

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et Analyse numérique

Par : Jennah Sara

Intitulé

**Solutions périodiques de certaines classes d'équations
différentielles ordinaires du quatrième ordre**

Dirigé par : Dr. Sellami Nabil

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.	Djenaoui Saliha	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.	Sellami Nabil	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.	Bouattia Yassine	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2023

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿اِقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ * خَلَقَ الْإِنْسَانَ مِنْ عَلَقٍ * اِقْرَأْ وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ * الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ * عَلَّمَ الْإِنْسَانَ مَا لَمْ يَعْلَمْ﴾.

[سورة العلق 1-5]

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿يَرْفَعُ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ ۗ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ﴾.

[سورة المجادلة 11]

قال رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ

«مَنْ سَلَكَ طَرِيقًا يَطْلُبُ فِيهِ عِلْمًا، سَلَكَ اللَّهُ بِهِ طَرِيقًا مِنْ طُرُقِ الْجَنَّةِ، وَإِنَّ الْمَلَائِكَةَ لَتَنْزِعُ أَجْنَاحَهَا رِضًا لِطَالِبِ الْعِلْمِ، وَإِنَّ الْعَالِمَ لَيَسْتَغْفِرُ لَهُ مَنْ فِي السَّمَاوَاتِ، وَمَنْ فِي الْأَرْضِ، وَالْحَيَاتَانُ فِي جَوْفِ الْمَاءِ، وَإِنَّ فَضْلَ الْعَالِمِ عَلَى الْعَابِدِ، كَفَضْلِ الْقَمَرِ لَيْلَةَ الْبَدْرِ عَلَى سَائِرِ الْكَوَاكِبِ، وَإِنَّ الْعُلَمَاءَ وَرَثَةُ الْأَنْبِيَاءِ، وَإِنَّ الْأَنْبِيَاءَ لَمْ يُورَثُوا دِينَارًا وَلَا دِرْهَمًا، وَرَثُوا الْعِلْمَ، فَمَنْ أَخَذَهُ أَخَذَ بِحِطِّ وَافِرٍ».

إِنِّي أَسْأَلُكَ عِلْمًا نَافِعًا، وَقَلْبًا خَاشِعًا، وَرِزْقًا مَبَارَكًا، وَعَمَلًا زَاكِيًا مُتَقَبَّلًا. اللَّهُمَّ رَبَّنَا افْتَحْ لَنَا أَبْوَابَ رَحْمَتِكَ، وَسَهِّلْ لَنَا مَا رَزَقْتَنَا. اللَّهُمَّ كَمَا أَنْعَمْتَ قَرِّدْ وَكَمَا زِدْتَ فَبَارِكْ وَكَمَا بَارَكْتَ فَتَمِّمْ وَكَمَا أَتَمَمْتَ فَثَبِّتْ.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا﴾.

[سورة طه 114]

Dédicace

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut... Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, Le respect, la reconnaissance...

Je dédie ce modeste travail particulièrement à mes chers parents, qui ont consacré leur existence à bâtir la mienne, pour leur soutien, patience et soucis de tendresse et d'affection pour tout ce qu'ils ont fait pour que je puisse arriver à ce stade.

A mon cher père « **Mouloude** », tu as toujours été à mes côtés pour me soutenir et m'encourager. Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, la reconnaissance et la gratitude pour tous les soutiens et les sacrifices dont il a fait prennent à mon égard.

Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

A ma chère mère « **Jamila** », qui a œuvrée pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

À mes belles-sœurs « **Sabrina** », « **Samira** », « **Shahra** » et « **Lamia** ».

À mes chers frères « **Nabil** », « **Ishak** », « **Imad** » et « **Ahmed** ».

À mon cher mari « **Abderrahmane** ».

À ma belle amie « **Amira** ».

À toute ma famille mes chères amies et tous mes camarades de la promo de math (2022/2023) et à tous mes enseignants.

À toutes les personnes qui m'ont aidé, soutenu et contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

ملخص

نهتم بدراسة الحلول الدورية المعزولة لثلاثة أقسام من المعادلات التفاضلية العادية. باستعمال نظرية المتوسط من الدرجة الأولى، نقوم بتحويل مسألة البحث عن الحلول الدورية المعزولة لجملة معادلات تفاضلية إلى مسألة البحث عن الجذور غير المنحلة لجملة معادلات جبرية غير خطية.
القسم الأول من الشكل:

$$x^{(4)} + q\ddot{x} - x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$$

حيث q هو وسيط حقيقي، ε صغير كفاية و F هي دالة غير خطية.
القسم الثاني من الشكل:

$$x^{(4)} + q\ddot{x} + px = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$$

حيث q, p, ε هي وسائط حقيقية، ε صغير كفاية و F هي دالة غير خطية و دورية دورها T

الصنف الثالث عبارة عن معادلات تفاضلية ذاتية أي مستقلة من الشكل :

$$x^{(4)} + q\ddot{x} + px = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$$

حيث q و p وسيطان حقيقيان، ε صغير كفاية و F هي دالة غير خطية.

Résumé

Dans ce mémoire, on étudie les cycles limites de trois classes d'équations différentielles ordinaires autonomes et autonomes non du quatrième ordre. en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre

La première classe prend la forme

$$x^{(4)} + q\ddot{x} - x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$$

où q et ε sont des paramètres réels, ε est suffisamment petit et F est une fonction non linéaire.

La deuxième classe est sous la forme

$$x^{(4)} + q\ddot{x} + px = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$$

où q , p et ε sont des paramètres réels, ε est petit et F est une fonction non linéaire. T -périodique en t .

La troisième classe étudiée est autonome de la forme

$$x^{(4)} + q\ddot{x} + px = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$$

où q , p et ε sont des paramètres réels, ε est petit et F est une fonction non linéaire.

Abstract

We study the limit cycles of three classes of fourth order of autonomous and non autonomous ordinary differential equations. using the first order averaging theory

The first class is of the form

$$x^{(4)} + q\ddot{x} - x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$$

where q and ε are real parameters, ε is small and F is a nonlinear function.

The second class of the form

$$x^{(4)} + q\ddot{x} + px = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$$

where q , p and ε are real parameters, ε is small and F is a nonlinear function, T -periodic in t .

The third class is autonomous of the form

$$x^{(4)} + q\ddot{x} + px = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$$

where q , p and ε are real parameters, ε is small and F is a nonlinear function.

Remerciements

Avant tout nous adressons nos remerciements au Dieu, le tout puissant pour la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il nous a donné durant cette année d'études et pour la réalisation de ce travail que nous espérons être utiles.

Au début, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères mon enseignant et encadreur et j'exprime toute ma gratitude à Monsieur « Dr. Sellami Nabil », pour l'orientation, la confiance, la patience qui a constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être menée au bon port.

Qu'elle trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité

Aux membres du jury « Dr. Djenaoui Salha », et « Dr. Bouattia Yassine », Pour m'avoir fait l'honneur de juger mon travail.

Mes sincères remerciements à tous les enseignants du département de Mathématique Guelma.

Mes Parents, Mes sœurs

, mon mari, Mes camarades, Ma famille et tous ceux qui m'ont soutenu, aidé et contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

1	Notions Préliminaires	1
1.1	Système dynamique(flût, point d'équilibre et linéarisation)	1
1.2	Nature des points d'équilibre	3
1.3	Portrait de phase et cycles limites	5
2	Théorie de moyennisation	7
2.1	Première Méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques	7
2.2	Deuxième Méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques	10
3	Solution périodiques de trois classes d'équation différentielles du qua- trième ordre	15
3.1	Etude de l'équation $\ddot{x} + q\ddot{x} - x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x})$	16
3.2	Etude de l'équation $\ddot{x} + q\ddot{x} + px = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x})$	22
3.3	Etude de l'équation $\ddot{x} + q\ddot{x} + px = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x})$	32

Introduction

Les équations différentielles ordinaires sont apparues au 17^{ème} siècle dans travaux de Newton et Leibnitz sur le mouvement des corps célestes et d'autres phénomènes physiques. Au 18^{ème} siècle, Euler à contribué de manière significative au développement de la théorie des équations différentielles ordinaires.

Le développement des équations différentielles ordinaires se poursuit au 19^{ème} siècle avec Lagrange, Laplace et Jacobi. Ils ont développé des méthodes pour les résoudre. La théorie des systèmes dynamiques a commencé à émerger à cette époque, avec les travaux de Poincaré et Lyapunov.

Aujourd'hui, les équations différentielles ordinaires et les systèmes dynamiques sont des domaines de recherche actifs en mathématiques. Ils ont des applications dans de nombreux domaines, tels que la physique, l'ingénierie, la biologie, l'économie et bien d'autres

La théorie qualitative des équations différentielles et des systèmes dynamiques étudie le comportement des solutions sans nécessairement chercher à les trouver explicitement. Elle se concentre sur les propriétés qualitatives, tels que les points d'équilibre, stabilité, l'existence de solutions périodiques et des cycles limites, ...

La méthode de moyennisation est une technique utilisée pour étudier l'existence des cycles limites d'une équation différentielle ordinaire.

Dans ce mémoire, on utilise la méthode de moyennisation du premier ordre pour étudier l'existence des cycles limites de trois classes d'équations différentielles ordinaires du 4^{ème} ordre.

L'étude des solutions périodiques des équations différentielles ordinaires du premier, second, troisième et quatrième ordre à été considérée par plusieurs auteurs, on peut citer : [[7], [8], [10], [14], [15], [17]]

Notre mémoire comporte trois chapitres :

- Le premier chapitre est un chapitre préliminaire qui contient les concepts clés de la théorie qualitative des systèmes dynamiques.
- Dans le deuxième chapitre, on introduit la méthode de moyennisation avec ses différentes formes illustrées par des exemples.

-
- Le troisième chapitre, est consacré à l'étude des cycles limites de quatrième ordre, autonomes et non autonomes via la méthode de moyennisation

Dans ce chapitre on va donner quelques notions générales de la théorie qualitative des systèmes dynamiques. Premièrement on définit les systèmes dynamiques et les notions de : flôt, point d'équilibre, linéarisation, stabilité, nature de points d'équilibre et on passe à la définition du portrait de phase et cycles limites.

1.1 Système dynamique (flôt, point d'équilibre et linéarisation)

Définition 1.1. Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, telle que

- $U(., x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- $U(t, .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- $U(0, x) = x$
- $U(t + s, x) = U(t, U(s, x))$ pour $t, s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$

Exemple 1.1. Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

A est une matrice constante, la solution de (1.1) est

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

Le système (1.1) engendre un système dynamique, car l'application

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

définie par

$$U(t, x) = e^{tA}x$$

vérifie les quatre propriétés précédentes.

