République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par :

M^{me} Samoudi Sarra

Intitulé

Inégalités intégrales de type Bullen-Simpson

Dirigé par : Dr. Meftah Badreddine

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Rebiai	Ghania	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Meftah	Badreddine	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Lakhal	Fahim	Prof.	Univ-Guelma

Session Juin 2023

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

قَالَ رَسُولُ اللهِ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ:

(مَنْ لَمْ يَشْكُرِ النَّاسَ لَمْ يَشْكُرِ اللهُ وَمَنْ أَهْدَى الِيَّكُمْ مَعْرُوفًا فَكَافِئُوهُ فَانٍ لَمْ تَسْتَطِيعُوا فَأُدْعُوَا لَه).

عَنِ ابي هُرَيْرَةَ رَضِّيَّ اللهُ عَنْهُ انَّ رَسُولَ اللهِ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ قال: (مَنْ سَلَك طَرِيقا يَلْتَمِسُ فِيه عِلْمًا سَهَّلَ اللهُ لَهُ بِهِ طَرِيقًا الى الْجَنَّةِ).

Remerciements

Louange à Dieu, qui nous a accordé le succès, la réussite, la sérénité et nous a aidés à terminer ce travail après avoir voyagé pour mettre des points sur les i et révéler ce qui se cache derrière le voile de la science et du savoir, voilà les fruits de notre connaissance, il est temps de les récolter.

Voici mes mots épars, que je chuchote à l'oreille de chacun qui ouvrira ce mémoire pour y bénéficier de ce qu'il veut et désire, et critiquer ce qu'il rejette.

J'adresse mes remerciements à l'honorable **Dr Meftah Badr Eddine** ; que Dieu le protège et l'accorde une longe vie pour sa grâce généreuse dans la supervision de cette étude, qui n'a pas lésiné de me donner toutes les informations et les références, et pour tous les conseils et orientations qu'il m'a donnés tout au long de la rédaction de ce mémoire.

Mme **Merad Meriem** pour les précieux conseils qu'elle m'a prodigués et pour sa coopération.

J'adresse également mes sincères remerciements aux membres du jury :

Mme **Rebiai Ghania** pour avoir accepté la présidence du jury de soutenance.

Monsieur l'examinateur **Lakhal Fahim**, vous nous avez fait l'honneur d'avoir accepté de siéger parmi les membres du jury.

Le **Dr. Samir Djorfi professeur** à l'Université de Jijel

Que Dieu le préserve pour ce qu'il a fait et pour son aide à la traduction.

Merci également à tous les professeurs et collègues de la Faculté de mathématiques qui m'ont aidé de près ou de loin à compléter ce mémoire.

Merci

Dédicace

Comme il est beau pour une personne de donner ce qu'elle a de plus précieux, et la plus belle chose est de donner le précieux au plus précieux

C'est le fruit de mes efforts que je récolte aujourd'hui, c'est un cadeau que je dédie à :

Ma famille qui m'a donné une éducation digne et dont son amour a fait de moi ce que je suis aujourd'hui surtout à l'âme de

Mon père Bouziane Samoudi, pour savourer l'effort qu'il a provoqué en moi par sa rigueur. Que Dieu ait pitié de toi, Père.

Mon deuxième père, le père de mon mari, qui m'a appris et fait de moi ce que je suis aujourd'hui. Les mots du monde sont incapables de décrire ma gratitude envers vous, que le bon Dieu me donne l'occasion de récompenser vos efforts.

Ma mère et la mère de mon mari j'aurai peut-être pas toujours l'occasion de vous dire merci, et je n'ai peut-être pas l'audace d'exprimer ma gratitude et ma reconnaissance, mais il vous suffit de savoir « lumière de mes yeux » que vous avez une fille qui attend la moindre occasion de

Vous offrir son âme et son cœur comme un cadeau modeste pour tout ce que vous avez donné.

À celui qui m'a soutenu et a fait mes pas avec moi et a atténué les difficultés pour mon cher mari Qui a beaucoup souffert. Ma position dans ce lieu n'aurait pas eu lieu sans ses encouragements continus envers moi.

Mes frères Saif. Et Lahcen, mon soutien et ma force, je n'oublierai jamais votre générosité.

Ma chère sœur Iman, merci

Ma chère tante, Awatef, je n'oublierai jamais ce que tu as fait pour moi. Tu étais ma deuxième sœur, et les mots de remerciement ne rempliront jamais ton droit.

Mes enfants « mes yeux » dont je tire force et continuité : Taqi Eddine et Ghofrane

Mon meilleur ami, Neriman. Ghada, qui m'ont encouragé et soutenu dans toutes mes circonstances. Merci

À tous ceux que j'ai aimés et liés d'amitié au cours des cinq années, merci.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة المتراجحات التكاملية من نوع بولن–سيمبسون للدوال ذات المشتقات المتمتعة بالتحدب.

في الفصل الأول، نذكر ببعض تعريفات التحدب الكلاسيكي، وكذلك بعض المساواة التكاملية التي سنستعملها لاحقا.

في الفصل الثاني، سنذكر ببعض النتائج المعروفة في الادبيات حول المتراجحات التكاملية من نوع نيوتن–كوتس ذات ثلاثة نقط.

في حين ان الفصل الأخير سيخصص بالكامل للمتراجحات التكاملية من نوع بولن–سيمبسون.

كلمات مفتاحية

متراجحة بولن–سيمبسون، متراجحة هولدر، الدوال المحدبة، الدوال المحدودة.

Abstract

The aim of this memory, is to study the Bullen-Simpson type inequalities for function whose first derivatives are s-convex, bounded as well as Holderian. for this we propose:

In the first chapter, a preliminaries concerning some classes of classical convexity, as well as some classes of functions.

In the second chapter, we discuss some classical three-point Newton-Cotes types inequalities.

While the last chapter is devoted to some new results regarding Bullen-Simpson integral inequalities.

Keyword: Bullen-Simpson inequality, Holder inequality, s-convex function, bounded functions, Holderian functions.

Résumé

Dans ce mémoire, nous allons étudier les inégalités intégrales de type Bullen-Simpson pour les fonctions dont les dérivées premières en valeurs absolues sont s-convexe.

Dans le premier chapitre, nous donnons un bref rappel sur certains types de convexité classique ainsi que sur certaines identités intégrales que nous utiliserons plus tard.

Dans le deuxième chapitre, nous citons certains résultats classiques concernant les inégalités de type Newton-Cots à trois points.

Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré aux nouvelles dont les inégalités de type Bullen-Simpson pour les fonctions dont les dérivées premières sont s-convexes.

Mots clés *: Inégalité de type Bullen Simpson, inégalités de Holder, fonctions convexes, fonctions s-convexes, fonctions bornées, fonctions Holderienne.*

Table des matières

Introduction

Les inégalités jouent un rôle important dans diverses branches des mathématiques modernes telles que la théorie de l'espace de Hilbert, la théorie des probabilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'analyse numérique, la théorie qualitative des équations différentielles et des équations aux différences, etc. Elles représentent un outil puissant et indispensable.

Le fondement mathématique de cette théorie a été établi en partie au cours des $18^{ème}$ et $19^{ème}$ siècles par d'éminents mathématiciens tels que : Gauss, Cauchy, Čebyšev. Dans les années qui suivirent, le sujet attira de nombreux mathématiciens : Poincaré, Lyapunov, Gronwall, Hölder, Hadamard, Pólya, Bellman et Ostrowski. La littérature dans ce contexte est vaste et variée parmi les ouvrages dont on peut trouver une très bonne description de l'évolution historique des inégalités que l'on peut consulter, Mitrinović, Pečarić et Fink [6, 7, 8].

Cette théorie évolue constamment dans plusieurs directions et de différentes manières. De nouvelles inégalités ont été établies, des généralisations, des raffinements, des extensions ainsi que des variantes sur plusieurs axes unidimensionnels, multidimensionnels, fractionnaires et discrets.

