République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par : **Mlle. TABANE Imane**

Intitulé

Sur la concentration de masse d'un condensat de BOSE-EINSTEIN

Dirigé par : Dr. AISSAOUI Narimane

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. BOUSSETILA Nadjib**	**PR**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. AISSAOUI Narimane**	**MCB**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. BOUAFIA Mousaab**	**MCA**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2023

Remerciements

Je remercie Allah le tout puissant qui m'accordé la santé et la patience durant toutes ces années que je viens aujourd'hui et présenter ce travail.

Tout d'abord, ce travail n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Mlle.AISSAOUI Narimane. Je la remercie infiniment pour sa patience, sa confiance, ses précieux conseils et sa disponibilité durant l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens à remercier Mr.BOUSSETILA Nadjib pour l'honneur qu'il a bien voulu faire en acceptant de présider le jury.

Mes remerciements vont aussi à Mr.BOUAFIA Mousaab pour avoir accepté d' examiner ce mémoire, ce qui m'inspire un grand honneur.

Je tiens à témoigner mes sincères remerciements à tous les enseignants du département mathématiques et à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à ma formation.

Je tiens à exprimer ma gratitude sincère au Mme.ACHOURI Meriem qui m'a supervisé et guidé lors de mon stage au niveau du lycée de MAHMOUD BEN MAHMOUD.

Votre soutien précieux et votre mentorat ont joué un rôle essentiel dans la construction de ma recherche et dans l'approfondissement de ma compréhension de l'enseignement des mathématiques.

Dédicace

Du profond de mon coeur, Je dédie ce modeste travail:

Mes chères parents, aucun dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien être. Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours. Puisse dieu, le très Haut, vous accorder santé, bonheur et longue vie.

A ma encadrante Mlle.AISSAOUI Narimane qui m'a beaucoup aidé avec tous les moyens et je profite l'occasion de lui dire merci infiniment.

A ma unique soeur Riheb, je te souhaite une vie pleine du bonheur et de succès et que dieu, le tout puissant, te protège et te garde.

A mes chers petits frères adorés Abd-Raouf, Mohamed Chaker et Charaf Eddine, Je vous souhaite un avenir plein de joie, de réussite et de sérénité.

A toute ma famille et tous ceux qui me sont chers.

Abstract

We consider two-dimensional Bose–Einstein condensates with attractive interaction, described by the Gross–Pitaevskii functional. Minimizers of this functional exist only if the interaction strength a satisfies $a < a^* = ||Q||^2$, where Q is the unique positive radial solution of $-\Delta u - u + u^3 = 0$ in $\mathbb{R}^2$. We present a detailed analysis of the behavior of minimizers as a approaches a^*, where all the mass concentrates at a global minimum of the trapping potential.

Mathematics Subject Classification (2010). 35Q40, 46N50, 82D50.

Keywords. Bose–Einstein condensation, attractive interactions, Gross–Pitaevskii functional, mass concentration, symmetry breaking.

Résumé

Nous considérons des condensats de Bose-Einstein bidimensionnels avec une interaction attractive, décrits par la fonctionnelle de Gross-Pitaevskii. Les minimiseurs de cette fonctionnelle existent uniquement si la force d'interaction a satisfait à l'inégalité $a < a^* = ||Q||^2$, où Q est la solution radiale positive unique de l'équation $-\Delta u - u + u^3 = 0$ dans $\mathbb{R}^2$. Nous présentons une analyse détaillée du comportement des minimiseurs à mesure que a approche a^*, où toute la masse se concentre au minimum global du potentiel de piégeage.

Classification des sujets mathématiques (2010). 35Q40, 46N50, 82D50.

Mots-clés. Condensation de Bose-Einstein, interactions attractives, fonctionnelle de Gross-Pitaevskii, concentration de masse, rupture de symétrie.

Introduction générale

Les condensats de Bose-Einstein sont des états de la matière quantique qui se produisent à des températures très basses. Ils ont été prédits par Albert Einstein et Satyendra Nath Bose dans les années 1920, mais n'ont été observés expérimentalement qu'en 1995.

Dans un condensat de Bose-Einstein, les particules se comportent comme une seule entité cohérente plutôt que comme des individus distincts. Cette propriété est appelée la cohérence de phase qui est responsable de nombreuses propriétés étranges des condensats de Bose-Einstein, telles que leur capacité à s'écouler sans résistance.

Les condensats de Bose-Einstein sont créés en refroidissant un gaz d'atomes [2,8] à des températures extrêmement basses. À ces températures, les atomes ralentissent suffisamment pour que leurs fonctions d'onde quantiques commencent à se chevaucher, ce qui permet la formation d'un condensat de Bose-Einstein.

Il existe plusieurs méthodes pour refroidir les atomes, y compris l'utilisation de lasers pour ralentir les atomes et de champs magnétiques pour piéger les atomes dans un petit volume. Une fois que les atomes sont suffisamment froids, ils peuvent être relâchés dans un piège magnétique où ils formeront un condensat de Bose-Einstein.

Les condensats de Bose-Einstein ont de nombreuses applications potentielles dans les domaines de la physique, de la technologie et de la médecine. Par exemple, ils peuvent être utilisés pour créer des horloges atomiques plus précises, pour étudier les phénomènes quantiques tels que la supraconductivité et la superfluidité, et pour développer des capteurs de rotation ultra-sensibles.

Sommaire

目录

Chapitre 1
Les condensats de Bose-Einstein avec des interactions attractives

La condensation de Bose-Einstein se produit lorsque les particules bosoniques, soumises à des interactions attractives suffisamment fortes, se regroupent dans un état fondamental commun, appelé l'état de condensat. Dans cet état, un grand nombre de particules occupe le même état quantique, ce qui conduit à des phénomènes macroscopiques cohérents.

