République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par : **HADIL ZADEM**

Intitulé

Étude de l'existence, l'unicité, la positivité et la stabilité de quelques problèmes fractionnaires non linéaires

Dirigé par : RABAH DEBBAR

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. MOURAD KERBOUA**	**MCA**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. RABAH DEBBAR**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. LILIA ZENKOUFI**	**MCA**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2023

Dédicaces

A ma très chère mère **Asma**.

Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit, ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et la présence à mes côtés a toujours été

ma source de force pour affronter les différents obstacles.

A mon très cher père **Abd el ghani** .

Tu a toujours été à mes côtés pour me soutenir et m'encourager

Que ce travail traduit ma gratitude et mon affection

A mes frères Heithem et Ayhem .

Que Dieu les protège et leurs offre la chance et le bonheur.

A mes grand-parents, mes oncles et mes tantes. Que Dieu leur donne une longue et joyeuse vie.

A mes chère amies surtout Hanadi, Djihane et Sarra pour leurs aides et supports dans les moments difficiles.

Et à tous ceux qui aiment le bon travail et ne reculent pas devant les obstacles de la vie.

Remerciements

Je tiens tout d'abord, à remercier Dieu le tout Puissant et Miséricordieux, qui m'a donné la force, le courage et la patience pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens tout à remercier mon directeur de mémoire. Monsieur RABAH DEBBAR. Maitre de canférance à l'université 8 Mai 1945 - Guelma, pour partout le support qu'elle m'a occasion tout au long de la conception et la rédaction de cette mémoire. C'est un su me diriger d'une façon exemplaire. Sans ses idées et son expertise, la réalisation de cette
mémoire n'aurait pas été possible.

Nous tenons à remercier également tous les membres du jury Mr MOURAD KERBOUA d'avoir
accepter de présider et juger ce travail Mme LILIA ZENKOUFI d'avoir accepté d'examiner
et juger ce travail. Nous adresses nos sincères remerciements à tous Nos enseignants et
toute personnes qui par leur paroles, conseils et critiques ont orienté nos réflexions tout
au long de nos études durant notre parcours universitaire. Nous tenons à remercier nos chers collègues qui nous ont apporté leurs soutiens moral et pour les agréables moments
tout au long de nos chemins et grands remerciements à tout les membres de ma famille.

Encore un grand merci à tous ceux qui nous ont soutenus de près ou de loin pour la réalisation de ce modeste travail.

Résumé

Le principe du point fixe a beaucoup d'applications. Il intervient dans la résolution de plusieurs équations différentielles non linéaires en particulier, dans l'étude de l'existence et de l'unicité.

Dans notre travail, en premier lieu nous étudions l'existence et l'unicité de solutions positives pour une classe d'équations différentielles fractionnaires non linéaires de Caputo-Hadamard en utilisant la méthode des solutions supérieures et inférieures et les théorèmes du point fixe de Schauder et Banach.

Dans le deuxième, on s'intéresse à l'étude d'existence et de stabilité d'Ulam-Hyers-Rassias pour une classe d'équations différentielles fonctionnelles impliquant la dérivée fractionnaire de Hilfer-Hadamard. Application d'un théorème de point fixe de Schauder à l'existence de solutions. Nous prouvons ensuite que notre problème est stable d'Ulam-Hyers-Rassias généralisé.

Abstracts

The fixed-point principle has many applications. It is involved in the resolution of several nonlinear differential equations in particular, in the study of existence and uniqueness.

In our work, first we investigate the existence and uniqueness of positive solutions for a class of Caputo-Hadamard nonlinear fractional differential equations using the method of upper and lower solutions and Schauder and Banach fixed point theorems.

In the second, we are interested in the study of existence and stability of Ulam-Hyers-Rassias for a class of functional differential equations involving the fractional derivative of Hilfer-Hadamard. Application of a Schauder fixed point theorem to the existence of solutions. Next we prove that our problem is generalized Ulam-Hyers-Rassias stable.

ملخص

مبدأ النقطة الثابتة له العديد من التطبيقات، يشارك في حل العديد من المعادلات التفاضلية غير الخطية على وجه الخصوص، في دراسة الوجود والوحدانية.

في عملنا، قمنا أولاً بدراسة وجود ووحدانية الحلول الموجبة لفئة من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية Caputo-Hadamard باستخدام طريقة الحلول العلوية والسفلية ونظريات Schauder و Banach للنقطة الثابتة.

في الثاني، نحن مهتمون بدراسة وجود واستقرار Ulam-Hyers-Rassias

لفئة من المعادلات التفاضلية التي تتضمن المشتق الكسري لHilfer-Hadamard

تطبيق نظرية النقطة الثابتة لSchauder لوجود الحلول.

بعد ذلك نثبت أن مشكلتنا مستقرة بالنسبة Ulam-Hyers-Rassias المعممة.

Table des matières

Introduction

La dérivation fractionnaire est un concept de généralisation de la dérivation classique à un ordre non entier. Elle fournit plusieurs outils potentiellement utiles pour la résolution des équations intégrales. Elle s'introduit aussi naturellement dans la modélisation mécanique des matériaux qui conservent la mémoire des transformation passées voir [9]. D'où l'intérêt particulier porté sur le calcul et l'analyse fractionnaire pendant ces dernières décennies. Actuellement dans la littérature mathématique, les études sur l'existence, l'unicité, la multiplicité des solutions et l'existence des solutions positives des problèmes fractionnaires non linéaire utilisent des techniques d'analyse non linéaire comme les théorème de point fixe.

Dans ce mémoire, nous étendons les résultats de [11] en prouvant la positivité des solutions pour l'équation différentielle fractionnaire non linéaire avec la dérivée de Caputo-Hadamard.

La stabilité des équations fonctionnelles a été soulevée à l'origine par Ulam [19], puis par Hyers [7]. Par la suite, ce type de stabilité est appelé stabilité d'Ulam-Hyers. En 1978, Rassias [13] a fourni une remarquable généralisation de la stabilité d'Ulam-Hyers des applications en considérant des variables. Récemment, une attention considérable a été accordée à l'existence de solutions de problèmes de valeurs initiales et aux limites pour les équations différentielles fractionnaires avec dérivée fractionnaire de Hilfer ; voir [5] [6]. Motivés

par la dérivée fractionnaire de Hilfer (qui interpole la dérivée de Riemann-Liouville et la dérivée de Caputo), Qassim et al. [12] ont considéré un nouveau type de dérivée fractionnaire (qui interpole la dérivée de Hadamard et sa contrepartie de Caputo). Motivés par ces travaux, nous discutons dans ce mémoire l'existence et la stabilité Ulam des solutions d'un problème d équations différentielles fractionnaires de Hilfer-Hadamard
Ce mémoire est organisé comme suit :

1. Premier chapitre : est introductif dans lequel on présente des définitions et quelques résultats qui seront utiles dans la suite du travail.

2. Deuxième chapitre : est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution positive pour une classe d'équations différentielles fractionnaires non linéaires de Caputo-Hadamard

3. Troisième chapitre : on a établit l'existence et la stabilité d'Ulam-Hyers-Rassias pour une classe d'équations différentielles fonctionnelles impliquant la dérivée fractionnaire de Hilfer-Hadamard

Chapitre 1

Preliminaries

1.1 Espaces fonctionnels

Définition 1.1.1. ***(Norme)**[16]*
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle un norme sur E toute application $\|.\|$: $E \to \mathbb{R}_+$ vérifie

1. $\forall x \in E : \|x\| = 0 \iff x = 0$,
2. $\forall \lambda \in R, \forall x \in E : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *(homogénéité),*
3. $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

on dit que alors $(E,\|.\|)$ est un espace vectoriel normé.

Exemple 1.1.1. *L'espace $C(J;\mathbb{R})$ muni de la norme*

$$\|y\|_\infty = \sup\{|y(t)| : t \in J\}$$

.

