

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Laboratoire de Mathématiques Appliquées et de Modélisation
Département de Mathématiques



Thèse :

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat 3^{ème} cycle en Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées

Par : GHOMRANI Sarra

Intitulée

Modélisation mathématique du phénomène d'un cyclone tropical

Devant le jury

Présidente: Nouri Fatma Zohra
Rapporteur: FUJITA YASHIMA Hisao
Co-rapporteur: AISSAOUI M. Zine
Examineur: ELLAGOUNE Fateh
Examineur: MAOUNI Messaoud
Examineur: GUEBBAI Hamza

Pr. Université de Annaba
Pr. Université de Guelma
Pr. Université de Guelma
Pr. Université de Guelma
M.C.A Université de Skikda
M.C.A Université de Guelma

Résumé

Dans cette thèse on s'intéresse à la modélisation mathématique du phénomène d'un cyclone tropical. Comme le moteur d'un cyclone est le mouvement ascendant de l'air dû à la chaleur latente de la condensation de la vapeur d'eau, nous avons étudié le mouvement vertical de l'air saturé de la vapeur d'eau à l'intérieur d'une cheminée de hauteur 12 km. Tout d'abord nous avons construit la solution numérique de l'équation d'évolution de l'écoulement vertical ascendant de l'air provoqué par la condensation de la vapeur d'eau. Pour réaliser le calcul, nous avons adopté la séparation de la variable du temps t et de la variable spatiale z . Par cette séparation, l'évolution temporelle est donnée par une équation différentielle ordinaire (en t), tandis que le mouvement de l'air dans le domaine $0 < z < \bar{z}_1$ est donné par un système d'équations "quasi stationnaire" en z . Même dans sa simplicité notre résultat montre les aspects physiques fondamentaux du mouvement ascendant de l'air ; en effet le mouvement vertical de l'air croît rapidement, mais il sera ralenti par l'effet de la friction des gouttelettes avec l'air et tend vers un certain équilibre, ce qui correspond à ce qu'on observe dans la nature.

Ensuite nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution du système d'équations du mouvement vertical de l'air dans une cheminée saturée de la vapeur d'eau, solution "globale" dans le domaine $0 < z < \bar{z}_1$.

Mathematics Subject Classification (2010). 65L12, 35A24, 93A30

Mots clés. Différences finies, équations différentielles ordinaires, modélisation mathématique.

المخلص

في هذه الأطروحة، نهتم بالنمذجة الرياضية لظاهرة الإعصار الاستوائي.

بما أن محرك الأعاصير الإستوائية هو الحركة العمودية للهواء الناتجة عن الحرارة الكامنة لتكثف بخار الماء واستنادا على ذلك قمنا بدراسة الحركة العمودية للهواء المشبع ببخار الماء داخل مدخنة جد عالية ذات ارتفاع 12 كلم.

كخطوة أولى قمنا بحساب الحل الرقمي للمعادلة الوقتية للحركة العمودية الصاعدة للهواء الناتجة عن تكثف بخار الماء، واستخدمنا طريقة الفروق المنتهية.

نتائج حساباتنا تظهر جيدا الخصائص الفيزيائية الأساسية للحركة العمودية الصاعدة للهواء، حيث أن سرعة الهواء تتزايد سريعا، لكنها فيما بعد تتناقص وتؤول إلى الاستقرار نظرا لتأثير عامل الاحتكاك بين قطرات الماء والهواء، وهذا يتوافق جيدا مع ما يحدث في الطبيعة.

بعد ذلك قمنا بدراسة وجود ووحداية الحل الشامل لمعادلات الحركة العمودية للهواء الناتجة عن تكثف بخار الماء.

الكلمات الاستدلالية: الفروق المنتهية، المعادلة التفاضلية العادية، النمذجة الرياضية.

التصنيف الرياضي(2010). A3093 ، 65L12 ، A24 35 .

Abstract

In this thesis we are interested on the mathematical modeling of the phenomenon of hurricanes. As the motor of the hurricane is the vertical motion of the air due to the latent heat of condensation of water vapor, we studied the vertical motion of the air saturated with the water vapor inside a height chimney. we constructed the numerical solution of the evolution of the ascending vertical flow of the air caused by the condensation of water vapor, using finite difference method. Even in its simplicity, our result shows the fundamental Physical aspects of the ascending motion of the air ; indeed the vertical motion of the air grows quickly, but it is slowed down by the effect of friction of droplets with the air and tends to a certain equilibrium, which corresponds to what is happening in the nature.

Then we proposed the study of the existence and uniqueness of a global solution of the system of equations of the vertical motion of the air in a height chimney in the field $0 \leq z \leq \bar{z}_1$, where \bar{z}_1 is the height of the chimney.

Key words : Finite differences, ordinary differential equations, mathematical models.

Mathematics Subject Classification (2010). 65L12, 35A24, 93A30.

Remerciements

Il me sera très difficile de remercier tout le monde car c'est grâce à l'aide de nombreuses personnes que j'ai pu mener cette thèse à son terme.

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse, monsieur **Hisao Fujita Yashima**, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité et son respect. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail doctoral.

J'adresse de chaleureux remerciements à mon co-encadrant de thèse monsieur **Mohamed Zine Aissaoui**, pour son attention de tout instant sur mes travaux, pour ses conseils avisés et son écoute qui ont été prépondérants pour la bonne réussite de cette thèse. Son énergie et sa confiance ont été des éléments moteurs pour moi. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

Je suis très sensible à l'honneur que m'a fait Madame **Fatma Zohra Nouri** en acceptant de présider mon jury de soutenance et d'examiner ma thèse.

Je voudrais remercier les rapporteurs de cette thèse messieurs **Messaoud Maouni, Fateh Ellagoune, Hamza Guebbai**, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et l'honneur qu'ils m'ont fait d'être dans mon jury de thèse.

Je remercie tous les membres du laboratoire du mathématiques appliquées et de modélisation pour le climat sympathique dans lequel ils m'ont permis de travailler. Les nombreuses discussions que j'ai pu avoir avec chacun m'ont beaucoup apporté. Je voudrais exprimer particulièrement toute mon amitié à **Benssaad Meryem, Kaidouchi Wahida** pour leur gentillesse, leur compétence et leur humour.

A titre plus personnel, Je remercie chaleureusement mon mari, **Aouata Ali**, pour la grande patience, l'encouragement et la confiance qu'il m'a témoigné. Je tiens à le remercier surtout pour son soutien moral ininterrompu et ses nombreux conseils tout le long de ma thèse.

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection à ma famille, et en particulier à **mes parents** qui m'ont fait comprendre que la vie n'est pas faite que de problèmes qu'on pourrait résoudre grâce à des formules mathématiques et des algorithmes, leur intelligence, leur confiance, leur tendresse, leur amour me portent et me guident tous les jours. Merci pour avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui. Je vous aime.

Table des matières

Introduction	1
1 Modèle général de l’atmosphère et état hydrostatique	8
1.1 Loi de la conservation de la masse de l’air sec	9
1.2 Loi de la conservation de la masse de la vapeur d’eau	9
1.3 Conservation de la quantité du mouvement	10
1.4 Equation du bilan d’énergie	12
1.5 Etat hydrostatique de l’air sec	13
2 Modèle du mouvement vertical de l’air dans une cheminée	17
2.1 Position du problème	18
2.1.1 La quantité de la condensation de la vapeur d’eau dans la cheminée	19
2.1.2 Etat hydrostatique avec la condensation de la vapeur d’eau	21
2.2 Equations du mouvement de l’air avec la condensation de la vapeur d’eau dans une cheminée	29
2.3 Séparation de l’évolution temporelle et la structure verticale	31
2.4 Simulation numérique du mouvement vertical de l’air dans une cheminée	34
2.4.1 schéma numérique pour les équations sans la viscosité et la ther- moconductibilité	37



2.4.2	schéma numérique pour les équations avec la viscosité et la thermoconductibilité	38
2.4.3	Résultat du calculs numérique	40
3	Existence d'une solution du système d'équations du mouvement vertical de l'air dans une cheminée saturée de la vapeur d'eau	54
3.1	Système d'équations	55
3.2	Problème semi-stationnaire - première approximation	56
3.3	Deuxième approximation	57
3.4	Estimations à priori	59
	Conclusion et perspectives	69
	Bibliographie	71

INTRODUCTION

Dans la nature, les systèmes et les phénomènes physiques les plus intéressants sont aussi les plus complexes à étudier, ils sont souvent régis par un grand nombre de paramètres non-linéaires interagissant entre eux (la météorologie, la turbulence des fluides...). L'une des solutions est de recourir à une série d'expériences pour analyser les paramètres et les grandeurs du système. Mais les essais peuvent s'avérer très coûteux (essais en vol, essais avec matériaux rares, instrumentations très chères...) et ils peuvent être très dangereux (essais nucléaires, environnement spatial...).

De même on peut construire un modèle mathématique permettant la représentation d'un phénomène physique. Ces modèles utilisent très souvent des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) non-linéaires dont on ne connaît pas de solutions analytiques en général. Il faut alors résoudre le problème numériquement en transformant les équations continues de la physique en un problème discret sur un certain domaine de calcul.

L'objectif de cette thèse est la modélisation mathématiques du phénomène d'un cyclone tropical, ce phénomène compte parmi les phénomènes météorologiques les plus dévastateur, il représente un risque majeur pour l'ensemble des zones intertropicales. En raison notamment de la " force " du phénomène, et en dépit des progrès effectués dans

sa compréhension et dans les mesures de surveillance, les cyclones sont chaque année à l'origine de bilans humains et économiques très lourds.

Un cyclone est un terme de météorologie, il se présente sous la forme d'un énorme système nuageux de cumulonimbus (nuage d'orage). L'importance de la condensation comme source principale d'énergie différencie les cyclones tropicaux des autres phénomènes météorologiques, pour conserver la source d'énergie de sa machine thermodynamique, un cyclone tropical doit demeurer au dessus de l'eau chaude qui lui apporte l'humidité atmosphérique nécessaire, l'atmosphère tropicale, chaude, réchauffe l'eau à la surface de l'océan, ce qui entraîne l'évaporation. C'est le début d'une perturbation atmosphérique ! L'air montant entre en contact avec des pressions et des températures plus basses, en hautes altitudes, et la vapeur d'eau commence à se condenser et retrouve sa forme liquide. Ce sont les nuages. Et c'est à ce moment que l'intéressant phénomène physique de la formation des cyclones tropicaux se produit.

La plupart des gens savent que l'évaporation de l'eau est provoquée par la chaleur, mais de nombreuses personnes ignorent que la vapeur d'eau qui refroidit et se condense libère sa chaleur. Plus la condensation est marquée plus la quantité de la chaleur libérée est élevée. La condensation donne la chaleur à l'air et la vapeur d'eau retourne à l'état liquide. C'est ce qu'on appelle la chaleur latente de la condensation.

La chaleur latente dans l'air à la surface de l'océan est libérée dans l'atmosphère et monte à des altitudes où l'air ascendant refroidit et provoque la condensation de la vapeur d'eau. Ce refroidissement à la hautes altitudes accélère l'ascension de l'air, car il est alors plus chaud que l'air ambiant. L'air qui continue à monter aspire l'air qui se trouve plus bas et accélère l'aspiration de l'air à la surface de l'eau. Ce mouvement de l'air est le vent qui accompagne les cyclones tropicaux, les colonnes d'air ascendantes créent rapidement des orages tropicaux qui sont des germes potentiels des cyclones tropicaux. Le mouvement de giration du cyclone est donné par la rotation de la Terre : la force de Coriolis, les cyclones tournent ainsi dans le sens des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère Sud, dans le sens contraire dans l'hémisphère Nord.

La littérature autour ce phénomène est exhaustive (voir [1], [6], [9], [21]), cependant elle occulte en général la phase initiale de sa formation, en particulier dans [23] les auteurs ont construit un modèle bidimensionnel du mouvement stationnaire de l'air dans la partie inférieure du cyclone, plus précisément ils ont choisit une hauteur H entre $1Km$ et $6Km$ de la surface de la mer pour que la composante radiale du vent soit petite, ils ont considéré seulement sa structure mécanique et ont démontré l'existence de la solution de ce modèle. Dans [28] les auteurs ont étudié numériquement le modèle proposé dans [23], en fait les résultats du calculs numériques obtenus ont donné une bonne approximation de la distribution de la vitesse de l'air et de la pression. Dans [7] les auteurs ont étudié le développement du phénomène d'un cyclone tropical dans la phase initiale dans sa structure mécanique et thermodynamique, ils ont construit un modèle qui décrit ce dernier et ils ont trouvé la solution analytique pour le modèle proposé. Toutefois pour la construction de la solution ils ont utilisé des hypothèses qui ne sont pas compatibles avec le comportement observé par les physiciens et les météorologues par exemple ils ont proposé une solution qui croît infiniment et la corrige en coupant artificiellement.

Dans cette thèse on s'intéresse à la construction d'un modèle mathématique qui décrit le phénomène d'un cyclone tropical dans sa structure mécanique et thermodynamique, en utilisant des hypothèses qui conforment aux observations des météorologues et des physiciens. Pour parvenir à cet objectif on étudie tout d'abord le mouvement vertical de l'air accompagné par la condensation de la vapeur d'eau dans un domaine cylindrique comme une cheminée, la hauteur de cette cheminée doit correspondre à celle d'un cumulonimbus ($12km$), de sorte que le modèle est intéressant pour les phénomènes météorologiques, comme les orages et les cyclones tropicaux. Dans notre modèle on a pris en considération l'effet de la friction des gouttelettes avec l'air, en effet après la construction du modèle on étudie la solution numérique du système d'équations proposé en utilisant la méthode de différences finies. Les résultats du calculs numériques montrent que le mouvement vertical de l'air croît rapidement, mais il sera ralenti par le frottement de la précipitation et tend vers un certain équilibre, ce qui correspond à ce qui se passe dans la nature.

Contenu de la thèse

Cette thèse est composée d'une introduction et trois chapitres.

Dans le premier chapitre on rappelle brièvement le système d'équations développé dans [12] [24] qui modélise le mouvement de l'atmosphère en tenant compte des transitions de phase de l'eau de l'état gazeux à l'état liquide ou solide.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à la construction d'un modèle qui décrit le mouvement vertical de l'air dans une cheminée, d'une hauteur qui correspond à celle d'un "Cumulonimbus" et de section constante. On a supposé une seule condition sur la cheminée c'est l'existence de l'air humide à l'intérieur. Dans notre modèle nous avons pris en compte les grandeurs physiques suivantes : La température T , la densité ρ , la vitesse v et l'effet de la friction des gouttelettes avec l'air.

Après la construction du modèle, en séparant la variable temporelle t et la structure verticale z , on a formulé le modèle d'évolution dans lequel la structure verticale est donnée par un système d'équations différentielles ordinaires, avec des coefficients qui dépendent du paramètres t , tandis que l'évolution temporelle est donnée par une équation différentielle ordinaire avec les termes connus résultant du mouvement vertical de l'air. Cette formulation nous permet d'utiliser la méthode de différences finies pour obtenir la solution numérique du système d'équations. Notre résultat montre bien les aspects fondamentaux du mouvement croissant de l'air humide, en effet la vapeur d'eau qui monte commence à se condenser, la condensation libère la chaleur latente et cette dernière monte à des altitudes où l'air ascendant refroidit et provoque la condensation de la vapeur, ce refroidissement accélère l'ascension de l'air. L'air qui continue à monter aspire l'air qui se trouve plus bas et accélère l'aspiration de l'air à la surface de la cheminée. Ce mouvement vertical de l'air correspond à ce qui se passe dans un cyclone tropical dans sa phase initiale. Les résultats du calculs numériques montrent que le mouvement vertical de l'air croît rapidement, mais il sera ralenti par l'effet de la friction des gouttelettes avec l'air et tend vers un certain équilibre, ce qui correspond à ce que les météorologues observent dans la nature.

Dans le troisième chapitre, on étudie l'existence de la solution "globale" du système d'équations proposé dans [15] sous des hypothèses convenables, du point de vue technique il s'agit d'un système d'équations pour les inconnues (T, ρ, v) qui représentent respectivement la température, la densité et la vitesse verticale de l'air. Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution on va utiliser l'idée du travail [14] qui consiste à définir un voisinage d'une solution approchée dans l'intervalle $[0, z]$ pour $0 < z \leq \bar{z}_1$; puis, on va démontrer que, si la solution appartient à ce voisinage, alors elle appartient à son sous-ensemble strictement intérieur, ce qui nous permettra de prolonger au-delà de l'intervalle $[0, z]$ et ainsi, en répétant le prolongement, on trouvera la solution globale sur $0 \leq z \leq \bar{z}_1$. L'unicité de la solution résultera immédiatement de celle de la solution locale.



FIGURE .1 – Cumulonimbus (nuages d'orages)



FIGURE .2 – Image d'un cyclone capter par un satellite

Modèle général de l'atmosphère et état hydrostatique

Sommaire

1.1	Loi de la conservation de la masse de l'air sec	9
1.2	Loi de la conservation de la masse de la vapeur d'eau	9
1.3	Conservation de la quantité du mouvement	10
1.4	Equation du bilan d'énergie	12
1.5	Etat hydrostatique de l'air sec	13

Dans ce chapitre nous rappelons le système d'équations qui modélise de manière suffisamment détaillée le mouvement de l'atmosphère, en tenant compte de la transition de phase de l'eau de l'état gazeux à l'état liquide ou solide (voir [12], [13], [24]). Nous considérons les grandeurs physiques :

$\rho = \rho(x, t)$: la densité de l'air ;

$\pi = \pi(x, t)$: la densité de la vapeur d'eau ;

$v = v(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t), v_3(x, t))$: la vitesse du fluide ;

$T = T(x, t)$: la température ;

$p = p(x, t)$: la pression.

On suppose que la pression p est donnée par l'équation suivante

$$p = \rho \frac{R}{\mu} T \quad (1.0.1)$$

avec R la constante universelle des gaz ($R \approx 8.31 \cdot 10^7 \text{ erg/mol} \cdot \text{K}$) et μ est la masse molaire moyenne de l'air ($\mu \approx 28.96 \text{ g/mole}$).

1.1 Loi de la conservation de la masse de l'air sec

On entend par l'air sec la partie de l'air des molécules différentes de H_2O , c'est à dire des molécules de O_2 , N_2 , Ar et d'autre gaz en quantité infime, ainsi il sera régi par l'équation de la continuité suivante (voir [12])

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho v). \quad (1.1.2)$$

1.2 Loi de la conservation de la masse de la vapeur d'eau

Le principe de la conservation de la masse pour la vapeur d'eau, doit être appliquée en tenant compte de la variation due à la transition de phase. Dans [24] les auteurs ont proposé une équation qui tient compte de l'éventuelle transition de phase du gaz au solide et inversement ; ainsi l'équation qui exprime la loi de la conservation de la masse de la vapeur d'eau s'écrit

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\pi v) = -H_{tr}. \quad (1.2.3)$$

Où H_{tr} représente la quantité totale (dans l'unité du volume et du temps) de H_2O qui se transforme du gaz au liquide ou solide (son éventuelle valeur négative signifie la quantité de H_2O qui se transforme du liquide au gaz). Dans la suite on va préciser la définition de la fonction H_{tr} , où la question délicate, est la description de la formation et de la disparition des gouttelettes.

1.3 Conservation de la quantité du mouvement

On rappelle d'abord que l'équation de la quantité du mouvement pour un gaz visqueux général est donné par (voir [18])

$$\begin{aligned} \rho(\partial_t v_j + (v \cdot \nabla) v_j) + \partial_{x_j} p = & \quad (1.3.4) \\ = \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} (\eta(\partial_{x_k} v_j + \partial_{x_j} v_k - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot v)) + \partial_{x_j} (\zeta \nabla \cdot v) + \rho f_j, \end{aligned}$$

où η et ζ sont les coefficients de la viscosité d'écoulement et volumique, tandis que $f = (f_1, f_2, f_3)$ est la force extérieure.

Pour le mouvement de l'air dans l'atmosphère l'unique force extérieure qui intervient réellement, est celle de la gravitation

$$f = -\nabla\Phi,$$

Φ étant le géopotentiel. On rappelle en outre que l'air atmosphérique est composé par l'air sec (N_2 , O_2 , Ar etc...) et la vapeur d'eau ; de plus le comportement mécanique de la vapeur d'eau ne diffère pas beaucoup de celui de l'air sec, ce qui nous permet de considérer l'unique équation de la quantité du mouvement avec la densité de l'air

$$\rho + \pi.$$

Donc, si on adopte l'approximation

$$\eta = \text{Constante} > 0, \quad \zeta = \text{Constante} > 0,$$

en utilisant l'expression (1.0.1) de la pression, on obtient, dans le cas de l'absence de gouttelettes et de cristaux de glace, l'équation

$$\begin{aligned} (\rho + \pi)(\partial_t v + (v \cdot \nabla) v) + R \nabla \left(\left(\frac{\rho}{u_a} + \frac{\pi}{u_h} \right) T \right) = & \quad (1.3.5) \\ = \eta \Delta v + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot v) - (\rho + \pi) \nabla \Phi. \end{aligned}$$

D'autre part, pour le mouvement de l'air en présence des gouttelettes et de morceaux de cristaux de H_2O , il faut tenir compte de l'effet de la friction entre l'air et les gouttelettes, de même entre l'air et les morceaux de cristaux de H_2O . Pour représenter ces effets, on ajoute à l'équation (1.3.5) les termes

$$\int_0^{\infty} \alpha_l(m) \sigma_l(m) (v - u_l(m)) dm,$$

$$\int_0^{\infty} \alpha_s(m) \sigma_s(m) (v - u_s(m)) dm,$$

où $\alpha_l(m)$ et $\alpha_s(m)$ sont des fonctions décroissantes par rapport à m représentant respectivement le coefficient de la friction entre l'air et les gouttelettes de masse m et le coefficient de la friction entre l'air et les cristaux de masse m , tandis que $u_l(m)$ et $u_s(m)$ désignent respectivement la vitesse des gouttelettes de masse m et celle des cristaux de glace de masse m .

Ainsi on aura l'équation de la conservation de la quantité du mouvement pour l'air composé de l'air sec et la vapeur d'eau de la forme (voir [12])

$$(\rho + \pi)(\partial_t v + (v \cdot \nabla)v) = \eta \Delta v + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right) \nabla(\nabla \cdot v) + \quad (1.3.6)$$

$$-R \nabla \left(\left(\frac{\rho}{u_a} + \frac{\pi}{u_h} \right) T \right) - \int_0^{\infty} \alpha_l(m) \sigma_l(m) (v - u_l(m)) dm +$$

$$- \int_0^{\infty} \alpha_s(m) \sigma_s(m) (v - u_s(m)) dm - (\rho + \pi) \nabla \Phi.$$

Dans [12] les auteurs ont considéré seulement le terme avec $\sigma_l(m)$, en supposant que $\sigma_s(m) = 0$; d'autre part ils ont considéré l'équation de l'évolution de la vitesse des gouttelettes $u_l(m)$.