L'objectif de ce mémoire est de faire une petite synthèse concernant les inégalités intégrales de type Bullen-Simpson et d'établir de nouvelles généralisations de ce type d'inégalités intégrales.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques classes de fonctions ainsi que quelques identités et inégalités intégrales utiles pour notre étude.

Dans le second chapitre nous traiterons certains résultats concernant les inégalités intégrales de type Newton-Cotes à trois points.

Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré aux nouvelles inégalités de type Bullen-Simpson dont ces nouveaux résultats sont soumis pour une éventuelle publication.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques type de convexité ainsi que quelques identités des fonctions, concernant la convexité en peut consulter [8].

1.1 Quelques classes de fonctions

Dans tout ce qui va suivre nous désignons par $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.1 ([8]) *Un ensemble $I \subseteq \mathbb{R}$, est dit convexe si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0, 1]$, nous avons*

$$tx + (1-t)\, y \in I.$$

Définition 1.2 ([8]) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe, si*

$$f\,(tx + (1-t)\, y) \leq tf\,(x) + (1-t)\, f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$.

Définition 1.3 ([1]) *Une fonction positive $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty[$ est dite s-convexe* *au second sens pour un certain nombre fixé* $s \in]0,1]$*, si*

$$f(tx+(1-t)y) \ \leq t^s f(x)+(1-t)^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et* $t \in [0,1]$.

Définition 1.4 **([3])** *Une fonction* f *est dite bornée sur* I*, s'il existe des constantes* $-\infty < m < M < +\infty$ *telles que*

$$m \leq f(x) \leq M$$

pour tout $x \in I$.

Définition 1.5 **([3])** *Une fonction* f *est dite L-Lipschitzienne sur* I*, s'il existe* $L > 0$ *telle que*

$$|f(x)-f(y)| \leq L\,|x-y|$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$.

Définition 1.6 **([3])** *Une fonction* f *est dite* r*-L-Hölderienne sur* $[a,b]$*, s'il existe* $L > 0$ *et* $0 < r \leq 1$ *telles que*

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|^r$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$.

1.2 Quelques identités et inégalités intégrales importantes

1.2.1 Inégalité de Hölder

Théorème 1.1 ([5]) *Soit* $p > 1$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Si* f *et* g *sont des fonctions réelles définies sur* $[a, b]$, *et si de plus* $|f|^p$ *et* $|g|^q$ *sont intégrables sur* $[a, b]$, *alors :*

$$\int_a^b |f(x) g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.2.2 Inégalité des moyennes d'ordre q

Théorème 1.2 ([2]) *Soient* $x = (x_i)_{i=1,2,...,n}$ *et* $p = (p_i)_{i=1,2,...,n}$ *deux* n*-uplets de nombres strictement positifs et soit* $q \in \overline{\mathbb{R}}$, *l'inégalité des moyens d'ordre* q *pondérés par* p *est définie par :*

$$M_n^{[q]} = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i^q \right)^{\frac{1}{q}} & \text{pour } q \neq -\infty, 0, +\infty, \\ \left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \right)^{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} & \text{pour } q = 0, \\ \min(x_1, x_2, ..., x_n) & \text{pour } q = -\infty, \\ \max(x_1, x_2, ..., x_n) & \text{pour } q = +\infty. \end{cases}$$

Pour $-\infty \leq q < r \leq +\infty$, *on a :*

$$M_n^{[q]} \leq M_n^{[r]}.$$

Remarque 1.1 ([2]) *La version intégrale du Théorème 1.2 est : pour* $q \geq 1$ *et si* $|f|$ *et* $|g|^q$ *sont intégrables sur* $[a, b]$, *alors :*

$$\int_a^b |f(x) g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| \, dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)| \, |g(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.3 Quelques identités intégrales importantes

Lemme 1.1 ([9]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction absolument continue sur I° telle que $f' \in L^1[a,b]$, où $a,b \in I^{\circ}$ avec $a<b$, alors l'égalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\
= \;& \tfrac{b-a}{2}\int_0^1 \left[\left(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right)f'\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2}\right)f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right]dt. \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

Preuve. Posons

$$I_1=\int_0^1 \left(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right)f'\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)dt$$

et

$$I_2=\int_0^1 \left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2}\right)f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)dt.$$

En intégrant par partie I_1, on trouve :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \left(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right)f'\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)dt \\
&= \tfrac{2}{b-a}\left(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right)f\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)\Big|_0^1-\tfrac{1}{b-a}\int_0^1 f\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)dt \\
&= \tfrac{1}{3(b-a)}f(b)+\tfrac{2}{3(b-a)}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_0^1 f\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)dt \\
&= \tfrac{1}{3(b-a)}f(b)+\tfrac{2}{3(b-a)}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{2}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(u)\,du. \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

D'une manière analogue, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2}\right)f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)dt \\
&= -\tfrac{2}{b-a}\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2}\right)f\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\Big|_0^1-\tfrac{1}{b-a}\int_0^1 f\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)dt \\
&= \tfrac{1}{3(b-a)}f(a)+\tfrac{2}{3(b-a)}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{2}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(u)\,du. \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

En sommant (1.2) et (1.3), puis en multipliant l'identité résultante par $\frac{b-a}{2}$ on trouve l'identité souhaitée dans (1.1). ■

Lemme 1.2 ([11]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction absolument continue sur I° telle que $f' \in L^1[a,b]$, où $a, b \in I^{\circ}$ avec $a < b$, alors l'égalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{f(a)+f(a)}{2} + f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \\
&= \tfrac{b-a}{4}\int_0^1 \left(\tfrac{1}{2} - t\right)\left(f'\left(ta + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) + f'\left(t\tfrac{a+b}{2} + (1-t)\,b\right)\right) dt.
\end{aligned}$$

Preuve. Posons

$$I_1 = \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2} - t\right) f'\left(ta + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) dt$$

et

$$I_2 = \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2} - t\right) f'\left(t\tfrac{a+b}{2} + (1-t)\,b\right) dt.$$

En intégrant par partie I_1, on trouve :

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\tfrac{2}{b-a}\left(\tfrac{1}{2} - t\right) f\left(ta + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)\Big|_{t=0}^{t=1} \\
&\quad -\tfrac{2}{b-a}\int_0^1 f\left(ta + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) dt \\
&= \tfrac{1}{b-a} f(a) + \tfrac{1}{b-a} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{2}{b-a}\int_0^1 f\left(ta + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) dt \\
&= \tfrac{1}{b-a} f(a) + \tfrac{1}{b-a} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{4}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(u)\,du. \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

D'une manière analogue, on obtient :

$$I_2 = \tfrac{1}{b-a} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \tfrac{1}{b-a} f(b) - \tfrac{4}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(u)\,du, \qquad (1.5)$$

En additionnant (1.4)-(1.5), puis en multipliant le résultat par $\frac{b-a}{4}$, nous obtenons le résultat souhaité. ■

Chapitre 2

Inégalités intégrales de type Newton-Cotes à trois points

2.1 Inégalités intégrales de type Simpson

Dans cette première sous section nous allons nous intéressé à la première quadrature de Simpson dite aussi $\frac{1}{3}$-Simpson donnée comme suit :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right).$$

2.1.1 Inégalités intégrales de type Simpson pour les fonctions dont les dérivées premières sont s-convexes

Théorème 2.1 **(**[10]**)** *Soit $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f'\in L^1[a,b]$. Si $|f'|$ est s-convexe sur $[a,b]$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|\\ \leq\;& (b-a)\,\frac{(s-4)6^{s+1}+2\times5^{s+2}-2\times3^{s+2}+2}{6^{s+2}(s+1)(s+2)}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right).\end{aligned}$$