Lorsque les interactions attractives sont suffisamment fortes, cette équation peut avoir une solution qui présente une instabilité, c'est à dire, le système s'effondre si *le nombre des particules augmente à côté de* ***la valeur critique*** [4,5,14,15,18] et investir les détails de cet effondrement est l'intérêt principal de cet mémoire.

Nous étudions les condensats de Bose-Einstein avec des interactions attractives dans la dimension 2, décrit par l'énergie fonctionnelle Gross-Pitaeveskii (GP) [12,13,17], donnée par :

$$E_a(u) := \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2)dx - \frac{a}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^4 dx, \quad u \in \mathcal{H}, \tag{1.1}$$

où $a > 0$ est la force des interactions attractives, et $\mathcal{H}$ est défini par :

$$\mathcal{H} := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} V(x)|u(x)|^2 dx < \infty \right\} \tag{1.2}$$

avec la norme, $||u||_{\mathcal{H}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + [1 + V(x)])|u(x)|^2)dx \right\}^{\frac{1}{2}}$.
En réalité, l'énergie fonctionnelle $E_a(u)$ peut se diviser en trois parties : l'énergie cinétique $E_{cin_a}(u)$, l'énergie potentielle $E_{pot_a}(u)$ et l'énergie d'interaction $E_{int_a}(u)$, i.e.

$$E_a(u) = E_{cin_a}(u) + E_{pot_a}(u) + E_{int_a}(u),$$

avec,

$$E_{cin_a}(u) := \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x)|^2 dx, \qquad E_{pot_a}(u) := \int_{\mathbb{R}^2} V(x)|u(x)|^2 dx,$$
$$E_{int_a}(u) := \frac{a}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^4 dx.$$

Dans le but de faire une étude plus précise sur l'équation de CBE en utilisant l'énergie fonctionnelle de GP (1.1), notre mémoire est organisé en deux grande parties :

- Nous assurons l'existence d'un seuil qui entraîne l'existence d'un nombre critique des particules pour l'effondrement du condensat de Bose-Einstein, autrement, selon le seuil, nous étudions l'existence et la non-existence des minimiseurs pour $E_a(u)$.

- Nous présentons une analyse détaillée du comportement des minimiseurs à mesure que a approche de a^*, où toute la masse se concentre à un minimum global du potentiel de piégeage.

Chapitre 2

L'existence et la non-existence des minimiseurs pour le problème de minimisation

Le problème fondamental dans l'étude de CBE est de trouver le condensat stationnaire $u(x)$, en particulier *l'état fondamental* qui est l'état quantiques de *plus basse énergie.* Autrement, l'état fondamental, $u(x)$, est obtenu par la minimisation de l'énergie fonctionnelle sous la conservation de la masse totale :

$$\left\{ \begin{array}{l} Trouver\ u\ tel\ que : \\ e(a) := \min\limits_{\{u \in \mathcal{H}, ||u||_2^2 = 1\}} E_a(u). \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Pour faire notre étude de l'existence de minimiseurs de (2.1), nous assumons :

$(V_1)\ :\ V \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^2).$

$(V_2)\ :\ V(x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$

$(V_3)\ :\ \inf_{x\in\mathbb{R}^2} V(x) = 0.$

Et le résultat obtenu dans le *Théorème* 2.1 assure l'existence du seuil a^* qui entraîne l'existence d'un nombre critique des particules pour l'effondrement du condensat de Bose-Einstein [7].

Remarque 2.1. *nous pouvons imposer la contrainte* $\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^2 dx = N$*, à la place de* $\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^2 dx = 1$ *avec* N *le nombre des particules mais cette dernière peut être ramené au précédent minimisant sous la contrainte* (2.1) *en remplaçant* a *par* Na*.*

Remarque 2.2. *Le fait que* $|\nabla|u|| \leq |\nabla u|$ *p.p dans* $\mathbb{R}^2$*, nous pouvons restreindre la minimisation à des fonctions non négatives, puisque* $E_a(u) \geq E_a(|u|)$*, pour tout* $u \in \mathcal{H}$*.*

Pour celà, nous commençons par vérifier que $e(a)$ admet une certaine limite. Et tant que l'infimum est sous une fonction linéaire affine, $e(a)$ est concave et il sera claire qu'elle est décroissante en a. En utilisant la réalité que $\int |\nabla u|^2$ et $\int |u|^4$ se comportent de même manière lorsqu'elles sont soumises à une mise à l'échelle par u, (L^2 se préserve), il est facile de voir que $e(a) \geq 0$ ou $e(a) = -\infty$. Alors il est simple

de voir que l'argument variationnel mène à l'existence d'un $a^* > 0$ tel que $e(a) = -\infty$ pour $a > a^*$.
La valeur de a^* peut être déterminer par la résolution de l'équation de champ scalaire non linéaire

$$-\Delta u + u - u^3 = 0 \quad in\, \mathbb{R}^2, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2). \tag{2.2}$$

Le problème (2.2) admet une solution positive unique, qui est radialement symétrique à son l'origine. Nous la notons Q qui est exponentiellement décroissante, et de [10],

$$Q(x), \quad |\nabla Q(x)| = O(|x|^{-\frac{1}{2}} e^{-|x|}), \quad lorsque\ \ |x| \to \infty. \tag{2.3}$$

De plus et de [19], nous considérons l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^4 dx \leq \frac{2}{||Q||_2^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^2 dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2), \tag{2.4}$$

où, l'égalitéest atteinte pour $u(x) = Q(x)$. Cette inégalité aide à démontrer le théorème 2.1 de l'existence et la non-existence des minimiseurs du problème de minimisation (2.1).