Définition 1.2. (flôt) Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f \in \mathbb{R}^n$$

on appelle flôt du système différentiel (1.2) l'ensemble des applications $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et définies par

$$\phi_t(x_0) = \phi_t(t, x_0)$$

où $\phi_t(t, x_0)$ est la solution telle que $\phi_t(0, x_0) = x_0$.

Définition 1.3. (points d'équilibre): on appelle point d'équilibre d'un système différentiel non linéaire tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ telle que $f(x_0) = 0$

Définition 1.4. (linéarisation): on appelle système linéarisé au voisinage du point critique x_0 , le système

$$\dot{x} = Ax$$

où A est la matrice jacobienne de f en x_0 telle que

$$A = Df(x_0) = \left(\frac{df(x_i)}{dx_j} (x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

Définition 1.5. (Points d'équilibre hyperboliques) Si la jacobienne $A = Df(x_0)$ n'a aucune valeur propre avec une partie réelle nulle, alors le point d'équilibre est dit hyperbolique.

Définition 1.6. (Stabilité) : Soit le système différentiel non autonome et non linéaire

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (1.3)$$

On suppose que $f(t, x)$ satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité des solutions. Une solution $\phi(t)$ du système (1.3) telle que

$$\phi(t_0) = \phi_0$$

est dite stable au sens de Lyapunov si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ telle que

$$\|x_0 - \phi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \phi(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Si en plus : $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \phi(t)\| = 0$, alors la solution $\phi(t)$ est asymptotiquement stable.

1.2 Nature des points d'équilibre

Soit le système différentiel linéaire

$$\dot{x} = Ax$$

où A est une matrice 2×2 , λ_1, λ_2 les valeurs propres de A . On distingue les différents cas selon ces valeurs propres :

(1). Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signes différents, alors le point d'équilibre $x = x_0$ est un point selle, il est toujours instable (Voir figure 1.1).

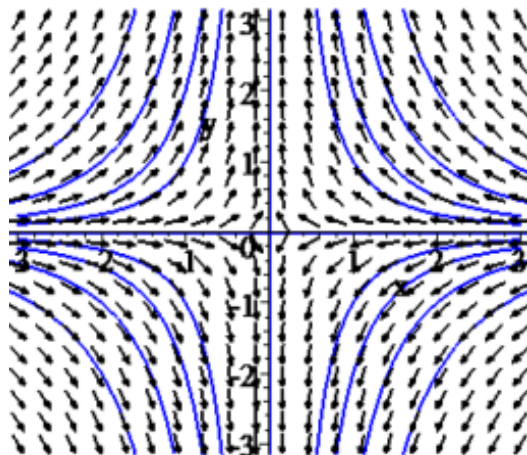


Figure (1.1) : Point selle

- (2). Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de même signe, on a trois cas :
- (a) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, le point critique $x = x_0$ est un noeud stable.
- (b) Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, le point critique $x = x_0$ est un noeud instable (Voir figure 1.2)

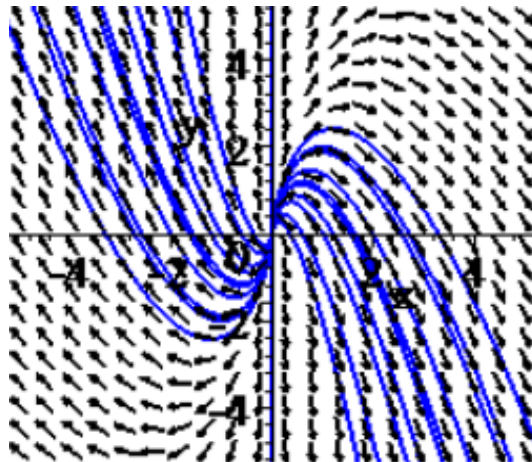


Figure (1.2.) : Noeud instable

- (c) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ le point critique est un noeud propre, il est stable si $\lambda < 0$, sinon il est instable
- (3). Si λ_1 et λ_2 sont des complexes conjuguées, telle que $\text{Re}(\lambda_{1,2}) \neq 0$, le point critique $x = x_0$ est un foyer, il est asymptotiquement stable si $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ sinon il est instable (Voir figure 1.3).

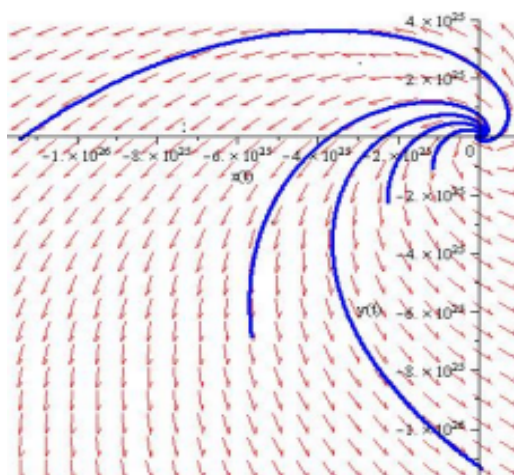
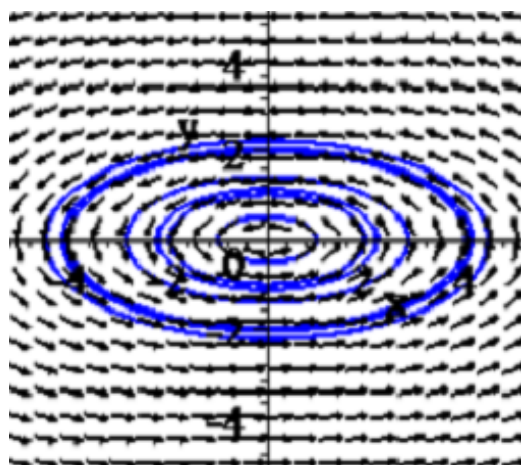


Figure (1.3) : Foyer

(4). Si λ_1 et λ_2 sont des complexes conjuguées, telle que $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$, le point critique $x = x_0$ est un centre, il est stable mais pas asymptotiquement stable (Voir figure 1.4)



Figure(1.4) : Centre.

1.3 Portrait de phase et cycles limites

Définition 1.8. Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.4)$$

où P et Q sont deux polynômes en x et y . Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1,3) sont représentées dans le plan (x, y) par des courbes appelées orbites. Les points d'équilibre de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points d'équilibre représentés dans le plan (x, y) s'appelle portrait de phase, et le plan (x, y) est appelé plan de phase.

Définition 1.9. (Solution périodique) On appelle solution périodique ou cycle toute trajectoire $\Psi_t(x)$ du système différentiel non linéaire (1.2) telle qu'il existe un nombre $T > 0$, vérifiant

$$\Psi(t + T, x) = \Psi(t, x) \quad \text{pour } T > 0.$$

Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie la formule précédente est appelé période.

Pour un système autonome, a toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace de phase.

Définition 1.10. (Cycle limite) : Un cycle limite est une solution périodique isolée, c'est à dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.

Définition 1.11. (Cycle limite hyperbolique): Soit E un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f \in C^1(E)$,

Soit $\varphi(t)$ un cycle limite de période T du système (1.2), alors $\varphi(t)$ est hyperbolique si

$$\int_0^T \nabla f(\varphi(t)) dt \neq 0 \quad \text{où } \nabla f(\varphi(t)) \text{ est la divergence de } f \text{ en } \varphi(t)$$

a) $\varphi(t)$ est stable si $\int_0^T \nabla f(\varphi(t)) dt < 0$

b) $\varphi(t)$ est instable si $\int_0^T \nabla f(\varphi(t)) dt > 0$

2.1 Première Méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques

On considère le système différentiel à valeur initiale suivant :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \varepsilon F(t, \mathbf{x}(t)) + \varepsilon^2 R(t, \mathbf{x}(t), \varepsilon), \mathbf{x}(0) = X_0 \quad (2.1)$$

Avec $x(t) \in D \subset \mathbb{R}^n$, D est un domaine borné et $t \geq 0$. On suppose que F et R sont T -périodiques en t . Le système moyenné associé au système (2.1) est défini par

$$\dot{y}(t) = \varepsilon f^0(y(t)), \quad y(0) = x_0 \quad (2.2)$$

où

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, y) ds. \quad (2.3)$$

Le théorème suivant nous donne les conditions pour lesquelles les points singuliers du système moyenné (2.2) fournissent des solutions périodiques du système (2.1).

Théorème 2.1. Considérons le système (2.1) et supposons que les fonctions vectorielles $F, R, D_x F, D_x^2 F$ et $D_x R$ sont continues et bornées par une constante M (indépendante de ε) dans $[0, \infty[\times D$ avec $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. De plus, on suppose que F et R sont T -périodiques en t avec T -indépendante de ε .

(a) Si $p \in D$ est un point singulier du système moyenné (2.2) tel que

$$\det(D_x f^0(p)) \neq 0 \quad (2.4)$$

2.1. Première Méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques

Alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $x_\varepsilon(t)$ du système (2.1) telle que $x_\varepsilon(t) \rightarrow p$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

(b) Si le point singulier $y = p$ du système moyenné (2.2) est hyperbolique alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, la solution périodique correspondante $x_\varepsilon(t)$ du système (2.1) est unique, hyperbolique et de même type de stabilité que p quand $\varepsilon \rightarrow 0$

Preuve voir [17]

Exemple 2.1. Soit l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \dot{x} = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x})$$

On pose : $\dot{x} = y, \ddot{x} = z$, alors l'équation (2.5) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -y + \varepsilon F(x, y, z) \end{cases}$$

Le système (2.6) avec $\varepsilon = 0$ admet un seul point critique à l'origine.

La matrice jacobienne admet les valeurs propres $i, -i$ et 0 .

Avec le changement linéaire des variables $(X, Y, Z)^T = C(x, y, z)^T$ avec

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nous transformons le système différentiel (2.6) en le système différentiel suivant telle que la partie linéaire du système (2.6) se transforme à sa forme de Jordan réelle.

On obtient alors

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z) \\ \dot{Y} = X \\ \dot{Z} = -\varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z) \end{cases} \quad (2.7)$$

où $\tilde{F}(X, Y, Z) = F(A, B, C) = F(-X - Z, Y, X)$

Maintenant on passe des coordonnées cartésiennes (X, Y, Z) aux coordonnées cylindriques (r, θ, Z) de \mathbb{R}^3 , où $X = r \cos \theta$ et $Y = r \sin \theta$. Dans ces nouvelles variables, le système différentiel (2.7) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon G(r, \theta, Z) \cos \theta \\ \dot{\theta} = 1 - \varepsilon \frac{G(r, \theta, Z) \sin \theta}{r} \\ \dot{Z} = -\varepsilon G(r, \theta, Z) \end{cases} \quad (2.8)$$

où

$$G(r, \theta, Z) = \tilde{F}(r \cos \theta, r \sin \theta, Z)$$

En divisant sur $\dot{\theta}$ on obtient

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon G(r, \theta, Z) \cos \theta + o(\varepsilon^2), \\ \frac{dZ}{d\theta} = -\varepsilon G(r, \theta, Z) + o(\varepsilon^2) \end{cases}$$

avec $(r, z) \in D \subset \mathbb{R}^2$ et D un sous-ensemble ouvert dans \mathbb{R}^2 .

