République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Laboratoire de Mathématiques Appliquées et de Modélisation
Département de Mathématiques

Thèse :

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat 3ème cycle en Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées
Par : KAIDOUCHI Wahida

Intitulée

Equations de gouttelettes avec le mouvement de l'air

Devant le jury

Président : BENCHETTAH Azzedine — **Pr. Université de Annaba**
Rapporteur : AISSAOUI Mohamed Zine — **Pr. Université de Guelma**
Co-rapporteur : FUJITA YASHIMA Hisao — **Pr. Université de Guelma**
Examinateur : DRABLA Salah — **Pr. Université de Sétif 1**
Examinateur : ELLAGOUNE Fateh — **Pr. Université de Guelma**
Examinateur : BADI Sabrina — **M.C.A Université de Guelma**

Résumé

Dans la présente thèse, on considère l'équation décrivant la chute des gouttelettes par la force gravitationnelle, en réalisant le processus de coagulation et de fragmentation dans un domaine d'une dimension spatiale. Du point de vue mathématique, il s'agit d'une équation intégro-différentielle pour une fonction inconnue représentant la densité, par rapport à l'unité de volume, de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes. Cette fonction dépendra de la masse de gouttelettes, du temps et de la position. Dans la première partie, on utilise les caractéristiques pour le déplacement des gouttelettes, ce qui sera crucial pour la construction de la solution de l'équation associée avec d'autres conditions convenables. A cet effet, en construisant les solutions approchées, qui sont constituées par des familles de fonctions analytiques par morceaux, et en vérifiant leur convergence, on démontre l'existence et l'unicité de la solution locale. Dans la deuxième partie, nous proposons l'étude d'une variante de l'équation de coagulation et de fragmentation des gouttelettes en chute. En construisant les solutions approchées par la troncature des coefficients de coagulation et de fragmentation, nous démontrons la convergence dans une certaine topologie d'une suite de solutions approchées, dont la limite est une fonction localement bornée.

Mots clés : Equations intégro-différentielles, coagulation-fragmentation des gouttelettes, chute des gouttelettes, solution analytique.

Mathematics Subject Classification (2010). 35R09, 35L60.

الملخص

في هذه الأطروحة نقوم بدراسة المعادلة التي تصف تساقط قطرات المطر تحت تأثير الجاذبية الأرضية والتي تخضع لعملية احتمال الالتقاء و التجزئة فيما بينها في مجال ذو بعد أحادي الوضعية. تصاغ من وجهة نظر رياضياتية على شكل معادلة تكاملية تفاضلية لدالة مجهولة تمثل كثافة الماء السائل، بالنسبة لوحدة الحجم، المحتوى في القطرات مع الأخذ بعين الاعتبار كتلة القطرات و الزمن و الوضعية.

في الجزء الأول ، نستعمل المسارات لحركة القطرات الذي يكون حاسما لإيجاد الحل وفق شروط محددة. لهذا الغرض، نقوم بإنشاء الحلول التقريبية و التي تتكون من عائلات الدوال التحليلية بالتجزئة و التحقق من تقاربها، نبرهن على وجود حل محلي وحيد.

في الجزء الثاني ، نقترح دراسة حالة من المعادلة التي تصف تساقط قطرات المطر والتي تخضع لعملية احتمال الالتقاء و التجزئة فيما بينها. نقوم بإنشاء الحلول التقريبية عن طريق اقتطاع عوامل التجمع والتجزؤ، ونثبت التقارب في طوبولوجيا معينة لمتتالية الحلول التقريبية ، نهايتها عبارة عن دالة محدودة محليا.

الكلمات الاستدلالية: المعادلات التفاضلية التكاملية ، التقاء وتجزئة قطرات المطر ، سقوط قطرات المطر ، الحل التحليلي

التصنيف الرياضي(2010) : 35R09, 35L60

Abstract

In this thesis, we consider the equation which describes the fall of drops by the gravitational force, realizing the process of coagulation and fragmentation in one-dimensional domain. From a mathematical point of view, it is an integro-differential equation for an unknown function representing the density, with respect to the unit volume, of the liquid water contained in the drops. This function will depend on the mass of drops, the time and the position. In the first part, we use the characteristics for displacement of drops which will be crucial for the construction of the solution associated with other appropriate conditions. For this purpose, by constructing the approximate solutions, which are constituted by families of piece-wise analytic functions, and verifying their convergence, we prove the existence and uniqueness of the local solution. In the second part, we propose the study of a variant of the coagulation and fragmentation equation of water drops in fall. We construct the approximate solutions by truncation of the coefficients of coagulation and fragmentation, we prove the convergence in a certain topology of a sequence of approximate solutions whose limit is a locally bounded function.

Key words : Integro-differential equations, coagulation-fragmentation of drops, fall of drops, analytic solution.

Mathematics Subject Classification (2010). 35R09, 35L60.

Remerciements

La présente étude n'aurait pas été possible sans le bienveillant soutien de certaines personnes. Et je ne suis pas non plus capable de dire dans les mots qui conviennent, le rôle qu'elles ont pu jouer à mes côtés pour en arriver là. Cependant, je voudrais les prier d'accueillir ici tous mes sentiments de gratitude qui viennent du fond de mon coeur, en acceptant mes remerciements.

Mes premiers remerciements vont d'abord au professeur MOHAMED ZINE AISSAOUI pour la confiance qu'il m'a témoignée en acceptant la direction scientifique de mes travaux. Je lui suis reconnaissante de m'avoir fait bénéficier tout au long de ce travail de sa grande compétence, de sa rigueur intellectuelle, de son dynamisme, et de son efficacité que je n'oublierai jamais.

Mes plus s'insères remerciement vont également au professeur HISAO FUJITA YASHIMA qui m'a aussi encadré durant l'élaboration de cette thèse. Je le remercie pour ses précieux conseils, sa disponibilité, son indéfectible enthousiasme et sa patience. Je n'aurais pu imaginer meilleures guides pour accompagner mes premiers pas dans le monde de la recherche scientifique.

Je remercie très sincèrement professeur BENCHATTAH AZZEDINE d'avoir accepté de préséder mon jury de soutenance. Je tiens à l'assurer de ma profonde reconnaissance pour l'intérêt qu'il porte à ce travail.

J'adresse aussi mes vifs remerciement au professeurs DRABLA SALAH, ELLAGGOUNE FATAH ET MADAME BADI SABRINA pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de participer à mon jury de thèse et pour leurs temps consacrer à la lecture de ce manuscrit.

Je remercie chaleureusement tous les membres du Laboratoire de Mathématiques Appliquées et de Modélisation, qu'ils soient permanents ou thésards, que j'ai eu beaucoup de plaisir à cotoyer durant ces années de thèse. Je remercie particulièrement mes amies Meryem et Sarra pour leurs gentillesse et compétence.

Je terminerai en remerciant évidemment ma famille pour son soutien et ses encouragements. Merci à tous.

Table des matières

INTRODUCTION

Les nuages se forment lorsque la vapeur d'eau se condense et se transforme en eau liquide. L'eau qui forme ces nuages provient de l'évaporation de l'eau liquide qui existe dans la nature et plus particulièrement des grandes étendues d'eau (lacs, mers, etc...). Cette vapeur d'eau se mélange à la masse d'air. Lorsque l'air s'élève à cause des mouvements de l'atmosphère, il se refroidit par détente. La vapeur d'eau contenue dans l'air se condense autour de noyaux de condensation (aérosols : poussières, pollens etc...) lorsqu'une légère sursaturation est atteinte. Ces gouttelettes donnent des nuages.

Nous observons que quand les nuages sont "noirs", il est fréquent qu'il commence à pleuvoir. Le fait que les nuages sont "noirs" est dû à la présence de gouttelettes plus nombreuses, qui absorbent la radiation de la lumière visible. Dans ces nuages les petites gouttelettes se déplacent dans toutes les directions à des vitesses différentes. Elles se heurtent parfois l'une à l'autre, formant ainsi des gouttelettes plus grosses. La vapeur d'eau se condense parfois sur une gouttelette déjà formée, ce qui augmente sa taille ; c'est le phénomène de *coagulation*, ainsi des nuages tombent des gouttelettes relativement grandes, que nous appelons la *pluie*. Les processus de coagulation et la chute de gouttelettes sont donc les processus essentiels qui expliquent le phénomène dit *pluie*. D'autre part, les gouttelettes qui sont devenues un peu grandes peuvent subir la *fragmentation* à cause de la friction entre les gouttelettes et l'air.

Les nuages se forment et la pluie tombe dans l'atmosphère. En un mot, les nuages et la pluie font partie de l'atmosphère. Dans cette optique, les scientifiques ont tenter de décrire l'ensemble des phénomènes qui se passent dans l'atmosphère ; parmi les nombreuses descriptions physiques nous citons [24], [29]. Ces descriptions de caractère physique utilisent évidemment les descriptions mathématiques. Or, il nous semble qu'il n'est pas facile à construire un modèle mathématique cohérent et complet. Dans [30] (voir aussi [16], [14]) les auteurs ont proposé un modèle mathématique assez général et assez complet. En suivant cette orientation de la recherche dans [27] et [3] une équation de coagulation des gouttelettes en chute a été étudiée. Ceci nous donne une motivation et une orientation pour l'étude de l'équation de coagulation, de fragmentation et de chute des gouttelettes.

Dans notre étude, nous allons examiner du point de vue mathématique l'équation qui décrit les processus de coagulation, de fragmentation et la chute des gouttelettes, comme on l'observe dans la pluie. Mais pour que notre étude soit réalisée avec certaine rigueur nous devons formuler l'équation avec une abstraction et des notions bien définies. Parmi les notions que nous allons utiliser, celle de densité mérite d'être précisée.

En effet, si on considère une région D, nous voulons que l'intégrale

$$\int_{[m_1,m_2]\times D} \sigma(m;t,x)dmdx$$

représente la quantité de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse $m \in [m_1, m_2]$ se trouvant dans la région D à l'instant t. Comme $\sigma(m;t,x)$ est la densité de l'eau liquide, c'est-à-dire le rapport entre la masse d'eau liquide contenue dans des gouttelettes de masse m et le volume d'espace, le rapport $\frac{\sigma(m)}{m}$ représenterait le nombre, toujours dans un sens statistique, de gouttelettes de masse m se trouvant dans l'unité de volume, c'est-à-dire, l'intégrale

$$\int_{[m_1,m_2]\times D} \frac{\sigma(m;t,x)}{m}dmdx$$

représentera le nombre de gouttelettes de masse $m \in [m_1, m_2]$ se trouvant dans la région D à l'instant t.

Cela étant, on doit introduire l'opérateur qui représente le processus de coagulation et celui qui représente le processus de fragmentation. La chute, ou plus généralement le déplacement, devra être décrite d'une manière analogue à l'équation de transport. La première formulation d'une équation qui décrit le processus de coagulation a été donnée par Smoluchowski dans son article [31] ; l'équation de ce type est appelé *équation de Smoluchowski*. Or, la formulation de Smoluchowski était relative aux gouttelettes de masse discrète, c'est-à-dire multiples d'une masse strictement positive. Puis dans [28] l'équation de Smoluchowski a été généralisée à une équation relative à la masse continue (ainsi m a pu avoir toutes les valeurs réelles strictement positives). Plus tard dans son article [25] Melzak a étudié l'équation de coagulation et de fragmentation des gouttelettes (sans déplacement des gouttelettes) et a démontré l'existence et l'unicité de la solution globale dans le cadre des fonctions analytiques. Quant à l'équation des gouttelettes qui se déplacent et subissent le processus de coagulation, elle a été étudiée en particulier par Galkin [18, 19] (voir aussi [17]), tandis que Dubovskii [13] a étudié l'équation de déplacement, de coagulation et de fragmentation des gouttelettes.

Dans cette thèse, on propose des alternatives pour améliorer les résultats existants. Plus précisément, dans la première partie, nous étudions une équation analogue à celle du travail [13] de Dubovskii, c'est-à-dire nous étudions l'équation qui décrit la chute, la coagulation et la fragmentation des gouttelettes. Pour la construction de la solution, on utilise une transformation réalisée par un changement de variables de notre équation sur les caractéristiques, en suivant les trajectoires des gouttelettes et leurs positions $z \leq 0$, ce qui est différent des techniques utilisées dans les travaux précédents (ils se sont intéréssés à l'évolution par rapport au temps et ils ont construit la solution suivant le temps) ; en particulier en adoptant une approximation pour la vitesse des gouttelettes cohérente avec ce qu'on observe dans la nature selon la formule (2.1.1). Dans la deuxième partie, nous introduisons l'opérateur de coagulation et celui de fragmentation avec la position z élargie, ce qui peut avoir des aspects similaires aux collisions de gouttelettes avec le rayon strictement positif. Après avoir introduit un changement de variables qui est différent à celle proposer dans la première partie et qui fait l'évolution des caractéristiques en temps, on va étudier la convergence d'une suite de solutions approchées.

Contenu de la thèse

Nous rappelons l'articulation de la présente thèse, qui est constituée par une introduction, trois chapitres et une conclusion. Dans le premier chapitre, on rappelle rapidement un système d'équations général des phénomènes dans l'atmosphère selon [30]. On rappelle aussi que l'équation de coagulation des gouttelettes en chute a été étudié dans ce contexte dans [2, 27].

Dans le deuxième chapitre, on étudie l'équation de coagulation et de fragmentation des gouttelettes qui se déplacent dans l'air par la force gravitationnelle dans le cas d'équilibre, c'est-à-dire sans transition de phase de l'eau, et en absence du mouvement de l'air. Du point de vue technique, on va considérer une équation intégro-différentielle pour une fonction inconnue $\sigma = \sigma(m, z, t)$ représentant la densité (par rapport au volume de l'air) de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m. L'équation est considérée dans un domaine d'une dimension spatiale qui représente l'axe verticale de l'atmosphère et la densité des gouttelettes à l'entrée du domaine est supposée donnée ; dans le cas où la condition d'entrée dépend du temps t, on démontre l'existence et l'unicité de la solution locale (c'est-à-dire dans un domaine $-L < z \leq 0$) de l'équation en considération sous certaines hypothèses appropriées. Pour ce faire, en utilisant la méthode de Melzak [25], nous construisons les solutions approchées, constituées par des fonctions analytiques en $s = -z$ dans chaque intervalle $[\frac{\nu}{N}, \frac{\nu+1}{N}]$, $\nu = 0, 1, 2, \cdots$, et nous démontrons leur convergence vers la solution de l'équation. Dans le cas où la condition d'entrée ne dépend pas du temps t, nous pouvons construire directement la solution, qui sera une fonction analytique en $s = -z$; ou plutôt, l'équation avec l'entrée homogène réécrite sur les trajectoires ne sera qu'une variante formelle de l'équation étudiée par Melzak dans [25]. La démonstration s'appuie sur la transformation de l'équation en une équation différentielle ordinaire dans un espace de Banach, transformation réalisée par un changement de variables, par lequel la fonction σ devient une fonction définie sur une famille de courbes, ce qui nous ramène à mettre au point une variante du théorème de Fubini, qui va servir à surmonter les difficultés techniques rencontrées.

Dans le chapitre 3, nous proposons une variante de l'équation de coagulation et de fragmentation des gouttelettes en chute. Plus précisément, nous introduisons l'opérateur de coagulation et celui de fragmentation avec l'élargissement de position z, ce qui peut avoir des aspects similaires aux collisions de gouttelettes avec le rayon strictement positif. L'introduction de ces opérateurs a l'effet de régulariser la solution, ce qui nous permet d'obtenir des estimations utiles pour surmonter les difficultés rencontrées dans l'étude de l'équation de coagulation-fragmentation des gouttelettes en chute. Du point de vue technique, nous utilisons, outre la conservation de la masse de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes, l'idée des travaux de Da Costa [10], Ball et Carr [1], qui est basée sur l'exploitation de l'estimation du moment μ de l'équation discret de coagulation-fragmentation sans déplacement et la méthode de Galkin [19] et Dubovskii [13] qui est basée essentiellement sur l'utilisation de “Principe du maximum” pour contrôler la norme dans L^∞ de la fonction inconnue. En utilisant ces techniques, nous montrons la convergence de solutions approchées, qui sont les solutions des équations approchées par troncature sur les coefficients de coagulation et de fragmentation.

CHAPITRE 1

Système d'équations du modèle gaz-liquide

Sommaire

Dans ce chapitre nous rappelons le système d'équations de la mécanique des fluides développé dans [2, 16]. Ce système d'équations modélise le mouvement de l'air en tenant compte de la transition de phase de l'eau du gaz en liquide, c'est-à-dire la présence des gouttelettes d'eau dans l'atmosphère. (Pour le modèle compte tenu toutes les transitions de phases de H_2O, voir [30]).

Pour décrire le mouvement de l'air contenant H_2O nous considérons les quantités physiques suivantes : la densité de l'air sec ϱ, la densité de la vapeur d'eau π , la densité σ de l'eau liquide se trouvant dans les gouttelettes, la vitesse $v = (v_1, v_2, v_3)$ de l'air composé par l'air sec et la vapeur d'eau, la vitesse $u(m) = (u_1(m), u_2(m), u_3(m))$ des gouttelettes de masse m, la température T de l'air et la pression p. Les quantités v, T, p, ϱ et π seront des fonctions de la position x et du temps t, tandis que σ est une fonction de la masse de gouttelette m ainsi que de x et de t. Ici par l'air sec on entend la partie de l'air constituée par des molécules différentes de H_2O. On rappelle que dans les conditions usuelles de l'atmosphère, le comportement de l'air est similaire à celui du gaz idéal, ce qui nous permet d'écrire l'équation de la pression dans la forme

$$p = R\Big(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h}\Big)T, \tag{1.0.1}$$

où $R,\ \mu_a,\ \mu_h$ sont respectivement, la constante universelle des gaz, la masse molaire moyenne de l'air et celle de l'eau. Pour la vitesse $u(m, x, t)$ des gouttelettes de masse m, nous admettons l'approximation (voir [16])

$$u(m, t, x) = v(t, x) - \frac{1}{\alpha(m)}\nabla\Phi, \tag{1.0.2}$$

où $\alpha(m)$ est le coefficient de friction d'une gouttelette de masse m avec l'air, tandis que Φ est le potentiel gravitationnel (pour les détails, voir [16, 30]). Il est bon de rappeler que le coefficient de friction $\alpha(m)$ est une fonction décroissante de la masse m et que la relation (1.0.2) correspond, dans une bonne approximation, à la vitesse réelle des gouttelettes (voir [22, 24]). Les équations (1.0.1) et (1.0.2) nous permettent de réduire le nombre des inconnues dans le système d'équations à définir dans la suite.

1.1 Equation de quantité de mouvement

On rappelle que l'air atmosphérique est composé par l'air sec (N_2, O_2, Ar etc...) et la vapeur d'eau ; de plus le comportement mécanique de la vapeur d'eau ne diffère pas beaucoup de celui de l'air sec, ce qui nous permet d'écrire l'équation de la quantité de mouvement de l'air dans la forme (voir [16])

$$(\varrho + \pi)\Big(\frac{\partial v}{\partial t} + \big(v.\nabla\big)v\Big) = \eta\Delta v + \Big(\zeta + \frac{\eta}{3}\Big)\nabla(\nabla.v) +$$

$$-R\nabla\Big[\Big(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h}\Big)T\Big] - \int_0^\infty \alpha(m)\sigma(m)\big(v - u(m)\big)dm - (\varrho + \pi)\nabla\Phi, \tag{1.1.3}$$

où $\eta,\ \zeta$ sont les coefficients de viscosité.

1.2 Equation du bilan de l'énergie

Pour la conservation de l'énegie dans ce système d'équations, on aura (voir [16])

$$(\varrho+\pi)c_\nu\Big(\frac{\partial T}{\partial t}+v.\nabla T\Big)=\kappa\Delta T-R\Big(\frac{\varrho}{\mu_a}+\frac{\pi}{\mu_h}\Big)T\nabla.v+$$

$$+\eta\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla.v\Big)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\zeta(\nabla.v)^2+E_{rad}+L_{gl}(T)H_{gl}, \qquad (1.2.4)$$

où c_ν et κ sont respectivement la chaleur spécifique et le coefficient de la thermoconductibilité de l'air, E_{rad} est la source de la chaleur (principalement due à la radiation), $H_{gl}=H_{gl}(T,\pi,\sigma(.))$ est la quantité totale (dans l'unité de volume et de temps) de H_2O qui se transforme du gaz en liquide, tandis que $L_{gl}(T)$ désignent la chaleur latente de la transition de phase gaz-liquide de H_2O.

1.3 Equations de continuité

La loi de la conservation de la masse pour l'air sec (dont la densité est notée ϱ) est exprimée par l'équation de continuité classique (absence de transition de phase)

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\nabla.(\varrho v)=0, \qquad (1.3.5)$$

Pour la vapeur d'eau (dont la densité est notée π), compte tenu de la quantité de l'eau qui resulte de la transition de phase, le principe de la conservation de la masse est exprimé par l'équation (voir [16])

$$\frac{\partial\pi}{\partial t}+\nabla.(\pi v)=-H_{gl}\Big(T,\pi,\sigma(.)\Big), \qquad (1.3.6)$$

D'autre part, pour l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m, la considération sur la partie $h_{gl}(m)$ de condensation (ou d'évaporation) produite sur les gouttelettes de masse m aboutit à l'équation (voir [2, 16])

$$\frac{\partial\sigma(m)}{\partial t}+\nabla.\Big(\sigma(m)u(m)\Big)=-\frac{\partial\Big(mh_{gl}(m)\sigma(m)\Big)}{\partial m}+h_{gl}(m)\sigma(m)+ \qquad (1.3.7)$$

$$\frac{1}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm' - \int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm' +$$
$$+g_0(m)[N^* - \widetilde{N}(\sigma)]^+[\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)]^+ - g_1(m)[\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)]^- \sigma(m),$$

où $\beta(m,m')$ est la probabilité de rencontre entre une gouttelettes de masse m et une de masse m', h_{gl} est la quantité de H_2O qui se transforme de gaz en liquide, par unité de masse, sur les gouttelettes de masse m.

Pour déduire l'équations (1.3.7), nous devons avant tout préciser la définition de H_{gl}, h_{gl} apparaissant dans (1.3.6)-(1.3.7), rappelons d'abord que dans l'atmosphère les gouttelettes se forment exclusivement sur les aérosols. Pour le formuler convenablement, dans [2] (voir aussi [30]) il a été introduit la probabilité de création d'une nouvelle gouttelette ayant la forme

$$g_0(m)\Big[\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)\Big]^+\Big[N^* - \widetilde{N}\big(\sigma\big)\Big]^+,$$

où N^* est le nombre total de gouttelettes qui peuvent être formés dans l'unité de volume, tandis que $\widetilde{N}$ représente le nombre dans l'unité de volume des aérosols qui se trouvent déjà dans des gouttelettes ; ainsi $\widetilde{N}$ aura la forme

$$\widetilde{N}\big(\sigma\big) = \int_0^\infty \frac{\sigma(m)}{m}dm + c_l\int_0^\infty \sigma(m)dm$$

avec une constantes positive convenable c_l.

Pour formuler l'évaporation totale, il est nécessaire d'introduire la probabilité de disparition des gouttelettes

$$g_1(m)\Big[\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)\Big]^-$$

Comme pour l'apparition et la disparition de gouttelettes de dimension d'aérosols, il a été supposé

$$g_0(m) = 0, \quad g_1(m) = 0, \quad \text{pour} \quad m \geq \overline{m}_b,$$

$\overline{m}_b$ étant la masse maximale des aérosols concernés.

Pour formuler la condensation et l'évaporation sur la surface des gouttelettes, on rappelle que dans [2, 16, 30] il a été définit la fonction $S_l(m)$ qui représente la surface des gouttelettes de masse m, où m est considéré comme la somme de la masse de H_2O et de celle des noyaux (aérosols) à l'exception des gouttelettes d'eau de diamètre trop petit ; cette fonction doit vérifier

$$S_l(m) \in \mathcal{C}^2([0,\infty[), \qquad S_l(m) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq m \leq \frac{\overline{m}_a}{2},$$
$$S_l(m) = 3^{2/3}(4\pi)^{1/3} m^{\frac{2}{3}} \quad \text{pour} \quad m \geq \overline{m}_b > 0$$

($\overline{m}_a$ est la borne inférieure de la masse des aérosols concernés). Rappelons que la surface $S_l(m)$ est considérée comme celle de l'eau et que donc la surface d'un aérosol sans eau doit être considérée comme nulle. Avec $S_l(m)$ ainsi définies, de même dans [2] la quantité de condensation sur les gouttelettes de masse m et la quantité totale de condensation notés respectivement h_{gl} et H_{gl} sont données par :

$$h_{gl} = h_{gl}(T, \pi, m) = K_1 \frac{S_l(m)}{m}(\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)) \tag{1.3.8}$$

$$H_{gl}(T, \pi, \sigma(.)) = K_1(\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)) \int_0^\infty \frac{S_l(m)}{m}\sigma(m)dm, \tag{1.3.9}$$

où K_1 est le coefficient positif de la vitesse de condensation ou d'évaporation. Maintenant, en rappelant la définition de h_{gl} introduite dans (1.3.8), la vitesse de croissance d'une gouttelette de masse m est défini par mh_{gl}, ce qui permet de considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^4$

$$\widetilde{U}_{4l} = \widetilde{U}_{4l}(u, T, \pi, \sigma) = (mh_{gl}, u_1(m), u_2(m), u_3(m))^T$$

pour définir la vitesse d'une gouttelette dans l'espace $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$, où la masse m est considérée comme une variable spatiale. D'une manière similaire aux équations de continuité dans $\mathbb{R}^3$, en utilisant $\widetilde{U}_{4l}$, la loi de la conservation de la masse pour H_2O liquide est exprimée dans la forme

$$\partial_t \sigma + \nabla_{(m,x)} \cdot \left(\sigma \widetilde{U}_{4l}\right) = \text{variation de la masse}, \quad ,$$

où

$$\nabla_{(m,x)} = \left(\frac{\partial}{\partial m}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^T.$$

En rappelant les contributions à la variations de σ définie ci-dessus, on aura l'équation (1.3.7).

CHAPITRE 2

Solution locale de l'équation de coagulation-fragmentation des gouttelettes en chute

Sommaire

Dans ce chapitre, on va étudier l'équation intégro-différentielle pour une fonction inconnue $\sigma(m, t, z)$ qui décrit le processus de coagulation et de fragmentation des gouttelettes en chute en absence de transition de phase. Plus précisément, on démontre l'existence et l'unicité de la solution locale. En construisant les solutions approchées de notre équation, qui sont constituées par des familles de fonctions analytiques par morceaux, et en vérifiant leur convergence.

