$

(ii) Les fonctions $f : J \times X \to Y,\ \sigma : J \times X \to L_2^0$ et $g : C\left(J : X\right) \to Y$ satisfont les conditions de la croissance linéaire et de Lipschitz. De plus, il existe des constantes positives $N_1, N_2 > 0,\ L_1, L_2 > 0$ et $k_1, k_2 > 0$ telle que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|^2 \leq N_1\|x-y\|^2,\ \ \|f(t,x)\|^2 \leq N_2(1 + \|x\|^2),$$

$$\|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\|^2_{L_2^0} \leq L_1\|x-y\|^2,\ \ \|\sigma(t,x)\|^2_{L_2^0} \leq L_2(1 + \|x\|^2),$$

$$\|g(x) - g(y)\|^2 \leq k_1\|x-y\|^2,\ \ \|g(x)\|^2 \leq k_2(1 + \|x\|^2).$$

(iii) Le système stochastique linéaire est approximativement contrôlable sur J. Pour chaque $0 \leq t < b$, l'opérateur $\alpha(\alpha I + \Psi_0^b)^{-1} \to 0$ dans la topologie forte des opérateurs quand $\alpha \to 0^+$, où $\Psi_0^b = \int_0^b (b-s)^{2(q-1)} \mathcal{T}(b-s) BB^* \mathcal{T}^*(b-s) ds$ est le Gramian de contrôlabilité, B^* est l'adjoint de B et $\mathcal{T}^*(t)$ représente l'adjoint de $\mathcal{T}(t)$.

Nous remarquons que le Système de contrôle déterministe linéaire fractionnaire non local de type Sobolev

$$^C D_t^q [Lx(t)] = Mx(t) + Bu(t), \ \ t \in J, \tag{2.5}$$

$$x(0) + g\left(x\left(t\right)\right) = x_0, \tag{2.6}$$

associé à (2.1)–(2.2) est approximativement contrôlable sur J ssi l'opérateur $\alpha(\alpha I + \Psi_0^b)^{-1} \to 0$ fortement quand $\alpha \to 0^+$. La contrôlabilité approchée pour le système de contrôle déterministe linéaire fractionnaire (2.5)–(2.6) est une généralisation naturelle de la contrôlabilité approchée du système de contrôle linéaire du premier ordre ($q = 1$ et L est l'identité) [29].

Définition 2.1.2. *Le système* (2.1)–(2.2) *est approximativement contrôlable sur* J *si* $\overline{\Re(b)} = L^2(\Omega, \Gamma_b, X)$, *où*

$$\Re(b) = \{x(b) = x(b,u) : u \in L^2_\Gamma(J, U)\},$$

où $L^2_\Gamma(J, U)$, *est le sous-espace fermé de* $L^2_\Gamma(J \times \Omega; U)$, *constitué de tous les processus stochastiques à valeurs dans* U, Γ_t*−adapté. Plus précisément,* (2.1)–(2.2) *est approximativement contrôlable sur* J *si :*

$$\forall h \in L^2(\Omega, \Gamma_b, X), \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists u \in L^2_\Gamma(J, U) \ / \ \mathbf{E} \left\| x\left(b\right) - h \right\|^2 < \epsilon.$$

Le lemme suivant est nécessaire pour définir la fonction de contrôle [69].

Lemme 2.1.2. *Pour tout* $\widetilde{x}_b \in L^2(\Gamma_b, X)$, *il existe* $\widetilde{\varphi} \in L^2_\Gamma(\Omega; L^2(0, b; L_2^0))$ *tel que* $\widetilde{x}_b = \mathbf{E}\widetilde{x}_b + \int_0^b \widetilde{\varphi}(s) dw(s)$.

Maintenant, pour tout $\alpha > 0$ et $\widetilde{x}_b \in L^2(\Gamma_b, X)$, nous définissons la fonction de contrôle sous la forme suivante

$$\begin{aligned} u^\alpha(t,x) &= B^*(b-t)^{q-1}\mathcal{T}^*(b-t)\Big[(\alpha I+\Psi_0^b)^{-1}\Big\{ \\ &\quad \mathbf{E}\widetilde{x}_b - \mathcal{S}(b)L\left[x_0 - g\left(x\right)\right]\Big\} + \int_0^t (\alpha I+\Psi_0^b)^{-1}\widetilde{\varphi}(s)dw(s)\Big] \\ &\quad -B^*(b-t)^{q-1}\mathcal{T}^*(b-t)\int_0^t (\alpha I+\Psi_0^b)^{-1}(b-s)^{q-1}\mathcal{T}(b-s)f(s,x(s))ds \\ &\quad -B^*(b-t)^{q-1}\mathcal{T}^*(b-t)\int_0^t (\alpha I+\Psi_0^b)^{-1}(b-s)^{q-1}\mathcal{T}(b-s)\sigma(s,x(s))dw(s). \end{aligned}$$

Lemme 2.1.3. *Il existe des constantes réelles positives $\hat{M}, \hat{N}$ telles que pour tout $x, y \in H_2$, on a*

$$\mathbf{E}\left|\left|u^\alpha(t,x) - u^\alpha(t,y)\right|\right|^2 \le \hat{M}\mathbf{E}\left|\left|x(t)-y(t)\right|\right|^2, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{E}\left|\left|u^\alpha(t,x)\right|\right|^2 \le \hat{N}\left(\frac{1}{b} + \mathbf{E}\left\|x(t)\right\|^2\right). \tag{2.8}$$

Preuve. Nous commençons à prouver (2.7). Soit $x, y \in H_2$, de l'inégalité de Hölder, le lemme 2.1.1 et l'hypothèse sur les données, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left|\left|u^\alpha(t,x) - u^\alpha(t,y)\right|\right|^2 \\ \le\ & 3\mathbf{E}\left\|B^*(b-t)^{q-1}\mathcal{T}^*(b-t)(\alpha I+\Psi_0^b)^{-1}\mathcal{S}(b)L\left[g\left(x\left(t\right)\right) - g\left(y\left(t\right)\right)\right]\right\|^2 \\ &+3\mathbf{E}\left\|B^*(b-t)^{q-1}\mathcal{T}^*(b-t)\int_0^t \hat{M}_1[f(s,x(s)) - f(s,y(s))]ds\right\|^2 \\ &+3\mathbf{E}\left\|B^*(b-t)^{q-1}\mathcal{T}^*(b-t)\int_0^t \hat{M}_1[\sigma(s,x(s)) - \sigma(s,y(s))]dw(s)\right\|^2 \\ \le\ & \frac{3}{\alpha^2}\left\|B\right\|^2(b)^{2q-2}(CM_0)^2\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^2\left\|L\right\|^2 k_1\mathbf{E}\left\|x(s)-y(s)\right\|^2 \\ &+\frac{3}{\alpha^2}\left\|B\right\|^2(b)^{2q-2}\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^4\frac{b^{2q-1}}{(2q-1)}N_1\int_0^t \mathbf{E}\left\|x(s)-y(s)\right\|^2 ds \\ &+\frac{3}{\alpha^2}\left\|B\right\|^2(b)^{2q-2}\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^4\frac{b^{2q-1}}{(2q-1)}L_1\int_0^t \mathbf{E}\left\|x(s)-y(s)\right\|^2 ds \\ \le\ & \hat{M}\mathbf{E}\left\|x(t)-y(t)\right\|^2, \end{aligned}$$

où

$$\hat{M}_1 = (\alpha I+\Psi_0^b)^{-1}(b-s)^{q-1}\mathcal{T}(b-s)$$

et

$$\begin{aligned}\hat{M} &= \frac{3}{\alpha^2}\|B\|^2(b)^{2q-2}\left\{(CM_0)^2\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^2\|L\|^2 k_1\right.\\ &\left.+\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^4\frac{b^{2q-1}}{(2q-1)}b[N_1+L_1]\right\}\end{aligned}$$

La preuve de l'inégalité (2.8) est similaire à celle de (2.7).

2.2 Contrôlabilité approchée

Dans cette section, nous formulons et prouvons les conditions pour les résultats d'existence et de la contrôlabilité approchée du système de contrôle dynamique stochastique fractionnaire non locale de type Sobolev (2.1)–(2.2) en utilisant le principe de l'application contractante.

Pour tout $\alpha > 0$, nous définissons l'opérateur $F_\alpha : H_2 \to H_2$ par

$$\begin{aligned}F_\alpha x(t) &= \mathcal{S}(t)L\left[x_0-g\left(x\right)\right]+\int_0^t(t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)[Bu^\alpha(s,x)+f(s,x(s))]ds\\ &+\int_0^t(t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\sigma(s,x(s))dw(s).\end{aligned} \tag{2.9}$$

Nous prouvons le lemme suivant, qui sera utilisé pour les principaux résultats.

Lemme 2.2.1. *Pour tout $x \in H_2$, $F_\alpha(x)(t)$ est continue sur J dans $L^2(\Gamma, X)$.*

Preuve. Soit $0 \leq t_1 < t_2 \leq b$. Alors pour tout $x \in H_2$ fixé, de (2.9), on a

$$\mathbf{E}\left\|(F_\alpha x)(t_2)-(F_\alpha x)(t_1)\right\|^2 \leq 4\left[\sum_{i=1}^{4}\mathbf{E}\left\|\Pi_i^x(t_2)-\Pi_i^x(t_1)\right\|^2\right].$$

Nous commençons avec le premier terme, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left\|\Pi_1^x(t_2)-\Pi_1^x(t_1)\right\|^2 &= \mathbf{E}\left\|(\mathcal{S}(t_2)-\mathcal{S}(t_1))\,L\left[x_0-g\left(x\right)\right]\right\|^2\\ &\leq \|L\|^2\left[\|x_0\|^2+k_2(1+\|x\|^2)\right]\mathbf{E}\|\mathcal{S}(t_2)-\mathcal{S}(t_1)\|^2.\end{aligned}$$

La continuité forte de $\mathcal{S}(t)$ implique que le côté droit de la dernière inégalité tend vers zéro quand $t_2 - t_1 \to 0$.

Ensuite, il résulte de l'inégalité de Hölder et des hypothèses sur les données que

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left\|\Pi_2^x(t_2)-\Pi_2^x(t_1)\right\|^2\\
=\ &\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_2}(t_2-s)^{q-1}\mathcal{T}(t_2-s)Bu^\alpha(s,x)ds-\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\mathcal{T}(t_1-s)Bu^\alpha(s,x)ds\right\|^2\\
\leq\ &\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}(\mathcal{T}(t_2-s)-\mathcal{T}(t_1-s))Bu^\alpha(s,x)ds\right\|^2\\
&+\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_1}((t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1})\mathcal{T}(t_2-s)Bu^\alpha(s,x)ds\right\|^2\\
&+\mathbf{E}\left\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}\mathcal{T}(t_2-s)Bu^\alpha(s,x)ds\right\|^2\\
\leq\ &\frac{t_1^{2q-1}}{2q-1}\int_0^{t_1}\mathbf{E}\left\|(\mathcal{T}(t_2-s)-\mathcal{T}(t_1-s))Bu^\alpha(s,x)ds\right\|^2\\
&+\left(\frac{CM_0\left\|B\right\|}{\Gamma(q)}\right)^2\left(\int_0^{t_1}((t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1})^2ds\right)\left(\int_0^{t_1}\mathbf{E}\left\|u^\alpha(s,x)\right\|^2ds\right)\\
&+\frac{(t_2-t_1)^{2q-1}}{1-2q}\left(\frac{CM_0\left\|B\right\|}{\Gamma(q)}\right)^2\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{E}\left\|u^\alpha(s,x)\right\|^2ds.
\end{aligned}$$

Aussi, nous avons

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left\|\Pi_3^x(t_2)-\Pi_3^x(t_1)\right\|^2\\
=\ &\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_2}(t_2-s)^{q-1}\mathcal{T}(t_2-s)f(s,x(s))ds-\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\mathcal{T}(t_1-s)f(s,x(s))ds\right\|^2\\
\leq\ &\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}(\mathcal{T}(t_2-s)-\mathcal{T}(t_1-s))f(s,x(s))ds\right\|^2\\
&+\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_1}((t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1})\mathcal{T}(t_2-s)f(s,x(s))ds\right\|^2\\
&+\mathbf{E}\left\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}\mathcal{T}(t_2-s)f(s,x(s))ds\right\|^2\\
\leq\ &\frac{t_1^{2q-1}}{2q-1}\int_0^{t_1}\mathbf{E}\left\|(\mathcal{T}(t_2-s)-\mathcal{T}(t_1-s))f(s,x(s))ds\right\|^2\\
&+\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^2\left(\int_0^{t_1}((t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1})^2ds\right)\left(\int_0^{t_1}\mathbf{E}\left\|f(s,x(s))\right\|^2ds\right)\\
&+\frac{(t_2-t_1)^{2q-1}}{1-2q}\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^2\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{E}\left\|f(s,x(s))\right\|^2ds.
\end{aligned}$$

D'autre part, nous utilisons le lemme 2.1.1. et les hypothèses précédentes, on obtient

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}\left\|\Pi_4^x(t_2)-\Pi_4^x(t_1)\right\|^2 \\
= & \mathbf{E}\left\|\int_0^{t_2}(t_2-s)^{q-1}\mathcal{T}(t_2-s)\sigma(s,x(s))dw(s)-\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\mathcal{T}(t_1-s)\sigma(s,x(s))dw(s)\right\|^2 \\
\leq & \mathbf{E}\left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}(\mathcal{T}(t_2-s)-\mathcal{T}(t_1-s))\sigma(s,x(s))dw(s)\right\|^2 \\
& +\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_1}((t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1})\mathcal{T}(t_2-s)\sigma(s,x(s))dw(s)\right\|^2 \\
& +\mathbf{E}\left\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}\mathcal{T}(t_2-s)\sigma(s,x(s))dw(s)\right\|^2 \\
\leq & L_\sigma\frac{t_1^{2q-1}}{2q-1}\int_0^{t_1}\mathbf{E}\left\|(\mathcal{T}(t_2-s)-\mathcal{T}(t_1-s))\sigma(s,x(s))ds\right\|^2 \\
& +L_\sigma\left(\int_0^{t_1}((t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1})^2ds\right)\left(\int_0^{t_1}\mathbf{E}\left\|\mathcal{T}(t_2-s)\sigma(s,x(s))\right\|^2ds\right) \\
& +L_\sigma\frac{(t_2-t_1)^{2q-1}}{1-2q}\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^2\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{E}\left\|\mathcal{T}(t_2-s)\sigma(s,x(s))\right\|^2ds.
\end{aligned}$$

À l'aide de la continuité forte de $\mathcal{T}(t)$ et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, nous concluons que le côté droit des inégalités ci-dessus tend vers zéro quand $t_2-t_1\to 0$. Ainsi, nous concluons que $F_\alpha(x)(t)$ est continue à droite de $[0,b)$. Une manière similaire de la preuve montre qu'il est continu à gauche de $(0,b]$.