Définition 1.1.2. ***(Suite de Cauchy)***
Soient $(X, \|.\|_X)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy si
$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \geq 0, \exists n > N_\epsilon, \forall m \geq N_\epsilon, \|x_{n+m} - x_n\|_X \leq \epsilon$.

Définition 1.1.3. *[10](Espace métrique complet)*
On dit qu'un espace métrique $(E, \|.\|)$ est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente.

Exemple 1.1.2. $(\boldsymbol{R}, |.|)$ $(\boldsymbol{C}, |.|)$ *sont complets.*

Définition 1.1.4. *(Espace de Banach).[16]*
On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemple 1.1.3. $C(J;\mathbb{R})$ *espace des fonctions continues sur J et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est de Banach.*

Définition 1.1.5. *(Opérateur continu). [10]*
L'opérateur A est continu, si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que l'inégalité

$$(x', x'' \in D_A) : \|x' - x''\| < \delta \Longrightarrow \|Ax' - Ax''\| < \epsilon.$$

Définition 1.1.6. *(Opérateurs Linéaire Bornés). [2]*
Soit E un espace vectoriel normé; on appelle opérateur linéaire borné, toute application linéaire continue de E dans E. Si A est un opérateur linéaire borné, alors

$$(\forall x \in D_A) : \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|.$$

où la norme de A étant définie par

$$\|A\| = sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = sup_{x \in D_A} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Définition 1.1.7. ***(Espaces** $C^n(I,\mathbb{R})\, n \in \mathbb{N}$ **).***

1) *Soit* $n \in \mathbb{N}, I \subseteq \mathbb{R}$ *l'espace des fonctions* n *fois dérivable sur* I *noté* $C^n(I)$ *est définit par :*

$$C^n(I,\mathbb{R}) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}; f, f', ..., f^n \text{ sont existe et continue}\}$$

2) *L'application* $N : C^n(I,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$f \longmapsto N(f) = \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_\infty.$$

existe et continue sur $C^n(I,\mathbb{R})$.

Exemple 1.1.4. $C^n(I,\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|.\|$

$$\|f\|_{C^n} = \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_\infty.$$

est une espace de Banach.

Définition 1.1.8. ***(Espace** $L^p(a,b)$ **)** [9]*
Soit [a,b] $(-\infty < a < b < +\infty)$ *un intervalle fini de* $\mathbb{R}$.
l'espace $L^p(a,b)$ $(1 \le p < +\infty)$ *est l'espace des fonctions* f *mesurables intégrables au sens de Lebesgue à valeurs réelles telle que la norme* $\|f\|_p < +\infty$ *où*

$$\|f\|_p = (\int_a^b |f(x)|^p dt) \quad (1 \le p < +\infty).$$

et pour $p = +\infty$ *, on a*

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \le x \le b} |f(x)|.$$

et $L^\infty(a,b)$ *est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur* $[a,b]$.

Définition 1.1.9. *[15](**Fonction absolument continue**)*
Une fonction f est dite absolument continue sur un intervalle $[a,b]$, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles ouverts disjoints deux a deux $[a_k, b_k] \subset [a,b], k = 1,2,...,n$, tel que

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \eta \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon.$$

Notation : On note par $AC[a,b]$ l'espace des fonctions absolument continues sur$[a,b]$.

Théorème 1.1.1. *[15] L'espace $AC[a,b]$ coïncide avec l'espace des primitives de fonctions sommables de Lebesgue , c'est á dire*

$$f \in AC[a,b] \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt, (\varphi \in \mathbb{L}^1(a,b)).$$

Ainsi une fonction absolument continue f a une dérivée sommable $f'(x) = \varphi(x)$ dans $[a,b]$. Alors $\varphi(t) = f'(t)$ et $c = f(a)$.

Définition 1.1.10. *[9] Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note par $AC^n[a,b]$ l'espace des fonctions à valeurs complexes f ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ continues sur $[a,b]$ telles que $f^{(n-1)}(x) \in AC[a,b]$, c'est à dire*

$$AC^n[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad et \quad (D^{n-1}f)(x) \in AC[a,b] \; (D = \frac{d}{dx})\}.$$

En particulier, on a $AC^1[a,b] = AC[a,b]$.

Définition 1.1.11. *[9] L'espace noté* $AC^n_{\delta,\mu}[a,b](n\in\mathbb{N}^*,\mu\in\mathbb{R})$ *défini par*

$$AC^n_{\delta,\mu}[a,b]=\{g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}:\delta^{n-1}[x^\mu g(x)]\in AC[a,b],\mu\in\mathbb{R},\delta=x\frac{d}{dx}\}.$$

est appelé espace des fonctions absolument continues avec poids.
En particulier, quand $\mu=0$ *l'espace* $AC^n_\delta[a,b]:=AC^n_{\delta,0}[a,b]$ *et on a*

$$AC^n_{\delta,\mu}[a,b]=\{g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}:\delta^{n-1}[x^\mu g(x)]\in AC[a,b],\mu\in\mathbb{R},\delta=x\frac{d}{dx}\}.$$

Quand $\mu=0$ *et* $n=1$, *l'espace* $AC^1_\delta[a,b]$ *coïncide avec* $AC[a,b]$.

Définition 1.1.12. ***(Espaces pondérés des fonctions continues)***
soit $\gamma\in(0,1], J:=[1,T]$, *par* $C_{\gamma,ln}(J), C_\gamma(J)$ *et* $C^1_\gamma(J)$ *, on note les espaces pondérés des fonctions continues définies par*

$$C_{\gamma,ln}(J)=\{w(t):(lnt)^{1-\gamma}w(t)\in C\}$$

Avec la norme

$$\|w\|_{C_{\gamma,ln}}:=\sup_{t\in J}|(lnt)^{1-\gamma}w(t)|,$$

$$C_\gamma(J)=\{w:(0,T]\longrightarrow\mathbb{R}:t^{1-\gamma}w(t)\in C\}$$

Avec la norme

$$\|w\|_{C_\gamma}:=\sup_{t\in J}|t^{1-\gamma}w(t)|,$$

Et

$$C^1_J(J)=\{w\in C:\frac{dw}{dt}\in C_\gamma\}$$

Avec la norme

$$\|w\|_{C^1_\gamma}:=\|w\|_\infty+\|w'\|_{C_\gamma}.$$

Dans la suite, on note $\|w\|_{C_{\gamma,ln}}$ *par* $\|w\|_C$

1.2 Intégrales et dérivées fractionnaires

Maintenant, nous donnons quelques résultats et propriétés du calcul fractionnaire.

Définition 1.2.1. *([[1]-[9]] **Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville)***
L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $r > 0$ d'une fonction $w \in L^1(J)$ est définie par

$$(I_1^r w)(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^t (t-s)^{r-1} w(s)ds,$$

où $\Gamma(r)$ est la fonction Gamma donnée par

$$\Gamma(\xi) = \int_0^\infty t^{\xi-1} \exp^{-t} dt; \quad \xi > 0.$$

Remarque 1.2.1. *Dans tout ce qui suit on utilise uniquement l'intégrale (à gauche).*

Remarque 1.2.2. *pour tout $r, r_1, r_2 > 0$ et chaque $w \in C$ on a $I_1^r w \in C$ et*
$(I_1^{r_1} I_1^{r_2} w)(t) = (I_1^{r_1+r_2} w)(t)$.