2.1 Position du problème

Désignons par $\sigma(m,t,z)$ la densité de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m à l'instant $t \in \mathbb{R}$ et au point $z \in \Omega$ $(\subset \mathbb{R}_-)$. En effet, la densité $\sigma(m,t,z)$ et le nombre $\tilde{n}(m,t,z)$, au sens purement statistique, des gouttelettes de masse m sont reliés par la relation $\tilde{n}(m,t,z) = \frac{\sigma(m,t,z)}{m}$. Donc, l'équation peut être écrite par rapport au nombre (voir par exemple [12, 13, 17, 25]), mais nous préférons utiliser la densité $\sigma(m,t,z)$ pour être conforme à la littérature de la modélisation générale des phénomènes météorologiques (voir [2, 16, 30]).

Pour la vitesse des gouttelettes $u(m)$ en absence de mouvement de l'air, son approximation donnée dans (1.0.2) est réduite alors à

$$u(m) = -\frac{g}{\alpha(m)}, \tag{2.1.1}$$

où g, $\alpha(m)$ désignent respectivement, l'accélération gravitationnelle et le coefficient de friction entre les gouttelettes et l'air.

Si on considère la variation de la densité $\sigma(m,t,z)$ due au déplacement avec la vitesse $u(m)$ des gouttelettes et au processus de coagulation-fragmentation, et si on ne considère pas l'éventuelle condensation de la vapeur d'eau sur les gouttelettes ni l'évaporation à partir des gouttelettes ; l'absence de condensation et d'évaporation correspondrait à l'état d'équilibre entre la vapeur d'eau présente dans l'air et la densité de la vapeur saturée. Dans cette situation, l'équation (1.3.7) dans laquelle on ajoute le terme de fragmentation est réduite à

$$\begin{gathered}\partial_t\sigma(m,t,z) + \partial_z(\sigma(m,t,z)u(m)) = \\ = \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',t,z)\sigma(m-m',t,z)dm' + \\ -m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,t,z)\sigma(m',t,z)dm' - \frac{m}{2}\sigma(m,t,z)\int_0^m \vartheta(m-m',m')dm' + \\ +m\int_0^\infty \vartheta(m,m')\sigma(m+m',t,z)dm',\end{gathered} \tag{2.1.2}$$

où $\beta(m_1, m_2)$ est le taux de coagulation d'une gouttelette de masse m_1 et d'autre de masse m_2, tandis que $\vartheta(m_1, m_2)$ est le taux de fragmentation d'une gouttelette de masse $m = m_1 + m_2$ en une de masse m_1 et en une de masse m_2 ; le premier terme du second membre de (2.1.2) correspond à la création d'une gouttelette de masse m par coagulation de deux plus petites gouttelettes, le second terme correspond à la disparition d'une gouttelette de masse m par coagulation de celui-ci avec une autre gouttelette, le troisième terme correspond à la perte d'une gouttelette de masse m par fragmentation de celui-ci, et le dernier terme correspond au gain d'une gouttelette de masse m issu de la fragmentation d'une gouttelette de plus grande masse.

Dans la suite, on considère le problème de trouver une fonction $\sigma(m, t, z)$, qui vérifie l'équation (2.1.2) pour $(m, t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [-L, 0]$ avec un certain $L > 0$ ou éventuellement dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times] - \infty, 0]$ avec la condition d'entrée

$$\sigma(m, t, 0) = \overline{\sigma}_0(m, t). \tag{2.1.3}$$

Pour les fonctions $\beta(m_1, m_2)$ et $\vartheta(m_1, m_2)$, conformément à leur nature physique, nous supposons que

$$\beta(m_1, m_2) \geq 0, \qquad \beta(m_1, m_2) = \beta(m_2, m_1) \ \ \forall (m_1, m_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \tag{2.1.4}$$

$$\vartheta(m_1, m_2) \geq 0, \qquad \vartheta(m_1, m_2) = \vartheta(m_2, m_1) \ \ \forall (m_1, m_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+. \tag{2.1.5}$$

Pour la commodité de présentation, nous allons utiliser la notation $w(m)$ définie par $w(m) = -u(m)$, de sorte que $w(m) > 0$ pour tout $m > 0$. Pour $w(m)$ nous supposons que

$$w(\cdot) \in C(\mathbb{R}_+), \qquad 0 < w(m_1) \leq w(m_2) \quad \text{si } \ 0 < m_1 \leq m_2; \tag{2.1.6}$$

la croissance de la fonction $w(m)$ correspond à ce qu'on observe dans la nature (voir par exemple [29]).

Nous supposons en outre que

$$\beta(\cdot, \cdot) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+), \qquad \vartheta(\cdot, \cdot) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+), \tag{2.1.7}$$

et qu'il existe une constante $C_0 < \infty$ telle que

$$\sup_{m\in\mathbb{R}_+, m'\in[0,m]} \frac{m}{w(m)}\beta(m-m',m') \leq C_0, \tag{2.1.8}$$

$$\sup_{m,m'\in\mathbb{R}_+} \frac{m}{w(m)}\beta(m,m') \leq C_0, \tag{2.1.9}$$

$$\sup_{m\in\mathbb{R}_+} \frac{m}{w(m)} \int_0^m \vartheta(m-m',m')dm' \leq C_0, \tag{2.1.10}$$

$$\sup_{m\in\mathbb{R}_+} \int_0^m \frac{m'}{w(m')}\vartheta(m-m',m')dm' \leq C_0, \tag{2.1.11}$$

$$\sup_{m,m'\in\mathbb{R}_+} \frac{m}{w(m)}\vartheta(m,m') \leq C_0. \tag{2.1.12}$$

Il est clair que, si $\frac{m}{w(m)}$ est une fonction croissante de m, alors les conditions (2.1.8) et (2.1.10) impliquent (2.1.9) et (2.1.11). Les conditions sur la fonction $\overline{\sigma}_0(m,t)$ seront précisées dans la suite (voir (2.2.24), (2.6.77)-(2.6.78)).

2.2 Préliminaires

Pour résoudre l'équation (2.1.2) avec la condition (2.1.3), on va la transformer en une équation différentielle ordinaire. Pour cela, on définit d'abord la famille des caractéristiques $\chi_{m,\tilde{t}}$ par le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{dz(s)}{ds} = -1, \\ \frac{dt(s)}{ds} = \frac{1}{w(m)}, \end{cases} \tag{2.2.13}$$

avec les conditions initiales

$$z(0) = 0, \qquad t(0) = \tilde{t}. \tag{2.2.14}$$

Les caractéristiques $\chi_{m,\tilde{t}}$ ainsi définies ont, dans l'espace $\mathbb{R}\times\,]-\infty,0]$, l'expression

$$\chi_{m,\tilde{t}} = \{(t,z) \in \mathbb{R}\times\,]-\infty,0] \,|\, t = \tilde{t} + \frac{s}{w(m)},\ z = -s,\ s \in [0,\infty[\,\}. \tag{2.2.15}$$

Dans la suite nous allons utiliser les coordonnées $(m, \tilde{t}, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ au lieu de $(m, t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times]-\infty, 0]$ et écrire $\sigma(m, \tilde{t}, s)$ au lieu de $\sigma(m, t, z)$ lorsque $t = \tilde{t} + \frac{s}{w(m)}$ et $z = -s$.

Maintenant nous introduisons, pour chaque $s \geq 0$ fixé, la famille de courbes

$$\gamma_{qs} = \{(m, \tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,|\, \tilde{t} = q - \frac{s}{w(m)} \}, \qquad q \in \mathbb{R}. \tag{2.2.16}$$

La courbe γ_{qs} n'est autre que l'ensemble des points $(m, \tilde{t})$ (sur le demi-plan $\{z = -s\}$) tels que les caractéristiques $\chi_{m,\tilde{t}}$ passe par le point $t = q$, $z = -s$ sur le plan (t, z).

De manière analogue à [27] (voir aussi [3]) sur les courbes γ_{qs} on définit la mesure $\mu_\gamma = \mu_{\gamma_{qs}}$ (dans la suite, quand il n'y a pas de risque d'équivoque, on utilisera la notation μ_γ pour ne pas alourdir l'écriture) par la projection $P_{\mathbb{R}_+}$ de γ_{qs} sur $\mathbb{R}_+ (\ni m)$, c'est-à-dire par les relations

i) $A' \subset \gamma_{qs}$ est mesurable si et seulement si $P_{\mathbb{R}_+} A'$ est mesurable selon Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$,

ii) $\mu_\gamma(A') = \mu_{L,\mathbb{R}_+}(P_{\mathbb{R}_+} A')$, où $\mu_{L,\mathbb{R}_+}(\cdot)$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

La mesure $\mu_{\gamma_{qs}}(\cdot)$ jouit des propriétés convenables pour les calculs intégraux sur les courbes γ_{qs} (pour les détails, voir [27]). En particulier, nous rappelons que, si φ et ψ sont deux fonctions appartenant à $L^1(\gamma_{qs}, \mu_{\gamma_{qs}})$, alors on a $\varphi * \psi \in L^1(\gamma_{qs}, \mu_{\gamma_{qs}})$ et on a

$$\|\varphi * \psi\|_{L^1(\gamma_{qs}, \mu_{\gamma_{qs}})} \leq \|\varphi\|_{L^1(\gamma_{qs}, \mu_{\gamma_{qs}})} \|\psi\|_{L^1(\gamma_{qs}, \mu_{\gamma_{qs}})}, \tag{2.2.17}$$

où

$$(\varphi * \psi)(m) = \int_{\gamma_{qs}} \varphi(m - m')\psi(m')\mu_{\gamma_{qs}}(dm').$$

Soit $\varphi(\cdot, \cdot)$ une fonction mesurable définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On pose

$$\{\varphi\}_{qs}(m) = \varphi(m, q - \frac{s}{w(m)}), \tag{2.2.18}$$

qui représente les valeurs de $\varphi(m, \tilde{t})$ sur la courbe γ_{qs} exprimées en fonction de m. On désigne en outre par $\gamma_{qs(m,\tilde{t})}$ la courbe γ_{qs} avec $q = \tilde{t} + \frac{s}{w(m)}$. On voit que la courbe $\gamma_{qs(m,\tilde{t})}$ passe par le point $(m, \tilde{t}, s)$ et on a

$$\gamma_{qs(m,\tilde{t})} = \{(m', \tilde{t}') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,|\, \tilde{t}' = \tilde{t} + \frac{s}{w(m)} - \frac{s}{w(m')} \}. \tag{2.2.19}$$

On pose également

$$\gamma_{qs(m,\tilde{t})}^{[0,m]} = \gamma_{qs(m,\tilde{t})} \cap ([0,m] \times \mathbb{R}).$$

On définit maintenant les opérateurs $K_{\gamma_{qs}}[\varphi,\psi]$ et $L_{\gamma_{qs}}[\varphi]$ par les relations

$$K_{\gamma_{qs}}[\varphi,\psi](m,\tilde{t}) = \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma_{qs(m,\tilde{t})}^{[0,m]}} \beta(m-m',m')\{\varphi\}_{qs}(m-m')\{\psi\}_{qs}(m')\mu_\gamma(dm')+ \tag{2.2.20}$$

$$-\frac{1}{2}\varphi(m,\tilde{t}) \int\limits_{\gamma_{qs(m,\tilde{t})}} \beta(m,m')\{\psi\}_{qs}(m')\mu_\gamma(dm')+$$

$$-\frac{1}{2}\psi(m,\tilde{t}) \int\limits_{\gamma_{qs(m,\tilde{t})}} \beta(m,m')\{\varphi\}_{qs}(m')\mu_\gamma(dm'),$$

$$L_{\gamma_{qs}}[\varphi](m,\tilde{t}) = -\frac{1}{2}\varphi(m,\tilde{t}) \int\limits_{\gamma_{qs(m,\tilde{t})}^{[0,m]}} \vartheta(m-m',m')\mu_\gamma(dm')+ \tag{2.2.21}$$

$$+ \int\limits_{\gamma_{qs(m,\tilde{t})}} \vartheta(m,m')\{\varphi\}_{qs}(m+m')\mu_\gamma(dm'),$$

pourvu que les intégrales dans les seconds membres soient bien définies. De ces relations il résulte que $K_{\gamma_{qs}}[\varphi,\psi]$ est un opérateur bilinéaire symétrique et $L_{\gamma_{qs}}[\varphi]$ est un opérateur linéaire. Si $\varphi(m,\tilde{t})$ et $\psi(m,\tilde{t})$ sont continues, alors $K_{\gamma_{qs}}[\varphi,\psi](m,\tilde{t})$ et $L_{\gamma_{qs}}[\varphi](m,\tilde{t})$ le sont eux aussi.

Les opérateurs $K_{\gamma_{qs}}[\cdot,\cdot]$ et $L_{\gamma_{qs}}[\cdot]$ étant définis, on peut transformer l'équation (2.1.2) en

$$\frac{\partial}{\partial s}\sigma(m,\tilde{t},s) = \frac{m}{w(m)}\Big(K_{\gamma_{qs}}[\sigma(\cdot,\cdot,s),\sigma(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t}) + L_{\gamma_{qs}}[\sigma(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t})\Big) \tag{2.2.22}$$

dans les coordonnées $(m,\tilde{t},s)$ définies ci-dessus. L'équation (2.2.22) est envisagée avec la condition

$$\sigma(m,\tilde{t},0) = \overline{\sigma}_0(m,\tilde{t}), \tag{2.2.23}$$

qui est la transcription de la condition (2.1.3) dans les coordonnées $(m,\tilde{t},s)$. Nous supposons que $\overline{\sigma}_0(m,\tilde{t})$ est continue en $(m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et que

$$0 \le \overline{\sigma}_0(m,\tilde{t}), \qquad \sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \overline{\sigma}_0(m,\tilde{t}) < \infty, \qquad \sup_{\tilde{t}\in\mathbb{R}} \int\limits_0^\infty \overline{\sigma}_0(m,\tilde{t})dm < \infty. \tag{2.2.24}$$

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution locale de l'équation (2.2.22) dans le cas où la condition $\overline{\sigma}_0(m,\tilde{t})$ dépend effectivement de $\tilde{t}$ c'est-à-dire avec la condition (2.2.23), nous avons besoin de construire une suite de solutions approchées de notre équation (2.2.22). En effet, pour chaque $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on introduit la partition de $\mathbb{R}_+$ en $[\frac{\nu}{N}, \frac{\nu+1}{N}[$, $\nu = 0, 1, 2, \cdots$, et on va considérer l'équation approchée

$$\frac{\partial}{\partial s}\sigma(m,\tilde{t},s) = \frac{m}{w(m)}\Big(K_{\gamma_{q\,\overline{s}_\nu}}[\sigma(\cdot,\cdot,s),\sigma(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t}) + L_{\gamma_{q\,\overline{s}_\nu}}[\sigma(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t})\Big) \tag{2.2.25}$$

pour

$$\overline{s}_\nu = \frac{\nu}{N} \leq s < \frac{\nu+1}{N}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \cdots;$$

on remarque que dans l'intervalle $[\frac{\nu}{N}, \frac{\nu+1}{N}[$ la famille de courbes $\{\gamma_{q\,\overline{s}_\nu}\}_{q\in\mathbb{R}}$ est fixée et ne dépend pas de s. En résolvant (2.2.25) pour $0 \leq s < \frac{1}{N}$ avec la condition (2.2.23) et en utilisant, $\sigma(m,\tilde{t},\frac{1}{N})$ comme condition d'entrée de l'équation (2.2.25) pour $\frac{1}{N} \leq s < \frac{2}{N}$ et on va la résoudre dans $[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}[$; en répétant cette procédure pour $\nu = 0, 1, 2, \cdots$, on construira la solution approchée $\sigma(m,\tilde{t},s) = \sigma^{[N]}(m,\tilde{t},s)$.

Avant d'examiner l'équation (2.2.22) ou (2.2.25), nous rappelons les inégalités concernant les opérateurs $K_{\gamma_{qs}}[\cdot,\cdot]$ et $L_{\gamma_{qs}}[\cdot]$.

Lemme 2.2.1. *Quel que soit $s \geq 0$, on a*

$$\sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \frac{m}{w(m)}|K_{\gamma_{qs}}[\varphi,\psi](m,\tilde{t})| \leq \tag{2.2.26}$$

$$\leq \frac{3C_0}{4}\Big[\sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}|\varphi(m,\tilde{t})| \int_{\gamma_{qs(m,\tilde{t})}} |\{\psi\}_{qs}(m)|\mu_\gamma(dm) +$$

$$+ \sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}|\psi(m,\tilde{t})| \int_{\gamma_{qs(m,\tilde{t})}} |\{\varphi\}_{qs}(m)|\mu_\gamma(dm)\Big],$$

$$\sup_{q\in\mathbb{R}}\int_{\gamma_{qs}} \frac{m}{w(m)}|\{K_{\gamma_{qs}}[\varphi,\psi]\}_{qs}(m)|\mu_\gamma(dm) \leq \tag{2.2.27}$$

$$\leq \frac{3C_0}{2}\sup_{q\in\mathbb{R}}\int_{\gamma_{qs}} |\{\varphi\}_{qs}(m)|\mu_\gamma(dm)\int_{\gamma_{qs}} |\{\psi\}_{qs}(m)|\mu_\gamma(dm),$$

$$\sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \frac{m}{w(m)}|L_{\gamma_{qs}}[\varphi](m,\tilde{t})| \leq \tag{2.2.28}$$

$$\leq C_0\Big[\frac{1}{2}\sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}|\varphi(m,\tilde{t})| + \sup_{q\in\mathbb{R}}\int_{\gamma_{qs}}|\{\varphi\}_{qs}(m)|\mu_\gamma(dm)\Big].$$

$$\sup_{q\in\mathbb{R}}\int_{\gamma_{qs}}\frac{m}{w(m)}|\{L_{\gamma_{qs}}[\varphi]\}_{qs}(m)|\mu_\gamma(dm) \leq \frac{3C_0}{2}\sup_{q\in\mathbb{R}}\int_{\gamma_{qs}}|\{\varphi\}_{qs}(m)|\mu_\gamma(dm). \tag{2.2.29}$$

Démonstration. L'inégalités (2.2.26) résulte immédiatement de la définition de l'opérateurs $K_{\gamma_{qs}}[\cdot,\cdot]$ (voir (2.2.20)), la condition (2.1.8) et (2.1.9). Plus précisément, on a

$$\frac{m}{w(m)}|K_{\gamma_{qs}}[\varphi,\psi](m,\tilde{t})| \leq$$

$$\leq \frac{C_0}{2}\Big[\int_{\gamma_{qs}}|\{\varphi\}(m-m')||\{\psi\}_{qs}(m')|\mu_\gamma(dm') + |\varphi(m,\tilde{t})|\int_{\gamma_{qs}}|\{\psi\}_{qs}(m')|\mu_\gamma(dm')+$$

$$+|\psi(m,\tilde{t})|\int_{\gamma_{qs}}|\{\varphi\}_{qs}(m')|\mu_\gamma(dm')\Big],$$

Comme on a

$$\int_{\gamma_{qs}}|\{\varphi\}(m-m')||\{\psi\}_{qs}(m')|\mu_\gamma(dm') \leq \|\varphi\|_{L^1(\gamma_{qs},\mu_{\gamma_{qs}})}\|\psi\|_{L^\infty(\gamma_{qs},\mu_{\gamma_{qs}})};$$

ou

$$\leq \|\varphi\|_{L^\infty(\gamma_{qs},\mu_{\gamma_{qs}})}\|\psi\|_{L^1(\gamma_{qs},\mu_{\gamma_{qs}})}.$$

Il résulte que

$$\sup_{m,\tilde{t}}\frac{m}{w(m)}|K_{\gamma_{qs}}[\varphi,\psi](m,\tilde{t})| \leq$$

$$\leq \frac{C_0}{2}\Big[\min\Big(\sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}|\varphi(m,\tilde{t})|\int_{\gamma_{qs}}|\{\psi\}_{qs}(m')|\mu_\gamma(dm'),$$

$$\sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}|\psi(m,\tilde{t})|\int_{\gamma_{qs}}|\{\varphi\}_{qs}(m')|\mu_\gamma(dm')\Big)$$

$$+\sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}|\varphi(m,\tilde{t})|\int_{\gamma_{qs}}|\{\psi\}_{qs}(m')|\mu_\gamma(dm')+$$

$$+\sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}|\psi(m,\tilde{t})|\int_{\gamma_{qs}}|\{\varphi\}_{qs}(m')|\mu_\gamma(dm')\Big].$$

En utilisant l'inégalité

$$\min(a,b) \leq \frac{1}{2}(a+b),$$

on aura

$$\sup_{m,\tilde{t}} \frac{m}{w(m)}|K_{\gamma_{qs}}[\varphi,\psi](m,\tilde{t})| \leq$$

$$\leq \frac{3C_0}{4}\Big[\sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} |\varphi(m,\tilde{t})| \int\limits_{\gamma_{qs}} |\{\psi\}_{qs}(m')|\mu_\gamma(dm')+$$

$$+\sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} |\psi(m,\tilde{t})| \int\limits_{\gamma_{qs}} |\{\varphi\}_{qs}(m')|\mu_\gamma(dm')\Big].$$

En particulier,

$$\sup_{m,\tilde{t}} \frac{m}{w(m)}|K_{\gamma_{qs}}[\varphi,\varphi](m,\tilde{t})| \leq \frac{3C_0}{2} \sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} |\varphi(m,\tilde{t})| \int\limits_{\gamma_{qs}} |\{\varphi\}_{qs}(m')|\mu_\gamma(dm').$$

D'autre part, l'inégalité (2.2.27) se déduit des relations (2.2.20), (2.1.8), (2.1.9) et (2.2.17).

Pour montrer l'inégalité (2.2.28), on peut procéder d'une manière analogue à (2.2.26). Plus précisément, on utilise la définition de l'opérateur $L_{\gamma_{qs}}[\cdot]$ (voir (2.2.21)) et la condition (2.1.12).

En ce qui concerne l'inégalité (2.2.29), on déduit de la définition (2.2.21) de l'opérateur $L_{\gamma_{qs}}[\cdot]$ que

$$\int\limits_{\gamma_{qs}} \frac{m}{w(m)}|\{L_{\gamma_{qs}}[\varphi]\}_{qs}(m)|\mu_\gamma(dm) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_{qs}} \frac{m}{w(m)}|\{\varphi\}_{qs}(m)| \int\limits_{\gamma_{qs}^{[0,m]}} |\vartheta(m-m',m')|\mu_\gamma(dm')\mu_\gamma(dm)+$$

$$+\int\limits_{\gamma_{qs}} \frac{m}{w(m)} \int\limits_{\gamma_{qs}} |\vartheta(m,m')||\{\varphi\}_{qs}(m+m')|\mu_\gamma(dm')\mu_\gamma(dm),$$

on remarque que, pour une courbe γ_{qs} arbitraire mais fixée, on a, avec le changement de variables $m'' = m + m'$, (et le théorème de Fubini)

$$\int\limits_{\gamma_{qs}} \frac{m}{w(m)} \int\limits_{\gamma_{qs}} \vartheta(m,m')\{\varphi\}_{qs}(m+m')\mu_\gamma(dm')\mu_\gamma(dm) = \tag{2.2.30}$$

$$= \int\limits_{\gamma_{qs}} \int\limits_{\gamma_{qs}^{[0,m'']}} \frac{m''-m'}{w(m''-m')} \vartheta(m''-m',m')\mu_\gamma(dm')\{\varphi\}_{qs}(m'')\mu_\gamma(dm'').$$

Donc, compte tenu des conditions (2.1.11), (2.1.12) et (2.1.5), on aura

$$\int\limits_{\gamma_{qs}} \frac{m}{w(m)} |\{L_{\gamma_{qs}}[\varphi]\}_{qs}(m)|\mu_\gamma(dm) \leq$$

$$\leq \frac{C_0}{2} \int\limits_{\gamma_{qs}} |\{\varphi\}_{qs}(m)|\mu_\gamma(dm) + C_0 \int\limits_{\gamma_{qs}} |\{\varphi\}_{qs}(m)|\mu_\gamma(dm),$$

d'où

$$\sup_{q\in\mathbb{R}} \int\limits_{\gamma_{qs}} \frac{m}{w(m)} |\{L_{\gamma_{qs}}[\varphi]\}_{qs}(m)|\mu_\gamma(dm) \leq \frac{3C_0}{2} \sup_{q\in\mathbb{R}} \int\limits_{\gamma_{qs}} |\{\varphi\}_{qs}(m)|\mu_\gamma(dm).$$

Maintenant, avant de nous occuper à l'étude de notre équation approchée (2.2.25) avec la condition d'entrée (2.2.23) qui dépend du temps, nous allons examiner l'équation (2.2.22) dans le cas où la condition d'entrée est indépendante du temps ce que nous appelons cas de l'entrée homogène.

2.3 Cas de l'entrée homogène

Le cas le plus simple du problème (2.2.22)-(2.2.23) est celui dans lequel la fonction $\overline{\sigma}_0(m,\tilde{t})$ ne dépend pas de $\tilde{t}$, c'est-à-dire $\overline{\sigma}_0(m,\tilde{t}) = \overline{\sigma}_0(m)$. Dans ce cas la solution $\sigma(m,\tilde{t},s)$, si elle existe, ne dépendra pas de $\tilde{t}$. On constate facilement que, si $\sigma(m,\tilde{t},s)$ ne dépend pas de $\tilde{t}$, alors $K_{\gamma_{qs}}[\sigma(\cdot,\cdot,s),\sigma(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t})$ et $L_{\gamma_{qs}}[\sigma(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t})$ ne dépendent pas de $q \in \mathbb{R}$ (voir (2.2.16), (2.2.19), (2.2.20), (2.2.21)) ; de plus, la définition de la mesure $\mu_\gamma(dm)$ implique que pour $\sigma(m,\tilde{t},s)$ indépendante de $\tilde{t}$, on a

$$K_{\gamma_{qs}}[\sigma(\cdot,\cdot,s),\sigma(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t}) = K_{\gamma_{qr}}[\sigma(\cdot,\cdot,s),\sigma(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t}),$$

$$L_{\gamma_{qs}}[\sigma(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t}) = L_{\gamma_{qr}}[\sigma(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t}),$$

quel que soit $r \geq 0$. Donc, dans le cas de l'entrée homogène, en choisissant γ_{q0} (avec un $q \in \mathbb{R}$ arbitraire), le problème (2.2.22)-(2.2.23) se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial s}\sigma(m,\tilde{t},s) = \frac{m}{w(m)}\Big(K_{\gamma_{q0}}[\sigma(\cdot,\cdot,s),\sigma(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t}) + L_{\gamma_{q0}}[\sigma(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t})\Big), \quad (2.3.31)$$

$$\sigma(m,\tilde{t},0)=\overline{\sigma}_0(m). \tag{2.3.32}$$

Or, comme tous les termes dans (2.3.31)-(2.3.32) sont indépendentes de $\tilde{t}$, en posant

$$\sigma(m,s)=\sigma(m,\tilde{t},s), \qquad \gamma_0=\gamma_{q0},$$

on peut écrire (2.3.31)-(2.3.32) d'une manière plus simple

$$\frac{\partial}{\partial s}\sigma(m,s)=\frac{m}{w(m)}\Big(K_{\gamma_0}[\sigma(\cdot,s),\sigma(\cdot,s)](m)+L_{\gamma_0}[\sigma(\cdot,s)](m)\Big), \tag{2.3.33}$$

$$\sigma(m,0)=\overline{\sigma}_0(m). \tag{2.3.34}$$

Comme $\gamma_0=\gamma_{q0}$ n'est autre qu'une demi-droite et que la mesure $\mu_\gamma(dm)$ sur $\gamma_0=\gamma_{q0}$ se réduit à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, on pourrait définir les opérateurs $K_{\gamma_0}[\cdot,\cdot]$ et $L_{\gamma_0}[\cdot]$ sans utiliser la notion de courbe $\gamma_0=\gamma_{q0}$ et formuler directement l'équation sur $\mathbb{R}_+(\ni m)$. Mais pour la commodité de la présentation, nous la formulons dans la forme de (2.3.33)-(2.3.34) ou (2.3.31)-(2.3.32) et nous allons démontrer l'existence et l'unicité de la solution comme cas particulier de (2.2.25).

