

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques
Option : **Equations aux Dérivées Partielles**
Et analyse numérique

Par : **Labioud Safa**

Intitulé

**Traitement d'une équation de vollerra avec un noyau
de singularité double**

Dirigé par : Dr.GHIAT Mourad

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.ARIES Med E-salih	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.GHIAT Mourad	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.BELHIERCHE Hanane	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2023

Remerciements

Avant tout je remercie **Allah** le tout puissant qui m'a donné la volonté, le courage, la force et la patience pour réaliser ce travail.

Je voudrais dans un premier temps remercier à mon directeur de mémoire **Monsieur Mourad GHIAT**, pour avoir accepté de mon encadrement, son support, pour sa patience qu'il n'a cessé de nous apporter tout au long de ce travail, et sa disponibilité, surtout ses conseils avisés ce qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

- Je remercie les membres du jury **Monsieur ARIES Med Es-salih**, et **madame BEL-HIERCHE Hanane** d'avoir accepté d'évaluer ce modeste travail dans ces conditions exceptionnelles. L'aide qui m'a été accordée.
- Une grande reconnaissance et un grand remerciement à tous mes enseignants qui ont participé à ma formation, surtout les enseignants de l'école doctorale .
- Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont soutenu durant la réalisation de mon mémoire.
- Un grand merci à ma mère et mon père, leurs conseils, ainsi que leur soutien inconditionnel. Je remercie mes sœurs, mes frères, mes proches et mes amis, qui m'ont toujours encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

J'ai l'honneur de dédicace ce modeste travail a mes très chers parents :

Aucun mot ne saurait exprimer ma profonde gratitude et ma sincère reconnaissance envers les deux personnes les plus chères à mon cœur , deux personnes qui m'ont dirigé et suivi pendant toutes mes années d'études

Papa : merci pour ta patience ,ta confiance ,ton amour et ton soutien

Mama : merci pour ton amour ,ta patience ,ta présence et les encouragements tu es la clé de ma réussite

Qu'allah le tout puissant vous garde

A mon très chère frère : **Hichem**

Merci pour tous les efforts ,tes sacrifices pour toute la confiance que m'as données afin de me motiver dans mes études et me voir satisfaite et heureuse,,je te souhaite une vie pleine de bonheur avec ta femme **khaoula** et ton fils **djad** source de joie et bonheur dans la maison .

A mes très chères sœurs :**SAKINA** et **SANA**

Merci pour tes encouragements ,,je te souhaite de réussir brillamment dans ta vie

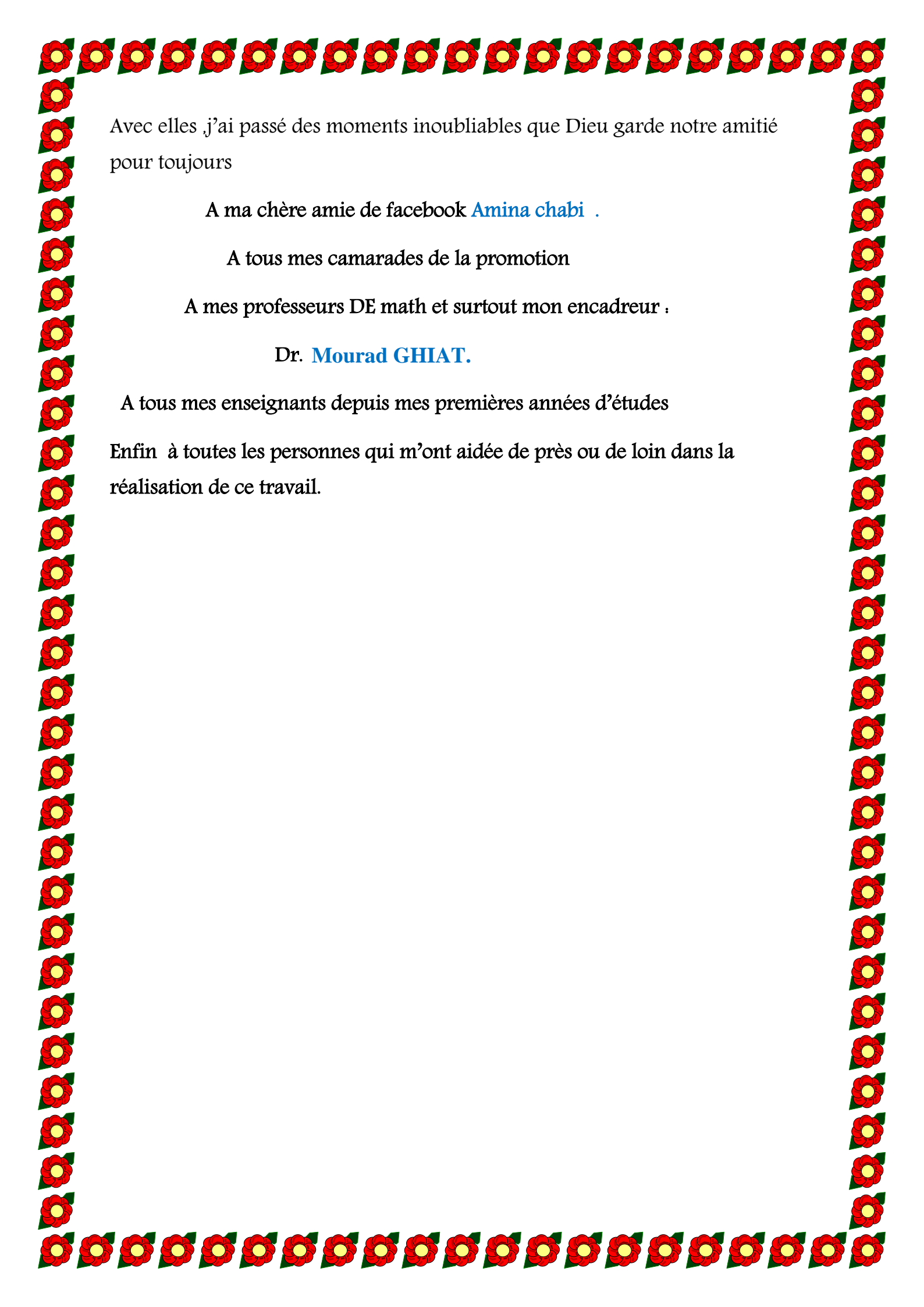
A mes très chères sœurs : **NAIIMA** et **WIDAD**

Merci infiniment pour l'esprit positif que tu me donne ,,je te souhaite de réussir dans ta vie privée avec tes maris **SAID** et **NACER** et tes enfants

YAAKOUB et **AYOUB** et **ROUKAYA**

A toute ma famille labiod :oncles ,tantes ,cousins et cousines avec toute mon affection et mon respect

A mes amies les plus proches :**chourouk,chahra,lidya,sara,warda ,zika, chaima,salma,amira,amina,chaima,houriya,achwak,hind, hanadi,rayan,nada.**



Avec elles j'ai passé des moments inoubliables que Dieu garde notre amitié pour toujours

A ma chère amie de facebook [Amina chabi](#) .