Dans [24] (pour $u_l(m)$ et $u_s(m)$) on a proposé l'utilisation d'une approximation, qui simplifie la formulation des équations et permet d'éviter une régularisation plutôt artificielle, en proposant qu'au lieu de considérer une équation propre pour la quantité du

mouvement des gouttelettes et des morceaux de cristaux, on adopte la détermination de $u_l(m) = u_l(m, t, x)$ et de $u_s(m) = u_s(m, t, x)$ par les relations

$$u_l(m, t, x) = v(t, x) - \frac{1}{\alpha_l(m)} \nabla \Phi, \quad (1.3.7)$$

$$u_s(m, t, x) = v(t, x) - \frac{1}{\alpha_s(m)} \nabla \Phi. \quad (1.3.8)$$

Ces formulations sont motivées par le fait que la vitesse des gouttelettes dans l'atmosphère est, selon les observations effectuées (voir par exemple [25]), presque celle de l'équilibre (c'est-à-dire, en absence de variation de la vitesse de l'air, la vitesse des gouttelettes ayant une masse constante reste presque invariante). Quant à la vitesse des morceaux de cristaux de H_2O , à cause de leur forme géométrique assez variée, selon les résultats d'observations, elle n'est pas uniquement déterminée. Vues ces circonstances, les auteurs de [24] ont adopté la formule (1.3.8) en tant qu'une approximation de caractère statistique, en admettant une formule analogue à celle de la vitesse des gouttelettes.

En substituant les relations (1.3.7) et (1.3.8) dans l'équation (1.3.6), les auteurs de [24] ont proposé l'équation de quantité de mouvement pour l'air

$$\begin{aligned} (\rho + \pi) \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) &= \eta \Delta v + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot v) + \\ &- \nabla p - g[\Sigma + \rho + \pi] \vec{e}_3, \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

avec $e_3 = (0, 0, 1)^T$, Σ est la densité de l'eau liquide ou solide suspendue dans l'atmosphère, g est l'accélération de la pesanteur.

1.4 Equation du bilan d'énergie

On note par c_v la chaleur spécifique, L_{tr} la chaleur latente due à la transformation de l'eau de l'état gazeux à l'état liquide ou solide et k le coefficient de thermoconductibilité. Pour le bilan de l'énergie, il faut tenir compte de la contribution de la chaleur latente de

la condensation ou de l'évaporation, ce qui s'exprime par l'équation suivante :

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = k\Delta T - p\nabla \cdot v + \eta \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{x_j} + \frac{\partial v_j}{x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot v \right) \frac{\partial v_i}{x_j} + \zeta (\nabla \cdot v)^2 - \rho c_v v \cdot \nabla T + L_{tr} H_{tr}. \quad (1.4.10)$$

Pour plus de détail concernant les équations (1.0.1)-(1.4.10) voir [18].

1.5 Etat hydrostatique de l'air sec

Dans l'atmosphère réelle la diffusion de la chaleur et l'effet thermique de la friction interne sont relativement petits, de sorte que le déplacement vertical de l'air, s'il n'y a pas de transition de phase de l'eau, engendre la variation de la pression et de la température de manière assez proche du processus adiabatique. A cause de ce comportement de l'air, nous trouvons une distribution de la pression, de la densité et de la température assez proche de la distribution de l'état *hydrostatique*.

En effet, si on néglige la diffusion de la chaleur et l'augmentation de la température due à la friction interne, l'équation (1.4.10) se réduit à

$$\rho c_v (\partial_t T + v \cdot \nabla T) + \frac{R}{\mu} \rho T \nabla \cdot v = 0. \quad (1.5.11)$$

Si le mouvement de l'air vérifie cette équation, le long de sa trajectoire, le rapport

$$\vartheta(t, x) = \frac{T(t, x)^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho(t, x)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad (1.5.12)$$

avec $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{c_v + \frac{R}{\mu}}{c_v}$ reste invariant, où γ est l'exposant adiabatique, qui a la valeur approximativement 1.4, tandis que la trajectoire est définie par la relation

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = x(t, x_0), t_0 \leq t \leq t_1\}, \quad x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t v(t', x(t', x_0)) dt'$$

(pour plus de détail voir [10]).

Ainsi, sur la trajectoire de chaque partie du gaz on a

$$T(t, x) = C_1 \rho(t, x)^{\gamma-1} \quad (1.5.13)$$

où C_1 est une constante .

Supposons maintenant que la valeur de la constante C_1 figurant dans l'équation (1.5.13) est identique dans une région Ω , alors dans cette région la pression p , est donnée par

$$p = h\rho^\gamma \quad (1.5.14)$$

où $h = C_1 \frac{R}{\mu}$ est une constante.

Soit Φ le géopotential, si on substitue $v \equiv 0$ et la relation (1.5.14) dans l'équation (1.3.9), on obtient

$$h\nabla\rho^\gamma = -\rho\nabla\Phi. \quad (1.5.15)$$

Comme

$$\nabla\rho^\gamma = \nabla\rho^{(\gamma-1)\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\rho\nabla\rho^{\gamma-1},$$

de (1.5.15) on déduit que

$$h\frac{\gamma}{\gamma-1}\nabla\rho^{\gamma-1} = -\nabla\Phi,$$

ce qui implique que

$$\rho^{\gamma-1} = \rho_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma}(\Phi_0 - \Phi), \quad (1.5.16)$$

ou

$$\rho = \left(\rho_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma}(\Phi_0 - \Phi) \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (1.5.17)$$

où $\Phi_0 = \Phi(x_0)$ et $\rho_0 = \rho(x_0)$ pour $x_0 \in \Omega$. Pour l'application de (1.5.17) à l'atmosphère réelle il est souvent commode de prendre Φ_0 et ρ_0 comme les valeurs de Φ et ρ au niveau de la surface de la mer respectivement.

Nous rappelons que, du point de vue physique, (1.5.16) et (1.5.17) sont valables seulement si $\rho(x_0) > 0$ et $\rho_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma}(\Phi_0 - \Phi)$.

La relation (1.5.17) signifie que dans l'approximation "adiabatique", l'atmosphère "au repos" aura la distribution de la densité ρ . En outre, compte tenu de la relation $\frac{C_1}{h} = \frac{\mu}{R}$, on déduit de (1.5.13) et (1.5.16) que

$$T = C_1 \left(\rho_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma}(\Phi_0 - \Phi) \right) = T_0 + \frac{\mu(\gamma-1)}{R\gamma}(\Phi_0 - \Phi), \quad (1.5.18)$$

où $T_0 = C_1 \rho_0^{\gamma-1}$ est la température au niveau de la surface de la mer, d'autre part, de (1.5.14) et (1.5.17) on déduit que

$$p = h \left(\rho_0^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma} (\Phi_0 - \Phi) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{\gamma-1}{h^{\frac{1}{\gamma}} \gamma} (\Phi_0 - \Phi) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.5.19)$$

où $p_0 = h \rho_0^\gamma$ est la pression au niveau de la surface de la mer.

La distribution de la densité $\rho(x)$, de la température $T(x)$ et de la pression $P(x)$, donnée par (1.5.17)-(1.5.19) dans une région Ω , définit un état hydrostatique. Il est intéressant de remarquer que dans l'état hydrostatique, la température $T(x)$ descend linéairement par rapport au géopotential $\Phi(x)$, ce qui correspond à son comportement dans la troposphère. Toutefois, la comparaison entre le calcul explicite de $T(x)$ par la relation (2.13) et la donnée de la température dans la troposphère fournie par les observations montre une différence non négligeable, c'est-à-dire la décroissance de la température dans la troposphère de l'atmosphère réelle est plus faible que celle donnée par la relation (2.12).

Prenons en examen le terme $\frac{\mu(\gamma-1)}{R\gamma} (\Phi_0 - \Phi)$ figurant dans l'équation (2.12). Pour obtenir une approximation explicite de ce terme, nous utilisons le système CGS (centimètregramme-second). En désignant par $\Phi(H)$ le géopotential à un point à la hauteur H cm du niveau de référence $\Phi = \Phi_0$ et en substituant dans le terme $\frac{\mu(\gamma-1)}{R\gamma} (\Phi_0 - \Phi(H))$ l'approximation $\Phi(H) - \Phi_0 \approx 980.H \text{ cm}^2/\text{s}^{-2}$ et les valeurs $\mu \approx 28,96 \text{ g/mol}$, $R \approx 8.31.10^7 \text{ erg/mol.K}$, $\gamma \approx 1,4$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\mu(\gamma-1)}{R\gamma} (\Phi_0 - \Phi(H)) &\approx \frac{-980.H \text{ cm}^2/\text{s}^{-2} \cdot 28,96 \text{ g/mole} \cdot 0,4}{8,31.10^7 \text{ erg/mole.K} \cdot 1,4} \\ &\approx -9,8.H.10^{-5} \text{ K}. \end{aligned}$$

En rappelant (2.13), cette relation signifie que quand on monte de H cm la température devrait descendre de $9,8.H.10^{-5}$ degrés, c'est-à-dire que quand on monte de 1 km la température devrait descendre de $9,8$ degrés. Mais les mesures effectuées dans l'atmosphère réelle nous montrent que quand on monte de 1 km la température descend en moyenne environ $6,5$ degrés. Cette différence est due principalement à la présence de la vapeur d'eau et à sa transition de phase.

A la fin il ne faut pas oublier de rappeler le résultat bien établi des observations selon lequel la pression moyenne au niveau de la mer est partout dans le monde approximativement $1013mb$. D'autre part, comme nous le savons bien, la température moyenne au niveau de la mer varie beaucoup de la zone tropicale aux zones polaires. Par conséquent, la densité moyenne au niveau de la mer, qui doit satisfaire à l'équation (2.5) avec $p \approx 1013mb$ et la température moyenne donnée, elle aussi varie sensiblement de la zone tropicale aux zones polaires. La constante h utilisée dans (2.9) doit en conséquence varier en fonction de la température au niveau de la mer.

Modèle du mouvement vertical de l'air dans une cheminée

Sommaire

2.1	Position du problème	18
2.2	Equations du mouvement de l'air avec la condensation de la vapeur d'eau dans une cheminée	29
2.3	Séparation de l'évolution temporelle et la structure verticale	31
2.4	Simulation numérique du mouvement vertical de l'air dans une cheminée	34

Nous rappelons que, le mouvement vertical de l'air est causé par la chaleur latente de la condensation de la vapeur, cette dernière joue un rôle fondamental dans l'apparition de certains phénomènes de l'atmosphère tel que la formation d'un cumulonimbus qui provoque les orages, la précipitation intense ainsi que les cyclones tropicaux (où le cumulonimbus devient le noyau chaud d'un cyclone tropical voir par exemple [8], [16]).

La littérature autour ce sujet est exhaustives (voir [1], [6], [9], [21]), cependant elle occulte en général la phase initiale de sa formation. Dans ce chapitre, nous proposons un

système d'équations décrivant le développement du mouvement ascendant de l'air causé par la chaleur latente suite à la condensation de la vapeur d'eau. En supposant que le mouvement de l'air se développe dans une cheminée assez haute ($12Km$), en effet cette expérience mentale donne une meilleur explication du phénomène d'un cyclone tropical grâce à la simplicité de la structure géométrique de la cheminée.

Pour le calcul nous avons utilisé une approximation par la séparation de la variable temporelle t et la structure vertical z , nous formulons le modèle d'évolution dans lequel la structure vertical est donnée par un système d'équations différentielles ordinaires avec des coefficients qui dépendent du paramètres t et l'évolution temporelle est donnée par une équation différentielle ordinaire avec les termes connus résultant du mouvement vertical de l'air ; cette séparation va nous faciliter l'utilisation de la méthode de différence finie pour obtenir la solution numérique.

2.1 Position du problème

Nous proposons la description de l'évolution du mouvement vertical de l'air provoqué par la chaleur latente de la condensation. Imaginons une cheminée de hauteur $12km$, de section constante assez large, traversé par un courant ascendant de l'air humide, provoquant la condensation de la vapeur. Désignons par z la coordonnée spatiale verticale telle que :

$$0 < z < \bar{z}_1, \quad t > 0,$$

où \bar{z}_1 représente la hauteur de la cheminée.

Avant la construction du modèle qui décrit le mouvement vertical de l'air accompagné par la condensation de la vapeur d'eau dans une cheminée, nous devons déterminer tout d'abord la quantité de la condensation qui se produit à l'intérieur de ce dernier.

2.1.1 La quantité de la condensation de la vapeur d'eau dans la cheminée

La transition de phase de l'eau réalisée dans la cheminée, provoque la pluie et la neige, où la quantité appelée *pression de la vapeur saturée* $\bar{p}_{vs}(T)$ joue un rôle fondamental. En effet, la condensation de la vapeur d'eau se réalise, lorsque à une température supérieure à celle de la fusion de H_2O , la pression de la vapeur dépasse la pression de la vapeur saturée relative à l'état liquide $\bar{p}_{vs(l)}(T)$, valeur critique au-delà de laquelle les molécules de H_2O à l'état gazeux tendent à s'établir à l'état liquide. Dans le cas où la température est inférieure à celle de la fusion, il faut imaginer la même expérience au-dessus de la surface de la glace au lieu de l'eau liquide, ce qui nous donnera la pression de la vapeur saturée sur la surface de la glace. Mais pour la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère, il faut tenir compte que dans l'atmosphère réelle même à une température inférieure à celle de la fusion, on trouve des gouttelettes d'eau liquide, ce qui nécessite la considération de la pression de la vapeur saturée sur la surface de l'eau liquide même aux températures inférieures à celle de la fusion. Ces processus de transition s'accompagnent d'un dégagement ou d'une absorption de l'énergie ; ce phénomène est connu sous le nom de *chaleur latente*, qui constitue un facteur important dans les phénomènes météorologiques.

Dans le cas du processus condensation évaporation, les valeurs expérimentales établis concernant la pression de la vapeur saturée \bar{p}_{vs} à des températures normales de l'atmosphère sont données approximativement par les valeurs

$$\bar{p}_{vs}(T) \approx E_0 \cdot 10^{\frac{9.5(T-273.15)}{T-7.65}}, \quad E_0 = 6.107(\text{mbar}),$$

Il nous est commode de définir, à l'aide de l'expression générale de la pression, la densité de la vapeur saturée relative à la surface de l'eau liquide $\bar{\pi}_{vs(l)}(T)$ par

$$\bar{\pi}_{vs(l)}(T) = \frac{\mu_h \bar{p}_{vs(l)}(T)}{RT}, \quad (2.1.1)$$

où R et μ_h sont respectivement la constante universelle des gaz et la masse molaire de H_2O (voir [12], [17], [24],).

D'autre part, ces processus de transition s'accompagnent d'un dégagement ou d'une absorption de l'énergie ; ce phénomène est connu sous le nom de *chaleur latente*, qui constitue un facteur important dans les phénomènes météorologiques. Nous désignons par L_{gl}, L_{ls}, L_{gs} respectivement la chaleur latente relative à la transition gaz-liquide, liquide-solide, gaz-solide, selon les données expérimentales on a la relation

$$L_{gs}(T) = L_{gl}(T) + L_{ls}(T).$$

(voir [17], [19], [22]).

Selon les physiciens la quantité de la condensation est donnée par la variation de H_2O dans l'air par rapport à la densité de la vapeur saturée $\bar{\pi}_{vs}(T)$, Designons par

$$H_{tr} = H_{tr}(t, z)$$

la quantité (par unité du temps et du volume) de H_2O de l'état gazeux qui se transforme en liquide ou solide.

Il est bien connu que dans l'atmosphère essentiellement la partie de la vapeur allant au-dessus de la densité de saturation devrait être transformé en liquide ou solide (voir par exemple [17], [19], [22], ect...). Ainsi, si on dénote par $\bar{\pi}_{vs}(T)$ la densité de vapeur saturée à la température T , la variation de la densité de H_2O dans l'air dans la cheminée est donnée approximativement par

$$H_{tr} = \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \right) v_3. \quad (2.1.2)$$

En effet, si on désigne par $\pi(z)$ la densité de vapeur en z , et si on suppose que la quantité de H_2O qui dépasse $\bar{\pi}_{vs}(T)$ devient immédiatement liquide ou solide, on aura

$$\pi(z) = \bar{\pi}_{vs}(T(z)).$$

Lorsque l'air monte de Δz , la quantité de H_2O contenue dans l'air sera

$$\pi(z) \frac{\rho(z + \Delta z)}{\rho(z)} = \bar{\pi}_{vs}(T(z)) \frac{\rho(z + \Delta z)}{\rho(z)},$$

tandis que la densité de la vapeur saturée s'écrit

$$\bar{\pi}_{vs}(T(z + \Delta z)),$$

d'où

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left[\pi(z) \frac{\rho(z + \Delta z)}{\rho(z)} - \bar{\pi}_{vs}(T(z + \Delta z)) \right] &= \\ &= \bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T). \end{aligned}$$

Par conséquent, en tenant compte de la relation $\frac{dz}{dt} = v_3$, on trouve (2.1.2).

2.1.2 Etat hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau

Dans cette section, on s'intéresse à la construction d'un modèle qui décrit l'état hydrostatique de l'air accompagné par la condensation de la vapeur d'eau. On sait bien que le comportement mécanique de la vapeur d'eau ne diffère pas beaucoup de celui de l'air sec, pour cela dans la suite on écrit ρ_{hs}^* au lieu de $\rho + \pi$.

Quand il y a la condensation de la vapeur d'eau dans l'air, ce dernier reçoit la chaleur latente de la transition de phase de H_2O , de sorte que la variation de la température, en négligeant la diffusion de la chaleur et le terme due à la friction interne, est donnée par

$$\rho_{hs}^* c_v (\partial_t T_{hs}^* + v \cdot \nabla T_{hs}^*) + R_1 \rho_{hs}^* T_{hs}^* \nabla \cdot v = L_{tr} H_{tr}, \quad (2.1.3)$$

où L_{tr} est la chaleur latente due à la condensation ou la sublimation inverse et $R_1 = \frac{R}{\mu}$.

En substituant (2.1.2) et (1.2.3) dans (2.1.3), en tenant compte du mouvement stationnaire dans la cheminée (de sorte que $v = (0, 0, v_3)$ et $\frac{d}{dt} = v_3 \frac{d}{dz}$), on obtient

$$\rho_{hs}^* c_v \frac{dT_{hs}^*}{dz} v_3 - R_1 T_{hs}^* \frac{d\rho_{hs}^*}{dz} v_3 = (R_1 T_{hs}^* + L_{tr}) \left(\bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*) \frac{d}{dz} \log \rho_{hs}^* - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*) \right) v_3,$$

en divisant par v_3 les deux parties, on aura

$$\rho_{hs}^* c_v \frac{dT_{hs}^*}{dz} - R_1 T_{hs}^* \frac{d\rho_{hs}^*}{dz} = (R_1 T_{hs}^* + L_{tr}) \left(\bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*) \frac{d}{dz} \log \rho_{hs}^* - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*) \right). \quad (2.1.4)$$

Retournons à l'équation (1.3.9), si $v = (0, 0, v_3)$ et $\partial_t v_3 = 0$, en négligeant les termes de la viscosité et on écrit $\frac{d}{dz}$ au lieu de $\frac{\partial}{\partial z}$, on aura d'après (1.0.1)

$$\varrho_{hs}^* v_3 \frac{d}{dz} v_3 = -\frac{R}{\mu} \frac{d}{dz} (\varrho_{hs}^* T_{hs}^*) - g[\Sigma + \varrho_{hs}^*]. \quad (2.1.5)$$

Où Σ est la densité totale de l'eau liquide ou solide.

Pour $v_3 \rightarrow 0$ on a

$$v_3 \frac{d}{dz} v_3 \rightarrow 0.$$

Alors, de (2.1.2) il résulte que :

$$H_{tr} \rightarrow 0 \quad \text{ainsi que} \quad \Sigma \rightarrow 0.$$

Donc nous avons :

$$\frac{R}{\mu} \frac{d}{dz} (\varrho_{hs}^* T_{hs}^*) = -g\varrho_{hs}^*. \quad (2.1.6)$$

Le système d'équations (2.1.4), (2.1.6) décrit l'état hydrostatique de l'air accompagné par la condensation de la vapeur, on note par T_0, ϱ_0 les conditions initiales associées aux système d'équations (3.2.8), (3.2.9), ainsi on écrit

$$T_{hs}^*(0) = T_0 > 0, \quad \varrho_{hs}^*(0) = \varrho_{hs0}^* > 0. \quad (2.1.7)$$

On a alors la proposition suivante

Proposition 2.1.1. *On note par*

$$\Omega = \{z > 0 \mid (\bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*(z')) \frac{d}{dz} \log \varrho_{hs}^*(z') - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*(z')) > 0 \forall z' \in]0, \bar{z}_{1max}[\}.$$

Si $(T_{hs}^, \varrho_{hs}^*)$ est la solution maximale du problème (3.2.8), (3.2.9), avec les conditions initiales (2.1.7), la solution est définie sur l'intervalle maximale $[0, \bar{z}_{1max}[$. On a*

$$\varrho_{sc}(z) T_{sc}(z) \leq \varrho_{hs}^*(z) T_{hs}^*(z) \leq \varrho(z_0) T(z_0) \quad \forall z \in \Omega \quad (2.1.8)$$

où $T_{sc}(z)$ et $\varrho_{sc}(z)$ sont les fonctions définies dans (1.5.17), (1.5.18)

Démonstration. En écrivant (3.2.8) sous la forme

$$\frac{d}{dz} \log \frac{T_{hs}^* c_v}{\varrho_{hs}^* \frac{R_0}{\mu}} = \frac{1}{T_{hs}^* \varrho_{hs}^*} \left(\frac{R_0}{\mu} T_{hs}^* + Lgl \right) \left(\bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*) \frac{d}{dz} \log \varrho_{hs}^* - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*) \right),$$

on observe que le second membre de cette égalité est positive pour chaque $z \in \Omega$, donc

$$\frac{T_{hs}^*(z)^{c_v}}{\varrho_{hs}^*(z)^{\frac{R_0}{\mu}}} > \frac{T_0^{c_v}}{\varrho_0^{\frac{R_0}{\mu}}} \quad \forall z \in \Omega,$$

étant donnée $\frac{R}{c_v} = \gamma - 1$, on a

$$\varrho_{hs}^*(z)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} < c_1 T_{hs}^*(z)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \forall z \in \Omega, \quad c_1 = \frac{\varrho_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{T_0^{\frac{1}{\gamma}}}.$$

De (3.2.9) on déduit en utilisant l'inégalité précédente

$$\frac{R_0}{\mu} \frac{d}{dz} (\varrho_{hs}^* T_{hs}^*) = -g \varrho_{hs}^* > -g c_1 (\varrho_{hs}^* T_{hs}^*)^{\frac{1}{\gamma}},$$

ce qui implique que

$$\frac{R_0}{\mu} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{d}{dz} (\varrho_{hs}^* T_{hs}^*)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} > -c_1 g.$$

Par conséquent

$$(\varrho_{hs}^*(z) T_{hs}^*(z))^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} > (\varrho_0 T_0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{\mu}{R_0} \frac{\gamma-1}{\gamma} c_1 g z. \quad (2.1.9)$$

En outre, de (1.5.11) on obtient

$$(\varrho_{sc}(z) T_{sc}(z))^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = (\varrho_0 T_0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{\mu}{R_0} \frac{\gamma-1}{\gamma} c_1 g z. \quad (2.1.10)$$

Ainsi de (2.1.9) et (2.1.10) on a

$$\varrho_{sc}(z) T_{sc}(z) \leq \varrho_{hs}^*(z) T_{hs}^*(z). \quad (2.1.11)$$

En se référant à l'équation (3.2.9) on remarque que :

$$\frac{d}{dz} (\varrho_{hs}^* T_{hs}^*) \leq 0,$$

ce qui veut dire que :

$$\rho_{hs}^* T_{hs}^* \leq \rho_0 T_0. \quad (2.1.12)$$

d'après (2.1.11) et (2.1.12) on obtient (2.1.8) ce qui achève la démonstration.