Théorème 2.1.1. *Supposons les hypothèses (i) et (ii) sont satisfaites. Alors, le système* (2.1)–(2.2) *a une solution mild sur* J.

Preuve. Nous démontrons l'existence d'un point fixe de l'opérateur F_α en utilisant le principe de l'application contractante. Nous montrons en premier, que $F_\alpha(H_2)\subset H_2$. Soit $x\in H_2$. De (2.9), nous obtenons

$$\mathbf{E}\left\|F_\alpha x(t)\right\|^2\leq 4\left[\sup_{t\in J}\sum_{i=1}^4\mathbf{E}\left\|\Pi_i^x(t)\right\|^2\right]. \tag{2.10}$$

En utilisant les hypothèses (i)-(ii), le lemme 2.1.3., et des calculs standards on obtient

$$\sup_{t\in J}\mathbf{E}\left\|\Pi_1^x(t)\right\|^2\leq C^2M_0^2\|L\|^2\left[\|x_0\|^2+k_2(1+\|x\|^2)\right] \tag{2.11}$$

et

$$\sup_{t\in J}\sum_{i=2}^{4}\mathbf{E}\left\|\Pi_i^x(t)\right\|^2 \leq \left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^2 \frac{b^{2q-1}}{2q-1}\left\|B\right\|^2\hat{N}\left(\frac{1}{b}+\|x\|_{H_2}^2\right)$$
$$+\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^2\left[\frac{b^{2q-1}}{2q-1}N_2-\frac{b^{2q-1}}{2q-1}L_2L_\sigma\right]\left(1+\|x\|_{H_2}^2\right). \qquad (2.12)$$

Par conséquent (2.10)–(2.12) impliquant $\mathbf{E}\,||F_\alpha x||_{H_2}^2<\infty$. Par le lemme 2.2.1., $F_\alpha x\in H_2$. Ainsi, pour chaque $\alpha>0$, l'opérateur F_α applique H_2 sur lui même. Ensuite, nous utilisons le théorème de point fixe de Banach pour prouver que F_α a un unique point fixe dans H_2. Nous supposons qu'il existe un n naturelle telle que F_α^n est une contraction de H_2. En effet, soit $x,y\in H_2$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|(F_\alpha x)(t)-(F_\alpha y)(t)\right\|^2 &\leq 4\sum_{i=1}^{4}\mathbf{E}\left\|\Pi_i^x(t)-\Pi_i^y(t)\right\|^2\\
&\leq 4k_1C^2M_0^2\|L\|^2\mathbf{E}\|x(t)-y(t)\|^2\\
&+ 4\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^2\left[\hat{M}\|B\|^2\frac{b^{2q-1}}{2q-1}+\frac{b^{2q-1}}{2q-1}N_1+\frac{b^{2q-1}}{2q-1}L_1L_\sigma\right]\\
&\quad\times\mathbf{E}\left\|x(t)-y(t)\right\|^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient une constante réelle positive $\gamma(\alpha)$ telle que

$$\mathbf{E}\left\|(F_\alpha x)(t)-(F_\alpha y)(t)\right\|^2\leq\gamma(\alpha)\mathbf{E}\left\|x(t)-y(t)\right\|^2, \qquad (2.13)$$

pour tout $t\in J$ et tout $x,y\in H_2$. Pour tout nombre naturel n, il résulte de l'itération successive de l'inégalité ci-dessus (2.13) que, en prenant la borne supérieure sur J,

$$\left\|(F_\alpha^n x)(t)-(F_\alpha^n y)(t)\right\|_{H_2}^2\leq\frac{\gamma^n(\alpha)}{n!}\left\|x-y\right\|_{H_2}^2. \qquad (2.14)$$

Pour tout $\alpha>0$ fixé, pour n suffisamment grand, $\frac{\gamma^n(\alpha)}{n!}<1$. Il résulte de (2.14) que F_α^n est une contraction, ainsi que le principe de contraction assure que l'opérateur F_α a un unique point fixe x_α dans H_2, qui est une solution mild de (2.1)–(2.2).

Théorème 2.1.2. *Supposons que les hypothèses (i) - (iii) sont satisfaites, de plus si les fonctions f et σ sont uniformément bornées et $\{\mathcal{T}(t):t\geq 0\}$ est compact, alors le système* (2.1)–(2.2) *est approximativement contrôlable sur J.*

Preuve. Soit x_α un point fixe de F_α. En utilisant le théorème de Fubini stochastique, on peut avoir facilement que

$$\begin{aligned}
x_\alpha(b) &= \widetilde{x}_b - \alpha(\alpha I + \Psi)^{-1}\left(E\widetilde{x}_b - \mathcal{S}(b)L\left[x_0 - g\left(x\right)\right]\right) \\
&\quad + \alpha\int_0^b (\alpha I + \Psi_s^b)^{-1}(b-s)^{q-1}\mathcal{T}(b-s)f(s, x_\alpha(s))ds \\
&\quad + \alpha\int_0^b (\alpha I + \Psi_s^b)^{-1}[(b-s)^{q-1}\mathcal{T}(b-s)\sigma(s, x_\alpha(s)) - \widetilde{\varphi}(s)]dw(s).
\end{aligned}$$

Il résulte de l'hypothèse sur $f,\ g$ et σ qu'il existe $\hat{D} > 0$ tel que

$$\|f(s, x_\alpha(s))\|^2 + \|g(x_\alpha(s))\|^2 + \|\sigma(s, x_\alpha(s))\|^2 \leq \hat{D} \tag{2.15}$$

pour tout $s \in J$. Alors, il se trouve une sous-suite notée par
$\{f(s, x_\alpha(s)), g(x_\alpha(s)), \sigma(s, x_\alpha(s))\}$ qui converge faiblement à certains $\{f(s), g(s), \sigma(s)\}$ dans $Y^2 \times L_2^0$.

De l'équation précédente, nous avons

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left\|x_\alpha(b) - \tilde{x}_b\right\|^2 \\
&\leq 8\mathbf{E}\left\|\alpha(\alpha I + \Psi_0^b)^{-1}(\mathbf{E}\tilde{x}_b - \mathcal{S}(b)Lx_0)\right\|^2 \\
&+8\mathbf{E}\|\alpha(\alpha I + \Psi_0^b)^{-1}\|^2\|\mathcal{S}(b)L(g(x_\alpha(s)) - g(s))\|^2 \\
&+8\mathbf{E}\|\alpha(\alpha I + \Psi_0^b)^{-1}\|^2\|\mathcal{S}(b)Lg(s)\|^2 \\
&+8\mathbf{E}\left(\int_0^b (b-s)^{q-1}\left\|\alpha(\alpha I + \Psi_s^b)^{-1}\widetilde{\varphi}(s)\right\|_{L_2^0}^2 ds\right) \\
&+8\mathbf{E}\left(\int_0^b (b-s)^{q-1}\left\|\alpha(\alpha I + \Psi_s^b)^{-1}\right\|\left\|\mathcal{T}(b-s)(f(s, x_\alpha(s)) - f(s))\right\| ds\right)^2 \\
&+8\mathbf{E}\left(\int_0^b (b-s)^{q-1}\left\|\alpha(\alpha I + \Psi_s^b)^{-1}\mathcal{T}(b-s)f(s)\right\| ds\right)^2 \\
&+8\mathbf{E}\left(\int_0^b (b-s)^{q-1}\left\|\alpha(\alpha I + \Psi_s^b)^{-1}\right\|\left\|\mathcal{T}(b-s)(\sigma(s, x_\alpha(s)) - \sigma(s))\right\|_{L_2^0}^2 ds\right) \\
&+8\mathbf{E}\left(\int_0^b (b-s)^{q-1}\left\|\alpha(\alpha I + \Psi_s^b)^{-1}\mathcal{T}(b-s)\sigma(s)\right\|_{L_2^0}^2 ds\right).
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (iii), pour tout $0 \leq s < b$ l'opérateur $\alpha(\alpha I + \Psi_s^b)^{-1} \to 0$ fortement quand $\alpha \to 0^+$ et de plus $\|\alpha(\alpha I + \Psi_s^b)^{-1}\| \leq 1$. Ainsi, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue et la compacité des deux opérateurs $\mathcal{S}(t)$ et $\mathcal{T}(t)$ implique que $\mathbf{E}\|x_\alpha(b) - \tilde{x}_b\|^2 \to 0$ quand $\alpha \to 0^+$. Par conséquent, la contrôlabilité approchée de (2.1)–(2.2) a été prouvée.

Afin d'illustrer les résultats abstraits de ce chapitre, nous donnons l'exemple suivant.

2.3 Exemple

Considérons le système stochastique fractionnaire de type Sobolev avec condition non-locale

$$\frac{\partial^q}{\partial t^q}\left[x\left(t,z\right) - x_{zz}\left(t,z\right)\right] - \frac{\partial^2}{\partial z^2} x\left(t,z\right) = \mu\left(t,z\right) + \hat{f}\left(t, x\left(t,z\right)\right) + \hat{\sigma}\left(t, x\left(t,z\right)\right) \frac{d\hat{w}\left(t\right)}{dt}, \quad (2.16)$$

$$x\left(0,z\right) + \sum_{k=1}^{m} c_k x(z,t_k) = x_0\left(z\right), \quad z \in [0,1], \quad (2.17)$$

$$x\left(0,t\right) = x\left(1,t\right) = 0, \quad t \in J, \quad (2.18)$$

où $0 < q \leq 1,\ 0 < t_1 < ... < t_m < b$ et c_k sont des constantes positives, $k = 1, ..., m$; les fonctions $x(t)(z) = x(z,t),\ f(t,x(t))(z) = \hat{f}(t, x(z,t)),\ \sigma(t,x(t))(z) = \hat{\sigma}(t, x(z,t))$ et $g(x(t))(z) = \sum_{k=1}^{m} c_k x(z,t_k)$. L'opérateur linéaire borné $B : U \to X$ est défini par $Bu(t)(z) = \mu(z,t),\ 0 \leq z \leq 1,\ u \in U;\ \hat{w}\left(t\right)$ est un mouvement Brownien standard unidimensionel défini sur l'espace de probabilité filtré (Ω, Γ, P).

Soit $X = E = U = L^2[0,1]$, on définit les opérateurs $L : D(L) \subset X \to Y$ et $M : D(M) \subset X \to Y$ par $Lx = x - x''$ et $Mx = -x''$ où les domaines $D(L)$ et $D(M)$ sont donnés par

$$\{x \in X : x, x'' \text{ sont absolument continues},\ x'' \in X,\ x(0) = x(1) = 0\}.$$

Les opérateurs L et M peuvent être écrits respectivement

$$\begin{aligned} Lx &= \sum_{n=1}^{\infty}(1+n^2)(x,x_n)x_n, \quad x \in D(L) \\ Mx &= \sum_{n=1}^{\infty} -n^2(x,x_n)x_n, \quad x \in D(M), \end{aligned}$$

où $x_n(z) = \left(\sqrt{2/\pi}\right)\sin nz,\ n = 1, 2, ...$ est l'ensemble orthogonal de fonctions propres de M. De plus, pour tout $x \in X$ nous avons

$$\begin{aligned} L^{-1}x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}(x,x_n)x_n, \\ ML^{-1}x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n^2}{1+n^2}(x,x_n)x_n, \end{aligned}$$

$$S(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-n^2t}{1+n^2}\right)(x,x_n)x_n.$$

Il est facile de voir que L^{-1} est compact, borné avec $||L^{-1}|| \leq 1$ et ML^{-1} génère le semi-groupe fortement continu ci-dessus $S(t)$ sur Y avec $||S(t)|| \leq e^{-t} \leq 1$. Par conséquent, avec les choix ci-dessus, le système (2.16)–(2.18) peut s'écrire comme une formulation abstraite de (2.1)–(2.2) et ainsi le Théorème 2.1.1. permet de garantir l'existence d'une solution mild de (2.16)–(2.18). D'autre part, il est facile de voir que le système de contrôle déterministe linéaire fractionnaire de type Sobolev correspond à (2.16)–(2.18) est approximativement contrôlable sur J, ce qui signifie que toutes les conditions du Théorème 2.1.2. sont satisfaites. Ainsi, le système de contrôle stochastique fractionnaire de type Sobolev (2.16)–(2.18) est approximativement contrôlable sur J.

Chapitre 3

Contrôlabilité approchée des équations différentielles stochastiques fractionnaires non linéaires non locales de type Sobolev dans les espaces de Hilbert

Dans ce chapitre nous présentons un nouveau concept dans l'analyse stochastique que nous nous présentons une condition non locale donnée en terme stochastique avec la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, puis nous utilisons cet outil pour établir la contrôlabilité approchée d'une classe d'équations différentielles stochastiques fractionnaires non linéaires de type Sobolev dans les espaces de Hilbert. Nous utilisons l'inégalité de Hölder, la technique du point fixe, le calcul fractionnaire, l'analyse stochastique et quelques méthodes adoptées directement dans les problèmes de contrôle déterministes pour les principaux résultats. Un nouvel ensemble de conditions suffisantes est formulé et prouvé pour le système de contrôle stochastique fractionnaire approximativement contrôlable. Un exemple est donné pour illustrer les résultats abstraits.