Définition 1.2.2. ***([[1]-[9]]; Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville)***
La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $r > 0$ d'une fonction $w \in L^1(J)$ est définie par

$$(D_1^r w)(t) = (\frac{d^n}{dt^n} I_1^{n-r} w)(t)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-r)} \frac{d^n}{dt^n} \int_1^t (t-s)^{n-r-1} w(s) ds,$$

où $n = [r] + 1$ et $[r]$ est la partie entière de r.
En particulier, si $r \in (0,1)$, alors

$$(D_1^r w)(t) = (\frac{d^n}{dt^n} I_1^{1-r} w)(t)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-r)} \frac{d^n}{dt^n} \int_1^t (t-s)^{-r} w(s) ds.$$

Soient $r \in (0,1)$,),$\gamma \in (0,1]$ et $w \in C_{1-\gamma}(J)$ Ensuite, l'expression suivante conduit à l'opérateur inverse gauche comme suit :
$(D_1^r I_1^r)(t) = w(t)$ pour tout $t \in (1,T]$. De plus, si $I_1^{1-r} w \in C_{1-\gamma}^1(J)$ alors la composition suivante est démontrée dans [15] :

$$(I_1^r D_1^r w)(t) = w(t) - \frac{(I_1^{1-r})(1^+)}{\Gamma(r)} t^{r-1}; pour\ tout\ t \in (1,T].$$

Définition 1.2.3. *([[1]-[9]]; Dérivée fractionnaire de Caputo)*
La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $r>0$ d'une fonction $w\in L^1$ est défini par

$$({}^cD_1^r)(t)=(I_1^{n-r}\frac{d^n}{dt^n}w)(t)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-r)}\int_1^t(t-s)^{n-r-1}\frac{d^n}{ds^n}w(t)ds.$$

En particulier, si $r\in(0,1)$, alors

$$({}^cD_1^r)(t)=(I_1^{1-r}\frac{d}{dt}w)(t)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-r)}\int_1^t(t-s)^{-r}\frac{d}{ds}w(t)ds.$$

Rappelons quelques définitions et propriétés de l'intégration fractionnaire de Hadamard et différenciation. Nous renvoyons à [[9], [4]] pour une analyse plus détaillée.

Définition 1.2.4. *([[9],[4]]; Intégrale fractionnaire de Hadamard)*
L'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre $q>0$ pour une fonction $g\in L^1(I,E)$est définie par

$$({}^HI_1^q g)(x)=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_1^x(\ln\frac{x}{s})^{q-1}\frac{g(x)}{s}ds,$$

à condition que l'intégrale existe.

Exemple 1.2.1. *soit* $0<q<1$ *Alors* ${}^HI_1^q\ln t=\frac{1}{\Gamma(2+q)}(lnt)^{1+q}$; $t\in[1.e]$.
Définir $\delta=x\frac{d}{dx}$, $q>0$, $n=[q]+1$
et $AC_\delta^n=\{u:[1,T]\longrightarrow E:\delta^{n-1}[u(x)]\in AC(J)\}$.

Analogue au calcul fractionnaire de Riemann-Liouville, la dérivée fractionnaire de Hadamard est définie en termes d'intégrale fractionnaire de Hadamard de la manière suivante.

Définition 1.2.5. ***([[9],[4]]; Dérivée fractionnaire de Hadamard)***
La dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre $q > 0$ appliquée à la fonction $w \in AC_{\delta}^{n}$ est définie comme suit :

$$({}^{H}D_{1}^{q}w)(x) = \delta^{n}({}^{H}I_{1}^{n-q}w)(x).$$

En particulier, si $q \in (0,1]$, alors

$$({}^{H}D_{1}^{q}w)(x) = \delta({}^{H}I_{1}^{1-q}w)(x).$$

Exemple 1.2.2. *Soit $0 < q < 1$. Alors ${}^{H}D_{1}^{q} lnt = \dfrac{1}{\Gamma(2-q)}(lnt)^{1-q}$, $t \in [1.e]$.*
Il a été prouvé (voir,par exemple, Kilbas [46], Théorème 4.8) que dans l'espace $L^{1}(J)$ la dérivée fractionnaire de Hadamard est l'opérateur inverse à gauche de l'intégrale fractionnaire de Hadamard, c'est-à-dire,

$$({}^{H}D_{1}^{q})({}^{H}I_{1}^{q}w)(x) = w(x).$$

D'après le théorème 2.3 de [9], on a

$$({}^{H}I_{1}^{q})({}^{H}D_{1}^{q}w)(x) = w(x) - \frac{({}^{H}I_{1}^{1-q}w)(1))}{\Gamma(q)}(\ln x)^{q-1}.$$

Analogue au calcul fractionnaire de Hadamard, la dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard est définie de la manière suivante :

Définition 1.2.6. ***(Dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard)***
La dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard d'ordre $q > 0$ appliquée à la fonction $w \in AC_{\delta}^{n}$ est définie comme suit :

$$({}^{Hc}D_{1}^{q}w)(x) = ({}^{H}I_{1}^{n-q}\delta^{n}w)(x).$$

En particulier, si $q \in (0,1]$, alors

$$({}^{Hc}D_{1}^{q}w)(x) = ({}^{H}I_{1}^{1-q}\delta w)(x).$$

Lemme 1.2.1. *[9]*

$m-1<\alpha\leq m$, $m\in\mathbb{N}$ et $g\in C^{m-1}(J)$ avec $g^{(m)}$ existe. Alors

$$({}^{H}I_1^{\alpha})({}^{Hc}Dg)(t)=g(t)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{g^k(1)}{\Gamma(k+1)}(\log t)^k.$$

Lemme 1.2.2. *[9]*

pour tous $\mu>0$ et $\nu>-1$

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_1^t(log\frac{t}{s})^{\mu-1}(\log s)^{\nu}\frac{ds}{s}=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}(\log t)^{\mu+\nu}.$$

Dans [5], Hilfer a étudié les applications d'un opérateur fractionnaire généralisé ayant les dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo comme cas particuliers (voir aussi [6] – [18]).

Définition 1.2.7. ***(Dérivée fractionnaire de Hilfer)***
Soit $\alpha\in(0,1)$, $\beta\in[0,1]$, $w\in L^1(J)$, $I_1^{(1-\alpha)(1-\beta)}w\in AC^1(J)$ La dérivée fractionnaire de Hilfer d'ordre α et de type β de w est définie comme suit :

$$(D_1^{\alpha,\beta}w)(t)=(I_1^{\beta(1-\alpha)}\frac{d}{dt}I_1^{(1-\alpha)(1-\beta)}w)(t).$$

Proposition 1.2.1. *soit $\alpha\in(0,1)$, $\beta\in[0,1]$, $\gamma=\alpha+\beta-\alpha\beta$, et $w\in L^1(J)$.*

1. L'opérateur $(D_1^{\alpha,\beta}w)(t)$ peut s'écrire

$$(D_1^{\alpha,\beta}w)(t)=(I_1^{\beta(1-\alpha)}\frac{d}{dt}I_1^{1-\gamma}w)(t)=(I_1^{\beta(1-\alpha)}D_1^{\gamma}w)(t).$$

De plus, le paramètre γ satisfait

$$\gamma\in(0,1],\quad \gamma\geq\alpha,\quad \gamma>\beta,\quad 1-\gamma<1-\beta(1-\alpha).$$

2. La généralisation ***(Définition 1.2.7)*** *pour $\beta=0$ coïncide avec la dérivée de Riemann-Liouville et pour $\beta=1$ avec la dérivée de Caputo.*

$$D_1^{\alpha,0}=D_1^{\alpha},\quad et\quad D_1^{\alpha,1}={}^cD_1^{\alpha}.$$

3. Si $D_1^{\beta(1-\alpha)} w$ existe et dans $L^1(J)$ alors

$$(D_1^{\alpha,\beta} I_1^{\alpha} w)(t) = w(t).$$

De plus, si $w \in C_\gamma(J) et I_1^{1-\beta(1-\alpha)} w \in C_\gamma^1(J)$, alors

$$(D_1^{\alpha,\beta} I_1^{\alpha} w)(t) = w(t).$$

4. Si $D_1^{\gamma} w$ existe et dans $L^1(J)$ alors

$$(I_1^{\alpha} D_1^{\alpha,\beta} w)(t) = (I_1^{\gamma} D_1^{\gamma} w)(t) = w(t) - \frac{I_1^{1-\gamma}(1^+)}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1}.$$

A partir de l'intégrale fractionnaire de Hadamard, la dérivée fractionnaire de Hilfer-Hadamard (introduite pour la première fois dans [12]) est définie de la manière suivante.