Théorème 2.1. *Soit Q une solution radiale, positive et unique de* (2.2)*. Supposons V satisfait les conditions $(V_1) - (V_3)$, alors,*

1. *Si $0 \leq a < a^* := ||Q||_2^2$, il existe au moins un minimiseur pour* (2.1).

2. *Si $a \geq a^* := ||Q||_2^2$, il n'existe pas un minimiseur pour* (2.1).

De plus, $e(a) > 0$ pour $a < a^*$, $\lim_{a \to a^*} e(a) = e(a^*) = 0$, et $e(a) = -\infty$ pour $a > a^*$.

Pour prouver le Théorème 2.1, nous présentons le lemme de compacité suivant, (voir [1]).

Lemme 2.1. *Supposons $V \in L^\infty_{Loc}(\mathbb{R}^")$ avec $\lim_{|x| \to \infty} V(x) = \infty$. Si $2 \leq q < \infty$, alors l'injection $\mathcal{H} \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ est compacte.*

Cette propriété de compacité, avec l'inégalité de Gagliardo−Nirenberg (2.4) nous permet de prouver le Théorème 2.1. Tout d'abord, nous commençons par définir a^* comme suit :

$$a^* = \sup \{a > 0 | \, (2.1) \; a \; au \; moins \; un \; minimiseur\} \, . \tag{2.5}$$

Preuve du Théorème 2.1.

- ***L'existence des minimisers :***

Si $u \in \mathcal{H}$ et $||u||_2 = 1$, alors pour $0 \leq a < ||Q||_2^2$, nous avons de (2.4) et de la positivité de V,

$$\begin{aligned} E_a(u) \;\; &\geq \;\; \left(1 - \frac{a}{||Q||_2^2}\right) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(x)|u(x)|^2 dx, \\ &\geq \;\; \left(1 - \frac{a}{||Q||_2^2}\right) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx, \end{aligned} \tag{2.6}$$

ce qui implique que $E_a(u)$ est minorée. Soit $\{u_n\} \in \mathcal{H}$ une suite telle que $||u_n||_2 = 1$ et $\lim_{n \to \infty} E_a(u_n) = e(a)$. En raison de (2.6), nous avons $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n(x)|^2 dx$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} V(x)|u_n(x)|^2 dx$ uniformément bornées par rapport à n. De la compacité du lemme 2.1, nous extrairons une sous-suite telle que

$$\begin{aligned} u_n \;\; &\rightharpoonup \;\; u \quad faiblement \; dans \; \mathcal{H}, \\ u_n \;\; &\to \;\; u \quad fortement \; dans \; L^q(\mathbb{R}^2), \quad 2 \leq q < \infty. \end{aligned}$$

Et nous conclurons par la semi-continuité inférieure faible que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)| dx = 1$ et $E_a(u) = e(a)$. Ce qui implique *l'existence des minimiseurs pour* $0 \leq a \leq ||Q||_2^2$.

- ***La non-existence des minimiseurs :***

La preuve de la non-existence des minimiseurs pour (2.1) dans le cas $a \geq ||Q||_2^2$ se fait comme suit.

Soit $\phi \in C_0^\infty$ une fonction positive telle que $\phi(x) = 1$, $\forall |x| \leq 1$. Pour $x \in \mathbb{R}^2$, $\tau > 0$ et $R > 0$, nous avons

$$u(x) = A_{R,\tau} \frac{\tau}{||Q||_2} \phi((x - x_0)/R) Q(\tau(x - x_0)), \tag{2.7}$$

où $A_{R,\tau} > 0$ est choisi de sorte que $\int_{\mathbb{R}^2} u(x) = 1$. En faisant une mise à l'échelle, $A_{R,\tau}$ dépend uniquement du produit $R\tau$, et nous avons $\lim_{\tau\to\infty} A_{R,\tau} = 1$.
En realité, la décroissance exponentielle de Q dans (2.3) nous donne

$$\frac{1}{A_{R,\tau}^2} = \frac{1}{||Q||_2^2} \int_{\mathbb{R}^2} Q(x)^2 \phi(x/(\tau R))^2 dx = 1 + O((R\tau)^{-\infty}), \quad R\tau \to \infty. \tag{2.8}$$

Ici, nous notons $f(t) = O(t^{-\infty})$ tel que $\lim_{t\to\infty} |f(t)|t^s = 0$, $\forall s > 0$.

En utilisant la décroissance exponentielle de Q et ∇Q avec $R = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x)| dx - \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u(x)^4 dx \\ &= \frac{\tau^2}{||Q||_2^2} \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla Q(x)|^2 dx - \frac{a}{2||Q||_2^2} \int_{\mathbb{R}^2} Q(x)^4 dx + O((R\tau)^{-\infty}) \right], \quad R\tau \to \infty. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Puisque $||\nabla Q||_2^2 = \frac{1}{2}||Q||_4^4$, nous avons

$$(2.9) = \frac{\tau^2}{2||Q||_2^2} \left[\left(1 - \frac{a}{||Q||_2^2}\right) \int_{\mathbb{R}^2} Q(x)^4 dx + O((R\tau)^{-\infty}) \right], \quad R\tau \to \infty. \tag{2.10}$$

D'un autre côté, puisque la fonction $x \to V(x)\phi((x - x_0)/R)^2$ est bornée à support compacte, la convergence

$$\lim_{\tau\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) u(x)^2 dx = V(x_0) \tag{2.11}$$

satisfait pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^2$ [16].

1. Le cas : $a > ||Q||_2^2$

Pour $a > ||Q||_2^2$, de (2.10) et (2.11),

$$e(a) \leq \lim_{\tau \to \infty} E_a(u) = -\infty.$$

Ce qui implique que pour tout $a > ||Q||_2^2$, $e(a)$ est non minorée, et la non-existence des minimiseurs est alors prouvée.