3.1 Position du problème

Nous sommes concerné par le système stochastique fractionnaire non-local de type Sobolev suivant :

$$^{C}D_t^q[Lx(t)] = Mx(t) + Bu(t) + f(t, x(t)) + \sigma_1(t, x(t))\frac{dw_1(t)}{dt}, \tag{3.1}$$

$$^{L}D_t^{1-q}x(t)|_{t=0} = \sigma_2(t, x(t))\frac{dw_2(t)}{dt}, \tag{3.2}$$

où $^{C}D_t^q$ et $^{L}D_t^{1-q}$ sont la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et Riemann–Liouville d'ordre q, $0 < q \leq 1$, et $t \in J = [0, b]$. Soient X et Y deux espaces de Hilbert, et l'état $x(\cdot)$ prend ses valeurs dans X. Supposons que les opérateurs $L : \ D(L) \subset X \to Y$ et $M : \ D(M) \subset X \to Y$. La fonction de contrôle $u(\cdot) \in L_\Gamma^2(J, U)$, l'espace des fonctions de contrôles admissibles avec U est un espace de Hilbert. B est un opérateur linéaire borné de U dans Y ; $f : J \times X \to Y$, $\sigma_1 : J \times X \to L_2^0$ et $\sigma_2 : J \times X \to L_2^0$ sont des fonctions appropriées ; x_0 est une variable aléatoire à valeurs dans X, Γ_0- mesurable indépendante de w_1 et w_2.

Il convient de réécrire le problème (3.1)-(3.2) selon l'équation intégrale équivalente

$$\begin{aligned} Lx\,(t) &= Lx\,(0) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1}[Mx(s) + Bu(s) + f(s,x(s))]ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1}\sigma_1(s,x(s))dw_1(s), \end{aligned} \tag{3.3}$$

à condition que l'intégrale dans (3.3) existe.

Remarque 3.1.1. Notons que :

(a) Pour la condition non locale, la fonction $x(0)$ dépend de t.

(b) La dérivée fractionnaire au sens de Riemann–Liouville de $x(0)$ est bien définie et ${}^{L}D_t^{1-q}x(0) \neq 0$.

(c) La fonction $x(0)$ prend la forme $x_0 + \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_0^t (t-s)^{-q}\sigma_2(s,x(s))dw_2(s)$, où $x(0)|_{t=0} = x_0$.

(d) Les intégrales explicites et implicites données dans (3.3) existent (prises au sens de Bochner).

Soit $\left(\Omega, \Gamma, (\Gamma_t)_{t\in J}, P\right)$ un espace probabilisé filtré. Nous considérons quatre espaces de Hilbert séparables réels $X,\ Y,\ E$ et U, w_1 et w_2 deux processus $Q-$Wiener sur (Ω, Γ_b, P) avec Q est l'opérateur de covariance, linéaire et borné tel que $trQ < \infty$. Nous supposons qu'il existe des systèmes orthonormaux complets $\{e_{1,n}\}_{n\geq 1}, \{e_{2,n}\}_{n\geq 1}$ dans E, suites bornées de nombres réels positifs $\{\lambda_{1,n}\}, \{\lambda_{2,n}\}$ tels que $Qe_{1,n} = \lambda_{1,n}e_{1,n}, Qe_{2,n} = \lambda_{2,n}e_{2,n}, n = 1, 2, ...$, et suites $\{\beta_{1,n}\}_{n\geq 1}, \{\beta_{2,n}\}_{n\geq 1}$ de mouvements browniens indépendants tels que

$$\langle w_1(t), e_1 \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_{1,n}}\, \langle e_{1,n}, e_1 \rangle\, \beta_{1,n}(t), \quad e_1 \in E,\ t \in J,$$

$$\langle w_2(t), e_2 \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_{2,n}}\, \langle e_{2,n}, e_2 \rangle\, \beta_{2,n}(t), \quad e_2 \in E,\ t \in J,$$

et $\Gamma_t = \Gamma_t^{w_1,w_2}$, où $\Gamma_t^{w_1,w_2}$ est la sigma algèbre engendrée par $\{(w_1(s), w_2(s)) : 0 \leq s \leq t\}$. Soit $L_2^0 = L_2\left(Q^{1/2}E, X\right)$ l'espace de tous les opérateurs Hilbert-Schmidt de $Q^{1/2}E$ en X muni de la norme $\|\psi\|_{L_2^0}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left\|\psi Q^{\frac{1}{2}}e_k\right\|^2 = tr\,[\psi Q \psi^*]$, $\psi \in L_2^0$, où $\{e_k\}$ est un système orthonormé complet dans E. Soit $L_2(\Gamma_b, X)$ l'espace de Banach de toutes les variables aléatoires à valeurs dans l'espace de Hilbert X, carrés intégrables et Γ_b-mesurables. $\mathbf{E}(\cdot)$ désigne l'espérance par rapport la mesure P. Soit $C(J, L^2(\Gamma, X))$ l'espace de Hilbert des applications continues de J en $L^2(\Gamma, X)$ tel que $\sup_{t\in J} E\,||x(t)||^2 < \infty$. Soit $H_2(J, X)$ le sous-espace fermé de $C(J, L^2(\Gamma, X))$ constitué de processus à valeurs dans X et Γ_t-mesurable $x \in C(J; L^2(\Gamma, X))$ muni de la norme $||x||_{H_2} = (\sup_{t\in J} E\,||x(t)||_X^2)^{1/2}$
Maintenant, nous présentons la solution mild du problème (3.1)-(3.2)

Définition 3.1.1. (comparer avec [27, 32] et [34, 80]) *Un processus stochastique $x \in H_2(J, X)$ est une solution mild de (3.1)–(3.2) si pour chaque contrôle $u \in L_\Gamma^2(J, U)$, elle satisfait l'équation intégrale suivante,*

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & \mathcal{S}(t)L\left[x_0 + \frac{1}{\Gamma(1-q)}\int_0^t (t-s)^{-q}\sigma_2(s, x(s))dw_2(s)\right] \\ & & + \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)[Bu(s) + f(s, x(s))]ds \\ & & + \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\sigma_1(s, x(s))dw(s), \end{array} \tag{3.4}$$

où $\mathcal{S}(t)$ et $\mathcal{T}(t)$ sont des opérateurs caractéristiques donnés par

$$\mathcal{S}(t) = \int_0^\infty L^{-1}\xi_q(\theta)S(t^q\theta)d\theta \quad \text{et} \quad \mathcal{T}(t) = q\int_0^\infty L^{-1}\theta\xi_q(\theta)S(t^q\theta)d\theta.$$

Ici, $S(t)$ est un C_0-semi-groupe engendré par l'opérateur linéaire $ML^{-1} : Y \to Y$; ξ_q est une fonction de densité de probabilité définie sur $(0, \infty)$, où $\xi_q(\theta) \geq 0,\ \theta \in (0, \infty)$ et $\int_0^\infty \xi_q(\theta)d\theta = 1$.

Ci-dessous nous imposons les conditions suivantes sur les données de notre problème :

(i) Pour tout $t \geq 0$ fixé, $\mathcal{S}(t)$ et $\mathcal{T}(t)$ sont des opérateurs linéaires bornés, i.e., pour tout $x \in X$,

$$\|\mathcal{S}(t)x\| \leq CM_0\|x\|, \ \ \|\mathcal{T}(t)x\| \leq \frac{CM_0}{\Gamma(q)}\|x\|.$$

(ii) Les fonctions $f : J \times X \to Y,\ \sigma_1 : J \times X \to L_2^0$ et $\sigma_2 : J \times X \to L_2^0$ satisfont les conditions de la croissance linéaire et de Lipschitz. De plus, il existe des constantes positives $N_1, N_2 > 0,\ L_1, L_2 > 0$ et $k_1, k_2 > 0$ telle que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|^2 \leq N_1\|x-y\|^2,\ \ \|f(t,x)\|^2 \leq N_2(1+\|x\|^2),$$

$$\|\sigma_1(t,x) - \sigma_1(t,y)\|_{L_2^0}^2 \leq L_1\|x-y\|^2,\ \ \|\sigma_1(t,x)\|_{L_2^0}^2 \leq L_2(1+\|x\|^2),$$

$$\|\sigma_2(t,x) - \sigma_2(t,y)\|_{L_2^0}^2 \leq k_1\|x-y\|^2,\ \ \|\sigma_2(t,x)\|_{L_2^0}^2 \leq k_2(1+\|x\|^2).$$

(iii) Le système stochastique linéaire est approximativement contrôlable sur J.

Pour chaque $0 \leq t < b$, l'opérateur $\alpha(\alpha I + \Psi_0^b)^{-1} \to 0$ dans la topologie forte des opérateurs quand $\alpha \to 0^+$, où $\Psi_0^b = \int_0^b (b-s)^{2(q-1)}\mathcal{T}(b-s)BB^*\mathcal{T}^*(b-s)ds$ est le Gramian de contrôlabilité, B^* est l'adjoint de B et $\mathcal{T}^*(t)$ représente l'adjoint de $\mathcal{T}(t)$. Nous remarquons que le système de contrôle déterministe linéaire fractionnaire non local de type Sobolev

$$^C D_t^q[Lx(t)] = Mx(t) + Bu(t),\ \ t \in J, \tag{3.5}$$

$$x(0) = x_0, \tag{3.6}$$

associé à (3.1)–(3.2) est approximativement contrôlable sur J ssi l'opérateur $\alpha(\alpha I + \Psi_0^b)^{-1} \to 0$ fortement quand $\alpha \to 0^+$. La contrôlabilité approchée pour le système de contrôle déterministe linéaire fractionnaire (3.5)–(3.6) est une généralisation naturelle de la contrôlabilité approchée du système de contrôle linéaire du premier ordre ($q = 1$ et L est l'identité).

Définition 3.1.2. *Le système* (3.1)–(3.2) *est approximativement contrôlable sur* J *si* $\overline{\Re(b)} = L^2(\Omega, \Gamma_b, X)$, *où*

$$\Re(b) = \{x(b) = x(b,u) : u \in L_\Gamma^2(J,U)\},$$

où $L_\Gamma^2(J,U)$, *est le sous-espace fermé de* $L_\Gamma^2(J \times \Omega; U)$, *constitué de tous les processus stochastiques à valeurs dans* U, Γ_t-*adapté.*

Maintenant, pour tout $\alpha > 0$ et $\widetilde{x}_b \in L^2(\Gamma_b, X)$, nous définissons la fonction de contrôle sous la forme suivante

$$
\begin{aligned}
& u^\alpha(t,x) \\
= \quad & B^*(b-t)^{q-1}\mathcal{T}^*(b-t)\Big[(\alpha I + \Psi_0^b)^{-1}\Big\{E\widetilde{x}_b \\
& -\mathcal{S}(b)L\left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(1-q)}\int_0^t (t-s)^{-q}\sigma_2(s,x(s))dw_2(s)\right)\Big\} + \int_0^t (\alpha I + \Psi_0^b)^{-1}\widetilde{\varphi}(s)dw_1(s)\Big] \\
& -B^*(b-t)^{q-1}\mathcal{T}^*(b-t)\int_0^t (\alpha I + \Psi_0^b)^{-1}(b-s)^{q-1}\mathcal{T}(b-s)f(s,x(s))ds \\
& -B^*(b-t)^{q-1}\mathcal{T}^*(b-t)\int_0^t (\alpha I + \Psi_0^b)^{-1}(b-s)^{q-1}\mathcal{T}(b-s)\sigma_1(s,x(s))dw_1(s).
\end{aligned}
$$

Lemme 3.1.1. *Il existe des constantes réelles positives $\hat{M}, \hat{N}$ telle que pour tout $x, y \in H_2$, on a*

$$\mathbf{E}\,||u^\alpha(t,x) - u^\alpha(t,y)||^2 \le \hat{M}\mathbf{E}\,||x(t) - y(t)||^2, \tag{3.7}$$

$$\mathbf{E}\,||u^\alpha(t,x)||^2 \le \hat{N}\left(\frac{1}{b} + \mathbf{E}\,\|x(t)\|^2\right). \tag{3.8}$$

Preuve. Nous commençons à prouver (3.7). Soit $x, y \in H_2$, de l'inégalité de Hölder, le lemme 2.1.1 et l'hypothèse sur les données, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{E}\,||u^\alpha(t,x) - u^\alpha(t,y)||^2 \\
\le \quad & 3\mathbf{E}\Bigg\|B^*(b-t)^{q-1}\mathcal{T}^*(b-t)(\alpha I + \Psi_0^b)^{-1}\frac{\mathcal{S}(b)L}{\Gamma(1-q)} \\
& \qquad \times \int_0^t (t-s)^{-q}[\sigma_2(s,x(s)) - \sigma_2(s,y(s))]dw_2(s)\Bigg\|^2 \\
& +3\mathbf{E}\left\|B^*(b-t)^{q-1}\mathcal{T}^*(b-t)\int_0^t \hat{M}_1[f(s,x(s)) - f(s,y(s))]ds\right\|^2 \\
& +3\mathbf{E}\left\|B^*(b-t)^{q-1}\mathcal{T}^*(b-t)\int_0^t \hat{M}_1[\sigma_1(s,x(s)) - \sigma_1(s,y(s))]dw_1(s)\right\|^2 \\
\le \quad & \frac{3}{\alpha^2}\|B\|^2(b)^{2q-2}\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^2\left(\frac{CM_0\|L\|}{\Gamma(1-q)}\right)^2\frac{b^{-2q+1}}{(-2q+1)}k_1\int_0^t \mathbf{E}\,\|x(s) - y(s)\|^2 ds \\
& +\frac{3}{\alpha^2}\|B\|^2(b)^{2q-2}\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^4\frac{b^{2q-1}}{(2q-1)}N_1\int_0^t \mathbf{E}\,\|x(s) - y(s)\|^2 ds \\
& +\frac{3}{\alpha^2}\|B\|^2(b)^{2q-2}\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^4\frac{b^{2q-1}}{(2q-1)}L_1\int_0^t \mathbf{E}\,\|x(s) - y(s)\|^2 ds \\
\le \quad & \hat{M}E\,\|x(t) - y(t)\|^2,
\end{aligned}
$$

où

$$\hat{M}_1 = (\alpha I + \Psi_0^b)^{-1}(b-s)^{q-1}\mathcal{T}(b-s)$$

et

$$\begin{aligned}\hat{M} &= \frac{3}{\alpha^2}\|B\|^2(b)^{2q-2}\left\{\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^2\left(\frac{CM_0\|L\|}{\Gamma(1-q)}\right)^2\frac{b^{-2q+1}}{(-2q+1)}bk_1\right.\\ &\left.+\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^4\frac{b^{2q-1}}{(2q-1)}b[N_1+L_1]\right\}\end{aligned}$$

La preuve de l'inégalité (3.8) est similaire à celle de (3.7).