Notons que le système (2.9) est sous la forme standard du système (2.1). Alors le système différentiel moyenné de (2.9) est

$$\left(\frac{dr}{d\theta}, \frac{dZ}{d\theta} \right) = \varepsilon g^0(r, Z) \quad (2.10)$$

$$g^0(r, Z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} G(r, \theta, Z) \cos \theta \\ G(r, \theta, Z) \end{pmatrix} d\theta \quad (2.11)$$

Par le Théorème 2.1 pour tout point singulier $p = (r_0, Z_0)$ du système (2.10) tel que

$$\det \left(\frac{\partial g^0}{\partial (r, Z)} \right) |_{(r, Z)=p} \neq 0 \quad (2.12)$$

il existe une solution 2π -périodique $(r_\varepsilon(\theta), Z_\varepsilon(\theta))$ du système (2.9) telle que $(r_\varepsilon(\theta), Z_\varepsilon(\theta)) \rightarrow p$; alors (2.12) équivaut à

$$\det \left(\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (r_0, Z_0)} \right) |_{(r_0, Z_0)} \neq 0 \quad (2.13)$$

où

$$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(r, \theta, Z) \cos \theta d\theta \\ f_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(r, \theta, Z) d\theta \end{cases}$$

pour $F(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \dot{x}^3 - x - 1$

alors les fonctions f_1 et f_2 du théorème 2.1 sont données par

$$\begin{cases} f_1(r_0, z_0) = \frac{1}{2} r_0^* \\ f_2(r_0, z_0) = \frac{1}{2} \frac{2z_0\pi - 2\pi}{\pi} \end{cases}$$

ce système admet la solution suivante.

$$(r_0^*, z_0^*) = (0, 1),$$

avec

$$\det \left(\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (r_0, Z_0)} \right) \Big|_{(r_0, Z_0) = \frac{1}{2}} \neq 0$$

Alors, d'après le Théorème 2.1, il existe un cycle limite de l'équation (2.5).

2.2 Deuxième Méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques

On considère le problème de la bifurcation des solutions T- périodiques d'un système différentiel de la forme

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F_0(t, \mathbf{x}) + \varepsilon F_1(t, \mathbf{x}(t)) + \varepsilon^2 F_2(t, \mathbf{x}(t), \varepsilon) \quad (2.14)$$

avec ε suffisamment petit.

Les fonctions $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega$ et $F_2 : \Omega \times \mathbb{R} \times]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions de classe C^2 T-périodiques en t et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n ,

Supposons que le système non perturbé

$$\dot{\mathbf{x}} = F_0(t, \mathbf{x}) \quad (2.15)$$

a une sous-variété de dimension k de solutions périodiques.

Soit $\mathbf{x}(t, z)$ la solution du système non perturbé (2.15) telle que $\mathbf{x}(0, z) = z_0$ La linéarisation du système (2.15) le long de la solution périodique $\mathbf{x}(t, z)$ est écrite comme

$$\dot{y} = D_{\mathbf{x}} F_0(\mathbf{x}(t, z), t) y \quad (2.16)$$

Dans la suite on note par $M_z(t)$ la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (2.16) et par $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ la projection de \mathbb{R}^n sur ses k premières coordonnées

2.2. Deuxième Méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques

i.e. $\xi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$

Théorème 2.2. [8] et [16] Soit $V \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert borné, $\beta_0 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une fonction C^2 . On suppose que

(i) $\mathbf{Z} = \{z_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha)), \alpha \in \bar{V}\} \subset \Omega$ et que pour chaque $z_\alpha \in \mathbf{Z}$ la solution $\mathbf{x}(t, z_\alpha)$ de (2.15) est T -périodique.

(ii) Pour chaque $z_\alpha \in \mathbf{Z}$ il existe une matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(t)$ de (2.16) telle que la matrice $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$ contient dans le haut coin droit la matrice nulle de dimensions $k \times (n - k)$ et dans le bas coin droit une matrice $\Delta_\alpha ((n - k) \times (n - k))$ avec $\det \Delta_\alpha \neq 0$.

On considère la fonction $\mathcal{F} : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi \left(\frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(x(t, z), t) dt \right) \quad (2.17)$$

S'il existe $a \in V$ telle que $\mathcal{F}(a) = 0$ et de $\det \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\alpha}(a) \right) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.14) telle que $\varphi(t, \varepsilon) \rightarrow z$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve : Voir [14] et [15]

Corollaire 2.1. On suppose qu'il existe un ensemble ouvert et borné V avec $V \subset \Omega$ telle que pour chaque $z \in \bar{V}$, la solution $x(t, z)$ est T -périodique et on considère la fonction $\mathcal{F} : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t, z) F_1(x(t, z), t) dt \quad (2.18)$$

S'il existe un $a \in V$ avec $\mathcal{F}(a) = 0$ et $\det \left(\left(\frac{d\mathcal{F}}{dz} \right)(a) \right) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon) \rightarrow z$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Exemple 2.2. Soit l'équation

$$\ddot{x} - \mu \ddot{x} + \dot{x} - \mu x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}) \quad (2.19)$$

on pose $\dot{x} = y, \ddot{x} = z$, alors l'équation (2.19) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -y + \mu(x + z) + \varepsilon F(x, y, z) \end{cases} \quad (2.20)$$

2.2. Deuxième Méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques

Le système (2.20) avec $\varepsilon = 0$ admet un seul point critique à l'origine.

La matrice jacobienne admet les valeurs propres i , $-i$ et μ .

Avec le changement linéaire des variables $(X, Y, Z)^T = N(x, y, z)^T$ avec

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -\mu & 1 \\ -\mu & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nous transformons le système différentiel (2.20) en le système différentiel suivant telle que la partie linéaire du système (2.20) se transforme à sa forme de Jordan réelle.

On obtient alors

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z) \\ \dot{Y} = X \\ \dot{Z} = \mu Z - \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z) \end{cases} \quad (2.21)$$

où $\tilde{F}(X, Y, Z) = F(A, B, C)$

et

$$\begin{cases} A = -\frac{X+Z+\mu Y}{1+\mu^2} \\ B = \frac{Y-\mu(X+Z)}{1+\mu^2} \\ C = \frac{X+\mu(Y-\mu Z)}{1+\mu^2} \end{cases}$$

Maintenant on passe des coordonnées cartésiennes (X, Y, Z) aux coordonnées cylindriques (r, θ, Z) de \mathbb{R}^3 , où $X = r \cos \theta$ et $Y = r \sin \theta$. Dans ces nouvelles variables, le système différentiel (2.21) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon G(r, \theta, Z) \cos \theta \\ \dot{\theta} = 1 - \varepsilon \frac{G(r, \theta, Z) \sin \theta}{r} \\ \dot{Z} = \mu Z - \varepsilon G(r, \theta, Z) \end{cases} \quad (2.22)$$

où

$$G(r, \theta, Z) = \tilde{F}(r \cos \theta, r \sin \theta, Z)$$

En divisant sur $\dot{\theta}$ on obtient

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon G(r, \theta, Z) \cos \theta + o(\varepsilon^2), \\ \frac{dZ}{d\theta} = \mu Z + \varepsilon \frac{\mu Z \sin \theta - r}{r} G(r, \theta, Z) + o(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (2.23)$$

Le système (2.23) est écrit sous la forme du système (2.14), avec

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \\ Z \end{pmatrix}, \quad F_0(\theta, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu Z \end{pmatrix}, \quad F_1(\theta, x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} G(r, \theta, Z) \cos \theta \\ \frac{\mu Z \sin \theta - r}{r} G(r, \theta, Z) \end{pmatrix},$$

si $\varepsilon = 0$ le système non perturbé

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = 0 \\ \frac{dZ}{d\theta} = \mu Z \end{cases} \quad (2.24)$$

possède les solutions 2π -périodiques en θ suivantes $(r(\theta), Z(\theta)) = (r_0, 0) \cdot \forall r_0 > 0$

Nous décrirons les différents éléments qui apparaissent dans l'énoncé du Théorème 2.2 dans le cas particulier du système différentiel (2.23). Ainsi nous avons que $k = 1$ et $n = 2$.

Soit $r_1 > 0$ arbitrairement petit et soit $r_2 > 0$ arbitrairement grand.

Alors $V =]r_1, r_2[$, $\alpha = r_0 \in V$, $\beta : [r_1, r_2] \rightarrow \mathbb{R}$ défini comme $\beta(r_0) = 0$. l'ensemble \mathbf{Z} est $\mathbf{Z} = \{z_\alpha = (r_0, 0), r_0 \in [r_1, r_2]\}$.

Clairement pour chaque $z_\alpha \in \mathbf{Z}$ on peut considérer que la solution $\mathbf{x}(\theta) = z_\alpha = (r_0, 0)$ est 2π -périodique

En calculant la matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(t)$ du système différentiel linéaire (2.24) avec $\varepsilon \rightarrow 0$ associé à la solution 2π -périodique $z_\alpha = (r_0, 0)$ telle que $M_{z_\alpha}(0)$ soit l'identité de \mathbb{R}^2 , on obtient

$$M(\theta) = M_{z_\alpha}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\mu\theta} \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\mu\theta} \end{pmatrix}.$$

donc satisfait les hypothèses de l'énoncé (ii) du Théorème 2.2, et nous pouvons donc appliquer ce théorème au système (2.23). Maintenant $\xi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est $\xi(r, Z) = r$. Nous calculons la fonction (2.17)

2.2. Deuxième Méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(A, B, C) \cos(\theta) d\theta$$

Pour $F(x, \dot{x}, \ddot{x}) = x^4 + x^3 - \dot{x}^3 - x^2\dot{x} + x + 1$, la fonction $\mathcal{F}(r_0)$ est

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{r_0(3\mu r_0^2 - 3r_0^2 - 4 - 4\mu^2)}{8 + 16\mu^2 + 8\mu^4}$$

La fonction $\mathcal{F}(r_0)$ possède une racine réelle

$$r_0 = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{(\mu-1)(1+\mu^2)}}{3(\mu-1)}$$

Et on a

$$d\mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{\mu^2 + 1} \neq 0$$

Alors, d'après le théorème 2.2, existe un cycle limite du système (2.23) qui tend vers r_0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Solution périodiques de trois classes d'équation différentielles du quatrième ordre

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les solutions périodiques de trois classes d'équation différentielles du quatrième ordre, la première classe prend la forme:

$$\ddot{\ddot{x}} + q\ddot{x} - x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) \quad (3.1)$$

où q et ε sont des paramètres réels, ε est suffisamment petite et F est une fonction non linéaire.

la deuxième classe est sous la forme

$$\ddot{\ddot{x}} + q\ddot{x} + px = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$$

où q, p et ε sont des paramètres réels, ε est petit et F est une fonction non linéaire. T -périodique en t .