Théorème 2.3.1. *On suppose que $\beta(\cdot,\cdot)$, $\vartheta(\cdot,\cdot)$ et $w(\cdot)$ vérifient les conditions (2.1.7)-(2.1.12) et que $\overline{\sigma}_0(m)$ est continue en $m\in\mathbb{R}_+$ et vérifie les conditions*

$$0\le\overline{\sigma}_0(m), \qquad \sup_{m\in\mathbb{R}_+}\overline{\sigma}_0(m)<\infty, \qquad \int_0^\infty\overline{\sigma}_0(m)dm<\infty. \tag{2.3.35}$$

Alors le problème (2.3.33)-(2.3.34) admet une solution $\sigma(m,s)$ dans l'intervalle $[0,\infty[$ $(\ni s)$ et $\sigma(m,s)$ est continue en (m,s), non-négative, intégrables sur $[0,\infty[$ $(\ni m)$ pour tout $s\ge0$ fixé et analytique en s pour chaque $m\in\mathbb{R}_+$. En outre, la solution est unique dans la classe des fonctions $\sigma(m,s)$ qui vérifient les conditions

$i)$ $\sigma(m,s)$ est continue dans $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$,

$ii)$ pour tout $s\ge0$, $\sigma(m,s)$ est intégrable par rapport à $m\in\mathbb{R}_+$,

$iii)$ quel que soit $\overline{s}_1\in[0,\infty[$, on a $\sup_{s\in[0,\overline{s}_1]}\int_0^\infty|\sigma(m,s)|dm<\infty$.

Le théorème 2.3.1 sera démontré comme corollaire des propositions 2.5.1 et 2.5.2. Dans la suite, nous allons travailler sur la résolution de l'équation approchée (2.2.25) avec la condition (2.2.23).

2.4 Solution locale de l'équation approchée

On considère l'équation approchée (2.2.25) suivante

$$\frac{\partial}{\partial s}\sigma(m,\tilde{t},s) = \frac{m}{w(m)}\Big(K_{\gamma_{q\,\bar{s}_\nu}}[\sigma(\cdot,\cdot,s),\sigma(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t}) + L_{\gamma_{q\,\bar{s}_\nu}}[\sigma(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t})\Big)$$

pour $s \geq \bar{s}_\nu = \frac{\nu}{N}$ avec la condition

$$\sigma(m,\tilde{t},\frac{\nu}{N}) = \overline{\sigma}_\nu(m,\tilde{t}),$$

où $\overline{\sigma}_\nu(m,\tilde{t})$ est une fonction donnée. Or, comme dans ce problème les courbes $\gamma_{q\,\bar{s}_\nu}$ ne dépendent que de q, pour simplifier la notation nous posons

$$\gamma_q = \gamma_{q\,\bar{s}_\nu}, \qquad \gamma_{q(m,\tilde{t})} = \gamma_{q\,\bar{s}_\nu(m,\tilde{t})}, \qquad \{\varphi\}_q = \{\varphi\}_{q\,\bar{s}_\nu}. \tag{2.4.36}$$

Il suffirait alors de considérer l'équation dans l'intervalle $[\frac{\nu}{N},\frac{\nu+1}{N}[$, cependant il nous sera plus commode de la considérer dans l'intervalle $[\frac{\nu}{N},\infty[$. Encore pour la commodité de l'écriture, en utilisant le changement de variables $s' = s - \frac{\nu}{N}$, on transforme l'intervalle $[\frac{\nu}{N},\infty[$ en $[0,\infty[$ et on convient d'écrire simplement s au lieu de s'. Par ces conventions d'écriture, on peut écrire le problème dans la forme

$$\frac{\partial}{\partial s}\sigma(m,\tilde{t},s) = \frac{m}{w(m)}\Big(K_{\gamma_q}[\sigma(\cdot,\cdot,s),\sigma(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t}) + L_{\gamma_q}[\sigma(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t})\Big), \tag{2.4.37}$$

$$\sigma(m,\tilde{t},0) = \overline{\sigma}_\nu(m,\tilde{t}). \tag{2.4.38}$$

On suppose que pour chaque $(m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ la fonction $\sigma(m,\tilde{t},s)$ est analytique en s, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions $a_k(m,\tilde{t})$, $k \in \mathbb{N}$, telles que

$$\sigma(m,\tilde{t},s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(m,\tilde{t})s^k. \tag{2.4.39}$$

Comme pour $\sigma(m,\tilde{t},s)$ vérifiant (2.4.39) on a

$$\frac{\partial}{\partial s}\sigma(m,\tilde{t},s) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}(m,\tilde{t})s^k,$$

en rappelant les définitions (2.2.20), (2.2.21), et en regroupant les termes ayant la même puissance de s, on déduit de l'égalité (2.4.37) que

$$a_{k+1}(m,\tilde{t}) = \frac{m}{w(m)}\frac{1}{k+1}\Big(\sum_{i+j=k} K_{\gamma_q}[a_i,a_j](m,\tilde{t}) + L_{\gamma_q}[a_k](m,\tilde{t})\Big) \tag{2.4.40}$$

pour $k = 0, 1, 2, \cdots$.

Lemme 2.4.1. *On suppose que* $\beta(\cdot,\cdot)$, $\vartheta(\cdot,\cdot)$ *et* $w(\cdot)$ *vérifient les conditions* (2.1.7)-(2.1.12) *et que* $\overline{\sigma}_\nu(m,\tilde{t})$ *est continue en* $(m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ *et vérifie les conditions*

$$\sup_{q\in\mathbb{R}} \int_{\gamma_q} \{\overline{\sigma}_\nu\}_q(m)\mu_\gamma(dm) \equiv A_0 < \infty, \tag{2.4.41}$$

$$\sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \overline{\sigma}_\nu(m,\tilde{t}) \equiv B_0 < \infty. \tag{2.4.42}$$

Alors la série du second membre de (2.4.39) *converge dans l'intervalle* $[0, \frac{1}{M}[$, *où*

$$M = C_0\Big(\frac{3}{2}(A_0+1) + \frac{A_0}{B_0}\Big). \tag{2.4.43}$$

Démonstration. On pose

$$A_k = \sup_{q\in\mathbb{R}} \int_{\gamma_q} |\{a_k\}_q(m)|\mu_\gamma(dm), \qquad B_k = \sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} |a_k(m,\tilde{t})|. \tag{2.4.44}$$

On rappelle que, en vertu de (2.4.38), les valeurs de A_0 et de B_0 données par (2.4.41) et (2.4.42) coïncident avec celles données par (2.4.44).

D'après (2.2.27), (2.2.29) et (2.4.40) on a

$$\int_{\gamma_q} |\{a_{k+1}\}_q(m)|\mu_\gamma(dm) \le$$

$$\le \frac{1}{k+1}\int_{\gamma_q} \frac{m}{w(m)}\Big(\sum_{i+j=k} |\{K_{\gamma_q}[a_i,a_j]\}_q(m)| + |\{L_{\gamma_q}[a_k]\}_q(m)|\Big)\mu_\gamma(dm) \le$$

$$\le \frac{1}{k+1}\frac{3C_0}{2}\Big(\sum_{i+j=k}\int_{\gamma_q} |\{a_i\}_q(m)|\mu_\gamma(dm)\int_{\gamma_q} |\{a_j\}_q(m)|\mu_\gamma(dm) + \int_{\gamma_q} |\{a_k\}_q(m)|\mu_\gamma(dm)\Big).$$

On en déduit que

$$A_{k+1} \le \frac{1}{k+1}\frac{3C_0}{2}\Big(\sum_{i+j=k} A_iA_j + A_k\Big). \tag{2.4.45}$$

D'autre part, en vertu de (2.2.26), (2.2.28) et (2.4.40), on obtient

$$B_{k+1} \leq \frac{C_0}{k+1}\Big(\frac{3}{2}\sum_{i+j=k} A_i B_j + \frac{1}{2}B_k + A_k\Big). \tag{2.4.46}$$

Nous allons démontrer les inégalités

$$A_k \leq A_0 M^k, \qquad B_k \leq B_0 M^k \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \tag{2.4.47}$$

où M est le nombre défini dans (2.4.43).

On remarque d'abord que, pour $k = 0$ les inégalités de (2.4.47) sont vérifiées. Pour démontrer (2.4.47) par récurrence, supposons que ces inégalités sont vérifiées pour $k = n$, et montrons qu'elles sont vérifiées pour $k = n + 1$. D'après la majoration de A_{n+1} et B_{n+1} donnée respectivement dans (2.4.45) et (2.4.46), de plus si on procède à la majoration de A_k et B_k pour $k = n$ dans l'expression des deuxièmes membres de ces inégalités, on a

$$A_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}\frac{3C_0}{2}A_0 M^n((n+1)A_0 + 1),$$
$$B_{n+1} \leq \frac{C_0}{n+1}B_0 M^n\Big(\frac{3}{2}(n+1)A_0 + \frac{1}{2} + \frac{A_0}{B_0}\Big),$$

d'où, en rappelant la définition (2.4.43), on obtient

$$A_{n+1} \leq A_0 M^{n+1}, \qquad B_{n+1} \leq B_0 M^{n+1}.$$

Par conséquent, la relation (2.4.47) est vérifiée.

Les inégalités (2.4.39), (2.4.44) et (2.4.47) impliquent que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(m,\tilde{t})| s^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} B_0 M^k s^k \qquad \text{pour tout } (m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},$$

ce qui signifie que, si $Ms < 1$, alors la série formelle du second membre de (2.4.39) converge absolûment dans l'intervalle $[0, \frac{1}{M}[$. La continuité des coefficients $a_k(m,\tilde{t})$ pour tout k résulte de la formule de récurrence (2.4.40), ainsi la fonction $\sigma(m,\tilde{t},s)$ satisfait toutes les conditions du lemme, ce qui achève la démonstration. □

Une fois la solution locale $\sigma(m,\tilde{t},s)$ obtenue sur l'intervalle $[0, \frac{1}{M}[$, nous allons examiner ses propriétés.

Lemme 2.4.2. *Soit $\sigma(m, \tilde{t}, s)$ la solution du problème* (2.4.37)-(2.4.38) *construite dans le lemme* 2.4.1. *Alors pour $0 \leq s < \frac{1}{M}$ on a*

$$|\sigma(m, \tilde{t}, s)| \leq \frac{B_0}{1 - Ms}, \qquad \sup_{q \in \mathbb{R}} \int_{\gamma_q} |\{\sigma(\cdot, \cdot, s)\}_q(m)| \mu_\gamma(dm) \leq \frac{A_0}{1 - Ms},$$

$$\left|\frac{\partial \sigma(m, \tilde{t}, s)}{\partial s}\right| \leq \frac{B_0 M}{(1 - Ms)^2}, \qquad \sup_{q \in \mathbb{R}} \int_{\gamma_q} \left|\left\{\frac{\partial \sigma(\cdot, \cdot, s)}{\partial s}\right\}_q(m)\right| \mu_\gamma(dm) \leq \frac{A_0 M}{(1 - Ms)^2},$$

$$\left|\frac{\partial^2 \sigma(m, \tilde{t}, s)}{\partial s^2}\right| \leq \frac{2 B_0 M^2}{(1 - Ms)^3}, \qquad \sup_{q \in \mathbb{R}} \int_{\gamma_q} \left|\left\{\frac{\partial^2 \sigma(\cdot, \cdot, s)}{\partial s^2}\right\}_q(m)\right| \mu_\gamma(dm) \leq \frac{2 A_0 M^2}{(1 - Ms)^3}.$$

Démonstration. Ces inégalités résultent de (2.4.39), (2.4.44), (2.4.47) et du calcul élémentaire. □

Lemme 2.4.3. *Soit $\sigma(m, \tilde{t}, s)$ la solution du problème* (2.4.37)-(2.4.38) *construite dans le lemme* 2.4.1. *Si*

$$\overline{\sigma}_\nu(m, \tilde{t}) \geq 0 \qquad \forall (m, \tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \tag{2.4.48}$$

alors on a

$$\sigma(m, \tilde{t}, s) \geq 0 \qquad \textit{pour } \ 0 \leq s < \frac{1}{M}.$$

Démonstration. Le lemme se démontre d'une manière analogue au lemme 2 de [25]. Toutefois, la dépendance de $\sigma(m, \tilde{t}, s)$ de $\tilde{t}$, la présence du facteur $\frac{1}{w(m)}$ et l'utilisation de l'intégrale sur les courbes $\gamma_q = \gamma_{q\,\overline{s}_\nu}$ exigent une écriture légèrement différente. Pour éviter les confusions dues à la différence d'écriture, nous écrivons la démonstration d'une manière autonome.

Nous choisissons un nombre $\tau \in]0, \frac{1}{M}[$; dans la suite (voir (2.4.58)) nous imposerons une ultérieure restriction sur τ. Nous allons construire une approximation $G_n(m, \tilde{t}, s)$ $(n \in \mathbb{N})$ de $\sigma(m, \tilde{t}, s)$ dans l'intervalle $0 \leq s < \tau$, en posant

$$G_n(m, \tilde{t}, s) = g_{kn}(m, \tilde{t}) \qquad \text{pour } \frac{k\tau}{n} \leq s < \frac{(k+1)\tau}{n}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1, \tag{2.4.49}$$

où

$$g_{0n}(m, \tilde{t}) = \sigma(m, \tilde{t}, 0) = \overline{\sigma}_\nu(m, \tilde{t}), \tag{2.4.50}$$

$$g_{k+1n}(m,\tilde{t}) = g_{kn}(m,\tilde{t}) + \frac{\tau}{n}\frac{m}{w(m)}\Big(K_{\gamma_q}[g_{kn},g_{kn}](m,\tilde{t}) + L_{\gamma_q}[g_{kn}](m,\tilde{t})\Big). \tag{2.4.51}$$

On pose

$$T_{kn} = \sup_{q\in\mathbb{R}}\int_{\gamma_q} |\{g_{kn}\}_q(m)|\mu_\gamma(dm), \qquad L_{kn} = \sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} |g_{kn}(m,\tilde{t})|. \tag{2.4.52}$$

D'après (2.4.41)-(2.4.42) on a $T_{0n} = A_0, \qquad L_{0n} = B_0.$

D'autre part, en vertu de (2.4.51) et du lemme 2.2.1 on a

$$T_{k+1n} \leq \Big(1 + \frac{\tau}{n}\frac{3C_0}{2}\Big)T_{kn} + \frac{\tau}{n}\frac{3C_0}{2}T_{kn}^2,$$

$$L_{k+1n} \leq \Big(1 + \frac{\tau}{n}\frac{C_0}{2}\Big)L_{kn} + \frac{\tau}{n}\frac{3C_0}{2}L_{kn}T_{kn} + \frac{\tau}{n}C_0T_{kn}.$$

Pour obtenir la borne supérieure de T_{kn} et L_{kn}, on va construire une majoration dans une forme plus convenable. Pour ce faire, on note par

$$\Lambda_{kn} = \max(T_{kn}, L_{kn}), \tag{2.4.53}$$

on a

$$\Lambda_{0n} = \max(A_0, B_0), \tag{2.4.54}$$

$$\Lambda_{k+1n} \leq \Big(1 + \frac{\tau}{n}\frac{3C_0}{2}\Big)\Lambda_{kn} + \frac{\tau}{n}\frac{3C_0}{2}\Lambda_{kn}^2. \tag{2.4.55}$$

Donc, si on pose

$$a = 1 + \frac{\tau}{n}\frac{3C_0}{2}, \qquad \lambda_{kn} = \frac{1}{a}\frac{\tau}{n}\frac{3C_0}{2}\Lambda_{kn}, \tag{2.4.56}$$

on a

$$\lambda_{k+1n} \leq a\lambda_{kn}(1+\lambda_{kn}),$$

ou, si on définit la fonction $h(x) = ax(1+x)$,

$$\lambda_{k+1n} \leq h(\lambda_{kn}),$$

et par suite

$$\lambda_{kn} \leq h^{(k)}(\lambda_{0n}) \leq h^{(n)}(\lambda_{0n})$$

où $h^{(k)}$ désigne la k-ième itération de la fonction h.

Or, il n'est pas difficile de constater, par récurrence sur $k = 1, 2, \cdots$, que

$$0 < h^{(k)}(x) \leq \frac{a^k x}{1 - \frac{a^k - 1}{a-1} x}, \qquad k = 1, 2, \cdots ,$$

pourvu que $\frac{a^k-1}{a-1}x < 1$. On a donc

$$\lambda_{kn} \leq \frac{a^n \lambda_{0n}}{1 - \frac{a^n-1}{a-1}\lambda_{0n}}, \qquad k = 0, 1, \cdots n,$$

pourvu que $\frac{a^n-1}{a-1}\lambda_{0n} < 1$. Comme $a^n = \left(1 + \frac{\tau}{n}\frac{3C_0}{2}\right)^n \leq e^{\frac{3\tau C_0}{2}}$, en retournant à l'expression de Λ_{kn} (voir (2.4.56)) et en tenant compte de (2.4.53)-(2.4.54) et de l'expression de a (voir (2.4.56)), on a

$$\max(T_{kn}, L_{kn}) \leq \frac{e^{\frac{3\tau C_0}{2}} \max(A_0, B_0)}{1 - (e^{\frac{3\tau C_0}{2}} - 1)\max(A_0, B_0)}, \tag{2.4.57}$$

pourvu que

$$\tau < \frac{2}{3C_0} \log\left(1 + \frac{1}{\max(A_0, B_0)}\right); \tag{2.4.58}$$

on constate également que (2.4.58) garantit la condition $\frac{a^n-1}{a-1}\lambda_{0n} < 1$.

L'inégalité (2.4.57) (voir aussi (2.4.52)) implique que les fonctions $g_{kn}(m, \tilde{t})$ sont bornées et intégrables sur toutes les courbes γ_q. En outre, si on rappelle les formules avec lesquelles on a défini les fonctions $g_{kn}(m, \tilde{t})$ (voir (2.4.50)-(2.4.51)), on peut constater qu'elles sont continues en $(m, \tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

D'autre part, en rappelant l'expression explicite des opérateurs $K_{\gamma_q}[\cdot, \cdot]$ et $L_{\gamma_q}[\cdot]$ (voir (2.2.20)-(2.2.21)) et la définition des fonctions $g_{kn}(m, \tilde{t})$ (voir (2.4.50)-(2.4.51)) ainsi que les conditions (2.1.4)-(2.1.5), on voit que, si $g_{kn}(m, \tilde{t}) \geq 0$ pour tout $(m, \tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, alors on a

$$g_{k+1n}(m, \tilde{t}) \geq g_{kn}(m, \tilde{t})\Big(1 - \frac{\tau}{n}\frac{m}{w(m)}\Big[\int_{\gamma_{q(m,\tilde{t})}} \beta(m, m')\{g_{kn}\}_q(m')\mu_\gamma(dm') +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\gamma_{q(m,\tilde{t})}^{[0,m]}} \vartheta(m - m', m')\mu_\gamma(dm')\Big]\Big).$$

En rappelant les relations (2.1.9), (2.1.10), (2.4.52) et (2.4.57), on voit que, si n est suffisamment grand, alors on a $g_{k+1n}(m,\tilde{t}) \geq 0$, ce qui signifie que $g_{kn}(m,\tilde{t}) \geq 0$ pour tout $(m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$, c'est-à-dire

$$G_n(m,\tilde{t},s) \geq 0 \qquad \forall (m,\tilde{t},s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0,\tau]. \tag{2.4.59}$$

Maintenant on va examiner la différence $\sigma(m,\tilde{t},s) - G_n(m,\tilde{t},s)$ dans l'intervalle $[0,\tau]$. Pour cela, on pose

$$\alpha_k = \sup_{q\in\mathbb{R},\, \frac{k\tau}{n} \leq s \leq \frac{(k+1)\tau}{n}} \int_{\gamma_q} |\{\sigma(\cdot,\cdot,s) - G_n(\cdot,\cdot,s)\}_q(m)|\mu_\gamma(dm) = \tag{2.4.60}$$

$$= \sup_{q\in\mathbb{R},\, \frac{k\tau}{n} \leq s \leq \frac{(k+1)\tau}{n}} \int_{\gamma_q} |\{\sigma(\cdot,\cdot,s) - g_{kn}\}_q(m)|\mu_\gamma(dm),$$

$$\beta_k = \sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R},\, \frac{k\tau}{n} \leq s \leq \frac{(k+1)\tau}{n}} |\sigma(m,\tilde{t},s) - G_n(m,\tilde{t},s)| = \tag{2.4.61}$$

$$= \sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R},\, \frac{k\tau}{n} \leq s \leq \frac{(k+1)\tau}{n}} |\sigma(m,\tilde{t},s) - g_{kn}(m,\tilde{t})|.$$

En substituant, dans la différence $\sigma(m,\tilde{t},s) - g_{kn}(m,\tilde{t})$, la forme donnée par (2.4.51) et en y ajoutant $0 = -\sigma(m,\tilde{t},s-\frac{\tau}{n}) + \sigma(m,\tilde{t},s-\frac{\tau}{n})$, on a

$$\sigma(m,\tilde{t},s) - g_{kn}(m,\tilde{t}) = \sigma(m,\tilde{t},s) - \sigma(m,\tilde{t},s-\frac{\tau}{n}) + \sigma(m,\tilde{t},s-\frac{\tau}{n}) - g_{k-1n}(m,\tilde{t}) + \tag{2.4.62}$$

$$-\frac{\tau}{n}\frac{m}{w(m)}\Big(K_{\gamma_q}[g_{k-1n},g_{k-1n}](m,\tilde{t}) + L_{\gamma_q}[g_{k-1n}](m,\tilde{t})\Big).$$

Comme

$$\sigma(m,\tilde{t},s) - \sigma(m,\tilde{t},s-\frac{\tau}{n}) = \frac{\tau}{n}\frac{\partial\sigma(m,\tilde{t},s-\frac{\tau}{n})}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{n^2}\frac{\partial^2\sigma(m,\tilde{t},s-\delta_1)}{\partial s^2}$$

avec $0 \leq \delta_1 \leq \frac{\tau}{n}$, en utilisant (2.4.37), la symétrie de l'opérateur bilinéaire $K_{\gamma_q}[\varphi,\psi]$ (voir (2.2.20)) et la linéarité de l'opérateur $L_{\gamma_q}[\varphi]$ (voir (2.2.21)), de (2.4.62) on déduit que

$$|\sigma(m,\tilde{t},s) - g_{kn}(m,\tilde{t})| \leq |\sigma(m,\tilde{t},s-\frac{\tau}{n}) - g_{k-1n}(m,\tilde{t})| + \tag{2.4.63}$$

$$+\frac{\tau}{n}\frac{m}{w(m)}|K_{\gamma_q}[\sigma(\cdot,\cdot,s-\frac{\tau}{n}) + g_{k-1n},\ \sigma(\cdot,\cdot,s-\frac{\tau}{n}) - g_{k-1n}](m,\tilde{t})| +$$

$$+\frac{\tau}{n}\frac{m}{w(m)}|L_{\gamma_q}[\sigma(\cdot,\cdot,s-\frac{\tau}{n})-g_{k-1n}](m,\tilde{t})|+\frac{1}{2}\frac{\tau^2}{n^2}\Big|\frac{\partial^2\sigma(m,\tilde{t},s-\delta_1)}{\partial s^2}\Big|.$$

Comme, pour $0 \leq s \leq \tau$, en vertu de (2.4.57), (2.4.52) et du lemme 2.4.2 les termes

$$\int\limits_{\gamma_q}|\{\sigma(\cdot,\cdot,s-\frac{\tau}{n})+g_{k-1n}\}_q(m)|\mu_\gamma(dm), \qquad \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_q}\Big|\Big\{\frac{\partial^2\sigma(\cdot,\cdot,s-\delta_1)}{\partial s^2}\Big\}_q(m)\Big|\mu_\gamma(dm)$$

sont uniformément bornés par une constante, que nous désignons par C_1, en vertu de (2.2.27), (2.2.29) et (2.4.60), on déduit de (2.4.63) que

$$\alpha_k \leq \Big(1+\frac{\tau}{n}\frac{3C_0}{2}(1+C_1)\Big)\alpha_{k-1}+\frac{\tau^2}{n^2}C_1. \tag{2.4.64}$$

De manière analogue, en majorant les termes

$$|\sigma(m,\tilde{t},s-\frac{\tau}{n})+g_{k-1n}(m,\tilde{t})|, \qquad \frac{1}{2}\Big|\frac{\partial^2\sigma(m,\tilde{t},s-\delta_1)}{\partial s^2}\Big|$$

par une constante, que nous désignons par C_2, et en tenant compte de (2.2.26), (2.2.28) et (2.4.61), on a

$$\beta_k \leq \Big(1+\frac{\tau}{n}C_0\Big(\frac{3C_1}{4}+\frac{1}{2}\Big)\Big)\beta_{k-1}+\frac{\tau}{n}C_0(\frac{3C_2}{4}+1)\alpha_{k-1}+\frac{\tau^2}{n^2}C_2. \tag{2.4.65}$$

Si on pose

$$\zeta_k = \max(\alpha_k,\beta_k), \qquad C_3 = \max(C_1,C_2), \tag{2.4.66}$$

alors de (2.4.64)-(2.4.65) on déduit que

$$\zeta_k \leq \Big(1+\frac{\tau}{n}\frac{3C_0}{2}(1+C_3)\Big)\zeta_{k-1}+\frac{\tau^2}{n^2}C_3. \tag{2.4.67}$$

En répétant l'application de l'inégalité (2.4.67), on obtient

$$\max_{k=1,\cdots,n-1}\zeta_k \leq \Big(1+\frac{\tau}{n}\frac{3C_0}{2}(1+C_3)\Big)^{n-1}\zeta_0+\frac{\tau^2}{n^2}C_3\sum_{k=0}^{n-2}\Big(1+\frac{\tau}{n}\frac{3C_0}{2}(1+C_3)\Big)^k \leq \tag{2.4.68}$$

$$\leq e^{\tau\frac{3C_0}{2}(1+C_3)}\max(\alpha_0,\beta_0)+\frac{\tau}{n}C_3\frac{e^{\tau\frac{3C_0}{2}(1+C_3)}-1}{\frac{3C_0}{2}(1+C_3)}.$$

Quant à α_0 et β_0, de (2.4.50), (2.4.60) et (2.4.61), on déduit que

$$\alpha_0 \leq \frac{\tau}{n}\sup_{q\in\mathbb{R},0\leq s\leq\frac{\tau}{n}}\int\limits_{\gamma_q}\Big|\Big\{\frac{\partial\sigma(\cdot,\cdot,s)}{\partial s}\Big\}_q(m)\Big|\mu_\gamma(dm),$$

$$\beta_0 \leq \frac{\tau}{n} \sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}, 0\leq s\leq\frac{\tau}{n}} \Big|\frac{\partial\sigma(m,\tilde{t},s)}{\partial s}\Big|;$$

Donc en vertu du lemme 2.4.2 il existe une constante C_4 telle que

$$\max(\alpha_0,\beta_0) \leq C_4\frac{\tau}{n},$$

ce qui nous permet de déduire de (2.4.68) que

$$\max_{k=0,1,\cdots,n-1}\Big[\max(\alpha_k,\beta_k)\Big] \leq \frac{\tau}{n}\Big[e^{\tau\frac{3C_0}{2}(1+C_3)}C_4 + C_3\frac{e^{\tau\frac{3C_0}{2}(1+C_3)}-1}{\frac{3C_0}{2}(1+C_3)}\Big]. \tag{2.4.69}$$

En rappelant (2.4.61), on voit que (2.4.69) implique que, pour $0\leq s\leq\tau$, $G_n(m,\tilde{t},s)$ converge uniformément vers $\sigma(m,\tilde{t},s)$ quand n tend vers l'infini. Donc, en vertu de (2.4.59), on a $\sigma(m,\tilde{t},s)\geq 0$ pour tout $(m,\tilde{t},s)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times[0,\tau]$.