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux deux membres de l'identité du Lemme 1.1, ensuite faisons appelle à la s-convexité de $|f'|$ sur $[a,b]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2}\left(\int_0^1\left|\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right|\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)\right|dt+\int_0^1\left|\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2}\right|\left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right|dt\right) \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2}\left(\int_0^1\left|\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right|\left(\left(\tfrac{1+t}{2}\right)^s|f'(b)|+\left(\tfrac{1-t}{2}\right)^s|f'(a)|\right)dt\right. \\
&\left.+\int_0^1\left|\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2}\right|\left(\left(\tfrac{1+t}{2}\right)^s|f'(a)|+\left(\tfrac{1-t}{2}\right)^s|f'(b)|\right)dt\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{2}\int_0^1\left|\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right|\left(\left(\tfrac{1+t}{2}\right)^s+\left(\tfrac{1-t}{2}\right)^s\right)\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right)dt \\
=\ & \tfrac{b-a}{2^{s+1}}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right)\int_0^1\left|\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right|\left((1+t)^s+(1-t)^s\right)dt \\
=\ & (b-a)\,\tfrac{(s-4)6^{s+1}+2\times5^{s+2}-2\times3^{s+2}+2}{6^{s+2}(s+1)(s+2)}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait

$$\int_0^{\frac{2}{3}}\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2}\right)\left((1+t)^s+(1-t)^s\right)dt=\tfrac{5^{s+2}-2\times3^{s+2}+1}{2\times3^{s+2}(s+1)(s+2)}$$

et

$$\int_{\frac{2}{3}}^1\left(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right)\left((1+t)^s+(1-t)^s\right)dt=\tfrac{(s-4)6^{s+1}+5^{s+2}+1}{2\times3^{s+2}(s+1)(s+2)}.$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 2.2 ([10]) *Soit $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f'\in L^1[a,b]$. Si $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$ pour $q>1$ et $s\in\,]0,1]$, alors on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{12}\left(\tfrac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{1/p}\left(\left(\tfrac{|f'(b)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{1/q}+\left(\tfrac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{1/q}\right),
\end{aligned}$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Preuve. En utilisant le Lemme 1.1, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{6}\left(f\left(a\right)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(b\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\left(\left(\int_0^1\left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1\left|\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right|^p dt\right)\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right). \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

De la s-convexité $\left|f'\right|^q$, on a :

$$\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt\leq\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q}{2} \qquad (2.2)$$

et

$$\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\leq\frac{\left|f'(a)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2}. \qquad (2.3)$$

Substituons (2.2) et (2.3) dans (2.1) on trouve

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{6}\left(f\left(a\right)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(b\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{12}\left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'(a)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé

$$\begin{aligned}
\int_0^1\left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|^p dt &= \int_0^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right)^p dt+\int_{\frac{2}{3}}^1\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right)^p dt \\
&= -\frac{2}{p+1}\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right)^{p+1}\Bigg|_{t=0}^{t=\frac{2}{3}}+\frac{2}{p+1}\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right)^{p+1}\Bigg|_{t=\frac{2}{3}}^{t=1} \\
&= \frac{2}{p+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{p+1}+\frac{2}{p+1}\left(\frac{1}{6}\right)^{p+1} \\
&= \frac{2}{p+1}\left(\frac{2^{p+1}}{6^{p+1}}+\frac{1}{6^{p+1}}\right)=\frac{2}{p+1}\left(\frac{1+2^{p+1}}{6^{p+1}}\right)=\frac{1}{6^p}\times\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}.
\end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

2.2 Inégalités intégrales de type Bullen

Dans cette sous section nous allons nous intéressé à la quadrature dite Bullen, dont la forme est la suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(\frac{f(a)+2f(b)}{2}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right).$$

2.2.1 Inégalités intégrales de type Bullen pour les fonctions dont les dérivées premières sont convexes

Théorème 2.3 ([11]) *Soit $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f'\in L^1[a,b]$ avec $0\le a<b$. Si $|f'|^q$ est convexe où $q\ge 1$, alors on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2}\left(\frac{f(a)+2f(b)}{2}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\
\le\;& \frac{b-a}{16}\left(\frac{1}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(\frac{(2q+5)|f'(a)|^q+(2q+3)|f'(b)|^q}{4(q+2)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(a)|^q+(4q+7)|f'(b)|^q}{4(q+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\frac{(4q+7)|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{4(q+2)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{(2q+3)|f'(a)|^q+(2q+5)|f'(b)|^q}{4(q+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.2, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité des moyennes d'ordre q et la convexité de $|f'|^q$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2}\left(\frac{f(a)+2f(b)}{2}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\
\le\;& \frac{b-a}{4}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-t\right)\left(\left|f'\left(ta+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|+\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right|\right)dt\right.\\
&\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(\left|f'\left(ta+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|+\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right|\right)dt\right)\\
=\;& \frac{b-a}{4}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-t\right)\left|f'\left(\frac{t+1}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|dt+\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-t\right)\left|f'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\right|dt\right.\\
&\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t-\frac{1}{2}\right)\left|f'\left(\frac{t+1}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t-\frac{1}{2}\right)\left|f'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\right|dt\right)\\
\le\;& \frac{b-a}{4}\left(\left(\int_0^{\frac{1}{2}}1dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-t\right)^q\left|f'\left(\frac{t+1}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{2} - t\right)^q \left| f'\left(\tfrac{t}{2}a + \tfrac{2-t}{2}b\right)\right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg) \\
& + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} 1 dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \tfrac{1}{2}\right)^q \left| f'\left(\tfrac{t+1}{2}a + \tfrac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \left. \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \tfrac{1}{2}\right)^q \left| f'\left(\tfrac{t}{2}a + \tfrac{2-t}{2}b\right)\right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right) \Bigg) \\
\leq \; & \tfrac{b-a}{4} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{2} - t\right)^q \left(\tfrac{t+1}{2} \left|f'(a)\right|^q + \tfrac{1-t}{2} \left|f'(b)\right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{2} - t\right)^q \left(\tfrac{t}{2} \left|f'(a)\right|^q + \tfrac{2-t}{2} \left|f'(b)\right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \tfrac{1}{2}\right)^q \left(\tfrac{t+1}{2} \left|f'(a)\right|^q + \tfrac{1-t}{2} \left|f'(b)\right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left. \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \tfrac{1}{2}\right)^q \left(\tfrac{t}{2} \left|f'(a)\right|^q + \tfrac{2-t}{2} \left|f'(b)\right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
= \; & \tfrac{b-a}{4} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\left|f'(a)\right|^q \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{2} - t\right)^q \tfrac{t+1}{2} dt + \left|f'(b)\right|^q \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{2} - t\right)^q \tfrac{1-t}{2} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \left(\left|f'(a)\right|^q \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{2} - t\right)^q \tfrac{t}{2} dt + \left|f'(b)\right|^q \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{2} - t\right)^q \tfrac{2-t}{2} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\left|f'(a)\right|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \tfrac{1}{2}\right)^q \tfrac{t+1}{2} dt + \left|f'(b)\right|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \tfrac{1}{2}\right)^q \tfrac{1-t}{2} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left. \left(\left|f'(a)\right|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \tfrac{1}{2}\right)^q \tfrac{t}{2} dt + \left|f'(b)\right|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \tfrac{1}{2}\right)^q \tfrac{2-t}{2} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
= \; & \tfrac{b-a}{4} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2+\frac{1}{q}} \left(\left(\tfrac{2q+5}{2(q+1)(q+2)} \left|f'(a)\right|^q + \tfrac{2q+3}{2(q+1)(q+2)} \left|f'(b)\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \left(\tfrac{1}{2(q+1)(q+2)} \left|f'(a)\right|^q + \tfrac{4q+7}{2(q+1)(q+2)} \left|f'(b)\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\tfrac{4q+7}{2(q+1)(q+2)} \left|f'(a)\right|^q + \tfrac{1}{2(q+1)(q+2)} \left|f'(b)\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left. \left(\tfrac{2q+3}{2(q+1)(q+2)} \left|f'(a)\right|^q + \tfrac{2q+5}{2(q+1)(q+2)} \left|f'(b)\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
= \; & \tfrac{b-a}{16} \left(\tfrac{1}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\tfrac{(2q+5)|f'(a)|^q + (2q+3)|f'(b)|^q}{4(q+2)} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{|f'(a)|^q + (4q+7)|f'(b)|^q}{4(q+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \left. \left(\tfrac{(4q+7)|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{4(q+2)} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{(2q+3)|f'(a)|^q + (2q+5)|f'(b)|^q}{4(q+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \right),
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé

$$
\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{2} - t\right)^q \tfrac{t+1}{2} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \tfrac{1}{2}\right)^q \tfrac{2-t}{2} dt = \tfrac{2q+5}{2(q+1)(q+2)} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{q+2},
$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{2}-t\right)^q \tfrac{1-t}{2}dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t-\tfrac{1}{2}\right)^q \tfrac{t}{2}dt = \tfrac{2q+3}{2(q+1)(q+2)} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{q+2},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{2}-t\right)^q \tfrac{t}{2}dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t-\tfrac{1}{2}\right)^q \tfrac{1-t}{2}dt = \tfrac{1}{2(q+1)(q+2)} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{q+2}$$

et

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{2}-t\right)^q \tfrac{2-t}{2}dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t-\tfrac{1}{2}\right)^q \tfrac{t+1}{2}dt = \tfrac{4q+7}{2(q+1)(q+2)} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{q+2}.$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 2.1 ([11]) *Dans le cas où $q=1$, le Théorème 2.3, donne :*

$$\left|\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{f(a)+2f(b)}{2}+f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(u)\,du\right| \leq \tfrac{b-a}{16}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right).$$

Chapitre 3

Inégalités intégrales de type Bullen-Simpson

Dans ce chapitre, nous allons d'abord démontrer une nouvelle identité, en s'appuyant sur cette dernière nous prouverons de nouvelles inégalités de type Newton-Cotes à cinq-points, dont la forme est la suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{b-a}{12}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right).$$

Cette dernière peut être vue comme combinaison de la de la méthode de Simpson et la méthode de Bullen. Ces nouveaux résultats sont soumis pour une éventuelle publication [4].

Lemme 3.1 ([4]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I°, $a, b \in I^{\circ}$ avec $a < b$ et $f' \in L^1[a,b]$, alors l'égalité suivante est vérifiée*

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{12}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(u)\,du \\ = \; & \tfrac{b-a}{16}\Bigg(\int\limits_0^1\left(t-\tfrac{1}{3}\right)f'\left((1-t)a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)dt+\int\limits_0^1\left(t-\tfrac{2}{3}\right)f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)dt \\ & +\int\limits_0^1\left(t-\tfrac{1}{3}\right)f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)dt+\int\limits_0^1\left(t-\tfrac{2}{3}\right)f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)dt\Bigg). \end{aligned}$$

Preuve. Considérons les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_0^1 \left(t-\tfrac{1}{3}\right) f'\left((1-t)\,a + t\tfrac{3a+b}{4}\right) dt, \\
I_2 &= \int\limits_0^1 \left(t-\tfrac{2}{3}\right) f'\left((1-t)\,\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right) dt, \\
I_3 &= \int\limits_0^1 \left(t-\tfrac{1}{3}\right) f'\left((1-t)\,\tfrac{a+b}{2} + t\tfrac{a+3b}{4}\right) dt
\end{aligned}$$

et

$$I_4 = \int\limits_0^1 \left(t-\tfrac{2}{3}\right) f'\left((1-t)\,\tfrac{a+3b}{4} + tb\right) dt.$$

En intégrant par partie I_1, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \tfrac{4}{b-a}\left(t-\tfrac{1}{3}\right) f\left((1-t)\,a + t\tfrac{3a+b}{4}\right)\Big|_{t=0}^{t=1} \\
&\quad -\tfrac{4}{b-a}\int\limits_0^1 f\left((1-t)\,a + t\tfrac{3a+b}{4}\right) dt \\
&= \tfrac{8}{3(b-a)} f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) + \tfrac{4}{3(b-a)} f(a) - \tfrac{4}{b-a}\int\limits_0^1 f\left((1-t)\,a + t\tfrac{3a+b}{4}\right) dt \\
&= \tfrac{8}{3(b-a)} f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) + \tfrac{4}{3(b-a)} f(a) - \tfrac{16}{(b-a)^2}\int\limits_a^{\frac{3a+b}{4}} f(u)\,du. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

D'une manière similaire, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \tfrac{4}{b-a}\left(t-\tfrac{2}{3}\right) f\left((1-t)\,\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right)\Big|_{t=0}^{t=1} \\
&\quad -\tfrac{4}{b-a}\int\limits_0^1 f\left((1-t)\,\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right) dt \\
&= \tfrac{4}{3(b-a)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \tfrac{8}{3(b-a)} f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - \tfrac{4}{b-a}\int\limits_0^1 f\left((1-t)\,\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right) dt \\
&= \tfrac{4}{3(b-a)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \tfrac{8}{3(b-a)} f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - \tfrac{16}{(b-a)^2}\int\limits_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}} f(u)\,du\ , \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \tfrac{4}{b-a}\left(t-\tfrac{1}{3}\right) f\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)\Big|_{t=0}^{t=1} \\
&\quad -\tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)dt \\
&= \tfrac{8}{3(b-a)} f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+\tfrac{4}{3(b-a)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)dt \\
&= \tfrac{8}{3(b-a)} f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+\tfrac{4}{3(b-a)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{16}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+3b}{4}} f(u)\,du \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \tfrac{4}{b-a}\left(t-\tfrac{2}{3}\right) f\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)\Big|_{t=0}^{t=1} \\
&\quad -\tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)dt \\
&= \tfrac{4}{3(b-a)} f(b)+\tfrac{8}{3(b-a)} f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)-\tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)dt \\
&= \tfrac{4}{3(b-a)} f(b)+\tfrac{8}{3(b-a)} f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)-\tfrac{16}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+3b}{4}}^{b} f(u)\,du. \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

En additionnant (3.1)-(3.4), puis en multipliant l'égalité résultante par $\frac{b-a}{16}$, on obtient le résultat souhaite. ■

Théorème 3.1 ([4]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f' \in L^1[a,b]$ avec $0 \le a < b$. Si $|f'|$ est s-convexe au second sens pour certain $s \in]0,1]$ fixé, on a :*

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{12}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\le\ & \tfrac{b-a}{16(s+1)(s+2)}\left(\left(\tfrac{s-1}{3}+\tfrac{8}{9}\left(\tfrac{2}{3}\right)^s\right)\left(|f'(a)|+2\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+|f'(b)|\right)\right. \\
&\left.+2\left(\tfrac{2s+1}{3}+\tfrac{2}{9}\left(\tfrac{1}{3}\right)^s\right)\left(\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|\right)\right).
\end{aligned}
$$

Preuve. A partir du Lemme 3.1, les propriétés de la valeur absolue et la s-convexité au second sens de $|f'|$, on a :

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{12}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|\left|f'\left((1-t)a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|dt+\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)\right|dt\right. \\
&\left.+\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|dt+\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)\right|dt\right) \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|\left((1-t)^s|f'(a)|+t^s\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|\right)dt\right. \\
&+\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right)dt \\
&+\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|\right)dt \\
&\left.+\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|+t^s|f'(b)|\right)dt\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{16}\left(|f'(a)|\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|(1-t)^s\,dt+|f'(b)|\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|t^s dt\right. \\
&+\left(\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|\right)\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|t^s dt+\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|(1-t)^s\,dt\right) \\
&\left.+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|t^s dt+\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|(1-t)^s\,dt\right)\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{16(s+1)(s+2)}\left(\left(\tfrac{s-1}{3}+\tfrac{8}{9}\left(\tfrac{2}{3}\right)^s\right)\left(|f'(a)|+2\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+|f'(b)|\right)\right. \\
&\left.+2\left(\tfrac{2s+1}{3}+\tfrac{2}{9}\left(\tfrac{1}{3}\right)^s\right)\left(\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|\right)\right),
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé

$$
\begin{aligned}
\Upsilon_1(s) &= \int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|(1-t)^s\,dt=\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|t^s dt \\
&= \tfrac{s-1}{3(s+1)(s+2)}+\tfrac{2}{(s+1)(s+2)}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{s+2} \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

et

$$\begin{aligned}\Upsilon_2(s) &= \int_0^1 \left|t-\tfrac{1}{3}\right| t^s dt = \int_0^1 \left|t-\tfrac{2}{3}\right| (1-t)^s\, dt \\ &= \tfrac{2s+1}{3(s+1)(s+2)} + \tfrac{2}{(s+1)(s+2)} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{s+2}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