A tous mes camarades de la promotion

A mes professeurs DE math et surtout mon encadreur :

Dr. **Mourad GHIAT.**

A tous mes enseignants depuis mes premières années d'études

Enfin à toutes les personnes qui m'ont aidée de près ou de loin dans la réalisation de ce travail.

ملخص:

في هذه الأطروحة، نحن مهتمون بمعادلة فولتيرا المتكاملة غير الخطية بنواتين مفردتين ضعيفتين.

الهدف من هذه المذكرة هو وضع مشكلتنا في الإطار الوظيفي، ونضع فرضيات مقبولة بحيث تقبل معادلتنا حلاً فريداً، وبنفس الحالة حاولنا بناء طريقة عددية لتكييف معادلتنا، الذي يتقارب مع الحل الدقيق لمعادلتنا.

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse l'équation intégrale non linéaire de Volterra avec deux noyaux faiblement singulières.

L'objectif de cette mémoire est mettre notre problème dans le cadre fonctionnelle, et de mettre des hypothèses acceptable pour que notre équation admet une solution unique, et avec la même condition on essaye de construire une méthode numérique adapter notre équation, qui converge vers la solution exacte de notre équation.

Mots-clés : *équation intégrale, équation intégrale de Volterra, point fixe, Équation non-linéaire, méthode de Nyström, méthode de product intégration,*

Abstract

In this thesis, we are interested in the Volterra nonlinear integral equation with two weakly singular kernels.

The purpose is to put the problem in a functional framework to come out with acceptable hypotheses, so a unique solution is admitted by our equation. In the same conditions we attempted to build a numerical method to adapt the equation and converge towards the exact solution of the equation.

Keywords : *Integral equation, Volterra integral equation, Non linear equation, Fixed point, Nyström method.*

Table des matières

1	Résultats préliminaires et notations	8
1.1	classification de l'équation intégrale de Volterra	8
1.1.1	Propriété de dérivation	9
1.2	Notions d'analyse fonctionnelle	10
1.2.1	Théorème du point fixe de Banach	10
1.3	Notions d'analyse numérique	11
1.3.1	Formule d'interpolation polynômial par morceaux	11
1.3.2	Méthode de Nyström	12
1.3.3	Lemme de majoration	14
1.3.4	Produit intégration	15
2	Equations intégrales faiblement singulière a double singularités de Volterra	16
2.1	Etude analytique	17
2.1.1	Existence de la solution	17
2.1.2	Unicité de la solution	21
2.1.3	Prolongement de la solution	21
3	Etude numérique	23
3.1	Etude d'équation	25
3.1.1	Analyse de l'erreur	26
	Conclusion et Perspective	32

Introduction

L'équation intégrale de Volterra avec l'équation de Fredholm, et l'une des équations les plus célèbres un mathématiques appliquées.

Dans ce mémoire, nous somme intéresser par l'équation intégrale de Volterra avec un noyau non linéaire et avec double singularité, sous forme de deux intégrale avec singularité faible. Ce travail est nouveau et complémentaire aux recherches menées au niveau du laboratoire et département mathématique de notre université, ou ont été les recherche menées sur les différentes équations de Volterra, particulier :

- équation de Volterra avec noyau non linéaire,
- équation de Volterra intégro-différentielle,
- équation de Volterra de première espèce,
- système des équation de Volterra avec noyau singulière.

Notre travail est présenté en trois chapitres de la manière suivante :

chapitre 1 : nous rappelons quelques notions de base dans l'analyse fonctionnelle et numérique qui seront utilisées dans les chapitres qui se suivent.

chapitre 2 : Dans ce chapitre, nous présentons l'étude analytique d'un équations intégrales non linéaires de Volterra. Notre étude sera basée sur la méthode des approximations successives pour assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème, avec des hypothèse acceptable.

chapitre 3 : Dans ce chapitre, nous allons produire une méthode numérique pour l'approximation de la solution de notre équation qui basé a la méthode de "product intégral" pour montre efficacité de cette méthode.

Enfin, nous terminerons notre travail par une conclusion générale.

Résultats préliminaires et notations

Dans ce chapitre, on donne des notions et définitions sur des équations intégrales linéaires (non linéaires) et leurs types et quelques méthodes analytiques et numériques pour résoudre des équations intégrales de Volterra.

1.1 classification de l'équation intégrale de Volterra

Dans cette section, nous donne une classification des équations intégrales de Volterra basée les propriétés de leurs noyaux, comprendre les différents types d'intégrale de Volterra. La forme la plus courante de ses équations sont données sous la forme suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt, \quad (1)$$

est appelée équation intégrale de Volterra non linéaire de seconde espèce, $\varphi(t)$ est une fonction inconnue et $K(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.

$$\int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt = f(x), \quad (2)$$

est appelée équation intégrale de voltera non linéaire de première espèce, $\varphi(t)$ est une fonction inconnue.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)(\varphi(t)) dt, \quad (3)$$

On appelle une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce, $\varphi(t)$ est une fonction inconnue et $K(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.

Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit.

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^x K(x, t)(\varphi(t))dt, \quad (4)$$

elle est appelée équation intégrale linéaire homogène de Volterra de seconde espèce. Une équation à une inconnue $\varphi(t)$, de la forme

$$\int_a^x K(x, t)(\varphi(t))dt = f(t), \quad (5)$$

est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce.

1.1.1 Propriété de dérivation

Définition : Soit ψ une fonction définie de $[a, b]^2$ à image dans R , telle que pour tout $s \in [a, b], \psi(\cdot, s) \in C^1[a, b]$. On définit la fonction suivante :

$$\forall t \in [a, b]; \varphi(t) = \int_a^t \psi(t, s)ds,$$

Proposition : Pour tout $t \in [a, b]$, on a

$$\varphi'(t) = \psi(t, t) + \int_a^t \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, s)ds,$$

Preuve : Nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{t+h} \psi(t+h, s)ds - \int_a^t \psi(t, s)ds}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^t \psi(t+h, s)ds + \int_t^{t+h} \psi(t+h, s)ds - \int_a^t \psi(t, s)ds}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \psi(t+h, s)ds + \int_a^t \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(t+h, s)ds - \psi(t, s)}{h} ds \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \psi(t+h, s)ds + \int_a^t \frac{d\psi}{dt}(t, s)ds. \end{aligned}$$

Mais, en utilisant le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in]0, h[$ tel que

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \psi(t+h, s) ds = \psi(t+h, t+\xi),$$

Il suffit de faire tendre h vers 0 pour obtenir le résultat.

1.2 Notions d'analyse fonctionnelle

1.2.1 Théorème du point fixe de Banach

Soit $(B, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, nous définissons l'application f de B dans B . Le théorème de Banach nous permet de prouver l'existence et l'unicité d'un point fixe P^* de f tel que, $p^* = f(p^*)$.

définition : f est dite lipschitzienne si

$$\exists K > 0, \forall x, y \in B, \|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\|,$$

Si $k < 1$, alors f est contractante.