□

Les figures ci-dessous représentent la distribution verticale de la température ainsi que la densité de l'air dans l'état hydrostatique respectivement de l'air sec et de l'air avec la condensation. Nous avons fait les calculs utilisant la méthode de différences finies pour une hauteur de 12km. Les résultats du calculs numériques montrent bien que la pression $p = R_1 \rho T$ calculée avec la température et la densité de l'état hydrostatique de l'air sec est inférieure à celle calculée à partir de " l'état hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau " (voir Fig. 2.1, Fig 2.2, Fig 2.3 et Fig. 2.4, qui sont obtenues à partir de (1.5.17)-(1.5.18) (3.2.8)-(3.2.9)), ce qui confirme le résultat de la proposition 2.1.1.

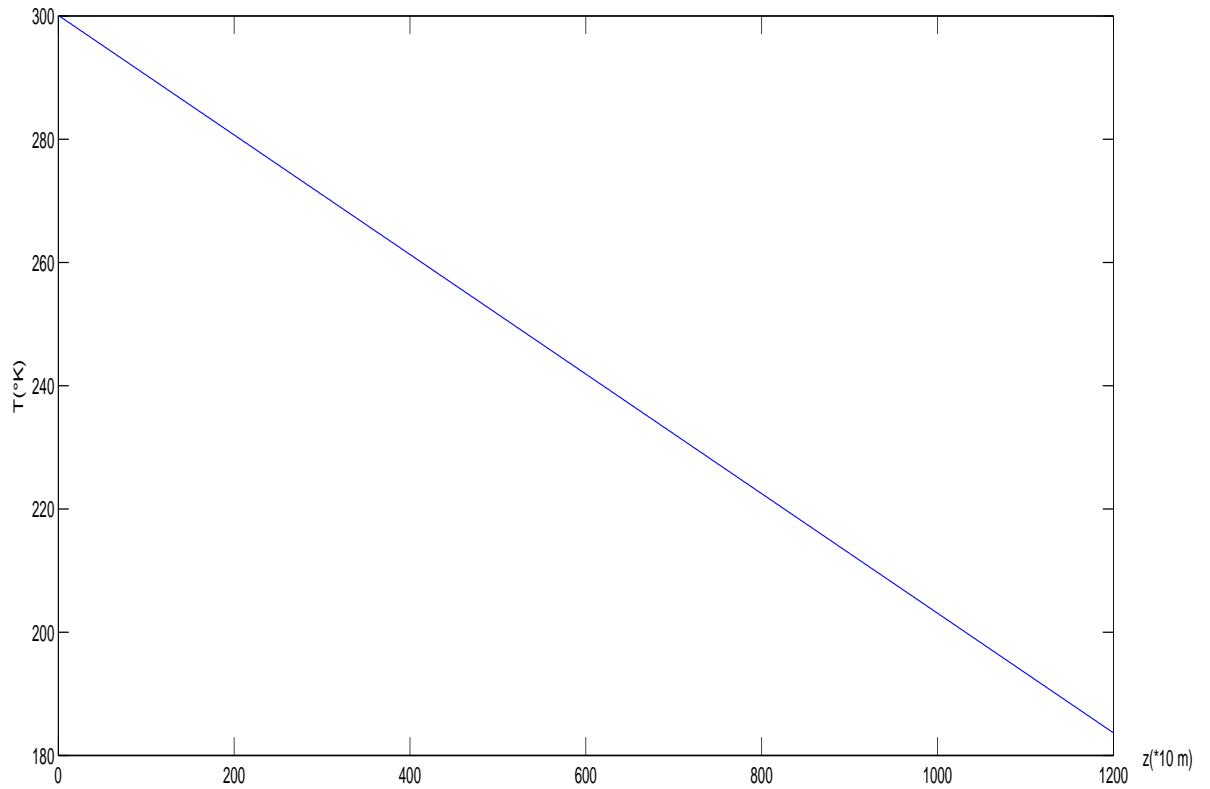


FIGURE 2.1 – La distribution de la température dans l'état hydrostatique sans condensation

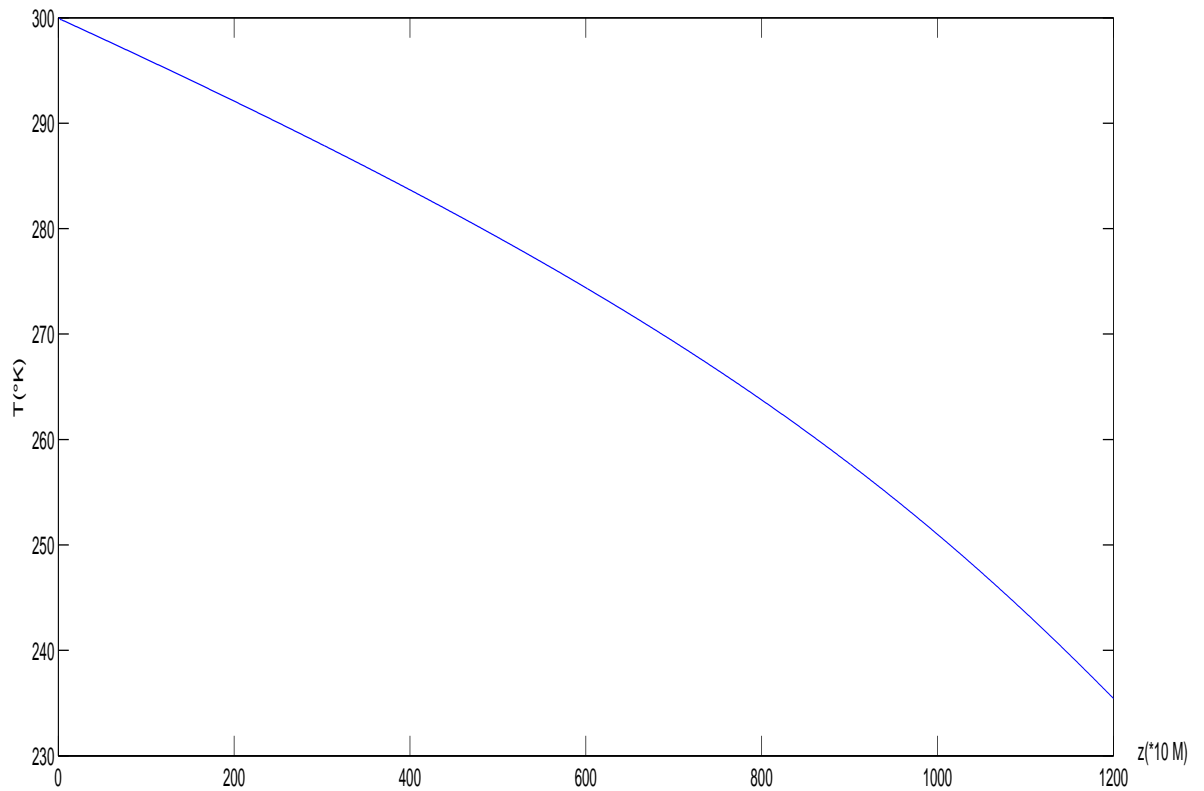


FIGURE 2.2 – La distribution de la température dans l'état hydrostatique avec la condensation

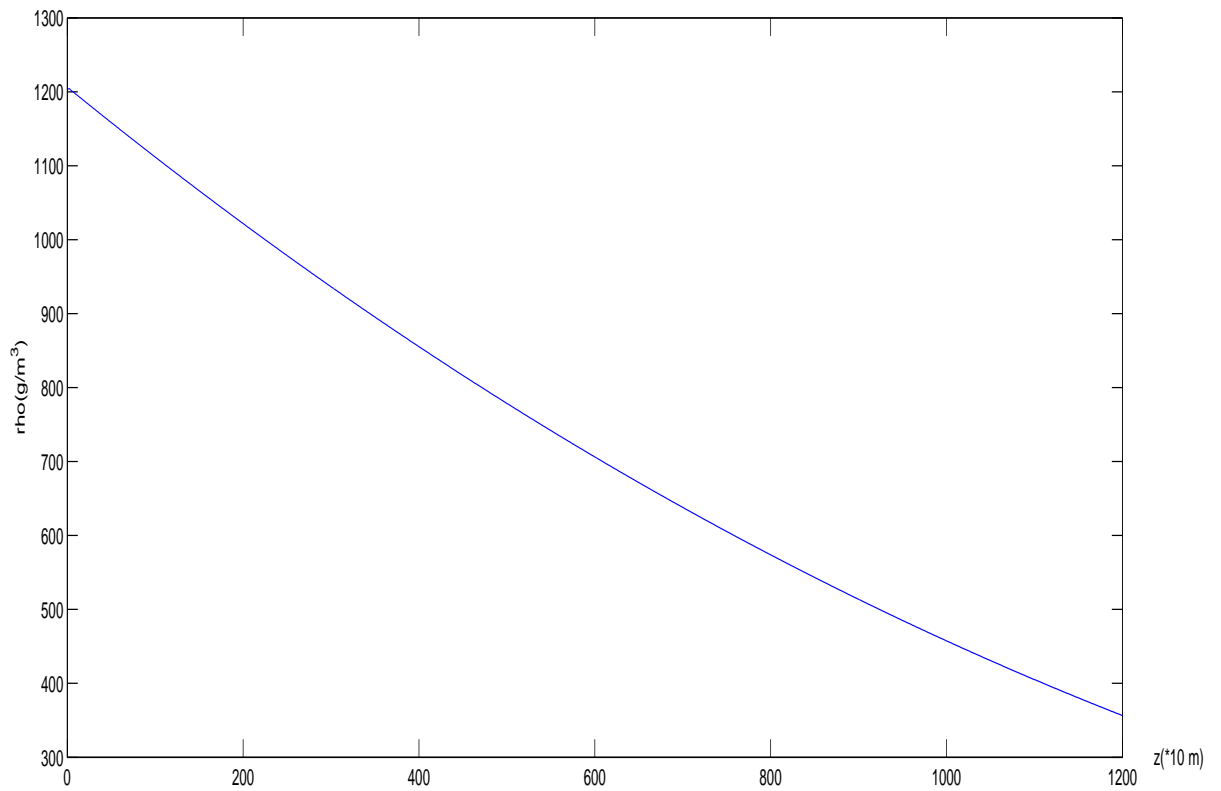


FIGURE 2.3 – La distribution de la densité dans l'état hydrostatique sans condensation

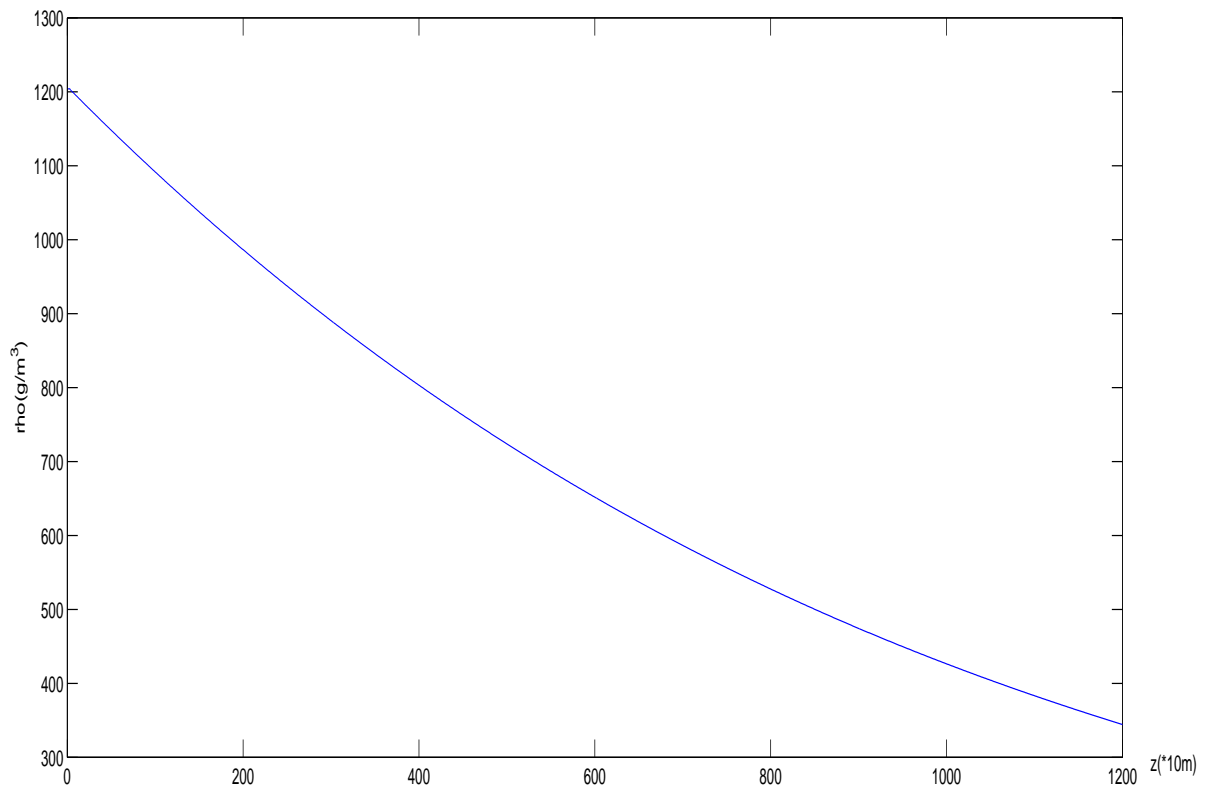


FIGURE 2.4 – La distribution de la densité dans l'état hydrostatique avec la condensation

2.2 Equations du mouvement de l'air avec la condensation de la vapeur d'eau dans une cheminée

Pour formuler le système d'équations qui modélise le mouvement vertical de l'air, accompagné par la condensation de la vapeur d'eau dans une cheminée, nous avons besoin du système d'équations cité dans le chapitre précédent.

Réduisons d'abord le système d'équations (1.2.3)-(1.3.9)-(1.4.10) en une dimension de l'espace ; pour la commodité de la notation dans la suite en écrivant v au lieu de v_3

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v) = -H_{tr}. \quad (2.2.13)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} p - g[\Sigma + \rho], \quad (2.2.14)$$

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right) + p \frac{\partial v}{\partial z} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + L_{tr} H_{tr} \quad (2.2.15)$$

On suppose que la pression p est donnée par l'équation suivante

$$p = \rho \frac{R}{\mu} T. \quad (2.2.16)$$

En substituant (2.2.16) et (2.2.13) dans (2.2.15), on obtient

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} - R_1 T \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \right) = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + L_{tr} H_{tr}. \quad (2.2.17)$$

Revenons maintenant à l'équation (2.2.14), pour laquelle on a pas fait des commentaires concernant les conditions aux extrémités du domaine $0 \leq z \leq \bar{z}_1$. On observe que la pression $p = R_1 \rho T$, calculée avec la température et la densité de l'état hydrostatique de l'air sec, est inférieure à celle calculée à partir de " l'état hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau " (voir Fig. 2.1, Fig 2.2, Fig 2.3 et Fig. 2.4). Ceci correspond aux observations des météorologues qui considèrent l'existence d'une force poussant l'air vert le haut lorsqu'il y a la condensation de la vapeur d'eau dans l'air. Selon ces conditions, nous allons déterminer notre propre mécanisme de l'évolution, en définissant une force f

due à la différence entre la pression $p(t, \bar{z}_1)$ au sommet à l'intérieur de la cheminée et la pression p_{ex} de l'état hydrostatique de l'air sec à l'extérieur, ainsi on a

$$\int_0^{\bar{z}_1} f(t, z) dz = R_1 \rho(t, \bar{z}_1) T(t, \bar{z}_1) - p_{ex}; \quad (2.2.18)$$

En fait, dans certains essais de simulation du mouvement vertical ascendant de l'air, accompagné par la condensation de la vapeur d'eau, on trouve une croissance infinie de v (voir [7]), ce qui ne correspond pas aux observations des météorologues, pour que la croissance de la vitesse sera ralentie d'une manière analogue à ce qui se passe dans la nature, nous introduisons comme hypothèse, l'effet de "la friction" entre les gouttelettes et l'air (ou la friction entre les cristaux de glace et l'air). En effet les météorologues observent que la vitesse des gouttelettes ou de cristaux de glace par rapport à l'air environnant se stabilise rapidement après leur(s) création(s) (voir [22]); ceci veut dire que, dans une bonne approximation suivant le principe d'action-réaction, l'effet de la force gravitationnelle sur les gouttelettes ou les cristaux de glace devient celui de la gravitation sur l'air (voir [24]).

Considérons le système d'équations (2.2.13)-(2.2.15) en tenant compte de la condition (2.2.18), on aura alors

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v) = -H_{tr}, \quad (2.2.19)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - R_1 \frac{\partial}{\partial z}(\rho T) - g[\Sigma + \rho] + f, \quad (2.2.20)$$

$$\begin{aligned} \rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right) - R_1 T \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = \\ = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + (R_1 T + L_{tr}) H_{tr}, \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

où H_{tr} est donnée par (2.1.2).

Si on néglige la viscosité et la conductibilité thermique, les équations (2.2.20)-(2.2.21), seront réduites à

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -R_1 \frac{\partial}{\partial z}(\rho T) - g[\Sigma + \rho] + f, \quad (2.2.22)$$

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right) - R_1 T \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = (R_1 T + L_{tr}) H_{tr}. \quad (2.2.23)$$

2.3 Séparation de l'évolution temporelle et la structure verticale

Le système d'équations aux dérivées partielles (2.2.19)-(2.2.21) n'est pas facile à résoudre, cependant, on a vu que la distribution de T et ρ dans l'état hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau est obtenue comme solution du système d'équations (2.1.4), (2.1.6) et cette solution peut être construite par la méthode de différences finies. Cela nous suggère que, si nous adoptons une approximation de telle sorte que le calcul de la structure verticale peut être exécutée séparément de celle de l'évolution temporelle, une application simple de la méthode de différences finies nous a donnée la solution numérique ; mais la question de l'estimation de la différence entre la solution de l'approximation et celle de du système original (2.2.19)-(2.2.21) reste posée et devrait être étudiée dans un futur proche.

Pour résoudre le système d'équations (2.2.19)-(2.2.21) numériquement nous proposons les approximations suivantes, en effet on pose

$$v = \alpha(t) w(t, z), \quad (2.3.24)$$

tout en supposant

$$\partial_t \rho(t, z) \approx 0, \quad \partial_t T(t, z) \approx 0, \quad \partial_t w(t, z) \approx 0. \quad (2.3.25)$$

Avec les approximations (2.3.24)-(2.3.25) l'équation (2.2.20) se réduit à

$$\rho w \frac{d}{dt} \alpha + \rho \alpha^2 w \partial_z w = \mu \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - R_1 \frac{\partial}{\partial z} (\rho T) - g[\Sigma + \rho] + f. \quad (2.3.26)$$

En outre, on trouve qu'il est commode d'adopter l'approximation suivante pour $f(t, z)$

$$f(t, z) = \rho(t, z) w(t, z) \frac{p(t, \bar{z}_1) - p_{ex}}{\int_0^{\bar{z}_1} \rho(t, z') w(t, z') dz'}. \quad (2.3.27)$$

Comme la fonction $f(t, z)$ vérifie (2.2.18) et puisque la variation en z de $\rho(t, z)w(t, z)$ est assez petite, alors $f(t, z)$ sera également petite. En substituant (2.3.27) dans (2.3.26), on obtient

$$\begin{aligned} & \rho w \frac{d}{dt} \alpha + \rho \alpha^2 w \partial_z w = \\ & = \mu \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - R_1 \frac{\partial}{\partial z} (\rho T) - g[\Sigma + \rho] + \rho w \frac{p(t, \bar{z}_1) - p_{ex}}{\int_0^{\bar{z}_1} \rho(t, z') w(t, z') dz'}, \end{aligned}$$

ainsi, l'équation (2.3.26) devient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \alpha(t) &= \frac{p(t, \bar{z}_1) - p_{ex}}{\int_0^{\bar{z}_1} \rho(t, z') w(t, z') dz'}, \\ \rho \alpha^2 w \partial_z w &= \mu \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - R_1 \frac{\partial}{\partial z} (\rho T) - g[\Sigma + \rho]. \end{aligned}$$

Concernant la fonction $\Sigma(t, z)$, nous pensons qu'il est difficile de déterminer sa déduction théorique, en attendant les données d'observations qui la définie de manière plus cohérente du point de vue physique ; par conséquent nous allons utiliser l'approximation suivante

$$\begin{aligned} \Sigma(t) &= \frac{1}{\bar{z}_1} \int_0^t \varphi(t-s) \int_0^{\bar{z}_1} H_{tr}(z, s) dz ds = \\ &= \frac{1}{\bar{z}_1} \int_0^t \varphi(t-s) \int_0^{\bar{z}_1} \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \right) v dz ds \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

où $\int_0^{\bar{z}_1} H_{tr}(z, s) dz$ représente la densité totale de l'eau liquide ou solide réalisée dans la cheminée et φ est la probabilité de Permanence des gouttelettes dans l'air . En fait, si $\varphi(t-s)$ est la probabilité de permanence de l'eau liquide ou solide produit au moment s dans le domaine $0 < z < \bar{z}_1$, la quantité $\Sigma(t)$ définie par (2.3.28) est la moyenne (dans $0 < z < \bar{z}_1$) de la masse totale de l'eau liquide ou solide présente dans l'air à l'instant t .