La preuve est ainsi terminée. ■

Corollaire 3.1 ([4]) *En utilisant la s-convexité de $|f'|$ le Théorème 3.1 devient :*

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{1}{12}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\ \leq\ & \tfrac{b-a}{18(s+1)(s+2)}\left(\tfrac{3\left(s^2-1+2^{3-s}s+2^{2-s}\right)}{8(s+1)}+\tfrac{4^s(s+1)+1}{6^s(s+1)}\right) \\ & \times\left(|f'(a)|+2\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+|f'(b)|\right) &(3.7)\\ \leq\ & \tfrac{b-a}{9(s+1)(s+2)}\left(\tfrac{3\left(s^2-1+2^{3-s}s+2^{2-s}\right)}{8(s+1)}+\tfrac{4^s(s+1)+1}{6^s(s+1)}\right)\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right). &(3.8)\end{aligned}$$

Corollaire 3.2 ([4]) *Pour $s=1$, le Théorème 3.1 donne :*

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{1}{12}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\ \leq\ & \tfrac{5(b-a)}{72}\left(\tfrac{8|f'(a)|+29\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|+16\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+29\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|+8|f'(b)|}{90}\right).\end{aligned}$$

Corollaire 3.3 ([4]) *Pour $s=1$, le Corollaire 3.1 donne :*

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{1}{12}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\ \leq\ & \tfrac{5(b-a)}{288}\left(|f'(a)|+2\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+|f'(b)|\right) &(3.9)\\ \leq\ & \tfrac{5(b-a)}{144}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right). &(3.10)\end{aligned}$$

Théorème 3.2 ([4]) *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f'\in L^1[a,b]$ avec $0\leq a<b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe au second sens pour un certain nombre*

$s \in]0,1]$ *et* $q > 1$ *avec* $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$, *on a :*

$$\left|\tfrac{1}{12}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$
$$\leq \tfrac{b-a}{48}\left(\tfrac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Preuve. En utilisant le Lemme 3.1, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité de Hölder et la s-convexité au second sens de $|f'|^q$, on obtient :

$$\left|\tfrac{1}{12}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$
$$\leq \tfrac{b-a}{16}\left(\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left((1-t)\,a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$+\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left((1-t)\,\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left((1-t)\,\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\left.+\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left((1-t)\,\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$
$$\leq \tfrac{b-a}{16}\left(\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{1}{3}-t\right)^p dt+\int_{\frac{1}{3}}^1\left(t-\tfrac{1}{3}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left(\left(\int_0^1\left((1-t)^s|f'(a)|^q+t^s\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$+\left(\int_0^1\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\int_0^1\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^1\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q+t^s\left|f'(b)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg)$$

$$=\ \tfrac{b-a}{48}\left(\tfrac{1+2^{p+1}}{3^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{\left|f'(a)\right|^q+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 3.4 ([4]) *En utilisant la convexité de $|f'|^q$, le Théorème 3.2, donne :*

$$\left|\tfrac{1}{12}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$

$$\leq\ \tfrac{b-a}{48}\left(\tfrac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{\left(s+1+2^{1-s}\right)\left|f'(a)\right|^q+2^{1-s}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{(s+1)^2}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\tfrac{2^{1-s}\left|f'(a)\right|^q+\left(s+1+2^{1-s}\right)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{(s+1)^2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{\left(s+1+2^{1-s}\right)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+2^{1-s}\left|f'(b)\right|^q}{(s+1)^2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.+\left(\tfrac{\left(s+1+2^{1-s}\right)\left|f'(b)\right|^q+2^{1-s}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{(s+1)^2}\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Corollaire 3.5 ([4]) *Pour $s=1$, le Théorème 3.2, donne :*

$$\left|\tfrac{1}{12}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$

$$\leq\ \tfrac{b-a}{48}\left(\tfrac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{\left|f'(a)\right|^q+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Corollaire 3.6 ([5]) *En utilisant la convexité de* $|f'|^q$, *le Corollaire 3.5 donne*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{12}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{48}\left(\tfrac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{3|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{|f'(a)|^q+3\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\tfrac{3\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+3|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.7 ([4]) *En utilisant l'inégalité des moyennes d'ordre q discrètes, le Corollaire 3.6 donne :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{12}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{24}\left(\tfrac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \qquad (3.11) \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{12}\left(\tfrac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\tfrac{|f'(a)|^q+2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Corollaire 3.8 ([4]) *En utilisant la convexité de* $|f'|^q$ *le Corollaire 3.7, donne*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{12}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{48}\left(\tfrac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{7|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{5|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\tfrac{3|f'(a)|^q+5|f'(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{|f'(a)|^q+7|f'(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.9 ([4]) *En utilisant l'inégalité des moyennes d'ordre q discrète le Corollaire 3.8, donne :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{12}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{12}\left(\tfrac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\tfrac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Théorème 3.3 ([4]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f' \in L^1[a,b]$ avec $0 \leq a < b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe au second sens pour un certain nombre $s \in]0,1]$ fixé et $q \geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{12}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{5(b-a)}{288}\Bigg(\left(\tfrac{2\times3^{s+1}(s-1)+2^{s+4}}{5\times3^s(s+1)(s+2)}\left|f'(a)\right|^q+\tfrac{2\times3^{s+1}(2s+1)+4}{5\times3^s(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\tfrac{2\times3^{s+1}(2s+1)+4}{5\times3^s(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q+\tfrac{2\times3^{s+1}(s-1)+2^{s+4}}{5\times3^s(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\tfrac{2\times3^{s+1}(s-1)+2^{s+4}}{5\times3^s(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+\tfrac{2\times3^{s+1}(2s+1)+4}{5\times3^s(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\tfrac{2\times3^{s+1}(2s+1)+4}{5\times3^s(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q+\tfrac{2\times3^{s+1}(s-1)+2^{s+4}}{5\times3^s(s+1)(s+2)}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg).
\end{aligned}$$

Preuve. D'après le Lemme 3.1, l'inégalité des moyennes d'ordre q et la s-convexité de $|f'|^q$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{12}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{16}\Bigg(\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|\left|f'\left((1-t)a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg) \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{16}\Bigg(\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|\left((1-t)^s\left|f'(a)\right|^q+t^s\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$+\left(\int_0^1 \left|t-\tfrac{2}{3}\right| dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left|t-\tfrac{2}{3}\right| \left((1-t)^s \left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q + t^s \left|f'(b)\right|^q\right) dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg)$$

$$= \tfrac{b-a}{16}\left(\tfrac{5}{18}\right)^{1-\frac{1}{q}} \Bigg(\left(\left|f'(a)\right|^q \int_0^1 \left|t-\tfrac{1}{3}\right| (1-t)^s dt + \left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q \int_0^1 \left|t-\tfrac{1}{3}\right| t^s dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q \int_0^1 \left|t-\tfrac{2}{3}\right| (1-t)^s dt + \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q \int_0^1 \left|t-\tfrac{2}{3}\right| t^s dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q \int_0^1 \left|t-\tfrac{1}{3}\right| (1-t)^s dt + \left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q \int_0^1 \left|t-\tfrac{1}{3}\right| t^s dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q \int_0^1 \left|t-\tfrac{2}{3}\right| (1-t)^s dt + \left|f'(b)\right|^q \int_0^1 \left|t-\tfrac{2}{3}\right| t^s dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg)$$