2. Le cas : $a = ||Q||_2^2$

Dans le cas $a = ||Q||_2^2$, (2.10) et (2.11) montrent en combinaison que $e(a) \leq V(x_0)$, est satisfaite pour tout x_0 presque partout. En prenant $\inf V(x) = V(x_0) = 0$, nous avons $e(a) \leq 0$. En realité, l'inégalité de ce cas est donnée par (2.6).
Supposons maintenant qu'il existe un minimiseur u losque $a = ||Q||_2^2$. Comme nous avons proposé dans la remarque 2.2, nous proposons u est positif. Nous voulons alors avoir

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(x)|u(x)|^2 dx = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} V(x) = 0$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x)|^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^4 dx.$$

Ceci est une contradiction, car pour la première égalité, la fonction u doit avoir un support compact, tandis que pour la deuxième égalité, elle doit être égale à (une translation de) Q. Et la preuve de la première partie de Théorème 2.1 est complète.

- ***Les propriétés de L'énergie GP $e(a)$:***

Nous notons de (2.6) que $e(a) > 0$ pour $a < a^* = ||Q||_2^2$. Et nous avons montré que $e(a) = -\infty$ pour $a > a^*$, donc, il nous reste à montrer que $\lim_{a \to a^*} e(a) = 0$. De (2.10) et (2.11), en prenant d'abord $a \to a^*$, suivi de $\tau \to \infty$, cela implique que $\limsup_{a \to a^*} e(a) \leq V(x_0)$, après avoir pris l'infimum sur x_0, ce qui nous donne le résultat. □

Chapitre 3

La discipline des minimiseurs lorsque a *est proche de* a^*

L'étude de l'existence des minimiseurs seulement si $0 \leq a < a^*$, nous permet à voir la discipline des minimiseurs u_a lorsque a s'approche de la valeur critique a^* d'en bas. Si $e(a^*) = 0$, il est facile à voir que $\int_{\mathbb{R}^2} V(x)|u_a(x)|^2 dx \to 0 = \inf_{x\in\mathbb{R}^2} V(x)$, lorsque $a \to a^*$, alors, la discipline dépend de celle de V prés de sa minimum. Si V a un minimum unique, $|u_a(x)|^2$ converge vers une fonction δ localisée à ce minimum.

Pour faire l'étude de la discipline de $u_a(x)$, nous supposons que :

(V_4) : Le potentiel de piège V possède $n \geq 1$ minima isolés, et que dans leurs voisinages, V se comporte comme une puissance de la distance par rapport à ces points.

(V_5) : Il existe $n \geq 1$ points distincts $x_i \in \mathbb{R}^2$ tels que $V(x_i) = 0$, sinon, $V(x) > 0$.

(V_6) : il existe des nombres $p_i > 0$ et une constante $C > 0$ tels que :

$$V(x) = h(x) \prod_{i=1}^{n} |x - x_i|^{p_i}, \quad C < h(x) < 1/C, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2. \tag{3.1}$$

Nous devons également supposer que $\lim_{x\to x_i} h(x)$ existe pour tout $1 \leq i \leq n$. Et Le théorème 3.1 donne une description détaillée du comportement des minimiseurs de GP lorsque $a \to a^*$.

Soient $p = \max\{p_1, \ldots, p_n\}$ et $\lambda_i \in (0, \infty]$ est donné par

$$\lambda_i = \left(\frac{p}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^p Q(x)^2 dx \lim_{x\to x_i} \frac{V(x)}{|x - x_i|^p} \right)^{\frac{1}{2+p}}. \tag{3.2}$$

définissons $\lambda = \min\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ et soit

$$\mathcal{Z} := \{x_i : \lambda_i = \lambda\} \tag{3.3}$$

Désigne les emplacements des minima globaux les plus plats de V(x).

Théorème 3.1. *Supposons que V satisfait $(V_4) - (V_6)$, et soit u_a le minimiseur non-négative de* (1.1) *pour $a < a^*$. Étant donnée une suite $\{a_k\}$ avec $a_k \nearrow a^*$ lorsque*

$k \to \infty$, il existe une sous-suite (notéé $\{a_k\}$) et $x_0 \in \mathcal{Z}$ tels que

$$\lim_{k\to\infty}(a^* - a_k)^{\frac{1}{2+p}} u_{ak}\left(x_0 + x(a^* - a_k)^{\frac{1}{2+p}}\right) = \frac{\lambda Q(\lambda x)}{||Q||_2}, \tag{3.4}$$

fortement dand $L^q(\mathbb{R}^2)$ pour $2 \le q < \infty$.

Remarque 3.1. *Si le potentiel de piégeage V possède une symétrie, par exemple $V(x) = \prod_{i=1}^n |x - x_i|^p$ avec $p > 0$ et les x_i disposés aux sommets d'un polygone régulier, le Théorème 3.1 établit la rupture de symétrie qui se produit dans les minimiseurs de GP. Il existe un a^*, avec $0 < a_* < a^*$, tel que pour $a_* < a < a^*$, la fonctionnelle GP* (1.1) *possède (au moins) n différents minimiseurs non-négatifs, chacun se concentre sur un point minimum global spécifique x_i.*

Le théorème donne la description détaillée de la discipline des minimiseurs de GP à proximité de la force de couplage critique a^*. Lorsque $a \to a^*$, u_a le minimiseur de (1.1) se comporte comme

$$u_a \approx \frac{\lambda}{||Q||_2(a^* - a_k)^{\frac{1}{2+p}}} Q\left(\frac{\lambda(x - x_0)}{(a^* - a_k)^{\frac{1}{2+p}}}\right), \tag{3.5}$$

avec x_0 le minimum de $V(x)$, et λ est la plus petite valeur des λ_i définie dans (3.2).