Théorème : f admet un unique point fixe $p^* \in B$ si f est contractante. De plus, nous avons la suite récurrente

$$\begin{cases} p_0 \in B \\ p_{n+1} = f(p_n) n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

qui converge vers p^* et vérifie la majoration suivante :

$$\|p_n - p^*\| \leq \frac{K^n}{1-K} \|p_1 - p_0\|. \quad (1.1)$$

1.3 Notions d'analyse numérique

1.3.1 Formule d'interpolation polynômial par morceaux

Soient une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\sigma = \{a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ avec $(t_j)_{0 \leq j \leq n}$, une subdivision de l'intervalle $[a, b]$, les points t_0, t_1, \dots, t_n , s'appellent points d'interpolation. On définit la suite de fonctions $\{\sigma_j\}_{j=1}^n$ par :

$$\sigma_j(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} & t \in [t_{j-1}, t_j], \\ \frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_j} & t \in [t_j, t_{j+1}], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad 2 \leq j \leq n-1,$$

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} & t \in [t_1, t_2], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$\sigma_n(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} & t \in [t_{n-1}, t_n], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Ce qui s'appelle les fonctions chapeaux.

L'interpolant polynômiale par morceaux d'ordre 1 d'une fonction $f \in C^0([a, b])$ est donné par :

$$\forall t \in [a, b], \quad P_{n,1}[f](t) = \sum_{j=1}^n f(t_j) \sigma_j(t), \quad (1.2)$$

Pour $h > 0$, la fonction suivante :

$$\omega_0(h, f) = \max_{|s-x| < h, a \leq s, x \leq b} |f(s) - f(x)|,$$

est appelée le module de continuité de f . Donc, si h tend vers 0 alors $\omega_0(h, f)$ tend vers 0, puisque f est continue.

Théorème : Nous avons

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(t) - P_{n,1}[f](t)| \leq \omega_0(h_n, f),$$

où

$$h_n = \max_{1 \leq j \leq n-1} (t_{j+1} - t_j).$$

preuve : Nous avons d'après (1.2.2), pour tout $t \in [t_j, t_{j+1}]$,

$$P_{n,1}[f](t) = f(t_j)(1 - \alpha_j(t)) + f(t_{j+1})\alpha_j(t),$$

où,

$$\alpha_j(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} \in [0, 1],$$

Ceci montre que pour tout $t \in [t_j, t_{j+1}]$,

$$P_{n,1}[f](t) - f(t) = (f(t_j) - f(t))(1 - \alpha_j(t)) + (f(t_{j+1}) - f(t))\alpha_j(t),$$

et enfin,

$$\sup_{t \in [a,b]} |f(t) - P_{n,1}[f](t)| \leq \omega_0(h_n, f).$$

.

1.3.2 Méthode de Nyström

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. Dans l'approximation numérique d'une intégrale

$$I = \int_a^b f(t) dt,$$

on utilise la méthode de Nyström est défini par :

pour $n > 1$, la subdivision de l'intervalle $[a, b]$ est : $t_j = a + jh$, $0 \leq j \leq n$ et $h = \frac{b-a}{n}$,

Les formules d'intégrations numériques sont données par :

$$I = \int_a^b f(t) dt \simeq h \sum_{j=0}^n w_j f(t_j),$$

où, pour tout $n > 1$, $\max_{0 \leq j \leq n} |w_j| \leq W$.

méthode de Trapèze :

Dans ce présent l'étude numérique des solutions des équations intégrales de Volterra linéaires basées essentiellement dans la méthode quadratique intégrale et en utilisant l'interpolation la méthode des trapèze , ce dernier la comparant avec les autres méthodes (Simpson,...) cette méthode Les résultats obtenus assure la convergence du calcul sous la condition de continuité uniquement.

Ce qui donne :

$$I = \int_a^b f(t)dt \simeq T_n = \frac{h}{2}f(t_0) p + h \sum_{j=1}^{n-1} f(t_j) + \frac{h}{2}f(t_n), \quad (1.3)$$

où les poids sont donnés par la formule suivante :

$$\begin{cases} w_0 = w_n = \frac{1}{2}, \\ w_j = 1, \quad 1 \leq j \leq n-1. \end{cases}$$

Théorème : Si $f \in C([a, b])$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |I - T_n(f)| = 0.$$

Preuve : Un simple calcul nous montre que pour tout $n \geq 1$.

$$T_n(f) = \int_a^b P_{n,1}(f)(t)dt,$$

Où, $P_{n,1}$ est l'interpolant par morceaux d'ordre 1 de la fonction f correspondant à la subdivision $\{x_j\}_{j=0}^n = 1$

Donc, en utilisant le Théorème nous obtenons

$$\begin{aligned} |I - T_n(f)| &= \left| \int_a^b (f(t) - P_{n,1}(f)(t))dt \right| \\ &\leq (b-a)\omega_0(h, f), \end{aligned}$$

Et comme h tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, le résultat est démontré.

1.3.3 Lemme de majoration

définition : **Lemme de Gronewel** soit $\{\xi_n\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; |\xi_n| \leq A \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_i| + B_n,$$

où,

$$A > 0 \quad \text{et} \quad |B_n| \leq B,$$

Alors

$$|\xi_n| \leq (1 + A)^{n-1} (B + A |\xi_0|) \quad ; \forall n \geq 1,$$

preuve : Voir [11]

Lemme : Supposons que

$$|\varepsilon_n| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |\alpha_{nj}| |\varepsilon_j| + B, \quad n = r, r+1, \dots,$$

où, $B > 0$ et

$$\sum_{j=0}^{r-1} |\varepsilon_j| \leq n,$$

Si

$$\sum_{j=0}^{n-1} |\alpha_{nj}| \leq \alpha < 1, \quad n = r, r+1, \dots,$$

alors,

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{B + \eta}{1 - \alpha}, \quad n = 0, 1, \dots$$

S'il existe des entiers $0 = J_0 < J_1 < \dots < J_m < J_{m+1}$, avec $0 \leq r < J_1$ et $J_m \leq n < J_{m+1}$, tel que pour $v = 0, 1, \dots, m$ et $n = r, r+1, \dots$,

$$\sum_{j=j_v}^{\min(n, j_{v+1}-1)} |\alpha_{nj}| \leq \alpha < 1,$$

alors,

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{B + \eta}{(1 - \alpha)^2} \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^m.$$

preuve : Voir [11]