Définition 1.2.8. ***(Dérivée fractionnaire de Hilfer-Hadamard)***
soit $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in [0,1]$, $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$, et $w \in L^1(J)$ et ${}^H I_1^{(1-\alpha)(1-\beta)} w \in AC^1(J)$.La dérivée fractionnaire de Hilfer-Hadamard de l'ordre α et le type β appliqués à la fonction w sont définis comme suit :

$$({}^H D_1^{\alpha,\beta} w)(t) = ({}^H I_1^{\beta(1-\alpha)} ({}^H D_1^{\gamma} w))(t)$$

$$= ({}^H I_1^{\beta(1-\alpha)} \delta({}^H I_1^{1-\gamma}))(t).$$

Cette nouvelle dérivée fractionnaire ***(Définition 1.2.8)*** *peut être considérée comme une interpolation de la dérivée fractionnaire de Hadamard et de la dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard. En effet, pour $\beta = 0$, cette dérivée se réduit à la dérivée fractionnaire de Hadamard, et lorsque $\beta = 1$, on retrouve la dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard.*

$${}^H D_1^{\alpha,0} = {}^H D_1^{\alpha}, et {}^H D_1^{\alpha,1} = {}^{Hc} D_1^{\alpha}.$$

1.3 Quelques théorèmes de point fixe

Les théorèmes de point fixe nous permettent de transformer un problème différentiel fractionnaire en un problème de la forme suivante $Tx = x$. Ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pourque notre problème fractionnaire admette une solution.

Définition 1.3.1. *Soit X un espace normé. Un sous-ensemble $\Omega \subset X$ est dit borné s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \Omega$ on a*

$$\|x\|_X \leq M.$$

Définition 1.3.2. *On dit que Ω est une partie compacte de X si, de toute suite de points de Ω on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de Ω.*

Définition 1.3.3. *Une partie Ω de X est dite relativement compacte si son adhérence est compacte.*

Définition 1.3.4. *Soit Ω un sous ensemble de $X = C([a,b],E)$, Ω est équicontinue si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que*
$|t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow |T(t_1) - T(t_1)| \leq \epsilon$, pour tout $t_1, t_2 \in [a,b]$ et $T \in \Omega$.

Définition 1.3.5. *Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace vectoriel normé. Une application T de X dans X est dite contractante s'il existe un nombre positive $\kappa \in]0,1[$, telle que pour tout $x, y \in X$ on a*

$$\|T(x) - T(y)\|_X \leq \kappa \|x - y\|_X.$$

Définition 1.3.6. *Soient X un espace vectoriel normé de norme $\|.\|$ et T une application d'un ensemble X dans lui même. On appelle point fixe de T tout point $x \in X$ tel que*

$$Tx = x.$$

Définition 1.3.7. *Soient X et Y deux espaces de Banach. L'opérateur continu $T : X \to Y$ est complètement continu s'il transforme tout borné de X en une partie relativement compacte dans Y.*

Théorème 1.3.1. ***(Théorème du Point Fixe de Banach [3])***
Soient X un espace de Banach et $T : X \to Y$ est un opérateur contractant. Alors il existe un point fixe unique $x \in X$ tel que $Tx = x$.

Théorème 1.3.2. ***(Théorème d'Arzelà-Ascoli [20])***
Soit Ω un ensemble de X. Alors Ω est relativement compact dans X si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées
1. Ω est uniformément borné,
2. Ω est équicontinu.

Théorème 1.3.3. ***(Schauder [17])***
Soit C un convexe fermé non vide de l'espace de Banach E et $A : C \to C$ un opérateur compact. Alors A a un point fixe dans C.

1.4 Types de stabilité

Pour étudier la stabilité de la solution, on doit considérer l'équation différentielle fractionnaire suivante

$$\begin{cases} ({}^H D_1^{\alpha,\beta} u)(t) = f(t, u(t)); t \in J := [1, T], \\ ({}^H I_1^{1-\gamma} u)(t) \mid_{t=1} = \Phi. \end{cases} \tag{1.1}$$

On obtient les conditions suffisantes pour la stabilité de la solution. En particulier, quatre types des résultats de stabilité de type Ulam sont discutés. C'est la stabilité d'Ulam-Hyers, la stabilité généralisée d'Ulam-Hyers, la stabilité d'Ulam-Hyers-Rassias et la stabilité généralisée d'Ulam-Hyers-Rassias.

Soit $\epsilon > 0$ et $\Phi : I \to (0, \infty[$ un fonction continue. On considère les inégalités suivantes :

$$|({}^H D_1^{\alpha,\beta} u)(t) - f(t, u(t)| \leq \epsilon; t \in J, \tag{1.2}$$

$$|({}^H D_1^{\alpha,\beta} u)(t) - f(t, u(t)| \leq \Phi(t); t \in J, \tag{1.3}$$

$$|({}^H D_1^{\alpha,\beta} u)(t) - f(t, u(t)| \leq \epsilon\Phi(t); t \in J. \tag{1.4}$$

Définition 1.4.1 ([1]-[14])**.** *Le problème (1.1) est Ulam-Hyers stable s'il existe un nombre réel* $c_f > 0$ *tel que pour chaque* $\epsilon > 0$ *et pour chaque solution* $u \in C_{\gamma,\ln}$ *d'inégalité (1.2) il existe une solution* $v \in C_{\gamma,\ln}$ *de (1.1) avec* $|u(t) - v(t)| \leq \epsilon c_f, t \in J$

Définition 1.4.2 ([1]-[14])**.** *Le problème (1.1) est stable d'Ulam-Hyers généralisé s'il existe* $c_f : C([0,\infty), [0,\infty))$ *avec* $c_f(0) = 0$ *tel que pour tout* $\epsilon > 0$ *et pour toute solution* $u \in C_{\gamma,\ln}$ *d'inégalité (1.2) il existe une solution* $v \in C_{\gamma,\ln}$ *de (1.1) avec* $|u(t) - v(t)| \leq c_f(\epsilon), t \in J$.

Définition 1.4.3 ([1]-[14])**.** *Le problème (1.1) est Ulam-Hyers-Rassias stable par rapport à* Φ *si il existe un nombre réel* $c_{f,\Phi} > 0$ *tel que pour chaque* $\epsilon > 0$ *et pour chaque solution* $u \in C_{\gamma,\ln}$ *, d'inégalité (1.4) il existe une solution* $v \in C_{\gamma,\ln}$ *de (1.1) avec* $|u(t) - v(t)| \leq \epsilon c_{f,\Phi}\Phi(t); t \in J$.

Définition 1.4.4 ([1]-[14])**.** *Le problème (1.1) est d'Ulam-Hyers-Rassias généralisé stable par rapport à* Φ *s'il existe un nombre réel* $c_{f,\Phi} > 0$ *tel que pour chaque solution* $u \in C_{\gamma,\ln}$ *de l'inégalité (1.3) il existe une solution* $v \in C_{\gamma,\ln}$ *de (1.1) avec* $v \in C_{\gamma,\ln}$ *de (1.1) avec* $|u(t) - v(t)| \leq \epsilon c_{f,\Phi}\Phi(t); t \in J$.

Remarque 1.4.1. *Il est clair que*

(i) Définition 1.4.1 $\Rightarrow$ *Définition 1.4.2,*

(ii) Définition 1.4.3 $\Rightarrow$ *Définition 1.4.4,*

(iii) Définition 1.4.3 pour $\Rightarrow$ *Définition 1.4.1.*

On peut faire des remarques similaires pour les inégalités (1.2) et (1.4).

Chapitre 2

Solution positive d'un problème fractionnaire non linéaire

2.1 Position du problème

Dans ce chapitre on étudie le problème différentiel fractionnaire non-linéaire suivant

$$\begin{cases} {}^{Hc}D_1^{\alpha}(t) = f(t, x(t)), 1 < t \leq T, 1 < \alpha \leq 2, \\ x(1) = \theta_1 > 0, x'(1) = \theta_2 > 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

Où ${}^{Hc}D_1^{\alpha}$ l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo-Hadamard et

$f : [1, T] \times [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ fonction continue tel que $J = [1, T]$ et $X = C(J)$

2.2 Quelques lemmes et définitions

On va présenter quelque lemmes et définitions qui seront utiles dans la suit.