Étant démontrée la non-négativité de $\sigma(m,\tilde{t},s)$ dans l'intervalle $[0,\tau]$, nous construisons les intervalles $[\tau_1,\tau_2]$ (nous prenons $\tau_1=0$, $\tau_2=\tau$) et, en répétant la procédure sur les intervalles $[\tau_n,\tau_{n+1}]$ pour $n=2,3,\cdots$. De manière analogue à (2.4.58), qui donne la restriction du choix de τ, on peut prendre τ_{n+1} de telle sorte que

$$\tau_{n+1}-\tau_n < \frac{2}{3C_0}\log\Big(1+\frac{1}{\max(A_0^{[n]},B_0^{[n]})}\Big),$$

où

$$A_0^{[n]} = \sup_{q\in\mathbb{R}}\int_{\gamma_q}|\{\sigma(\cdot,\cdot,\tau_n)\}_q(m)|\mu_\gamma(dm), \qquad B_0^{[n]} = \sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}|\sigma(m,\tilde{t},\tau_n)|.$$

Le lemme 2.4.2 implique alors que l'on peut construire une suite d'intervalles $[\tau_n,\tau_{n+1}]$, $n=0,1,\cdots$, de telle sorte que $[0,\frac{1}{M}[\ \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\tau_n,\tau_{n+1}]$, ce qui achève la démonstration du lemme. □

En résumant, nous avons démontré l'existence d'une solution dans l'intervalle $[0,\frac{1}{M}[$, solution qui est analytique en s, non-négative, continue, bornée et intégrable sur chaque $\gamma_q=\gamma_{q\,\overline{s}_\nu}$, $q\in\mathbb{R}$.

2.5 Solution globale de l'équation approchée

Suite à la preuve de l'existence d'une solution locale, on va montrer qu'on peut la prolonger sur l'intervalle $[0, \infty[$.

Proposition 2.5.1. *Sous les conditions des lemmes 2.4.1 et 2.4.3 le problème* (2.4.37)-(2.4.38) *admet, dans l'intervalle* $[0, \infty[$, *une solution* $\sigma(m, \tilde{t}, s)$, *qui est analytique en* s, *continue, non-négative et intégrable sur chaque courbe* $\gamma_q = \gamma_{q\,\overline{s}_\nu}$.

Démonstration. La proposition 2.5.1 se démontre d'une manière analogue au lemme 3 de [25]. Plus précisément, on considère le premier intervalle $[0, D_1]$ avec $D_1 = \frac{1}{2M}$, $M = C_0\left(\frac{3}{2}(A_0 + 1) + \frac{A_0}{B_0}\right)$ (voir (2.4.43)), puis successivement les intervalles $[D_n, D_{n+1}]$ avec

$$D_{n+1} - D_n = \frac{1}{C_0(3(A(D_n) + 1) + 2\frac{A(D_n)}{B(D_n)})}, \tag{2.5.70}$$

où

$$A(s) = \sup_{q\in\mathbb{R}} \int_{\gamma_q} |\{\sigma(\cdot, \cdot, s)\}_q(m)|\mu_\gamma(dm), \qquad B(s) = \sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} |\sigma(m, \tilde{t}, s)|;$$

les lemmes 2.4.1, 2.4.2 et 2.4.3, reformulés avec les données initiales $\sigma(m, \tilde{t}, D_n)$, donne la solution dans l'intervalle $[D_n, D_{n+1}]$.

Retournons à l'équation (2.4.37) et intégrons les deux membres de (2.4.37) sur γ_q. Pour examiner le terme $\int_{\gamma_q} \frac{m}{w(m)}\{(K_{\gamma_q}[\sigma(\cdot, \cdot, s), \sigma(\cdot, \cdot, s)]\}_q(m)\mu_\gamma(dm)$ (rappeler l'expression (2.2.20)), on remarque que

$$\int_{\gamma_q} \frac{1}{2}\frac{m}{w(m)} \int_{\gamma_q^{[0,m]}} \beta(m - m', m')\{\sigma(\cdot, \cdot, s)\}_q(m - m')\{\sigma(\cdot, \cdot, s)\}_q(m')\mu_\gamma(dm')\mu_\gamma(dm) =$$

$$= \int_{\gamma_q}\int_{\gamma_q} \frac{1}{2}\frac{m + m'}{w(m + m')}\beta(m, m')\{\sigma(\cdot, \cdot, s)\}_q(m)\{\sigma(\cdot, \cdot, s)\}_q(m')\mu_\gamma(dm)\mu_\gamma(dm').$$

Donc, en vertu de la symétrie de la fonction $\beta(m, m')$ et de la condition (2.1.6) ainsi que de la non-négativité de $\sigma(m, \tilde{t}, s)$, on a

$$\int_{\gamma_q} \frac{m}{w(m)}\Big\{K_{\gamma_q}[\sigma(\cdot, \cdot, s), \sigma(\cdot, \cdot, s)]\Big\}_q(m)\mu_\gamma(dm) = \int_{\gamma_q}\int_{\gamma_q} \left(\frac{m}{w(m + m')} - \frac{m}{w(m)}\right)\times$$

$$\times\beta(m,m')\{\sigma(\cdot,\cdot,s)\}_q(m)\{\sigma(\cdot,\cdot,s)\}_q(m')\mu_\gamma(dm')\mu_\gamma(dm) \leq 0.$$

D'autre part, de manière analogue à la démonstration de (2.2.29) (voir en particulier (2.2.30)), en faisant l'attention sur le signe de chaque terme, de l'expression de (2.2.21) on déduit que

$$\int_{\gamma_q} \frac{m}{w(m)}\Big\{L_{\gamma_q}[\sigma(\cdot,\cdot,s)]\Big\}_q(m)\mu_\gamma(dm) \leq C_0 \int_{\gamma_q} \{\sigma(\cdot,\cdot,s)\}_q(m)\mu_\gamma(dm).$$

A l'aide de ces inégalités, de l'intégrale des deux membres de (2.4.37) sur γ_q, on obtient

$$A(s) = \sup_{q\in\mathbb{R}} \int_{\gamma_q} \{\sigma(\cdot,\cdot,s)\}_q(m)\mu_\gamma(dm) \leq$$

$$\leq \sup_{q\in\mathbb{R}} \int_{\gamma_q} \{\sigma(\cdot,\cdot,0)\}_q(m)\mu_\gamma(dm) + C_0 \int_0^s \sup_{q\in\mathbb{R}} \int_{\gamma_q} \{\sigma(\cdot,\cdot,s')\}_q(m)\mu_\gamma(dm)ds',$$

d'où il résulte que

$$A(s) \leq A(0)e^{C_0 s}. \tag{2.5.71}$$

D'autre part, en vertu de (2.2.20), (2.2.21) et de la non-négativité de $\sigma(m,\tilde{t},s)$, on déduit de (2.4.37) que

$$\frac{\partial}{\partial s}\sigma(m,\tilde{t},s) \geq -\sigma(m,\tilde{t},s)\Big[\int_{\gamma_q} \frac{m}{w(m)}\beta(m,m')\{\sigma(\cdot,\cdot,s)\}_q(m')\mu_\gamma(dm') +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\gamma_q^{[0,m]}} \frac{m}{w(m)}\vartheta(m-m',m')\mu_\gamma(dm')\Big],$$

d'où en utilisant les conditions (2.1.9), (2.1.10), on obtient

$$B(s) \geq B(0) - C_0\int_0^s B(s')(A(s')+\frac{1}{2})ds'$$

et donc

$$B(s) \geq B(0)e^{-C_0\int_0^s (A(s')+\frac{1}{2})ds'}. \tag{2.5.72}$$

Les relations (2.5.70)-(2.5.72) implique que la suite $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ ne peut pas converger vers une valeur finie, c'est-à-dire qu'il faut $\lim_{n\to\infty} D_n = \infty$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Proposition 2.5.2. *Sous les mêmes hypothèses de la proposition 2.5.1, la solution du problème* (2.4.37)-(2.4.38) *est unique dans la classe* Φ *avec*
$\Phi = \Big\{\varphi(m,\tilde{t},s)$ *est continue dans* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, *intégrable sur chaque courbe* γ_q $(q \in \mathbb{R})$, *et* $\forall\ \overline{s}_1 \in [0,\infty[$, *on a* $\sup_{q\in\mathbb{R},s\in[0,\overline{s}_1]} \int_{\gamma_q} |\{\varphi(\cdot,\cdot,s\}_q(m)|\mu_\gamma(dm) < \infty\Big\}$.

Démonstration. Soient φ_1 et φ_2 deux solutions du problème (2.4.37)-(2.4.38) appartenant à la classe Φ. Comme $\varphi_1(m,\tilde{t},0) - \varphi_2(m,\tilde{t},0) = 0$, à l'aide de la symétrie de l'opérateur $K_{\gamma_q}[\varphi,\psi]$ et de la linéarité de $L_{\gamma_q}[\varphi]$, on a

$$\varphi_1(m,\tilde{t},s) - \varphi_2(m,\tilde{t},s) =$$

$$= \int_0^s \frac{m}{w(m)}(K_{\gamma_q}[\varphi_1(\cdot,\cdot,s') + \varphi_2(\cdot,\cdot,s'), \varphi_1(\cdot,\cdot,s') - \varphi_2(\cdot,\cdot,s')] +$$

$$+ L_{\gamma_q}[\varphi_1(\cdot,\cdot,s) - \varphi_2(\cdot,\cdot,s)])ds'.$$

Donc, d'après (2.2.27) et (2.2.29) on a

$$\int_{\gamma_q} |\varphi_1(m,\tilde{t},s) - \varphi_2(m,\tilde{t},s)| \leq \tag{2.5.73}$$

$$\leq \frac{3C_0}{2}\int_0^s \sup_{q\in\mathbb{R}} \int_{\gamma_q} |\{\varphi_1(\cdot,\cdot,s') + \varphi_2(\cdot,\cdot,s')\}_q(m)|\mu_\gamma(dm)\times$$

$$\times \sup_{q\in\mathbb{R}} \int_{\gamma_q} |\{\varphi_1(\cdot,\cdot,s') - \varphi_2(\cdot,\cdot,s')\}_q(m)|\mu_\gamma(dm)ds' +$$

$$+ \frac{3C_0}{2}\int_0^s \sup_{q\in\mathbb{R}} \int_{\gamma_q} |\{\varphi_1(\cdot,\cdot,s') - \varphi_2(\cdot,\cdot,s')\}_q(m)|\mu_\gamma(dm)ds'.$$

Or, en choisissant un $\overline{s}_1 < \infty$, telle que

$$\sup_{q\in\mathbb{R},s\in[0,\overline{s}_1]} \int_{\gamma_q} |\{\varphi_1(\cdot,\cdot,s') + \varphi_2(\cdot,\cdot,s')\}_q(m)|\mu_\gamma(dm) \equiv M_1 < \infty. \tag{2.5.74}$$

Donc, si on pose

$$g(s) = \sup_{q\in\mathbb{R}} \int_{\gamma_q} |\{\varphi_1(\cdot,\cdot,s) - \varphi_2(\cdot,\cdot,s)\}_q(m)|\mu_\gamma(dm),$$

il résulte de (2.5.73) que

$$g(s) \leq \frac{3C_0}{2}(M_1+1)\int_0^s g(s')ds',$$

ce qui implique que $\quad g(s)=0 \qquad \forall s \in [0,\overline{s}_1]$.

Pour avoir la relation (2.5.74), on peut choisir quelconque $\overline{s}_1 < \infty$ (même si M_1 peut être différent, mais toujours $M_1 < \infty$), de sorte que, en répétant le même raisonnement, on peut démontrer $g(s)=0$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Les propositions 2.5.1 et 2.5.2 étant établies, on peut en déduire le théorème 2.3.1.

Démonstration du théorème 2.3.1. Même si la présence de $\tilde{t}$ est superflue, le problème (2.3.33)-(2.3.34) peut être écrit dans la forme de (2.3.31)-(2.3.32), et donc on peut le considérer comme un cas particulier du problème (2.4.37)-(2.4.38).

On remarque d'ailleurs que les conditions (2.3.35) ne sont autres que les conditions (2.4.41), (2.4.42), (2.4.48) avec $\nu = 0$ ($\frac{\nu}{N}=0$). Par conséquent, il résulte de la proposition 2.5.1 que le problème (2.3.31)-(2.3.32) (et donc le problème (2.3.33)-(2.3.34)) admet une solution dans l'intervalle $[0,\infty[\ (\ni s)$ et cette solution est analytique en s, continue en (m,s), non-négative et intégrable sur $[0,\infty[\ (\ni m)$ pour tout $s \geq 0$ fixé.

L'unicité de la solution résulte immédiatement de la proposition 2.5.2. $\square$

2.6 Estimations des solutions approchées

On remarque que, si $\overline{\sigma}_\nu(m,\tilde{t})$ est continue en $(m,\tilde{t})$ et satisfait aux conditions (2.4.41), (2.4.42) et (2.4.48), d'après les propositions 2.5.1 et 2.5.2, il existe une solution unique $\sigma(m,\tilde{t},s)$ du problème (2.4.37)-(2.4.38) pour $\frac{\nu}{N} \leq s < \infty$ (ici nous revenons à la formulation initiale de la variable s) et si on note par $\overline{\sigma}_{\nu+1}(m,\tilde{t}) = \sigma(m,\tilde{t},\frac{\nu+1}{N})$, on remarque qu'elle est continue en $(m,\tilde{t})$ et satisfait aux conditions (2.4.41), (2.4.42) et (2.4.48), de sorte qu'on peut répéter la résolution de l'équation pour $\frac{\nu+1}{N} \leq s$ associée à cette condition d'entrée. Ainsi, en itérant cette procédure sur les intervalles $[\frac{\nu}{N},\frac{\nu+1}{N}]$ pour $\nu = 0,1,2,\cdots$, on construit sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ la solution de l'équation (2.2.25) avec la condition d'entrée (2.2.23). Nous désignons cette solution par $\sigma^{[N]}(m, \tilde{t}, s)$, il est utile de rappeler que $\sigma^{[N]}(m, \tilde{t}, s)$ ainsi construite est continue en $(m, \tilde{t}, s)$, bornée et non-négative.

Pour résoudre le problème (2.2.22)-(2.2.23) dans le domaine $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0, \overline{s}]$ avec un $\overline{s} > 0$, nous supposons que $w(m)$ vérifie la condition supplémentaire

$$0 < \frac{1}{w(m)} \leq \sup_{m\in\mathbb{R}_+} \frac{1}{w(m)} \equiv \overline{C}_w < \infty \tag{2.6.75}$$

et que $\overline{\sigma}_0(m, \tilde{t})$, outre la condition (2.2.24), satisfait aux conditions

$$\int_0^\infty \sup_{\tilde{t}\in\mathbb{R}} \overline{\sigma}_0(m, \tilde{t}) dm \equiv \overline{\omega}_0 < \infty, \tag{2.6.76}$$

$$\sup_{m\in\mathbb{R}_+, \tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in\mathbb{R}, \tilde{t}_1\neq\tilde{t}_2} \frac{|\overline{\sigma}_0(m, \tilde{t}_1) - \overline{\sigma}_0(m, \tilde{t}_2)|}{|\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2|} \equiv \overline{\lambda}_0 < \infty, \tag{2.6.77}$$

$$\int_0^\infty \sup_{\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in\mathbb{R}, \tilde{t}_1\neq\tilde{t}_2} \frac{|\overline{\sigma}_0(m, \tilde{t}_1) - \overline{\sigma}_0(m, \tilde{t}_2)|}{|\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2|} dm \equiv \overline{J}_0 < \infty. \tag{2.6.78}$$

Dans la suite, nous allons établir des estimations pour les valeurs $\omega^{[N]}(s)$, $\psi^{[N]}(s)$, $J^{[N]}(s)$ et $\lambda^{[N]}(s)$ définies par

$$\omega^{[N]}(s) = \int_0^\infty u^{[N]}(m, s) dm, \qquad u^{[N]}(m, s) = \sup_{\tilde{t}\in\mathbb{R}} \sigma^{[N]}(m, \tilde{t}, s), \tag{2.6.79}$$

$$\psi^{[N]}(s) = \sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \sigma^{[N]}(m, \tilde{t}, s) = \sup_{m\in\mathbb{R}_+} u^{[N]}(m, s), \tag{2.6.80}$$

$$J^{[N]}(s) = \int_0^\infty j^{[N]}(m, s) dm, \tag{2.6.81}$$

$$j^{[N]}(m, s) = \sup_{\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in\mathbb{R}, \tilde{t}_1\neq\tilde{t}_2} \frac{|\sigma^{[N]}(m, \tilde{t}_1, s) - \sigma^{[N]}(m, \tilde{t}_2, s)|}{|\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2|},$$

$$\lambda^{[N]}(s) = \sup_{m\in\mathbb{R}_+, \tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in\mathbb{R}, \tilde{t}_1\neq\tilde{t}_2} \frac{|\sigma^{[N]}(m, \tilde{t}_1, s) - \sigma^{[N]}(m, \tilde{t}_2, s)|}{|\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2|} = \sup_{m\in\mathbb{R}_+} j^{[N]}(m, s). \tag{2.6.82}$$

Lemme 2.6.1. *Quel que soit $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a*

$$\omega^{[N]}(s) \leq \overline{\omega}(s) \qquad \forall s \in [0, S_1[, \tag{2.6.83}$$

où

$$\overline{\omega}(s) = \frac{1}{(\frac{1}{\overline{\omega}_0} + \frac{1}{2})e^{-C_0 s} - \frac{1}{2}}, \qquad S_1 = \frac{1}{C_0}\log\Big(\frac{2}{\overline{\omega}_0} + 1\Big). \tag{2.6.84}$$

Démonstration. Comme $\sigma^{[N]}(m, \tilde{t}, s) \geq 0$, à l'aide de (2.2.20) et (2.2.21), on déduit de (2.2.25) que pour $\frac{\nu}{N} \equiv \overline{s}_\nu < s < \frac{\nu+1}{N}$ on a

$$\frac{\partial}{\partial s}\sigma^{[N]}(m, \tilde{t}, s) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\frac{m}{w(m)} \int\limits_{\gamma^{[0,m]}_{q\,\overline{s}_\nu}} \beta(m-m', m')\{\sigma^{[N]}(\cdot,\cdot,s)\}_{q\,\overline{s}_\nu}(m-m')\{\sigma^{[N]}(\cdot,\cdot,s)\}_{q\,\overline{s}_\nu}(m')\mu_\gamma(dm') +$$

$$+\frac{m}{w(m)} \int\limits_{\gamma_{q\,\overline{s}_\nu}} \vartheta(m, m')\{\sigma^{[N]}(\cdot,\cdot,s)\}_{q\,\overline{s}_\nu}(m+m')\mu_\gamma(dm').$$

En utilisant (2.6.79), on en déduit que pour tout $s \geq 0$, $s \neq \overline{s}_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{\partial}{\partial s}\sigma^{[N]}(m, \tilde{t}, s) \leq \frac{1}{2}\frac{m}{w(m)} \int_0^m \beta(m-m', m')u^{[N]}(m-m', s)u^{[N]}(m', s)dm' +$$

$$+\frac{m}{w(m)} \int_0^\infty \vartheta(m, m')u^{[N]}(m+m', s)dm',$$

ce qui, joint à la continuité de $\sigma^{[N]}(m, \tilde{t}, s)$, entraîne que

$$\omega^{[N]}(s) \leq \overline{\omega}_0 +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^s \int_0^\infty \frac{m}{w(m)} \int_0^m \beta(m-m', m')u^{[N]}(m-m', s')u^{[N]}(m', s')dm'dmds' +$$

$$+\int_0^s \int_0^\infty \frac{m}{w(m)} \int_0^\infty \vartheta(m, m')u^{[N]}(m+m', s')dm'dmds',$$

où $\omega^{[N]}$ et $u^{[N]}$ sont définis par la relation (2.6.79).

Donc, en vertu de la condition (2.1.8), de la propriété de la convolution et de la condition (2.1.11), on en déduit que

$$\omega^{[N]}(s) \leq \overline{\omega}_0 + \frac{C_0}{2}\int_0^s (\omega^{[N]}(s'))^2 ds' + C_0 \int_0^s \omega^{[N]}(s')ds'. \tag{2.6.85}$$

D'autre part, on constate immédiatement que la fonction

$$\overline{\omega}(s) = \frac{1}{(\frac{1}{\overline{\omega}_0} + \frac{1}{2})e^{-C_0 s} - \frac{1}{2}}$$

est la solution du problème de Cauchy

$$\frac{d}{ds}\overline{\omega}(s) = \frac{C_0}{2}(\overline{\omega}(s))^2 + C_0\overline{\omega}(s), \qquad \overline{\omega}(0) = \overline{\omega}_0 \tag{2.6.86}$$

et que son intervalle maximal d'existence est $[0, S_1[$ avec S_1 donné dans (2.6.84). De la comparaison de (2.6.85) avec (2.6.86) on obtient (2.6.83). □

Lemme 2.6.2. *Quel que soit $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a*

$$\psi^{[N]}(s) \leq \overline{\psi}(s) \qquad \textit{pour } 0 \leq s < S_1, \tag{2.6.87}$$

où $\overline{\psi}(s)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\frac{d}{ds}\overline{\psi}(s) = \frac{C_0}{2}\Big[(3\overline{\omega}(s)+1)\overline{\psi}(s) + 2\overline{\omega}(s)\Big], \qquad \overline{\psi}(0) = \sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \overline{\sigma}_0(m,\tilde{t}). \tag{2.6.88}$$

Démonstration. En appliquant (2.2.26) et (2.2.28) au second membre de (2.2.25) et en rappelant les définitions (2.6.79), (2.6.80) et (2.6.84), on a

$$\psi^{[N]}(s) \leq \psi^{[N]}(\frac{\nu}{N}) + \frac{C_0}{2}\int_{\frac{\nu}{N}}^{s}[(3\overline{\omega}(s')+1)\psi(s') + 2\overline{\omega}(s')]ds',$$

Comme cette inégalité à la même forme dans tous les intervalles $[\frac{\nu}{N}, \frac{\nu+1}{N}]$, $\nu = 0, 1, \cdots,$ on a

$$\psi^{[N]}(s) \leq \psi^{[N]}(0) + \frac{C_0}{2}\int_{0}^{s}[(3\overline{\omega}(s')+1)\psi(s') + 2\overline{\omega}(s')]ds',$$

d'où, en rappelant (2.2.24), par le raisonnement usuel on obtient (2.6.87) avec $\overline{\psi}(s)$ définie par (2.6.88). □

Lemme 2.6.3. *Quel que soit $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a*

$$J^{[N]}(s) \leq \overline{J}(s) \qquad \textit{pour } 0 \leq s < S_1, \tag{2.6.89}$$

où $\overline{J}(s)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\frac{d}{ds}\overline{J}(s) = \frac{3C_0}{2}(2\overline{\omega}(s)+1)\overline{J}(s), \qquad \overline{J}(0) = \overline{J}_0. \tag{2.6.90}$$

Démonstration. Considérons $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in \mathbb{R}$, $\tilde{t}_1 \neq \tilde{t}_2$, $m \in \mathbb{R}_+$, $s \in [\frac{\nu}{N}, \frac{\nu+1}{N}]$. Alors, en posant

$$\overline{s}_\nu = \frac{\nu}{N}, \qquad q_1 = \tilde{t}_1 + \frac{\overline{s}_\nu}{w(m)}, \qquad q_2 = \tilde{t}_2 + \frac{\overline{s}_\nu}{w(m)},$$

on a

$$|\sigma^{[N]}(m,\tilde{t}_1,s) - \sigma^{[N]}(m,\tilde{t}_2,s)| \leq |\sigma^{[N]}(m,\tilde{t}_1,\frac{\nu}{N}) - \sigma^{[N]}(m,\tilde{t}_2,\frac{\nu}{N})| + \tag{2.6.91}$$

$$+\int_{\frac{\nu}{N}}^{s} \frac{m}{w(m)} |D_K^{[N]}(m,\tilde{t}_1,\tilde{t}_2,s')| ds' + \int_{\frac{\nu}{N}}^{s} \frac{m}{w(m)} |D_L^{[N]}(m,\tilde{t}_1,\tilde{t}_2,s')| ds',$$

où

$$D_K^{[N]}(m,\tilde{t}_1,\tilde{t}_2,s) =$$

$$= K_{\gamma_{q_1\overline{s}_\nu}}[\sigma^{[N]}(\cdot,\cdot,s),\sigma^{[N]}(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t}_1) - K_{\gamma_{q_2\overline{s}_\nu}}[\sigma^{[N]}(\cdot,\cdot,s'),\sigma^{[N]}(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t}_2),$$

$$D_L^{[N]}(m,\tilde{t}_1,\tilde{t}_2,s) = L_{\gamma_{q_1\overline{s}_\nu}}[\sigma^{[N]}(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t}_1) - L_{\gamma_{q_2\overline{s}_\nu}}[\sigma^{[N]}(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t}_2).$$