1.3.4 Produit intégration

L'un des outils le plus efficace pour traiter les intégrants qui se comportent mal est produit intégration, et pour simplifier cette idée, nous supposons que l'intégrale qu'on cherche à approximer est on sous la forme :

$$I = \int_a^t p(t)\varphi(t)dt,$$

où, $\varphi(t)$ est supposée être régulière (continue), ainsi, quelles que soient les singularités ou un mauvais comportement de l'intégrant, elles sont incluses dans $p(t)$. Nous approchons alors $\varphi(t)$ par une fonction $\hat{\varphi}(t)$ telle qu'on peut calculer l'intégrale

$$\hat{I} = \int_a^t p(t)\hat{\varphi}(t),$$

Dans notre travail, on approche $\varphi(t)$ par l'interpolation par morceaux, puis nous devons être capables d'évaluer explicitement des intégrales de la forme :

$$I = \int_a^t tp(t)dt,$$

Où les erreurs produites et leurs ordre de convergence sont liés par la relation :

$$|I - \hat{I}| \leq \max_{a \leq t \leq b} |\varphi(t) - \hat{\varphi}(t)| \int_a^b p(s)ds.$$

Alors, si $p(t)$ se la forme $p(t) = t^{-\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$, l'ordre de convergence et ce l'équation forme $h^{1-\alpha}$ et

$$|I - \hat{I}| \leq Ch^{1-\alpha}$$

Equations intégrales faiblement singulière a double singularités de Volterra

Dans ce chapitre on présenter l'équation principale de notre étude. Cette équation de type de Volterra non linéaire avec deux noyaux contient chaque une singularité faible on va présenter le cadre fonctionnelle pour que cette équation admet une solution unique . Le problème est trouver, pour f donné dans $C(0, b)$, une fonction $u \in C(0, b)$ est l'inconnue de l'équation suivante :

$$(P) \begin{cases} u(t) = \int_0^t (t_\tau - s)^{-\alpha} K_1(t, s, u(s)) ds + \int_0^t (t - s)^{-\beta} K_2(t, s, u(s)) ds + f(t), \\ 0 \leq t < T, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

où,

$$t_\tau = t - \tau, \quad 0 < \tau < t, \quad s < \tau < t.$$

f est donné dans $C[0, b]$, u est une fonction inconnue on de trouver dans le même espace $C[0, b]$.

les noyaux K_1, K_2 présenter la partie régulier de notre équation, on supposer qui sont défini par :

$$K_i : [0, b]^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(t, s, x) \mapsto K(t, s, x).$$

est K_1, K_2 vérifient les conditions de l'hypothèse suivante :

$$(H) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad K_1, K_2 \in C[0, b]^2 \times \mathbf{R}, \\ (2) \quad \exists A, B \in \mathbf{R}_+^*, \quad \forall t, s \in [0, b], \quad \forall x, y \in \mathbf{R}, \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} |K_1(t, s, x) - K_1(t, s, y)| \leq A |x - y|, \\ |K_2(t, s, x) - K_2(t, s, y)| \leq B |x - y|. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

2.1 Etude analytique

Pour étudier l'existence et l'unicité de la solution u de l'équation (2.1) sur l'intervalle $[0, b]$, Nous allons utiliser la méthode de Picard, qui est basée sur la construction des suites récurrentes $\{u_n(t)\}_{n \geq 0}$, $\{\varphi_n(t)\}_{n \geq 0}$ qui sont définies par les formules suivantes : pour tout $t \in [a, b]$ et $\forall n \in \mathbf{N}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(t) = f(t), \\ u_{n+1}(t) = \int_0^t (t_\tau - s)^{-\alpha} K_1(t, s, u_n(s)) ds + \int_0^t (t - s)^{-\beta} K_2(t, s, u_n(s)) ds + f(t). \end{array} \right. \quad (2.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = f(t), \\ \varphi_n(t) = u_{n+1} - u_n(t). \end{array} \right. \quad (2.3)$$

2.1.1 Existence de la solution

Le théorème suivant donne un outre pratique pour étudier l'existence et l'unicité de notre équation.

Théorème : Si les hypothèses (H) est vérifiée, S'il existe une subdivision $a = T_0, T_1, \dots, T_n = b$, tel que, pour $0 \leq i \leq n$, et $t \in [T_i, T_{i+1}]$.

$$\begin{cases} A \int_{T_i}^{\min(t, T_{i+1})} (t_\tau - s)^{-\alpha} ds < \frac{\rho}{2} < \frac{1}{2}, \\ B \int_{T_i}^{\min(t, T_{i+1})} (t - s)^{-\beta} ds < \frac{\rho}{2} < \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (2.4)$$

avec ρ ne dépend pas de t et de n , alors (P) admet une unique solution dans $C([0, b])$.

Preuve : Nous allons prouver l'existence et l'unicité de la solution dans les sous intervalle $[T_i, T_{i+1}]$.

Existence de la solution sur $[T_0, T_1]$:

supposant $t \in [T_0, T_1]$, nous définissons $(u_n(t)), (\varphi_n(t))_{n \geq 0}$ comme avant.

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= u_{n+1}(t) - u_n(t) = \int_0^t (t_\tau - s)^{-\alpha} K_1(t, s, u_n(s)) ds + \int_0^t (t - s)^{-\beta} K_2(t, s, u_n(s)) ds \\ &\quad + f(t) - \int_0^t (t_\tau - s)^{-\alpha} K_1(t, s, u_{n-1}(s)) ds - \int_0^t (t - s)^{-\beta} K_2(t, s, u_{n-1}(s)) ds - f(t) \\ &= \int_0^t (t_\tau - s)^{-\alpha} [K_1(t, s, u_n(s)) - K_1(t, s, u_{n-1}(s))] ds \\ &\quad + \int_0^t (t - s)^{-\beta} [K_2(t, s, u_n(s)) - K_2(t, s, u_{n-1}(s))] ds \end{aligned}$$

Nous utilisons la condition (2) de l'hypothèses (H), et d'après (2.2) on trouve :

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \int_0^t (t_\tau - s)^{-\alpha} A |u_n(s) - u_{n-1}(s)| ds + \int_0^t (t - s)^{-\beta} B |u_n(s) - u_{n-1}(s)| ds \\ &= \int_0^t (t_\tau - s)^{-\alpha} A \varphi_{n-1}(s) ds + \int_0^t (t - s)^{-\beta} B \varphi_{n-1}(s) ds, \end{aligned}$$

Et comme la fonction φ est continue sur $[0, b]$,

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(t)| &\leq \int_0^t A(t_\tau - s)^{-\alpha} |\varphi_{n-1}(s)| ds + \int_0^t B(t-s)^{-\beta} |\varphi_{n-1}(s)| ds \\
&\leq \max_{0 \leq s < t} |\varphi_{n-1}(s)| \int_0^t A(t_\tau - s)^{-\alpha} ds + \max_{0 \leq s < t} |\varphi_{n-1}(s)| \int_0^t B(t-s)^{-\beta} ds
\end{aligned}$$

D'après la condition de théorème (2.4),

$$|\varphi_n(t)| \leq \frac{\rho}{2} \|\varphi_{n-1}(t)\|_{C[T_0, T_1]} + \frac{\rho}{2} \|\varphi_{n-1}(t)\|_{C[T_0, T_1]}$$