3.2 Contrôlabilité approchée

Dans cette section, nous formulons et prouvons les conditions pour les résultats d'existence et de la contrôlabilité approchée du système de contrôle dynamique stochastique fractionnaire non local de type Sobolev (3.1)–(3.2) en utilisant le principe de l'application contractante. Pour tout $\alpha > 0$, nous définissons l'opérateur $F_\alpha : H_2 \to H_2$ par

$$\begin{aligned}F_\alpha x(t) &= \mathcal{S}(t)L\left[x_0 + \tfrac{1}{\Gamma(1-q)}\int_0^t (t-s)^{-q}\sigma_2(s,x(s))dw_2(s)\right]\\ &+ \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)[Bu^\alpha(s,x)+f(s,x(s))]ds\\ &+ \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)\sigma_1(s,x(s))dw(s).\end{aligned} \tag{3.9}$$

Nous prouvons le lemme suivant, qui sera utilisé pour les principaux résultats.

Lemme 3.2.1. *Pour tout $x \in H_2$, $F_\alpha(x)(t)$ est continue sur J dans $L^2(\Gamma, X)$.*

Preuve. Soit $0 \le t_1 < t_2 \le b$. Alors pour tout $x \in H_2$ fixé, de (3.9), on a

$$\mathbf{E}\,\|(F_\alpha x)(t_2) - (F_\alpha x)(t_1)\|^2 \le 4\left[\sum_{i=1}^4 \mathbf{E}\,\|\Pi_i^x(t_2) - \Pi_i^x(t_1)\|^2\right].$$

De Lemme 2.1.1., nous commençons avec le premier terme

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}\left\|\Pi_1^x(t_2) - \Pi_1^x(t_1)\right\|^2 \\
= \ & \mathbf{E}\Bigg\|\mathcal{S}(t_2)L\left[x_0 + \frac{1}{\Gamma(1-q)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{-q}\sigma_2(s,x(s))dw_2(s)\right] \\
& \quad -\mathcal{S}(t_1)L\left[x_0 + \frac{1}{\Gamma(1-q)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{-q}\sigma_2(s,x(s))dw_2(s)\right]\Bigg\|^2 \\
\leq \ & \mathbf{E}\left\|\left(\mathcal{S}(t_2)-\mathcal{S}(t_1)\right)L\left[\frac{1}{\Gamma(1-q)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{-q}\sigma_2(s,x(s))dw_2(s)\right]\right\|^2 \\
& +\mathbf{E}\left\|\mathcal{S}(t_2)L\left[\frac{1}{\Gamma(1-q)}\int_0^{t_1}((t_2-s)^{-q}-(t_1-s)^{-q})\sigma_2(s,x(s))dw_2(s)\right]\right\|^2 \\
& +\mathbf{E}\left\|\mathcal{S}(t_2)L\left[\frac{1}{\Gamma(1-q)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{-q}\sigma_2(s,x(s))dw_2(s)\right]\right\|^2 \\
\leq \ & \|L\|^2\left[L_\sigma\frac{t_1^{-2q+1}}{(-2q+1)}\left(\frac{1}{\Gamma(1-q)}\right)^2 k_2(1+\|x\|^2)\right]\mathbf{E}\|\mathcal{S}(t_2)-\mathcal{S}(t_1)\|^2 \\
& +\|\mathcal{S}(t_2)\|^2\|L\|^2\Bigg[\left(\frac{1}{\Gamma(1-q)}\right)^2 L_\sigma\left(\int_0^{t_1}((t_2-s)^{-q}-(t_1-s)^{-q})^2ds\right) \\
& \qquad \times\left(\int_0^{t_1}\mathbf{E}\|\sigma_2(s,x(s))\|^2ds\right)\Bigg] \\
& +\|\mathcal{S}(t_2)\|^2\|L\|^2\left[\left(\frac{1}{\Gamma(1-q)}\right)^2\frac{(t_2-t_1)^{-2q+1}}{(-2q+1)}L_\sigma\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{E}\|\sigma_2(s,x(s))\|^2ds\right]
\end{aligned}$$

La continuité forte de $\mathcal{S}(t)$ implique que le côté droit de la dernière inégalité tend vers zéro quand $t_2 - t_1 \to 0$.

Ensuite, il résulte de l'inégalité de Hölder et des hypothèses sur les données que

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}\left\|\Pi_2^x(t_2)-\Pi_2^x(t_1)\right\|^2 \\
= & \mathbf{E}\left\|\int_0^{t_2}(t_2-s)^{q-1}\mathcal{T}(t_2-s)Bu^\alpha(s,x)ds-\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\mathcal{T}(t_1-s)Bu^\alpha(s,x)ds\right\|^2 \\
\leq & \mathbf{E}\left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}(\mathcal{T}(t_2-s)-\mathcal{T}(t_1-s))Bu^\alpha(s,x)ds\right\|^2 \\
& +\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_1}((t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1})\mathcal{T}(t_2-s)Bu^\alpha(s,x)ds\right\|^2 \\
& +\mathbf{E}\left\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}\mathcal{T}(t_2-s)Bu^\alpha(s,x)ds\right\|^2 \\
\leq & \frac{t_1^{2q-1}}{2q-1}\int_0^{t_1}\mathbf{E}\left\|(\mathcal{T}(t_2-s)-\mathcal{T}(t_1-s))Bu^\alpha(s,x)ds\right\|^2 \\
& +\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^2\|B\|^2\left(\int_0^{t_1}((t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1})^2ds\right)\left(\int_0^{t_1}\mathbf{E}\left\|u^\alpha(s,x)\right\|^2ds\right) \\
& +\frac{(t_2-t_1)^{2q-1}}{1-2q}\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^2\|B\|^2\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{E}\left\|u^\alpha(s,x)\right\|^2ds.
\end{aligned}$$

Aussi, nous avons

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}\left\|\Pi_3^x(t_2)-\Pi_3^x(t_1)\right\|^2 \\
= & \mathbf{E}\left\|\int_0^{t_2}(t_2-s)^{q-1}\mathcal{T}(t_2-s)f(s,x(s))ds-\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\mathcal{T}(t_1-s)f(s,x(s))ds\right\|^2 \\
\leq & \mathbf{E}\left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}(\mathcal{T}(t_2-s)-\mathcal{T}(t_1-s))f(s,x(s))ds\right\|^2 \\
& +\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_1}((t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1})\mathcal{T}(t_2-s)f(s,x(s))ds\right\|^2 \\
& +\mathbf{E}\left\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}\mathcal{T}(t_2-s)f(s,x(s))ds\right\|^2 \\
\leq & \frac{t_1^{2q-1}}{2q-1}\int_0^{t_1}\mathbf{E}\left\|(\mathcal{T}(t_2-s)-\mathcal{T}(t_1-s))f(s,x(s))ds\right\|^2 \\
& +\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^2\left(\int_0^{t_1}((t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1})^2ds\right)\left(\int_0^{t_1}\mathbf{E}\left\|f(s,x(s))\right\|^2ds\right) \\
& +\frac{(t_2-t_1)^{2q-1}}{1-2q}\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^2\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{E}\left\|f(s,x(s))\right\|^2ds.
\end{aligned}$$

D'autre part, nous utilisons le lemme 2.1.1. et les hypothèses précédentes, on obtient

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}\left\|\Pi_4^x(t_2)-\Pi_4^x(t_1)\right\|^2 \\
= & \mathbf{E}\left\|\int_0^{t_2}(t_2-s)^{q-1}\mathcal{T}(t_2-s)\sigma_1(s,x(s))dw_1(s)-\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\mathcal{T}(t_1-s)\sigma_1(s,x(s))dw_1(s)\right\|^2 \\
\leq & \mathbf{E}\left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}(\mathcal{T}(t_2-s)-\mathcal{T}(t_1-s))\sigma_1(s,x(s))dw_1(s)\right\|^2 \\
& +\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_1}((t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1})\mathcal{T}(t_2-s)\sigma_1(s,x(s))dw_1(s)\right\|^2 \\
& +\mathbf{E}\left\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}\mathcal{T}(t_2-s)\sigma_1(s,x(s))dw_1(s)\right\|^2 \\
\leq & L_\sigma\frac{t_1^{2q-1}}{2q-1}\int_0^{t_1}\mathbf{E}\left\|(\mathcal{T}(t_2-s)-\mathcal{T}(t_1-s))\sigma_1(s,x(s))ds\right\|^2 \\
& +L_\sigma\left(\int_0^{t_1}((t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1})^2ds\right)\left(\int_0^{t_1}\mathbf{E}\left\|\mathcal{T}(t_2-s)\sigma_1(s,x(s))\right\|^2ds\right) \\
& +L_\sigma\frac{(t_2-t_1)^{2q-1}}{1-2q}\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^2\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{E}\left\|\mathcal{T}(t_2-s)\sigma_1(s,x(s))\right\|^2ds.
\end{aligned}$$

Ainsi à l'aide de la continuité forte de $\mathcal{T}(t)$ et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous concluons que le côté droit des inégalités ci-dessus tend vers zéro quand $t_2-t_1\to 0$. Ainsi, nous concluons que $F_\alpha(x)(t)$ est continue à droite de $[0,b)$. Un argument similaire montre qu'il est également continu à gauche de $(0,b]$.

Théorème 3.1.1. *Supposons les hypothèses (i) et (ii) sont satisfaites. Alors, le système* (3.1)–(3.2) *a une solution mild sur* J.

Preuve. Nous démontrons l'existence d'un point fixe de l'opérateur F_α en utilisant le principe de l'application contractante. Nous montrons en premier, que $F_\alpha(H_2)\subset H_2$. Soit $x\in H_2$. De (3.9), nous obtenons

$$\mathbf{E}\left\|F_\alpha x(t)\right\|^2\leq 4\left[\sup_{t\in J}\sum_{i=1}^4\mathbf{E}\left\|\Pi_i^x(t)\right\|^2\right]. \tag{3.10}$$

En utilisant les hypothèses (i)-(ii), le lemme 3.1.1., et des calculs standards on obtient

$$\sup_{t\in J}\mathbf{E}\left\|\Pi_1^x(t)\right\|^2\leq C^2M_0^2\|L\|^2\left[\|x_0\|^2+\left(\frac{1}{\Gamma(1-q)}\right)^2\frac{b^{-2q+1}}{(-2q+1)}L_\sigma k_2(1+\|x\|^2)\right] \tag{3.11}$$

et

$$\sup_{t\in J}\sum_{i=2}^{4}\mathbf{E}\left\|\Pi_i^x(t)\right\|^2 \leq \left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^2\frac{b^{2q-1}}{2q-1}\left\|B\right\|^2\hat{N}\left(\frac{1}{b}+\|x\|_{H_2}^2\right) \tag{3.12}$$

$$+\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^2\left[\frac{b^{2q-1}}{2q-1}N_2-\frac{b^{2q-1}}{2q-1}L_2L_\sigma\right]\left(1+\|x\|_{H_2}^2\right). \tag{3.13}$$

Par conséquent (3.10)–(3.13) impliquant $\mathbf{E}\left\|F_\alpha x\right\|_{H_2}^2<\infty$. Par le lemme 3.2.1., $F_\alpha x\in H_2$. Ainsi, pour chaque $\alpha>0$, l'opérateur F_α applique H_2 sur lui même. Ensuite, nous utilisons le théorème de point fixe de Banach pour prouver que F_α a un unique point fixe dans H_2. Nous supposons qu'il existe un n naturelle telle que F_α^n est une contraction de H_2. En effet, soit $x,y\in H_2$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|(F_\alpha x)(t)-(F_\alpha y)(t)\right\|^2 &\leq 4\sum_{i=1}^{4}\mathbf{E}\left\|\Pi_i^x(t)-\Pi_i^y(t)\right\|^2\\
&\leq 4k_1C^2M_0^2\|L\|^2L_\sigma\left(\frac{1}{\Gamma(1-q)}\right)^2\frac{b^{-2q+1}}{(-2q+1)}\mathbf{E}\|x(t)-y(t)\|^2\\
&+ 4\left(\frac{CM_0}{\Gamma(q)}\right)^2\left[\hat{M}\|B\|^2\frac{b^{2q-1}}{2q-1}+\frac{b^{2q-1}}{2q-1}N_1+\frac{b^{2q-1}}{2q-1}L_1L_\sigma\right]\\
&\quad\times\mathbf{E}\left\|x(t)-y(t)\right\|^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient une constante réelle positive $\gamma(\alpha)$ telle que

$$\mathbf{E}\left\|(F_\alpha x)(t)-(F_\alpha y)(t)\right\|^2\leq\gamma(\alpha)\mathbf{E}\left\|x(t)-y(t)\right\|^2, \tag{3.14}$$

pour tout $t\in J$ et tout $x,y\in H_2$. Pour tout nombre naturel n, il résulte de l'itération successive de l'inégalité ci-dessus (3.14) que, en prenant la borne supérieure sur J,

$$\left\|(F_\alpha^n x)(t)-(F_\alpha^n y)(t)\right\|_{H_2}^2\leq\frac{\gamma^n(\alpha)}{n!}\left\|x-y\right\|_{H_2}^2. \tag{3.15}$$

Pour tout $\alpha>0$ fixé, pour n suffisamment grand, $\frac{\gamma^n(\alpha)}{n!}<1$. Il résulte de (3.15) que F_α^n est une contraction, ainsi que le principe de contraction assure que l'opérateur F_α a un unique point fixe x_α dans H_2, qui est une solution mild de (3.1)–(3.2).