$$= \tfrac{5(b-a)}{288}\Bigg(\left(\tfrac{2\times 3^{s+1}(s-1)+2^{s+4}}{5\times 3^s(s+1)(s+2)}\left|f'(a)\right|^q + \tfrac{2\times 3^{s+1}(2s+1)+4}{5\times 3^s(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\tfrac{2\times 3^{s+1}(2s+1)+4}{5\times 3^s(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q + \tfrac{2\times 3^{s+1}(s-1)+2^{s+4}}{5\times 3^s(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\tfrac{2\times 3^{s+1}(s-1)+2^{s+4}}{5\times 3^s(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q + \tfrac{2\times 3^{s+1}(2s+1)+4}{5\times 3^s(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\tfrac{2\times 3^{s+1}(2s+1)+4}{5\times 3^s(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q + \tfrac{2\times 3^{s+1}(s-1)+2^{s+4}}{5\times 3^s(s+1)(s+2)}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg),$$

où nous avons utilisé (3.5) et (3.6). La preuve est terminée. ■

Corollaire 3.10 ([4]) *En utilisant la s-convexité de $|f'|^q$ le Théorème 3.3, donne :*

$$\left|\tfrac{1}{12}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \le \tfrac{5(b-a)}{288}$$

$$\times\Bigg(\left(\tfrac{3^{s+1}2\left(s^2-1\right)+2^{s+4}(s+1)+2^{2-s}3^{s+1}(2s+1)+2^{3-s}}{5\times 3^s(s+1)^2(s+2)}\left|f'(a)\right|^q + \tfrac{2^{2-s}3^{s+1}(2s+1)+2^{3-s}}{5\times 3^s(s+1)^2(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\tfrac{2^{2-s}3^{s+1}(2s+1)+2^{3-s}}{5\times 3^s(s+1)^2(s+2)}\left|f'(a)\right|^q + \tfrac{3^{s+1}2\left(s^2-1\right)+2^{s+4}(s+1)+2^{2-s}3^{s+1}(2s+1)+2^{3-s}}{5\times 3^s(s+1)^2(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\tfrac{3^{s+1}2\left(s^2-1\right)+2^{s+4}(s+1)+2^{2-s}3^{s+1}(2s+1)+2^{3-s}}{5\times 3^s(s+1)^2(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q + \tfrac{2^{2-s}3^{s+1}(2s+1)+2^{3-s}}{5\times 3^s(s+1)^2(s+2)}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\tfrac{2^{2-s}3^{s+1}(2s+1)+2^{3-s}}{5\times 3^s(s+1)^2(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q + \tfrac{3^{s+1}2\left(s^2-1\right)+2^{s+4}(s+1)+2^{2-s}3^{s+1}(2s+1)+2^{3-s}}{5\times 3^s(s+1)^2(s+2)}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg).$$

Corollaire 3.11 ([4]) *En utilisant l'inégalité des moyennes d'ordre q discrète le Corollaire 3.10, donne :*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{12}\left(f\left(a\right)+4f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+4f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+f\left(b\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(u\right)du\right| \\
\leq\ & \frac{5(b-a)}{144}\left(\frac{3^{s+1}2\left(s^2-1\right)+2^{s+4}(s+1)+2^{2-s}3^{s+1}(2s+1)+2^{3-s}}{5\times 3^s(s+1)^2(s+2)}+\frac{2^{2-s}\times 3^{s+1}(2s+1)+2^{3-s}}{5\times 3^s(s+1)^2(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
\leq\ & \frac{5(b-a)}{72}\left(\frac{3^{s+1}2\left(s^2-1\right)+2^{s+4}(s+1)+2^{2-s}3^{s+1}(2s+1)+2^{3-s}}{5\times 3^s(s+1)^2(s+2)}+\frac{2^{2-s}3^{s+1}(2s+1)+2^{3-s}}{5\times 3^s(s+1)^2(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\frac{|f'(a)|^q+2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Corollaire 3.12 ([4]) *Pour $s=1$, le Théorème 3.3, donne :*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{12}\left(f\left(a\right)+4f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+4f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+f\left(b\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(u\right)du\right| \\
\leq\ & \frac{5(b-a)}{288}\left(\left(\frac{16|f'(a)|^q+29\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q}{45}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{29\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+16\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{45}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\frac{16\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+29\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q}{45}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{29\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+16|f'(b)|^q}{45}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.13 ([4]) *En utilisant la convexité de $|f'|^q$ le Corollaire 3.12, donne*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{12}\left(f\left(a\right)+4f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+4f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+f\left(b\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(u\right)du\right| \\
\leq\ & \frac{5(b-a)}{288}\left(\left(\frac{61|f'(a)|^q+29\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{90}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{29|f'(a)|^q+61\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{90}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\frac{61\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+29|f'(b)|^q}{90}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{29\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+61|f'(b)|^q}{90}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.14 ([4]) *En utilisant l'inégalité des moyennes d'ordre q discrète le Corollaire 3.13, donne :*

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{1}{12}\left(f\left(a\right)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f\left(b\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f\left(u\right)du\right|\\ \leq\ & \tfrac{5(b-a)}{144}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\ \leq\ & \tfrac{5(b-a)}{72}\left(\tfrac{|f'(a)|^q+2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Corollaire 3.15 ([4]) *En utilisant la convexité de $|f'|^q$ le Corollaire 3.13, donne :*

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{1}{12}\left(f\left(a\right)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f\left(b\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f\left(u\right)du\right|\\ \leq\ & \tfrac{5(b-a)}{288}\left(\left(\tfrac{151|f'(a)|^q+29|f'(b)|^q}{180}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{119|f'(a)|^q+61|f'(b)|^q}{180}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\ &\left.+\left(\tfrac{61|f'(a)|^q+119|f'(b)|^q}{180}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{29|f'(a)|^q+151|f'(b)|^q}{180}\right)^{\frac{1}{q}}\right).\end{aligned}$$

Corollaire 3.16 ([4]) *En utilisant l'inégalité des moyennes d'ordre q discrète le Corollaire 3.15, donne :*

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{1}{12}\left(f\left(a\right)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f\left(b\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f\left(u\right)du\right|\\ \leq\ & \tfrac{5(b-a)}{72}\left(\tfrac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Théorème 3.4 ([4]) *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f'\in L^1[a,b]$ avec $0\leq a<b$. Si $f'(x)$ est bornée, alors on a :*

$$\left|\tfrac{1}{12}\left(f\left(a\right)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f\left(b\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f\left(u\right)du\right|\leq\tfrac{5(b-a)(M-m)}{144}.$$

Preuve. D'après le Lemme 3.1, on a :

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{12}\left(f\left(a\right)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f\left(b\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b}f\left(u\right)du\\
=\;&\tfrac{b-a}{16}\left(\int\limits_{0}^{1}\left(t-\tfrac{1}{3}\right)\left(f'\left(\left(1-t\right)a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}+\tfrac{m+M}{2}\right)dt\right.\\
&+\int\limits_{0}^{1}\left(t-\tfrac{2}{3}\right)\left(f'\left(\left(1-t\right)\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{m+M}{2}+\tfrac{m+M}{2}\right)dt\\
&+\int\limits_{0}^{1}\left(t-\tfrac{1}{3}\right)\left(f'\left(\left(1-t\right)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}+\tfrac{m+M}{2}\right)dt\\
&\left.+\int\limits_{0}^{1}\left(t-\tfrac{2}{3}\right)\left(f'\left(\left(1-t\right)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)-\tfrac{m+M}{2}+\tfrac{m+M}{2}\right)dt\right)\\
=\;&\tfrac{b-a}{16}\left(\int\limits_{0}^{1}\left(t-\tfrac{1}{3}\right)\left(f'\left(\left(1-t\right)a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}+\tfrac{m+M}{2}\right)dt\right.\\
&+\int\limits_{0}^{1}\left(t-\tfrac{2}{3}\right)\left(f'\left(\left(1-t\right)\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{m+M}{2}+\tfrac{m+M}{2}\right)dt\\
&+\int\limits_{0}^{1}\left(t-\tfrac{1}{3}\right)\left(f'\left(\left(1-t\right)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}+\tfrac{m+M}{2}\right)dt\\
&\left.+\int\limits_{0}^{1}\left(t-\tfrac{2}{3}\right)\left(f'\left(\left(1-t\right)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)-\tfrac{m+M}{2}+\tfrac{m+M}{2}\right)dt\right)\\
=\;&\tfrac{b-a}{16}\left(\int\limits_{0}^{1}\left(t-\tfrac{1}{3}\right)\left(f'\left(\left(1-t\right)a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right)dt\right.\\
&+\int\limits_{0}^{1}\left(t-\tfrac{2}{3}\right)\left(f'\left(\left(1-t\right)\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right)dt\\
&+\int\limits_{0}^{1}\left(t-\tfrac{1}{3}\right)\left(f'\left(\left(1-t\right)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right)dt\\
&\left.+\int\limits_{0}^{1}\left(t-\tfrac{2}{3}\right)\left(f'\left(\left(1-t\right)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)-\tfrac{m+M}{2}\right)dt\right),
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

où nous avons pris en considération que

$$\int\limits_{0}^{1}\left(t-\tfrac{1}{3}\right)dt+\int\limits_{0}^{1}\left(t-\tfrac{2}{3}\right)dt+\int\limits_{0}^{1}\left(t-\tfrac{1}{3}\right)dt+\int\limits_{0}^{1}\left(t-\tfrac{2}{3}\right)dt=0.$$