Où,

$$\begin{aligned}
\max |\varphi_n(t)| &\leq \frac{\rho}{2} \max \|\varphi_{n-1}(t)\| + \frac{\rho}{2} \max \|\varphi_{n-1}(t)\|_{C[T_0, T_1]} \\
&\leq \rho \|\varphi_{n-1}(t)\|_{C[T_0, T_1]}
\end{aligned}$$

Alors,

$$\|\varphi_n\|_{C[T_0, T_1]} \leq \rho \|\varphi_{n-1}\|_{C[T_0, T_1]}$$

Ce qui donne :

$$\|\varphi_n\|_{C[T_0, T_1]} \leq \rho \|\varphi_{n-1}\|_{C[T_0, T_1]} \leq \rho^2 \|\varphi_{n-2}\|_{C[T_0, T_1]} \leq \dots \leq \rho^n \|\varphi_0\|_{C[T_0, T_1]}$$

et cette formelle implique

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n \|\varphi_i\|_{C[T_0, T_1]} &\leq \sum_{i=0}^n \rho^i \|\varphi_0\|_{C[T_0, T_1]} \\
&\leq \|\varphi_0\|_{C[T_0, T_1]} \frac{1 - \rho^{n+1}}{1 - \rho} \\
&\leq \frac{1}{1 - \rho} \|\varphi_0\|_{C[T_0, T_1]}
\end{aligned}$$

Ce qui implique que, $\sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\|_{C[T_0, T_1]}$ est convergente, par conséquent

$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ est normalement convergente, Donc il existe $u \in C([0, b])$ tel que,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t) = u(t),$$

Pour montrer que $u(t)$ est un solution de l'équation (2.1) pour $t \in [0, b]$:

$$u(t) = u_n(t) + \epsilon_n(t), \quad (2.5)$$

avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n(t) = 0.$$

La soustraction de deux coté de notre équation donne, Nous remplacent $u_i(t)$ par la formule (2.5) on trouve

$$\begin{aligned} & \left| u(t) - f(t) - \int_0^t (t_\tau - s)^{-\alpha} K_1(t, s, u(s)) ds - \int_0^t (t - s)^{-\beta} K_2(t, s, u(s)) ds \right| \\ &= \left| \epsilon_n + u_n(t) - f(t) - \int_0^t (t_\tau - s)^{-\alpha} K_1(t, s, u(s)) ds - \int_0^t (t - s)^{-\beta} K_2(t, s, u(s)) ds \right| \\ &\leq |\epsilon_n(t)| + \left| \left[\int_0^t (t_\tau - s)^{-\alpha} K_1(t, s, u_{n-1}(s)) - K_1(t, s, u(s)) \right] \right| \\ &\quad + \left[\int_0^t (t - s)^{-\beta} K_2(t, s, u_{n-1}(s)) - K_2(t, s, u(s)) \right] \\ &\leq |\epsilon_n(t)| + \left| \int_0^t (t_\tau - s)^{-\alpha} A |\epsilon_{n-1}(s)| ds + \int_0^t (t - s)^{-\beta} B |\epsilon_{n-1}(s)| ds \right| \\ &\leq |\epsilon_n(t)| + \|\epsilon_{n-1}\| \int_0^t A (t_\tau - s)^{-\alpha} ds + \|\epsilon_{n-1}\| \int_0^t B (t - s)^{-\beta} ds \\ &\leq |\epsilon_n(t)| + \|\epsilon_{n-1}\| \frac{\rho}{2} + \|\epsilon_{n-1}\| \frac{\rho}{2} \\ &\leq |\epsilon_n(t)| + \rho \|\epsilon_{n-1}\|_{C[T_0, T_1]} \end{aligned}$$

Où,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\epsilon_n(t)\|_{C[T_0, T_1]} = 0.$$

Alors, u est la solution de (P).

2.1.2 Unicité de la solution

Soient u_1, u_2 deux solutions de l'équation (P). Nous avons pour $t \in [T_0, T_1]$

$$\begin{aligned}
 |u_1(t) - u_2(t)| &\leq \left[\int_0^t (t_\tau - s)^{-\alpha} K_1(t, s, u_1(s)) ds - \int_0^t (t - s)^{-\beta} K_2(t, s, u_1(s)) ds \right] \\
 &\quad - \left[\int_0^t (t_\tau - s)^{-\alpha} K_1(t, s, u_2(s)) ds - \int_0^t (t - s)^{-\beta} K_2(t, s, u_2(s)) ds \right] \\
 &\leq \int_0^t (t_\tau - s)^{-\alpha} A |u_1(s) - u_2(s)| ds - \int_0^t (t - s)^{-\beta} B |u_1(s) - u_2(s)| ds \\
 &\leq \max_{T_0 \leq t \leq T_1} |u_1 - u_2| \int_0^t A (t_\tau - s)^{-\alpha} ds + \max_{T_0 \leq t \leq T_1} |u_1 - u_2| \int_0^t B (t - s)^{-\beta} ds \\
 &\leq \frac{\rho}{2} \max_{T_0 \leq t \leq T_1} |u_1(t) - u_2(t)| + \frac{\rho}{2} \max_{T_0 \leq t \leq T_1} |u_1(t) - u_2(t)|.
 \end{aligned}$$

Ce qui implique,

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{C[T_0, T_1]} \leq \rho \|u_1(t) - u_2(t)\|_{C[T_0, T_1]},$$

Alors,

$$(1 - \rho) \left(\max_{T_0 \leq t \leq T_1} |u_1(t) - u_2(t)| \right) \leq 0.$$

Puisque : $0 < \rho < 1$, alors $(1 - \rho) > 0$, donc $u_1(t) = u_2(t)$.

Enfin nous concluons le problème (P) admet une unique solution u sur l'intervalle $[T_0, T_1]$.

2.1.3 Prolongement de la solution

Notons (u_0) la solution du problème réduite dans l'intervalle $[T_0, T_1]$, et nous allons étudier la solution du problème pour $t \in [T_1, T_2]$ qui est notée par u_1 . Alors nous écrivons le problème sous la forme suivante : $\forall t \in [T_1, T_2]$,

$$\left\{ \begin{aligned} u_1(t) &= F(t) + \int_{T_1}^t (t_\tau - s)^{-\alpha} K_1(t, s, u_1(s)) ds + \int_{T_1}^t (t - s)^{-\beta} K_2(t, s, u_1(s)) ds. \end{aligned} \right.$$

avec,

$$F(t) = f(t) + \int_0^{T_1} (t_\tau - s)^{-\alpha} K_1(t, s, u_0(s)) ds + \int_0^{T_1} (t - s)^{-\beta} K_2(t, s, u_0(s)) ds$$

Nous appliquons les mêmes étapes pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution u_1 dans l'intervalle $[T_1, T_2]$.