Théorème 3.1.2. *Supposons que les hypothèses (i) - (iii) sont satisfaites, de plus si les fonctions f,σ_1 et σ_2 sont uniformément bornées et $\{\mathcal{T}(t):t\geq 0\}$ est compact, alors le système (3.1)–(3.2) est approximativement contrôlable sur J.*

Preuve. Soit x_α un point fixe de F_α. En utilisant le théorème de Fubini stochastique, on peut avoir facilement que

$$x_\alpha(b) = \widetilde{x}_b - \alpha(\alpha I+\Psi)^{-1}\left(E\widetilde{x}_b - \mathcal{S}(b)L\left[x_0 + \frac{1}{\Gamma(1-q)}\int_0^t (t-s)^{-q}\sigma_2(s,x_\alpha(s))dw_2(s)\right]\right)$$
$$+\alpha\int_0^b (\alpha I+\Psi_s^b)^{-1}(b-s)^{q-1}\mathcal{T}(b-s)f(s,x_\alpha(s))ds$$
$$+\alpha\int_0^b (\alpha I+\Psi_s^b)^{-1}[(b-s)^{q-1}\mathcal{T}(b-s)\sigma_1(s,x_\alpha(s)) - \widetilde{\varphi}(s)]dw_1(s).$$

Il résulte de l'hypothèse sur $f,\ \sigma_1$ et σ_2 qu'il existe $\hat{D}>0$ tel que

$$\|f(s,x_\alpha(s))\|^2 + \|\sigma_1(s,x_\alpha(s))\|^2 + \|\sigma_2(s,x_\alpha(s))\|^2 \le \hat{D} \tag{3.16}$$

pour tout $s\in J$. Alors, il se trouve une sous-suite notée par $\{f(s,x_\alpha(s)),\sigma_1(s,x_\alpha(s)),\sigma_2(s,x_\alpha(s))\}$ qui converge faiblement à certains $\{f(s),\sigma_1(s),\sigma_2(s)\}$ dans $Y\times L_2^0\times L_2^0$.

De l'équation précédente, nous avons

$$\mathbf{E}\,\|x_\alpha(b)-\tilde{x}_b\|^2$$
$$\le 8\mathbf{E}\left(\left\|\alpha(\alpha I+\Psi_0^b)^{-1}(E\tilde{x}_b - \mathcal{S}(b)Lx_0)\right\|^2\right)$$
$$+8\mathbf{E}\left(\|\alpha(\alpha I+\Psi_0^b)^{-1}\|^2\|\mathcal{S}(b)L\frac{1}{\Gamma(1-q)}\|^2\int_0^b (b-s)^{-q}\,\|\sigma_2(s,x_\alpha(s))-\sigma_2(s))\|_{L_2^0}^2\,ds\right)$$
$$+8\mathbf{E}\left(\|\alpha(\alpha I+\Psi_0^b)^{-1}\|^2\|\mathcal{S}(b)L\frac{1}{\Gamma(1-q)}\|^2\int_0^b (b-s)^{-q}\,\|\sigma_2(s))\|_{L_2^0}^2\,ds\right)$$
$$+8\mathbf{E}\left(\int_0^b (b-s)^{q-1}\left\|\alpha(\alpha I+\Psi_s^b)^{-1}\widetilde{\varphi}(s)\right\|_{L_2^0}^2 ds\right)$$
$$+8\mathbf{E}\left(\int_0^b (b-s)^{q-1}\left\|\alpha(\alpha I+\Psi_s^b)^{-1}\right\|\,\|\mathcal{T}(b-s)(f(s,x_\alpha(s))-f(s))\|\,ds\right)^2$$
$$+8\mathbf{E}\left(\int_0^b (b-s)^{q-1}\left\|\alpha(\alpha I+\Psi_s^b)^{-1}\mathcal{T}(b-s)f(s)\right\|ds\right)^2$$
$$+8\mathbf{E}\left(\int_0^b (b-s)^{q-1}\left\|\alpha(\alpha I+\Psi_s^b)^{-1}\right\|\,\|\mathcal{T}(b-s)(\sigma_1(s,x_\alpha(s))-\sigma_1(s))\|_{L_2^0}^2\,ds\right)$$
$$+8\mathbf{E}\left(\int_0^b (b-s)^{q-1}\left\|\alpha(\alpha I+\Psi_s^b)^{-1}\mathcal{T}(b-s)\sigma_1(s)\right\|_{L_2^0}^2 ds\right).$$

D'autre part, par l'hypothèse (iii), pour tout $0 \leq s < b$ l'opérateur $\alpha(\alpha I + \Psi_s^b)^{-1} \to 0$ fortement quand $\alpha \to 0^+$ et de plus $\|\alpha(\alpha I + \Psi_s^b)^{-1}\| \leq 1$. Ainsi, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue et la compacité des deux opérateurs $\mathcal{S}(t)$ et $\mathcal{T}(t)$ implique que $\mathbf{E}\|x_\alpha(b) - \tilde{x}_b\|^2 \to 0$ quand $\alpha \to 0^+$. Par conséquent, nous concluons la contrôlabilité approchée de (3.1)–(3.2).

Afin d'illustrer les résultats abstraits de ce chapitre, nous donnons l'exemple suivant.

3.3 Exemple

Considérons le système de contrôle stochastique fractionnaire non-local de type Sobolev suivant :

$$\frac{\partial^q}{\partial t^q}\Big[x(z,t) - x_{zz}(z,t)\Big] - \frac{\partial^2}{\partial z^2}x(z,t) = \mu(z,t) + \hat{f}(t,x(z,t)) + \hat{\sigma}(t,x(z,t))\frac{d\hat{w}_1(t)}{dt}, \quad (3.17)$$

$$x(z,0) = x_0(z) + \frac{1}{\Gamma(1-q)}\sum_{k=1}^{m} c_k \int_0^t (t-s)^{-q} x(z,t_k)d\hat{w}_2(s), \; z \in [0,1], \quad (3.18)$$

$$x(0,t) = x(1,t) = 0, \; t \in J, \quad (3.19)$$

où $0 < q \leq 1$, $0 < t_1 < ... < t_m < b$ et c_k sont des constantes positives, $k = 1, ..., m$; les fonctions $x(t)(z) = x(z,t), \; f(t,x(t))(z) = \hat{f}(t,x(z,t)), \; \sigma_1(t,x(t))(z) = \hat{\sigma}(t,x(z,t))$ et $\sigma_2(t,x(t))(z) = \sum_{k=1}^m c_k x(z,t_k)$. L'opérateur linéaire borné $B : U \to X$ est défini par $Bu(t)(z) = \mu(z,t), 0 \leq z \leq 1, u \in U$; $\hat{w}_1(t)$ et $\hat{w}_2(t)$ sont deux versions du mouvements browniens standard unidimensionnels et définis sur l'espace de probabilité filtré (Ω, Γ, P).

Soit $X = E = U = L^2[0,1]$, on définit les opérateurs $L : D(L) \subset X \to Y$ et $M : D(M) \subset X \to Y$ par $Lx = x - x''$ et $Mx = -x''$ où les domaines $D(L)$ et $D(M)$ sont donnés par

$$\{x \in X : x, x' \text{ sont absolument continues}, \; x'' \in X, \; x(0) = x(1) = 0\}.$$

Ensuite L et M peuvent être écrits respectivement par

$$Lx = \sum_{n=1}^{\infty}(1+n^2)(x,x_n)x_n, \; x \in D(L) \;\text{ et }\; Mx = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2(x,x_n)x_n, \; x \in D(M),$$

où $x_n(z) = (\sqrt{2/\pi}) \sin nz,\ n = 1, 2, ...$ est l'ensemble orthogonal de fonctions propres de M. De plus, pour tout $x \in X$ nous avons

$$L^{-1}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}(x, x_n)x_n,\ ML^{-1}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n^2}{1+n^2}(x, x_n)x_n,$$

et

$$S(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-n^2 t}{1+n^2}\right)(x, x_n)x_n.$$

Il est facile de voir que L^{-1} est compact, borné avec $||L^{-1}|| \leq 1$ et ML^{-1} génère le semi-groupe fortement continu ci-dessus $S(t)$ sur Y avec $||S(t)|| \leq e^{-t} \leq 1$. Par conséquent, avec les choix ci-dessus, le système (3.17)–(3.19) peut s'écrire comme une formulation abstraite de (3.1)–(3.2) et ainsi le Théorème 3.1.1. permet de garantir l'existence d'une solution mild de (3.17)–(3.19). D'autre part, il est facile de voir que le système de contrôle déterministe linéaire fractionnaire de type Sobolev correspond à (3.17)–(3.19) est approximativement contrôlable sur J, ce qui signifie que toutes les conditions du Théorème 3.1.2. sont satisfaites. Ainsi, le système de contrôle stochastique fractionnaire de type Sobolev (3.17)–(3.19) est approximativement contrôlable sur J.

3.4 Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse, nous avons établi des résultats de contrôlabilité approchée pour deux classes de systèmes de contrôle stochastiques fractionnaires non locaux de type Sobolev. Des conditions suffisantes pour la contrôlabilité approchée d'une classe de systèmes de contrôle dynamiques décrits par des équations différentielles stochastiques fractionnaires non locales de type Sobolev dans des espaces de Hilbert sont considérées. En utilisant la technique du point fixe, les calculs fractionnaires, l'analyse stochastique, et quelques méthodes adoptées directement à partir des problèmes de contrôle déterministes. En particulier, les conditions sont formulées et prouvées dans l'hypothèse où la contrôlabilité approchée du système de contrôle dynamique stochastique non linéaire est impliquée par la contrôlabilité approchée de sa partie linéaire correspondante. Plus précisément, le problème de la contrôlabilité est transformé en un problème de point fixe pour un opérateur non linéaire approprié dans un espace de fonctions. Les principaux outils utilisés sont les conditions requises ci-dessus, nous garantissent l'existence d'un point fixe de cet opérateur et l'étude de la contrôlabilité des systèmes considérés. Une synthèse de ces résultats a fait l'objet d'une première publication dans une revue de renommée établie [40].
Ainsi, les résultats de la contrôlabilité approchée à la classe d'équations différentielles stochastiques fractionnaires non locales non linéaires de type Sobolev sont étudiés. En utilisant l'inégalité de Hölder, la technique de point fixe, le calcul fractionnaire, l'analyse stochastique et quelques méthodes adoptées directement dans les problèmes de contrôle déterministes pour les principaux résultats. De plus, un ensemble de conditions est formulé et prouvé pour le système de contrôle stochastique fractionnaire approximativement contrôlable. Ces résultats ont fait l'objet d'une deuxième publication dans une revue de renommée établie [41].
Enfin, vu la nouveauté de ce domaine très riche en questions ouvertes ; par conséquent différentes perspectives peuvent être lancées à la suite de ce travail.

En effet, les modèles du phénomène de convection-diffusion des fluides idéaux modélisées par des équations différentielles stochastiques dégénérés intervenant dans une grande variété d'applications importantes, y compris, par exemple, deux ou trois flux de phase dans un milieu poreux ou des processus de consolidation de la sédimentation. Cependant, au mieux de notre connaissance, aucun résultat existe encore sur la contrôlabilité approchée pour les systèmes stochastiques fractionnaires dégénérés.
Finalement, après avoir effectué quelques hypothèses appropriées, en utilisant les idées et techniques que dans ce travail, on peut établir les résultats de contrôlabilité approchée pour une classe d'équations différentielles stochastiques fractionnaire dégénérés qui occupe une place appréciable dans l'ordre de nos perspectives.

Chapitre 4

Annexes

4.1 Théorèmes du point fixe

Les théorèmes de points fixes sont des outils très utiles en mathématiques et particulièrement dans la résolution des équations différentielles et intégrales.
En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour lesquelles une fonction donnée admet un point fixe, ainsi on assure l'existence de la solution d'un problème donné en le transformant en un problème de point fixe, et on détermine éventuellement ces points fixes qui sont les solutions du problème posé.

Définition 4.1.1. *Soit f une application d'un ensemble E dans lui même. On appelle point fixe de F tout point $x \in E$ tel que*

$$F(x) = x.$$

En 1922 STEFAN BANACH prouva son fameux résultat dit "principe de contraction de Banach", ce théorème est le résultat le plus élémentaire et le plus utilisé puisqu'il n'assure pas seulement l'existence d'un point fixe mais aussi son unicité.

Théorème 4.1.1. (Banach) [55]

Soit E un espace de Banach sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soit $\|\cdot\|$ la norme sur E. Soit D un sous ensemble fermé de E. Soit F une fonction qui applique D dans D, telle qu'il existe un nombre γ avec $0 \leq \gamma < 1$ et

$$\|Fx - Fy\| \leq \gamma \|x - y\| \text{ pour tout } x, y \in D.$$

Alors il existe un point unique $z \in D$ tel que $Fz = z$.

De plus, si $x_0 \in D$ et $x_n = Fx_{n-1}$ pour $n = 1, 2, ...$ alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = z$$

et on a l'estimation

$$\|x_n - z\| \leq \gamma^n (1 - \gamma)^{-1} \|x_1 - x_0\| \text{ pour } n = 1, 2, ...$$

Théorème 4.1.2. (Schauder)

Soit D un fermé borné convexe d'un espace de Banach E.

Soit F une fonction complétement continue de D dans D, (c'est à dire qu'elle est continue et applique les sous ensembles bornés dans les sous ensembles relativement compacts). Alors, il existe un point $z \in D$ tel que $Fz = z$.

Remarque 4.1.1. Dans le cas où D est compact et convexe, il suffit que F soit continue pour avoir un point fixe pour F.

Théorème 4.1.3. (Krasnoselskii)

Soit D un sous ensemble fermé borné et convexe de E.

on suppose que les opérateurs B et C vérifient :

(i) $Bx + Cx \in D$ *pour tout* $x \in D$ *;*

(ii) C *est continu et* $\overline{C(D)}$ *compact ;*

(iii) *il existe un nombre* $0 \leq \gamma < 1$ *tel que* $\|Bx - By\| \leq \gamma \|x - y\|$ *pour tout* $x, y \in D$.

Alors il existe au moins un élement $z \in D$ *tel que* $Bz + Cz = z$.