Enfin l'interprétation de (2.3.25) est la possibilité de considérer ρ , T , w en fonction de z avec un paramètre t . Ecrivons $\rho(t; z)$, $T(t; z)$, $w(t; z)$ et $\frac{d\rho}{dz}$, $\frac{dT}{dz}$, $\frac{dw}{dz}$ au lieu de $\frac{\partial \rho}{\partial z}$, $\frac{\partial T}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$, notre problème devient

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = \frac{R_1 \rho(t; \bar{z}_1) T(t; \bar{z}_1) - p_{ex}}{\int_0^{\bar{z}_1} \rho(t; z') w(t; z') dz'}, \quad (2.3.29)$$

$$w \frac{d\rho}{dz} + \rho \frac{dw}{dz} = - \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \right) w, \quad (2.3.30)$$

$$\begin{aligned} \rho c_v \frac{dT}{dz} - R_1 T \frac{d\rho}{dz} - \frac{\kappa}{\alpha(t)w} \frac{d^2 T}{dz^2} = \frac{\mu \alpha(t)}{w} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + \\ + \left(R_1 T + L_{gl} \right) \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \rho - \frac{d}{dT} \bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} T \right), \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

$$\begin{aligned} \alpha(t)^2 \rho w \frac{dw}{dz} + R_1 \rho \frac{dT}{dz} + R_1 T \frac{d\rho}{dz} - \mu \alpha(t) \frac{d^2 w}{dz^2} = -g\rho \\ - g \frac{1}{z_1} \int_0^t \varphi(t-s) \int_0^{\bar{z}_1} \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \right) \alpha w dz ds. \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

Où (2.3.29)-(2.3.32) découle de l'équation de la quantité de mouvement, (2.3.30) représente l'équation de la conservation de la masse et l'équation (2.3.31) est le bilan d'énergie.

Comme nous nous intéressons au mouvement vertical ascendant de l'air, on considère le cas où $v = \alpha w$ est positive et n'est pas trop petit (de sorte que dans (2.3.31) le terme $\frac{\kappa}{\alpha(t)w}$ est relativement petit).

Comme les équations (2.3.31)-(2.3.32) sont du second ordre, pour le problème de Cauchy, près des conditions $\rho(t;0)$, $T(t;0)$, $w(t;0)$, nous devons donner des valeurs à

$$\frac{d}{dz} T(t; z) \Big|_{z=0}, \quad \frac{d}{dz} w(t; z) \Big|_{z=0}.$$

La condition initiale de la dérivée première pour $z = 0$ peut être un problème difficile dans la théorie générale des équations différentielles ordinaires. Mais dans notre cas, comme les coefficients sont suffisamment réguliers et loin des singularités et les coefficients de la viscosité et la thermoconductibilité sont supposés d'être petits, nous pouvons chercher la solution de (2.3.31)-(2.3.32) dans un voisinage de la solution des équations sans viscosité et conductibilité thermique, en mettant la valeur de la première dérivée de la solution des équations sans viscosité et conductibilité thermique comme l'état initial de la première dérivée de notre solution (voir [3]).

Si nous négligeons la viscosité et la conductibilité thermique, les équations (2.3.31) et (2.3.32) seront réduites à

$$\rho c_v \frac{dT}{dz} - R_1 T \frac{d\rho}{dz} =$$

$$= (R_1 T + L_{gl}) \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \rho - \frac{d}{dT} \bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} T \right), \quad (2.3.33)$$

$$\alpha(t)^2 \rho w \frac{dw}{dz} + R_1 \rho \frac{dT}{dz} + R_1 T \frac{d\rho}{dz} = -g\rho$$

$$-g \frac{1}{z_1} \int_0^t \varphi(t-s) \int_0^{\bar{z}_1} \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dT} \bar{\pi}_{vs}(T) \right) \alpha w dz ds. \quad (2.3.34)$$

2.4 Simulation numérique du mouvement vertical de l'air dans une cheminée

Dans cette partie nous présentons les résultats du calculs numérique pour le système d'équations du mouvement vertical de l'air dans une cheminée ; nous allons traiter le système d'équations sans la viscosité et la thermoconductibilité et les équations analogues avec la viscosité et la thermoconductibilité, en utilisant la méthode de différences finies. On verra que les deux solutions numérique ne diffèrent pas sensiblement.

Choix des paramètres et calcul numérique

Pour effectuer les calculs, nous devons clarifier certains paramètres qui interviennent dans les équations. En effet les paramètres physiques g , R_1 , c_v sont

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2, \quad R_1 = \frac{R}{\mu_m}, \quad c_v = \frac{5}{2} \frac{R}{\mu_m},$$

$$R = 8,31 \cdot 10^7 \text{ erg/mole} \cdot \text{K}, \quad \mu_m = 28,96 \text{ g/mole}.$$

Dans les calculs on utilise pour la densité de la vapeur saturée $\bar{\pi}_{vs}(T)$ la valeur relative à la surface du liquide

$$\bar{\pi}_{vs}(T) = \frac{1}{R_1 T} E_0 \cdot 10^{\frac{7,63(T-273,15)}{T-31,25}}, \quad E_0 = 6,107 \quad (\text{mbar}),$$

et pour la chaleur latente L_{tr} on utilise la valeur relative à la transition de phase de l'eau de l'état gazeux à l'état liquide

$$L_{gl}(T) \approx (3244 - 2,72 T)10^3 \quad (J/kg).$$

La correction de la fonction L_{tr} par la considération de la transition de phase de l'eau de l'état gazeux à l'état solide, rend le calcul assez compliqué et ne modifie pas beaucoup le résultat (voir [17], [19], [22], [25]).

pour la pression à l'extérieur de la cheminée p_{ex} , dans notre exemple de simulation nous utilisons

$$p_{ex} = R_1 \rho_{sc}(\bar{z}_1) T_{sc}(\bar{z}_1),$$

où $T_{sc}(z)$ et $\rho_{sc}(z)$ sont les fonctions de la température et de la densité de l'air dans l'état hydrostatique (sans condensation), c.à.d

$$T_{sc}(z) = T(0) - \frac{g(\gamma - 1)}{R_1 \gamma} z, \quad \frac{g(\gamma - 1)}{R_1 \gamma} \approx 9,8 \text{ } ^\circ K/km,$$

$$\rho_{sc}(z) = \left(\rho(0)^{\gamma-1} - \frac{\gamma-1}{\gamma h} g z \right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

$$\gamma = \frac{R_1 + c_v}{c_v} \quad (\gamma \text{ est l'exposante adiabatique}),$$

$$h = \text{constante} = \frac{(R_1 T(0))^\gamma}{\bar{p}_0^{\gamma-1}}, \quad \bar{p}_0 = 1013 \text{ mb.}$$

En ce qui concerne la fonction $\varphi(\cdot)$ (la probabilité de permanence des gouttelettes après le temps τ depuis leurs création), il n'est pas difficile de comprendre que la moyenne du temps de permanence est donnée par

$$\int_0^{\infty} \varphi(\tau) d\tau.$$

On propose une forme particulière de la fonction $\varphi(\tau)$, c'est à dire

$$\varphi(\tau) = e^{-\frac{\pi \tau^2}{4Q^2}}, \quad (2.4.35)$$

où Q est une constante que nous allons définir plus tard.

On va calculer son intégrale de 0 à $+\infty$. On a

$$\int_0^{+\infty} \varphi(\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\pi\tau^2}{4Q^2}} d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\tau^2}{4Q^2}} d\tau$$

En utilisant le changement de variables

$$x = \frac{\sqrt{\pi}\tau}{\sqrt{2}Q}.$$

C'est à dire

$$\tau = \frac{\sqrt{2}Q}{\sqrt{\pi}}x.$$

On a

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\tau^2}{4Q^2}} d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d\tau}{dx} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{\sqrt{2}Q}{\sqrt{x}} dx = \frac{Q}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\frac{Q}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{Q}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{Q}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} 2\pi r dr \right) = Q \left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \right)^{\frac{1}{2}} = Q \left(- \int_0^{\infty} \frac{d}{dr} e^{-\frac{r^2}{2}} dr \right)^{\frac{1}{2}} = Q.$$

ça signifie que, si on prend $\varphi(\tau)$ de la forme (2.4.35), alors la moyenne du temps de la permanence des gouttelettes dans l'air est Q . Si on utilise la discrétisation avec le pas du temps est 5 secondes, alors pour que la moyenne de permanence soit 20 minutes (= 1200 secondes), il faut prendre la fonction

$$\varphi_1(\tau) = \exp\left(-\frac{\pi\tau^2}{4(240)^2}\right), \quad \tau \geq 0.$$

Pour réaliser la simulation nous choisissons

$$0 \leq z \leq 12000 \text{ (m)}, \quad 0 \leq t \leq 3600 \text{ (s)},$$

$$\alpha(0) = 0.01 \text{ (m/s)}, \quad T(t;0) = 300 \text{ (K)},$$

$$\rho(t;0) = 1204 \text{ (g/m}^3\text{)}, \quad w(t;0) = 1.$$

2.4.1 schéma numérique pour les équations sans la viscosité et la thermoconductibilité

Pour construire le schéma numérique, on discrétise les intervalles $0 \leq t \leq \bar{t}_1 = 3600$ (s) et $0 \leq z \leq \bar{z}_1 = 12000$ (m) en $\{t_i\}_{i=0}^{N_1}$ et $\{z_j\}_{j=0}^{N_2}$ avec les pas δ_t et δ_z , c'est-à-dire

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_1-1} < t_{N_1} = \bar{t}_1,$$

$$t_i - t_{i-1} = \delta_t \quad \forall i \in \{1, \dots, N_1\}, \quad (2.4.36)$$

$$0 = z_0 < z_1 < \dots < z_{N_2-1} < z_{N_2} = \bar{z}_1,$$

$$z_j - z_{j-1} = \delta_z \quad \forall j \in \{1, \dots, N_2\}. \quad (2.4.37)$$

Avec la discrétisation du domaine (2.4.36) et (2.4.37), nous proposons un schéma de différences finies pour le système d'équations (2.3.29), (2.3.30), (2.3.33) et (2.3.34). En effet, lorsque les valeurs de $w(t_{i'}; z_j)$, $\varrho(t_{i'}; z_j)$, $T(t_{i'}; z_j)$ et $\alpha(t_{i-1})$ ($i' = 1, \dots, i-1$, $j = 1, \dots, N_2$) sont données, nous pouvons déterminer les valeurs de $\alpha(t_i)$ et $\Sigma(t_i)$ par les équations

$$\alpha(t_i) = \alpha(t_{i-1}) + \delta_t \frac{R_1 \varrho(t_{i-1}; \bar{z}_1) T(t_{i-1}; \bar{z}_1) - p_{ex}}{\delta_z \sum_{j'=1}^{N_2} \varrho(t_{i-1}; z_{j'}) w(t_{i-1}; z_{j'})}, \quad (2.4.38)$$

$$\Sigma(t_i) = \frac{1}{\bar{z}_1} \delta_t \sum_{i'=1}^{i-1} \varphi(t_i - t_{i'}) \alpha(t_{i'}) \delta_z \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{N_2} (D_1(i', j) - D_2(i', j)) w(t_{i'}; z_j), \quad (2.4.39)$$

$$D_1(i', j) = \bar{\pi}_{vs}(T(t_{i'}; z_j)) \frac{1}{\varrho(t_{i'}; z_{j-1})} (\varrho(t_{i'}; z_j) - \varrho(t_{i'}; z_{j-1})),$$

$$D_2(i', j) = \frac{d\bar{\pi}_{vs}(T)}{dT}(t_{i'}; z_j) (T(t_{i'}; z_j) - T(t_{i'}; z_{j-1})).$$

Puis, quand nous avons les valeurs de $\alpha(t_i)$, $\Sigma(t_i)$, $w(t_i; z_{j-1})$, $\varrho(t_i; z_{j-1})$ et $T(t_i; z_{j-1})$, on peut déterminer les valeurs de $w(t_i; z_j)$, $\varrho(t_i; z_j)$ et $T(t_i; z_j)$ à partir des équations

$$w(t_i; z_{j-1}) \varrho(t_i; z_j) + \varrho(t_i; z_{j-1}) w(t_i; z_j) =$$

$$= 2w(t_i; z_{j-1})\rho(t_i; z_{j-1}) - (D_1(i, j) - D_2(i, j))w(t_i; z_{j-1}), \quad (2.4.40)$$

$$\begin{aligned} & \rho(t_i; z_{j-1})c_v T(t_i; z_j) - R_1 T(t_i; z_{j-1})\rho(t_i; z_j) = \\ & = \rho(t_i; z_{j-1})c_v T(t_i; z_{j-1}) - R_1 T(t_i; z_{j-1})\rho(t_i; z_{j-1}) + \\ & \quad + \delta_z \left(R_1 T(t_i; z_{j-1}) + L_{tr} \right) (D_1(i, j) - D_2(i, j)), \end{aligned} \quad (2.4.41)$$

$$\begin{aligned} & \alpha(t_i)^2 \rho w(t_i; z_{j-1}) w(t_i; z_j) + R_1 \rho(t_i; z_{j-1}) T(t_i; z_j) + \\ & + R_1 T(t_i; z_{j-1}) \rho(t_i; z_j) = \alpha(t_i)^2 \rho w(t_i; z_{j-1}) w(t_i; z_{j-1}) + \\ & \quad + 2R_1 \rho(t_i; z_{j-1}) T(t_i; z_{j-1}) - \delta_z g \rho(t_i; z_{j-1}) - \delta_z g \Sigma(t_i); \end{aligned} \quad (2.4.42)$$

dans (2.4.40) et (2.4.41), $D_1(i, j)$ et $D_2(i, j)$ sont comme (2.4.39) (évidemment en remplaçant i par i').

2.4.2 schéma numérique pour les équations avec la viscosité et la thermoconductibilité

Pour calculer la solution du système d'équations (2.3.29)-(2.3.31)-(2.3.32), nous utilisons la méthode de différences finies avec les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} \Big|_{z=i} & \approx \frac{w(i+1) - w(i)}{\delta_z}, \\ \frac{d\alpha}{dt} \Big|_{t=i} & \approx \frac{\alpha(j) - \alpha(j-1)}{\delta_t}, \\ \frac{d^2 w}{dz^2} \Big|_{z=i} & \approx \frac{w(i+1) - 2w(i) + w(i-1)}{\delta^2}, \\ \frac{d^2 T}{dz^2} \Big|_{z=i} & \approx \frac{T(i+1) - 2T(i) + T(i-1)}{\delta^2}, \end{aligned}$$

En ce qui concerne les conditions initiales $\frac{d}{dz} T(t; z) \Big|_{z=0}$ et $\frac{d}{dz} w(t; z) \Big|_{z=0}$, on utilise les valeurs des dérivées de manière analogues à la solution des équations sans la viscosité et la thermoconductibilité (voir [3]).

Pour la décritisation du domaine $0 \leq t \leq \bar{t}_1 = 3600$ (s) et $0 \leq z \leq \bar{z}_1 = 12000$ (m), on suit les mêmes étapes utilisées pour les équations sans la viscosité et la conductibilité thermique.

Avec la décritisation du domaine, quand on a les valeurs de $w(t_{i'}; z_j)$, $\rho(t_{i'}; z_j)$, $T(t_{i'}; z_j)$ et $\alpha(t_{i-1})$ ($i' = 1, \dots, i-1$, $j = 1, \dots, N_2$), on détermine $\alpha(t_i)$ et $\Sigma(t_i)$ par

$$\alpha(t_i) = \alpha(t_{i-1}) + \delta_t \frac{R_1(\rho(t_{i-1}; \bar{z}_1)T(t_{i-1}; \bar{z}_1) - \rho_{hs}(\bar{z}_1)T_{hs}(\bar{z}_1))}{\delta_z \sum_{j'=1}^{N_2} \rho(t_{i-1}; z_{j'})w(t_{i-1}; z_{j'})}, \quad (2.4.43)$$

$$\Sigma(t_i) = \frac{1}{\bar{z}_1} \delta_t \sum_{i'=1}^{i-1} \varphi(t_i - t_{i'}) \alpha(t_{i'}) \delta_z \sum_{j=1}^{N_2} (D_1(i', j+1) - D_2(i', j+1)) w(t_{i'}; z_j), \quad (2.4.44)$$

$$D_1(i', j+1) = \bar{\pi}_{vs}(T(t_{i'}; z_j)) \frac{1}{\rho(t_{i'}; z_j)} (\rho(t_{i'}; z_{j+1}) - \rho(t_{i'}; z_j)),$$

$$D_2(i', j+1) = \frac{d\bar{\pi}_{vs}(T)}{dT}(t_{i'}; z_j) (T(t_{i'}; z_{j+1}) - T(t_{i'}; z_j)).$$

Puis, quand nous avons les valeurs de $\alpha(t_i)$, $\Sigma(t_i)$, $w(t_i; z_j)$, $\rho(t_i; z_j)$ et $T(t_i; z_j)$, on peut déterminer les valeurs de $w(t_i; z_{j+1})$, $\rho(t_i; z_{j+1})$ et $T(t_i; z_{j+1})$ à partir des équations

$$w(t_i; z_j) \rho(t_i; z_{j+1}) + \rho(t_i; z_j) w(t_i; z_{j+1}) =$$

$$= 2w(t_i; z_j) \rho(t_i; z_j) - (D_1(i, j+1) - D_2(i, j+1)) w(t_i; z_j), \quad (2.4.45)$$

$$(\delta_z \rho(t_i; z_j) c_v - \kappa) T(t_i; z_{j+1}) - \delta_z R_1 T(t_i; z_j) \rho(t_i; z_{j+1}) -$$

$$- \alpha(t_i)^2 \mu (w(t_i; z_j) - w(t_i; z_{j-1})) w(t_i; z_{j+1}) =$$

$$= \delta_z \rho(t_i; z_j) c_v T(t_i; z_j) + \kappa (T(t_i; z_{j-1}) - 2T(t_i; z_j)) - \delta_z R_1 T(t_i; z_j) \rho(t_i; z_j) +$$

$$+ \delta_z^2 (R_1 T(t_i; z_j) + L_{tr}) (D_1(i, j+1) - D_2(i, j+1)) - \alpha(t_i)^2 \mu (w(t_i; z_j) - w(t_i; z_{j-1})) w(t_i; z_j), \quad (2.4.46)$$

$$\delta_z \alpha(t_i)^2 \rho w(t_i; z_j) w(t_i; z_{j+1}) - \alpha(t_i) \mu w(t_i; z_{j+1}) + \delta_z R_1 \rho(t_i; z_j) T(t_i; z_{j+1}) +$$

$$+ \delta_z R_1 T(t_i; z_j) \rho(t_i; z_{j+1}) = \delta_z \alpha(t_i)^2 \rho w^2(t_i; z_j) + 2\delta_z R_1 \rho(t_i; z_j) T(t_i; z_j) +$$

$$+ \alpha(t_i) \mu (w(t_i; z_{j-1}) - 2w(t_i; z_j)) - \delta_z^2 g \rho(t_i; z_j) - \delta_z^2 g \Sigma(t_i); \quad (2.4.47)$$

Dans (2.4.40) et (2.4.41), $D_1(i, j+1)$ et $D_2(i, j+1)$ sont comme (2.4.39) (en substituant i au lieu de i').

2.4.3 Résultat du calculs numérique

Nous illustrons ci-dessous les valeurs de la solution $(w(i), T(i), \rho(i), \alpha(i))$ du système d'équations (2.4.38)-(2.4.42) avec $\mu = \kappa = 0$ et celles de la solution $(w(i+1), T(i+1), \rho(i+1), \alpha(i))$ du système d'équations (2.4.43)-(2.4.47) avec $\mu = 20, \kappa = 10$

La température

	Sans la viscosité	Avec la viscosité
$i = 0$	$T = 300$	$T = 300$
$i = 200$	$T = 291,836$	$T = 291,962$
$i = 400$	$T = 282,904$	$T = 283,248$
$i = 600$	$T = 272,886$	$T = 273,421$
$i = 800$	$T = 260,893$	$T = 261,726$
$i = 1000$	$T = 245,680$	$T = 246,84$
$i = 1200$	$T = 226,037$	$T = 227,324$

La densité

	Sans la viscosité	Avec la viscosité
$i = 0$	$\rho = 1204$	$\rho = 1204$
$i = 200$	$\rho = 976,286$	$\rho = 975,977$
$i = 400$	$\rho = 785,693$	$\rho = 784,265$
$i = 600$	$\rho = 626,747$	$\rho = 625,524$
$i = 800$	$\rho = 496,595$	$\rho = 494,859$
$i = 1000$	$\rho = 390,222$	$\rho = 388,043$
$i = 1200$	$\rho = 302,652$	$\rho = 300,326$

La vitesse $\alpha(t)$

	Sans la viscosité	Avec la viscosité
$j = 0$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.01$
$j = 40$	$\alpha = 33,77$	$\alpha = 33.89$
$j = 60$	$\alpha = 35,23$	$\alpha = 35.05$
$j = 100$	$\alpha = 30,67$	$\alpha = 30.53$
$j = 150$	$\alpha = 24,27$	$\alpha = 24.38$
$j = 250$	$\alpha = 16.02$	$\alpha = 16.53$
$j = 400$	$\alpha = 17.08$	$\alpha = 17.28$
$j = 500$	$\alpha = 18.44$	$\alpha = 18.56$
$j = 600$	$\alpha = 18.28$	$\alpha = 18.50$
$j = 650$	$\alpha = 18.07$	$\alpha = 18.32$
$j = 700$	$\alpha = 17.93$	$\alpha = 18.19$
$j = 720$	$\alpha = 17.89$	$\alpha = 18.15$

Si on utilise la discrétisation avec le pas de 5 secondes .et si nous voulons que la moyenne de permanence soit 30 minutes (= 1800 secondes), il faut prendre la fonction

$$\varphi_2(\tau) = \exp\left(-\frac{\pi \tau^2}{4(360)^2}\right), \quad \tau \geq 0.$$

La vitesse $\alpha(t)$ avec $\varphi_2(\tau)$

	Avec φ_1	Avec φ_2
$j = 0$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.01$
$j = 40$	$\alpha = 33,77$	$\alpha = 33,76$
$j = 60$	$\alpha = 35,23$	$\alpha = 35.21$
$j = 100$	$\alpha = 30,67$	$\alpha = 30.53$
$j = 150$	$\alpha = 24,27$	$\alpha = 23.60$
$j = 250$	$\alpha = 16.02$	$\alpha = 12.14$
$j = 400$	$\alpha = 17.08$	$\alpha = 9.51$
$j = 500$	$\alpha = 18.44$	$\alpha = 13.31$
$j = 600$	$\alpha = 18.28$	$\alpha = 14.20$
$j = 650$	$\alpha = 18.07$	$\alpha = 14.04$
$j = 700$	$\alpha = 17.93$	$\alpha = 13.79$
$j = 720$	$\alpha = 17.89$	$\alpha = 13.68$

Les résultats de la simulation numérique montrent bien les aspects fondamentaux de l'évolution du mouvement vertical de l'air avec la condensation de la vapeur d'eau. En effet les figures 2.9 et 2.13 illustrent le développement de la vitesse verticale de l'air $\alpha(t)$ sans les termes de la viscosité et la conductibilité thermique, où la première figure est calculée avec $\varphi_1(\tau) = \frac{1}{2400} e^{-\frac{\pi\tau^2}{4 \cdot 240^2}}$ et la seconde avec $\varphi_2(\tau) = \frac{1}{2400} e^{-\frac{\pi\tau^2}{4 \cdot 360^2}}$; la vitesse est représentée dans l'axe vertical en m/s et l'axe horizontal représente le temps (le pas du temps est $5seconds$)

Dans la figure 2.9, la valeur maximale de la vitesse est 35 m/s avec $t = 4$ minutes (50 pas), tandis que la valeur de la stabilisation est autour de 21 m/s. D'autre part la valeur maximale de la vitesse est 35 m/s dans la figure 2.13 avec $t = 4$ minutes (50 pas), alors que la valeur de la stabilisation est autour de 14 m/s. La différence entre la valeur maximale et la valeur de la stabilisation de la vitesse dans ces deux figures (2.9-2.13) est due au terme Σ qui représente la moyenne de permanence des gouttelettes dans l'air; en

fait dans la figure 2.9 on a supposé que la moyenne de permanence des gouttelettes dans l'air est de 20 minutes, par contre dans la figure 2.13 on l'a supposé de 30 minutes et donc l'effet de la friction entre les gouttelettes et l'air pour φ_2 sera plus fort que celle pour φ_1 , ce qui explique la petitesse de vitesse maximale dans la figure 2.13 par rapport à celle représentée dans la figure 2.9 (même chose pour la vitesse de la stabilisation).