Même si $K_{\gamma_{q_1\overline{s}_\nu}}[\cdot,\cdot]$ et $K_{\gamma_{q_2\overline{s}_\nu}}[\cdot,\cdot]$ sont définis sur deux courbes différentes $\gamma_{q_1\overline{s}_\nu}$ et $\gamma_{q_2\overline{s}_\nu}$, de l'expression du second membre de (2.2.20), on constate que, une fois définies $\{\sigma^{[N]}(\cdot,\cdot,s)\}_{q_1\overline{s}_\nu}(m)$ et $\{\sigma^{[N]}(\cdot,\cdot,s)\}_{q_2\overline{s}_\nu}(m)$ (voir (2.2.18)), $D_K^{[N]}(m,\tilde{t}_1,\tilde{t}_2,s)$ peut être écrit dans la forme

$$D_K^{[N]}(m,\tilde{t}_1,\tilde{t}_2,s) = \tag{2.6.92}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')(\{\sigma^{[N]}\}_{q_1}(m-m') - \{\sigma^{[N]}\}_{q_2}(m-m'))\times$$

$$\times(\{\sigma^{[N]}\}_{q_1}(m') + \{\sigma^{[N]}\}_{q_2}(m'))dm' +$$

$$-\frac{1}{2}(\{\sigma^{[N]}\}_{q_1}(m) - \{\sigma^{[N]}\}_{q_2}(m))\int_0^\infty \beta(m,m')(\{\sigma^{[N]}\}_{q_1}(m') + \{\sigma^{[N]}\}_{q_2}(m'))dm' +$$

$$-\frac{1}{2}(\{\sigma^{[N]}\}_{q_1}(m) + \{\sigma^{[N]}\}_{q_2}(m))\int_0^\infty \beta(m,m')(\{\sigma^{[N]}\}_{q_1}(m') - \{\sigma^{[N]}\}_{q_2}(m'))dm',$$

où

$$\{\sigma^{[N]}\}_{q_1}(m) = \{\sigma^{[N]}(\cdot,\cdot,s)\}_{q_1\overline{s}_\nu}(m), \qquad \{\sigma^{[N]}\}_{q_2}(m) = \{\sigma^{[N]}(\cdot,\cdot,s)\}_{q_2\overline{s}_\nu}(m).$$

En rappelant (2.1.8), (2.1.9) et les définitions (2.6.79), (2.6.81), on déduit de (2.6.92) que

$$\frac{m}{w(m)} \sup_{\tilde{t}_1,\tilde{t}_2\in\mathbb{R},\tilde{t}_1\neq\tilde{t}_2} \frac{|D_K^{[N]}(m,\tilde{t}_1,\tilde{t}_2,s)|}{|\tilde{t}_1-\tilde{t}_2|} \leq \tag{2.6.93}$$

$$\leq C_0\int_0^m j^{[N]}(m-m',s)u^{[N]}(m',s)dm' + C_0\omega^{[N]}(s)j^{[N]}(m,s) + C_0u^{[N]}(m,s)J^{[N]}(s).$$

D'autre part, pour $D_L^{[N]}(m,\tilde{t}_1,\tilde{t}_2,s)$, on obtient sans difficulté à partir de la définition (2.2.21)

$$\frac{m}{w(m)} \sup_{\tilde{t}_1,\tilde{t}_2\in\mathbb{R},\tilde{t}_1\neq\tilde{t}_2} \frac{|D_L^{[N]}(m,\tilde{t}_1,\tilde{t}_2,s)|}{|\tilde{t}_1-\tilde{t}_2|} \leq \tag{2.6.94}$$

$$\leq \frac{C_0}{2}j^{[N]}(m,s) + \frac{m}{w(m)}\int_0^\infty \vartheta(m,m')j^{[N]}(m+m',s)dm'.$$

A l'aide de la relation

$$\int_0^\infty \frac{m}{w(m)}\int_0^\infty \vartheta(m,m')j^{[N]}(m+m',s)dm'dm =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^{m''} \frac{m''-m'}{w(m''-m')}\vartheta(m''-m',m')j^{[N]}(m'',s)dm'dm''$$

on déduit de (2.1.11), (2.6.91), (2.6.93), (2.6.94) et de la propriété de la convolution que

$$J^{[N]}(s) \leq J^{[N]}(\frac{\nu}{N}) + 3C_0\int_{\frac{\nu}{N}}^s J^{[N]}(s')\omega^{[N]}(s')ds' + \frac{3C_0}{2}\int_{\frac{\nu}{N}}^s J^{[N]}(s')ds'.$$

Comme cette inégalité à la même forme dans tous les intervalles $[\frac{\nu}{N},\frac{\nu+1}{N}]$, $\nu = 0,1,\cdots$, on obtient

$$J^{[N]}(s) \leq J^{[N]}(0) + 3C_0\int_0^s J^{[N]}(s')\omega^{[N]}(s')ds' + \frac{3C_0}{2}\int_0^s J^{[N]}(s')ds',$$

ou, compte tenu de (2.6.83) et de la relation $J^{[N]}(0) = \overline{J}_0$,

$$J^{[N]}(s) \leq \overline{J}_0 + \frac{3C_0}{2}\int_0^s (2\overline{\omega}(s')+1)J^{[N]}(s')ds',$$

ce qui implique (2.6.89) ainsi que (2.6.90). $\square$

Lemme 2.6.4. *Quel que soit $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a*

$$\lambda^{[N]}(s) \leq \overline{\lambda}(s) \qquad \textit{pour } \ 0 \leq s < S_1, \tag{2.6.95}$$

où $\overline{\lambda}(s)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\frac{d}{ds}\overline{\lambda}(s) = C_0(2\overline{\omega}(s) + \frac{1}{2})\overline{\lambda}(s) + C_0(\overline{\psi}(s) + 1)\overline{J}(s), \qquad \overline{\lambda}(0) = \overline{\lambda}_0. \tag{2.6.96}$$

Démonstration. En utilisant les relations

$$\sup_{m \in \mathbb{R}_+} u^{[N]}(m, s) = \psi^{[N]}(s) \leq \overline{\psi}(s), \qquad \sup_{m \in \mathbb{R}_+} j^{[N]}(m, s) = \lambda^{[N]}(s),$$

$$\omega^{[N]}(s) \leq \overline{\omega}(s), \qquad J^{[N]}(s) \leq \overline{J}(s),$$

on déduit de (2.6.91), (2.6.93), (2.6.94) et de la propriété de la convolution que

$$\lambda^{[N]}(s) \leq \lambda^{[N]}(\frac{\nu}{N}) + 2C_0 \int_{\frac{\nu}{N}}^{s} \overline{\omega}(s')\lambda^{[N]}(s')ds' +$$

$$+ C_0 \int_{\frac{\nu}{N}}^{s} \overline{\psi}(s')\overline{J}(s')ds' + \frac{C_0}{2} \int_{\frac{\nu}{N}}^{s} \lambda^{[N]}(s')ds' + C_0 \int_{\frac{\nu}{N}}^{s} \overline{J}(s')ds'.$$

D'une manière analogue à la démonstration du lemme 2.6.3, on déduit de cette inégalité la relation (2.6.95) et (2.6.96). □

2.7 Convergence des solutions approchées

Pour résoudre le problème (2.2.22)-(2.2.23), nous démontrerons la convergence d'une sous-suite de solutions approchées $\sigma^{[N]}(m, \tilde{t}, s)$ dans l'intervalle $[0, S_1[$, ce qui nous donnera la solution du problème dans cet intervalle.

Théorème 2.7.1. *On suppose que $\beta(\cdot, \cdot)$, $\vartheta(\cdot, \cdot)$ et $w(\cdot)$ vérifient les conditions* (2.1.7)-(2.1.12), (2.6.75), *en plus $\overline{\sigma}_0(m, \tilde{t})$ est continue en $(m, \tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et vérifie les conditions* (2.2.24), (2.6.76), (2.6.77) *et* (2.6.78). *Soit S_1 le nombre donné dans* (2.6.84). *Alors* *le problème* (2.2.22)-(2.2.23) *admet une solution dans l'intervalle* $[0, S_1[$. *En outre la solution est unique dans la classe des fonctions* $\sigma(m, \tilde{t}, s)$ *qui vérifient les conditions*

$i)$ $\sigma(m, \tilde{t}, s)$ *est continue dans* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0, S_1[$,

$ii)$ *pour tout* $s \in [0, S_1[$, $u(m, s) = \sup_{\tilde{t}\in\mathbb{R}} |\sigma(m, \tilde{t}, s)|$ *est intégrable en* $m \in \mathbb{R}_+$,

$iii)$ *quel que soit* $\overline{s}_1 \in [0, S_1[$, *on a* $\sup_{s\in[0,\overline{s}_1]} \int_0^\infty u(m, s)dm < \infty$.

Démonstration. Nous construisons la suite de solutions approchées $\sigma^{[2^n]}$, $n = 1, 2, \cdots$, qui sont les solutions du problème (2.2.25) avec la condition (2.2.23) où $N = 2^n$ tout en notant σ_n au lieu de $\sigma^{[2^n]}$. On rappelle que dans l'intervalle $[\frac{\nu}{2^n}, \frac{2\nu+1}{2^{n+1}}[$, les solutions approchées σ_n et σ_{n+1} se définissent par les opérateurs intégraux définis sur les mêmes courbes $\gamma_{q\,\overline{s}_1}$, $\overline{s}_1 = \frac{\nu}{2^n}$, tandis que dans l'intervalle $[\frac{2\nu+1}{2^{n+1}}, \frac{\nu+1}{2^n}[$, la solution approchée σ_n se définit par les opérateurs intégraux définis sur les courbes $\gamma_{q\,\overline{s}_1}$ par contre σ_{n+1} se définit sur les courbes $\gamma_{q\,\overline{s}_2}$, $\overline{s}_2 = \frac{2\nu+1}{2^{n+1}}$.

On pose

$$\eta_n(m, s) = \sup_{\tilde{t}\in\mathbb{R}} |\sigma_n(m, \tilde{t}, s) - \sigma_{n+1}(m, \tilde{t}, s)|, \tag{2.7.97}$$

$$\overline{\alpha}_n(s) = \int_0^\infty \eta_n(m, s)dm, \tag{2.7.98}$$

$$\overline{\beta}_n(s) = \sup_{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} |\sigma_n(m, \tilde{t}, s) - \sigma_{n+1}(m, \tilde{t}, s)| = \sup_{m\in\mathbb{R}_+} \eta_n(m, s). \tag{2.7.99}$$

On va écrire également $u_n(m, s)$, $j_n(m, s)$, $\omega_n(s)$, $\psi_n(s)$, $J_n(s)$ et $\lambda_n(s)$ au lieu de $u^{[2^n]}(m, s)$, $j^{[2^n]}(m, s)$, $\omega^{[2^n]}(s)$, $\psi^{[2^n]}(s)$, $J^{[2^n]}(s)$ et $\lambda^{[2^n]}(s)$ (voir (2.6.79)-(2.6.82)).

On rappelle que, quels que soient $q \in \mathbb{R}$ et $\overline{s} \geq 0$, la définition de l'opérateur $K_{\gamma_{q\,\overline{s}}}[\cdot, \cdot]$ nous donne

$$K_{\gamma_{q\,\overline{s}}}[\sigma_n(\cdot, \cdot, s'), \sigma_n(\cdot, \cdot, s')](m, \tilde{t}) - K_{\gamma_{q\,\overline{s}}}[\sigma_{n+1}(\cdot, \cdot, s'), \sigma_{n+1}(\cdot, \cdot, s')](m, \tilde{t}) =$$

$$= K_{\gamma_{q\,\overline{s}}}[\sigma_n(\cdot, \cdot, s') + \sigma_{n+1}(\cdot, \cdot, s'),\ \sigma_n(\cdot, \cdot, s') - \sigma_{n+1}(\cdot, \cdot, s')](m, \tilde{t}).$$

Donc, en rappelant également la linéarité de l'opérateur $L_{\gamma_{q\,\overline{s}}}[\varphi]$, on a

$$\sigma_n(m, \tilde{t}, s) - \sigma_{n+1}(m, \tilde{t}, s) = \sigma_n(m, \tilde{t}, \frac{\nu}{2^n}) - \sigma_{n+1}(m, \tilde{t}, \frac{\nu}{2^n}) + \tag{2.7.100}$$

$$+\frac{m}{w(m)}\int\limits_{\frac{\nu}{2^n}}^{s}\Big[K_{\gamma_q\,\overline{s}_1}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s')+\sigma_{n+1}(\cdot,\cdot,s'),\ \sigma_n(\cdot,\cdot,s')-\sigma_{n+1}(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t})+$$

$$+L_{\gamma_q\,\overline{s}_1}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s')-\sigma_{n+1}(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t})\Big]ds'$$

pour

$$\overline{s}_1=\frac{\nu}{2^n}\leq s\leq\frac{2\nu+1}{2^{n+1}}$$

et

$$\sigma_n(m,\tilde{t},s)-\sigma_{n+1}(m,\tilde{t},s)=\sigma_n(m,\tilde{t},\frac{2\nu+1}{2^{n+1}})-\sigma_{n+1}(m,\tilde{t},\frac{2\nu+1}{2^{n+1}})+ \tag{2.7.101}$$

$$+\frac{m}{w(m)}\int\limits_{\frac{2\nu+1}{2^{n+1}}}^{s}\Big[K_{\gamma_q\,\overline{s}_2}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s')+\sigma_{n+1}(\cdot,\cdot,s'),\ \sigma_n(\cdot,\cdot,s')-\sigma_{n+1}(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t})+$$

$$+L_{\gamma_q\,\overline{s}_2}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s')-\sigma_{n+1}(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t})\Big]ds'+\Delta_{\overline{s}_1\,\overline{s}_2}(m,\tilde{t})$$

pour

$$\frac{2\nu+1}{2^{n+1}}\leq s\leq\frac{\nu+1}{2^n},\qquad \overline{s}_1=\frac{\nu}{2^n},\quad \overline{s}_2=\frac{2\nu+1}{2^{n+1}},$$

où

$$\Delta_{\overline{s}_1\,\overline{s}_2}(m,\tilde{t})=$$

$$=\frac{m}{w(m)}\int\limits_{\frac{2\nu+1}{2^{n+1}}}^{s}\Big[K_{\gamma_q\,\overline{s}_1}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s'),\ \sigma_n(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t})-K_{\gamma_q\,\overline{s}_2}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s'),\ \sigma_n(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t})+$$

$$+L_{\gamma_q\,\overline{s}_1}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t})-L_{\gamma_q\,\overline{s}_2}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t})\Big]ds'.$$

En vertu des conditions (2.1.8)-(2.1.10), on déduit de (2.2.20), (2.2.21) que, quels que soient $q\in\mathbb{R}$ et $\overline{s},s\in[0,S_1[$, on a

$$\sup_{\tilde{t}\in\mathbb{R}}\frac{m}{w(m)}|K_{\gamma_q\overline{s}}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s)+\sigma_{n+1}(\cdot,\cdot,s),\ \sigma_n(\cdot,\cdot,s)-\sigma_{n+1}(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t})|\leq \tag{2.7.102}$$

$$\leq\frac{C_0}{2}\int\limits_0^m(u_n(m-m',s)+u_{n+1}(m-m',s))\eta_n(m',s)dm'+$$

$$+C_0\eta_n(m,s)\overline{\omega}(s)+\frac{C_0}{2}(u_n(m,s)+u_{n+1}(m,s))\overline{\alpha}_n(s),$$

$$\sup_{\tilde{t}\in\mathbb{R}} \frac{m}{w(m)} |L_{\gamma_{q\,\overline{s}}}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s) - \sigma_{n+1}(\cdot,\cdot,s)](m,\tilde{t})| \leq \tag{2.7.103}$$
$$\leq \frac{C_0}{2}\eta_n(m,s) + \frac{m}{w(m)} \int_0^\infty \vartheta(m,m')\eta_n(m+m',s)dm'.$$

D'autre part, d'après (2.2.18) et (2.2.19), on remarque que les valeurs de $\sigma_n(m',\tilde{t}',s)$ sur les courbes $\gamma_{q\overline{s}_1(m,\tilde{t})}$ et $\gamma_{q\overline{s}_2(m,\tilde{t})}$ sont données par

$$\{\sigma_n(\cdot,\cdot,s)\}_{q\overline{s}_1(m,\tilde{t})}(m') = \sigma_n(m',\tilde{t} + \frac{\overline{s}_1}{w(m)} - \frac{\overline{s}_1}{w(m')}, s),$$

$$\{\sigma_n(\cdot,\cdot,s)\}_{q\overline{s}_2(m,\tilde{t})}(m') = \sigma_n(m',\tilde{t} + \frac{\overline{s}_2}{w(m)} - \frac{\overline{s}_2}{w(m')}, s).$$

Donc, compte tenu également de la relation $\overline{s}_2 - \overline{s}_1 = \frac{2\nu+1}{2^{n+1}} - \frac{\nu}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$ et de l'hypothèse (2.6.75), on a

$$|\{\sigma_n(\cdot,\cdot,s)\}_{q\overline{s}_1(m,\tilde{t})}(m') - \{\sigma_n(\cdot,\cdot,s)\}_{q\overline{s}_2(m,\tilde{t})}(m')| \leq \tag{2.7.104}$$
$$\leq j_n(m',s)\Big|\frac{\overline{s}_1}{w(m)} - \frac{\overline{s}_1}{w(m')} - \Big(\frac{\overline{s}_2}{w(m)} - \frac{\overline{s}_2}{w(m')}\Big)\Big| \leq j_n(m',s)\frac{\overline{C}_w}{2^n}.$$

où j_n est défini par la relation (2.6.81). Compte tenu des conditions (2.1.8)-(2.1.10), on déduit de (2.2.20), (2.2.21) et (2.7.104) que

$$\frac{m}{w(m)}\Big|K_{\gamma_{q\,\overline{s}_1}}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s'),\,\sigma_n(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t}) - K_{\gamma_{q\,\overline{s}_2}}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s'),\,\sigma_n(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t})\Big| \leq \tag{2.7.105}$$
$$\leq \frac{\overline{C}_w}{2^n}C_0\Big[\int_0^m u_n(m-m',s)j_n(m',s)dm' + j_n(m,s)\omega_n(s) + u_n(m,s)J_n(s)\Big],$$

$$\frac{m}{w(m)}\Big|L_{\gamma_{q\,\overline{s}_1}}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t}) - L_{\gamma_{q\,\overline{s}_2}}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t})\Big| \leq \tag{2.7.106}$$
$$\leq \frac{\overline{C}_w}{2^n}\Big[\frac{C_0}{2}j_n(m,s) + \frac{m}{w(m)}\int_0^\infty \vartheta(m,m')j_n(m+m',s)dm'\Big].$$

Comme

$$\int_0^\infty\int_0^m (u_n(m-m',s) + u_{n+1}(m-m',s))\eta_n(m',s)dm'dm \leq 2\overline{\omega}(s)\overline{\alpha}_n(s),$$

$$\int_0^\infty \frac{m}{w(m)} \int_0^\infty \vartheta(m,m')\eta_n(m+m',s)dm'dm \leq C_0\overline{\alpha}_n(s),$$

où $\overline{\alpha}_n$ est défini par la relation (2.7.98), avec $\overline{\alpha}_n(0) = \overline{\beta}_n(0) = 0$. A l'aide de (2.7.100)-(2.7.103) ainsi que (2.7.105) et (2.7.106) (voir aussi (2.6.83), (2.6.87), (2.6.89), (2.6.95)), il s'ensuit que

$$\overline{\alpha}_n(s) \leq \frac{3C_0}{2}\int_0^s (2\overline{\omega}(s')+1)\overline{\alpha}_n(s')ds' + \frac{1}{2^n}\frac{3C_0\overline{C}_w}{2}\int_0^s (2\overline{\omega}(s')+1)\overline{J}(s')ds', \quad (2.7.107)$$

$$\overline{\beta}_n(s) \leq C_0\int_0^s ((2\overline{\psi}(s')+1)\overline{\alpha}_n(s') + (\overline{\omega}(s')+\frac{1}{2})\overline{\beta}_n(s'))ds' + \quad (2.7.108)$$

$$+\frac{1}{2^n}\overline{C}_wC_0\int_0^s \Big((2\overline{\psi}(s')+1)\overline{J}(s') + (\overline{\omega}(s')+\frac{1}{2})\overline{\lambda}(s')\Big)ds'.$$

Par conséquent

$$\overline{\alpha}_n(s) \leq \overline{y}(s), \qquad \overline{\beta}_n(s) \leq \overline{z}(s),$$

où $\overline{y}(s)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\frac{d}{ds}\overline{y}(s) = \frac{3C_0}{2}(2\overline{\omega}(s)+1)\overline{y}(s) + \frac{1}{2^n}\frac{3\overline{C}_wC_0}{2}(2\overline{\omega}(s)+1)\overline{J}(s), \qquad \overline{y}(0)=0,$$

tandis que $\overline{z}(s)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\frac{d}{ds}\overline{z}(s) = C_0(\overline{\omega}(s)+\frac{1}{2})\overline{z}(s) + C_0(2\overline{\psi}(s)+1)\overline{y}(s) +$$

$$+\frac{1}{2^n}\overline{C}_wC_0\Big((2\overline{\psi}(s)+1)\overline{J}(s) + (\overline{\omega}(s)+\frac{1}{2})\overline{\lambda}(s)\Big), \qquad \overline{z}(0)=0.$$

C'est-à-dire, si on pose

$$\overline{A}(s) = \frac{3C_0\overline{C}_w}{2}\int_0^s (2\overline{\omega}(s')+1)\overline{J}(s')e^{\frac{3C_0}{2}\int_{s'}^s(2\overline{\omega}(s'')+1)ds''}ds', \quad (2.7.109)$$

$$\overline{B}(s) = C_0\int_0^s \Big[(2\overline{\psi}(s')+1)\overline{A}(s') + \overline{C}_w\Big((2\overline{\psi}(s')+1)\overline{J}(s') + (\overline{\omega}(s')+\frac{1}{2})\overline{\lambda}(s')\Big)\Big]\times \quad (2.7.110)$$

$$\times e^{\frac{C_0}{2}\int_{s'}^s(2\overline{\omega}(s'')+1)ds''}ds',$$

on a

$$\overline{\alpha}_n(s) \leq \frac{1}{2^n}\overline{A}(s), \qquad \overline{\beta}_n(s) \leq \frac{1}{2^n}\overline{B}(s). \tag{2.7.111}$$

Comme $\overline{B}(s)$ définie par (2.7.109)-(2.7.110) ne dépend pas de n, est une fonction croissante bien définie sur $[0, S_1[$, c'est-à-dire

$$0 \leq \overline{B}(s_1) \leq \overline{B}(s_2) < \infty \qquad \forall s_1, s_2 \in [0, S_1[\ , \ \ s_1 \leq s_2,$$

de (2.7.99) et (2.7.111) on déduit que, quel que soit $\varepsilon > 0$ et quel que soit $\overline{s} \in [0, S_1[$, si on choisit $\overline{n} \in \mathbb{N}$ de telle sorte que

$$\overline{n} > \frac{1}{\log 2}(\log \overline{B}(\overline{s}) + \log \frac{1}{\varepsilon}) + 1,$$

alors on a

$$\sup_{(m,\tilde{t},s)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times[0,\overline{s}]} |\sigma_{n_1}(m,\tilde{t},s) - \sigma_{n_2}(m,\tilde{t},s)| < \varepsilon, \qquad \forall\ n_1, n_2 \geq \overline{n},$$

ce qui démontre la convergence uniforme de $\sigma_n(m,\tilde{t},s)$ dans $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times[0,\overline{s}]$ pour $n \to \infty$. A la fin on rappelle que, quel que soit $\overline{s} \in [0, S_1[$, cette démonstration de la convergence demeure valide.

Désignons, à titre provisoire, par $\sigma_\infty(m,\tilde{t},s)$ la limite de la suite $\{\sigma_n(m,\tilde{t},s)\}_{n=0}^{\infty}$, c'est-à-dire

$$\sigma_\infty(m,\tilde{t},s) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(m,\tilde{t},s).$$

Alors comme $\sigma_n(m,\tilde{t},s)$ converge uniformément vers $\sigma_\infty(m,\tilde{t},s)$ dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0,\overline{s}]$ pour quelconque $\overline{s} \in]0, S_1[$, il est clair que $\sigma_\infty(m,\tilde{t},s)$ est aussi continue et non-négative ; en outre de la première inégalité de (2.7.111), on déduit que, $\sup_{\tilde{t}\in\mathbb{R}} \sigma_\infty(m,\tilde{t},s)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+(\ni m)$ pour tout $s \in [0, S_1[$.