Dans sa version généralisée, (iii) est remplacée par la condition suivante :

(iv) *Il existe une fonction continue à droite* $\varphi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ *telle que* $\varphi(r) \leq \varphi(s)$ *pour* $0 \leq r \leq s$, $\varphi(r) < r$ *si* $r > 0$, *et* $\|Bx - By\| \leq \varphi \|x - y\|$ *pour tout* $x, y \in D$.

4.2 Intégrales au sens de Bochner

Soient E un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$, (a,b) un intervalle de $\mathbb{R}$ et μ une mesure sur (a,b) donnée par $d\mu(t) = \omega(t)\,dt$ où ω est une fonction positive continue sur (a,b).
$\{A_1, ..., A_k\}$ est une collection finie de sous-ensembles mutuellement disjoints de (a,b) avec mesures finies μ et $\{x_1, ..., x_k\}$ est un ensemble d'éléments de E.

Définition 4.2.1. *Une fonction ϕ définie par*

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(t)\, x_i, \quad a < t < b$$

est appelée une fonction simple.
On définit l'intégrale de ϕ par rapport à la mesure μ sur (a,b) par

$$\int_a^b \phi(t)\, d\mu(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(t)\, x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{A_i} \omega(t)\, dt \right) x_i.$$

Définition 4.2.2. *Une fonction $f : (a,b) \longrightarrow E$ est dite mesurable s'il existe une suite de fonctions simples $\{\phi_n\}$ de supports inclus dans (a,b) tel que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|f(t) - \phi_n(t)\| = 0, \quad \textit{p.p. dans } (a,b).$$

Définition 4.2.3. *Une fonction $f : (a,b) \longrightarrow E$ est intégrable au sens de Bochner s'il existe une suite de fonctions simples $\{\phi_n\}$ telles que $\|f - \phi_n\|$ est intégrable au sens de Lebesgue pour tout n, et*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_a^b \|f(t) - \phi_n(t)\|\, d\mu(t) = 0,$$

dans ce cas l'intégrale de Bochner sur (a,b) est définie par

$$\int_a^b f(t)\, d\mu(t) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_a^b \phi_n(t)\, d\mu(t).$$

4.3 Opérateurs nucléaires et Hilbert-Schmidt

Les opérateurs nucléaires jouent un rôle important dans la construction des processus et des intégrales stochastiques à valeurs dans des espaces de Banach. Dans le cadre Hilbertien, on leur substitue souvent la notion d'opérateurs Hilbert–Schmidt. Soit $E,\ F$ deux espaces de Banach et soit $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace de Banach de tous les opérateurs linéaires bornés de E dans F muni de la norme de supremum usuelle. Notons par E^* et F^* les dualitées de E et F respectivement.
On rappelle qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est dit nucléaire s'il existe deux suites $\{a_i\} \subset F$ et $\{\varphi_i\} \subset E^*$ telles que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \|a_i\|_F \|\varphi_i\|_{E^*} < +\infty,$$

et pour lesquelles on a la représentation suivante

$$Tx = \sum_{i\geq 1} a_i \varphi_i(x), \quad x \in E.$$

L'espace de tous les opérateurs nucléaires de E dans F muni de la norme

$$\|T\|_{\mathcal{L}_1} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \|a_i\|_F \|\varphi_i\|_{E^*} \text{ où } Tx = \sum_{i\geq 1} a_i\varphi_i(x) \right\},$$

est un espace de Banach, noté $\mathcal{L}_1(E,F)$. Si $E = F$, on note $\mathcal{L}_1(E)$.
Soit K un autre espace de Banach, il est clair que si $T \in \mathcal{L}_1(E,F)$ et $S \in \mathcal{L}(F,K)$ alors $TS \in \mathcal{L}_1(E,K)$ et $\|TS\|_{\mathcal{L}_1(E,K)} \leq \|T\| \|S\|_{\mathcal{L}_1(E,K)}$.
Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $\{e_k\}$ un système orthonormé complet dans H. Si $T \in \mathcal{L}_1(H,H)$ alors nous définissons la trace de l'opérateur nucléaire T par :

$$Tr(T) = \sum_{i\geq 1} \langle Te_i, e_i \rangle_H.$$

Proposition 4.3.1. *Si $T \in \mathcal{L}_1(H)$ alors $Tr(T)$ est un nombre bien défini indépendant du choix de la base orthonormée $\{e_k\}$.*

Corollaire 4.3.1. Si $T \in \mathcal{L}_1(H)$ *et* $S \in \mathcal{L}(H)$, *alors* $TS, ST \in \mathcal{L}_1(H)$ *et*

$$Tr\,(TS) = Tr\,(ST) \leq \|T\|_{\mathcal{L}_1(H)} \|S\|\,.$$

Proposition 4.3.2. *Un opérateur positif* $T \in \mathcal{L}(H)$ *est nucléaire si et seulement si pour une base orthonormée* $\{e_k\}$ *de* H

$$\sum_{i\geq 1} \langle Te_i, e_i\rangle < +\infty.$$

De plus, dans ce cas, $Tr\,(T) = \|T\|_{\mathcal{L}_1(H)}\,.$

Si $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ et $(F, \langle\cdot,\cdot\rangle_F)$ désignent deux espaces de Hilbert séparables. Soit $\{e_i\} \subset E$ un système orthonormé complet. Un opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est dit Hilbert–Schmidt si

$$\sum_{i\geq 1} \|Te_i\|_F^2 < \infty.$$

Il est bien connu qu'une telle somme est indépendante de la base choisie. L'ensemble de tous les opérateurs Hilbert–Schmidt muni de la norme

$$\|T\|_{\mathcal{L}_2(E,F)} = \left(\sum_{i\geq 1} \|Te_i\|_F^2\right)^{1/2},$$

est un espace de Hilbert, noté $\mathcal{L}_2(E, F)$.

Les relations entre opérateurs Hilbert–Schmidt et opérateurs nucléaires (ou à noyau) peuvent se résumer ainsi : un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est Hilbert–Schmidt si T^*T est un opérateur nucléaire sur E ou si TT^* est un opérateur nucléaire sur F. Ainsi, on a

$$\|T\|_{\mathcal{L}_2(E,F)} = (Tr\,(TT^*))^{1/2} = (Tr\,(T^*T))^{1/2}\,,$$

les deux traces ne portant pas sur les mêmes espaces.

On pourra consulter [23] (appendice C) pour plus de détails sur les opérateurs nucléaires et Hilbert–Schmidt.

Bibliographie

[1] S. AGARWAL AND D. BAHUGUNA, Existence of solutions to Sobolev type partial neutral differential equations, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 2006(2006), 1-10.

[2] R. P. AGARWAL, M. BENCHOHRA, S. HAMANI, A survey on existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and inclusions, Acta Appl. Math. **109**(2010), 973-1033.

[3] R. P. AGARWAL, V. LAKSHMIKANTHAM AND J. J. NIETO, On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty, Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, **72**(2010), 2859-2862.

[4] N. U. AHMED, Semigroup theory with applications to systems and control, Vol. 246. Longman, 1991.

[5] B. AHMAD AND S. K. NTOUYAS, A note on fractional differential equations with fractional separated boundary conditions, Abstract and Applied Analysis, vol. (2012), Article ID 818703, 11 pages.

[6] N. I. AKHIEZER AND L. M. GLAZMAN, Theory of linear operators in Hilbert space. Dover, 1995.

[7] K. BALACHANDRAN AND J.P. DAUER, Controllability of Sobolev type integrod-ifferential systems in Banach spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **217**(1998), 335-348.

[8] K. BALACHANDRAN AND S. KARUNANITHI, Regularity of solutions of Sobolev type semilinear integrodifferential equations in Banach spaces, Electronic Journal of Differential Equations, **114**(2003), 1-8.

[9] K. BALACHANDRAN AND R. SAKTHIVEL, Controllability of Sobolev type semilinear integrodifferential systems in Banach spaces, Applied Mathematics Letters, **12**(1999), 63-71.

[10] D. BALEANU, K. DIETHELM, E. SCALAS, AND J.J. TRUJILLO, Fractional Calculus Models and Numerical Methods, vol.3 of Complexity, Nonlinearity and Chaos, World Scientific, 2012.

[11] G. BARENBLAT, J. ZHELTOR AND I. KOCHIVA, Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, **24**(1960), 1286-1303.

[12] A. E. BASHIROV AND N. I. MAHMUDOV, On concepts of controllability for deterministic and stochastic systems, SIAM Journal on Control and Optimization, vol.37, no.6, (1999), 1808-1821.

[13] W. BIAN, Approximate controllability for semilinear systems, Acta Mathematica Hungarica, vol.81, no.1-2, (1998), 41-57.

[14] M. BRAGDI, A. DEBBOUCHE, AND D. BALEANU, Existence of solutions for fractional differential inclusions with separated boundary conditions in Banach space, Advances in Mathematical Physics, vol. (2013), Article ID 426061, 5 pages.

[15] H. BRILL, A semilinear Sobolev evolution equation in Banach space, Journal of Differential Equations, 24 (1977), 412-425.

[16] L. BYSZEWSKI, Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **162**(1992), 494-505.

[17] J. CAO, Q. YANG, AND Z. HUANG, On almost periodic mild solutions for stochastic functional differential equations, Nonlinear Analysis. Real World Applications, vol.13, no.1, (2012), 275-286.

[18] J. CAO, Q. YANG, Z. HUANG, AND Q. LIU, Asymptotically almost periodic solutions of stochastic functional differential equations, Applied Mathematics and Computation, vol.218, no.5, (2011), 1499-1511.

[19] M. CAPUTO, Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent, Part II. Geophysical Journal of Royal Astronomical Society, **13**(1967), 529-39.

[20] CERNEA, On a fractional integro-differential inclusion, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. No. 25, (2014), 1-11.

[21] Y. K. CHANG, Z. H. ZHAO, G. M. N'GUEREKATA, AND R. MA, Stepanov-like almost automorphy for stochastic processes and applications to stochastic differential equations, Nonlinear Analysis. Real World Applications, vol.12, no.2, (2011), 1130-1139.

[22] E. N. CHUKWU AND S. M. LENHART, Controllability questions for nonlinear systems in abstract spaces, Journal of Optimization Theory and Applications, vol.68, no.3, (1991), 437-462.

[23] G. DA PRATO AND J. ZABCZYK, Stochastic Equations in Infinite Dimensions, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1992.

[24] J. P. DAUER, N. I. MAHMUDOV, Approximate controllability of semilinear functional equations in Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl. **273**(2002), 310–327.

[25] A. DEBBOUCHE, D. BALEANU, Controllability of fractional evolution nonlocal impulsive quasilinear delay integro-differential systems, Comput. Math. Appl. **62**(2011), 1442-1450.

[26] A. DEBBOUCHE, D. BALEANU, R. P. AGARWAL, Nonlocal nonlinear integro-differential equations of fractional orders, Bound. Value Probl., No. 78, (2012), 10 pages.

[27] A. DEBBOUCHE AND M. M. EL-BORAI, Weak almost periodic and optimal mild solutions of fractional evolution equations, Electronic Journal of Differential Equations, no.46, (2009), 1-8.

[28] A. DEBBOUCHE, J. J. NIETO, Sobolev type fractional abstract evolution equations with nonlocal conditions and optimal multi-controls, Appl. Math. Comput. **245**(2014), 74-85.

[29] A. DEBBOUCHE AND D. F.M. TORRES, Approximate controllability of fractional nonlocal delay semilinear systems in Hilbert spaces, International Journal of Control, vol.86, no.9, (2013), 1577-1585.

[30] A. DEBBOUCHE, D. F.M. TORRES, Approximate controllability of fractional delay dynamic inclusions with nonlocal control conditions, Appl. Math. Comput. **243**(2014), 161-175.

[31] D. DELBOSCO AND L. RODINO, Existence and uniqueness for a fractional differential equation, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **204**(1996), 609-625.

[32] M. M. EL-BORAI, Some probability densities and fundamental solutions of fractional evolution equations, Chaos, Solitons and Fractals, vol.14, no.3, (2002), 433-440.

[33] A. M. A. EL-SAYED, Fractional order diffusion wave equation, Internat. J. Theoret. Phys. **35**(1966), 311-322.

[34] M. FECKAN, J. WANG, AND Y. ZHOU, Controllability of fractional functional evolution equations of Sobolev type via characteristic solution operators, Journal of Optimization Theory and Applications, vol.156, no.1, (2013), 79-95.

[35] J. M. JEONG, H. G. KIM, Controllability for semilinear functional integrodifferential equations, Bull. Korean Math. Soc. **46**(2009), 463-475.

[36] J. M. JEONG, J. R. KIM, H. H. ROH, Controllability for semilinear retarded control systems in Hilbert spaces, J. Dyn. Control Syst. **13**(2007), 577-591.

[37] M. HAIRER, An Introduction to Stochastic PDEs, Lecture Notes, Courant Institute, (2009), 2-3.

[38] R. HILFER, Applications of fractional calculus in physics, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2000.

[39] E. HILLE, R. S. PHILLIPS, Functional analysis and semi-groups, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 31, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 1957.

[40] M. KERBOUA, A. DEBBOUCHE, D. BALEANU, Approximate controllability of Sobolev type nonlocal fractional stochastic dynamic systems in Hilbert spaces, Abstr. Appl. Anal. (2013), Art. ID 262191, 10 pp.

[41] M. KERBOUA, A. DEBBOUCHE, D. BALEANU, Approximate controllability of Sobolev type fractional stochastic nonlocal nonlinear differential equations in Hilbert spaces, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations **58**(2014), 1-16.

[42] A. A. KILBAS, H. M. SRIVASTAVA AND J. J. TRUJILLO, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[43] J. KLAMKA, Stochastic controllability of linear systems with state delays, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, **17**(2007), 5-13.

[44] V.B. KOLMANOVSKII AND A.D. MYSHKIS, Applied Theory of Functional Differential Equations, Kluwer Academic, Dordrecht, 1992.

[45] S. KUMAR, N. SUKAVANAM, Approximate controllability of fractional order semilinear systems with bounded delay, J. Differential Equations **252**(2012), 6163-6174.