Les figures 2.5, 2.7 et 2.11 illustrent la distribution verticale de la température, la densité et la vitesse $v = \alpha w$ au temps $t = 3600s$, pour $\varphi_1 = \frac{1}{2400} e^{-\frac{\pi r^2}{4 \cdot 240^2}}$ sans les termes de la viscosité et la thermoconductibilité thermique, tandis que les figures 2.6, 2.8 et 2.12 montrent la distribution verticale de la température, la densité et la vitesse $v = \alpha w$ au temps $t = 3600$ s, pour $\varphi_1(\tau) = \frac{1}{2400} e^{-\frac{\pi \tau^2}{4 \cdot 240^2}}$ avec les termes de la viscosité et thermoconductibilité thermique. On voit clairement que les deux solutions ne diffèrent pas ; quand le processus devient quasi-stationnaire, la croissance de la vitesse verticale selon la hauteur est due à la section constante de la cheminée ; en réalité la vitesse croit d'une manière inversement proportionnelle avec la densité.

On remarque aussi que la vitesse verticale de l'air $\alpha(t)$, croit rapidement à cause de l'effet de la chaleur latente, de la condensation de la vapeur, puis elle se stabilise à cause de l'effet de la friction des gouttelettes avec l'air.

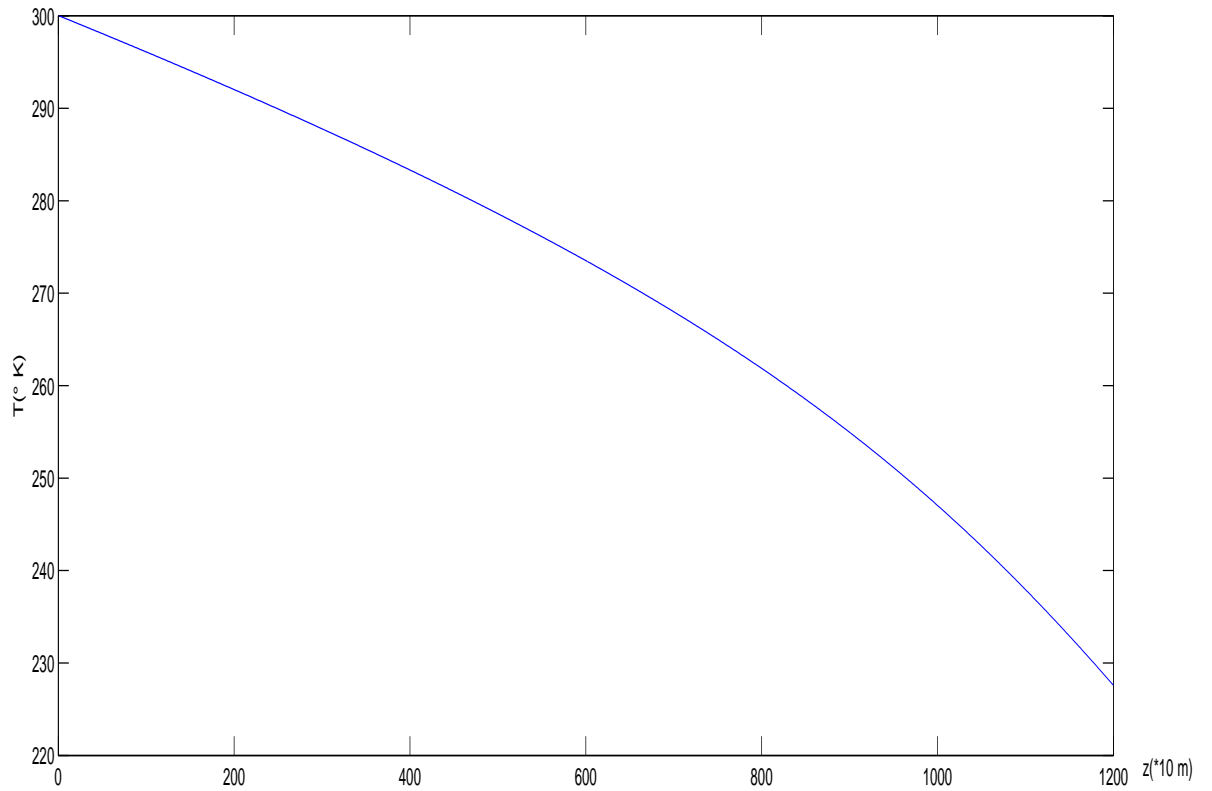


FIGURE 2.5 – La distribution de la température sans la viscosité et la thermoconductibilité thermique au temps $t=3600$ s

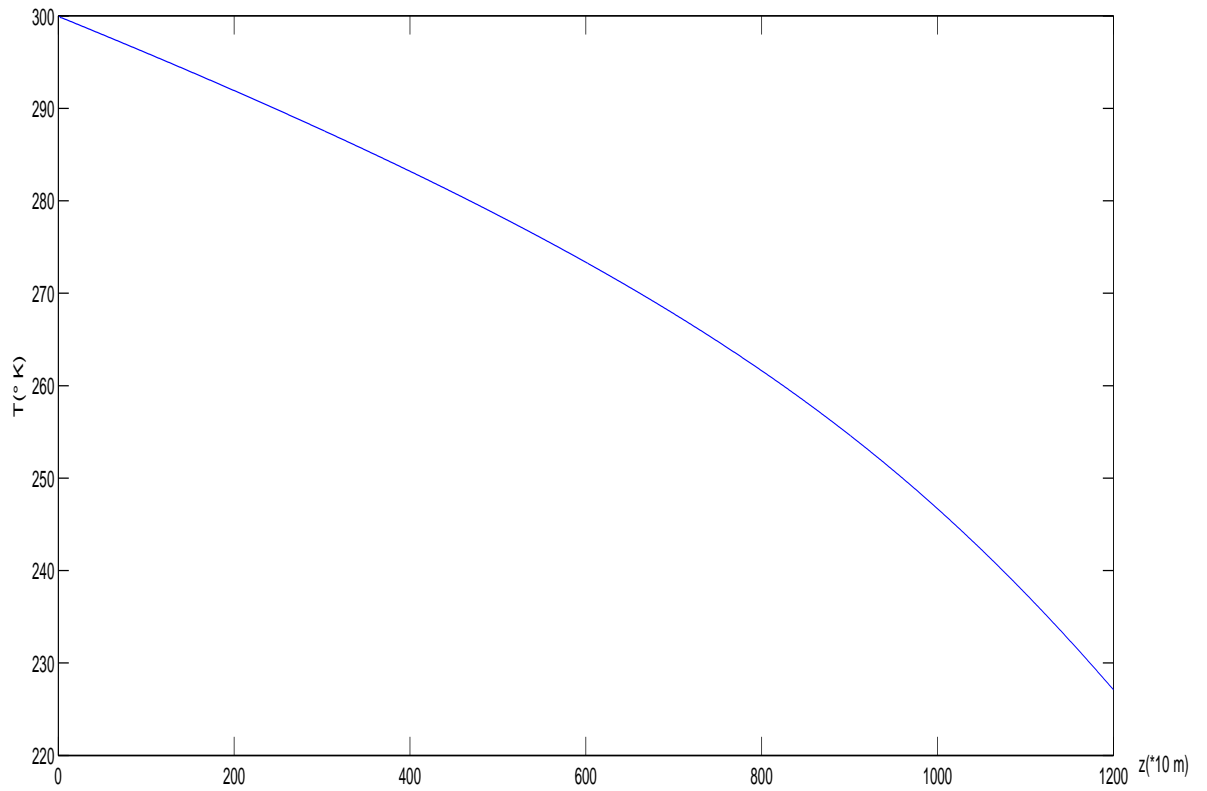


FIGURE 2.6 – La distribution de la température avec la viscosité et la thermoconductibilité
au temps $t=3600\text{ s}$

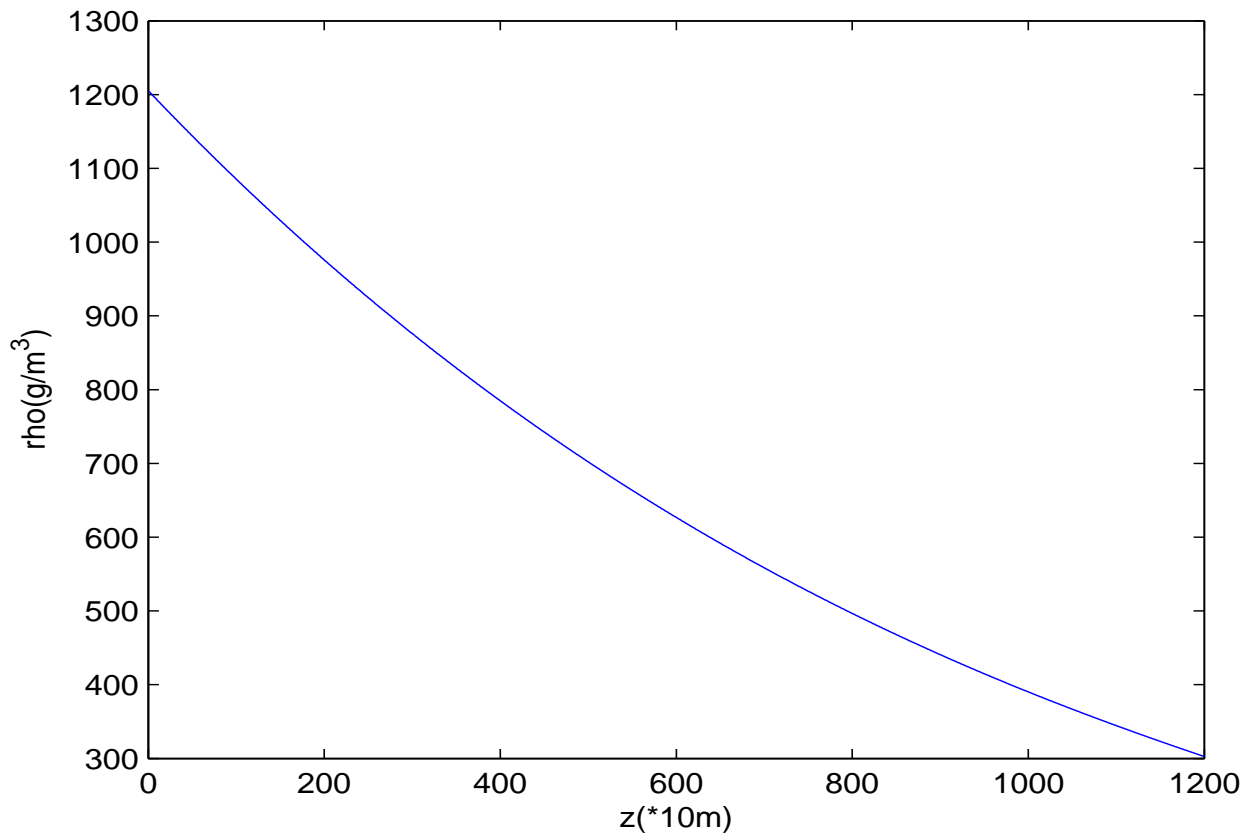


FIGURE 2.7 – La distribution de la densité sans la viscosité et la thermoconductibilité au temps $t=3600$ s

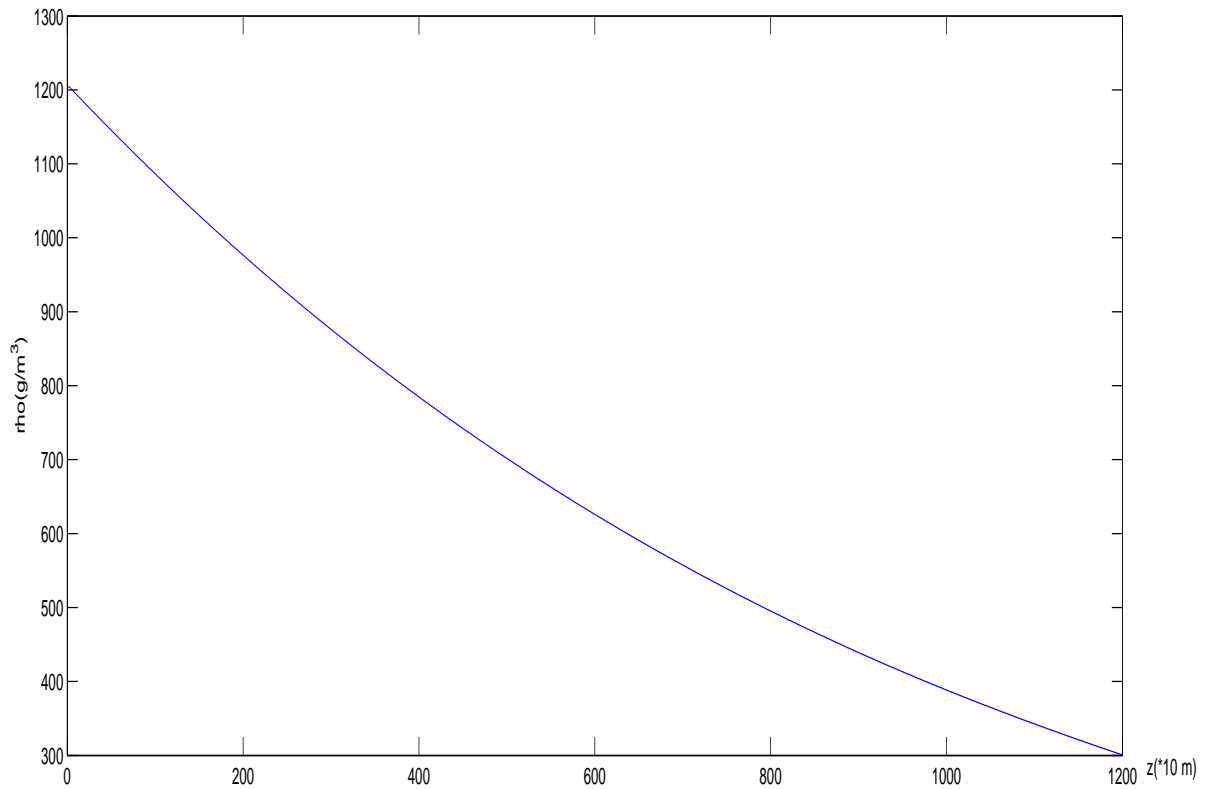


FIGURE 2.8 – La distribution de la densité avec la viscosité et la thermoconductibilité au temps $t=3600 \text{ s}$

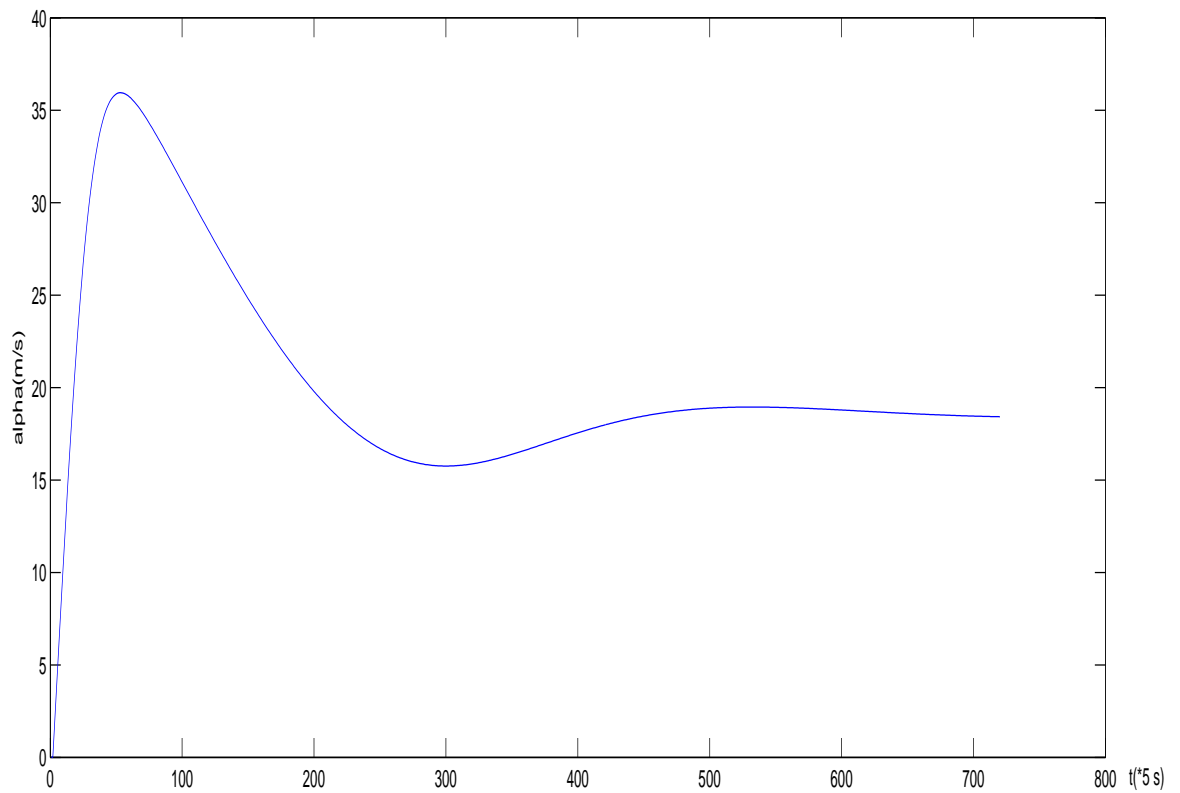


FIGURE 2.9 – La distribution de la vitesse $\alpha(t)$ sans la viscosité et la thermoconductibilité

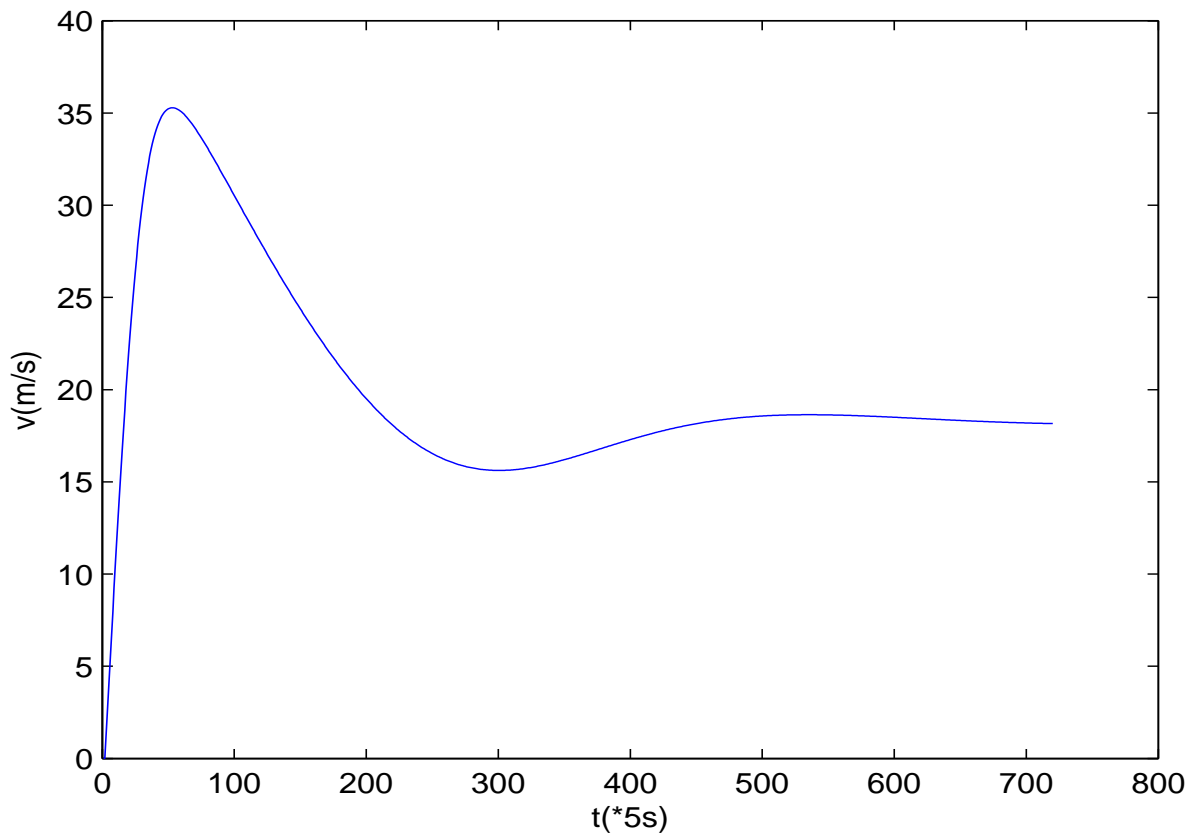


FIGURE 2.10 – La distribution de la vitesse $\alpha(t)$ avec la viscosité et la thermoconductibilité