La troisième classe étudiée est autonome de la forme:

$$\ddot{\ddot{x}} + q\ddot{x} + px = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) \quad (3.3)$$

où q, p et ε sont des paramètres réels, ε est petit et F est une fonction non linéaire.

3.1 Etude de l'équation $\ddot{x} + q\ddot{x} - x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x})$

Soit l'équation (3.1) on a le théoème suivant :

Théorème 3.1. [7] Pour tout zéro simple positif r_0^* de la fonction

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2} \sin \theta}{\sqrt{q + \sqrt{q^2 + 4}}} F(A, B, C, D) d\theta \quad (3.4)$$

où

$$A = -\frac{\sqrt{\sqrt{q^2+4}-q}}{\sqrt{2(q^2+4)}} r_0 \cos \theta$$

$$B = -\frac{r_0 \sin \theta}{\sqrt{q^2+4}}$$

$$C = -\frac{\sqrt{q+\sqrt{q^2+4}}}{2\sqrt{2(q^2+4)}} r_0 \cos \theta$$

$$D = \frac{\sqrt{q^2+4+q}}{2\sqrt{q^2+4}} r_0 \sin \theta$$

l'équation différentielle (3.1) admet une solution périodique $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ tendant vers la solution périodique

$$x(t, \varepsilon) = -\frac{\sqrt{2}r_0^*}{2\sqrt{(q^2+4)}\sqrt{\sqrt{q^2+4}+q}} \cos \left(\sqrt{\frac{q + \sqrt{q^2+4}}{2}} t \right)$$

de $\ddot{x} + q\ddot{x} - x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve du Théorème 3.1.

En introduisant les variables $(x, y, z, v) = (x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x})$ nous écrivons l'équation différentielle (3.1) du quatrième ordre comme un système différentiel de premier ordre défini dans un sous-ensemble ouvert Ω de \mathbb{R}^4 . On a donc le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = v \\ \dot{v} = x - qz + \varepsilon F(x, y, z, v) \end{cases} \quad (3.5)$$

Les valeurs propres du système non perturbé sont $\pm\sqrt{\frac{q+\sqrt{q^2+4}}{2}}i$, $\pm\sqrt{\frac{-q+\sqrt{q^2+4}}{2}}$ écrivons le système (3.5) de manière que la partie linéaire à l'origine sera sous la forme normale réelle de Jordan.

En faisant le changement de variable $(X, Y, Z, V)^T = B(x, y, z, v)^T \Rightarrow (x, y, z, v)^T = B^{-1}(X, Y, Z, V)^T$ telle que B est la matrice de changement de variables, avec la forme normale réelle de Jordan est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\frac{q+\sqrt{q^2+4}}{2}} & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{q+\sqrt{q^2+4}}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{-q+\sqrt{q^2+4}}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{-q+\sqrt{q^2+4}}{2}} \end{pmatrix}$$

On a

$$A = B^{-1}JB \Rightarrow BA - JB = 0$$

on trouve donc

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}-q}{2}} & 0 & -\sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}+q}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{q-\sqrt{q^2+4}}{2} & 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}+q}{2}} & \frac{\sqrt{q^2+4}+q}{2} & \sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}-q}{2}} & 1 \\ -\sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}+q}{2}} & \frac{\sqrt{q^2+4}+q}{2} & -\sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}-q}{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}-q}{2}} & 0 & -\sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}+q}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{q-\sqrt{q^2+4}}{2} & 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}+q}{2}} & \frac{\sqrt{q^2+4}+q}{2} & \sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}-q}{2}} & 1 \\ -\sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}+q}{2}} & \frac{\sqrt{q^2+4}+q}{2} & -\sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}-q}{2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix}$$

Le nouveau système est :

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sqrt{\frac{q+\sqrt{q^2+4}}{2}}Y \\ \dot{Y} = \sqrt{\frac{q+\sqrt{q^2+4}}{2}}X + \varepsilon G(X, Y, Z, V) \\ \dot{Z} = \sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}-q}{2}}Z + \varepsilon G(X, Y, Z, V) \\ \dot{V} = -\sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}-q}{2}}V + \varepsilon G(X, Y, Z, V) \end{cases} \quad (3.6)$$

où $G(X, Y, Z, V) = F(A, B, C, D)$ avec

$$A = -\frac{1}{2\sqrt{2(q^2+4)}} \left((V - Z) \sqrt{q + \sqrt{q^2 + 4}} + 2X \sqrt{\sqrt{q^2 + 4} - q} \right)$$

$$B = \frac{1}{2\sqrt{q^2+4}} (V - 2Y + Z)$$

$$C = -\frac{1}{2\sqrt{2(q^2+4)}} \left(X \sqrt{q + \sqrt{q^2 + 4}} + (V - Z) \sqrt{\sqrt{q^2 + 4} - q} \right)$$

$$D = \frac{1}{4\sqrt{q^2+4}} \left((V + 2Y + Z) \sqrt{q^2 + 4} - q(V - 2Y + Z) \right)$$

Remarquons que la partie linéaire du système différentiel (3.6) à l'origine est dans sa forme normale réelle de Jordan.

Passons maintenant des variables cartésiennes (X, Y, Z, V) aux cylindriques (r, θ, Z, V) de \mathbb{R}^4 , où $X = r \cos \theta$ et $Y = r \sin \theta$. Dans ces nouvelles variables, le système différentiel (3.7) peut s'écrire sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \sin \theta H(r, \theta, Z, V) \\ \dot{\theta} = \sqrt{\frac{q+\sqrt{q^2+4}}{2}} + \varepsilon \frac{\cos \theta}{r} H(r, \theta, Z, V) \\ \dot{Z} = \sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}-q}{2}}Z + \varepsilon H(r, \theta, Z, V) \\ \dot{V} = -\sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}-q}{2}}V + \varepsilon H(r, \theta, Z, V) \end{cases} \quad (3.7)$$

où $H(r, \theta, Z, V) = F(a, b, c, d)$ avec

$$a = -\frac{1}{2\sqrt{2(q^2+4)}} \left((V - Z) \sqrt{q + \sqrt{q^2 + 4}} + \sqrt{\sqrt{q^2 + 4} - q} 2r \cos \theta \right)$$

$$b = \frac{1}{2\sqrt{q^2+4}} (V + Z - 2r \sin \theta)$$

$$c = -\frac{1}{2\sqrt{2(q^2+4)}} \left(\sqrt{q + \sqrt{q^2 + 4}} r \cos \theta + (V - Z) \sqrt{\sqrt{q^2 + 4} - q} \right)$$

$$d = \frac{1}{4\sqrt{q^2+4}} \left((V + Z + 2r \sin \theta) \sqrt{q^2+4} - q(V + Z - 2r \sin \theta) \right)$$

Maintenant, nous changeons la variable indépendante de t à θ , le système différentiel (3.7) devient

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \sqrt{\frac{2}{q+\sqrt{q^2+4}}} \sin \theta H(r, \theta, Z, V) + O(\varepsilon^2) \\ \frac{dZ}{d\theta} = \sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}-q}{q+\sqrt{q^2+4}}} Z + \varepsilon \frac{\sqrt{2} \left((q+\sqrt{q^2+4})r - \sqrt{\sqrt{q^2+4}-q} \sqrt{q+\sqrt{q^2+4}} Z \cos \theta \right)}{(q+\sqrt{q^2+4})^{\frac{3}{2}} r} H(r, \theta, Z, V) + O(\varepsilon^2) \\ \frac{dV}{d\theta} = -\sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}-q}{q+\sqrt{q^2+4}}} V + \varepsilon \frac{\sqrt{2} \left((q+\sqrt{q^2+4})r + \sqrt{\sqrt{q^2+4}-q} \sqrt{q+\sqrt{q^2+4}} V \cos \theta \right)}{(q+\sqrt{q^2+4})^{\frac{3}{2}} r} H(r, \theta, Z, V) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (3.8)$$

Dans la suite, on va appliquer le théorème (2.1) au système différentiel (3.8). Notons que le système (3.8) peut être écrit comme le système (2.14) en prenant

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \\ Z \\ V \end{pmatrix}, \quad t = \theta \quad F_0(\theta, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}-q}{q+\sqrt{q^2+4}}} Z \\ -\sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}-q}{q+\sqrt{q^2+4}}} V \end{pmatrix}$$

et

$$F_1(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\frac{q+\sqrt{q^2+4}}{2}} \sin \theta H}{\sqrt{2} \left((q+\sqrt{q^2+4})r - \sqrt{\sqrt{q^2+4}-q} \sqrt{q+\sqrt{q^2+4}} Z \cos \theta \right)} H \\ \frac{\sqrt{2} \left((q+\sqrt{q^2+4})r + \sqrt{\sqrt{q^2+4}-q} \sqrt{q+\sqrt{q^2+4}} V \cos \theta \right)}{(q+\sqrt{q^2+4})^{\frac{3}{2}} r} H \end{pmatrix}$$

Nous étudierons les solutions périodiques du système non perturbé (3.8) avec $\varepsilon = 0$. il est clair que ces solutions périodiques sont $(r(\theta), Z(\theta), V(\theta)) = (r_0, 0, 0)$ pour tout $r_0 > 0$.

Bien sûr toutes ces solutions périodiques dans les coordonnées (r, Z, V) ont une période 2π en la variable θ .

Nous allons décrire les différents éléments qui apparaissent dans l'énoncé du théorème (2.1) dans le cas particulier du système différentiel (3.8), ainsi nous avons que $k = 1$ et

$n = 3$. Soit $r_1 > 0$ arbitrairement petit et soit $r_2 > 0$ arbitrairement grand. ensuite, nous prenons le sous-ensemble borné ouvert V de \mathbb{R} comme $V =]r_1, r_2[$, $\alpha = r_0$ et $\beta : [r_1, r_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini comme $\beta(r_0) = (0, 0)$. l'ensemble \mathbf{Z} est

$$\mathbf{Z} = \{z_\alpha = (r_0, 0, 0), r_0 \in [r_1, r_2]\}$$

Clairement pour chaque $z_\alpha \in \mathbf{Z}$ on peut considérer que la solution $\mathbf{x}(t) = z_\alpha = (r_0, 0, 0)$ est 2π -périodique

En calculant la matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(\theta)$ du système différentiel linéaire (3.8) avec $\varepsilon \rightarrow 0$ associé à la solution 2π -périodique $z_\alpha = (r_0, 0, 0)$ telle que $M_{z_\alpha}(0)$ soit l'identité de \mathbb{R}^3 , on obtient

$$M_{z_\alpha}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}-q}{q+\sqrt{q^2+4}}}\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}-q}{q+\sqrt{q^2+4}}}\theta} \end{pmatrix}$$

On a donc

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - e^{\sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}-q}{q+\sqrt{q^2+4}}}\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-\sqrt{\frac{\sqrt{q^2+4}-q}{q+\sqrt{q^2+4}}}\theta} \end{pmatrix}$$

qui satisfait les hypothèses de l'énoncé (ii) du théorème (2.1), que nous pouvons donc l'appliquer au système (3.8).