[46] V. LAKSHMIKANTHAM, S. LEELA AND J. VASUNDHARA, Theory of Fractional Dynamic Systems, Cambridge Academic Publishers, Cambridge, 2009.

[47] V. LAKSHMIKANTHAM AND J. VASUNDHARA DEVI, Theory of fractional differential equations in Banach spaces, European Journal of Pure and Applied Mathematics, **1**(2008), 38-45.

[48] F. LI, J. LIANG, H. K. XU, Existence of mild solutions for fractional integrodifferential equations of Sobolev type with nonlocal conditions, J. Math. Anal. Appl. **391**(2012), 510-525.

[49] F. MAINARDI, Fractional calculus : some basic problems in continuum and statistical mechanics, in : A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.), Fractals and fractional calculus in continuum mechanics, Springer-Verlag, New York (1997), 291-348.

[50] N. I. MAHMUDOV, Approximate controllability of semilinear deterministic and stochastic evolution equations in abstract spaces, SIAM Journal on Control and Optimization, vol.42, no.5, (2003),1604-1622.

[51] N. I. MAHMUDOV, Approximate controllability of fractional Sobolev type evolution equations in Banach spaces, Abst. Appl. Anal., Vol. **2013**(2013), Article ID 502839, 9 pages.

[52] N. I. MAHMUDOV AND M. A. MCKIBBEN, Approximate controllability of second order neutral stochastic evolution equations, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems : Series B, **13**(2006), 619-634.

[53] A. B. MALINOWSKA, D. F. M. TORRES, Introduction to the fractional calculus of variations, Imperial College Press, London & World Scientific Publishing, Singapore, 2012.

[54] X. MAO, Stochastic differential equations and their applications, Horwood, Chichester, 1997.

[55] R. H. MARTIN, Non linear operators and differential equations in Banach spaces, John wiley, New York, 1976.

[56] K. S. MILLER AND B. ROSS, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York, 1993.

[57] N. NYAMORADI, D. BALEANU, T. BASHIRI, Positive solutions to fractional boundary value problems with nonlinear boundary conditions, Abstr. Appl. Anal. (2013), Art ID 579740, 20 pp.

[58] K. B. OLDHAM, AND J. SPANIER, The fractional calculus, Academic Press, New York-London, 1974.

[59] B. OKSENDAL, Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications, Springer, New York, 2000.

[60] J. Y. PARK, P. BALASUBRAMANIAM AND N. KUMERASAN, Controllability for neutral stochastic functional integrodifferential infinite delay systems in abstract space, Numerical Functional Analysis and Optimization, **28** (2007), 1369-1386.

[61] A. PAZY, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.

[62] I. PODLUBNY, Fractional Differential Equations, Academic Press, New York, 1999.

[63] R. SAKTHIVEL, R. GANESH, Y. REN, S. M. ANTHONI, Approximate controllability of nonlinear fractional dynamical systems, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **18**(2013), 3498-3508.

[64] R. SAKTHIVEL, R. GANESH, S. SUGANYA, Approximate controllability of fractional neutral stochastic system with infinite delay, Rep. Math. Phys. **70**(2012), 291–311.

[65] R. SAKTHIVEL, N. I. MAHMUDOV , J. J. NIETO, Controllability for a class of fractional order neutral evolution control systems, Appl. Math. Comput. **218**(2012), 10334-10340.

[66] R. SAKTHIVEL, Y. REN, N. I. MAHMUDOV, On the approximate controllability of semilinear fractional differential systems, Comput. Math. Appl. **62**(2011), 1451-1459.

[67] R. SAKTHIVEL, Y. REN, Approximate controllability of fractional differential equations with state-dependent delay, Results Math. **63**(2013), 949–963.

[68] R. SAKTHIVEL, P. REVATHI, Y. REN, Existence of solutions for nonlinear fractional stochastic differential equations, Nonlinear Anal. **81**(2013), 70-86.

[69] R. SAKTHIVEL, S. SUGANYA, AND S. M. ANTHONI, Approximate controllability of fractional stochastic evolution equations, Computers & Mathematics with Applications, vol.63, no.3, (2012), 660-668.

[70] S. G. SAMKO, A. A. KILBAS AND O. I. MARICHEV, Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach, Amsterdam, 1993.

[71] R. E. SHOWALTER, Existence and representation theorem for a semilinear Sobolev equation in Banach space, SIAM Journal of Mathematical Analysis, **3**(1972), 527-543.

[72] R. SUBALAKSHMI AND K. BALACHANDRAN, Approximate controllability of neutral stochastic integrodifferential systems in Hilbert spaces, Electronic Journal of Differential Equations, **162**(2008), 1-15.

[73] N. SUKAVANAM, DIVYA, Approximate controllability of abstract semilinear deterministic control system, Bull. Calcutta Math. Soc. **96**(2004), 195-202.

[74] N. SUKAVANAM, S. KUMAR, Approximate controllability of fractional order semilinear delay systems, J. Optim. Theory Appl. **151**(2011), 373-384.

[75] N. SUKAVANAM, N. K. TOMAR, Approximate controllability of semilinear delay control systems, Nonlinear Funct. Anal. Appl. **12**(2007), 53-59.

[76] R. TRIGGIANI, A note on the lack of exact controllability for mild solutions in Banach spaces, SIAM J. Control Optim. **15**(1977), 407-411.

[77] Z. YAN, Approximate controllability of partial neutral functional differential systems of fractional order with state-dependent delay, International Journal of Control, vol.85, no.8, (2012), 1051-1062.

[78] Z. YAN, Approximate controllability of fractional neutral integro-differental inclusions with state-dependent delay in Hilbert spaces, IMA Journal of Mathematical Control and Information, 2012.

[79] S. D. ZAIDMAN, Abstract differential equations, Research Notes in Mathematics, Pitman Advanced Publishing Program, San Francisco, London Melbourne, 1979.

[80] Y. ZHOU AND F. JIAO, Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations, Computers & Mathematics with Applications, vol.59, no.3, (2010), 1063-1077.

MR3129325 (Review) 93B05 34A08 60H15
Kerboua, Mourad (DZ-UGUEL-M); **Debbouche, Amar** (DZ-UGUEL-M);
Baleanu, Dumitru (SAR-ABDFE-KME)

Approximate controllability of Sobolev type nonlocal fractional stochastic dynamic systems in Hilbert spaces. (English summary)

Abstr. Appl. Anal. **2013,** *Art. ID* 262191, 10 *pp.*

Summary: "We study a class of fractional stochastic dynamic control systems of Sobolev type in Hilbert spaces. We use fixed point technique, fractional calculus, stochastic analysis, and methods adopted directly from deterministic control problems for the main results. A new set of sufficient conditions for approximate controllability is formulated and proved. An example is also given to provide the obtained theory."

References

1. D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, and J. J. Trujillo, *Fractional Calculus Models and Numerical Methods,* vol. 3 of *Complexity, Nonlinearity and Chaos,* World Scientific, 2012. MR2894576
2. M. Bragdi, A. Debbouche, and D. Baleanu, "Existence of solutions for fractional differential inclusions with separated boundary conditions in Banach space," *Advances in Mathematical Physics,* vol. 2013, Article ID 426061, 5 pages, 2013. MR3062379
3. A. Debbouche, "Fractional nonlocal impulsive quasilinear multi-delay integro-differential systems," *Advances in Difference Equations,* vol. 2011, article 5, 2011. MR2820279 (2012e:34211)
4. A. Debbouche, D. Baleanu, and R. P. Agarwal, "Nonlocal Nonlinear Integro-Differential Equations of Fractional Orders," *Boundary Value Problems,* no. 2012, article 78, 2012.
5. A. M. A. El-Sayed, "Fractional-order diffusion-wave equation," *International Journal of Theoretical Physics,* vol. 35, no. 2, pp. 311–322, 1996. MR1372176 (96k:34123)
6. F. Mainardi, "Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics," in *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics,* vol. 378, pp. 291–348, Springer, New York, NY, USA, 1997. MR1611587 (99f:26010)
7. A. B. Malinowska and D. F. M. Torres, *Introduction to the Fractional Calculus of Variations,* Imperial College Press, London, UK, 2012. MR2984893
8. N. Nyamoradi, D. Baleanu, and T. Bashiri, "Positive solutions to fractional boundary value problems with nonlinear boundary conditions," *Abstract and Applied Analysis,* vol. 2013, Article ID 579740, 20 pages, 2013. MR3070200
9. B. Ahmad and S. K. Ntouyas, "A note on fractional differential equations with fractional separated boundary conditions," *Abstract and Applied Analysis,* vol. 2012, Article ID 818703, 11 pages, 2012. MR2914883
10. R. Sakthivel, R. Ganesh, and S. Suganya, "Approximate controllability of fractional neutral stochastic system with infinite delay," *Reports on Mathematical Physics,* vol. 70, no. 3, pp. 291–311, 2012. MR3003905
11. R. Sakthivel, R. Ganesh, Y. Ren, and S. M. Anthoni, "Approximate controllability of nonlinear fractional dynamical systems," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* vol. 18, no. 12, pp. 3498–3508, 2013. MR3081379
12. A. E. Bashirov and N. I. Mahmudov, "On concepts of controllability for deterministic and stochastic systems," *SIAM Journal on Control and Optimization,* vol. 37, no. 6, pp. 1808–1821, 1999. MR1720139 (2001a:93009)

13. A. Debbouche and D. Baleanu, "Controllability of fractional evolution nonlocal impulsive quasilinear delay integrodifferential systems," *Computers & Mathematics with Applications,* vol. 62, no. 3, pp. 1442–1450, 2011. MR2824731 (2012h:45008)
14. A. Debbouche and D. Baleanu, "Exact null controllability for fractional nonlocal integrodifferential equations via implicit evolution system," *Journal of Applied Mathematics,* vol. 2012, Article ID 931975, 17 pages, 2012. MR2965711
15. R. Sakthivel, N. I. Mahmudov, and J. J. Nieto, "Controllability for a class of fractional-order neutral evolution control systems," *Applied Mathematics and Computation,* vol. 218, no. 20, pp. 10334–10340, 2012. MR2921786
16. R. Triggiani, "A note on the lack of exact controllability for mild solutions in Banach spaces," *SIAM Journal on Control and Optimization,* vol. 15, no. 3, pp. 407–411, 1977. MR0435991 (55 #8942)
17. J. P. Dauer and N. I. Mahmudov, "Approximate controllability of semilinear functional equations in Hilbert spaces," *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* vol. 273, no. 2, pp. 310–327, 2002. MR1932491 (2003j:93043)
18. N. Sukavanam and N. K. Tomar, "Approximate controllability of semilinear delay control systems," *Nonlinear Functional Analysis and Applications,* vol. 12, no. 1, pp. 53–59, 2007. MR2392157 (2008m:93020)
19. W. Bian, "Approximate controllability for semilinear systems," *Acta Mathematica Hungarica,* vol. 81, no. 1–2, pp. 41–57, 1998. MR1653219 (2000e:93009)
20. E. N. Chukwu and S. M. Lenhart, "Controllability questions for nonlinear systems in abstract spaces," *Journal of Optimization Theory and Applications,* vol. 68, no. 3, pp. 437–462, 1991. MR1097312 (92d:93022)
21. J.-M. Jeong, J.-R. Kim, and H.-H. Roh, "Controllability for semilinear retarded control systems in Hilbert spaces," *Journal of Dynamical and Control Systems,* vol. 13, no. 4, pp. 577–591, 2007. MR2350236 (2008g:93022)
22. J.-M. Jeong and H.-G. Kim, "Controllability for semilinear functional integrodifferential equations," *Bulletin of the Korean Mathematical Society,* vol. 46, no. 3, pp. 463–475, 2009. MR2522859 (2010d:93083)
23. N. Sukavanam and Divya, "Approximate controllability of abstract semilinear deterministic control system," *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society,* vol. 96, no. 3, pp. 195–202, 2004. MR2090230
24. S. Kumar and N. Sukavanam, "Approximate controllability of fractional order semilinear systems with bounded delay," *Journal of Differential Equations,* vol. 252, no. 11, pp. 6163–6174, 2012. MR2911425
25. S. Rathinasamy and R. Yong, "Approximate controllability of fractional differential equations with state-dependent delay," *Results in Mathematics,* vol. 63, no. 3–4, pp. 949–963, 2013. MR3057348
26. R. Sakthivel, Y. Ren, and N. I. Mahmudov, "On the approximate controllability of semilinear fractional differential systems," *Computers & Mathematics with Applications,* vol. 62, no. 3, pp. 1451–1459, 2011. MR2824732 (2012d:93029)
27. N. Sukavanam and S. Kumar, "Approximate controllability of fractional order semilinear delay systems," *Journal of Optimization Theory and Applications,* vol. 151, no. 2, pp. 373–384, 2011. MR2852407 (2012g:34204)
28. J. Cao, Q. Yang, Z. Huang, and Q. Liu, "Asymptotically almost periodic solutions of stochastic functional differential equations," *Applied Mathematics and Computation,* vol. 218, no. 5, pp. 1499–1511, 2011. MR2831373
29. J. Cao, Q. Yang, and Z. Huang, "On almost periodic mild solutions for stochastic functional differential equations," *Nonlinear Analysis. Real World Applications,* vol. 13, no. 1, pp. 275–286, 2012. MR2846838 (2012i:34100)
30. Y.-K. Chang, Z.-H. Zhao, G. M. N'Guérékata, and R. Ma, "Stepanov-like almost

automorphy for stochastic processes and applications to stochastic differential equations," *Nonlinear Analysis. Real World Applications,* vol. 12, no. 2, pp. 1130–1139, 2011. MR2736199 (2011k:60194)