Soit $\overline{s} \in]0, S_1[$. On pose

$$\Delta_\infty = \sup_{(m,\tilde{t},s)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times[0,\overline{s}]} \Big|\sigma_\infty(m,\tilde{t},s) - \overline{\sigma}_0(m,\tilde{t}) - I(m,\tilde{t},s)\Big|, \tag{2.7.112}$$

où

$$I(m,\tilde{t},s) = \int_0^s \frac{m}{w(m)}\Big(K_{\gamma_{qs}}[\sigma_\infty(\cdot,\cdot,s'),\sigma_\infty(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t}) + L_{\gamma_{qs}}[\sigma_\infty(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t})\Big)ds'.$$

Comme

$$\sigma_n(m,\tilde{t},s) = \overline{\sigma}_0(m,\tilde{t})+$$

$$+\int_0^s \frac{m}{w(m)}\Big(K_{\gamma_{q\tilde{s}_\nu(n,s)}}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s'),\sigma_n(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t}) + L_{\gamma_{q\tilde{s}_\nu(n,s)}}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t})\Big)ds'$$

avec

$$\tilde{s}_\nu(n,s) = \frac{\nu}{2^n} \qquad \text{pour } \frac{\nu}{2^n} \leq s < \frac{\nu+1}{2^n},$$

on a

$$\sigma_\infty(m,\tilde{t},s) - \overline{\sigma}_0(m,\tilde{t}) - I(m,\tilde{t},s) = \tag{2.7.113}$$

$$= \sigma_\infty(m,\tilde{t},s) - \sigma_n(m,\tilde{t},s) - I_n^{[1]}(m,\tilde{t},s) - I_n^{[2]}(m,\tilde{t},s),$$

$$I_n^{[1]}(m,\tilde{t},s) = \int_0^s \frac{m}{w(m)}\Big(K_{\gamma_{qs}}[\sigma_\infty(\cdot,\cdot,s'),\sigma_\infty(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t}) + L_{\gamma_{qs}}[\sigma_\infty(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t})+$$

$$-K_{\gamma_{qs}}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s'),\sigma_n(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t}) - L_{\gamma_{qs}}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t})\Big)ds',$$

$$I_n^{[2]}(m,\tilde{t},s) = \int_0^s \frac{m}{w(m)}\Big(K_{\gamma_{qs}}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s'),\sigma_n(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t}) + L_{\gamma_{qs}}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t})+$$

$$-K_{\gamma_{q\tilde{s}_\nu(n,s)}}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s'),\sigma_n(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t}) - L_{\gamma_{q\tilde{s}_\nu(n,s)}}[\sigma_n(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t})\Big)ds'.$$

La convergence uniforme de $\sigma_n(m,\tilde{t},s)$ vers $\sigma_\infty(m,\tilde{t},s)$ implique que

$$\lim_{n\to\infty}(|\sigma_\infty(m,\tilde{t},s) - \sigma_n(m,\tilde{t},s)| + |I_n^{[1]}(m,\tilde{t},s)|) = 0.$$

D'autre part, en rappelant les raisonnements utilisés pour l'obtention de (2.7.105)-(2.7.106), on constate sans difficulté que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $\overline{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq \overline{n}_\varepsilon$ on ait

$$\sup_{(m,\tilde{t},s)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times[0,\overline{s}]} |I_n^{[2]}(m,\tilde{t},s)| < \varepsilon.$$

On en déduit que $\quad \Delta_\infty = 0 \quad$ ou

$$\sigma_\infty(m,\tilde{t},s) = \overline{\sigma}_0(m,\tilde{t})+ \tag{2.7.114}$$

$$+\int_0^s \frac{m}{w(m)}\Big(K_{\gamma_{qs}}[\sigma_\infty(\cdot,\cdot,s'),\sigma_\infty(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t}) + L_{\gamma_{qs}}[\sigma_\infty(\cdot,\cdot,s')](m,\tilde{t})\Big)ds'.$$

En vertu de la continuité de $\sigma_\infty(m, \tilde{t}, s)$, la dérivée par rapport à s du second membre de (2.7.114) est bien définie, ce qui nous permet de passer de (2.7.114) à sa version différentielle (2.2.22), c'est-à-dire $\sigma_\infty(m, \tilde{t}, s)$ est une solution du problème (2.2.22)-(2.2.23).

Pour démontrer l'unicité de la solution, nous considérons deux solutions σ et φ du problème (2.2.22)-(2.2.23), appartenant à la classe des fonctions définie dans l'énoncé du théorème 2.7.1. Comme $\sigma(m, \tilde{t}, 0) - \varphi(m, \tilde{t}, 0) = 0$ et que

$$K_{\gamma_{qs}}[\sigma(\cdot, \cdot, s), \sigma(\cdot, \cdot, s)](m, \tilde{t}) - K_{\gamma_{qs}}[\varphi(\cdot, \cdot, s), \varphi(\cdot, \cdot, s)](m, \tilde{t}) =$$

$$= K_{\gamma_{qs}}[\sigma(\cdot, \cdot, s) + \varphi(\cdot, \cdot, s), \sigma(\cdot, \cdot, s) - \varphi(\cdot, \cdot, s)](m, \tilde{t}),$$

En intégrant les deux membres de (2.2.22) de 0 à $s \in]0, S_1[$, on a

$$\sigma(m, \tilde{t}, s) - \varphi(m, \tilde{t}, s) =$$

$$= \int_0^s \frac{m}{w(m)} \Big(K_{\gamma_{qs'}}[\sigma(\cdot, \cdot, s') + \varphi(\cdot, \cdot, s'), \sigma(\cdot, \cdot, s') - \varphi(\cdot, \cdot, s')](m, \tilde{t}) +$$

$$+ L_{\gamma_{qs'}}[\sigma(\cdot, \cdot, s') - \varphi(\cdot, \cdot, s')](m, \tilde{t}) \Big) ds'.$$

Donc, en posant

$$\eta(m, s) = \sup_{\tilde{t} \in \mathbb{R}} |\sigma(m, \tilde{t}, s) - \varphi(m, \tilde{t}, s)|, \qquad u_2^*(m, s) = \sup_{\tilde{t} \in \mathbb{R}} |\sigma(m, \tilde{t}, s) + \varphi(m, \tilde{t}, s)|,$$

de manière analogue à (2.7.102)-(2.7.103), on obtient

$$\eta(m, s) \leq \int_0^s \Big[\frac{C_0}{2} \int_0^m u_2^*(m - m', s') \eta(m', s') dm' + \frac{C_0}{2} \eta(m, s') \int_0^\infty u_2^*(m', s') dm' +$$

$$+ \frac{C_0}{2} u_2^*(m, s') \int_0^\infty \eta(m', s') dm' + \frac{C_0}{2} \eta(m, s') + \frac{m}{w(m)} \int_0^\infty \vartheta(m, m') \eta(m + m', s') dm' \Big] ds'.$$

Par conséquent, si on pose

$$\overline{g}(s) = \int_0^\infty \eta(m, s) dm,$$

de manière analogue à (2.7.107), on a

$$\overline{g}(s) \leq \frac{3C_0}{2} \int_0^s \Big(1 + \int_0^\infty u_2^*(m, s') dm \Big) \overline{g}(s') ds'.$$

Compte tenu de la condition $iii)$ du théorème 2.7.1, on en déduit que

$$\overline{g}(s) = 0 \qquad \forall s \in [0, S_1],$$

ce qui prouve l'unicité de la solution. Le théorème est démontré. $\square$

Avec les techniques qu'on a utilisées pour la construction de la solution, on n'a pas réussi à trouver les estimations nécessaires pour la convergence globale de solutions approchées.

Donc, une première piste de réflexion pour prolonger la solution obtenue dans ce travail et démontrer la convergence globale de solutions approchée est d'utiliser de nouvelles techniques (naturellement avec les modifications nécessaires) qui nous permettent de surmonter les difficultés comme le problème de changement de la courbe et la croissance non linéaire de la solution (à cause de la bilinéarité du terme de coagulation).

Chapitre 3

Convergence de solutions approchées de l'équation de coagulation-fragmentation et de chute des gouttelettes de type rayon positif

Sommaire

Dans le présent chapitre, nous introduisons l'opérateur de coagulation qui représentent la coagulation produite dans une collision de gouttelettes ayant le rayon strictement positive et un opérateur de fragmentation analogue. L'introduction de ces opérateurs a l'effet de régulariser la solution, ce qui nous permet d'obtenir des estimations utiles pour surmonter les difficultés rencontrées dans l'étude de l'équation de coagulation et de fragmentation des gouttelettes en chute (2.1.2). En construisant les solutions approchées par la troncature des coefficients de coagulation et de fragmentation, nous démontrons la convergence dans une certaine topologie d'une suite de solutions approchées, dont la limite est une fonction localement bornée.

3.1 Position du problème

Nous allons considérer le domaine en une dimension verticale

$$\Pi =]-A, 0[, \tag{3.1.1}$$

où A est un nombre strictement positif. Désignons par $\sigma(m, z, t)$ la densité de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m (densité dans le sens de la masse dans l'unité de volume de l'air dans lequel les gouttelettes se trouvent) à la position $z \in \Pi$ et à l'instant $t \geq 0$.

Introduisons les opérateurs de coagulation et de fragmentation approchés par l'amplification de la position (ou la régularisation par rapport à la variable $z \in \Pi$) de la fonction $\sigma(m, z, t)$. Plus précisément, on pose

$$\eta_\varepsilon(z) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{e^{1-(z/\varepsilon)^2}}}{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{e^{1-(z'/\varepsilon)^2}} dz'} & \text{pour } \; -\varepsilon < z < \varepsilon, \\ 0 & \text{pour } \; |z| \geq \varepsilon, \end{cases} \tag{3.1.2}$$

$$\sigma^\varepsilon(m, z, t) = \int_\Pi \eta_\varepsilon(z - z')\sigma(m, z', t)dz', \tag{3.1.3}$$

où ε est un nombre strictement positif fixé. Nous précisons que l'intégrale du second membre de (3.1.3) est définie par rapport à $z' \in \Pi$ de sorte que pour $-\varepsilon < z < 0$ et pour $-A < z < -A + \varepsilon$ on a

$$\sigma^\varepsilon(m, z, t) = \int_{z-\varepsilon}^{0} \eta_\varepsilon(z - z')\sigma(m, z', t)dz'$$

et

$$\sigma^\varepsilon(m,z,t) = \int\limits_{-A}^{-A+\varepsilon} \eta_\varepsilon(z-z')\sigma(m,z',t)dz'$$

respectivement, même si $\eta_\varepsilon(z-z') > 0$ pour certains $0 < z'$ ou $z' < -A$. L'introduction de σ^ε est motivée par son comportement similaire aux gouttelettes avec le rayon strictement positif dans leur coagulation.

Nous définissons les opérateurs de coagulation et de fragmentation relatifs à σ^ε par les relations

$$K_{t,z}[\sigma^\varepsilon,\sigma^\varepsilon](m) = \frac{m}{2}\int\limits_0^m \beta(m-m',m')\sigma^\varepsilon(m-m',z,t)\sigma^\varepsilon(m',z,t)dm'+ \tag{3.1.4}$$

$$-m\int\limits_0^\infty \beta(m,m')\sigma^\varepsilon(m,z,t)\sigma^\varepsilon(m',z,t)dm',$$

$$L_{t,z}[\sigma^\varepsilon](m) = -\frac{m}{2}\int\limits_0^m \vartheta(m-m',m')\sigma^\varepsilon(m,z,t)dm'+ \tag{3.1.5}$$

$$+m\int\limits_0^\infty \vartheta(m,m')\sigma^\varepsilon(m+m',z,t)dm'.$$

Cela étant, l'équation que nous allons étudier s'écrit

$$\partial_t\sigma(m,z,t) + \partial_z(\sigma(m,z,t)u(m)) = K_{t,z}[\sigma^\varepsilon,\sigma^\varepsilon](m) + L_{t,z}[\sigma^\varepsilon](m). \tag{3.1.6}$$

L'équation (3.1.6) doit être considérée pour $(m,z,t) \in \mathbb{R}_+ \times \Pi \times \mathbb{R}_+$ avec la condition initiale

$$\sigma(m,z,0) = \overline{\sigma}_0^*(m,z) \tag{3.1.7}$$

et la condition d'entrée

$$\sigma(m,0,t) = \overline{\sigma}_1^*(m,t). \tag{3.1.8}$$

On suppose que

$$\overline{\sigma}_0^*(\cdot,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+\times\Pi), \qquad \overline{\sigma}_1^*(\cdot,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+), \qquad \overline{\sigma}_0^*(m,z) \geq 0, \qquad \overline{\sigma}_1^*(m,t) \geq 0. \tag{3.1.9}$$

Pour les fonctions $\beta(m_1, m_2)$ et $\vartheta(m_1, m_2)$, conformément à leur nature physique, nous supposons que

$$\beta(m_1, m_2) \geq 0, \qquad \beta(m_1, m_2) = \beta(m_2, m_1) \ \forall (m_1, m_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \tag{3.1.10}$$

$$\vartheta(m_1, m_2) \geq 0, \qquad \vartheta(m_1, m_2) = \vartheta(m_2, m_1) \ \forall (m_1, m_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+. \tag{3.1.11}$$

$$\int_0^m m'\vartheta(m - m', m')dm' \leq 1 \qquad \forall m > 0. \tag{3.1.12}$$

La nature des relations (3.1.10) et (3.1.11) est claire, tandis que l'inégalité (3.1.12) (qui est équivalente à la seconde inégalité de (H_2) de [25]) signifie que la somme de masse des gouttelettes produites par les possibles fragmentations ne dépasse pas la masse de la gouttelette qui éventuellement se fragmente.

Dans le présent travail, nous supposons en outre que

$$\beta(\cdot, \cdot) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+), \qquad \vartheta(\cdot, \cdot) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+), \tag{3.1.13}$$

$$\sup_{m,m'} \vartheta(m, m') \leq C_0, \tag{3.1.14}$$

$$(\overline{m} - m')\beta(\overline{m} - m', m') \leq \overline{m}\beta(\overline{m}, m') \qquad \text{pour} \ \ 0 < m' < \overline{m}, \tag{3.1.15}$$

qu'il existe des constantes α, μ, γ, r_0, K_c et K_f telles que

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1, \quad \mu > 0, \quad 2\alpha - 1 < \gamma < 1, \quad r_0 \geq 2,$$

$$\beta(m, m') \leq K_c(mm')^{\alpha - 1}, \tag{3.1.16}$$

$$\int_0^{\frac{r}{2}} m^{\mu+1}\vartheta(m, r - m)dm \geq K_f r^{\gamma+\mu} \qquad \forall r \geq r_0, \tag{3.1.17}$$

et que pour chaque $\widetilde{m}^*$ il existe une constante $C(\widetilde{m}^*)$ dépendante de $\widetilde{m}^*$ (croissante comme fonction de $\widetilde{m}^*$) telle que

$$\sup_{0 < m, m' \leq \widetilde{m}^*} \frac{m}{m'^{\mu}}\beta(m, m') \leq C(\widetilde{m}^*). \tag{3.1.18}$$

Pour la vitesse des gouttelettes $u(m)$ nous supposons que

$$u(m) < 0 \qquad \forall m > 0. \tag{3.1.19}$$

3.2 Préliminaires

Maintenant nous introduisons le changement de variables ; nous transformons (m, z, t) en (μ, q, τ) par les relations

$$\mu = m, \quad q = z - u(m)t, \quad \tau = t. \tag{3.2.20}$$

Ce changement de variables transforme le domaine $(m, z, t) \in \mathbb{R}_+ \times \Pi \times \mathbb{R}_+$ en $\{\, (\mu, q, \tau) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \,|\, -A - \tau u(\mu) < q < -\tau u(\mu) \,\}$. Mais il nous sera commode de prolonger le domaine en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire nous allons considérer aussi les points (μ, q, τ) tels que $q \leq -A - \tau u(\mu)$ ou $q \geq -\tau u(\mu)$, en prolongeant par 0 la fonction $\sigma(\mu, q, \tau)$ (et aussi $\sigma^\varepsilon(\mu, q, \tau)$) pour $q \leq -A - \tau u(\mu)$ et pour $q \geq -\tau u(\mu)$.

Remarquons que dans les nouvelles coordonnées (μ, q, τ) le point $z \in \Pi$ à l'instant t, point dans lequel la coagulation et la fragmentation peuvent se produire, se transforme en une courbe

$$\gamma_z = \{\, q = q_z(\mu') \,|\, \mu' \in \mathbb{R}_+ \,\}, \qquad q_z(\mu') = z - u(\mu')\tau.$$

Rappelons aussi les relations entre les dérivées

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - u(m)\frac{\partial}{\partial q}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial q}, \qquad \frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial \mu}. \tag{3.2.21}$$

Cela étant, comme nous allons étudier l'équation (3.1.6) dans les coordonnées (μ, q, τ), pour simplifier la notation, nous écrivons m au lieu de μ et t au lieu de τ, c'est-à-dire nous utilisons le changement de variables

$$m = m, \quad q = z - u(m)t, \quad t = t, \tag{3.2.22}$$

avec les relations (3.2.21) réécrites avec (m, q, t).

On remarque que dans les coordonnées (m, q, t) les opérateurs $K_{t,z}[\sigma^\varepsilon, \sigma^\varepsilon](m)$ et $L_{t,z}[\sigma^\varepsilon](m)$ doivent avoir la forme

$$K_{t,z}[\sigma^\varepsilon, \sigma^\varepsilon](m) = K_{t,z}[\sigma^\varepsilon, \sigma^\varepsilon](m, q) = \tag{3.2.23}$$

$$= \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma^\varepsilon(m-m',q_z(m-m'),t)\sigma^\varepsilon(m',q_z(m'),t)dm'+$$

$$-m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma^\varepsilon(m,q_z(m),t)\sigma^\varepsilon(m',q_z(m'),t)dm' \equiv$$

$$\equiv K_{t,z}[\sigma^\varepsilon(\cdot,q_z,t),\sigma^\varepsilon(\cdot,q_z,t)](m),$$

$$L_{t,z}[\sigma^\varepsilon](m) = L_{t,z}[\sigma^\varepsilon](m,q) = \tag{3.2.24}$$

$$= -\frac{m}{2}\int_0^m \vartheta(m-m',m')\sigma^\varepsilon(m,q_z(m),t)dm'+$$

$$+m\int_0^\infty \vartheta(m,m')\sigma^\varepsilon(m+m',q_z(m+m'),t)dm' \equiv L_{t,z}[\sigma^\varepsilon(\cdot,q_z,t)](m)$$

où

$$q_z(m') = q + (u(m)-u(m'))t. \tag{3.2.25}$$

Il est utile de remarquer que $q_z(m) = q$,

$$q_z(m-m') = q + (u(m)-u(m-m'))t.$$

Quant à la condition d'entrée (3.1.8), pour que nous puissions formuler l'équation dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, nous allons l'écrire dans la forme du terme additif

$$\overline{\sigma}_1^*(m,t)\delta_{-\frac{q}{u(m)}}(t)$$

au deuxième membre de l'équation ; ici $\delta_{-\frac{q}{u(m)}}(t)$ désigne le δ de Dirac translaté à $t = -\frac{q}{u(m)}$. Il est clair que l'écriture avec δ de Dirac est une convention d'écriture dans une forme différentielle dont le sens exact doit être conçu dans la forme intégrale ; nous allons utiliser cette convention aussi dans la suite. D'autre part, nous traduisons le fait que nous ne considérons pas $\sigma(m,q,t)$ pour $q \leq -A - u(m)t$ comme la sortie des gouttelettes de Π représentée par le terme additif

$$-\sigma(m,q,t)\delta_{-\frac{q+A}{u(m)}}(t).$$

Concernant la condition initiale, en prolongeant $\overline{\sigma}_0^*(m,z)$ par 0 en dehors de Π, on considère la condition

$$\sigma(m,q,0)=\overline{\sigma}_0^*(m,q) \qquad \text{pour } (m,q)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R} \tag{3.2.26}$$

(on rappelle que pour $t=0$ on a $q=z$).

Avec les informations mentionnées ci-dessus, dans la suite nous allons étudier, au lieu de l'équation (3.1.6), l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma(m,q,t)=K_{t,z}[\sigma^\varepsilon(\cdot,q_z,t),\sigma^\varepsilon(\cdot,q_z,t)](m)+L_{t,z}[\sigma^\varepsilon(\cdot,q_z,t)](m)+ \tag{3.2.27}$$
$$+\overline{\sigma}_1^*(m,t)\delta_{-\frac{q}{u(m)}}(t)-\sigma(m,q,t)\delta_{-\frac{q+A}{u(m)}}(t), \quad \text{pour } (m,q,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,$$

qui doit être envisagée avec la condition initiale (3.2.26).

On rappelle une conséquence du changement de variables.

Lemme 3.2.1. *Pour $\sigma(\cdot,\cdot,t)\in L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$, $t\in\mathbb{R}_+$, vérifiant la relation $\sigma(m,q,t)=0$ pour $q\le -A-tu(m)$ et pour $q\ge -tu(m)$, on a*

$$\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}\sigma(m,q,t)dmdq=\int\limits_{-A}^{0}dz\int\limits_{0}^{\infty}\sigma(m,q_z(m),t)dm.$$

Démonstration. Comme $q_z(m)=q=z-u(m)t$ (voir (3.2.22) et (3.2.25)) et que $\sigma(m,q,t)=0$ pour $q\le -A-tu(m)$ et pour $q\ge -tu(m)$, on a

$$\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}\sigma(m,q,t)dmdq=\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-A}^{0}\sigma(m,q_z(m),t)\frac{dq}{dz}dzdm=\int\limits_{-A}^{0}\int\limits_{0}^{\infty}\sigma(m,q_z(m),t)dmdz.$$

Le lemme est démontré. □

3.3 Position des problèmes approchés

On va introduire une famille de problèmes approchés. Plus précisément, définissons les fonctions $\beta_n(m,m')$ et $\vartheta_n(m,m')$ par

$$\begin{cases}\beta_n(m,m')=\beta(m,m')\psi^1(m+m'-n),\\ \vartheta_n(m,m')=\vartheta(m,m')\psi^1(m+m'-n),\end{cases} \tag{3.3.28}$$

où $\psi^1(m)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$, décroissante et telle que

$$\psi^1(r) = \begin{cases} 1 & \text{pour } r \leq 0, \\ 0 & \text{pour } r \geq 1. \end{cases} \tag{3.3.29}$$

En remplaçant $\beta(m, m')$ par $\beta_n(m, m')$ et $\vartheta(m, m')$ par $\vartheta_n(m, m')$ dans l'équation (3.2.27) et en désignant la fonction inconnue par σ_n au lieu de σ, on considère l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_n(m, q, t) = \overline{\sigma}^*_{1n}(m, t)\delta_{-\frac{q}{u(m)}}(t) - \sigma_n(m, q, t)\delta_{-\frac{q+A}{u(m)}}(t) + \tag{3.3.30}$$
$$+ K^{[n]}_{t,z}[\sigma^\varepsilon_n(\cdot, q_z, t), \sigma^\varepsilon_n(\cdot, q_z, t)](m) + L^{[n]}_{t,z}[\sigma^\varepsilon_n(\cdot, q_z, t)](m),$$

où $K^{[n]}_{t,z}[\cdot,\cdot]$ et $L^{[n]}_{t,z}[\cdot]$ sont définis comme dans la définition (3.2.23)-(3.2.24) de $K_{t,z}[\cdot,\cdot]$ et $L_{t,z}[\cdot]$ avec le remplacement de $\beta(\cdot,\cdot)$ et $\vartheta(\cdot,\cdot)$ par $\beta_n(\cdot,\cdot)$ et $\vartheta_n(\cdot,\cdot)$, et σ^ε_n est définie comme dans (3.1.3) à partir de σ_n. Pour la condition initiale (3.2.26) et la condition d'entrée, nous posons

$$\sigma_n(m, q, 0) = \overline{\sigma}^*_0(m, q)\psi^1(m + m' - n), \tag{3.3.31}$$

$$\overline{\sigma}^*_{1n}(m, t)\delta_{-\frac{q}{u(m)}}(t) = \overline{\sigma}^*_1(m, t)\delta_{-\frac{q}{u(m)}}(t)\psi^1(m + m' - n). \tag{3.3.32}$$

On rappelle d'abord que les opérateurs $K^{[n]}_{t,z}$ et $L^{[n]}_{t,z}$ conservent la masse.

Lemme 3.3.1. *Quel que soit $\sigma(\cdot, q_z(\cdot), t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$, on a*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} K^{[n]}_{t,z}[\sigma(\cdot, q_z(\cdot), t), \sigma(\cdot, q_z(\cdot), t)](m)dm = 0, \tag{3.3.33}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} L^{[n]}_{t,z}[\sigma(\cdot, q_z(\cdot), t)](m)dm = 0. \tag{3.3.34}$$

Démonstration. Comme $K^{[n]}_{t,z}[\cdot,\cdot]$ et $L^{[n]}_{t,z}[\cdot]$ ne sont que les cas particuliers de $K_{t,z}[\cdot,\cdot]$ et $L_{t,z}[\cdot]$ dans lesquels $\beta(\cdot,\cdot)$ et $\vartheta(\cdot,\cdot)$ ont la forme $\beta_n(\cdot,\cdot)$ et $\vartheta_n(\cdot,\cdot)$, les égalités (3.3.33) et (3.3.34) sont des résultats classiques bien connus (pour l'expression explicite de la démonstration de (3.3.33), voir [4], [27] ; l'égalité (3.3.34) se démontre de manière analogue). □

De ce lemme résulte immédiatement la propriété suivante.

Lemme 3.3.2. *Soit* $\overline{\sigma}_0^*(\cdot,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ *avec* $\overline{\sigma}_0^*(\cdot,\cdot) \geq 0$. *Si* $\sigma_n(\cdot,\cdot,t)$ *est la solution de l'équation* (3.3.30) *avec la condition initiale* (3.3.31)*, alors on a*

$$\|\sigma_n(\cdot,\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} = \Sigma_0(t) - \int\limits_{\mathbb{R}_+} \int\limits_{-A}^{-A-tu(m)} \sigma_n(m,q,-\frac{q+A}{u(m)})dqdm, \tag{3.3.35}$$

où

$$\Sigma_0(t) = \|\overline{\sigma}_0^*(\cdot,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} + \int\limits_{\mathbb{R}_+} \int\limits_{0}^{-tu(m)} \overline{\sigma}_{1n}^*(m,-\frac{q}{u(m)})dqdm. \tag{3.3.36}$$

Démonstration. On considère l'équation (3.3.30) exprimée sous forme intégrale. En l'intégrant sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ par rapport à q et m et en utilisant les lemmes 3.2.1 et 3.3.1, on obtient (3.3.35). □

Lemme 3.3.3. *Si* $\sigma_n(\cdot,\cdot,t)$ *est la solution de l'équation* (3.3.30) *avec la condition initiale* (3.3.31) *et si* σ_n^ε *est définie de la même manière que* (3.1.3)*, alors on a*

$$\sup_{-A\leq z\leq 0} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \sigma_n^\varepsilon(m,q_z(m),t)dm \leq K(t) < \infty. \tag{3.3.37}$$

où

$$K(t) = \eta_\varepsilon(0)\Sigma_0(t)$$

($\eta_\varepsilon(\cdot)$ *et* $\Sigma_0(t)$ *sont définis dans* (3.1.2) *et* (3.3.36) *respectivement).*

Démonstration. D'après (3.1.3), on a (en posant $z_q = q + u(m)t$)

$$\sigma_n^\varepsilon(m,q,t) = \int\limits_{-A}^{0} \eta_\varepsilon(z_q - z')\sigma_n(m,q_{z'}(m),t)dz' \leq \sup_{\zeta'\in\mathbb{R}} \eta_\varepsilon(\zeta') \int\limits_{\mathbb{R}} \sigma_n(m,q',t)dq'.$$

Par conséquent, compte tenu aussi de (3.1.2), on a

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \sigma_n^\varepsilon(m,q,t)dm \leq \eta_\varepsilon(0)\|\sigma_n(\cdot,\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})},$$

ce qui, en vertu de (3.3.35), entraîne (3.3.37). □

3.4 Existence et unicité de la solution du problème approché

Maintenant on va montrer l'existence et l'unicité de la solution σ_n du problème approché.