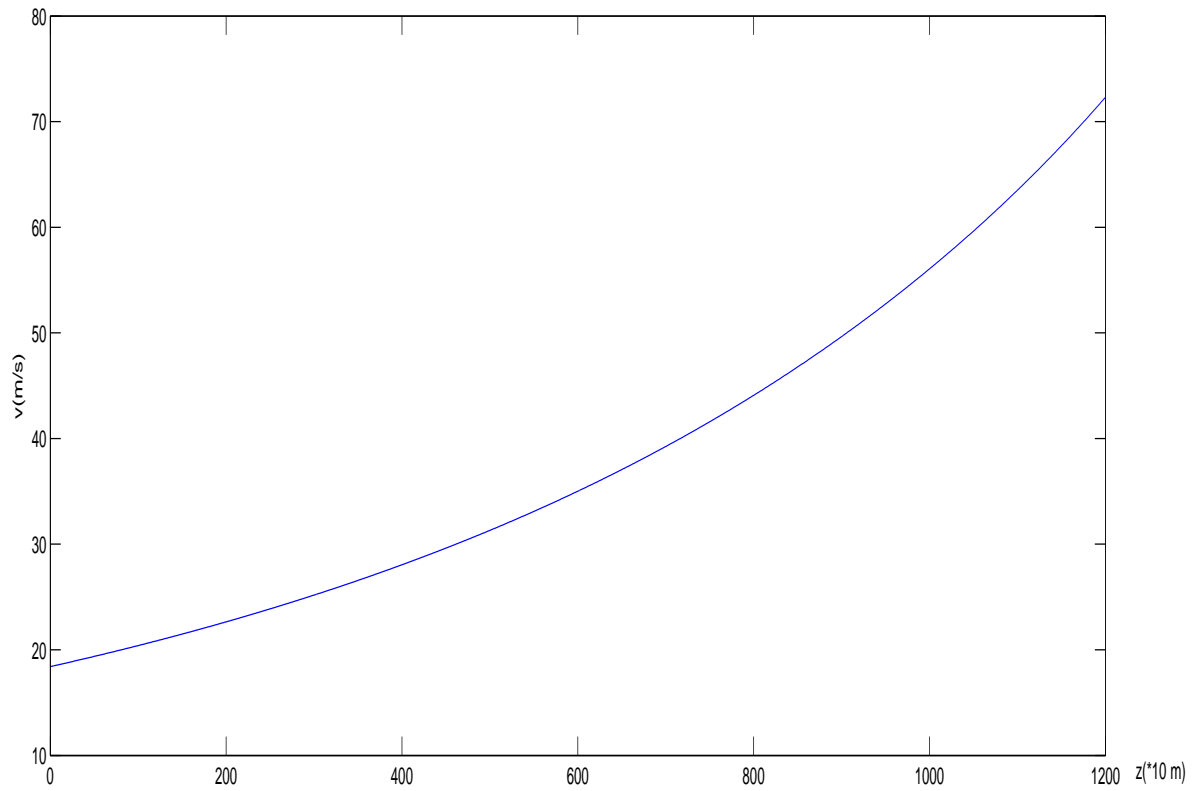


FIGURE 2.11 – La distribution de la vitesse $v = \alpha \times w$ sans la viscosité la thermoconductibilité

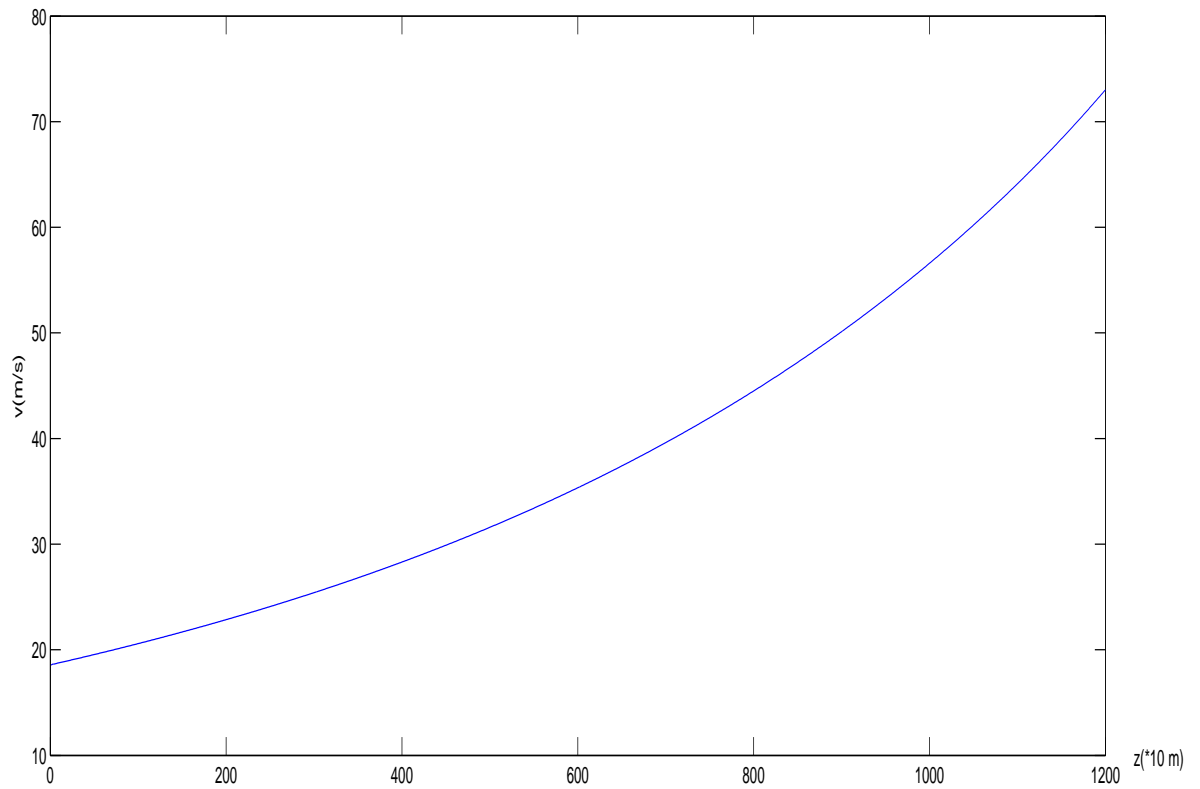


FIGURE 2.12 – La distribution de la vitesse $v = \alpha \times w$ avec la viscosité et la thermoconductibilité

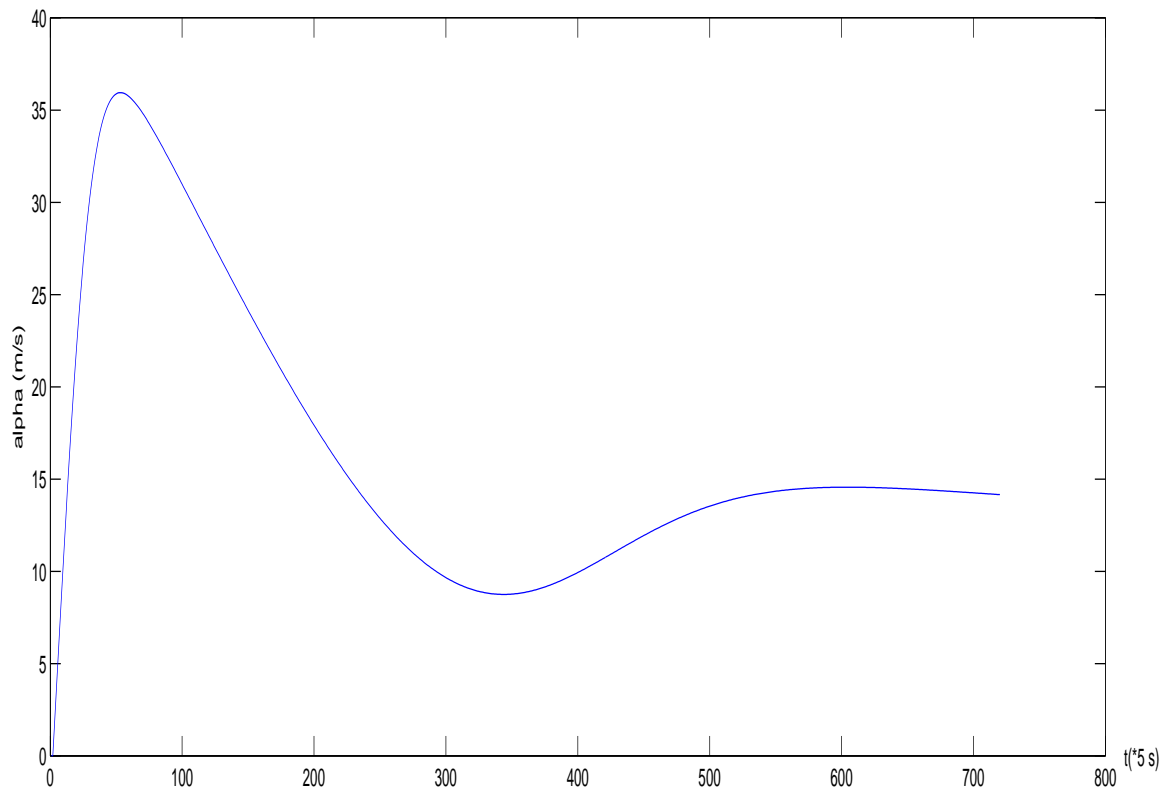


FIGURE 2.13 – La distribution de la vitesse $\alpha(t)$ sans la viscosité et la thermoconductibilité et avec la fonction φ_2

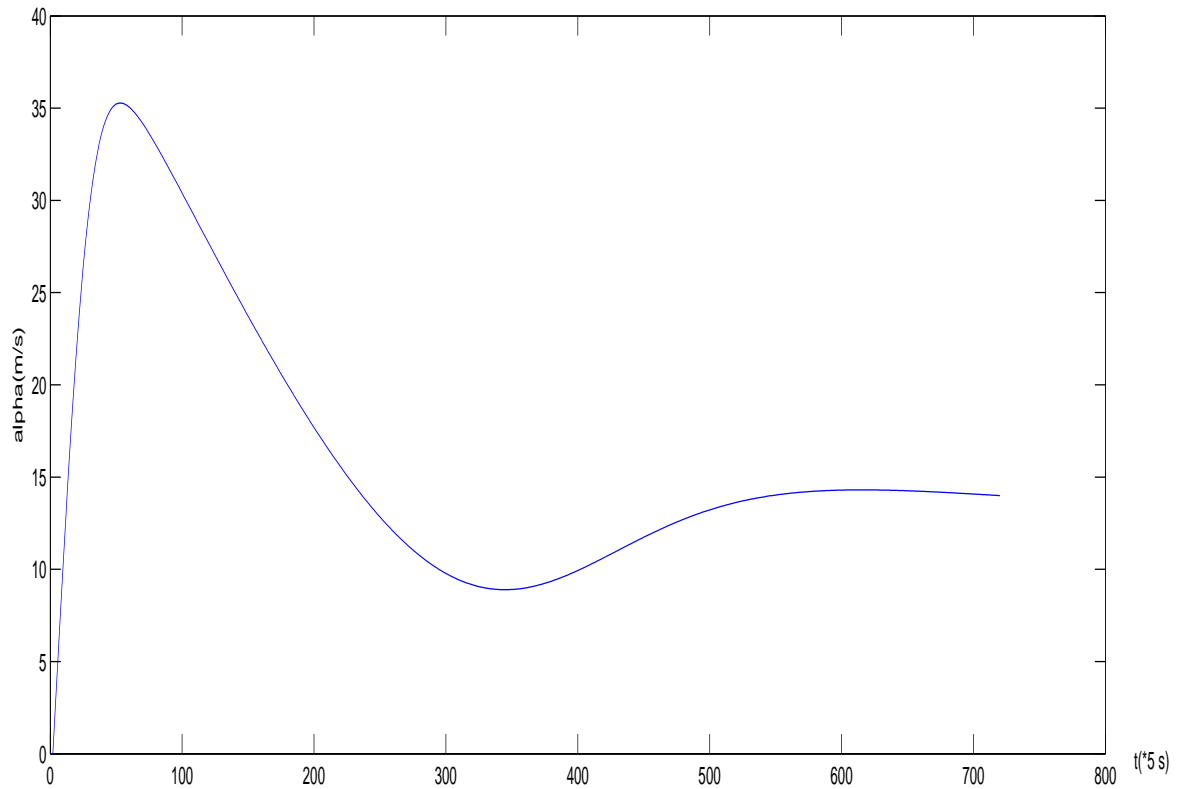


FIGURE 2.14 – La distribution de la vitesse $\alpha(t)$ avec la viscosité et la thermoconductibilité et avec la fonction φ_2

**Existence d'une solution du système d'équations du
mouvement vertical de l'air dans une cheminée saturée de
la vapeur d'eau**

Sommaire

3.1	Système d'équations	55
3.2	Problème semi-stationnaire - première approximation	56
3.3	Deuxième approximation	57
3.4	Estimations à priori	59

Dans l'article [15] on a construit la solution numérique du système d'équations décrivant l'écoulement de l'air dans un cylindre vertical provoqué par la chaleur latente de la condensation de la vapeur d'eau ; la construction numérique de la solution a été faite en utilisant l'approximation par la séparation de l'évolution temporelle et de la structure spatiale. Or la question de l'existence et de l'unicité de la solution de ce système d'équations, même celle du sous-système pour la structure spatiale, n'a pas été résolue.

Dans [14] l'auteur propose un théorème d'existence et d'unicité d'un système d'équa-

tions similaire au sous-système pour la structure spatiale étudié dans [15]. Le résultat de [14] améliore le théorème classique d'existence et d'unicité de la solution locale. Toutefois il ne donne que l'existence et l'unicité de la solution dans un intervalle, qui nous semble encore trop petit pour garantir la résolubilité d'un système d'équations du type envisagé dans [15].

Dans le présent travail, en utilisant l'idée de [14], mais en introduisant aussi une autre méthode basée sur la "deuxième approximation", nous démontrons un théorème d'existence et d'unicité de la solution d'un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires, théorème qui améliore le résultat de [14].

Le système d'équations différentielles ordinaires que nous allons considérer correspond au sous-système pour la structure spatiale traité dans [15]. Les équations de ce type se trouvent souvent dans l'étude des phénomènes atmosphériques qui impliquent le mouvement de l'air provoqué par la chaleur latente de la condensation de la vapeur d'eau comme les orages, qui continuent à intéresser beaucoup de chercheurs (voir [8]).

3.1 Système d'équations

On note par T la température de l'air, ρ la densité de l'air, $v = \alpha w$ la vitesse de l'air, g l'accélération gravitationnelle. On propose le système d'équations suivant (voir [15])

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = \frac{R_1\rho(t; \bar{z}_1)T(t; \bar{z}_1) - R_1\rho_{hs}(\bar{z}_1)T_{hs}(\bar{z}_1)}{\int_0^{\bar{z}_1} \rho(t; z')w(t; z')dz'}, \quad (3.1.1)$$

$$w\frac{d\rho}{dz} + \rho\frac{dw}{dz} = -H_{tr} \quad (3.1.2)$$

$$\rho c_v\frac{dT}{dz} - R_1T\frac{d\rho}{dz} = L_{tr}h_{tr}, \quad (3.1.3)$$

$$\alpha(t)^2\rho w\frac{dw}{dz} + R_1\rho\frac{dT}{dz} + R_1T\frac{d\rho}{dz} = -g\rho - g\Sigma, \quad (3.1.4)$$

dans le domaine $0 < z < \bar{z}_1$, $t \geq 0$, pour modéliser le mouvement de l'air dans un cylindre vertical de hauteur \bar{z}_1 , mouvement ascendant provoqué par la chaleur latente de

la condensation. Ici $\alpha(t)$ est une fonction de $t \geq 0$, tandis que $\rho = \rho(t; z)$, $T = T(t; z)$, $w = w(t; z)$ sont des fonctions de $0 < z < \bar{z}_1$ qui dépendent du paramètre $t \geq 0$, L_{tr} est la chaleur latente due à la transition de phase de l'eau de l'état gazeux à l'état liquide ou solide, H_{tr} est la quantité de la condensation définie par la relation

$$H_{tr} = \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \right) w. \quad (3.1.5)$$

Pour la pression p , nous avons supposé qu'elle est donnée par la loi valable pour le gaz parfait

$$p = R_1 T \rho.$$

Le système d'équations (3.1.1)-(3.1.4) devra être considéré avec les conditions aux limites

$$\rho|_{z=0} = \rho_0, \quad T|_{z=0} = T_0, \quad w|_{z=0} = 1, \quad \alpha|_{t=0} = \alpha_0. \quad (3.1.6)$$

Pour que le problème soit significatif du point de vue physique, les valeurs de ρ_0 , T_0 , α_0 ne doivent pas être arbitraires, mais doivent correspondre à la réalité physique de l'atmosphère, de telle sorte que la solution puisse représenter une évolution réelle de l'écoulement ascendant de l'air : ρ_0 et T_0 doivent être dans le voisinage des valeurs

$$\rho_0 \approx 1204(\text{g}/\text{m}^3), \quad T_0 \approx 300(^{\circ}\text{K}), \quad w_0 \approx 1, \quad (3.1.7)$$

tandis que α_0 doit être strictement positif mais suffisamment petit.

3.2 Problème semi-stationnaire - première approximation

De système d'équations (3.1.1)-(3.1.4), nous supposons que $\alpha(t)$ et $\Sigma = \frac{1}{\bar{z}_1} \int_0^t \varphi(t-s) \int_0^{\bar{z}_1} \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \right) v dz ds$ sont donnés, de sorte que les équations (3.1.2)-(3.1.4) deviennent stationnaires (dans l'écriture précédente t doit être considéré comme paramètre).

Introduisons maintenant la première approximation. Désignons par $(\varrho_{hs}^*(z), T_{hs}^*(z))$ la solution du système d'équations

$$\varrho_{hs}^* c_v \frac{dT_{hs}^*}{dz} - R_1 T_{hs}^* \frac{d\varrho_{hs}^*}{dz} = (R_1 T_{hs}^* + L_{tr}) \left(\bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*) \frac{d}{dz} \log \varrho_{hs}^* - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*) \right), \quad (3.2.8)$$

$$R_1 \frac{d}{dz} (\varrho_{hs}^* T_{hs}^*) = -g \varrho_{hs}^*, \quad (3.2.9)$$

avec les conditions initiales

$$\varrho_{hs}^*(0) = \varrho_0, \quad T_{hs}^*(0) = T_0. \quad (3.2.10)$$

Du point de vue physique, $(\varrho_{hs}^*(z), T_{hs}^*(z))$ sont les distributions hydrostatiques de la densité et de la température de l'air humide. Le couple de fonctions $(\varrho_{hs}^*(z), T_{hs}^*(z))$ sera utilisé comme première approximation de notre solution.

3.3 Deuxième approximation

Maintenant nous proposons de construire la deuxième approximation.

Posons

$$h_{tr}^*(z) = \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*(z)) \frac{d}{dz} \log \varrho_{hs}^*(z) - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*(z)). \quad (3.3.11)$$

Définissons les fonctions $(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W})$ qui satisfont aux équations

$$\frac{d}{dz} \log \tilde{U}(z) = -\frac{h_{tr}^*}{\varrho_{hs}^*} \equiv \tilde{f}_1, \quad (3.3.12)$$

$$\frac{d}{dz} \tilde{V}(z) = -\alpha(t)^2 \tilde{U} \frac{d}{dz} \frac{\tilde{U}}{\varrho_{hs}^*} - g \Sigma \equiv \tilde{g}_1, \quad (3.3.13)$$

$$\frac{d}{dz} \tilde{W}(z) = \frac{(R_1 T_{hs}^* + L_{tr})}{\varrho_{hs}^* T_{hs}^*} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*) \frac{d}{dz} \log \varrho_{hs}^* - \frac{R_1}{\varrho} \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*) + \frac{d}{dz} \left(\frac{L_{tr}}{\varrho_{hs}^* T_{hs}^*} \right) \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*) \equiv \tilde{h}_1, \quad (3.3.14)$$

et aux conditions

$$\tilde{U}(0) = \varrho_0, \quad \tilde{V}(0) = R_1 T_0 \varrho_0, \quad \tilde{W}(0) = \log \frac{T_0^{c_v}}{\varrho_0^{R_1}} + \frac{L_{tr}}{\varrho_{hs}^*(0) T_{hs}^*(0)} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*(0)). \quad (3.3.15)$$

Lemme 3.3.1. Soient \tilde{U} , \tilde{V} et \tilde{W} les fonctions qui satisfont aux équations (3.3.12)-(3.3.14) et aux conditions (3.3.15).

Alors il existe des fonctions $(\tilde{\rho}, \tilde{T}, \tilde{w})$ vérifiant les relations

$$\tilde{U}(z) = \tilde{\rho}(z)\tilde{w}(z), \quad \tilde{V}(z) = R_1\tilde{\rho}(z)\tilde{T}(z) + g \int_0^z \tilde{\rho}(z') dz', \quad \tilde{W}(z) = \log \frac{\tilde{T}(z)^{c_v}}{\tilde{\rho}(z)^{R_1}} + \frac{L_{tr}}{\varrho_{hs}^* T_{hs}^*} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*). \quad (3.3.16)$$

et elles sont uniques.