31. X. Mao, *Stochastic Differential Equations and Applications,* Ellis Horwood, Chichester, UK, 1997.
32. R. Sakthivel, P. Revathi, and Y. Ren, "Existence of solutions for nonlinear fractional stochastic differential equations," *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications,* vol. 81, pp. 70–86, 2013. MR3016441
33. N. I. Mahmudov, "Approximate controllability of semilinear deterministic and stochastic evolution equations in abstract spaces," *SIAM Journal on Control and Optimization,* vol. 42, no. 5, pp. 1604–1622, 2003. MR2046377 (2004m:93015)
34. F. Li, J. Liang, and H. K. Xu, "Existence of mild solutions for fractional integrodifferential equations of Sobolev type with nonlocal conditions," *Journal of Mathematical Analysis and Applications.,* vol. 391, pp. 510–525, 2012.
35. R. Sakthivel, S. Suganya, and S. M. Anthoni, "Approximate controllability of fractional stochastic evolution equations," *Computers & Mathematics with Applications,* vol. 63, no. 3, pp. 660–668, 2012. MR2871665
36. M. Fečkan, J. Wang, and Y. Zhou, "Controllability of fractional functional evolution equations of Sobolev type via characteristic solution operators," *Journal of Optimization Theory and Applications,* vol. 156, no. 1, pp. 79–95, 2013. MR3019302
37. R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics,* World Scientific, Singapore, 2000. MR1890113 (2003i:80001)
38. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations,* vol. 204 of *North-Holland Mathematics Studies,* Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, 2006. MR2218073 (2007a:34002)
39. K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations,* John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 1993. MR1219954 (94e:26013)
40. I. Podlubny, *Fractional Differential Equations,* vol. 198 of *Mathematics in Science and Engineering,* Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic, 1999. MR1658022 (99m:26009)
41. E. Hille and R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups,* vol. 31 of *American Mathematical Society Colloquium Publications,* American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 1957. MR0089373 (19,664d)
42. A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations,* Springer, New York, NY, USA, 1983. MR0710486 (85g:47061)
43. S. D. Zaidman, *Abstract Differential Equations,* Pitman Advanced Publishing Program, San Francisco, Calif, USA, 1979. MR0569750 (81k:34054)
44. G. Da Prato and J. Zabczyk, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions,* vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1992. MR1207136 (95g:60073)
45. Y. Zhou and F. Jiao, "Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations," *Computers & Mathematics with Applications,* vol. 59, no. 3, pp. 1063–1077, 2010. MR2579471 (2011b:34239)
46. A. Debbouche and M. M. El-Borai, "Weak almost periodic and optimal mild solutions of fractional evolution equations," *Electronic Journal of Differential Equations,* no. 46, pp. 1–8, 2009. MR2495851 (2010d:34084)
47. M. M. El-Borai, "Some probability densities and fundamental solutions of fractional evolution equations," *Chaos, Solitons and Fractals,* vol. 14, no. 3, pp. 433–440, 2002. MR1903295 (2003c:34095)
48. Z. Yan, "Approximate controllability of partial neutral functional differential systems of fractional order with state-dependent delay," *International Journal of Con-*

trol, vol. 85, no. 8, pp. 1051–1062, 2012. MR2943689

49. Z. Yan, "Approximate controllability of fractional neutral integro-differental inclusions with state-dependent delay in Hilbert spaces," *IMA Journal of Mathematical Control and Information,* 2012.
50. A. Debbouche and D. F. M. Torres, "Approximate controllability of fractional nonlocal delay semilinear systems in Hilbert spaces," *International Journal of Control,* vol. 86, no. 9, pp. 1577–1585, 2013. MR3172421

Note: This list reflects references listed in the original paper as accurately as possible with no attempt to correct errors.

MR3291089 (Review) 93B05 34A08 34F05 34G20 60H15
Kerboua, Mourad (DZ-UGUEL-M); **Debbouche, Amar** (DZ-UGUEL-M); **Baleanu, Dumitru** (TR-CANK-MCS)

Approximate controllability of Sobolev type fractional stochastic nonlocal nonlinear differential equations in Hilbert spaces. (English summary)

Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **2014,** *No.* 58, 16 *pp.*

Summary: "We introduce a new notion called fractional stochastic nonlocal condition, and then we study approximate controllability of class of fractional stochastic nonlinear differential equations of Sobolev type in Hilbert spaces. We use Hölder's inequality, fixed point technique, fractional calculus, stochastic analysis and methods adopted directly from deterministic control problems for the main results. A new set of sufficient conditions is formulated and proved for the fractional stochastic control system to be approximately controllable. An example is given to illustrate the abstract results."

References

1. R. P. Agarwal, M. Benchohra, S. Hamani, A survey on existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and inclusions, *Acta Appl. Math.* **109**(2010), 973–1033. MR2596185; url MR2596185 (2011a:34008)
2. D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J. J. Trujillo, *Fractional calculus models and numerical methods*, Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos, Vol. 3, World Scientific Publishing Co., 2012. MR2894576; url MR2894576
3. A. E. Bashirov, N. I. Mahmudov, On concepts of controllability for linear deterministic and stochastic systems, *SIAM J. Control Optim.* **37**(1999), 1808–1821. MR1720139; url MR1720139 (2001a:93009)
4. W. Bian, Approximate controllability for semilinear systems, *Acta Math. Hung.* **81**(1998) 41–57. MR1653219; url MR1653219 (2000e:93009)
5. M. Bragdi, A. Debbouche, D. Baleanu, Existence of solutions for fractional differential inclusions with separated boundary conditions in Banach space, *Adv. Math. Phys.* **2013**, Art. ID 426061, 5 pp. MR3062379 MR3062379
6. A. Cernea, On a fractional integro-differential inclusion, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* **2014**, No. 25, 1–11. MR3218772 MR3218772
7. J. Cao, Q. Yang, Z. Huang, On almost periodic mild solutions for stochastic functional differential equations, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **13**(2012), 275–286. MR2846838; url MR2846838 (2012i:34100)
8. Y. K. Chang, Z. H. Zhao, G. M. N'Guérékata, R. Ma, Stepanov-like almost automorphy for stochastic processes and applications to stochastic differential equations, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **12**(2011), 1130–1139. MR2736199; url MR2736199 (2011k:60194)
9. E. N. Chukwu, S. M. Lenhart, Controllability question for nonlinear systems in abstract space, *J. Optim. Theory Appl.* **68**(1991), 437–462. MR1097312; url MR1097312 (92d:93022)
10. J. P. Dauer, N. I. Mahmudov, Approximate controllability of semilinear functional equations in Hilbert spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **273**(2002), 310–327. MR1932491; url MR1932491 (2003j:93043)
11. A. Debbouche, M. M. El-Borai, Weak almost periodic and optimal mild solutions of fractional evolution equations, *Electron. J. Differential Equations* **2009**, No.

46, 8 pp. MR2495851 MR2495851 (2010d:34084)

12. A. Debbouche, D. Baleanu, Controllability of fractional evolution nonlocal impulsive quasilinear delay integro-differential systems, *Comput. Math. Appl.* **62**(2011), 1442–1450. MR2824731; url MR2824731 (2012h:45008)
13. A. Debbouche, D. Baleanu, R. P Agarwal, Nonlocal nonlinear integro-differential equations of fractional orders, *Bound. Value Probl.* **2012**, No. 78, 10 pp. MR2969320; url MR2969320
14. A. Debbouche, D. F. M. Torres, Approximate controllability of fractional nonlocal delay semilinear systems in Hilbert spaces, *Internat. J. Control* **86**(2013), 1577–1585. MR3172421; url MR3172421
15. A. Debbouche, D. F. M. Torres, Approximate controllability of fractional delay dynamic inclusions with nonlocal control conditions, *Appl. Math. Comput.* **243**(2014), 161–175. MR3244467; url MR3244467
16. A. Debbouche, J. J. Nieto, Sobolev type fractional abstract evolution equations with nonlocal conditions and optimal multi-controls, *Appl. Math. Comput.* **245**(2014), 74–85. MR3260698; url MR3260698
17. M. M. El-Boari, Some probability densities and fundamental solutions of fractional evolution equations, *Chaos Solitons Fractals* **14**(2002), 433–440. MR1903295; url MR1903295 (2003c:34095)
18. A. M. A. El-Sayed, Fractional order diffusion wave equation, *Internat. J. Theoret. Phys.* **35**(1966), 311–322. MR1372176; url MR1372176 (96k:34123)
19. M. Fečkan, J. R. Wang, Y. Zhou, Controllability of fractional functional evolution equations of Sobolev type via characteristic solution operators, *J. Optim. Theory. Appl.* **156**(2013), 79–95. MR3019302; url MR3019302
20. J. M. Jeong, J. R. Kim, H. H. Roh, Controllability for semilinear retarded control systems in Hilbert spaces, *J. Dyn. Control Syst.* **13**(2007), 577–591. MR2350236; url MR2350236 (2008g:93022)
21. J. M. Jeong, H. G. Kim, Controllability for semilinear functional integrodifferential equations, *Bull. Korean Math. Soc.* **46**(2009), 463–475. MR2522859; url MR2522859 (2010d:93083)
22. R. Hilfer, *Applications of fractional calculus in physics*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2000. MR1890104; url MR1890113 (2003i:80001)
23. E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 31, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 1957. MR0423094 MR0089373 (19,664d)
24. M. Kerboua, A. Debbouche, D. Baleanu, Approximate controllability of Sobolev type nonlocal fractional stochastic dynamic systems in Hilbert spaces, *Abstr. Appl. Anal.* **2013**, Art. ID 262191, 10 pp. MR3129325 MR3129325
25. S. Kumar, N. Sukavanam, Approximate controllability of fractional order semilinear systems with bounded delay, *J. Differential Equations* **252**(2012), 6163–6174. MR2911425; url MR2911425
26. F. Li, J. Liang, H. K. Xu, Existence of mild solutions for fractional integrodifferential equations of Sobolev type with nonlocal conditions, *J. Math. Anal. Appl.* **391**(2012), 510–525. url
27. N. I. Mahmudov, Approximate controllability of semilinear deterministic and stochastic evolution equations in abstract spaces, *SIAM J. Control Optim.* **42**(2003), 1604–1622. MR2046377; url MR2046377 (2004m:93015)
28. F. Mainardi, Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics, in: A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.), *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics*, Springer-Verlag, New York (1997) 291–348. MR1611587; url MR1611587 (99f:26010)

29. A. B. Malinowska, D. F. M. Torres, *Introduction to the fractional calculus of variations*, Imperial College Press, London & World Scientific Publishing, Singapore, 2012. MR2984893; url MR2984893
30. X. Mao, *Stochastic differential equations and their applications*, Horwood, Chichester, 1997. MR1475218 MR1475218 (2000g:60099)
31. K. S. Miller, B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, Wiley, New York, 1993. MR1219954 MR1219954 (94e:26013)
32. N. Nyamoradi, D. Baleanu, T. Bashiri, Positive solutions to fractional boundary value problems with nonlinear boundary conditions, *Abstr. Appl. Anal.* **2013**, Art ID 579740, 20 pp. MR3070200 MR3070200
33. A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983. MR710486; url MR0710486 (85g:47061)
34. I. Podlubny, *Fractional differential equations*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 198, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1999. MR1658022 MR1658022 (99m:26009)
35. G. D. Prato, J. Zabczyk, *Stochastic equations in infinite dimensions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992. MR1207136; url MR1207136 (95g:60073)
36. R. Sakthivel, P. Revathi, Y. Renc, Existence of solutions for nonlinear fractional stochastic differential equations, *Nonlinear Anal.* **81**(2013), 70–86. MR3016441; url MR3016441
37. R. Sakthivel, S. Suganya, S. M. Anthoni, Approximate controllability of fractional stochastic evolution equations, *Comput. Math. Appl.* **63**(2012), 660–668. MR2871665; url MR2871665
38. R. Sakthivel, N. I. Mahmudov, J. J. Nieto, Controllability for a class of fractional-order neutral evolution control systems, *Appl. Math. Comput.* **218**(2012), 10334–10340. MR2921786; url MR2921786
39. R. Sakthivel, Y. Ren, Approximate controllability of fractional differential equations with state-dependent delay, *Results Math.* **63**(2013), 949–963. MR3057348; url MR3057348
40. R. Sakthivel, Y. Ren, N.I. Mahmudov, On the approximate controllability of semilinear fractional differential systems, *Comput. Math. Appl.* **62**(2011), 1451–1459. MR2824732; url MR2824732 (2012d:93029)
41. R. Sakthivel, R. Ganesh, S. Suganya, Approximate controllability of fractional neutral stochastic system with infinite delay, *Rep. Math. Phys.* **70**(2012), 291–311. MR3003905; url MR3003905
42. R. Sakthivel, R. Ganesh, Y. Ren, S. M. Anthoni, Approximate controllability of nonlinear fractional dynamical systems, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **18**(2013), 3498–3508. MR3081379; url MR3081379
43. N. Sukavanam, S. Kumar, Approximate controllability of fractional order semilinear delay systems, *J. Optim. Theory Appl.* **151**(2011), 373–384. MR2852407; url MR2852407 (2012g:34204)
44. N. Sukavanam, N. K. Tomar, Approximate controllability of semilinear delay control systems, *Nonlinear Funct. Anal. Appl.* **12**(2007), 53–59. MR2392157 MR2392157 (2008m:93020)
45. N. Sukavanam, Divya, Approximate controllability of abstract semilinear deterministic control system, *Bull. Calcutta Math. Soc.* **96**(2004), 195–202. MR2090230 MR2090230
46. R. Triggiani, A note on the lack of exact controllability for mild solutions in Banach spaces, *SIAM J. Control Optim.* **15**(1977), 407–411. MR554706; url MR0435991 (55 #8942)
47. Z. Yan, Approximate controllability of partial neutral functional differential sys-

tems of fractional order with state-dependent delay, *Internat. J. Control* **85**(2012), 1051–1062. MR2943689; url MR2943689

48. Z. Yan, Approximate controllability of fractional neutral integro-differential inclusions with state-dependent delay in Hilbert spaces, *IMA J. Math. Control Inform.* **30**(2012), 443–462. MR3144917; url MR3144917
49. S. D. Zaidman, *Abstract differential equations*, Research Notes in Mathematics, Pitman Advanced Publishing Program, San Francisco, London Melbourne, 1979. MR569750 MR0569750 (81k:34054)
50. Y. Zhou, F. Jiao, Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations, *Comput. Math. Appl.* **59**(2010), 1063–1077. MR2579471; url MR2579471 (2011b:34239)

Note: This list reflects references listed in the original paper as accurately as possible with no attempt to correct errors.