Proposition 3.4.1. *L'équation* (3.3.30) *avec la condition* (3.3.31) *admet une solution* $\sigma_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}))$ *et une seule. En outre, on a*

$$\sigma_n(m,q) = 0 \qquad \textit{pour} \;\; m \geq n+1. \tag{3.4.38}$$

Démonstration. On rappelle d'abord que la condition (3.1.9) avec le prolongement de $\overline{\sigma}_0^*(\cdot,\cdot)$ par 0 en dehors de Π implique que $\overline{\sigma}_0^*(\cdot,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et que $\overline{\sigma}_0^*(m,q) \geq 0$ pour tout $(m,q) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Pour résoudre le problème (3.3.30)-(3.3.31), on considère (3.3.30) comme une équation différentielle ordinaire à valeurs dans l'espace de Banach $L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$

$$\frac{d}{dt}\sigma_n(t) = F^{[n]}[\sigma_n^\varepsilon(t)] + \Delta_1(t) - \Delta_2(t), \tag{3.4.39}$$

où

$$F^{[n]}[\sigma_n^\varepsilon(t)](m,q) = K_{t,z}^{[n]}[\sigma_n^\varepsilon(\cdot,q_z,t),\sigma_n^\varepsilon(\cdot,q_z,t)](m) + L_{t,z}^{[n]}[\sigma_n^\varepsilon(\cdot,q_z,t)](m),$$

$$\Delta_1(t)(m,q) = \overline{\sigma}_{1n}^*(m,t)\delta_{-\frac{q}{u(m)}}(t),$$

$$\Delta_2(t)(m,q) = \sigma_n(m,q,t)\delta_{-\frac{q+A}{u(m)}}(t).$$

On remarque que, d'après la définition de β_n, il existe une constantes $c_0(n)$, dépendante de n telle que l'inégalité

$$\frac{m}{2}\beta_n(m-m',m') \leq c_0(n), \qquad \forall m \in \mathbb{R}_+, \forall m' \in]0,m[\,,$$

soit vérifiée.

Pour examiner la condition de Lipschitz, nous considérons deux fonctions $\sigma^{[1]}(m,q_z(m))$ et $\sigma^{[2]}(m,q_z(m))$ comme fonction de (m,q) dans un ensemble bornée de $L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$.

Comme la définition de $q_z(m)$ (voir (3.2.25)) contient implicitement t, à titre provisoire fixons t. En outre, de manière analogue (voir (3.1.3)), nous définissons la fonction $\sigma^{\varepsilon[i]}$ à partir de $\sigma^{[i]}$ $(i = 1, 2)$; d'après la définition (3.1.3) on a $\sigma^{\varepsilon[i]} \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et

$$\sup_{-A \le z \le 0} \int_{\mathbb{R}_+} \sigma^\varepsilon(m, q_z(m))dm \le K < \infty, \;\; i = 1, 2 \tag{3.4.40}$$

(K dépend de l'ensemble borné considéré). Alors on a, à l'aide du lemme 3.2.1,

$$\|K_{t,z}^{[n]}[\sigma^{\varepsilon[1]}(\cdot, q_z), \sigma^{\varepsilon[1]}(\cdot, q_z)] - K_{t,z}^{[n]}[\sigma^{\varepsilon[2]}(\cdot, q_z), \sigma^{\varepsilon[2]}(\cdot, q_z)]\|_{L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})} \le$$

$$\le c_0(n) \int\limits_{-A}^{0} dz \int\limits_0^\infty \int\limits_0^m \Big|\sigma^{\varepsilon[1]}(m', q_z(m'))\Big| \times$$

$$\times \Big|\sigma^{\varepsilon[1]}(m - m', q_z(m - m')) - \sigma^{\varepsilon[2]}(m - m', q_z(m - m'))\Big| dm'dm +$$

$$+ c_0(n) \int\limits_{-A}^{0} dz \int\limits_0^\infty \int\limits_0^m \Big|\sigma^{\varepsilon[2]}(m - m', q_z(m - m'))\Big| \Big|\sigma^{\varepsilon[1]}(m', q_z(m')) - \sigma^{\varepsilon[2]}(m', q_z(m'))\Big| dm'dm +$$

$$+ c_0(n) \int\limits_{-A}^{0} dz \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Big|\sigma^{\varepsilon[1]}(m, q_z(m))\Big| \Big|\sigma^{\varepsilon[1]}(m', q_z(m')) - \sigma^{\varepsilon[2]}(m', q_z(m'))\Big| dm'dm +$$

$$+ c_0(n) \int\limits_{-A}^{0} dz \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Big|\sigma^{\varepsilon[2]}(m', q_z(m'))\Big| \Big|\sigma^{\varepsilon[1]}(m, q_z(m)) - \sigma^{\varepsilon[2]}(m, q_z(m))\Big| dm'dm.$$

En ce qui concerne le terme de fragmentation (voir la définition (3.2.24)), on remarque qu'avec le changement de variables $m'' = m + m'$, on a

$$\int\limits_{-A}^{0} dz \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty m\vartheta(m, m')\sigma^\varepsilon(m + m', q_z(m + m'))dm'dm =$$

$$= \int\limits_{-A}^{0} dz \int\limits_0^\infty \int\limits_0^m (m - m')\vartheta(m - m', m')\sigma^\varepsilon(m, q_z(m))dm'dm,$$

donc compte tenu de la condition (3.1.12), on déduit que

$$\|L_{t,z}^{[n]}[\sigma^{\varepsilon[1]}(\cdot, q_z)] - L_{t,z}^{[n]}[\sigma^{\varepsilon[2]}(\cdot, q_z)]\|_{L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})} \le$$

$$\le 2 \int\limits_{-A}^{0} dz \int\limits_0^\infty \Big|\sigma^{\varepsilon[1]}(m, q_z(m)) - \sigma^{\varepsilon[2]}(m, q_z(m))\Big| dm.$$

En vertu de l'inégalité (3.4.40) et de l'inégalité

$$\|\sigma^{\varepsilon[1]} - \sigma^{\varepsilon[2]}\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq \|\sigma^{[1]} - \sigma^{[2]}\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})},$$

on déduit que

$$\|K^{[n]}_{t,z}[\sigma^{\varepsilon[1]}(\cdot,q_z),\sigma^{\varepsilon[1]}(\cdot,q_z)] - K^{[n]}_{t,z}[\sigma^{\varepsilon[2]}(\cdot,q_z),\sigma^{\varepsilon[2]}(\cdot,q_z)]\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq$$

$$\leq 4Kc_0(n)\|\sigma^{[1]} - \sigma^{[2]}_n\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})},$$

$$\|L^{[n]}_{t,z}[\sigma^{\varepsilon[1]}(\cdot,q_z)] - L^{[n]}_{t,z}[\sigma^{\varepsilon[2]}(\cdot,q_z)]\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq 2\|\sigma^{[1]} - \sigma^{[2]}\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}.$$

De ces inégalités on déduit que $F^{[n]}[\sigma^\varepsilon]$ vérifie localement la condition de Lipschitz dans la topologie de $L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ pour $t\in\mathbb{R}_+$ choisi.

La condition de Lipschitz locale pour chaque t fixé étant démontrée, en utilisant (3.3.37) et le raisonnement pour (3.4.40), on peut prolonger la solution (en répétant l'application de la condition de Lipschitz locale) pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire on a montré que l'équation (3.3.30) avec la condition (3.3.31) admet une solution $\sigma_n(\cdot,\cdot,t)\in L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$, $t\geq 0$, et une seule ; la continuité en t dans la topologie de $L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ résulte de (3.4.39).

A la fin, on remarque que, en vertu des conditions (3.3.28), (3.3.31), (3.3.32), pour $m\geq n+1$ l'équation (3.3.30) se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_n(m,q,t) = -\sigma_n(m,q,t)\delta_{-\frac{q+A}{u(m)}}(t),$$

ce qui nous donne (3.4.38). □

3.5 Estimation du "moment" μ des solutions approchées

Maintenant, en utilisant l'idée des travaux [1], [10], on va démontrer que le moment à l'ordre $\mu>0$ des solutions approchées est borné. On définit d'abord le moment à l'ordre

μ de $\sigma = \sigma(m, q_z, t)$ par

$$\int_{-A}^{0} \|\sigma_z(t)\|_\mu dz,$$

où

$$\|\sigma_z(t)\|_\mu = \|\sigma_z\|_\mu = \int_0^\infty m^\mu \sigma(m, q_z(m), t) dm \qquad (q_z(m) = z - u(m)t).$$

Avant de donner l'estimation du moment μ, nous allons rappeler quelques propriétés préliminaires. Soit $\sigma \in L^1(\mathbb{R}_+)$ telle que $\sigma(m) \geq 0$ pour tout $m \in \mathbb{R}_+$. Pour $\lambda \geq 0$, on définit

$$\|\sigma\|_\lambda = \int_0^\infty m^\lambda \sigma(m) dm.$$

Lemme 3.5.1. *Pour tout $\lambda < \beta < \delta$, on a*

$$\|\sigma\|_\beta^{\delta-\lambda} \leq \|\sigma\|_\lambda^{\delta-\beta} \|\sigma\|_\delta^{\beta-\lambda}. \tag{3.5.41}$$

Pour la démonstration, voir [9].

Lemme 3.5.2. *Soit $\nu \geq 1$.*

i) Il existe une constante $C_\nu > 0$ telle que

$$(m + m')[(m + m')^\nu - m^\nu - m'^\nu] \leq C_\nu (m^\nu m' + mm'^\nu), \tag{3.5.42}$$

ii) Pour $1 \leq m \leq \frac{r}{2}$, $\quad r \geq r_0 \geq 2$, on a

$$r^\nu - m^\nu - (r - m)^\nu \geq (2^\nu - 2) m^\nu. \tag{3.5.43}$$

Pour la démonstration, voir [8].

Lemme 3.5.3. *Soit σ_n la solution de l'équation (3.3.30) avec la condition (3.3.31). Alors on a*

$$\int_0^{n+1} m^\mu \frac{\partial}{\partial t} \sigma_n(m, q, t) dm = \frac{1}{2} \int_{m+m' \leq n+1} \Big((m + m')^{\mu+1} - m^{\mu+1} - m'^{\mu+1} \Big) \times \tag{3.5.44}$$

$$\times \Big(\beta_n(m, m') \sigma_n^\varepsilon(m, q_z(m), t) \sigma_n^\varepsilon(m', q_z(m'), t) - \vartheta_n(m, m') \sigma_n^\varepsilon(m+m', q_z(m+m'), t) \Big) dm' dm +$$

$$+ \int_0^{n+1} m^\mu \overline{\sigma}_{1n}^*(m, t) \delta_{-\frac{q}{u(m)}}(t) dm - \int_0^{n+1} m^\mu \sigma_n(m, q, t) \delta_{-\frac{q+A}{u(m)}}(t) dm.$$

Démonstration. On considère

$$\int_0^{n+1} m^\mu K_{t,z}^{[n]}[\sigma_n^\varepsilon(\cdot,q_z,t),\sigma_n^\varepsilon(\cdot,q_z,t)](m)dm + \int_0^{n+1} m^\mu L_{t,z}^{[n]}[\sigma_n^\varepsilon(\cdot,q_z,t)](m)dm = \tag{3.5.45}$$

$$= I_1 - I_2 - J_1 + J_2,$$

où

$$I_1 = \int_0^{n+1} m^\mu \frac{m}{2}\int_0^m \beta_n(m-m',m')\sigma_n^\varepsilon(m-m',q_z(m-m'),t)\sigma_n^\varepsilon(m',q_z(m'),t)dm'dm,$$

$$I_2 = \int_0^{n+1} m^\mu m \int_0^{n-m+1} \beta_n(m,m')\sigma_n^\varepsilon(m,q_z(m),t)\sigma_n^\varepsilon(m',q_z(m'),t)dm'dm,$$

$$J_1 = \int_0^{n+1} m^\mu \frac{m}{2}\int_0^m \vartheta_n(m-m',m')\sigma_n^\varepsilon(m,q,t)dm'dm,$$

$$J_2 = \int_0^{n+1} m^\mu m \int_0^{n-m+1} \vartheta_n(m,m')\sigma_n^\varepsilon(m+m',q_z(m+m'),t)dm'dm.$$

On remarque que, si on fait le changement de variables $m'' = m - m'$, I_1 et J_1 se transforment en

$$I_1 = \int_{0\le m'+m''\le n+1} (m'+m'')^\mu \frac{m'+m''}{2}\beta_n(m',m'')\sigma_n^\varepsilon(m',q_z(m'),t)\sigma_n^\varepsilon(m'',q_z(m''),t)dm'dm'',$$

$$J_1 = \int_{0\le m'+m''\le n+1} (m'+m'')^\mu \frac{m'+m''}{2}\vartheta_n(m',m'')\sigma_n^\varepsilon(m'+m'',q_z(m'+m''),t)dm'dm''.$$

En faisant la somme de $I_1 - I_2 - J_1 + J_2$ et en rappelant (3.5.45) et (3.3.30), on obtient (3.5.44). □

Lemme 3.5.4. *Il existe une fonction croissante $K_1(t)$ indépendante de n telle que pour tout $t > 0$ on ait*

$$\int_{-A}^0 \|\sigma_{n,z}(t)\|_\mu dz \le K_1(t). \tag{3.5.46}$$

Démonstration. Rappelons d'abord que, si les conditions (3.1.16) et (3.1.17) sont vérifiées, alors les relations (3.3.28) impliquent que

$$\beta_n(m, m') \leq K_c(mm')^{\alpha-1}, \tag{3.5.47}$$

$$\int_0^{\frac{r}{2}} m^{\mu+1}\vartheta_n(m, r-m)dm \geq K_f(r-1)^{\gamma+\mu} \qquad \forall r_0 \leq r \leq n+1. \tag{3.5.48}$$

D'après le lemme 3.5.3, on a

$$\frac{d}{dt}\int_{-A}^{0} \|\sigma_{n,z}\|_\mu dz = \int_{-A}^{0} \frac{1}{2} \int_{m+m'\leq n+1} (Q_1 - Q_2)dm'dmdz+ \tag{3.5.49}$$

$$+\int_0^{n+1}\int_0^{-tu(m)} m^\mu \overline{\sigma}_{1n}^*(m, -\frac{q}{u(m)})dqdm - \int_0^{n+1}\int_{-A}^{-A-tu(m)} m^\mu \sigma_n(m, q, -\frac{q+A}{u(m)})dqdm$$

où

$$Q_1 = \Big((m+m')^{\mu+1} - m^{\mu+1} - m'^{\mu+1}\Big)\beta_n(m, m')\sigma_n^\varepsilon(m, q_z(m), t)\sigma_n^\varepsilon(m', q_z(m'), t)$$

$$Q_2 = \Big((m+m')^{\mu+1} - m^{\mu+1} - m'^{\mu+1}\Big)\vartheta_n(m, m')\sigma_n^\varepsilon(m+m', q_z(m+m'), t).$$

On remarque que, en vertu de (3.5.42) et de (3.5.47), il existe une constante $\widetilde{C}$ telle que

$$\Big((m+m')^{\mu+1} - m^{\mu+1} - m'^{\mu+1}\Big)\beta_n(m, m') \leq \frac{\widetilde{C}}{2}\Big(m^{\mu+\alpha-1}m'^\alpha + m^\alpha m'^{\mu+\alpha-1}\Big).$$

Donc, compte tenu de la symétrie entre m et m' et de lemme 3.5.1, on a pour $\mu > \alpha$

$$\int_{-A}^{0} \frac{1}{2} \int_{m+m'\leq n+1} Q_1 dm'dmdz \leq \tag{3.5.50}$$

$$\leq \int_{-A}^{0} \widetilde{C} \int_{m+m'\leq n+1} m^{\mu+\alpha-1}m'^\alpha \sigma_n^\varepsilon(m, q_z(m), t)\sigma_n^\varepsilon(m', q_z(m'), t)dm'dmdz \leq$$

$$\leq \widetilde{C}\int_{-A}^{0} \|\sigma_{n,z}^\varepsilon\|_\alpha \|\sigma_{n,z}^\varepsilon\|_{\mu+\alpha-1}dz \leq C_1 \int_{-A}^{0} \|\sigma_{n,z}^\varepsilon\|_\mu^{\alpha_1}dz,$$

où $C_1 = \widetilde{C}\|\sigma_{n,z}^\varepsilon\|_0^{\frac{\mu-2\alpha}{\mu}}$, $\alpha_1 = 1 + \frac{2\alpha-1}{\mu}$ sont des constantes.

Passons maintenant à l'étude de Q_2. En utilisant les inégalités (3.5.43), (3.5.48) et le changement de variables $r = m + m'$ on a

$$\int_{-A}^{0} \frac{1}{2} \int_{m+m' \leq n+1} Q_2 dm' dm dz \geq$$

$$\geq \int_{-A}^{0} \frac{1}{2} \int_{2}^{n+1} \int_{0}^{r-m} \Big(r^{\mu+1} - m^{\mu+1} - (r-m)^{\mu+1} \Big) \vartheta_n(m, r-m) \sigma_n^{\varepsilon}(r, q_z(r), t)) dr dm dz$$

$$\geq \int_{-A}^{0} \frac{1}{2} \int_{2}^{n+1} \int_{0}^{\frac{r}{2}} (2^{\mu+1} - 2) m^{\mu+1} \vartheta_n(m, r-m) \sigma_n^{\varepsilon}(r, q_z(r), t) dr dm dz$$

$$\geq \int_{-A}^{0} (2^{\mu} - 1) K_f(\mu) \int_{2}^{n+1} (r-1)^{\gamma+\mu} \sigma_n^{\varepsilon}(r, q_z(r), t) dr dz$$

$$\geq \frac{(2^{\mu} - 1) K_f(\mu)}{2^{\gamma+\mu}} \Big[\int_{-A}^{0} \int_{0}^{n+1} r^{\gamma+\mu} \sigma_n^{\varepsilon}(r, q_z(r), t) dr dz - \int_{-A}^{0} \int_{0}^{2} r^{\gamma+\mu} \sigma_n^{\varepsilon}(r, q_z(r), t) dr dz \Big]$$

$$\geq \frac{(2^{\mu} - 1) K_f(\mu)}{2^{\gamma+\mu}} \Big[\int_{-A}^{0} \|\sigma_{n,z}^{\varepsilon}\|_{\gamma+\mu} dz - 2^{\gamma+\mu} K(t) A \Big] =$$

$$= \frac{(2^{\mu} - 1) K_f(\mu)}{2^{\gamma+\mu} \overline{C}} \int_{-A}^{0} \|\sigma_{n,z}^{\varepsilon}\|_{\gamma+\mu} \overline{C} dz - (2^{\mu} - 1) K_f(\mu) K(t) A.$$

Donc, compte tenu du lemme 3.5.1, on a

$$\int_{-A}^{0} \frac{1}{2} \int_{m+m' \leq n+1} Q_2 dm' dm dz \geq C_3 \int_{-A}^{0} \|\sigma_{n,z}^{\varepsilon}\|_{\mu}^{\alpha_2} dz - C_2, \tag{3.5.51}$$

où $C_3 = \frac{(2^{\mu}-1) K_f(\mu)}{2^{\gamma+\mu} \overline{C}}$, $\alpha_2 = 1 + \frac{\gamma}{\mu}$ et $C_2 = (2^{\mu} - 1) K_f(\mu) K(t) A$.

En substituant (3.5.50) et (3.5.51) dans (3.5.49), on obtient pour $\mu > \alpha$

$$\frac{d}{dt} \int_{-A}^{0} \|\sigma_{n,z}\|_{\mu} dz \leq C_1 \int_{-A}^{0} \|\sigma_{n,z}^{\varepsilon}\|_{\mu}^{\alpha_1} dz - C_3 \int_{-A}^{0} \|\sigma_{n,z}^{\varepsilon}\|_{\mu}^{\alpha_2} dz + C_2 \tag{3.5.52}$$

$$+ \int_{0}^{n+1} \int_{0}^{-tu(m)} m^{\mu} \overline{\sigma}_{1n}^{*}(m, -\frac{q}{u(m)}) dq dm - \int_{0}^{n+1} \int_{-A}^{-A-tu(m)} m^{\mu} \sigma_n(m, q, -\frac{q+A}{u(m)}) dq dm.$$

Comme $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, on a

$$\int_{-A}^{0} \|\sigma^{\varepsilon}_{n,z}\|^{\alpha_1}_{\mu} dz \leq (\int_{-A}^{0} (\|\sigma^{\varepsilon}_{n,z}\|^{\alpha_1}_{\mu})^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} dz)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} (\int_{-A}^{0} 1dz)^{\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}} = A^{\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}} (\int_{-A}^{0} \|\sigma^{\varepsilon}_{n,z}\|^{\alpha_2}_{\mu} dz)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$$

ou

$$(\int_{-A}^{0} \|\sigma^{\varepsilon}_{n,z}\|^{\alpha_1}_{\mu} dz)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \leq A^{\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1}} \int_{-A}^{0} \|\sigma^{\varepsilon}_{n,z}\|^{\alpha_2}_{\mu} dz.$$

Par conséquent, on a

$$\frac{d}{dt} \int_{-A}^{0} \|\sigma_{n,z}\|_{\mu} dz \leq C_1 \int_{-A}^{0} \|\sigma^{\varepsilon}_{n,z}\|^{\alpha_1}_{\mu} dz - \frac{C_3}{A^{\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1}}} (\int_{-A}^{0} \|\sigma^{\varepsilon}_{n,z}\|^{\alpha_1}_{\mu} dz)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} + C_2 + \tag{3.5.53}$$

$$+ \int_{0}^{n+1} \int_{0}^{-tu(m)} m^{\mu} \overline{\sigma}^{*}_{1n}(m, -\frac{q}{u(m)}) dq dm - \int_{0}^{n+1} \int_{-A}^{-A-tu(m)} m^{\mu} \sigma_n(m, q, -\frac{q+A}{u(m)}) dq dm.$$

On remarque que $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} > 1$ et que donc

$$\sup_{r>0} \left[C_1 r - \frac{C_3}{A^{\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1}}} r^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \right] \equiv C_4 < \infty.$$

Donc, si on pose

$$K_1(t) = \int_{-A}^{0} \|\sigma_{n,z}(0)\|_{\mu} dz + \int_{0}^{t} [G(t') + C_4] dt' \tag{3.5.54}$$

avec

$$G(t) = C_2 + \int_{0}^{n+1} \int_{0}^{-tu(m)} m^{\mu} \overline{\sigma}^{*}_{1n}(m, -\frac{q}{u(m)}) dq dm,$$

alors de l'inégalité (3.5.53) on déduit immédiatement que la fonction $K_1(t)$ vérifie l'inégalité (3.5.46). □

Du lemme 3.3.3 et lemme 3.5.4 résulte immédiatement le lemme suivant

Lemme 3.5.5. *Si $\sigma_n(\cdot, \cdot, t)$ est la solution de l'équation* (3.3.30) *avec la condition initiale* (3.3.31) *et si σ^{ε}_n est définie de la même manière que* (3.1.3)*, alors on a*

$$\sup_{-A \leq z \leq 0} \int_{\mathbb{R}_+} m^{\mu} \sigma^{\varepsilon}_n(m, q_z(m), t) dm \leq K_0(t) < \infty, \tag{3.5.55}$$

où

$$K_0(t) = \eta_\varepsilon(0) \int_{-A}^{0} \|\sigma_{n,z}(t)\|_\mu dz = \eta_\varepsilon(0) K_1(t).$$

($\eta_\varepsilon(\cdot)$ et $K_1(t)$ sont définis dans (3.1.2) et (3.5.54) respectivement).

Démonstration. Le lemme se démontre de manière analogue au lemme 3.3.3. Plus précisément, il suffit de multiplier (3.1.3) par m^μ et de l'intégrer sur $\mathbb{R}_+$ par rapport à m, de sorte que, en utilisant le lemme 3.5.4, on obtient (3.5.55). □

3.6 Estimation des solutions approchées dans L^∞

Pour estimer les solutions approchées dans la norme de $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, nous adoptons l'idée du principe du maximum utilisé par Galkin [19] et Dubovskii [13], en le généralisant légèrement. On a le lemme suivant.

Lemme 3.6.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $u(x,t)$ une fonction non négative, continue dans $\Omega \times [0,t_1]$ et admettant la dérivée partielle $\partial_t u(x,t)$ pour tout $(x,t) \in \Omega\times]0,t_1[$. On suppose que pour tout $t \in [0,t_1]$ il existe au moins un point $\overline{x} \in \Omega$ tel que*

$$u(\overline{x},t) \geq u(x,t) \qquad \forall x \in \Omega, \tag{3.6.56}$$

et que, pour tout $t \in [0,t_1]$, au point $\overline{x}$ on a

$$\partial_t u(\overline{x},t) \leq b(t) + ku(\overline{x},t) \qquad (b(t) \geq 0). \tag{3.6.57}$$

Alors on a

$$u(x,t) \leq a\exp(kt) + \int_0^t b(s)\exp k(t-s)ds \equiv A(t) \qquad \forall (x,t) \in \Omega\times\,]0,t_1[\,, \tag{3.6.58}$$

où

$$a = \max_{x\in\Omega} u(x,0).$$

Démonstration. On utilise l'idée de Galkin, qui démontre le lemme dans le cas où $b(t) = 0$ et $k = 0$.