Or $\xi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est $\xi(r, Z, V) = r$. On calcule la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(r_0) &= \mathcal{F}(\alpha) = \xi \left(\frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) \mathcal{F}_1(t, \mathbf{x}(t, z_\alpha)) dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2} \sin \theta}{\sqrt{q + \sqrt{q^2 + 4}}} \mathcal{F}(A, B, C, D) d\theta \end{aligned}$$

où les expressions de A, B, C et D sont celles données dans l'énoncé du Théorème 3.1. Alors, par le Théorème 2.1 on a que pour tout zéro simple $r_0^* \in [r_1, r_2]$ de la fonction $\mathcal{F}(r_0)$ on a une solution périodique $(r, Z, V)(\theta, \varepsilon)$ du système (3.8) telle que

$$(r, Z, V)(\theta, \varepsilon) \rightarrow (r_0, 0, 0) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

posons $\varepsilon = 0$ dans le système (3.7) on obtient : $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{q+\sqrt{q^2+4}}{2}} \Rightarrow \theta = \sqrt{\frac{q+\sqrt{q^2+4}}{2}}t$

On a donc une solution périodique $(r, \theta, Z, V)(t, \varepsilon)$ du système (3.7) telle que

$$(r, \theta, Z, V)(t, \varepsilon) \rightarrow \left(r_0^*, \sqrt{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4}}{2}}t, 0, 0 \right) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

Par conséquent on obtient une solution périodique $(X, Y, Z, V)(t, \varepsilon)$ du système (3.7) telle que

$$(X, Y, Z, V)(t, \varepsilon) \rightarrow \left(r_0^* \cos \sqrt{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4}}{2}}t, r_0^* \sin \sqrt{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4}}{2}}t, 0, 0 \right) . \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

De plus, comme:

$$x = -\frac{1}{2\sqrt{2}(q^2+4)} \left((V - Z) \sqrt{q + \sqrt{q^2 + 4}} + 2X \sqrt{\sqrt{q^2 + 4} - q} \right)$$

On a une solution périodique $(x, y, z, v)(t, \varepsilon)$ du système (3.5) telle que :

$$x(t, \varepsilon) \rightarrow -\frac{\sqrt{2}r_0^*}{\sqrt{(q^2+4)}\sqrt{\sqrt{q^2+4}+q}} \cos \left(\frac{\sqrt{q^2+4}+q}{2}t \right)$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Bien sûr, il est facile de vérifier que l'expression précédente fournit une solution périodique de l'équation différentielle $\ddot{x} + q\ddot{x} - x = 0$. D'où le théorème 3.1 est prouvé.

Corollaire 3.1. On pose $F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}) = \ddot{x} - (\ddot{x})^3$, pour $q = 2$, alors l'équation différentielle (3.1) a une solution périodique tendant vers la solution

$$x(t, \varepsilon) = -\frac{1}{60} (2 - \sqrt{2}) \sqrt{15} \cos \left(\sqrt{\sqrt{2} + 1}t \right)$$

de $\ddot{x} + 2\ddot{x} - x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$

Preuve du Corollaire 3.1. l'équation (3.1) devient

$$\ddot{x} + 2\ddot{x} - x = \ddot{x} - (\ddot{x})^3$$

alors la fonction $\mathcal{F}(r_0)$ de l'énoncé du théorème 3.1 est

$$\mathcal{F}(r_0) = -\frac{1}{128} \frac{r_0 (-32 - 32\sqrt{2} + 21r_0^2 + 15r_0^2\sqrt{2})}{\sqrt{2\sqrt{2} + 2}}$$

La fonction $\mathcal{F}(r_0)$ possède une racine réelle

$$r_0 = \frac{4}{3}\sqrt{3} \left(2 - \sqrt{2}\right)$$

On a aussi

$$d\mathcal{F}(r_0) = -\frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{2} + 2} \neq 0$$

Alors d'après le théorème 3.1 l'équation $\ddot{x} + 2\dot{x} - x = \ddot{x} - (\ddot{x})^3$ possède un cycle limite $x_\varepsilon(t)$

3.2 Etude de l'équation $\ddot{x} + q\dot{x} + px = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x})$

Soit l'équation (3.2), on a le théorème suivant

Théorème 3.2. [10] Supposons que $p < 0$ dans l'équation différentielle (3.2). Soient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \cos(\alpha t) F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt, \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) &= -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \sin(\alpha t) F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt \end{aligned}$$

avec $\alpha = \sqrt{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4}}{2}}$, $\beta = \sqrt{\frac{-q + \sqrt{q^2 + 4}}{2}}$, (où de manière équivalente $p = -\alpha^2\beta^2 < 0$, $q = \alpha^2 - \beta^2$) avec respectivement, α et β , des nombres positifs, et

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{(X_0 \cos(\alpha t) - Y_0 \sin(\alpha t))}{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} \\ B(t) &= \frac{(Y_0 \cos(\alpha t) + X_0 \sin(\alpha t))}{\alpha^2 + \beta^2} \\ C(t) &= -\frac{\alpha(X_0 \cos(\alpha t) - Y_0 \sin(\alpha t))}{\alpha^2 + \beta^2} \\ D(t) &= \frac{\alpha^2(Y_0 \cos(\alpha t) + X_0 \sin(\alpha t))}{\alpha^2 + \beta^2} \end{aligned}$$

Si la fonction F est $\frac{2\pi}{\alpha}$ périodique par rapport à la variable t , alors pour tout (X_0^*, Y_0^*) solution du système

$$\mathcal{F}_k(X_0, Y_0) = 0, \quad k = 1, 2.$$

satisfaisant

$$\det \left(\frac{\partial (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial (X_0, Y_0)} \Big|_{(X_0, Y_0) - (X_0^*, Y_0^*)} \right) \neq 0 \quad (3.10)$$

l'équation différentielle (3.2) admet une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ j tendant vers la solution $x(t)$ donnée par $\frac{(X_0 \cos(\alpha t) - Y_0 \sin(\alpha t))}{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}$ de $\ddot{x} + q\dot{x} + px = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Notons que cette solution est périodique de période $\frac{2\pi}{\alpha}$.

Preuve du Théorème 3.2.

En introduisant les variables $(x, y, z, v) = (x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\dot{x}})$ nous écrivons l'équation différentielle (3.1) du quatrième ordre comme un système différentiel de premier ordre défini dans un sous-ensemble ouvert Ω de \mathbb{R}^4 . On a donc le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = v \\ \dot{v} = -px - qz + \varepsilon F(t, x, y, z, v) \end{cases} \quad (3.11)$$

Les valeurs propres du système non perturbé sont $\alpha = \pm \sqrt{\frac{q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2}}$, $\beta = \pm \sqrt{\frac{-q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2}}$, écrivons le système (3.11) de manière que la partie linéaire à l'origine sera sous la forme normale réelle de Jordan.

En faisant le changement de variables $(X, Y, Z, V)^T = B(x, y, z, v)^T \Rightarrow (x, y, z, v)^T = B^{-1}(X, Y, Z, V)^T$ telle que B est la matrice de changement de variables, avec la forme normale réelle de Jordan est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

On a

$$A = B^{-1}JB \Rightarrow BA - JB = 0$$

on trouve donc

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{p}{\alpha} & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 & 1 \\ -\frac{p}{\beta} & -\alpha^2 & \beta & 1 \\ \frac{p}{\beta} & -\alpha^2 & -\beta & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{p}{\alpha} & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 & 1 \\ -\frac{p}{\beta} & -\alpha^2 & \beta & 1 \\ \frac{p}{\beta} & -\alpha^2 & -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix}$$

le nouveau système est

$$\begin{cases} \dot{X} = -\alpha Y \\ \dot{Y} = \alpha X + \varepsilon F(t, A, B, C, D) \\ \dot{Z} = \beta Z + \varepsilon F(t, A, B, C, D) \\ \dot{V} = -\beta V + \varepsilon F(t, A, B, C, D) \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{\alpha\beta} \frac{1}{2\alpha^2 + 2\beta^2} (V\alpha - 2X\beta - Z\alpha) \\ B &= \frac{1}{2\alpha^2 + 2\beta^2} (2Y - Z - V) \\ C &= \frac{1}{2\alpha^2 + 2\beta^2} ((Z - V)\beta - 2X\alpha) \\ D &= \frac{1}{2\alpha^2 + 2\beta^2} ((Z + V)\beta^2 + 2Y\alpha^2) \end{aligned}$$

Remarquons que la partie linéaire du système différentiel (3.12) à l'origine est dans sa forme normale réelle de Jordan.

Dans la suite, on va appliquer le théorème 2.1 au système différentiel (3.12). Notons que le système (3.12) peut être écrit comme le système (2.14) en prenant

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ V \end{pmatrix}, \quad t = t, \quad F_0(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\alpha Y \\ \alpha X \\ \beta Z \\ -\beta V \end{pmatrix}$$

et

$$F_1(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ F(t, A, B, C, D) \\ F(t, A, B, C, D) \\ F(t, A, B, C, D) \end{pmatrix}$$

Nous étudierons les solutions périodiques du système (2.15) dans notre cas, c'est-à-dire les solutions périodiques du système (3.12) avec $\varepsilon = 0$. Ces solutions périodiques sont

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \\ V(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos(\alpha t) - Y_0 \sin(\alpha t) \\ Y_0 \cos(\alpha t) + X_0 \sin(\alpha t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice fondamentale du système (3.12) avec $\varepsilon = 0$ associé à cette solution périodique est

$$M(t) = M_z(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & -\sin(\alpha t) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(\beta t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-\beta t) \end{pmatrix}$$

La matrice inverse de $M(t)$ est

$$M^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & \sin(\alpha t) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-\beta t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(\beta t) \end{pmatrix}$$

qui vérifie

$$M(0) - M^{-1}\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \exp(-\beta\frac{2\pi}{\alpha}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \exp(\beta\frac{2\pi}{\alpha}) \end{pmatrix}$$

Par conséquent toutes les hypothèses du théorème 2.2 sont satisfaites. Il faut donc étudier les zéros du système $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = 0$ de deux équations à deux inconnues. Plus précisément, nous avons

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = (\mathcal{F}_1(X_0, Y_0), \mathcal{F}_2(X_0, Y_0)) \text{ où}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \cos(\alpha t) F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) &= -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \sin(\alpha t) F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt \end{aligned}$$

avec $A(t), B(t), C(t)$ et $D(t)$ comme dans l'énoncé du théorème 3.2.