Nous allons maintenant restreindre notre attention aux potentiels de piège V satisfaisant $(V_4) - (V_6)$. Nous avons déjà démontré dans le théorème 2.1 que $e(a) \searrow 0$ lorsque $a \nearrow a^*$, où $e(a)$ représente l'énergie GP définie dans (2.1). Dans ce qui suit, nous allons obtenir des estimations plus précises sur $e(a)$.

Lemme 3.1. *Supposons V satisfait $(V_4) - (V_6)$. Alors il existe deux constantes positives $m < M$, indépendantes de a, telles que*

$$m(a^* - a)^{\frac{p}{p+2}} \le e(a) \le M(a^* - a)^{\frac{p}{p+2}}, \quad pour \quad 0 \le a \le a^*, \tag{3.6}$$

où $p > 0$ est défini dans (3.2).

Preuve .

Comme $e(a)$ est décroissante et uniformément bornée pour $0 \le a \le a^*$, il suffit de considérer le cas où a est proche de a^*. Nous commençons par la borne inférieure. De (2.4), nous déduisons que, pour $\gamma > 0$ et $u \in \mathcal{H}$ avec $||u||_2 = 1$,

$$\begin{aligned} E_a(u) &\geq \int_{\mathbb{R}^2} V(x)|u(x)|^2 dx + \frac{a^* - a}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^4 dx \\ &= \gamma + \int_{\mathbb{R}^2} \left[(V(x) - \gamma)|u(x)|^2 + \frac{a^* - a}{2}|u(x)|^4 \right] dx \\ &\geq \gamma - \frac{1}{2(a^* - a)} \int_{\mathbb{R}^2} [\gamma - V(x)]_+^2 dx, \end{aligned} \tag{3.7}$$

où $[.]_+ = \max\{0, .\}$ désigne la partie positive. Pour un γ suffisament petit, l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) \leq \gamma\}$$

est contenu dans la réunion disjointe de n boules de rayon au plus $K\gamma^{1/p}$, centrées aux minima x_i, pour une constante $K > 0$ adéquate . De plus, $V(x) \geq (|x - x_i|/K)^p$ sur ces boules. Par conséquent,

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\gamma - V(x)]_+^2 dx \leq n \int_{\mathbb{R}^2} [\gamma - (|x|/K)^p]_+^2 dx = C\gamma^{2+2/p},$$

avec $C = nK^2\pi p^2/[(p+1)(p+2)]$. La borne inférieure dans (3.6) résulte donc de (3.7) en prenant γ égal à $[p(a^* - a)/(C(1+p))]^{p/(2+p)}$.

Ensuite, nous allons prouver la borne supérieure dans (3.6). Nous procédons de manière similaire à la démonstration du théorème 2.1 et utilisons une fonction de la forme (2.3), avec $0 \leq \phi \leq 1$. Rappelons la définition de $\mathcal{Z}$ dans (3.3) et choisissons $x_0 \in \mathcal{Z}$. Nous choisissons R suffisamment petit de sorte que

$$V(x) \leq C|x - x_0|^p, \quad \textit{pour} \quad |x - x_0| \leq R,$$

dans ce cas, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(x)u(x)^2 dx \leq C\tau^{-p} A_{R,\tau} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^p Q(x)^2 dx.$$

De les estimations (2.8)-(2.10), nous concluons que, pour τ large,

$$e(a) \leq \frac{\tau}{2(a^*)^2}(a^* - a) \int_{\mathbb{R}^2} Q(x)^4 dx + C\tau^{-p} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^p Q(x)^2 dx + O(\tau^{-\infty}).$$

En prenant $\tau = (a^* - a)^{-\frac{1}{p+2}}$, nous arrivons à la borne supérieure désirée. Et la preuve est terminée. $\square$

La borne suivante sur la norme $L^4(\mathbb{R}^2)$ de u_a est une simple conséquence du lemme 3.1.

Lemme 3.2. *supposons u_a est un minimiseur de* (1.1) *avec V satisfait* $(V_4) - (V_6)$. *Alors, il existe une constante positive K, indépendante de a, telle que*

$$0 < K(a^* - a)^{-\frac{2}{p+2}} \leq \int_{\mathbb{R}^2} |u_a(x)|^4 dx \leq \frac{1}{K}(a^* - a)^{-\frac{2}{p+2}}, \quad \textit{pour} \quad 0 \leq a < a^*. \tag{3.8}$$

Preuve .
De (2.6) et (2.4)

$$e(a) \geq \frac{a^* - a}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |u - a(x)|^4 dx,$$

La borne supérieure dans (3.8) résulte directement de lemme 3.1.

Pour la preuve de la borne inférieure de (3.8), nous choisissons $0 < b < a$ et nous avons

$$e(b) \leq E_b(u_a) = e(a) + \frac{a - b}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |u_a(x)|^4 dx. \tag{3.9}$$

En appliquant le lemme 3.1, (3.9) implique qu'il existe deux constantes positives $m < M$ telles que pour $0 < b < a < a^*$,

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |u_a(x)|^4 dx \geq \frac{e(b) - e(a)}{a - b} \geq \frac{m(a^* - b)^{\frac{p}{(2+p)}} - M(a^* - a)^{\frac{p}{(2+p)}}}{a - b}, \tag{3.10}$$

avec $b = a - \gamma(a^* - a)$, nous pouvons écrire le côté droit de (3.10) de cette façon

$$(a^* - a)^{-2/(2+p)} \frac{m(1 + \gamma)^{p/(2+p)} - M}{\gamma}. \tag{3.11}$$

(3.11) est positive pour γ suffisamment large. Pour a proche de a^*, cela donne alors la borne inférieure souhaitée. Pour a plus petite, nous pouvons simplement utiliser le fait que $\int_{\mathbb{R}^2} |u_a(x)|^4 dx \geq \int_{\mathbb{R}^2} |u_0(x)|^4 dx$ pour tout $0 \leq a \leq a^*$, ce qui suit de la concavité de $e(a)$ (ou des bornes $e(a) \leq E_a(u_0)$ et $e(0) \leq E_0(u_a)$). Celà achève la démonstration du lemme. $\square$

Preuve de Théorème 3.1.