Démonstration. Il résulte de la troisième équation de (3.3.16) que

$$\tilde{\rho}(z) = e^{-\tilde{W}(z)/R_1} \left(\tilde{T}(z) e^{\left(\frac{L_{tr}\bar{\pi}_{vs}(\tilde{T})}{(R_1+c_v)\tilde{\rho}\tilde{T}} \right)} \right)^{c_v/R_1} e^{\left(\frac{L_{tr}\bar{\pi}_{vs}(\tilde{T})}{(R_1+c_v)\tilde{\rho}\tilde{T}} \right)}. \quad (3.3.17)$$

En substituant cette égalité dans la seconde équation de (3.3.16), on a

$$R_1 e^{-\tilde{W}(z)/R_1} \tilde{T}(z)^{\frac{R_1+c_v}{R_1}} e^{\left(\frac{L_{tr}\bar{\pi}_{vs}(\tilde{T})}{R_1\tilde{\rho}\tilde{T}} \right)} + g \int_0^z e^{-\tilde{W}(z)/R_1} \left(\tilde{T}(z) e^{\left(\frac{L_{tr}\bar{\pi}_{vs}(\tilde{T})}{(R_1+c_v)\tilde{\rho}\tilde{T}} \right)} \right)^{c_v/R_1} e^{\left(\frac{L_{tr}\bar{\pi}_{vs}(\tilde{T})}{(R_1+c_v)\tilde{\rho}\tilde{T}} \right)} dz' = \tilde{V}(z).$$

Donc, en posant $\tilde{y}(z) = e^{-\tilde{W}(z)/R_1} \tilde{T}(z)^{\frac{R_1+c_v}{R_1}} e^{\left(\frac{L_{tr}\bar{\pi}_{vs}(\tilde{T})}{R_1\tilde{\rho}\tilde{T}} \right)}$, on obtient

$$\frac{d}{dz} \tilde{y}(z) = -\frac{g}{R_1} e^{-\tilde{W}(z)/(R_1+c_v)} e^{\left(\frac{L_{tr}\bar{\pi}_{vs}(\tilde{T})}{(R_1+c_v)\tilde{\rho}\tilde{T}} \right)} \tilde{y}(z)^{\frac{c_v}{R_1+c_v}} + \frac{\tilde{g}_1(z)}{R_1}, \quad \tilde{y}(0) = \varrho_0 T_0. \quad (3.3.18)$$

Ou

$$\frac{d}{dz} \tilde{y}(z)^{\frac{R_1}{R_1+c_v}} = -\frac{g}{R_1} e^{-\tilde{W}(z)/(R_1+c_v)} e^{\left(\frac{L_{tr}\bar{\pi}_{vs}(\tilde{T})}{(R_1+c_v)\tilde{\rho}\tilde{T}} \right)} + \frac{\tilde{g}_1(z)}{R_1 \tilde{y}(z)^{\frac{c_v}{R_1+c_v}}}, \quad \tilde{y}(0) = \varrho_0 T_0. \quad (3.3.19)$$

On note par

$$\tilde{Y} = \tilde{y}^{\frac{R_1}{R_1+c_v}}, \quad \phi(\tilde{Y}) = e^{\left(\frac{L_{tr}\bar{\pi}_{vs}(\tilde{T})}{(R_1+c_v)\tilde{\rho}\tilde{T}} \right)},$$

d'après la formule de Taylor on a :

$$\frac{d\phi}{d\tilde{Y}} = \phi(Y_0) + \frac{d\phi}{d\tilde{Y}} \Big|_{\tilde{Y}=Y_0} (\tilde{Y} - Y_0) + R(\tilde{Y}).$$

On substitue dans l'équation (3.3.19) on aura

$$\frac{d}{dz} \tilde{Y} + \frac{g}{R_1} e^{-\frac{\tilde{W}}{(R_1+c_v)}} \frac{d\phi}{d\tilde{Y}} \Big|_{\tilde{Y}=Y_0} \tilde{Y} = \frac{1}{R_1} \tilde{g}_1 \tilde{y}^{\frac{-c_v}{R_1+c_v}} + \frac{g}{R_1} e^{-\frac{\tilde{W}}{(R_1+c_v)}} \left(\phi(Y_0) + Y_0 \frac{d\phi}{d\tilde{Y}} \Big|_{\tilde{Y}=Y_0} + R(\tilde{Y}) \right), \quad \tilde{Y}(0) = Y_0.$$

La solution de ce problème de Cauchy est définie par

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(z) = & Y_0 e^{\int_0^z \frac{g}{R_1} e^{-\frac{\tilde{W}}{(R_1+c\nu)}} \frac{d\phi}{d\tilde{Y}}|_{\tilde{Y}=Y_0} dz'} + \\ & + \int_0^z \left(\frac{1}{R_1} \tilde{g}_1 \tilde{y}^{\frac{-c\nu}{R_1+c\nu}} + \frac{g}{R_1} e^{-\frac{\tilde{W}}{(R_1+c\nu)}} \left(\phi(Y_0) + Y_0 \frac{d\phi}{d\tilde{Y}}|_{\tilde{Y}=Y_0} + R(\tilde{Y}) \right) \right) e^{\int_0^{z'} \frac{g}{R_1} e^{-\frac{\tilde{W}}{(R_1+c\nu)}} \frac{d\phi}{d\tilde{Y}}|_{\tilde{Y}=Y_0} dz''} dz'. \end{aligned}$$

Soit $\tilde{Y}(z)$ la solution du problème de Cauchy (3.3.19). Alors on peut définir immédiatement \tilde{T} , la fonction \tilde{T} étant construite on peut définir $\tilde{\varrho}(\tilde{T})$ comme suit

$$\tilde{\varrho} = e^{-\tilde{W}(z)/R_1} \left(\tilde{T}(z) e^{\left(\frac{L_{tr} \bar{\nu}_s(\tilde{T})}{(R_1+c\nu)\tilde{\varrho}\tilde{T}} \right)} \right)^{c\nu/R_1} e^{\left(\frac{L_{tr} \bar{\nu}_s(\tilde{T})}{(R_1+c\nu)\tilde{\varrho}\tilde{T}} \right)}$$

et $\tilde{w}(z)$ par la relation (3.3.16).

Les fonctions $(\tilde{\varrho}, \tilde{T}, \tilde{w})$ ainsi construites seront utilisées comme la deuxième approximation.

3.4 Estimations à priori

définissons la famille de distances

$$\kappa(\varphi_1, \varphi_2)(z) = \max \left(\sup_{0 \leq z' \leq z} |\varphi_1(z') - \varphi_2(z')|, \sup_{0 \leq z' \leq z} \left| \frac{d}{dz'} \varphi_1(z') - \frac{d}{dz'} \varphi_2(z') \right| \right) \quad (3.4.20)$$

pour $0 \leq z \leq z_1$, on a

$$\kappa_{\tilde{\varrho}}(z) = \kappa(\tilde{\varrho}, \varrho_{hs}^*)(z), \quad \kappa_{\tilde{T}}(z) = \kappa(\tilde{T}, T_{hs}^*)(z), \quad \kappa_{\tilde{w}}(z) = \kappa(\tilde{w}, \frac{\tilde{U}}{\varrho_{hs}^*})(z), \quad (3.4.21)$$

$$A_\kappa(z) = \{(\varrho, T, w) / \kappa(\varrho, \tilde{\varrho})(z') \leq \kappa_{\tilde{\varrho}}(z'), \kappa(T, \tilde{T})(z') \leq \kappa_{\tilde{T}}(z'), \kappa(w, \tilde{w})(z') \leq \kappa_{\tilde{w}}(z')\}. \quad (3.4.22)$$

Nous supposons que, si $(\varrho, T, w) \in A_\kappa(z_1)$, on aura

$$\varrho(z) \geq \frac{1}{2} \tilde{\varrho}(z) \quad T(z) \geq \frac{1}{2} \tilde{T}(z) \quad w(z) \geq \frac{1}{2} \tilde{w}(z) \quad \forall z \in [0, \tilde{z}_1]. \quad (3.4.23)$$

Hypothèse (a) Sur l'intervalle $[0, z](z \in]0, z_1])$, on suppose que la solution du système d'équations (3.1.2)-(3.1.4) avec les conditions initiales (3.1.6) appartient à l'ensemble $A_\kappa(z)$.

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du système d'équations (3.1.2)-(3.1.4), on pose

$$U(z) = \rho(z)w(z), \quad V(z) = R_1\rho(z)T(z) + g \int_0^z \rho(z')dz', \quad W(z) = \log \frac{T(z)^{c_v}}{\rho(z)^{R_1}} + \frac{L_{tr}}{\rho T} \bar{\pi}_{vs}(T). \quad (3.4.24)$$

On constate que U, V, W vérifient les équations

$$\frac{d}{dz}(\log U - \log \tilde{U}) = f_1 - \tilde{f}_1, \quad (3.4.25)$$

$$\frac{d}{dz}(V - \tilde{V}) = g_1 - \tilde{g}_1, \quad (3.4.26)$$

$$\frac{d}{dz}(W - \tilde{W}) = h_1 - \tilde{h}_1, \quad (3.4.27)$$

où

$$\begin{aligned} f_1 &= -\left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T)\right) \frac{1}{\rho}, & g_1 &= -\alpha^2 U \frac{dw}{dz} - g \Sigma \\ h_1 &= \frac{(R_1 T + L_{tr})}{\rho T} \bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{R_1}{\rho} \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) + \frac{d}{dz} \left(\frac{L_{tr}}{\rho T}\right) \bar{\pi}_{vs}(T), \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

avec les conditions initiales

$$\log U(0) - \log \tilde{U}(0) = 0 \quad V(0) - \tilde{V}(0) = 0 \quad W(0) - \tilde{W}(0) = 0, \quad (3.4.29)$$

où $\tilde{f}_1, \tilde{g}_1, \tilde{h}_1$ sont définies dans (3.3.12)-(3.3.14).

Pour les fonctions $\varphi(\rho, T, w)$ Nous allons utiliser aussi la notation

$$[\varphi]_\kappa(z) = \sup_{(\rho, T, w) \in A_\kappa(z), z' \in [0, z]} \left| \varphi(\rho, T, w)(z') \right| \quad (3.4.30)$$

Lemme 3.4.1. Soit $y(z) = e^{-W(z)/R_1} T(z) \frac{R_1+c\nu}{R_1} e^{\left(\frac{L_{1r}\bar{\nu}s(T)}{R_1\varrho^T}\right)}$,

en supposant que (a) est vérifié nous avons

$$|Y(z) - \tilde{Y}(z)| \leq \int_0^z M_Y(z') dz'. \quad (3.4.31)$$

$$\left| \frac{d}{dz} Y(z) - \frac{d}{dz} \tilde{Y}(z) \right| \leq M_Y(z), \quad (3.4.32)$$

où

$$\begin{aligned} M_Y(z) = & \left(1 + \frac{\tilde{g}_1}{\tilde{y}^{\frac{c\nu}{R_1+c\nu}}} - \frac{g}{R_1} e^{\frac{-\tilde{W}}{(R_1+c\nu)}} \left(\phi(Y_0) + \frac{d}{d\tilde{Y}} \phi(\tilde{Y}) \Big|_{\tilde{Y}=Y_0} + R(\tilde{Y}) \right) \right) \times \\ & \times \left(\frac{2Y_0g}{R_1} e^{\frac{g}{R_1} \int_0^{z'} \frac{d\phi}{dY} \phi(Y)|_{Y=Y_0} e^{\frac{-W}{(R_1+c\nu)}} dz'} \left(\frac{d\phi}{dY} \Big|_{Y=Y_0} \frac{2e^{\frac{-W}{(R_1+c\nu)}}}{(R_1+c\nu)} \int_0^{z'} (\varphi_h^T \kappa_{\tilde{T}} + \varphi_h^{\varrho} \kappa_{\tilde{\varrho}}) dz'' \right) + \right. \\ & \left. e^{\frac{-\tilde{W}}{(R_1+c\nu)}} \left(\frac{d\phi}{dY} \Big|_{Y=Y_0} - \frac{d\phi}{d\tilde{Y}} \Big|_{\tilde{Y}=Y_0} \right) \right) + \\ & + e^{\int_0^{z'} \frac{g}{R_1} \frac{d}{dY} \phi(Y)|_{Y=Y_0} e^{\frac{-W}{(R_1+c\nu)}} dz''} \left(\left(\frac{c\nu|\tilde{g}_1|}{R_1+c\nu} \left[\frac{1}{\varrho^T} \right] \frac{c\nu}{R_1+c\nu} \left(\left[\frac{1}{\varrho} \right]_{\kappa} \kappa_{\tilde{\varrho}} + \left[\frac{1}{T} \right]_{\kappa} \kappa_{\tilde{T}} \right) + \left[\frac{1}{\varrho^T} \right]_{\kappa} \frac{c\nu}{R_1+c\nu} \left(\phi_g^w \kappa_{\tilde{w}} + \phi_g^{\varrho} \kappa_{\tilde{\varrho}} \right) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{g}{R_1} \left(e^{\frac{-W}{(R_1+c\nu)}} \left(Y_0 \left(\frac{d}{dY} \phi \Big|_{Y=Y_0} - \frac{d}{d\tilde{Y}} \phi \Big|_{\tilde{Y}=Y_0} \right) + (R(Y) - R(\tilde{Y})) \right) \right) + \right. \\ & \left. + \left(\phi(Y_0) + \frac{d\phi}{d\tilde{Y}} \Big|_{Y=Y_0} Y_0 + R(\tilde{Y}) \right) \frac{2e^{\frac{-W}{(R_1+c\nu)}}}{(R_1+c\nu)} \int_0^{z'} (\varphi_h^T \kappa_{\tilde{T}} + \varphi_h^{\varrho} \kappa_{\tilde{\varrho}}) dz'' \right). \end{aligned}$$

et $\phi_g^w, \phi_g^{\varrho}, \varphi_h^T, \varphi_h^{\varrho}, \tilde{g}_1$ sont définies par (3.4.34), (3.4.35).

Démonstration.

De manière analogue à (3.3.19), on a

$$\frac{d}{dz} Y + \frac{g}{R_1} e^{-\frac{W}{(R_1+c\nu)}} \frac{d\phi}{dY} \Big|_{Y=Y_0} Y = \frac{1}{R_1} g_1 y^{\frac{-c\nu}{R_1+c\nu}} + \frac{g}{R_1} e^{-\frac{W}{(R_1+c\nu)}} \left(Y_0 \frac{d\phi}{dY} \Big|_{Y=Y_0} + R(Y) \right), \quad Y(0) = Y_0.$$

La solution de ce problème de Cauchy est définie par

$$Y(z) = Y_0 e^{\int_0^z \frac{g}{R_1} e^{-\frac{W}{(R_1+c\nu)}} \frac{d\phi}{dY} |_{Y=Y_0} dz'} +$$

$$+ \int_0^z \left(\frac{1}{R_1} g_1 y^{\frac{-c\nu}{R_1+c\nu}} + \frac{g}{R_1} e^{-\frac{W}{(R_1+c\nu)}} \left(Y_0 \frac{d\phi}{dY} |_{Y=Y_0} + R(Y) \right) \right) e^{\int_0^{z'} \frac{g}{R_1} e^{-\frac{W}{(R_1+c\nu)}} \frac{d\phi}{dY} |_{Y=Y_0} dz''} dz'.$$

d'où on obtient

$$Y(z) - \tilde{Y}(z) = Y_0 \left(e^{\int_0^z \frac{g}{R_1} e^{-\frac{W}{(R_1+c\nu)}} \frac{d\phi}{dY} |_{Y=Y_0}} - e^{\int_0^z \frac{g}{R_1} e^{-\frac{\tilde{W}}{(R_1+c\nu)}} \frac{d\phi}{dY} |_{\tilde{Y}=Y_0}} \right) + \quad (3.4.33)$$

$$+ \int_0^z \left[e^{\int_0^{z'} \frac{g}{R_1} e^{-\frac{W}{(R_1+c\nu)}} \frac{d\phi}{dY} |_{Y=Y_0}} \left(\frac{g_1}{R_1 y^{\frac{c\nu}{R_1+c\nu}}} - \frac{g}{R_1} e^{-\frac{W}{(R_1+c\nu)}} (\phi(Y_0) + \frac{d}{dY} \phi |_{Y=Y_0} Y_0 + R(Y)) \right) + \right. \\ \left. - e^{\int_0^{z'} \frac{g}{R_1} e^{-\frac{\tilde{W}}{(R_1+c\nu)}} \frac{d\phi}{dY} |_{\tilde{Y}=Y_0}} \left(\frac{\tilde{g}_1}{R_1 \tilde{y}^{\frac{c\nu}{R_1+c\nu}}} + \frac{g}{R_1} e^{-\frac{\tilde{W}}{(R_1+c\nu)}} (\phi(Y_0) + \frac{d}{d\tilde{Y}} \phi |_{\tilde{Y}=Y_0} Y_0 + R(\tilde{Y})) \right) \right] dz'$$

De (3.3.13) on a

$$|g_1(z) - \tilde{g}_1(z)| \leq \Phi_g^w \kappa_{\tilde{w}} + \Phi_g^\rho \kappa_{\tilde{\rho}}, \quad (3.4.34)$$

où

$$\Phi_g^w = 2\alpha^2 \varrho_{hs}^* \left[\left| \frac{dw}{dz} \right| \right]_\kappa + 2\alpha^2 \tilde{U},$$

$$\Phi_g^\rho = 2\alpha^2 \left[\left| \frac{dw}{dz} \right| \right] [\tilde{w}]_\kappa.$$

D'autre part, en tenant compte de la relation $h_{tr} \geq 0$, et (3.3.14) on obtient

$$\left| e^{-\frac{H_1(z')}{R_1+c\nu}} - e^{-\frac{\tilde{H}_1(z')}{R_1+c\nu}} \right| \leq \frac{2 \exp\left(\frac{-H_1}{R_1+c\nu}\right)}{R_1+c\nu} \int_0^z (\varphi_h^\rho \kappa_{\tilde{\rho}} + \varphi_h^T \kappa_{\tilde{T}}) dz', \quad (3.4.35)$$

où

$$H_1(z) = \int_0^z h_1(z') dz', \quad \tilde{H}_1(z) = \int_0^z \tilde{h}_1(z') dz'.$$

$$\varphi_h^\rho = \left[\frac{1}{\varrho} \right]_\kappa [\bar{\pi}_{\nu s}(T)]_\kappa \left(R_1 + L_{tr} \left[\frac{1}{T} \right]_\kappa \right) \left(\left[\frac{1}{\varrho} \right]_\kappa + \left| \frac{d\varrho_{hs}}{dz} \right| \left[\frac{1}{\varrho} \right]_\kappa \frac{1}{\varrho_{hs}^*} + \left| \frac{d\varrho_{hs}}{dz} \right| \left[\frac{1}{\varrho^2} \right]_\kappa \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + R_1 \left[\frac{d\bar{\pi}_{vs}}{dT} \right]_{\kappa} \left| \frac{dT_{hs}}{dz} \right| \left[\frac{1}{\rho^2} \right]_{\kappa} + L_{tr} \bar{\pi}_{vs}(\tilde{T}) \left[\left| \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho^2 T} \right) \right| \right]_{\kappa} \\
\varphi_h^T & = \left[\bar{\pi}_{vs}(T) \right]_{\kappa} \left(\frac{1}{\rho_{hs}} \left| \frac{d\rho_{hs}}{dz} \right| \left(\frac{R_1 [T]_{\kappa} + L_{tr}}{\tilde{T} [\rho T]_{\kappa}} + \frac{R_1}{\tilde{\rho} \tilde{T}} \right) + L_{tr} \left(\frac{d}{dz} \left| \frac{1}{\tilde{T} [\rho T]_{\kappa}} \right| \right) \right) \\
& + \left[\frac{d}{dT} \bar{\pi}_{vs}(T) \right]_{\kappa} \left((R_1 + \frac{L_{tr}}{[T]_{\kappa}}) \left[\frac{1}{\rho^2} \right]_{\kappa} \left| \frac{d\rho_{hs}}{dz} \right| + \frac{R_1}{\tilde{\rho}} + L_{tr} \left[\left| \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{T\rho} \right) \right| \right]_{\kappa} \right) + \frac{1}{\tilde{\rho}} \left[\left| \frac{dT}{dz} \right| \right]_{\kappa} \left[\frac{d^2 \bar{\pi}_{vs}}{dT^2} \right]_{\kappa}
\end{aligned}$$

En utilisant $y(z) = \rho(z)T(z)$, $\tilde{y}(z) = \tilde{\rho}(z)\tilde{T}(z)$, de (3.4.33), (3.4.34), (3.4.35) on obtient (3.4.31) et (3.4.32). \square

Lemme 3.4.2. *supposont que l'hypothèse (a) est vérifiée alors on a*

$$|T - \tilde{T}| \leq \Psi_T^0(\kappa_{\tilde{\rho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(z), \quad (3.4.36)$$

$$\left| \frac{dT}{dz} - \frac{d\tilde{T}}{dz} \right| \leq \Psi_T^1(\kappa_{\tilde{\rho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(z), \quad (3.4.37)$$

$$|\rho - \tilde{\rho}| \leq \Psi_{\rho}^0(\kappa_{\tilde{\rho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(z), \quad (3.4.38)$$

$$\left| \frac{d\rho}{dz} - \frac{d\tilde{\rho}}{dz} \right| \leq \Psi_{\rho}^1(\kappa_{\tilde{\rho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(z), \quad (3.4.39)$$

$$|w(z) - \tilde{w}(z)| \leq \Psi_w^0(\kappa_{\tilde{\rho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(z), \quad (3.4.40)$$

$$\left| \frac{dw}{dz}(z) - \frac{d\tilde{w}}{dz}(z) \right| \leq \Psi_w^1(\kappa_{\tilde{\rho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(z). \quad (3.4.41)$$

Où

$$\Psi_T^0(\kappa_{\tilde{\rho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}}) = \frac{1}{\left(\frac{d}{dT} Z(T^*) \right)} \int_0^z M_Y(z') dz'. \quad (3.4.42)$$

$$\Psi_T^1(\kappa_{\tilde{\rho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}}) = \frac{1}{\left(\frac{d}{dT} Z(T^*) \right)^2} \left(\frac{d}{dT} Z(T^*) M_Y(z) - \frac{d^2}{dT^2} Z(T^*) \int_0^z M_Y(z') dz' \right) \quad (3.4.43)$$

$$\Psi_{\rho}^0(\kappa_{\tilde{\rho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}}) = [\rho T]_{\kappa} \frac{1}{\tilde{T} [T]_{\kappa}} \Psi_T^0 + \frac{R_1 + c_v}{R_1} \frac{1}{\tilde{T}} [\rho T]_{\kappa}^{\frac{c_v}{R_1 + c_v}} \int_0^z M_Y(z') dz'. \quad (3.4.44)$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{\rho}^1(\kappa_{\tilde{\rho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}}) & = \left[\left| \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{[T] \tilde{T}} \right) \right| \right]_{\kappa} \Psi_T^0 + \left[\frac{1}{[T]_{\kappa} \tilde{T}} \right]_{\kappa} \Psi_T^1 + \frac{R_1 + c_v}{R_1} \int_0^z M_Y(z') dz' \left(\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\tilde{T}} \right) [\rho T]_{\kappa}^{\frac{c_v}{R_1 + c_v}} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\tilde{T}} \frac{d}{dz} [\rho T]_{\kappa}^{\frac{c_v}{R_1 + c_v}} \right) + \frac{R_1 + c_v}{R_1} \frac{1}{\tilde{T}} [\rho T]_{\kappa} M_Y(z). \quad (3.4.45)
\end{aligned}$$

$$\Psi_w^0(\kappa_{\tilde{\rho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}}) = \frac{e^{[F_1]_{\kappa}}}{\tilde{\rho}} \left[\frac{1}{\rho} \right]_{\kappa} \Psi_{\rho}^0(z) + 2e^{[F_1]_{\kappa}} \left[\frac{1}{\rho} \right]_{\kappa} \times \int_0^z (\varphi_f^T \kappa_T + \varphi_f^{\rho} \kappa_{\rho}) dz'. \quad (3.4.46)$$

$$\begin{aligned} \Psi_w^1(\kappa_{\tilde{\rho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}}) &= \left(\frac{1}{\tilde{\rho}[\rho]_{\kappa}} [f_1]_{\kappa} + \frac{1}{\tilde{\rho}[\rho^2]_{\kappa}} \left[\left| \frac{d\rho}{dz} \right| \right]_{\kappa} + \frac{1}{\tilde{\rho}^2[\rho]_{\kappa}} \left[\left| \frac{d\tilde{\rho}}{dz} \right| \right]_{\kappa} \right) e^{[F_1]_{\kappa}} \Psi_{\rho}^0 + \frac{e^{[F_1]_{\kappa}}}{\tilde{\rho}[\rho]_{\kappa}} \Psi_{\rho}^1 + \\ &+ 2e^{[F_1]_{\kappa}} \left(\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{[\rho]_{\kappa}} \right) + \frac{[f_1]_{\kappa}}{[\rho]_{\kappa}} \right) \int_0^z (\varphi_f^T \kappa_T + \varphi_f^{\rho} \kappa_{\rho}) dz' + \left[\frac{1}{\rho} \right]_{\kappa} e^{\tilde{F}_1} (\varphi_f^T \kappa_T + \varphi_f^{\rho} \kappa_{\rho}). \end{aligned} \quad (3.4.47)$$

$Z(T)$, φ_f^T , φ_f^{ρ} sont des fonctions définies dans (3.4.48), (3.4.51), (3.4.52).