Les zéros (X_0^*, Y_0^*) du système

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0) \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

par rapport aux variables X_0 et Y_0 fournissent des orbites périodiques du système (3.12) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit si elles sont simples, c'est-à-dire si

$$\det \left(\frac{\partial (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial (X_0, Y_0)} \Big|_{(X_0, Y_0) = (X_0^*, Y_0^*)} \right) \neq 0 \quad (3.14)$$

En remontant par le changement de variables, pour tout zéro simple (X_0^*, Y_0^*) du système (3.13), on obtient une solution $\frac{2\pi}{\alpha}$ -périodique de l'équation différentielle (3.2) pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit tendant vers la solution

$$x(t) = \frac{(X_0 \cos(\alpha t) - Y_0 \sin(\alpha t))}{\alpha (\alpha^2 + \beta^2)}$$

de $\ddot{x} + q\ddot{x} + px = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Notons que cette solution est périodique de période $\frac{2\pi}{\alpha}$. Ceci complète la preuve du théorème 3.2

Corollaire 3.2. Si $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) = \cos(t) - \dot{x} + \dot{x}x$, alors l'équation différentielle (3.2) avec $p = -1$ et $q = 0$ à une solution périodique $x_1(t, \varepsilon)$ tendant vers la solution périodique $x_1(t)$ donnée par

$$x_1(t) = 2 \sin(t)$$

de $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$

Preuve du Corollaire 3.2. Nous avons l'équation

$$\ddot{x} + x = \cos(t) - \dot{x} + \dot{x}x \quad (3.15)$$

On obtient $\alpha = \beta = 1$. Les fonctions \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 du théorème 3.2 sont

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0) &= -\frac{1}{4}Y_0 + \frac{1}{2} \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) &= -\frac{1}{4}X_0 \end{aligned}$$

Le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 0$ a la solution réelle $(X_0^*, Y_0^*) = (0, 2)$, qui vérifie

$$\det \left(\frac{\partial (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial (X_0, Y_0)} \Big|_{(X_0, Y_0) = (0, 2)} \right) = -\frac{1}{16} \neq 0$$

D'après le théorème 3.2 l'équation (3.15) admet la solution périodique de l'énoncé du corollaire.

Théorème 3.3. Supposons que $p > 0$, $q > 0$ et $q^2 - 4p > 0$ dans l'équation différentielle (3.2). Définissons les fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, V_0) &= \frac{1}{2k\pi} \int_0^{2k\pi} \cos\left(\frac{m}{n}t\right) F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, V_0) &= -\frac{1}{2k\pi} \int_0^{2k\pi} \sin\left(\frac{m}{n}t\right) F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt \\ \mathcal{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, V_0) &= \frac{1}{2k\pi} \int_0^{2k\pi} \cos\left(\frac{r}{s}t\right) F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt \\ \mathcal{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, V_0) &= -\frac{1}{2k\pi} \int_0^{2k\pi} \sin\left(\frac{r}{s}t\right) F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt \end{aligned}$$

avec $\sqrt{\frac{q+\sqrt{q^2-4p}}{2}} = \frac{m}{n}$, $\sqrt{\frac{q-\sqrt{q^2-4p}}{2}} = \frac{r}{s}$, (ou de manière équivalente $p = \frac{m^2 r^2}{n^2 s^2}$, $q = \frac{m^2}{n^2} + \frac{r^2}{s^2}$) avec m, n, r et s sont des entiers positifs, $k = ppmc(n, s)$.

$$\begin{aligned} A(t) &= K \left[\frac{r}{s} \left(X_0 \cos\left(\frac{m}{n}t\right) - Y_0 \sin\left(\frac{m}{n}t\right) \right) - \frac{m}{n} \left(Z_0 \cos\left(\frac{r}{s}t\right) - V_0 \sin\left(\frac{r}{s}t\right) \right) \right] \\ B(t) &= L \left[Z_0 \cos\left(\frac{r}{s}t\right) + V_0 \sin\left(\frac{r}{s}t\right) - Y_0 \cos\left(\frac{m}{n}t\right) - X_0 \sin\left(\frac{m}{n}t\right) \right] \\ C(t) &= L \left[\frac{r}{s} \left(Z_0 \cos\left(\frac{r}{s}t\right) - V_0 \sin\left(\frac{r}{s}t\right) \right) - \frac{m}{n} \left(X_0 \cos\left(\frac{m}{n}t\right) - Y_0 \sin\left(\frac{m}{n}t\right) \right) \right] \\ D(t) &= L \left[\frac{m^2}{n^2} \left(Y_0 \cos\left(\frac{m}{n}t\right) + X_0 \sin\left(\frac{m}{n}t\right) \right) - \frac{r^2}{s^2} \left(Z_0 \cos\left(\frac{r}{s}t\right) + V_0 \sin\left(\frac{r}{s}t\right) \right) \right] \end{aligned}$$

où $K = \frac{n^3 s^3}{mr(m^2 s^2 - n^2 r^2)}$, et $L = \frac{n^2 s^2}{m^2 s^2 - n^2 r^2}$.

Si la fonction F est $2\pi k$ -périodique par rapport à la variable t , alors pour toute solution $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, V_0^*)$ du système

$$\mathcal{F}_l(X_0, Y_0, Z_0, V_0) = 0, \quad l = 1, \dots, 4,$$

où

$$\det \left(\frac{\partial (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)}{\partial (X_0, Y_0, Z_0, V_0)} \Big|_{(X_0, Y_0, Z_0, V_0) = (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, V_0^*)} \right) \neq 0$$

l'équation différentielle (3.2) admet une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ tendant vers la solution $x_0(t)$ donnée par

$$K \left[\frac{r}{s} \left(X_0^* \cos\left(\frac{m}{n}t\right) - Y_0^* \sin\left(\frac{m}{n}t\right) \right) - \frac{m}{n} \left(Z_0^* \cos\left(\frac{r}{s}t\right) - V_0^* \sin\left(\frac{r}{s}t\right) \right) \right]$$

de $\ddot{x} + q\dot{x} + px = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Notons que cette solution est périodique de période $2\pi k$.

Preuve du Théorème 3.3.

Comme dans la preuve du théorème 3.2, l'équation différentielle (3.2) peut être écrite comme le système différentiel (3.11). Le système non perturbé a un point singulier unique, l'origine. Puisque $p > 0$ et $q^2 - 4p > 0$ l'origine a deux paires de valeurs propres imaginaires

$$\pm \sqrt{\frac{q+\sqrt{q^2-4p}}{2}} i = \pm \frac{m}{n} i, \quad \pm \sqrt{\frac{q-\sqrt{q^2-4p}}{2}} i = \pm \frac{r}{s} i$$

Nous écrirons le système (3.11) de telle sorte que la partie linéaire à l'origine soit sous sa forme normale de Jordan réelle. En faisant le changement de variables $(x, y, z, v) \rightarrow (X, Y, Z, V)$ donné par

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{pn}{m} & 0 & -\frac{m}{n} & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{s^2} & 0 & 1 \\ -\frac{ps}{r} & 0 & -\frac{r}{s} & 0 \\ 0 & \frac{m^2}{n^2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix}$$

Le système différentiel (3.11) devient

$$\begin{cases} \dot{X} = -\frac{m}{n}Y \\ \dot{Y} = \frac{m}{n}X + \varepsilon F(t, A, B, C, D) \\ \dot{Z} = -\frac{r}{s}V \\ \dot{V} = \frac{r}{s}Z + \varepsilon F(t, A, B, C, D) \end{cases} \quad (3.16)$$

avec

$$\begin{aligned} a &= \frac{n^3 s^3}{mr(m^2 s^2 - n^2 r^2)} \left(X \frac{r}{s} - Z \frac{m}{n} \right) \\ b &= \frac{n^2 s^2}{m^2 s^2 - n^2 r^2} (V - Y) \\ c &= \frac{n^2 s^2}{m^2 s^2 - n^2 r^2} \left(Z \frac{r}{s} - X \frac{m}{n} \right) \\ d &= \frac{s^2 n^2}{m^2 s^2 - n^2 r^2} \left(Y \frac{m^2}{n^2} - V \frac{r^2}{s^2} \right) \end{aligned}$$

Remarquons que la partie linéaire du système différentiel (3.16) à l'origine est dans sa forme normale réelle de Jordan.

Dans la suite, on va appliquer le Corollaire 2.1 au système différentiel (3.16). Notons que le système (3.16) peut être écrit comme le système (2.14) en prenant

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ V \end{pmatrix}, \quad t = t, \quad F_0(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{m}{n}Y \\ \frac{m}{n}X \\ -\frac{r}{s}V \\ \frac{r}{s}Z \end{pmatrix}$$

et

$$F_1(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ F(t, A, B, C, D) \\ 0 \\ F(t, A, B, C, D) \end{pmatrix}$$

Nous étudierons les solutions périodiques du système (2.15) dans notre cas, c'est-à-dire les solutions périodiques du système (3.16) avec $\varepsilon = 0$. Ces solutions périodiques sont

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \\ V(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos(\frac{m}{n}t) - Y_0 \sin(\frac{m}{n}t) \\ Y_0 \cos(\frac{m}{n}t) + X_0 \sin(\frac{m}{n}t) \\ Z_0 \cos(\frac{r}{s}t) - V_0 \sin(\frac{r}{s}t) \\ Z_0 \cos(\frac{r}{s}t) + V_0 \sin(\frac{r}{s}t) \end{pmatrix}$$

Cet ensemble d'orbites périodiques a la dimension quatre, toutes ayant la même période $2\pi k$, où k est défini dans l'énoncé du Théorème 3.3. Pour rechercher les solutions périodiques de notre équation.(3.2) il faut calculer les zéros $\mathbf{z} = (X_0, Y_0, Z_0, V_0)$ du système $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$, où $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ est donné par (2.18)La matrice fondamentale $M(t)$ du système différentiel (3.16) avec $\varepsilon = 0$ le long de toute solution périodique est

$$M(t) = M_z(t) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{m}{n}t) & -\sin(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ \sin(\frac{m}{n}t) & \cos(\frac{m}{n}t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\frac{r}{s}t) & -\sin(\frac{r}{s}t) \\ 0 & 0 & \sin(\frac{r}{s}t) & \cos(\frac{r}{s}t) \end{pmatrix}$$

En calculant maintenant la fonction $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ donnée dans (2.18), nous trouvons que le système $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ peut s'écrire comme

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, V_0) \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, V_0) \\ \mathcal{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, V_0) \\ \mathcal{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, V_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

où

$$\mathcal{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, V_0) = \frac{1}{2k\pi} \int_0^{2k\pi} \cos(\frac{m}{n}t) F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt$$

$$\mathcal{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, V_0) = -\frac{1}{2k\pi} \int_0^{2k\pi} \sin(\frac{m}{n}t) F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt$$

$$\mathcal{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, V_0) = \frac{1}{2k\pi} \int_0^{2k\pi} \cos(\frac{r}{s}t) F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt$$

$$\mathcal{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, V_0) = -\frac{1}{2k\pi} \int_0^{2k\pi} \sin(\frac{r}{s}t) F(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) dt$$

avec $A(t), B(t), C(t)$ et $D(t)$ comme dans l'énoncé du théorème 3.3.