Soit u_a un minimiseur non-negatif de (2.1), et définissons

$$\varepsilon := (a^* - a)^{\frac{1}{2+p}} > 0. \tag{3.12}$$

De (2.4), nous concluons que

$$e(a) \geq \left(1 - \frac{a}{a^*}\right) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_a(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(x) u_a(x)^2 dx,$$

alors, du lemme 3.1, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_a(x)|^2 dx \leq C\varepsilon^{-2} \quad et \quad \int_{\mathbb{R}^2} V(x) u_a(x)^2 dx \leq C\varepsilon^p. \tag{3.13}$$

Pour $1 \leq i \leq n$, définissons les fonctions normalisées $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$w_a^{(i)}(x) := \varepsilon u_a(\varepsilon x + x_i). \tag{3.14}$$

De (3.13) et le lemme 3.2, nous avons

$$0 < K \leq \int_{\mathbb{R}^2} w_a^{(i)}(x)^4 dx \leq \frac{1}{K}, \quad \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla w_a^{(i)}(x)|^2 dx \leq C \tag{3.15}$$

et,

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(x_i + \varepsilon x) w_a^{(i)}(x)^2 dx \leq C\varepsilon^p. \tag{3.16}$$

En particulier, les fonctions $w_a^{(i)}$ sont uniformément bornées dans $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Pour tout $\gamma > 0$, nous avons

$$\int_{\{V(x) \geq \gamma\varepsilon^p\}} u_a(x)^2 dx \leq \frac{1}{\gamma\varepsilon^p} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) u_a(x)^2 dx \leq \frac{C}{\gamma}. \tag{3.17}$$

Pour ε suffisamment petit, c'est-à-dire pour a suffisamment proche de a^*, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) \leq \gamma^p\}$ est contenu dans n boules disjointes de rayon au plus $C\gamma^{1/p}\varepsilon$, pour un certain $C > 0$, centrées aux points x_i. Nous déduisons donc de l'inégalité (3.17)

$$\frac{C}{\gamma} \geq \int_{\{V(x) \geq \gamma\varepsilon^p\}} u_a(x)^2 dx = 1 - \int_{\{V(x) \leq \gamma\varepsilon^p\}} u_a(x)^2 dx$$

$$\geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \int_{\{|x-x_i| \leq C\gamma^{1/p}\varepsilon\}} u_a(x)^2 dx = 1 - \sum_{i=1}^{n} \int_{\{|x| \leq C\gamma^{1/p}\}} w_a^{(i)}(x)^2 dx.$$

En particulier,

$$1 \geq \sum_{i=1}^{n} \int_{\{|x| \leq C\gamma^{1/p}\}} w_a^{(i)}(x)^2 dx \geq 1 - \frac{C}{\gamma}. \tag{3.18}$$

Comme les fonctions $w_a^{(i)}$ sont uniformément bornées dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, nous pouvons passer à une sous-suite telle que

$$w_a^{(i)} \rightharpoonup w_0^{(i)} \quad \textit{faiblement dans } H^1(\mathbb{R}^2), \quad 1 \leq i \leq n, \tag{3.19}$$

pour des fonctions $w_0^{(i)} \in H^1(\mathbb{R}^2)$. D'après le Lemme 2.1, la convergence est forte dans $L^q(\{|x| \leq C\gamma^{1/p}\})$, pour tout $2 \leq q < \infty$. En particulier, à partir de l'équation (3.18) nous concluons que

$$1 \geq \sum_{i=1}^{n} \int_{\{|x| \leq C\gamma^{1/p}\}} w_0^{(i)}(x)^2 dx \geq 1 - \frac{C}{\gamma}. \tag{3.20}$$

$\forall \gamma > 0$, (3.20) est juste, nous en concluons finalement que

$$\sum_{i=1}^{n} ||w_0^{(i)}||_2^2 = 1. \tag{3.21}$$

Puisque u_a est un minimiseur de l'équation (2.1), il satisfait l'équation d'Euler-Lagrange.

$$-\Delta u_a(x) + V(x)u_a(x) = \mu_a u_a(x) + a u_a(x)^3, \quad \textit{dans } \mathbb{R}^2, \tag{3.22}$$

pour $\mu_a \in \mathbb{R}$ le multiplier de Lagrange. En réalité,

$$\mu_a = e(a) - \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u_a(x)^4 dx.$$

Les fonctions $w_a^{(i)}$ dans (3.14) sont des solutions non-négatives de

$$-\Delta w_a^{(i)}(x) + \varepsilon^2 V(x_i + \varepsilon x) w_a^{(i)}(x) = \varepsilon^2 \mu_a w_a^{(i)}(x) + a w_a^{(i)}(x)^3, \quad \textit{dans } \mathbb{R}^2, \tag{3.23}$$

il résulte du lemme 3.2 que $\varepsilon^2\mu_a$ est uniformément borné lorsque $a \to a^*$, et strictement négatif pour a proche de a^*. En passant à une sous-suite, nous pouvons donc supposer que $\varepsilon^2\mu_a$ converge vers un nombre $-\beta^2 < 0$ lorsque $a \to a^*$. En faisant la limite faible (3.19), nous constatons que les fonctions non-négatives $w_0^{(i)}$ satisfont

$$-\Delta w_0^{(i)}(x) = -\beta^2 w_0^{(i)}(x) + a^* w_0^{(i)}(x)^3. \tag{3.24}$$

Selon le principe du maximum, soit $w_0^{(i)} = 0$ de manière identique, ou $w_0^{(i)} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. Dans ce dernier cas, une simple mise à l'échelle combinée à l'unicité des solutions positives de l'équation (2.2) à translations près, nous permet de conclure que

$$w_0^{(i)}(x) = \frac{\beta}{||Q||_2} Q(\beta(x - y_i)) \quad \textit{pour} \;\; y_i \in \mathbb{R}^2. \tag{3.25}$$

En particulier, soit $w_0^{(i)} = 0$ ou $||w_0^{(i)}||_2^2 = 1$. En raison de (3.21), nous constatons qu'il y a un seul $w_0^{(i)}$ est de la forme (3.25), tandis que tous les autres sont nuls.