Définition 2.2.1. *Les fonctions de contrôle supérieure et inférieur est définie par :*
Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$ *tel que* $b > a, x \in [a, b]$

$$U(t,x) = \sup\{f(t,\lambda) : a \leq \lambda \leq x\},$$

$$L(t,x) = \inf\{f(t,\lambda) : x \leq \lambda \leq b\},$$

Où

$$L(t,x) \leq f(t,x) \leq U(t,x).$$

Lemme 2.2.1. *Soit* $x \in C^1(J)$ *et* $x^{(2)}$ *existe,* x *est solution du problème (2.1) telle que*

$$x(t) = \theta_1 + \theta_2 \log t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s}. \tag{2.2}$$

Preuve : Soit x une solution de (2.1). Nous écrivons d'abord cette équation sous la forme

$$({}^H I_1^\alpha)({}^{Hc}Dx)(t) = ({}^H I_1^\alpha) f(t, x(t)), 1 < t \leq T.$$

Du lemme 1.2.1, nous avons

$$\begin{aligned} x(t) - x(1) - x'(1)\log t &= ({}^H I_1^\alpha) f(t, x(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s}, \end{aligned}$$

Alors, on obtient (2.2). Comme chaque étape est réversible, l'inverse s'ensuit facilement. Ceci achève la preuve.

2.3 Existence de la solution positive

Dans cette section on démontre l'existence de la solution positive dans l'espace de Banach $X = C(J)$ défini sur $J = [1, T]$ muni de la norme

$$\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|.$$

Et on note A l'ensemble définit par

$$A = \{x \in X : x(t) \geq 0, t \in J\}.$$

Tout le long de cette section, on supposons que $f : JxX \longrightarrow X$ et on définit l'opérateur $\Phi : A \longrightarrow A$ par

$$(\Phi x)(t) = \theta_1 + \theta_2 \log t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s},$$

Où le point fixe figuré doit satisfaire l'équation de l'opérateur d'identité $\Phi x = x$. Les hypothèses suivantes sont nécessaires pour les prochains résultats.

$(\mathcal{H}_1)$ Soient $x^*, x_* \in A$, tels que $0 < a \leq x_*(t) \leq x^*(t) \leq b$ et

$$\begin{cases} {}^{Hc}D_1^{\alpha} x^*(t) \geq U(t, x^*(t)), \\ {}^{Hc}D_1^{\alpha} x_*(t) \leq L(t, x_*(t)), \end{cases}$$

Pour tout $t \in J$.

$(\mathcal{H}_2)$ Pour $t \in J$ et $x, y \in X$, il existe un nombre réel positif $\lambda < 1$ tel que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \lambda \|x - y\|.$$

Les fonctions x^* et x_* sont respectivement appelées la paire de solutions supérieure et inférieure pour (2.1).

Théorème 2.3.1. *Supposons que l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ est vérifiée le problème (2.1) a au moins une solution vérifiant :*

$$x_*(t) \leq x(t) \leq x^*(t), \ t \in J.$$

Preuve : Soit $C = \{x \in A : x_*(t) \leq x(t) \leq x^*(t), \ t \in J\}$, muni de la norme $\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)|$ alors on a $\|x\| \leq b$. Ainsi, C est un sous-ensemble convexe, borné et fermé de l'espace de

Banach X. De plus, la continuité de f implique la continuité de l'opérateur Φ sur C défini par (2.2). Or, si $x \in C$ il existe une constante positive c telle que

$$\max = \{f(t, x(t)) : t \in J,\ x(t) \leq b\} < c.$$

Alors

$$\begin{aligned}|(\Phi x)(t)| &\leq \theta_1 + \theta_2 \log t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} |f(s, x(s))| \frac{ds}{s} \\ &\leq \theta_1 + \theta_2 \log T + \frac{c(\log t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.\end{aligned}$$

Donc

$$\|\Phi x\| \leq \theta_1 + \theta_2 \log T + \frac{c(\log T)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = M.$$

Par conséquent, $\Phi(C)$ est uniformément borné. Ensuite, nous prouvons l'équicontinuité de $\Phi(C)$. Soit $t_1, t_2 \in J, 1 \leq t_1 < t_2 \leq T$ et soit $x \in C$, alors

$$\begin{aligned}|(\Phi x)(t_2) - (\Phi x)(t_1)| &\leq \theta_2(\log t_2 - \log t_1) \\ &+ |\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{t_1} (\log \frac{t_2}{s})^{\alpha-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{t_2} (\log \frac{t_1}{s})^{\alpha-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s}| \\ &\leq \theta_2(\log t_2 - \log t_1) \\ &+ |\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{t_1} [(\log \frac{t_2}{s})^{\alpha-1} - \log \frac{t_1}{s})^{\alpha-1}] f(s, x(s)) \frac{ds}{s} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (\log \frac{t_2}{s})^{\alpha-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s}| \\ &\leq \theta_2(\log t_2 - \log t_1) \\ &+ \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{t_1} [(\log \frac{t_2}{s})^{\alpha-1} - \log \frac{t_1}{s})^{\alpha-1}] \frac{ds}{s} + \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (\log \frac{t_2}{s})^{\alpha-1} \frac{ds}{s} \\ &\leq \theta_2(\log t_2 - \log t_1) + \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)} [|(\log t_2)^\alpha - (\log t_1)^\alpha| + |\log \frac{t_2}{t_1}|^\alpha].\end{aligned}$$

Lorsque $t_1 \to t_2$, le membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Donc $\Phi(C)$ est équicontinu. Le théorème d'Arzela-Ascoli implique que $\Phi : A \longrightarrow A$ est compact. La seule chose à appliquer au point fixe de Schauder est de prouver que $\Phi(C) \subseteq C$. Soit $x \in C$, alors par hypothèses, on a

$$\begin{aligned}(\Phi x)(t) &= \theta_1 + \theta_2 \log t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s} \\ &\leq \theta_1 + \theta_2 \log t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} U(s, x(s)) \frac{ds}{s} \\ &\leq \theta_1 + \theta_2 \log t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} U(s, x^*(s)) \frac{ds}{s} \\ &\leq x^*(t),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\Phi x)(t) &= \theta_1 + \theta_2 \log t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s} \\ &\geq \theta_1 + \theta_2 \log t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} L(s, x(s)) \frac{ds}{s} \\ &\geq \theta_1 + \theta_2 \log t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} L(s, x_*(s)) \frac{ds}{s} \\ &\geq x_*(t).\end{aligned}$$

Par conséquent, $x_* \leq (\Phi x)(t) \leq x^*(t)$, $t \in J$, c'est-à-dire $\Phi(C) \subseteq C$. Selon le théorème du point fixe de Schauder, l'opérateur Φ a au moins un point $x \in C$. Par conséquent, le problème (2.1) admet au moins une solution positive $x \in X$ et $x_*(t) \leq x(t) \leq x^*(t)$, pour $t \in J$.

Ensuite, nous considérons de nombreux cas particuliers du théorème précédent.

Corollaire 2.3.1. *Supposons qu'il existe des fonctions continues k_1 et k_2 telles que* $0 < k_1(t) \leq f(t, x(t)) \leq k_2(t) < \infty$, *pour* $(t, x(t)) \in J \times [0, +\infty)$.
Alors le problème (2.1) admet au moins une solution positive $x \in X$. De plus,

$$\beta(t) + ({}^H I_1^\alpha) k_1(t) \leq x(t) \leq \beta(t)) + ({}^H I_1^\alpha) k_2(t), \tag{2.3}$$

Avec $\beta(t) = \theta_1 + \theta_2 \log t$.