Les zéros $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, V_0^*)$ du système (3.14) par rapport aux variables X_0, Y_0, Z_0 et V_0 fournissent des orbites périodiques du système (3.16) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit s'ils sont simples, c'est-à-dire si

$$\det \left(\frac{\partial (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)}{\partial (X_0, Y_0, Z_0, V_0)} \Big|_{(X_0, Y_0, Z_0, V_0) - (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, V_0^*)} \right) \neq 0 \quad (3.18)$$

En remontant par le changement de variables, pour tout zéro simple $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, V_0^*)$ du système (3.14), on obtient une solution $2\pi k$ périodique $x(t)$ de l'équation différentielle (3.2) pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit telle que $x(t)$ tend vers la solution périodique

$$K \left[\frac{r}{s} \left(X_0^* \cos\left(\frac{m}{n}t\right) - Y_0^* \sin\left(\frac{m}{n}t\right) \right) - \frac{m}{n} \left(Z_0^* \cos\left(\frac{r}{s}t\right) - V_0^* \sin\left(\frac{r}{s}t\right) \right) \right]$$

de $\ddot{x} + q\ddot{x} + px = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, où K est défini dans l'énoncé du théorème 3.3. Notons que cette solution est périodique de période $2\pi k$. Ceci achève la preuve du théorème 3.3.

Corollaire 3.3. Si $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) = (1 - x^2) \sin(t) + z$, alors l'équation différentielle (3.2) avec $p = \frac{1}{36}$ et $q = \frac{13}{36}$ a trois solutions périodiques $x_1(t, \varepsilon)$, tendant vers la solution périodique

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{2}{9} \sin \frac{1}{3}t - \frac{2}{9} \sqrt{3} \cos \frac{1}{3}t \\ x_2(t) &= \frac{2}{9} \sin \frac{1}{3}t \\ x_3(t) &= -\frac{2}{9} \sin \frac{1}{3}t + \frac{2}{9} \sqrt{3} \cos \frac{1}{3}t \end{aligned}$$

de $\ddot{x} + \frac{13}{36}\ddot{x} + \frac{1}{36}x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve du Corollaire 3.3. Nous avons l'équation

$$\ddot{x} + \frac{13}{36}\ddot{x} + \frac{1}{36}x = (1 - x^2) \sin(t) + \ddot{x}$$

qui correspond au cas $p = \frac{1}{36}$ et $q = \frac{13}{36}$ et $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) = (1 - x^2) \sin(t) + z$. Nous obtenons $m = 1, n = 2, r = 1, s = 3$. les fonctions $\mathcal{F}_l = \mathcal{F}_l(X_0, Y_0, Z_0, V_0)$ pour $l = 1, 2, 3, 4$ du théorème 3.3 sont

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= -\frac{9}{5}X_0 \\ \mathcal{F}_2 &= -\frac{9}{5}Y_0 \\ \mathcal{F}_3 &= \frac{1}{15}Z_0 \left(18 + \frac{8748}{5}V_0 \right) \\ \mathcal{F}_4 &= \frac{1}{15} \left(18V_0 - \frac{4374}{5}V_0^2 + \frac{4374}{5}Z_0^2 \right)\end{aligned}$$

Le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_4 = 0$ a les trois solutions $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, V_0^*)$ donnés par $(0, 0, \frac{5}{486}\sqrt{3}, -\frac{5}{486})$, $(0, 0, 0, \frac{5}{243})$, $(0, 0, -\frac{5}{486}\sqrt{3}, -\frac{5}{486})$.

Comme le jacobien

$$\det \left(\frac{\partial (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)}{\partial (X_0, Y_0, Z_0, V_0)} \Big|_{(X_0, Y_0, Z_0, V_0) = (X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, V_0^*)} \right)$$

pour ces trois solutions $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, V_0^*)$ est $-\frac{8748}{625}$, on obtient respectivement par le théorème 3.3 les trois solutions données dans l'énoncé du corollaire.

3.3 Etude de l'équation $\ddot{x} + q\ddot{x} + px = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$

Soit l'équation (3.3) on a le théorème suivant :

Théorème 3.4. Pour tout zéro simple positif r_0^* de la fonction

$$F(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2} \sin \theta}{\sqrt{q + \sqrt{q^2 - 4p}}} F(A, B, C, D) d\theta$$

où

$$A = \frac{\sqrt{-q + \sqrt{q^2 - 4p}}}{\sqrt{2p(4p - q^2)}} r_0 \cos \theta$$

$$B = -\frac{1}{\sqrt{q^2 - 4p}} r_0 \sin \theta$$

$$C = -\frac{q + \sqrt{q^2 - 4p}}{\sqrt{2(q^2 - 4p)}} r_0 \cos \theta$$

$$D = \frac{q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2\sqrt{q^2 - 4p}} r_0 \sin \theta$$

l'équation différentielle (3.3) admet une solution périodique $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ tendant vers la solution périodique

$$x(t) = \frac{\sqrt{2}r_0^*}{\sqrt{(q^2 - 4p)}\sqrt{q + \sqrt{q^2 - 4p}}} \cos\left(\sqrt{\frac{q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2}}t\right)$$

de $\ddot{x} + q\ddot{x} - px = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve du Théorème 3.4.

En introduisant les variables $(x, y, z, v) = (x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x})$ nous écrivons l'équation différentielle (3.3) du quatrième ordre comme un système différentiel de premier ordre défini dans un sous-ensemble ouvert Ω de \mathbb{R}^4 . On a donc le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = v \\ \dot{v} = -px - qz + \varepsilon F(x, y, z, v) \end{cases} \quad (3.19)$$

Les valeurs propres du système non perturbé sont $\pm\sqrt{\frac{q+\sqrt{q^2-4p}}{2}}i, \pm\sqrt{\frac{-q+\sqrt{q^2-4p}}{2}}$, Ecrivons le système (3.19) de manière que la partie linéaire à l'origine sera sous la forme normale réelle de Jordan.

En faisant le changement de variable $(X, Y, Z, V)^T = B(x, y, z, v)^T \Rightarrow (x, y, z, v)^T = B^{-1}(X, Y, Z, V)^T$ telle que B est la matrice de changement de variables, avec la forme normale réelle de Jordan est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\frac{q+\sqrt{q^2-4p}}{2}} & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{q+\sqrt{q^2-4p}}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{-q+\sqrt{q^2-4p}}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{-q+\sqrt{q^2-4p}}{2}} \end{pmatrix}.$$

On a

$$A = B^{-1}JB \Rightarrow BA - JB = 0$$

on trouve donc

$$B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \frac{p}{\sqrt{q+\sqrt{q^2-4p}}} & 0 & -\sqrt{\frac{q+\sqrt{q^2-4p}}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{-q+\sqrt{q^2-4p}}{2} & 0 & 1 \\ -\sqrt{2} \frac{p}{\sqrt{\sqrt{q^2-4p}-q}} & -\frac{q+\sqrt{q^2-4p}}{2} & \sqrt{\frac{-q+\sqrt{q^2-4p}}{2}} & 1 \\ \sqrt{2} \frac{p}{\sqrt{\sqrt{q^2-4p}-q}} & -\frac{q+\sqrt{q^2-4p}}{2} & -\sqrt{\frac{-q+\sqrt{q^2-4p}}{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \frac{p}{\sqrt{q+\sqrt{q^2-4p}}} & 0 & -\sqrt{\frac{q+\sqrt{q^2-4p}}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{-q+\sqrt{q^2-4p}}{2} & 0 & 1 \\ -\sqrt{2} \frac{p}{\sqrt{\sqrt{q^2-4p}-q}} & -\frac{q+\sqrt{q^2-4p}}{2} & \sqrt{\frac{-q+\sqrt{q^2-4p}}{2}} & 1 \\ \sqrt{2} \frac{p}{\sqrt{\sqrt{q^2-4p}-q}} & -\frac{q+\sqrt{q^2-4p}}{2} & -\sqrt{\frac{-q+\sqrt{q^2-4p}}{2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix}$$

Le nouveau système est

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sqrt{\frac{q+\sqrt{q^2-4p}}{2}} Y \\ \dot{Y} = \sqrt{\frac{q+\sqrt{q^2-4p}}{2}} X + \varepsilon G(X, Y, Z, V) \\ \dot{Z} = \sqrt{\frac{-q+\sqrt{q^2-4p}}{2}} Z + \varepsilon G(X, Y, Z, V) \\ \dot{V} = -\sqrt{\frac{-q+\sqrt{q^2-4p}}{2}} V + \varepsilon G(X, Y, Z, V) \end{cases} \quad (3.20)$$

où $G(X, Y, Z, V) = F(A, B, C, D)$ avec

$$A = -\frac{1}{2\sqrt{2p(4p-q^2)}} \left((V - Z) \sqrt{q + \sqrt{q^2 - 4p}} - 2X \sqrt{-q + \sqrt{q^2 - 4p}} \right)$$

$$B = -\frac{1}{2\sqrt{q^2-4p}} (2Y - Z - V)$$

$$C = \frac{1}{2\sqrt{2(q^2-4p)}} \left((Z - V) \sqrt{-q + \sqrt{q^2 - 4p}} - 2X (q + \sqrt{q^2 - 4p}) \right)$$

$$D = \frac{1}{4\sqrt{q^2-4p}} \left((Z + V) (-q + \sqrt{q^2 - 4p}) + 2Y (q + \sqrt{q^2 - 4p}) \right)$$

Remarquons que la partie linéaire du système différentiel (3.20) à l'origine est dans sa forme normale réelle de Jordan.