Nous pouvons définir la solution du problème (p) dans l'intervalle $[T_1, T_2]$ comme suit :

$$u(t) = \begin{cases} u_0(t) & t \in [T_0, T_1], \\ u_1(t) & t \in [T_1, T_2]. \end{cases}$$

Il est clair que $u \in C([T_0, T_2])$ ce qui prouve que le problème (p) admet une unique solution dans $[T_0, T_2]$. Nous allons prolonger la solution dans $[0, b]$ avec la répétition des mêmes étapes sur un nombre fini de sous intervalles.

Etude numérique

Dans ce chapitre est consacrée à l'étude numérique des solutions des équations intégrales faiblement singulière de Volterra non linéaires basées essentiellement l'équation 1 contient des noyaux qui sont composées de deux parties l'une est faiblement singulières, et l'autre est régulière.

ou, l'existence et l'unicité de la solution de cette équation sont assurées par conditions des hypothèse (H) proposées dans la chapitre 2 qui définie par :

$$u(t) = \int_0^t (t_\tau - s)^{-\alpha} K_1(t, s, u(s)) ds + \int_0^t (t - s)^{-\beta} K_2(t, s, u(s)) ds + f(t). \quad (3.1)$$

Nous utilisons la méthode du produit intégration pour enlever la singularité des noyaux.

Nous allons approcher les parties régulières K_1, K_2 par les fonctions chapeaux. Soit la subdivision $\{t_j\}_{0 \leq j \leq n}$, avec $t_j = a + jh$, $h = \frac{a-b}{n}$:

$$\begin{aligned} P_n[K_1](t_i, s, u(s)) &= \frac{s - t_j}{h} k_1(t_i, t_{j+1}, u(t_{j+1})) \\ &+ \frac{t_{j+1} - s}{h} k_1(t_i, t_j, u(t_j)) \quad , (t_j \leq s \leq t_{j+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_n[K_2](t_i, s, u(s)) &= \frac{s - t_j}{h} k_2(t_i, t_{j+1}, u(t_{j+1})) \\ &+ \frac{t_{j+1} - s}{h} k_2(t_i, t_j, u(t_j)) \quad , (t_j \leq s \leq t_{j+1}). \end{aligned}$$

Ce qui donne l'approximation des intégrales suivantes,

$$I_1 = \int_0^{t_i} (t_i - \tau - s)^{-\alpha} K_1(t, s, u(s)) ds = \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i - \tau - s)^{-\alpha} K_1(t_i, s, u(s)) ds$$

$$\simeq \alpha_{i,1} K_1(t_i, t_0, u(t_0)) + \sum_{j=1}^{i-1} (\alpha_{i,j+1} + \beta_{i,j}) K_1(t_i, t_j, u(t_j)) + \beta_{i,i} K_1(t_i, t_i, u(t_i)), \quad (3.2)$$

$$I_2 = \int_0^{t_i} (t_i - s)^{-\beta} K_2(t, s, u(s)) ds = \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i - s)^{-\beta} K_2(t_i, s, u(s)) ds$$

$$\simeq \hat{\alpha}_{i,1} K_2(t_i, t_0, u(t_0)) + \sum_{j=1}^{i-1} (\hat{\alpha}_{i,j+1} + \hat{\beta}_{i,j}) K_2(t_i, t_j, u(t_j)) + \hat{\beta}_{i,i} K_2(t_i, t_i, u(t_i)). \quad (3.3)$$

où, pour tout $0 \leq j \leq i - 1$

$$\begin{cases} \alpha_{i,j+1} = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i - \tau - s)^{-\alpha} (t_{j+1} - s) ds, \\ \beta_{i,j+1} = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i - \tau - s)^{-\alpha} (s - t_j) ds, \\ \hat{\alpha}_{i,j+1} = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i - s)^{-\beta} (t_{j+1} - s) ds, \\ \hat{\beta}_{i,j+1} = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i - s)^{-\beta} (s - t_j) ds. \end{cases}$$

avec $\alpha_{i,j+1}, \beta_{i,j+1}$ sont calculables explicitement.

Il résulte que :

$$(\check{L}) \begin{cases} t = t_0; & U_0 = f(t_0), \\ t = t_i; & U(t_i) = f(t_i) + \alpha_{i,1} K_1(t_i, t_0, u(t_0)) + \sum_{j=1}^{i-1} (\alpha_{i,j+1} + \beta_{i,j}) K_1(t_i, t_j, u(t_j)) \\ & + \beta_{i,i} K_1(t_i, t_i, u(t_i)) + \hat{\alpha}_{i,1} K_2(t_i, t_0, u(t_0)) + \sum_{j=1}^{i-1} (\hat{\alpha}_{i,j+1} + \hat{\beta}_{i,j}) K_2(t_i, t_j, u(t_j)) \\ & + \hat{\beta}_{i,i} K_2(t_i, t_i, u(t_i)). \end{cases}$$

U_i approche les valeurs $u(t_i)$.

3.1 Etude d'équation

Théorème : Pour h suffisamment petit, l'équation (\check{L}) a une unique solution.

Preuve :

$$\forall (X) \in \mathbb{R}, \| X \| = | X | .$$

Pour tout $1 \leq i \leq n$, Nous définissons :

$$\psi_i(X) = S + \beta_{i,i}K_1(t_i, t_i, X) + \hat{\beta}_{i,i}K_2(t_i, t_i, X),$$

Où,

$$\begin{aligned} S = & f(t_i) + \alpha_{i,1}K_1(t_i, t_0, U_0) + \sum_{j=1}^{i-1} (\alpha_{i,j+1} + \beta_{i,j})K_1(t_i, t_j, U_j) \\ & + \hat{\alpha}_{i,1}K_2(t_i, t_0, U_0) + \sum_{j=1}^{i-1} (\hat{\alpha}_{i,j+1} + \hat{\beta}_{i,j})K_2(t_i, t_j, U_j). \end{aligned}$$

Nous supposons que U_0, U_1, \dots, U_{i-1} sont connues, il est clair que l'équation est composé implicites tel que pour définir U_i ,

$$X = \psi_i(X). \quad (3.4)$$

nous allons prouver que ψ_i admet un unique point fixe,

$$\| \psi_i(X) - \psi_i(X') \|_1 = \| \eta \|_1,$$

$$\eta = \beta_{i,i}(K_1(t_i, t_i, X) - K_1(t_i, t_i, X')) + \hat{\beta}_{i,i}(K_2(t_i, t_i, X) - K_2(t_i, t_i, X')).$$

En appliquant la condition (2) de l'hypothèse (H), nous obtenons

$$\begin{aligned} | \eta | & \leq \beta_{i,i}(A | X - X' |) + \hat{\beta}_{i,i}(B | X - X' |) \\ & \leq \max(A, B)\beta_{i,i}(| X - X' |) + \hat{\beta}_{i,i}(| X - X' |). \end{aligned}$$

Alors,

$$\| \psi_i(X) - \psi_i(X') \|_1 \leq \max(A, B)(\beta_{i,i}, \hat{\beta}_{i,i}) \| X - X' \|_1 .$$

Mais, $\lim_{h \rightarrow 0} \max(\beta_{i,i}, \hat{\beta}_{i,i}) = 0$, alors d'après le théorème du point fixe de Banach est contractante pour h assez petit. Par conséquent l'équation (■) admet une unique solution (X).