Preuve : Par l'hypothèse donnée et la définition des fonctions de contrôle, nous avons $k_1(t) \leq L(t,x(t)) \leq U(t,x(t)) \leq k_2(t)$, $(t,x(t)) \in J\times[a,b]$. Maintenant, on considère l'équations

$$\begin{aligned} &{}^{Hc}D_1^{\alpha}x(t) = k_1(t),\ \ x(1)=\theta_1,\ \ x'(1)=\theta_2,\\ &{}^{Hc}D_1^{\alpha}x(t) = k_2(t),\ \ x(1)=\theta_1,\ \ x'(1)=\theta_2, \end{aligned} \tag{2.4}$$

Évidemment, les équations (2.4) sont équivalentes à
$x(t) = \beta(t) + ({}^{H}I_1^{\alpha})k_1(t)$,
$x(t) = \beta(t) + ({}^{H}I_1^{\alpha})k_2(t)$.
Ainsi, le premier implique
$x(t) - \beta(t) = ({}^{H}I_1^{\alpha})k_1(t) \leq ({}^{H}I_1^{\alpha})L(t,x(t))$,
et la seconde implique
$x(t) - \beta(t) = ({}^{H}I_1^{\alpha})k_2(t) \geq ({}^{H}I_1^{\alpha})U(t,x(t))$,
qui sont respectivement les solutions supérieure et inférieure des équations (2.4). Une application du théorème 2.3.1 donne que le problème (2.1) a au moins une solution $x \in X$ et satisfait (2.3).

Corollaire 2.3.2. *Supposons que* $0<\sigma<k(t)=\lim\limits_{x\to\infty} f(t,x)<\infty$ *pour* $t\in J$ *. Alors le problème (2.1) admet au moins une solution positive* $x\in X$ *.*

Preuve : Par hypothèse, si $x>\rho>0$, alors $0\leq |f(t,x)-k(t)|<\sigma$ pour tout $t\in J$.
D'où, $0<k(t)-\sigma\leq f(t,x)\leq k(t)+\sigma$ pour $t\in J$. et $\rho<x<+\infty$.
Maintenant si

$$\max\{f(t,x) : t\in J, x\leq\rho\}\leq \upsilon,$$

Alors

$k(t) - \sigma \leq f(t,x) \leq k(t) + \sigma + \upsilon$ pour $t \in J$. et $0 < x < +\infty$.

D'après le corollaire 2.3.1, le problème (2.1) admet au moins une solution positive $x \in X$ vérifiant

$$\beta(t) + ({}^H I_1^\alpha)k(t) - \frac{\sigma(\log)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \leq x(t) \leq \beta(t) + ({}^H I_1^\alpha)k(t) + \frac{(\sigma+\upsilon)(\log)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

2.4 Unicité de la solution positive

L'unicité de la solution positive du problème (2.1) es basée sur théorèmes des points fixes dans les espaces de Banach.

Théorème 2.4.1. *Supposons que $T \leq e$, $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ sont satisfaites, le problème (2.1) a une solution positive unique $x \in X$.*

Preuve : Du théorème 2.3.1, il résulte que le problème (2.1) admet au moins une solution positive C. Il suffit donc de prouver que l'opérateur Φ défini dans (2.2) est une contraction sur X. En fait, pour tout $x, y \in X$, on a

$$\begin{aligned} |(\Phi x)(t) - (\Phi y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| \frac{ds}{s} \\ &\leq \frac{\lambda(\log T)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|x-y\|. \end{aligned}$$

Si $1 < \alpha \leq 2$ alors $1 < \Gamma(\alpha+1) \leq 2$ implique $\dfrac{\lambda(\log T)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$. Par conséquent, l'opérateur Φ est une application de contraction . Par conséquent, le problème (2.1) a une solution positive unique $x \in X$.

2.5 Exemple

Le problème fractionnaire suivant

$$\begin{cases} {}^{Hc}D_1^{\frac{4}{3}}x(t) = 2e + \dfrac{t}{(2+\cos t)e^{x(t)}}, \; 1 < t \leq T \leq e, \\ x(1) = \theta_1, \; x' = \theta_2, \end{cases} \tag{2.5}$$

où $f(t,x) = 2e + \dfrac{t}{(2+\cos t)e^{x(t)}}$, $\alpha = \dfrac{4}{3}$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}(2e + \dfrac{t}{(2+\cos t)e^{x(t)}}) = 2e$ et $2e \leq 2e + \dfrac{t}{2e^{x(t)}} \leq f(t,x) \leq 2e + \dfrac{t}{e^{x(t)}} \leq 2e + \dfrac{t}{2} \leq 2e + \dfrac{T}{2} \leq \dfrac{5e}{2}$ pour $(t,x) \in [1,T] \times [0,+\infty)$, donc par n'importe lequel des corollaires ci-dessus, l'équation (2.5) a une solution positive. Nous avons perdu la propriété d'unicité de la solution existante car le principe de contraction n'est pas applicable sur la fonction $f(t,x)$.

Chapitre 3

Étude de l'existence et la stabilité au sens d'Ulam des solutions d'un problème fractionnaire non linéaires

3.1 Position du problème

Dans ce chapitre, nous discutons de l'existence et de la stabilité Ulam des solutions pour le problème suivant des équations différentielles fractionnaires de Hilfer-Hadamard de la forme

$$\begin{cases} ({}^{H}D_{1}^{\alpha,\beta}u)(t) = f(t,u(t)); \ t \in J := [1,T], \\ ({}^{H}I_{1}^{1-\gamma}u)(t)\,|_{t=1} = \phi, \end{cases} \tag{3.1}$$

Où $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in [0,1]$, $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$, $T > 1$, $\phi \in \mathbb{R}$, $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée, ${}^{H}I_{1}^{1-\gamma}$ est l'intégrale de Hadamard à gauche d'ordre $1-\gamma$, et ${}^{H}D_{1}^{\alpha,\beta}$ est la dérivée fractionnaire de Hilfer-Hadamard d'ordre α et de type β, introduite par Hilfer dans [5] .

3.2 Quelques lemmes et définitions

On va présenter quelque lemmes et définitions qui seront utiles dans la suit.

Définition 3.2.1. *Par solution du problème (3.1), on entend une fonction mesurable* $u \in C_{\gamma,\ln}$ *qui satisfait la condition* $({}^H I_1^{1-\gamma} u)(1^+) = \phi$ *et l'équation* $({}^H D_1^{\alpha,\beta} u)(t) = f(t, u(t))$ *sur* J.
Les hypothèses suivantes seront utilisées dans la suite.
(H_1) *La fonction* $t \mapsto f(t,u)$ *est mesurable sur* I *pour tout* $u \in C_{\gamma,\ln}$ *et la fonction* $u \mapsto f(t,u)$ *est continue sur* $C_{\gamma,\ln}$ *pour* $t \in J$.
(H_2) *Il existe une fonction continue* $p : I \longrightarrow [0,\infty)$ *telle que* $|f(t,u)| \leq \dfrac{p(t)}{1+|u|}|u|$ *pour* $t \in J$, *et chaque* $u \in \mathbb{R}$.
Soit $p^* = \sup\limits_{t\in J} p(t)$.

Lemme 3.2.1. *Soit* $f : I \times E \longrightarrow E$ *tel que* $f(.,u(.)) \in C_{\gamma,\ln}(J)$ *pour tout* $u \in C_{\gamma,\ln}(J)$. *Alors problème (3.1) est équivalent au problème des solutions de l'équation intégrale de Volterra*

$$u(t) = \frac{\phi}{\Gamma(\gamma)}(\ln t)^{\gamma-1} + ({}^H I_1^{\alpha} f(.,u(.)))(t).$$

.

3.3 Existence de la solution

Maintenant, nous allons démontrer le théorème suivant concernant l'existence de solutions du problème (3.1)

Théorème 3.3.1. *Supposons que les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *soient vérifiées. Alors le problème (3.1) admet au moins une solution définie sur* J.