Soit $1 \leq j \leq n$ tel que $||w_0^{(j)}||_2^2 = 1$. De la préservation de la norme, nous concluons que $w_a^{(j)}$ converge fortement vers $w_0^{(j)}$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ et en fait fortement dans $L^q(\mathbb{R}^2)$ pour tout $2 \leq q < \infty$ car $H^1(\mathbb{R}^2)$ est borné . En passant à une sous-suite, si nécessaire, nous pouvons également supposer que la convergence est ponctuelle presque partout.

Pour compléter la démonstration du Théorème 3.1, nous calculons

$$\begin{aligned} e(a) = E_a(u_a) = \frac{1}{\varepsilon^2} \quad & \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla w_a^{(j)}(x)|^2 dx - \frac{a^*}{2} \int_{\mathbb{R}^2} w_a^{(j)}(x)^4 dx \right] \\ & + \frac{\varepsilon^p}{2} \int_{\mathbb{R}^2} w_a^{(j)}(x)^4 dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(x_j + \varepsilon x) w_a^{(j)}(x)^2 dx. \end{aligned}$$

Le terme entre crochets est non-négatif et peut être ignoré pour une borne inférieure. La norme $L^4(\mathbb{R}^2)$ de $w_a^{(j)}$ converge vers celle de $w_0^{(j)}$, et d'après le lemme de Fatou, il résulte que

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-p} \int_{\mathbb{R}^2} V(x_j + \varepsilon x) w_a^{(j)}(x)^2 dx \geq \kappa_j \int_{\mathbb{R}^2} |x|^p w_0^{(j)}(x)^2 dx,$$

où $\kappa = \lim_{x \to x_j} V(x)|x - x_j|^{-p} \in (0, \infty]$. De plus,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x|^p w_0^{(j)}(x)^2 dx = \frac{1}{\beta^p ||Q||_2^2} \int_{\mathbb{R}^2} |x + y_j|^p Q(x)^2 dx \geq \frac{1}{\beta^p ||Q||_2^2} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^P Q(x)^2 dx, \tag{3.26}$$

puisque Q est une fonction radiale décroissante. En particulier,

$$\lim_{a\to a^*}\inf \frac{e(a)}{(a^*-a)^{p/(2+p)}} \geq \frac{1}{2}||w_0||_4^4 + \kappa_j \int_{\mathbb{R}^2} |x|^p w_0^{(j)}(x)^2 dx \geq \frac{2}{a^*}\left(\frac{\beta^2}{2} + \lambda_j^{2+p}\frac{1}{p\beta^p}\right), \tag{3.27}$$

où λ_j est défini dans (3.2), et nous avons utilisé que $||Q||^4 = 2||Q||^2 = 2a^*$ (ce qui résulte du fait que Q satisfait l'équation (2.2) et l'égalité dans (2.4)). En prenant l'infimum sur $\beta > 0$ (qui est atteint pour $\beta = \lambda_j$), nous obtenons

$$\lim_{a\to a^*}\inf \frac{e(a)}{(a^*-a)^{p/(2+p)}} \geq \frac{\lambda^2}{a^*}\frac{p+2}{p}, \tag{3.28}$$

où, $\lambda = \min_j \lambda_j$, comme avant.

La limite dans (3.28) actuellement existe, et égale à $\frac{\lambda^2}{a^*}\frac{p+2}{p}$. Pour voir ça, nous prenons simplement

$$u(x) = \frac{\beta}{\varepsilon||Q||_2} Q\left(\beta\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)$$

comme une fonction de E_a, et les minimiseurs sur $1 \leq j \leq n$ et $\beta > 0$. Le résultat est

$$\lim_{a\to a^*} \frac{e(a)}{(a^*-a)^{p/(2+p)}} = \frac{\lambda^2}{a^*}\frac{p+2}{p}. \tag{3.29}$$

À partir de l'égalité (3.29), nous pouvons tirer plusieurs conclusions. Premièrement, le j défini ci-dessus est tel que $\lambda_j = \lambda$, c'est-à-dire que $x_j \in \mathcal{Z}$. Deuxièmement, β est unique (c'est-à-dire indépendant du choix de la sous-suite) et égal à l'expression minimisant(3.27), c'est-à-dire $\beta = \lambda$. Enfin, $y_j = 0$, car l'inégalité (3.26) est stricte pour $y_j \neq 0$. Nous avons ainsi montré que

$$w_a^{(j)}(x) = \varepsilon u_a(\varepsilon x + x_j) \to \frac{\lambda}{||Q||_2} Q(\lambda x), \quad \textit{lorsque } \; a \to a^*,$$

avec $x_j \in \mathcal{Z}$. Et la preuve est complète. $\square$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons réussi à faire:

Une étude sur l'existence *d'au moins* un minimiseur non-négatif de la fonctionnelle GP, où le minimiseur se concentre à un point minimum global spécifique x_i du potentiel de piégeage. Cette existence des minimiseurs lorsque $0 \leq a < a^*$ est liée à la compétition entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Pour des valeurs plus petites de a, l'énergie cinétique domine et les minimiseurs sont plus dispersés, occupant une région plus large autour des minima du potentiel de piégeage. Cependant, à mesure que a augmente, l'énergie potentielle due à l'interaction avec le potentiel de piégeage devient plus importante et conduit à une concentration de la masse autour des minima.