3.1.1 Analyse de l'erreur

Dans cette partie, nous allons démontrer que la méthode numérique construite dans la partie précédente converge vers la solution exacte de l'équation, alors nous suivons deux étapes :

premièrement, nous montrons qu'elle est consistante. Pour cela nous définissons l'erreur de consistance par la formule

$$\Delta(h, t_i) = \delta(h, t_i) + \hat{\delta}(h, t_i)$$

avec

$$\delta(h, t_i) = \int_0^{t_i} (t_i - \tau - s)^{-\alpha} K_1(t, s, u(s)) ds - \sum_{j=0}^i u_{ij} K_1(t_i, t_j, u(t_j)) ,$$

$$\hat{\delta}(h, t_i) = \int_0^{t_i} (t_i - s)^{-\beta} K_2(t, s, u(s)) ds - \sum_{j=0}^i \hat{u}_{ij} K_2(t_i, t_j, u(t_j)) .$$

Où,

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \alpha_{i,1}, & \text{si } j = 0, \\ \alpha_{i,j+1} + \beta_{i,j}, & \text{si } 1 \leq j \leq i + 1, \\ \beta_{i,i}, & \text{si } j = i. \end{cases}$$

$$\hat{\mu}_{ij} = \begin{cases} \tilde{\alpha}_{i,1}, & \text{si } j = 0, \\ \tilde{\alpha}_{i,j+1} + \tilde{\beta}_{i,j}, & \text{si } 1 \leq j \leq i + 1, \\ \tilde{\beta}_{i,i}, & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Proposition :

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta(h, t_i)| &\leq \rho(\omega_0(h, f) + \omega_0(h, H_1) + \omega_0(h, H_2)) \\ &+ \max_{a \leq t \leq b, u \in \mathbb{R}} \omega_0(h, K_1(t, \cdot, u)) \|\alpha\|_{L^1} \\ &+ \max_{a \leq t \leq b, u \in \mathbb{R}} \omega_0(h, K_2(t, \cdot, u)) \|\beta\|_{L^1}, \end{aligned}$$

Où,

$$\begin{aligned} \omega_0(h, \varphi) &= \max_{|v-\theta| < h} |\varphi(v) - \varphi(\theta)|, \\ \forall t \in [a, b], H_1(t) &= \int_a^t (t_\tau - s)^{-\alpha} K_1(t, s, u(s)) ds, \\ H_2(t) &= \int_a^t (t - s)^{-\beta} K_2(t, s, u(s)) ds. \end{aligned}$$

Preuve : Nous savons que,

$$\begin{aligned} |\delta(h, t_i)| &\leq \max_{|v-\theta| < h} (|K_1(t_i, v, u(v)) - K_1(t_i, v, u(\theta))| \\ &+ |K_1(t_i, v, u(\theta)) - K_1(t_i, \theta, u(\theta))|) \int_0^{t_i} |(t_i - \tau - s)^{-\alpha}| ds, \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b, u \in \mathbb{R}} |K_1(t_i, v, u(v)) - K_1(t_i, \theta, u(\theta))| \int_0^{t_i} |(t_i - \tau - s)^{-\alpha}| ds \\ &+ \rho(\omega_0(h, u)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\hat{\delta}(h, t_i)| &\leq \max_{|v-\theta| < h} (|K_2(t_i, v, u(v)) - K_2(t_i, v, u(\theta))| \\ &+ |K_2(t_i, v, u(\theta)) - K_2(t_i, \theta, u(\theta))|) \int_0^{t_i} |(t_i - s)^{-\beta}| ds, \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b, u \in \mathbb{R}} |K_2(t_i, v, u(v)) - K_2(t_i, \theta, u(\theta))| \int_0^{t_i} |(t_i - s)^{-\beta}| ds \\ &+ \rho(\omega_0(h, u)). \end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned} u(\theta) - u(\nu) &= f_\theta - f(\nu) + \int_0^\theta (\theta - \tau - s)^{-\alpha} K_1(\theta, s, u(s)) ds \\ &\quad - \int_0^\nu (\nu - \tau - s)^{-\alpha} K_1(\nu, s, u(s)) ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{u}(\theta) - \hat{u}(\nu) &= f_\theta - f(\nu) + \int_0^\theta (\theta - s)^{-\beta} K_1(\theta, s, u(s)) ds \\ &\quad - \int_0^\nu (\nu - s)^{-\beta} K_2(\nu, s, u(s)) ds. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \max_{|\nu-\theta|<h} |u(\theta) - u(\nu)| &= \max_{|\nu-\theta|<h} |f(\theta) - f(\nu)| + \max_{|\nu-\theta|<h} |H_1(\theta) - H_1(\nu)|. \\ \omega_0(h, u) &\leq \omega_0(h, f) + \omega_0(h, H_1). \end{aligned}$$

et nous avons aussi,

$$\begin{aligned} \max_{|\nu-\theta|<h} |\hat{u}(\theta) - \hat{u}(\nu)| &= \max_{|\nu-\theta|<h} |f(\theta) - f(\nu)| + \max_{|\nu-\theta|<h} |H_2(\theta) - H_2(\nu)|. \\ \omega_0(h, u) &\leq \omega_0(h, f) + \omega_0(h, H_2). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} |\delta(h, t_i)| &\leq \frac{\rho}{2} (\omega_0(h, f) + \omega_0(h, H_1) + \omega_0(h, H_2)) \\ &\quad + \max_{|\nu-\theta|<h, u \in \mathbb{R}} \omega_0(h, K_1(t, ;, u)) \|\alpha\|_{L^1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\hat{\delta}(h, t_i)| &\leq \frac{\rho}{2} (\omega_0(h, f) + \omega_0(h, H_1) + \omega_0(h, H_2)) \\ &\quad + \max_{|\nu-\theta|<h, u \in \mathbb{R}} \omega_0(h, K_2(t, ;, u)) \|\beta\|_{L^1}. \end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta(h, t_i)| &\leq \rho(\omega_0(h, f) + \omega_0(h, H_1) + \omega_0(h, H_2)) \\ &+ \max_{a \leq t \leq b; u \in \mathbb{R}} \omega_0(h, K_1(t, \cdot, u)) \|\alpha\|_{L^1} \\ &+ \max_{a \leq t \leq b; u \in \mathbb{R}} \omega_0(h, K_2(t, \cdot, u)) \|\beta\|_{L^1}. \end{aligned}$$

On résulte que cette méthode est consistante car

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{1 \leq i \leq n} \|\Delta(h, t_i)\|_C) = 0.$$

Deuxièmement, nous allons montrer que cette méthode est convergente, et pour cela nous avons besoin de définir l'erreur de discrétisation qui est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_i = U_i - u(t_i). \end{array} \right.$$