Preuve : Considérons l'opérateur $N : C_{\gamma,\ln} \longrightarrow C_{\gamma,\ln}$ défini par

$$(Nu)(t) = \frac{\phi}{\Gamma(\gamma)}(\ln t)^{\gamma-1} + \int_1^t (\ln \frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{f(s,u(s))}{s\Gamma(\alpha)} ds. \tag{3.2}$$

Clairement, les points fixes de l'opérateur N sont solution du problème (3.1).
Pour tout $u \in C_{\gamma,\ln}$ et chaque $t \in J$, on a

$$
\begin{aligned}
|(\ln t)^{1-\gamma}(Nu)(t)| &\leq \frac{|\phi|}{\Gamma(\gamma)} + \frac{(\ln t)^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln \frac{t}{s})^{\alpha-1} |f(s,u(s))| \frac{ds}{s} \\
&\leq \frac{|\phi|}{\Gamma(\gamma)} + \frac{(\ln t)^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln \frac{t}{s})^{\alpha-1} p(s) \frac{ds}{s} \\
&\leq \frac{|\phi|}{\Gamma(\gamma)} + \frac{p^*(\ln T)^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln \frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{ds}{s} \\
&\leq \frac{|\phi|}{\Gamma(\gamma)} + \frac{p^*(\ln T)^{1-\gamma+\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\|N(u)\|_C \leq \frac{|\phi|}{\Gamma(\gamma)} + \frac{p^*(\ln T)^{1-\gamma+\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} := R. \tag{3.3}
$$

Ceci prouve que N transforme la boule $B_R := B(0,R) = \{w \in C_{\gamma,\ln} : \|w\|_C \leq R\}$ en elle-même. Nous allons montrer que l'opérateur $N : B_R \longrightarrow B_R$ vérifie toutes les hypothèses du théorème 1.3.3. La preuve sera donnée en plusieurs étapes.

Étape 1 : $N : B_R \longrightarrow B_R$ est continu. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \longrightarrow u$ dans B_R . Alors, pour chaque $t \in J$, on a

$$
|(\ln t)^{1-\gamma}(Nu_n)(t) - (\ln t)^{1-\gamma}(Nu)(t)| \leq \frac{(\ln t)^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln \frac{t}{s})^{\alpha-1} |f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))| \frac{ds}{s}. \tag{3.4}
$$

Puisque $u_n \longrightarrow u$ lorsque $n \longrightarrow \infty$ et f est continue, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, l'équation (3.4) implique
$\|N(u_n) - N(u)\|_C \longrightarrow 0$ as $n \longrightarrow \infty$.

Étape 2 : $N(B_R)$ est uniformément borné. Ceci est clair puisque $N(B_R) \subset B_R$ et B_R est borné.

Étape 3 : $N(B_R)$ est équicontinu.

Soit $t_1, t_2 \in J,\ t_1 < t_2$ et soit $u \in B_R$. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}
|(\ln t_2)^{1-\gamma}(Nu_n)(t_2) - (\ln t_1)^{1-\gamma}(Nu)(t_1)| &\leq |(\ln t_2)^{1-\gamma}\int_1^{t_2}(\ln\frac{t_2}{s})^{\alpha-1}\frac{f(s,u(s))}{s\Gamma(\alpha)}ds \\
&- (\ln t_1)^{1-\gamma}\int_1^{t_1}(\ln\frac{t_1}{s})^{\alpha-1}\frac{f(s,u(s))}{s\Gamma(\alpha)}ds| \\
&\leq (\ln t_2)^{1-\gamma}\int_{t_1}^{t_2}(\ln\frac{t_2}{s})^{\alpha-1}\frac{|f(s,u(s))|}{s\Gamma(\alpha)}ds \\
&+ \int_1^{t_1}|(\ln t_2)^{1-\gamma}(\ln\frac{t_2}{s})^{\alpha-1} - (\ln\frac{t_1}{s})^{\alpha-1}|\frac{|f(s,u(s))|}{s\Gamma(\alpha)}ds \\
&\leq (\ln t_2)^{1-\gamma}\int_{t_1}^{t_2}(\ln\frac{t_2}{s})^{\alpha-1}\frac{p(s)}{s\Gamma(\alpha)}ds \\
&+ \int_1^{t_1}|(\ln t_2)^{1-\gamma}(\ln\frac{t_2}{s})^{\alpha-1} - (\ln t_1)^{1-\gamma}(\ln\frac{t_1}{s})^{\alpha-1}|\frac{p(s)}{s\Gamma(\alpha)}ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned}
|(\ln t_2)^{1-\gamma}(Nu_n)(t_2) - (\ln t_1)^{1-\gamma}(Nu)(t_1)| &\leq \frac{p_*(\ln T)^{1-\gamma+\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}(\ln\frac{t_2}{t_1})^{\alpha} \\
&+ \frac{p_*}{\Gamma(\alpha)} + \int_1^{t_1}|(\ln t_2)^{1-\gamma}(\ln\frac{t_2}{s})^{\alpha-1} - (\ln t_1)^{1-\gamma}(\ln\frac{t_1}{s})^{\alpha-1}|\,ds.
\end{aligned}$$

Lorsque $t_1 \longrightarrow t_2$ le membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Suite aux étapes 1 à 3 et au théorème d'Arzelá-Ascoli, nous pouvons conclure que N est continu et compact. D'une application du théorème de Schauder (Théorème 1.3.3), on déduit que N admet au moins un point fixe u solution du problème (3.1).

3.4 Stabilité d'Ulam-Hyers-Rassias

Maintenant, nous nous intéressons à la stabilité généralisée Ulam-Hyers-Rassias de notre problème (3.1).

Théorème 3.4.1. *Supposons que les hypothèses* (H_1) , (H_2) *et les hypothèses suivantes soient vérifiées*
(H_3) *Il existe* $\lambda_\Phi > 0$ *tel que pour tout* $t \in J$ *, on ait*

$$({}^H I_1^\alpha \Phi)(t) \leq \lambda_\Phi \Phi(t);$$

(H_4) *Il existe* $q \in C(J, [0, \infty)$ *tel que pour tout* $t \in J$ *, on ait*

$$p(t) \leq q(t)\Phi(t).$$

Alors le problème (3.1) est stable d'Ulam-Hyers-Rassias généralisé .

Preuve : Considérons l'opérateur $N : C_{\gamma,\ln} \longrightarrow C_{\gamma,\ln}$ défini en (3.2). Soit u une solution de l'inégalité (1.3), et supposons que v soit une solution du problème (3.1). Ainsi, nous avons

$$v(t) = \frac{\phi}{\Gamma(\gamma)}(\ln t)^{\gamma-1} + \int_1^t (\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{f(s,v(s))}{s\Gamma(\alpha)}ds.$$

D'après l'inégalité (1.3), pour chaque $t \in J$, on a

$$|u(t) - \frac{\phi}{\Gamma(\gamma)}(\ln t)^{\gamma-1} - \int_1^t (\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{f(s,u(s))}{s}ds| \leq ({}^H I_1^\alpha \Phi)(t).$$

Soit $q^* = \sup_{t\in J} q(t)$.
A partir des hypothèses (H_3) et (H_4) , pour chaque $t \in J$ on obtient

$$\begin{aligned}
|u(t) - v(t)| &\leq |u(t) - \frac{\phi}{\Gamma(\gamma)}(\ln t)^{\gamma-1} - \int_1^t (\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{f(s,u(s))}{s}ds| \\
&+ \int_1^t (\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{|f(s,u(s)) - f(s,v(s))|}{s\Gamma(\alpha)}ds \\
&\leq ({}^H I_1^\alpha \Phi)(t) + \int_1^t (\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{2q^*\Phi(s)}{s\Gamma(\alpha)} \\
&\leq \lambda_\Phi(t) + 2q^*({}^H I_1^\alpha \Phi)(t) \\
&[1 + 2q^*]\lambda_\Phi \Phi(t) \\
&:= c_{f,\Phi}\Phi(t).
\end{aligned}$$

Ainsi, le problème (3.1) est stable Ulam-Hyers-Rassias généralisé.