En appliquant la valeur absolue des deux côtés de (3.13), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{12}\left(f\left(a\right)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f\left(b\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f\left(u\right)du\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|\left|f'\left(\left(1-t\right)a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right|dt\right. \\
&+\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|\left|f'\left(\left(1-t\right)\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right|dt \\
&+\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|\left|f'\left(\left(1-t\right)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right|dt \\
&\left.+\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|\left|f'\left(\left(1-t\right)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)-\tfrac{m+M}{2}\right|dt\right).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Puisque $m\leq f'(x)\leq M$ pour tout $x\in[a,b]$, on a :

$$\left|f'\left(\left(1-t\right)a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right| \leq \tfrac{M-m}{2}, \tag{3.15}$$

$$\left|f'\left(\left(1-t\right)\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right| \leq \tfrac{M-m}{2}, \tag{3.16}$$

$$\left|f'\left(\left(1-t\right)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right| \leq \tfrac{M-m}{2} \tag{3.17}$$

et

$$\left|f'\left(\left(1-t\right)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)-\tfrac{m+M}{2}\right|\leq\tfrac{M-m}{2}. \tag{3.18}$$

En substituant (3.15)-(3.18) dans (3.14), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{12}\left(f\left(a\right)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f\left(b\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f\left(u\right)du\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)(M-m)}{16}\left(\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|dt+\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|dt\right) \\
=\ & \tfrac{5(b-a)(M-m)}{144},
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé

$$\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|dt=\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|dt=\tfrac{5}{18}.$$

La preuve est terminée. ■

Théorème 3.5 ([4]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f' \in L^1[a,b]$ avec $0 \leq a < b$. Si f' est une fonction r-L-Hölderienne sur $[a,b]$, on a :*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{12}\left(f(a) + 4f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 4f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b)\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \\ \leq\ & \frac{(b-a)^{r+1}}{4^{r+1}(r+1)(r+2)}\left(\frac{r^2+9r+2}{12} + \frac{1+2^{r+2}}{3^{r+2}}\right)L. \end{aligned}$$

Preuve. D'après le Lemme 3.1, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12}\left(f(a) + 4f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 4f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b)\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \\ =\ & \frac{b-a}{16}\left(\int_0^1 \left(t-\frac{1}{3}\right)\left(f'\left((1-t)a + t\frac{3a+b}{4}\right) - f'(a) + f'(a)\right)dt\right. \\ & +\int_0^1 \left(t-\frac{2}{3}\right)\left(f'\left((1-t)\frac{3a+b}{4} + t\frac{a+b}{2}\right) - f'\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right)dt \\ & +\int_0^1 \left(t-\frac{1}{3}\right)\left(f'\left((1-t)\frac{a+b}{2} + t\frac{a+3b}{4}\right) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)dt \\ & \left.+\int_0^1 \left(t-\frac{2}{3}\right)\left(f'\left((1-t)\frac{a+3b}{4} + tb\right) - f'\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)dt\right) \\ =\ & \frac{b-a}{16}\left(\int_0^1 \left(t-\frac{1}{3}\right)\left(f'\left((1-t)a + t\frac{3a+b}{4}\right) - f'(a)\right)dt\right. \\ & +\int_0^1 \left(t-\frac{2}{3}\right)\left(f'\left((1-t)\frac{3a+b}{4} + t\frac{a+b}{2}\right) - f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right)dt \\ & +\int_0^1 \left(t-\frac{1}{3}\right)\left(f'\left((1-t)\frac{a+b}{2} + t\frac{a+3b}{4}\right) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)dt \\ & +\int_0^1 \left(t-\frac{2}{3}\right)\left(f'\left((1-t)\frac{a+3b}{4} + tb\right) - f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)dt \\ & +f'(a)\int_0^1 \left(t-\frac{1}{3}\right)dt + f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\int_0^1 \left(t-\frac{2}{3}\right)dt \\ & \left.+ f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 \left(t-\frac{1}{3}\right)dt + f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\int_0^1 \left(t-\frac{2}{3}\right)dt\right) \\ =\ & \frac{b-a}{16}\left(\int_0^1 \left(t-\frac{1}{3}\right)\left(f'\left((1-t)a + t\frac{3a+b}{4}\right) - f'(a)\right)dt\right. \\ & +\int_0^1 \left(t-\frac{2}{3}\right)\left(f'\left((1-t)\frac{3a+b}{4} + t\frac{a+b}{2}\right) - f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right)dt \end{aligned}$$

$$+\int_0^1 \left(t-\tfrac{1}{3}\right)\left(f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)-f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right)dt$$
$$+\int_0^1 \left(t-\tfrac{2}{3}\right)\left(f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)-f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)dt$$
$$+\tfrac{1}{6}\left(f'(a)-f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right)+\tfrac{1}{6}\left(f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)\Big). \tag{3.19}$$

En appliquant la valeur absolue des deux côtés de (3.19), et en utilisant le fait que f' est une fonction r-L-Hölderienne sur $[a,b]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{12}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\int_0^1 \left|t-\tfrac{1}{3}\right|\left|f'\left((1-t)a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)-f'(a)\right|dt\right. \\
&+\int_0^1 \left|t-\tfrac{2}{3}\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)-f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|dt \\
&+\int_0^1 \left|t-\tfrac{1}{3}\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)-f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|dt \\
&+\int_0^1 \left|t-\tfrac{2}{3}\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)-f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|dt \\
&\left.+\tfrac{1}{6}\left|f'(a)-f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|+\tfrac{1}{6}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|\right) \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{8}\left(\tfrac{b-a}{4}\right)^r L\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|t^r dt+\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|t^r dt+\tfrac{1}{6}\right) \\
=\ & \tfrac{(b-a)^{r+1}}{4^{r+1}(r+1)(r+2)}\left(\tfrac{r^2+9r+2}{12}+\tfrac{1+2^{r+2}}{3^{r+2}}\right)L,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé (3.5)-(3.8) en remplaçant le s par r. La preuve est terminée. ■

Corollaire 3.17 ([4]) *Sous les hypothèses du Théorème 3.5, et si f' est une fonction L-Lipschitzienne, on a :*

$$\left|\tfrac{1}{12}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+4f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\leq\tfrac{(b-a)^2}{72}L.$$

3.1 Applications

3.1.1 Applications aux quadratures

Soit Υ la partition des points $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$ et considérons la formule de quadrature

$$\int_a^b f(u)\,du = \lambda(f, \Upsilon) + R(f, \Upsilon),$$

où

$$\lambda(f, \Upsilon) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)\left(f(x_i)+4f\left(\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)+2f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+4f\left(\frac{x_i+3x_{i+1}}{4}\right)+f(x_{i+1})\right)}{12}$$

et $R(f, \Upsilon)$ désigne l'erreur d'approximation associée.