Une analyse détaillée du comportement des minimiseurs à mesure que a approche a^*, où toute la masse se concentre à un minimum global x_i du potentiel de piégeage sous les aspects suivants :

1. Concentration de la masse : Lorsque a se rapproche de a$*$, les minimiseurs de la fonctionnelle GP (Gross-Pitaevskii) commencent à se concentrer de plus en plus près du minimum global du potentiel de piégeage. La masse des solutions se concentre dans une région de plus en plus petite autour de ce minimum.

2. Énergie minimale : À mesure que la concentration de la masse augmente, l'énergie minimale de la fonctionnelle GP diminue. Cela est dû au fait que la réduction de la région occupée par la masse conduit à une diminution de l'énergie potentielle due à l'interaction avec le potentiel de piégeage.

3. Symétrie brisée : Lorsque a atteint a^*, une rupture de symétrie se produit. Au-delà de ce point critique, il y a une transition où les minimiseurs ne sont plus symétriques par rapport au minimum global du potentiel de piégeage. Au lieu de cela, chaque minimiseur se concentre à un point spécifique x_i, rompant ainsi la symétrie initiale du système.

4. Multiplicité des minimiseurs : À mesure que a se situe entre a_* et a^*, il existe n minimiseurs distincts non négatifs de la fonctionnelle GP, correspondant chacun à une concentration de masse à un point minimum global x_i spécifique du potentiel de piégeage. Cela signifie qu'il y a plusieurs états d'équilibre possibles pour le système, chacun étant caractérisé par une distribution différente de la masse autour des minima du potentiel.

Références

参考文献

[1] Adams, R.A., Fournier, J.J.F.: Sobolev spaces, 2nd edn. Academic Press, New York (2003)

[2] Anderson, M.H., Ensher, J.R., Matthews, M.R., Wieman, C.E., Cornell, E.A.: Observation of Bose–Einstein condensation in a dilute atomic vapor. Science 269, 198–201 (1995)

[3] Bloch, I., Dalibard, J., Zwerger, W.: Many-body physics with ultracold gases. Rev. Mod. Phys. 80, 885 (2008)

[4] Bradley, C.C., Sackett, C.A., Hulet, R.G.: Bose–Einstein condensation of lithium: observation of limited condensate number. Phys. Rev. Lett. 78, 985 (1997)

[5] Bradley, C.C., Sackett, C.A., Tollett, J.J., Hulet, R.G.: Evidence of Bose–Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. Phys. Rev. Lett. 75, 1687 (1995) (Erra- tum in: Phys. Rev. Lett. 79, 1170 (1997))

[6] Cooper, N.R.: Rapidly rotating atomic gases. Adv. Phys. 57, 539–616 (2008)

[7] Dalfovo, F., Giorgini, S., Pitaevskii, L.P., Stringari, S.: Theory of Bose–Einstein condensation in trapped gases. Rev. Mod. Phys. 71, 463–512 (1999)

[8] Davis, K.B., Mewes, M.O., Andrews, M.R., van Druten, N.J., Durfee, D.S., Kurn, D.M., Ketterle, W.: Bose–Einstein condensation in a gas of sodium atoms. Phys. Rev. Lett. 75, 3969–3973 (1995)

[9] Fetter, A.L.: Rotating trapped Bose–Einstein condensates. Rev. Mod. Phys. 81, 647 (2009)

[10] Gidas, B., Ni, W.M., Nirenberg, L.: Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in Rn, Mathematical analysis and applications Part A, Adv. in Math. Suppl. Stud., vol. 7. pp. 369–402. Academic Press, New York (1981)

[11] Guo, Y., Seiringer, R. On the Mass Concentration for Bose – Einstein Condensates with Attractive Interactions. Lett Math Phys 104, 141 – 156 (2014). https://doi.org/10.1007/s11005-013-0667-9

[12] Gross, E.P.: Structure of a quantized vortex in boson systems. Nuovo Cimento 20, 454–466 (1961)

[13] Gross, E.P.: Hydrodynamics of a superfluid condensate. J. Math. Phys. 4, 195–207 (1963)

[14] Huepe, C., Metens, S., Dewel, G., Borckmans, P., Brachet, M.E.: Decay rates in attractive Bose–Einstein condensates. Phys. Rev. Lett. 82, 1616–1619 (1999)

[15] Kagan, Y., Muryshev, A.E., Shlyapnikov, G.V.: Collapse and Bose – Einstein condensation in a trapped Bose gas with negative scattering length. Phys. Rev. Lett. 81, 933–937 (1998)

[16] Lieb, E.H., Loss, M.: Analysis, 2nd edn. Graduate Studies in Mathematics, vol. 14. Amer. Math. Soc., Providence (2001)

[17] Pitaevskii, L.P.: Vortex lines in an imperfect Bose gas. Sov. Phys. JETP 13, 451–454 (1961)

[18] Sackett, C.A., Stoof, H.T.C., Hulet, R.G.: Growth and collapse of a Bose–Einstein condensate with attractive interactions. Phys. Rev. Lett. 80, 2031 (1998)

[19] Weinstein, M.I.: Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolations estimates. Commun. Math. Phys. 87, 567–576 (1983)

[20] Yukalov, V.I., Yukalova, E.P.: Optimal trap shape for a Bose gas with attractive interactions. Phys. Rev. A 72, 063611 (2005)