Dans la suite, nous utiliserons le théorème suivant.

Théorème 3.4.2. *Soit* (Ω, d) *un espace métrique complet généralisé et* $\Theta : \Omega \longrightarrow \Omega$ *un opérateur strictement contractif avec une constante de Lipschitz* $L < 1$ *. S'il existe un entier non négatif* k *tel que* $d(\Theta^{k+1}x, \Theta^k x) < \infty$ *pour un certain* $x \in \Omega$ *, alors les propositions suivantes sont vraies :*
(A) *La suite* $(\Theta^k x)_{n\in N}$ *converge vers un point fixe* x^* *de* Θ *;*
(B) x^* *est l'unique point fixe de* Θ *dans* $\Omega^* = \{y \in \Omega \mid d(\Theta)^k x, y) < \infty\}$ *;*
(C) $y \in \Omega^*$ *,alors* $d(y, x^*) \leq \dfrac{1}{1-L} d(y, \Theta x)$ *.*
Soit $X = X(I, \mathbb{R})$ *l'espace métrique, avec la métrique*

$$d(u, v) = \sup_{t\in J} \frac{\| u(t) - v(t) \|_C}{\Phi(t)}.$$

Théorème 3.4.3. *Supposons que* (H_3) *et l'hypothèse suivante sont vérifiées.*
(H_5) *Il existe* $\varphi \in C(J, [0, \infty))$ *tel que pour tout* $t \in J$ *et tout* $u, v \in \mathbb{R}$ *, on a*

$$|f(t, u) - f(t, u)| \leq (\ln t)^{1-\gamma} \varphi(t) \Phi(t) |u - v|.$$

Si

$$L := (\ln T)^{1-\gamma} \varphi^* \lambda_\Phi < 1, \tag{3.5}$$

où $\varphi^* = \sup_{t\in J} \varphi(t)$, alors il existe une unique solution u du problème u_0 , et le problème (3.1) est stable Ulam-Hyers-Rassias généralisé. De plus, nous avons

$$|u(t) - u_0(t)| \leq \frac{\Phi(t)}{1-L}.$$

Preuve : Soit $N : C_{\gamma,ln} \longrightarrow C_{\gamma,ln}$ l'opérateur défini en (3.2). En appliquant le théorème 3.4.2, on a

$$\begin{aligned}
|(Nu)(t)-(Nv)(t)| &\leq \int_1^t (\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{|f(s,u(s))-f(s,v(s))|}{s\Gamma(\alpha)}ds \\
&\leq \int_1^t (\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{\varphi(s)\Phi(s)|(\ln s)^{1-\gamma}u(s)-(\ln s)^{1-\gamma}v(s)|}{s\Gamma(\alpha)}ds \\
&\leq \int_1^t (\ln\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{\varphi^*\Phi(s)\|u-v\|_C}{s\Gamma(\alpha)}ds \\
&\leq \varphi^*({}^H I_1^{\alpha}\Phi)(t)\|u-v\|_C \\
&\leq \varphi^*\lambda_\phi\Phi(t)\|u-v\|_C.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$|(\ln t)^{1-\gamma}(Nu)(t)-(\ln t)^{1-\gamma}(Nv)(t)| \leq (\ln T)^{1-\gamma}\varphi^*\lambda_\phi\Phi(t)\|u-v\|_C.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$d(N(u),N(v)) = \sup_{t\in J}\frac{\|(Nu)(t)-(Nv)(t)\|_C}{\Phi(t)} \leq L\|u-v\|_C,$$

d'où on conclut le théorème.

3.5 Exemple

Comme application de nos résultats, nous considérons le problème suivant de l'équation différentielle fractionnaire de Hilfer-Hadamard de la forme

$$\begin{cases} ({}^H D_1^{\frac{1}{3},\frac{1}{3}}u)(t) = f(t,u(t)); \;\; t\in[1,e], \\ ({}^H I_1^{\frac{4}{9}}u)(t)\,|_{t=1} = 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

Où

$$\begin{cases} f(t,u) = \dfrac{(t-1)^{-4/9}\sin(t-1)|u|}{1+|u|}; \;\; t\in(1,e], u\in\mathbb{R}, \\ f(1,u) = 0; \;\; u\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Il est clair que la fonction f est continue. L'hypothèse (H_2) est satisfaite de

$$\begin{cases} p(t) = (t-1)^{-4/9}|\sin(t-1)|; \ \ t \in (1,e], \\ p(1) = 0. \end{cases}$$

Ainsi, le théorème 3.3.1 implique que le problème (3.6) admet au moins une solution définie sur $[1,e]$. De plus, l'hypothèse (H_3) se satisfait de

$$\Phi(t) = e^3, \ \ and \ \ \lambda_\Phi = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

En effet, pour chaque $t \in [1,e]$ on obtient

$$\begin{aligned} ({}^H I_1^\alpha \Phi)(t) &\leq \frac{2e^3}{\sqrt{\pi}} \\ &= \lambda_\Phi(t) \end{aligned}$$

Par conséquent, le théorème 3.4.1 implique que le problème (3.6) est stable d'Ulam-Hyers-Rassias généralisé.

Conclusions

Dans cette étude, on a présenté deux types du théorème de point fixe, le premier est de Banach pour démontrer l'existance et l'unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaires non linéaire.
La deuxiéme type est de Schauder pour démontrer l'existance. Et nous nous intéressons à la stabilité généralisée Ulam-Hyers-Rassias.

Bibliographie

[1] S. Abbas, M.Benchohra, N'Guérékata, GM : Topics in Fractional Differential Equations. Springer, New York (2012)

[2] N. Boccara, Analyse Fonctionnelle une introduction pour physiciens, 1984.

[3] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory. Springer, New York. 123 (2003).

[4] J. Hadamard : Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. J. Math. Pures Appl. 4(8), 101-186 (1892)

[5] R. Hilfer : Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific, Singapore (2000)

[6] R. Hilfer : Threefold introduction to fractional derivatives. In : Anomalous Transport : Foundations and Applications, pp. 17-73 (2008)

[7] Hyers, DH : On the stability of the linear functional equation. Proc. Natl. Acad. Sci. 27, 222-224 (1941)

[8] A.A. Kilbas : Hadamard-type fractional calculus. J. Korean Math. Soc. 38(6), 1191-1204 (2001)

[9] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[10] A. Kolmogorov, S. Fomine, Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle., 2ème éditions Mir-Moscou. 1974.

[11] M. Matar, On existence of positive solution for initial value problem of nonlinear fractional differential equations of order $1 < \alpha \leqslant 2$,

[12] MD.Qassim, Furati, KM, Tatar, N-E : On a differential equation involving Hilfer-Hadamard fractional derivative. Abstr. Appl. Anal. 2012, Article ID 391062 (2012)

[13] Rassias, TM : On the stability of linear mappings in Banach spaces. Proc. Am. Math. Soc. 72, 297-300 (1978)

[14] I.A. Rus : Ulam stability of ordinary differential equations. Stud. Univ. Babes?Bolyai, Math. LIV(4), 125-133 (2009)

[15] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives.Theory and Applications, Yverdon : Gordon and Breach, Amsterdam, 1993.

[16] L. Schwartz, Analyse Topologie générale et analyse fonctionnelle, Édition Corrigée Paris. 2008.

[17] D.R. Smart : Fixed point theorems. Cambridge University Press, Cambridge (1980).

[18] Z. Tomovski, Hilfer. R, Srivastava. HM : Fractional and operational calculus with generalized fractional derivative operators and Mittag-Leffler type functions. Integral Transforms Spec. Funct. 21(11), 797-814 (2010)

[19] Ulam, SM : A Collection of Mathematical Problems. Interscience, New York (1968)

[20] W. Yang, Positive solutions for singular coupled integral boundary value problems of nonlinear Hadamard fractional differential equations. J. Nonlinear Sci. Appl. 8 (2015), 110-129.