Démonstration. On définit la fonction

$$Z(T) = T e^{\frac{L_{tr} \bar{\pi}_{vs}(T)}{(R_1 + c_v) \rho T}}, \quad (3.4.48)$$

donc on aura

$$T = Z^{-1} \left(T e^{\frac{L_{tr} \bar{\pi}_{vs}(T)}{(R_1 + c_v) \rho T}} \right), \quad (3.4.49)$$

en tenant compte de la relation (3.4.49), on aura

$$T(z) - \tilde{T}(z) = \frac{d}{dz} Z^{-1}(Z^*) (Y - \tilde{Y}) = \frac{Y - \tilde{Y}}{\frac{d}{dT} Z(T^*)}.$$

Avec

$$\frac{d}{dT} Z(T) = e^{\frac{L_{tr} \bar{\pi}_{vs}}{(R_1 + c_v) \rho T}} \left(1 + \frac{L_{tr} \frac{d\bar{\pi}_{vs}}{dT}}{(R_1 + c_v) \rho} - \frac{L_{tr} \bar{\pi}_{vs}(T) \frac{dT}{dz}}{(R_1 + c_v) \rho T} \right).$$

Par conséquent, d'après (3.4.31) on obtient (3.4.36).

De plus, nous avons

$$\frac{dT}{dz} - \frac{d\tilde{T}}{dz} = \frac{1}{\left(\frac{d}{dT} Z(T^*) \right)^2} \left(\frac{d}{dT} Z(T^*) M_Y(z) - \frac{d^2}{dT^2} Z(T^*) \int_0^z M_Y(z') dz' \right).$$

de manière analogue à l'estimation (3.4.36), on obtient (3.4.37).

Pour l'estimation (3.4.38) on a

$$\rho = e^{-w/R_1} \left(T e^{\frac{L_{tr} \bar{\pi}_{vs}}{(R_1 + c_v) \rho T}} \right)^{\frac{c_v}{R_1}} e^{\frac{L_{tr} \bar{\pi}_{vs}}{(R_1 + c_v) \rho T}}$$

avec un calcul simple on obtient

$$\varrho = e^{-w/R_1} T^{\frac{R_1+c_v}{R_1}} e^{\frac{L_{1T}\bar{\pi}_{\nu S}}{(R_1+c_v)\varrho T}} \frac{1}{T} = y \frac{1}{T},$$

donc on aura

$$\varrho - \tilde{\varrho} = y \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{\tilde{T}} \right) + \frac{1}{\tilde{T}} (y - \tilde{y}).$$

De plus on a

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho}{dz} - \frac{d\tilde{\varrho}}{dz} &= \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\tilde{T}T} \right) (T - \tilde{T}) + \frac{1}{T\tilde{T}} \frac{d}{dz} (T - \tilde{T}) + \\ &\frac{R_1 + c_v}{R_1} \left(\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\tilde{T}} \right) [y]^{\frac{c_v}{R_1+c_v}} (Y - \tilde{Y}) + \frac{1}{\tilde{T}} \left(\frac{d}{dz} y^{\frac{c_v}{R_1+c_v}} (Y - \tilde{Y}) + [y]^{\frac{c_v}{R_1+c_v}} \frac{d}{dz} (Y - \tilde{Y}) \right) \right). \end{aligned}$$

Comme

$$(Y - \tilde{Y}) = \frac{R_1}{R_1 + c_v} y^{\frac{-c_v}{R_1+c_v}} (y - \tilde{y}). \quad (3.4.50)$$

De (3.4.50), (3.4.36), (3.4.37) on obtient (3.4.38), (3.4.39).

Pour obtenir (3.4.40) et (3.4.41), on note par :

$$F_1(z) = \int_0^z f_1(z') dz' \quad \tilde{F}_1(z) = \int_0^z \tilde{f}_1(z') dz'.$$

D'après (3.3.12)-(3.3.16) on a

$$w(z) - \tilde{w}(z) = \left(\frac{e^{F_1}}{\varrho\tilde{\varrho}} (\tilde{\varrho} - \varrho) + \frac{1}{\varrho} (e^{F_1} - e^{\tilde{F}_1}) \right).$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} - \frac{d\tilde{w}}{dz} &= \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{F_1}}{\varrho\tilde{\varrho}} \right) (\tilde{\varrho} - \varrho) + \left(\frac{e^{F_1}}{\varrho\tilde{\varrho}} \right) \frac{d}{dz} (\tilde{\varrho} - \varrho) + \\ &+ [e^{F_1} (\tilde{\varrho} - \varrho) \left(\frac{f_1}{\varrho\tilde{\varrho}} + \frac{d}{dz} \frac{1}{\varrho\tilde{\varrho}} \right) + (e^{F_1} - e^{\tilde{F}_1}) \frac{d}{dz} \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} (e^{F_1} f_1 - e^{\tilde{F}_1} \tilde{f}_1)] \end{aligned}$$

En tenant compte de la définition de (3.1.5), (3.3.11), (3.4.28), on obtient

$$F_1 - \tilde{F}_1 = 2e^{[F_1]_{\kappa}} \int_0^z (\varphi_f^T \kappa_T + \varphi_f^{\varrho} \kappa_{\varrho}) dz'$$

où

$$\varphi_f^T = \left(2 \left[\frac{1}{\rho^3} \right]_{\kappa} \left[\left| \frac{d\rho}{dz} \right| \right]_{\kappa} + \left[\frac{1}{\rho^2} \right]_{\kappa} \right) + \left[\frac{1}{\rho^2} \right]_{\kappa} \left[\left| \frac{dT}{dz} \right| \right]_{\kappa} \left[\frac{d}{dT} \bar{\pi}_{vs}(T) \right]_{\kappa}. \quad (3.4.51)$$

$$\varphi_f^{\rho} = \left(\left(\left[\frac{1}{\rho^2} \right]_{\kappa} \left[\left| \frac{d\rho}{dz} \right| \right]_{\kappa} + \left[\frac{1}{\rho} \right]_{\kappa} \right) \left[\frac{d}{dT} \bar{\pi}_{vs}(T) \right]_{\kappa} + \left[\frac{1}{\rho} \right]_{\kappa} + \left[\left| \frac{dT}{dz} \right| \right]_{\kappa} \left[\frac{d^2}{dT^2} \bar{\pi}_{vs}(T) \right]_{\kappa} \right) \quad (3.4.52)$$

Ainsi on trouve (3.4.40), (3.4.41) \square

Théorème 3.4.1. Soit $0 < z_1 < \tilde{z}_1$. S'il y a un $\bar{\varepsilon}_0$ tel que $0 < \bar{\varepsilon}_0 < 1$ et que les relations

$$\max(\Psi_{\rho}^0(\kappa_{\tilde{\rho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(z), \Psi_{\rho}^1(\kappa_{\tilde{\rho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(z)) \leq (1 - \bar{\varepsilon}_0) \kappa_{\tilde{\rho}}(z) \quad (3.4.53)$$

$$\max(\Psi_{\tilde{T}}^0(\kappa_{\tilde{\rho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(z), \Psi_{\tilde{T}}^1(\kappa_{\tilde{\rho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(z)) \leq (1 - \bar{\varepsilon}_0) \kappa_{\tilde{T}}(z), \quad (3.4.54)$$

$$\max(\Psi_w^0(\kappa_{\tilde{\rho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(z), \Psi_w^1(\kappa_{\tilde{\rho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(z)) \leq (1 - \bar{\varepsilon}_0) \kappa_{\tilde{w}}(z) \quad (3.4.55)$$

soient vérifiées pour tout $z \in [0, z_1]$, alors il existe une solution unique pour le système d'équations (3.1.2)-(3.1.4) avec les conditions initiales (3.1.6) dans l'intervalle $[0, z_1]$.

Démonstration. Nous considons le système d'équations différentielles pour (ρ, T, w) et $(\tilde{\rho}, \tilde{T}, \tilde{w})$ qui est exprimé par le système d'équations $(\rho_{hs}^*, T_{hs}^*, \frac{\tilde{U}}{\rho_{hs}^*})$ pour $z = 0$. on a

$$\rho(0) = \tilde{\rho}(0) = \rho_{hs}^*(0) = \rho_0, \quad T(0) = \tilde{T}(0) = T_{hs}^*(0) = T_0, \quad w(0) = \tilde{w}(0) = w_{hs}^*(0) = w_0, \quad (3.4.56)$$

(où $\rho_{hs}^*(0) = \rho_{hs}^*(z(0))$, $T_{hs}^*(0) = T_{hs}^*(z(0))$), en utilisant les expressions de h_{tr} , g_1 , \tilde{g}_1 au point $z = 0$ on a

$$\begin{aligned} w_0 \frac{d\rho}{dz} + \rho_0 \frac{dw}{dz} &= w_0 \frac{d\tilde{\rho}}{dz} + \rho_0 \frac{d\tilde{w}}{dz} = w_0 \frac{d\rho_{hs}^*}{dz} + \rho_0 \frac{d}{dz} \frac{\tilde{U}}{\rho_{hs}^*} = -w_0 h_{tr}(0) \\ -R_1 T_0 \frac{d\rho}{dz} + c_v \rho_0 \frac{dT}{dz} &= -R_1 T_0 \frac{d\tilde{\rho}}{dz} + c_v \rho_0 \frac{d\tilde{T}}{dz} = -R_1 T_0 \frac{d\rho_{hs}^*}{dz} + c_v \rho_0 \frac{dT_{hs}^*}{dz} = (R_1 T_0 + L_{tr}) h_{tr}(0) \\ R_1 T_0 \frac{d\rho}{dz} + R_1 \rho_0 \frac{dT}{dz} &= R_1 T_0 \frac{d\tilde{\rho}}{dz} + R_1 \rho_0 \frac{d\tilde{T}}{dz} = -g\rho_0 + g_1(0) (= -g\rho_0 + \tilde{g}_1(0)), \\ R_1 T_0 \frac{d\rho_{hs}^*}{dz} + R_1 \rho_0 \frac{dT_{hs}^*}{dz} &= -g\rho_0. \end{aligned}$$

on aura

$$\frac{d\rho}{dz}\Big|_{z=0} = \frac{d\tilde{\rho}}{dz}\Big|_{z=0}, \quad \frac{dT}{dz}\Big|_{z=0} = \frac{d\tilde{T}}{dz}\Big|_{z=0}, \quad \frac{dw}{dz}\Big|_{z=0} = \frac{d\tilde{w}}{dz}\Big|_{z=0}. \quad (3.4.57)$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} w_0 \frac{d}{dz}(\tilde{\rho} - \rho_{hs}^*)\Big|_{z=0} + \rho_0 \frac{d}{dz}(\tilde{w} - \frac{\tilde{U}}{\rho_{hs}^*}) &= 0, \\ -R_1 T_0 \frac{d}{dz}(\tilde{\rho} - \rho_{hs}^*)\Big|_{z=0} + c_v \rho_0 \frac{d}{dz}(\tilde{T} - T_{hs}^*)\Big|_{z=0} &= 0, \\ R_1 T_0 \frac{d}{dz}(\tilde{\rho} - \rho_{hs}^*)\Big|_{z=0} + R_1 \rho_0 \frac{d}{dz}(\tilde{T} - T_{hs}^*)\Big|_{z=0} &= \tilde{g}_1(0), \end{aligned}$$

après la résolution de ce système on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}}{dz}\Big|_{z=0} - \frac{d\rho_{hs}^*}{dz}\Big|_{z=0} &= \frac{c_v \tilde{g}_1(0)}{R_1 T_0 (R_1 + c_v)}, \quad \frac{d\tilde{T}}{dz}\Big|_{z=0} - \frac{dT_{hs}^*}{dz}\Big|_{z=0} = \frac{\tilde{g}_1(0)}{\rho_0 (R_1 + c_v)}, \\ \frac{d\tilde{w}}{dz}\Big|_{z=0} - \frac{d}{dz}\left(\frac{\tilde{U}}{\rho_{hs}^*}\right)\Big|_{z=0} &= \frac{c_v w_0 \tilde{g}_1(0)}{R_1 \rho_0 T_0 (R_1 + c_v)}. \end{aligned}$$

Il est clair que $\tilde{g}_1 \neq 0$, donc d'après (3.4.56) et (3.4.57) il en résulte qu'il existe $z_\varepsilon > 0$ de telle sorte que l'hypothèse (a) est vérifiée sur l'intervalle $[0, z_\varepsilon]$.

Par conséquent, d'après le lemme 3.4.2 et les relations (3.4.53)-(3.4.55) on peut prolonger la solution (w, ρ, T) jusqu'à z_1 . Cela prouve le théorème 3.4.1.

L'unicité de la solution résulte de l'unicité de la solution locale. \square

Corollaire 3.4.1. Soient $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_{n-1} < z_n = \bar{z}_1$. On suppose que

i) les relations (3.4.53)-(3.4.55) avec les conditions initiales $\rho_0 = \rho(z_0), T_0 = T(z_0), w_0 = w(z_0)$ sont vérifiées pour tout $z \in [z_0, z_1]$,

ii) si $\rho(z_i), T(z_i), w(z_i)$ sont les valeurs en $z = z_i$ de la solution du système d'équations (3.1.2)-(3.1.4) dans l'intervalle $[z_{i-1}, z_i]$, les relations (3.4.53)-(3.4.55) avec les conditions initiales $\rho_0 = \rho(z_i), T_0 = T(z_i), w_0 = w(z_i)$ sont vérifiées pour tout $z \in [z_i, z_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$.

Alors il existe une solution unique du système d'équations (3.1.2)-(3.1.4) avec les conditions initiales (3.1.6) dans l'intervalle $[0, \bar{z}_1]$.

Démonstration. En appliquant le théorème 3.4.1 successivement sur chaque sous-intervalle $[z_i, z_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$, il existe une unique solution du système d'équations (3.1.2)-(3.1.4) avec les conditions initiales (3.1.6) dans l'intervalle $[0, \bar{z}_1]$. \square

Ce corollaire est une conséquence triviale du théorème 3.4.1, mais dans la pratique nous sommes souvent dans la situation où nous devons utiliser ce corollaire, car l'intervalle de l'existence de la solution que le théorème garantit est souvent trop petit tandis que la solution réelle suscite dans un intervalle relativement long.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse nous avons construit un modèle qui modélise le mouvement vertical de l'air dans une cheminée assez haute, de sorte que le modèle peut être appliqué aux phénomènes naturels dans l'atmosphère comme un cyclone tropical ou un orage. Bien que cette expérience soit virtuelle, les résultats des calculs numériques montrent bien les aspects fondamentaux de l'évolution du mouvement vertical de l'air avec la condensation de la vapeur d'eau. On voit que la vitesse verticale de l'air croît rapidement à cause de la chaleur latente due à la condensation de la vapeur d'eau, mais elle sera ralentie par l'effet de la friction des gouttelettes avec l'air et tend vers un certain équilibre, ce qui correspond à ce qu'on observe dans la nature. D'autre part nous avons démontré un théorème d'existence et d'unicité de la solution d'un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires qui modélise le mouvement vertical de l'air dans une cheminée, en utilisant l'idée de [14] mais en introduisant aussi une autre méthode basée sur la "deuxième approximation".

L'étude effectuée ouvre de manière tout naturelle une voie de la recherche sur la description mathématique d'un cyclone tropical, qui se développe autour de l'écoulement ascendant de l'air humide sur les mers tropicales ; le phénomène étudié dans cette thèse est le mécanisme fondamental et central du cyclone tropical. Nous pouvons imaginer facilement que les techniques développées dans notre étude peuvent offrir beaucoup d'outils, en particulier si on utilise une modélisation d'un cyclone basée sur l'écoulement de l'air

sur les trajectoires ; même si les trajectoires ne seront pas linéaires, la technique de calcul sur une variété de dimension 1 donnera des résultats de calcul très utiles pour décrire le comportement de l'évolution d'un cyclone.

Bibliographie

- [1] Anthes, R. A. : The dynamics and energetics of mature tropical cyclones. *Rev. Geophys. Space Phys.* **12** (1974), 495-522.
- [2] Antontsev, M., Khazhikhov, A.V., Monakhov, V.N. : Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids. Elsevier, 1990
- [3] Ayachi. A., Aissaoui., M., Z., Guebai., H., Fujita Yashima., H. : Syst d'équations décrivant certains mouvements stationnaires en une dimension d'un gaz visqueux et calorifère. A paraître sur Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.
- [4] Ayachi. : Etude numérique des équations d'un gaz visqueux. *Thèse de doctorat 3 cycle en Mathématiques université 8 Mai 1945 Guelma.* 2016.
- [5] Belhireche, H. : Comportement asymptotique de l'équation de la coagulation des gouttelettes en chute. *Th de doctorat 3 cycle en Mathématiques université 8 Mai 1945 Guelma.* 2014.
- [6] Black, P. G., D' Asaro, E. A., Dennen, W. M., French, J. R., Niiler, P. P., Sanford, T. B., Terrill, E. J., Walsh, E. J., and Zhang, J. A. : Air-sea exchange in hurricanes : Synthesis of observations from the couple boundary layer air-sea transfer experiment. *Bull. Am. Meteorol. Soc.* **88** (2007), 357-374.

- [7] CHANH Q., K. : *Theoretical and numerical studies of tropical cyclone development. thèse de Doctorat, 2008, University of Maryland, College Park, College Park, Maryland,*
- [8] Cotton, W., Bryan, G., van den Heever, S. : *Storm and cloud dynamics* (II ed.). Academic Press, 2011.
- [9] Emanuel, K. A. : An air-sea interaction theory for tropical cyclones : Part i : Steady-state maintenance. *J. Atmos. Sci.* **43** (1986), 585-604.
- [10] Fujita Yashima., H. : *Modélisation de la physique des fluides, cours de l'université de Guelma, 2010.*
- [11] Fujita Yashima.H : *Fluides Newtoniens, cours de l'université de Guelma, 2010-2011*
- [12] Fujita Yashima, H., Campana, V., Aissaoui, M. Z. : Système d'équations d'un modèle du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère. *Ann. Math. Afr.*, vol. **2** (2011), pp. 66–92.
- [13] Fujita Yashima, H. : Modelacitemca del movimiento de la atmra con la transici fase del agua. *Rev. Invest. Operac.*, vol. **34** (2013), pp. 93-104.
- [14] Fujita Yashima, H. : La simulation de la structure interne Des cyclones tropicaux : Équation sur la trajectoire. (*soumis*).
- [15] Ghomrani, S., Marín Antuña., J., Fujita Yashima, H. : Un modelo de la subida del aire ocasionada por la condensación del vapor y su cálculo numerico. *Rev. Cuba Fís.*, vol. **32** (2015), pp 3-8.
- [16] Khain, A. P. : *Modelación matemática de los ciclones tropicales* (en ruso). Hidrometeoizdat, Leningrad, 1984.
- [17] Kikoïne, A. K., Kikoïne, I. K. : *Physique moléculaire* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1979.

- [18] Landau, L. L., Lifchitz, E. M. : *Mécanique des fluides (Physique théorique, tome 6)* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1989.
- [19] Matveev, L. T. : *Física de la atmósfera* (en ruso). Gidrometeoizdat, Leningrad-S. Peterburg, 1965, 1984, 2000.
- [20] Merad, M. : Etude de l'équation de coagulation des gouttelettes en mouvement avec le vent. *Th de doctorat 3 cycle en Mathématiques, université 8 Mai 1945 Guelma. 2014*
- [21] Ojeda Figueroa, M. : Modelo para el cálculo de intensidad potencial de ciclones tropicales. Tesis de licenciatura en Meteorología. Instituto Superior de Tecnologías y Ciencias Aplicadas, La Habana, Cuba, 2011.
- [22] Prodi, F., Battaglia, A. : *Meteorologia - Parte II, Microfisica*. Grafica Pucci, Roma, 2004.
- [23] Rozanova., O., S. , Fujita Yashima., H. : Solution stationnaire des équations du mouvement de l'air dans la partie inférieure d'un typhon (en russe). Sibir. Zhur. Industr. Mat., vol. 8 (2005), pp. 100-123.
- [24] Selvaduray, S., Fujita Yashima, H. : Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati : gassoso, liquido e solido. *Accad. Sci. Torino, Memorie Cl. Sci. Fis., Serie V*, vol. **35** (2011), pp.37-69.
- [25] Sheng, P.-X., Mao, J.-T., Li, J.-G., Zhang, A.-C., Sang, J.-G., Pan, N.-X. : *Física de la atmósfera* (en chino). Publ. Univ. Pekín, Pekín, 2003.
- [26] Samarskii, A. A. : *Théorie des schémas de différences finies* (en russe). Nauka (Moscou), 1977.
- [27] Samarskii, A. A., Vabishchevich : *Méthodes numériques pour la résolution des problèmes de convection-diffusion, 4 éd.* (en russe). Librokom (Moscou), 2009.

-
- [28] Vlasov, V. I., Skorokhod, S. L., Fujita Yashima, H. : Simulation of air flow in a typhoon lower layer. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, vol. **26** (2011), pp. 85-111.

Bibliographie