Proposition 3.1 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a, b]$ avec $0 \le a < b$ et $f' \in L^1[a, b]$. Si $|f'|$ est convexe, alors on a :*

$$\begin{aligned} |R(f, \Upsilon)| \le & \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{18(s+1)(s+2)} \left(\frac{3\left(s^2-1+2^{3-s}s+2^{2-s}\right)}{8(s+1)} + \frac{4^s(s+1)+1}{6^s(s+1)} \right) \\ & \times \left(|f'(x_i)| + 2\left|f'\left(\tfrac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right| + |f'(x_{i+1})| \right). \end{aligned}$$

Preuve. En appliquant l'inégalité (3.7) du Corollaire 3.1 sur les sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ pour $(i = 0, 1, ..., n-1)$ de la partition Υ, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x_i)+4f\left(\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)+2f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+4f\left(\frac{x_i+3x_{i+1}}{4}\right)+f(x_{i+1})}{12} - \frac{1}{x_{i+1}-x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u)\,du \right| \\ \le & \frac{x_{i+1}-x_i}{18(s+1)(s+2)} \left(\frac{3\left(s^2-1+2^{3-s}s+2^{2-s}\right)}{8(s+1)} + \frac{4^s(s+1)+1}{6^s(s+1)} \right) \\ & \times \left(|f'(x_i)| + 2\left|f'\left(\tfrac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right| + |f'(x_{i+1})| \right). \end{aligned}$$

En multipliant les deux côtés de l'inégalité ci-dessus par $(x_{i+1} - x_i)$, puis en additionnant les inégalités obtenues pour tout $i = 0, 1, ..., n-1$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons le résultat souhaité. ■

Proposition 3.2 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ avec $0 \leq a < b$ et $f' \in L^1[a,b]$. Si $|f'|^q$ est convexe, alors on a :*

$$\begin{aligned} &|R(f,\Upsilon)| \\ \leq\ & \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{24}\left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(x_i)|^q+\left|f'\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\ &\left.+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right|^q+|f'(x_{i+1})|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right). \end{aligned}$$

Preuve. En appliquant l'inégalité (3.11) du Corollaire 3.7 sur les sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ pour $(i = 0,1,...,n-1)$ de la partition Υ, on obtient :

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(x_i)+4f\left(\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)+2f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+4f\left(\frac{x_i+3x_{i+1}}{4}\right)+f(x_{i+1})}{12}-\frac{1}{x_{i+1}-x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u)\,du\right| \\ \leq\ & \frac{x_{i+1}-x_i}{24}\left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(x_i)|^q+\left|f'\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\ &\left.+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right|^q+|f'(x_{i+1})|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right). \end{aligned}$$

En multipliant les deux côtés de l'inégalité ci-dessus par $(x_{i+1}-x_i)$, puis en additionnant les inégalités obtenues pour tout $i = 0,1,...,n-1$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons le résultat souhaité. ■

Proposition 3.3 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ avec $0 \leq a < b$ et $f' \in L^1[a,b]$. Si $|f'|^q$ est convexe, alors on a :*

$$\begin{aligned} |R(f,\Upsilon)| \leq\ & \sum_{i=0}^{n-1}\frac{5(x_{i+1}-x_i)^2}{72}\left(\frac{|f'(x_i)|^q+2\left|f'\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right|^q+|f'(x_{i+1})|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}. \\ &\times\left(\frac{3^{s+1}2\left(s^2-1\right)+2^{s+4}(s+1)+2^{2-s}3^{s+1}(2s+1)+2^{3-s}}{5\times 3^s(s+1)^2(s+2)}+\frac{2^{2-s}3^{s+1}(2s+1)+2^{3-s}}{5\times 3^s(s+1)^2(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Preuve. En appliquant l'inégalité (3.12) du Corollaire 3.11 sur les sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ pour $(i = 0, 1, ..., n-1)$ de la partition Υ, on obtient :

$$\left|\frac{f(x_i)+4f\left(\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)+2f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+4f\left(\frac{x_i+3x_{i+1}}{4}\right)+f(x_{i+1})}{12} - \frac{1}{x_{i+1}-x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u)\,du\right|$$
$$\leq \frac{5(x_{i+1}-x_i)}{72}\left(\frac{3^{s+1}2\left(s^2-1\right)+2^{s+4}(s+1)+2^{2-s}3^{s+1}(2s+1)+2^{3-s}}{5\times 3^s(s+1)^2(s+2)} + \frac{2^{2-s}3^{s+1}(2s+1)+2^{3-s}}{5\times 3^s(s+1)^2(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\times\left(\frac{|f'(x_i)|^q+2\left|f'\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right|^q+|f'(x_{i+1})|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

En multipliant les deux côtés de l'inégalité ci-dessus par $(x_{i+1}-x_i)$, puis en additionnant les inégalités obtenues pour tout $i = 0, 1, ..., n-1$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons le résultat souhaité. ■

3.1.2 Applications aux moyennes spéciales

Pour des nombres réels quelconques a, b, c tels que $a, b > 0, a \neq b$, on a :
La moyenne arithmétique : $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$ et $A(a,b,c,d) = \frac{a+b+c+d}{4}$.
La moyenne p-logarithmique : $L_p(a,b) = \left(\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right)^{\frac{1}{p}}$ où $p \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$.

Proposition 3.4 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < b$ et $q \geq 1$, alors on a :*

$$\left|A\left(a^2,b^2\right)+A^2(a,b)+2A^2(a,a,a,b)+2A^2(a,b,b,b)-6L_2^2(a,b)\right| \leq \frac{5}{12}\left(b^2-a^2\right).$$

Preuve. L'assertion découle de l'inégalité (3.10) du Corollaire 3.3, appliquée à la fonction $f(x) = x^2$. ■

Proposition 3.5 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < b$ et $q \geq 1$, alors on a :*

$$\left|A\left(a^3,b^3\right)+A^3(a,b)+2A^3(a,a,a,b)+2A^3(a,b,b,b)-6L_3^3(a,b)\right| \leq \frac{b}{2}(b-a)^2.$$

Preuve. L'assertion découle du Corollaire 3.17, appliquée à la fonction $f(x) = x^3$. ■

Conclusion

La problématique de ce mémoire était d'étudier d'une part, certaines inégalités de type Bullen-Simpson et de se familiarisé avec certaines outils nécessaires utiliser dans les démonstrations de ce genre de problèmes, et d'autre part essayer d'établir des nouvelles estimations concernant ce type d'inégalités.

Dans la première partie, nous nous sommes intéressés à rappeler quelques classes de fonctions ainsi que quelques identités.

Dans la seconde partie nous avons étudié quelques inégalités de type Newton-Cotes à trois points via certains genres de convexités.

Et dans la troisième partie nous avons discuté des nouveaux résultats concernant les inégalités de type Newton-Cotes à cinq points.

Bibliographie

[1] W. W. Breckner, Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen. (German) Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 23 (1978), no. 37, 13–20.

[2] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić, Means and their inequalities. Translated and revised from the Serbo-Croatian. Mathematics and its Applications (East European Series), 31. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1988.

[3] J. Heinonen, Lectures on analysis on metric spaces. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[4] B. Meftah and S. Samoudi, Some Bullen-Simpson type inequalities for differentiable s-convex functions. Submited.

[5] D. S. Mitrinović, Analytic inequalities. In cooperation with P. M. Vasić. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 165 Springer-Verlag, New York-Berlin 1970.

[6] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Classical and new inequalities in analysis. Mathematics and its Applications, 61. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[7] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Inequalities for functions and their integrals and derivatives, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.

[8] J. E. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Mathematics in Science and Engineering, 187. Academic

Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[9] M. Z. Sarikaya, E. Set and M. E. Özdemir, On new inequalities of Simpson's type for convex functions, RGMIA Res. Rep. Coll. 13 (2) (2010) Article2.

[10] M. Z. Sarikaya, E. Set and M. E. Özdemir, On new inequalities of Simpson's type for s-convex functions. Comput. Math. Appl. 60 (2010), no. 8, 2191–2199.

[11] B.-Y. Xi and F. Qi, Some Hermite-Hadamard type inequalities for differentiable convex functions and applications. Hacet. J. Math. Stat. 42 (2013), no. 3, 243–257.