La méthode est dite convergente si,

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{1 \leq i \leq n} \|\xi_i\|_C) = 0.$$

Théorème : Si les hypothèses (H) sont satisfaites et l'intervalle $[a, b]$ peut être divisé en un nombre fini de sous intervalles $[a = T_0, T_1], [T_1, T_2], \dots, [T_{m-1}, T_m = b]$ tel que $j_v \leq \frac{T_v}{h}$ qui est le plus grand entier, et $\mu_{ij} = \hat{\mu}_{ij} = 0$ pour $j > i$, les poids $\mu_{ij}, \hat{\mu}_{ij}$ vérifient la condition suivante :

$$\sum_{j=j_v}^{j_{v+1}-1} \left| \frac{\max(A, B)(\mu_{ij} + \hat{\mu}_{ij})}{1 - \max(A, B)(\mu_{ii} + \hat{\mu}_{ii})} \right| \leq \rho < 1, \quad i \geq 1, \quad 0 \leq v \leq m.$$

Cette subdivision doit être indépendante de h , alors,

$$\max_{1 \leq i \leq n} \|\xi_i\|_C \leq \left(\frac{1}{1 - \rho} \right)^m \max_{1 \leq i \leq n} \|\Delta(h, t_i)\|_C \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Preuve : En effet,

$$\begin{aligned}\zeta_i &= \sum_{j=0}^i \mu_{ij} [K_1(t_i, t_j, U_j) - K_1(t_i, t_j, u(t_j))] - \delta(h, t_i) \\ &+ \sum_{j=0}^i \hat{\mu}_{ij} [K_2(t_i, t_j, U_j) - K_2(t_i, t_j, u(t_j))] - \hat{\delta}(h, t_i).\end{aligned}$$

Il résulte que

$$\|\zeta_i\|_C \leq \sum_{j=0}^i [\max(A, B)(\mu_{ij}, \hat{\mu}_{ij})] \|\zeta_j\|_C + \|\Delta(h, t_i)\|_C.$$

Pour h petit, nous avons :

$$\begin{aligned}\|\zeta_i\|_C &\leq \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\max(A, B)(\mu_{ij} + \hat{\mu}_{ij})}{1 - \max(A, B)(\mu_{ii} + \hat{\mu}_{ii})} \|\zeta_i\|_C \\ &+ \frac{\|\Delta(h, t_i)\|_C}{1 - \max(A, B)(\mu_{ii} + \hat{\mu}_{ii})}.\end{aligned}$$

A fin d'obtenir le résultat, nous utilisons le lemme de **Gronewel**.

Tests numériques

Nous avons donné exemple afin d'assurer la convergence et la précision de la méthode d'intégration produit pour approximer les intégrales ou l'intégrant n'est pas borné et se comporte mal.

Exemple : Considérons l'équations intégrales faiblement singulières de Volterra donné par :

$$u(t) = \int_0^t |t - 2h - s|^{-\frac{1}{4}} \frac{t^3(e^{-s} + 1)}{e^{-u} + 1} ds + \int_0^t (t - s)^{-\frac{1}{3}} \frac{e^t}{\sin^2 u + \cos^2 s + 1} ds + f(t).$$

Les noyaux

$$\begin{aligned}K_1(t, s, x) &= \frac{t^3(e^{-s} + 1)}{e^{-x} + 1}, \\ K_2(t, s, x) &= \frac{e^t}{\sin^2 x + \cos^2 s + 1}.\end{aligned}$$

vérifient l'hypothèse (H)(2) avec $A = 3, B = 2$.

Les parties faiblement singulières sont présentées comme suit :

$$L_1 = (t - 2h - s)^{-\frac{1}{4}},$$

$$L_2 = (t - s)^{-\frac{1}{3}}.$$

Les fonctions

$$f(t) = t - \frac{4}{3}t^3((2h)^{\frac{3}{4}} + (t - 2h)^{\frac{3}{4}}) - 3e^t.t^{\frac{2}{3}}.$$

sont continues sur $[0, b]$.

La solution exacte de l'équation est

$$u(t) = t.$$

Le tableau suivant donne une estimation de l'erreur entre la solution exacte et la solution approximative du système

$$E(h) = \max_{0 \leq i \leq n} | U_i - u(t_i) | .$$

h	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
$E(h)$	1.42E - 002	4.78E - 003	3.96E - 004	1.37E - 004	1.19E - 005

TABLE 3.1 – Numerical résultats of example by all methods

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous sommes intéressés à l'équation intégrale non linéaire de Volterra avec deux noyaux faiblement singulière. Nous avons effectuée une étude analytique et numérique de cette équation. Pour atteindre notre but, dans l'étude analytique on va basée sur des hypothèses acceptable, qui donne le cadre fonctionnelle de notre problème, pour que notre équation admet une solution unique.

Dans l'étude numérique ou notre intégrale atteint une singularité faible, on na basée sur la méthode "product intégral" pour construire une approximation numérique de cette équation, et on note que cette approximation est consistante et converge vers la solution exacte de notre équation. Comme perspectives, nous allons essayer de trouver une approximation de la solution exacte de notre équation, dans le cas générale ou les deux points de singularité et son logne d'un autre, et montre la consistante et la convergence dans ce cas.

Bibliographie

- [1] D. Porter and D.S. Stirling : *Integral Equations : A Practical Treatment from Spectral Theory to Applications*, Cambridge, 2004.
- [2] D. S. Smart : *Fixed point theorems*. Cambridge Tracts in Mathematics. No. 66. Cambridge University Press. London-New York, 1974.
- [3] H. Brunner : *Collocations methods for Volterra integral and related functional equations*, Cambridge University Press, New York, 2004.
- [4] H. Guebbai, M. Z. Aïssaoui, I. Debbar, B. Khalla, "Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear Volterra equation". *AMC*, 229 (2014), p 367-373
- [5] Kendall Atkinsàn, Weimin Han, "Theoretical Numerical Analysais , A Functional Analysis Framework"
- [6] M. Bocher : *Intégral Équations*, Cambridge University Press, London, 1974.
- [7] Mourad Ghiat, Hamza Guebbai, "Etude analytique et numérique des équations intégro-différentielle de Volterra : Traitement des noyaux faiblement singuliers". *Mathématiques Appliquées*, 2018.
- [8] M. GHIAT, H. GUEBBAI, M. KURULAY, S. SEGNI : "On the weakly singular integrodifferential nonlinear Volterra equation depending in acceleration term". *Volterra integrodifferential equation*, 2020.
- [9] M.Ahues, A.Largillier, O.Titaud, " The roles of a weak singularity and the grid uniformity in relative error bounds. *Numerical Functional Analysis and Optimization*". 22.7(2001), pp. 789-814.
- [10] M. M. Lavrentev, V. G. Romanov, and S. P. Shishatski : *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis*. AMS Bookstore, vol. 64, 1986.
- [11] P. Linz, "Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations". *SIAM Studies in Applied Mathematics*, Philadelphia, 1985.