On va démontrer (3.6.58) par absurde. Pour cela, pour chaque $\varepsilon > 0$ on pose

$$a_\varepsilon = \max_{x\in\Omega} u(x,0) + \varepsilon = a + \varepsilon,$$

$$A_\varepsilon(t) = a_\varepsilon \exp((k+\varepsilon)t) + \int_0^t b(s)\exp((k+\varepsilon)(t-s))ds,$$

$$U_\varepsilon(x,t) = \frac{u(x,t)}{A_\varepsilon(t)}.$$

On suppose qu'il existe un $(x,t) \in \Omega \times [0,t_1]$ tel que $u(x,t) > A_\varepsilon(t)$. Alors il existerait un $\widetilde{t} \in [0,t_1]$ tel que

$$\widetilde{t} = \min\{t > 0 \mid \max_{x\in\Omega} U_\varepsilon(x,t) \geq 1\}. \tag{3.6.59}$$

D'après notre hypothèse (voir (3.6.56)) il existerait un point $\overline{x} \in \Omega$ tel que

$$u(\overline{x},\widetilde{t}) \geq u(x,\widetilde{t}), \qquad \forall x \in \Omega.$$

On a évidemment

$$U_\varepsilon(\overline{x},\widetilde{t}) \geq U_\varepsilon(x,\widetilde{t}) \qquad \forall x \in \Omega.$$

De la définition de $U_\varepsilon(\overline{x},\widetilde{t})$, de A_ε et de l'hypothèse (3.6.57) on a

$$\partial_t U_\varepsilon(\overline{x},\widetilde{t}) = \frac{1}{(A_\varepsilon(\widetilde{t}))^2}\Big[\partial_{\widetilde{t}} u(\overline{x},\widetilde{t})A_\varepsilon(\widetilde{t}) - u(\overline{x},\widetilde{t})\partial_{\widetilde{t}} A_\varepsilon(\widetilde{t})\Big] \leq$$

$$\leq \frac{1}{(A_\varepsilon(\widetilde{t}))^2}[(b(\widetilde{t}) + ku(\overline{x},\widetilde{t}))A_\varepsilon(\widetilde{t}) - u(\overline{x},\widetilde{t})((k+\varepsilon)A_\varepsilon(\widetilde{t}) + b(\widetilde{t}))].$$

Comme $U_\varepsilon(\overline{x},\widetilde{t}) = \frac{u(\overline{x},\widetilde{t})}{A_\varepsilon(\widetilde{t})} = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\partial_t U_\varepsilon(\overline{x},\widetilde{t}) \leq& \frac{1}{(A_\varepsilon(\widetilde{t}))^2}[b(\widetilde{t})A_\varepsilon(\widetilde{t}) + ku(\overline{x},\widetilde{t})A_\varepsilon(\widetilde{t}) - ku(\overline{x},\widetilde{t})A_\varepsilon(\widetilde{t}) + \\ &- \varepsilon u(\overline{x},\widetilde{t})A_\varepsilon(\widetilde{t}) - b(\widetilde{t})u(\overline{x},\widetilde{t}) \\ &= \frac{1}{(A_\varepsilon(\widetilde{t}))^2}[b(\widetilde{t})A_\varepsilon(\widetilde{t}) + kA_\varepsilon(\widetilde{t})^2 - kA_\varepsilon(\widetilde{t})^2 - \varepsilon A_\varepsilon(\widetilde{t})^2 - b(\widetilde{t})A_\varepsilon(\widetilde{t})\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(A_\varepsilon(\widetilde{t}))^2}(-\varepsilon A_\varepsilon(\widetilde{t})^2) = -\varepsilon < 0.$$

Donc il existe un point $(\overline{x}, \widetilde{t}') \in \Omega \times\,]0, \widetilde{t}[$ (c'est-à-dire $\widetilde{t}' < \widetilde{t}$) tel que

$$U_\varepsilon(\overline{x}, \widetilde{t}') > 1,$$

ce qui contredit la définition (3.6.59) de $\widetilde{t}$, c'est-à-dire $\widetilde{t}$ n'existe pas. Par conséquent on a

$$U_\varepsilon(x,t) \leq 1 \qquad \forall (x,t) \in \Omega \times [0, t_1].$$

C'est-à-dire, on a

$$u(x,t) \leq A_\varepsilon(t).$$

Comme cette inégalité est valable pour tout $\varepsilon > 0$, en passant à la limite pour $\varepsilon \to 0$, on obtient l'inégalité

$$u(x,t) \leq A(t) \qquad \forall (x,t) \in \Omega \times\,]0, t_1[\,.$$

Le lemme est démontré. □

Maintenant on va montrer que $\sigma_n(m,q,t)$ est localement bornée.

Lemme 3.6.2. *Il existe une fonction $C(\widetilde{m}^*; t)$ continue en $(\widetilde{m}^*, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et telle que pour tout $n \geq \widetilde{m}^*$ on ait*

$$\sup_{0<m\leq \widetilde{m}^*, q\in\mathbb{R}} \sigma_n(m,q,t) \leq C(\widetilde{m}^*; t), \tag{3.6.60}$$

où $\sigma_n(m,q,t)$ est la solution de l'équation (3.3.30) *(avec* (3.3.32)*) avec la condition initiale* (3.3.31).

Démonstration. Pour chaque $\widetilde{m}^* > 0$ on définit la fonction $\psi_{\widetilde{m}^*}(m)$ par

$$\psi_{\widetilde{m}^*}(m) = \psi^0(m - \widetilde{m}^*), \qquad \psi^0(r) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r \leq 0, \\ 0 & \text{si} \quad r > 0. \end{cases}$$

Soit $t \geq 0$ et soit $(\overline{m}, \overline{q})$ le point de maximum de la fonction $\psi_{\widetilde{m}^*}(m)\frac{\sigma_n(m,q_z,t)}{m}$ pour $t \geq 0$ et $n \geq \widetilde{m}^*$ choisis, c'est-à-dire

$$\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\frac{\sigma_n(\overline{m}, \overline{q}_z, t)}{\overline{m}} = \max_{0<m\leq\widetilde{m}^*, q\in\mathbb{R}} \psi_{\widetilde{m}^*}(m)\frac{\sigma_n(m, q_z, t)}{m}. \tag{3.6.61}$$

En rappelant les définitions des opérateurs de coagulation et de fragmentation (voir (3.2.23) et (3.2.24)), on a

$$\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sigma_n(\overline{m}, \overline{q}, t)}{\overline{m}} \leq \tag{3.6.62}$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^{\overline{m}} \Big[\beta_n(\overline{m}-m', m')\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\sigma_n^\varepsilon(\overline{m}-m', \overline{q}_z(\overline{m}-m'), t) +$$

$$-\beta_n(\overline{m}, m')\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\sigma_n^\varepsilon(\overline{m}, \overline{q}_z(\overline{m}), t)\Big]\sigma_n^\varepsilon(m', q_z(m'), t)dm' +$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\overline{m}}^{\widetilde{m}^*} \beta_n(\overline{m}, m')\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\sigma_n^\varepsilon(\overline{m}, \overline{q}_z(\overline{m}), t)\sigma_n^\varepsilon(m', q_z(m'), t)dm' +$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\widetilde{m}^*} \beta_n(\overline{m}, m')\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\sigma_n^\varepsilon(\overline{m}, \overline{q}_z(\overline{m}), t)\sigma_n^\varepsilon(m', q_z(m'), t)dm' +$$

$$+\int_0^{\widetilde{m}^*} \vartheta_n(\overline{m}, m')\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\sigma_n^\varepsilon(\overline{m}+m', \overline{q}_z(\overline{m}+m'), t)dm' +$$

$$-\int_0^{\overline{m}} \vartheta_n(\overline{m}-m', m')\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\sigma_n^\varepsilon(\overline{m}, \overline{q}_z(\overline{m}), t)dm' +$$

$$+\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\frac{\overline{\sigma}_{1n}^*(\overline{m}, t)}{\overline{m}}\delta_{-\frac{q}{u(m)}}(t) - \psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\frac{\sigma_n(\overline{m}, \overline{q}, t)}{\overline{m}}\delta_{-\frac{q+A}{u(m)}}(t).$$

Examinons le signe du terme

$$D = \frac{1}{2}\int_0^{\overline{m}} \Big[\beta_n(\overline{m}-m', m')\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\sigma_n^\varepsilon(\overline{m}-m', \overline{q}_z(\overline{m}-m'), t) +$$

$$-\beta_n(\overline{m}, m')\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\sigma_n^\varepsilon(\overline{m}, \overline{q}_z(\overline{m}), t)\Big]\sigma_n^\varepsilon(m', q_z(m'), t)dm'.$$

On remarque d'abord que D peut être écrit dans la forme

$$D = \frac{1}{2}\int_0^{\overline{m}} \Big[(\overline{m}-m')\beta_n(\overline{m}-m', m')\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\frac{\sigma_n^\varepsilon(\overline{m}-m', \overline{q}_z(\overline{m}-m'), t)}{\overline{m}-m'} +$$

$$-\overline{m}\beta_n(\overline{m},m')\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\frac{\sigma_n^\varepsilon(\overline{m},\overline{q}_z(\overline{m}),t)}{\overline{m}}\Big]\sigma_n^\varepsilon(m',q_z(m'),t)dm'$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\overline{m}}\Big[(\overline{m}-m')\beta_n(\overline{m}-m',m')\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\frac{\sigma_n^\varepsilon(\overline{m}-m',\overline{q}_z(\overline{m}-m'),t)}{\overline{m}-m'}+$$

$$-\overline{m}\beta_n(\overline{m},m')\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\frac{\sigma_n(\overline{m},\overline{q}_z(\overline{m}),t)}{\overline{m}}\Big]\sigma_n^\varepsilon(m',\overline{q}_z(m'),t)dm'+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\overline{m}}\overline{m}\beta_n(\overline{m},m')\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\Big[\frac{\sigma_n(\overline{m},\overline{q}_z(\overline{m}),t)}{\overline{m}}-\frac{\sigma_n^\varepsilon(\overline{m},\overline{q}_z(\overline{m}),t)}{\overline{m}}\Big]\sigma_n^\varepsilon(m',q_z(m'),t)dm'.$$

Or, la relation (3.1.15), la définition (3.1.3) et l'inégalité

$$\frac{\sigma_n(\overline{m}-m',\overline{q}_z(\overline{m}-m'),t)}{\overline{m}-m'}\le\frac{\sigma_n(\overline{m},\overline{q}_z(\overline{m}),t)}{\overline{m}}\qquad\text{pour } 0\le m'\le\overline{m}\le\widetilde{m}^*,\overline{q}\in\mathbb{R},\tag{3.6.63}$$

impliquent que

$$D\le\frac{1}{2}\int\limits_0^{\overline{m}}\overline{m}\beta_n(\overline{m},m')\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\Big[\frac{\sigma_n(\overline{m},\overline{q}_z(\overline{m}),t)}{\overline{m}}-\frac{\sigma_n^\varepsilon(\overline{m},\overline{q}_z(\overline{m}),t)}{\overline{m}}\Big]\sigma_n^\varepsilon(m',q_z(m'),t)dm'.$$

A l'aide de cette dernière relation, en négligeant les termes négatifs dans (3.6.62), on obtient

$$\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sigma_n(\overline{m},\overline{q},t)}{\overline{m}}\le$$

$$\le\frac{1}{2}\int\limits_0^{\overline{m}}\overline{m}\beta_n(\overline{m},m')\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\frac{\sigma_n(\overline{m},\overline{q}_z(\overline{m}),t)}{\overline{m}}\sigma_n^\varepsilon(m',q_z(m'),t)dm'+$$

$$+\int\limits_0^{\widetilde{m}^*}\vartheta_n(\overline{m},m')\sigma_n^\varepsilon(\overline{m}+m',\overline{q}_z(\overline{m}+m'),t)dm'+\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\frac{\overline{\sigma}_{1n}^*(\overline{m},t)}{\overline{m}}\delta_{-\frac{q}{u(m)}}(t)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\overline{m}}\frac{\overline{m}}{m'^\mu}\beta_n(\overline{m},m')\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\frac{\sigma_n(\overline{m},\overline{q}_z(\overline{m}),t)}{\overline{m}}m'^\mu\sigma_n^\varepsilon(m',q_z(m'),t)dm'+$$

$$+\int\limits_0^{\widetilde{m}^*}\vartheta_n(\overline{m},m')\sigma_n^\varepsilon(\overline{m}+m',\overline{q}_z(\overline{m}+m'),t)dm'+\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\frac{\overline{\sigma}_{1n}^*(\overline{m},t)}{\overline{m}}\delta_{-\frac{q}{u(m)}}(t).$$

Les relation (3.1.18), (3.1.14), (3.3.37) et (3.5.55) impliquent que

$$\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sigma_n(\overline{m},\overline{q},t)}{\overline{m}}\le$$

$$\leq (C_0K(t) + \psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\frac{\overline{\sigma}^*_{1n}(\overline{m},t)}{\overline{m}}\delta_{-\frac{q}{u(m)}}(t)) + \frac{C(\widetilde{m}^*)}{2}K_0(t)\psi_{\widetilde{m}^*}(\overline{m})\frac{\sigma_n(\overline{m},\overline{q},t)}{\overline{m}}.$$

Donc, d'après le lemme du principe de maximum cité ci-dessus (lemme 3.6.1), on a

$$\frac{\sigma_n(m,q,t)}{m} \leq \max_{m',q}\frac{\overline{\sigma}^*_0(m',q)}{m'}e^{\frac{C(\widetilde{m}^*)}{2}\sup_t K_0(t)t} + \tag{3.6.64}$$

$$+\int_0^t (C_0K(s) + \sup_{m'}\frac{\overline{\sigma}^*_{1n}(m',t)}{m'}\delta_{-\frac{q}{u(m)}}(s))e^{\frac{C(\widetilde{m}^*)}{2}\sup_t K_0(t)(t-s)}ds.$$

Comme le second membre de (3.6.64) ne dépend que de $\widetilde{m}^*$ et de t, on peut le noter $\frac{C(\widetilde{m}^*;t)}{\widetilde{m}^*}$, ce qui implique (3.6.60). Le lemme est démontré. □

3.7 Convergence faible des solutions approchées

Démontrons d'abord une propriété supplémentaire de la conservation de la masse.

Lemme 3.7.1. *Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $m^*_\varepsilon(t)$ telle qu'on ait*

$$\int_{-A}^0\int_0^\infty \widetilde{\psi}_{m^*_\varepsilon}(m)\sigma_n(m,q_z,t)dmdz \geq \Sigma_0(t) - \int_{\mathbb{R}_+}\int_{-A}^{-A-tu(m)}\sigma_n(m,q,-\frac{q+A}{u(m)})dqdm - \varepsilon \tag{3.7.65}$$

où $\Sigma_0(t)$ est la fonction définie dans (3.3.36) et $\widetilde{\psi}_{m^*_\varepsilon}(\cdot)$ est la fonction définie par

$$\widetilde{\psi}_{m^*_\varepsilon}(m) = \psi^1(m - m^*_\varepsilon(t)),$$

$\psi^1(\cdot)$ étant la fonction introduite dans (3.3.28)–(3.3.29).

Démonstration. On pose

$$\Sigma_n(m^*,z) = \int_{-A}^0\int_{m^*}^\infty \sigma_n(m,q_z,t)dmdz. \tag{3.7.66}$$

Alors, en utilisant la fonction $K_1(t)$ introduite dans le lemme 3.5.4, on a

$$K_1(t) \geq \int_{-A}^0 \|\sigma_{n,z}(t)\|_\mu dz \geq \int_{-A}^0\int_{m^*}^\infty m^\mu\sigma_n(m,q_z,t)dmdz \geq m^{*\mu}\Sigma_n(m^*,z),$$

d'où

$$\Sigma_n(m^*, z) \leq \frac{K_1(t)}{m^{*\mu}}.$$

En prenant $m_\varepsilon^*(t) = (\frac{K_1(t)}{\varepsilon})^{\frac{1}{\mu}}$, on a

$$\varepsilon = \frac{K_1(t)}{(m_\varepsilon^*(t))^\mu} \geq \Sigma_n(m^*, z). \tag{3.7.67}$$

De cette inégalité, compte tenu de (3.7.66), on déduit l'inégalité (3.7.65). □

Enfin nous obtenons la convergence d'une sous-suite de solutions approchées.

Proposition 3.7.1. *Soit* $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ *la suite des solutions de l'équation approchée* (3.3.30) *(avec* (3.3.32)*) avec la condition initiale* (3.3.31)*. Sous les conditions mentionnées dans la section* 2*, il existe une sous-suite* $\{\sigma_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ *de* $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ *et un* $\sigma \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}_+ \times \Pi))$ *tels que*

1) $\quad$ *pour tout* $\bar{t} > 0$, $\sigma_{n_k} \rightharpoonup \sigma$ *dans* $L^1(\mathbb{R}_+ \times \Pi \times]0, \bar{t}[)$,

2) $\quad$ *pour tout* $\bar{t} > 0$, $\|\sigma_{n_k}(\cdot,\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\Pi)} \rightharpoonup^* \|\sigma(\cdot,\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\Pi)}$ *dans* $L^\infty(0, \bar{t})$,

3) $\quad$ *pour tout* $m^* > 0$ *et pour tout* $\bar{t} > 0$, $\sigma_{n_k} \rightharpoonup^* \sigma$ *dans* $L^\infty(]0, m^*[\times\Pi\times]0, \bar{t}[)$,

4) $\quad$ *pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe une fonction* $m_\varepsilon^*(t)$ *telle que, pour presque tout* t*, on ait*

$$\int_{-A}^{0}\int_{0}^{\infty} \widetilde{\psi}_{m_\varepsilon^*}(m)\sigma(m, q_z, t)dmdz \geq \|\sigma(\cdot,\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\Pi)} - \varepsilon \tag{3.7.68}$$

(la fonction $\widetilde{\psi}_{m_\varepsilon^*}(m)$ *est définie comme dans le lemme 3.7.1).*

Démonstration. Le lemme 3.6.2 implique immédiatement qu'il existe une sous-suite de $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ convergente faiblement-$*$ dans $L^\infty(]0, m^*[\times\Pi\times]0, \bar{t}[)$ pour tout $m^* > 0$.

D'autre part, d'après le lemme 3.3.2 la norme dans $L^\infty(0, \bar{t}; L^1(\mathbb{R}_+ \times \Pi))$ des fonctions σ_n est uniformément bornée. Donc, compte tenu de la conséquence du lemme 3.6.2, on peut extraire une sous-suite de $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ qui converge faiblement dans $L^1(\mathbb{R}_+ \times$

$\Pi\times\,]0,\bar{t}[\,)$ vers une fonction appartenant à $L^1(\mathbb{R}_+\times\Pi\times\,]0,\bar{t}[\,)$ et aussi une sous-suite de $\{\|\sigma_n(\cdot,\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\Pi)}\}_{n=1}^{\infty}$ qui converge faiblement-$*$ dans $L^\infty(0,\bar{t})$.

Soit $\bar{t}>0$. On pose $\varepsilon_q=\frac{1}{q}$ pour $q\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$. Comme

$$\int_{-A}^{0}\int_{0}^{\infty}\widetilde{\psi}_{m^*_{\varepsilon_q}}(m)\sigma_n(m,q_z,t)dmdz\leq\|\sigma_n(\cdot,\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\Pi)},$$

de la suite $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ on peut extraire une sous-suite telle que, pour tout ε_q, $q\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$, le premier membre de cette inégalité considéré comme fonction de $t\in[0,\bar{t}]$ converge faiblement-$*$ dans $L^\infty(0,\bar{t})$. D'autre part on a

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{-A}^{-A-tu(m)}\sigma_n(m,q,-\frac{q+A}{u(m)})dqdm=\Sigma_0(t)-\|\sigma_n(\cdot,\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\Pi)}.$$

Donc, en substituant cette égalité dans (3.7.65) et en passant à la limite dans la sous-suite extraite, on peut obtenir (3.7.68).

Cela étant, de manière usuelle, de ces procédés d'extraction de sous-suite convergente on peut construire une sous-suite $\{\sigma_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ et un $\sigma\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+,L^1(\mathbb{R}_+\times\Pi))$ qui vérifient les conditions 1), 2), 3) et 4), ce qui achève la démonstration de la proposition 3.7.1. $\square$

On remarque que, si on interprète $\Sigma_0(t)-\|\sigma(\cdot,\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\Pi)}$ comme la sortie de l'eau liquide de Π, qui serait représentée par

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{-A}^{-A-tu(m)}\sigma(m,q,-\frac{q+A}{u(m)})dqdm,$$

l'inégalité (3.7.68) est une forme faible de l'inégalité

$$\int_{-A}^{0}\int_{0}^{\infty}\widetilde{\psi}_{m^*_{\varepsilon}}(m)\sigma(m,q_z,t)dmdz\geq\Sigma_0(t)-\int_{\mathbb{R}_+}\int_{-A}^{-A-tu(m)}\sigma(m,q,-\frac{q+A}{u(m)})dqdm-\varepsilon$$

et peut être interprétée comme absence de fuite de la masse vers l'infini en temps fini.

Perspectives et conclusion

I Perspectives

La limite σ de la suite $\{\sigma_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, limite obtenue dans la proposition 3.7.1, est, il est clair, la candidate naturelle pour être une solution faible de notre équation (3.2.27). Pour démontrer qu'elle l'est effectivement, il faudra procéder par le passage à la limite dans l'équation. Toutefois, à cause de la non-linéarité de l'opérateur de coagulation $K_{t,z}[\cdot,\cdot]$, il nous faudra trouver un autre outil technique pour passer à la limite. Mais, comme nous l'avons vu dans la proposition 3.7.1, la limite σ de la suite $\{\sigma_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que nous construit dans la proposition 3.7.1 jouit de plusieurs propriétés que nous pouvons considérer utiles. Ceci nous donne une bonne perspective de notre recherche.

Nous devrons retourner aussi à l'équation (2.1.2), ou sa forme transformée (2.2.22), et examiner les difficultés observées dans l'étude de cette équation à la lumière de notre étude de l'équation (3.2.27), ce qui pourra nous suggérer de nouvelles conditions ou nouvelles variantes à proposer et éventuellement de nouvelles méthodes pour améliorer les résultats existants sur l'équation de coagulation et de fragmentation de gouttelettes en déplacement.

II Conclusion

Dans la présente thèse nous avons présenté deux études sur l'équation de coagulation et de fragmentation des gouttelettes en chute : une solution locale avec une méthode inspirée à celle de Melzak [25] (en utilisant les fonctions analytiques) et une convergence de solutions approchées avec un élargissement de la position des gouttelettes. Avec ces études nous avons proposé des approches alternatives au résultat de Dubovskii [13] et à d'autres travaux (comme une étude d'une équation similaire [6]).

Pour proposer nos méthodes alternatives, nous avons fait nos efforts pour que les conditions soient naturelles du point de vue physique. Même si les difficultés restent et on n'est pas en mesure de clarifier tous les aspects de cette équation, nous pouvons croire que nos études ont offert des outils utiles pour les ultérieures investigations sur la description mathématique des processus de coagulation et de fragmentation des gouttelettes qui se déplacent dans un milieu naturel comme l'atmosphère.

Bibliographie

[1] Ball, J. M., Carr, J. : The discrete coagulation-fragmentation equations : Existence, uniqueness, and density conservation. *J. Stat. Phys.*, vol. **61**, pp. 203-234, (1990).

[2] Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H. : Equations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau. *Sci. Techn. Univ. Constantine* - A, vol. **31** (2011), pp. 9–17.

[3] Belhireche, H., Aissaoui, M.Z., Fujita Yashima, H. : Solution globale de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute. *Ren. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino*, vol. **70**, 3 (2012), pp. 261–278.

[4] Belhireche, H. : Comportement asymtotique de l'équation de la coagulation des gouttelettes en chute. *Thèse de doctorat 3ème cycle en Mathématiques université 8 Mai 1945 Guelma. 2014.*

[5] Brezis, H. : Analyse fonctionelle (Théorie et applications), *Masson 1987.*

[6] Broizat, D. : Existence, unicité, approximations de solutions d'équations cinétiques et hyperboliques. *Thèse de Doctorat, Univ. Nice, 2013.*

[7] Buccellato, S., Fujita Yashima, H. : Système d'équations d'un gaz visqueux modélisant l'atmosphère avec la force de Coriolis et la stabilité de l'état d'équilibre. *Ann. Univ. Ferrara - Sez. VII - Sc. Mat.*, vol. **49** (2003), pp. 127–159.

[8] Can, J. : Asymptotic behaviour of solutions to the coagulationfragmentation equations. I. The strong fragmentation case. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh.*, vol. **I21A**, pp. 231-244, (1992).

[9] Da Costa, F.P. : *Studies in coagulation-fragmentation equations*. Ph.D. Thesis, Heriot-Watt University, Edinburgh (1993).

[10] Da Costa, F. P. : Existence and uniqueness of density conserving solutions to the coagulation-fragmentation equations with strong fragmentation. *J. Math. Anal. Appl.*, vol. **192**, pp. 892-914, (1995).

[11] Dubovski, P.B. : Existence Theorem for Space Inhomogeneous Coagulation Equation. *Appl. Math. Mt.*, vol. **7**, No. 4 (1994), pp. 13-18.

[12] Dubovskii, P. B. : Mathematical theory of coagulation. *Seoul National Univ., Research Inst. Math., 1994.*

[13] Dubovskii, P. B. : Solubility of the transport equation in the kinetics of coagulation and fragmentation. *Izv. Math*, vol. **65** (2001), pp. 1–22.

[14] Fujita Yashima, H. : Modelación matemática del movimiento de la atmósfera con la transición de fase del agua. *Rev. Invest. Operac.*, vol. **34** (2013), pp. 93–104.

[15] Fujita Yashima, H. : Modélisation de la physique des fluides, *cours de l'université de Guelma, 2010.*

[16] Fujita Yashima, H., Campana, V., Aissaoui, M. Z. : Système d'équations d'un modèle du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère. *Ann. Math. Afr.*, vol. **2** (2011), pp. 66–92.

[17] Galkin, V. A. : Equation de Smoluchowski (en russe). *Fizimatlit, Moscou, 2010.*

[18] Galkin, V. A. : Generalized Solution of the Smoluchowski Kinetic Equation for Spatially Inhomogeneous Systems. *Sov. Phys. Dokl.*, vol. **32** (3) (1987), pp. 200-202.

[19] Galkin, V. A. : Smoluchowski equation of the kinetic theory of coagulation for Spatially Non-uniform Systems. *Sov. Phys. Dokl.*, vol. **30** (12) (1985), pp. 1012-1014.

[20] Galkin, V. A., Dubovski, P. B. : Solution of the Coagulation Equation with Unbounded Kernels. *Differential Equations*, vol. **22** (1986), pp. 504-509 (English translation : pp.373-378).

[21] Kantrovitch, L. V., Akilov, G. P. : Analyse fonctionnelle, tome 2 (traduit du russe). *Mir, Moscou, 1981.*

[22] Kikoïne, A. K., Kikoïne, I. K. : Physique moléculaire (traduit du russe). *Mir, Moscou, 1979.*

[23] Kolmogorov, A. N., Fomine, S. V. : Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionelle (traduit du russe). *Mir, Moscou, 1974.*

[24] Matveev, L. T. : Physique de l'atmosphère (en russe). *Gidrometeoizdat, Leningrad-S. Peterburg, 1965, 1984, 2000.*

[25] Melzak, A. Z. : A scalar transport equation. *Transactions AMS*, vol. **85** (1957), pp. 547–560.

[26] Merad, M. : Etude de l'équation de coagulation des gouttlettes en mouvement avec le vent. *Thèse de doctorat 3ème cycle en Mathématiques, université 8 Mai 1945 Guelma. 2014*

[27] Merad, M., Belhireche, H., Fujita Yashima, H. : Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelettes en chute avec le vent horizontal. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, vol. **129** (2013), pp. 225-244.

[28] Müller, H. : Zur allgemeinen Theorie der raschen Koagulation. *Kolloidchem. Beib.*, vol. **27** (1928), pp. 223–250.

[29] Prodi, F., Battaglia, A. : Meteorologia - Parte II, Microfisica. *Grafica Pucci, Roma, 2004.* (voir aussi le site : http ://www.meteo.uni-bonn.de/mitarbeiter/battaglia/teaching.html).

[30] Selvaduray, S., Fujita Yashima, H. : Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati : gassoso, liquido e solido. *Accad. Sci. Torino, Memorie Cl. Sci. Fis., Serie V*, vol. **35** (2011), pp.37–69.

[31] Smoluchowski, M. : Drei Vorträge über Diffusion, Brownische Bewegung und Koagulation von Kolloidteilchen. *Phys. Zeits.*, vol. **17** (1916), pp. 557–585.

Bibliographie