Passons maintenant des variables cartésiennes (X, Y, Z, V) aux cylindriques (r, θ, Z, V) de \mathbb{R}^4 , où $X = r \cos \theta$ et $Y = r \sin \theta$. Dans ces nouvelles variables, le système différentiel (3.20) peut s'écrire sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \sin \theta H(r, \theta, Z, V) \\ \dot{\theta} = \sqrt{\frac{q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2}} + \varepsilon \frac{\cos \theta}{r} H(r, \theta, Z, V) \\ \dot{Z} = \sqrt{\frac{\sqrt{q^2 - 4p} - q}{2}} Z + \varepsilon H(r, \theta, Z, V) \\ \dot{V} = -\sqrt{\frac{\sqrt{q^2 - 4p} - q}{2}} V + \varepsilon H(r, \theta, Z, V) \end{cases} \quad (3.21)$$

où $H(r, \theta, Z, V) = F(a, b, c, d)$ avec

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{2\sqrt{2p(4p-q^2)}} \left((V - Z) \sqrt{q + \sqrt{q^2 - 4p}} - 2\sqrt{-q + \sqrt{q^2 - 4p}} r \cos \theta \right) \\ b &= -\frac{1}{2\sqrt{q^2 - 4p}} (2 \sin \theta - Z - V) \\ c &= \frac{1}{2\sqrt{2(q^2 - 4p)}} \left((Z - V) \sqrt{-q + \sqrt{q^2 - 4p}} - 2r \cos \theta (q + \sqrt{q^2 - 4p}) \right) \\ d &= \frac{1}{4\sqrt{q^2 - 4p}} \left((Z + V) (-q + \sqrt{q^2 - 4p}) + 2 \sin \theta (q + \sqrt{q^2 - 4p}) \right) \end{aligned}$$

Maintenant, nous changeons la variable indépendante de t à θ , le système différentiel (3.21) devient

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \sqrt{\frac{2}{q + \sqrt{q^2 - 4p}}} \sin \theta H(r, \theta, Z, V) + O(\varepsilon^2) \\ \frac{dZ}{d\theta} = \sqrt{\frac{\sqrt{q^2 - 4p} - q}{q + \sqrt{q^2 - 4p}}} Z + \varepsilon \frac{\sqrt{2} \left((q + \sqrt{q^2 - 4p}) r - \sqrt{\sqrt{q^2 - 4p} - q} \sqrt{q + \sqrt{q^2 - 4p}} Z \cos \theta \right)}{(q + \sqrt{q^2 - 4p})^{\frac{3}{2}} r} H(r, \theta, Z, V) + O(\varepsilon^2) \\ \frac{dV}{d\theta} = -\sqrt{\frac{\sqrt{q^2 - 4p} - q}{q + \sqrt{q^2 - 4p}}} V + \varepsilon \frac{\sqrt{2} \left((q + \sqrt{q^2 - 4p}) r + \sqrt{\sqrt{q^2 - 4p} - q} \sqrt{q + \sqrt{q^2 - 4p}} V \cos \theta \right)}{(q + \sqrt{q^2 - 4p})^{\frac{3}{2}} r} H(r, \theta, Z, V) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (3.22)$$

Dans la suite, on va appliquer le théorème 2.1 au système différentiel (3.22). Notons que le système (3.22) peut être écrit comme le système (2.14) en prenant

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \\ Z \\ V \end{pmatrix}, \quad t = \theta \quad F_0(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{\sqrt{q^2 - 4p} - q}{q + \sqrt{q^2 - 4p}}} Z \\ -\sqrt{\frac{\sqrt{q^2 - 4p} - q}{q + \sqrt{q^2 - 4p}}} V \end{pmatrix}$$

et

$$F_1(\theta, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\frac{2}{q+\sqrt{q^2-4p}}} \sin \theta H}{\frac{\sqrt{2} \left((q+\sqrt{q^2-4p})r - \sqrt{\sqrt{q^2-4p}-q} \sqrt{q+\sqrt{q^2-4p}} Z \cos \theta \right)}{(q+\sqrt{q^2-4p})^{\frac{3}{2}} r}} H \\ \frac{\sqrt{2} \left((q+\sqrt{q^2-4p})r + \sqrt{\sqrt{q^2-4p}-q} \sqrt{q+\sqrt{q^2-4p}} V \cos \theta \right)}{(q+\sqrt{q^2-4p})^{\frac{3}{2}} r}} H \end{pmatrix}$$

Nous étudierons les solutions périodiques du système non perturbé (3.22) avec $\varepsilon = 0$. Il est clair que ces solutions périodiques sont $(r(\theta), Z(\theta), V(\theta)) = (r_0, 0, 0)$, pour tout $r_0 > 0$. Bien sûr toutes ces solutions périodiques dans les coordonnées (r, Z, V) ont une période 2π en la variable θ .

Nous allons décrire les différents éléments qui apparaissent dans l'énoncé du théorème 2.2 dans le cas particulier du système différentiel (3.22), ainsi nous avons que $k = 1$ et $n = 3$. Soit $r_1 > 0$ arbitrairement petit et soit $r_2 > 0$ arbitrairement grand. Ensuite, nous prenons le sous-ensemble borné ouvert \mathbf{V} de \mathbb{R} comme $\mathbf{V} =]r_1, r_2[$, $\alpha = r_0$ et $\beta : [r_1, r_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini comme $\beta(r_0) = (0, 0)$. l'ensemble \mathbf{Z} est

$$\mathbf{Z} = \{z_\alpha = (r_0, 0, 0), r_0 \in [r_1, r_2]\}$$

Clairement pour chaque $z_\alpha \in \mathbf{Z}$ on peut considérer que la solution $\mathbf{x}(t) = z_\alpha = (r_0, 0, 0)$ est 2π -périodique.

En calculant la matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(t)$ du système différentiel linéaire (3.20) avec $\varepsilon \rightarrow 0$ associé à la solution 2π -périodique $z_\alpha = (r_0, 0, 0)$ telle que $M_{z_\alpha}(0)$ soit l'identité de \mathbb{R}^3 , on obtient

$$M(t) = M_{z_\alpha}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{\frac{\sqrt{q^2-4p}-q}{q+\sqrt{q^2-4p}}} \theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\sqrt{\frac{\sqrt{q^2-4p}-q}{q+\sqrt{q^2-4p}}} \theta} \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-\sqrt{\frac{\sqrt{q^2-4p}-q}{q+\sqrt{q^2-4p}}}2\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{\sqrt{\frac{\sqrt{q^2-4p}-q}{q+\sqrt{q^2-4p}}}2\pi} \end{pmatrix}$$

qui satisfait les hypothèses de l'énoncé (ii) du théorème (2.2), que nous pouvons donc l'appliquer au système (3.22).

Or $\xi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est $\xi(r, Z, V) = r$. On calcule la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(r_0) &= \mathcal{F}(\alpha) = \xi \left(\frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) \mathcal{F}_1(t, X(t, z_\alpha)) dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2} \sin \theta}{\sqrt{q + \sqrt{q^2 - 4p}}} \mathcal{F}(A, B, C, D) \end{aligned}$$

où les expressions de A, B, C et D sont celles données dans l'énoncé du Théorème 3.4. Alors, par le Théorème (2.1) on a que pour tout zéro simple $r_0^* \in [r_1, r_2]$ de la fonction $\mathcal{F}(r_0)$ on a une solution périodique $(r, Z, V)(\theta, \varepsilon)$ du système (3.22) telle que

$$(r, Z, V)(\theta, \varepsilon) \rightarrow (r_0, 0, 0) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

posons $\varepsilon = 0$ dans le système (3.21) on obtient $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{q+\sqrt{q^2-4p}}{2}} \Rightarrow \theta = \sqrt{\frac{q+\sqrt{q^2-4p}}{2}} t$

Alors, on a une solution périodique $(r, \theta, Z, V)(t, \varepsilon)$ du système (2.21) telle que

$$(r, \theta, Z, V)(t, \varepsilon) \rightarrow \left(r_0^*, \sqrt{\frac{q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2}} t, 0, 0 \right) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

Par conséquent on obtient une solution périodique $(X, Y, Z, V)(t, \varepsilon)$ du système (3.20) telle que

$$(X, Y, Z, V)(t, \varepsilon) \rightarrow \left(r_0^* \cos \sqrt{\frac{q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2}} t, r_0^* \sin \sqrt{\frac{q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2}} t, 0, 0 \right)$$

De plus, comme

$$x = -\frac{1}{2\sqrt{2p(4p-q^2)}} \left((V-Z) \sqrt{q + \sqrt{q^2 - 4p}} - 2X \sqrt{-q + \sqrt{q^2 - 4p}} \right)$$

on a une solution périodique $(x, y, z, v)(t, \varepsilon)$ du système (3.18) telle que

$$x(t, \varepsilon) \rightarrow \frac{\sqrt{2}r_0^*}{\sqrt{(q^2 - 4p)}\sqrt{q + \sqrt{q^2 - 4p}}} \cos\left(\sqrt{\frac{q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2}}t\right).$$

Corollaire 3.4. On pose $F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}) = (\ddot{x})^4 + (\dot{x})^3 - (\ddot{x})^2 - x\dot{x} + \ddot{x} - 1$, pour $q = 2$ et $p = -\frac{1}{2}$ alors l'équation différentielle (3.3) admet une solution périodique $x(t, \varepsilon)$

$$x(t) = \frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} \cos\left(\frac{1}{2}(2 + \sqrt{6})t\right)$$

de $\ddot{x} + 2\ddot{x} - \frac{1}{2}x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$

Preuve du Corollaire 3.4. L'équation (3.3) prend la forme

$$\ddot{x} + 2\ddot{x} - \frac{1}{2}x = (\ddot{x})^4 + (\dot{x})^3 - (\ddot{x})^2 - x\dot{x} + \ddot{x} - 1,$$

alors la fonction $\mathcal{F}(r_0)$ de l'énoncé du théorème 3.4 est

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{48} \frac{r_0 (8\sqrt{3} + 12\sqrt{2} - r_0^2\sqrt{3})}{\sqrt{2 + \sqrt{6}}}$$

La fonction $\mathcal{F}(r_0)$ possède une racine réelle

$$r_0 = \frac{2}{3}\sqrt{\sqrt{3}(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})}$$

On a aussi

$$df(r_0) = \frac{1}{6} \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{2 + \sqrt{6}}} \neq 0$$

Alors d'après le théorème 3.4 l'équation $\ddot{x} + 2\ddot{x} - \frac{1}{2}x = (\ddot{x})^4 + (\dot{x})^3 - (\ddot{x})^2 - x\dot{x} + \ddot{x} - 1$ possède un cycle limite $x_\varepsilon(t)$ qui tend vers la solution $x(t)$ de l'énoncé du corollaire.

Concluion

Dans ce mémoire, on a appliqué la méthode de moyennisation du premier ordre à la recherche des cycles limites de trois classes d'équations différentielles ordinaires du quatrième ordre.

La méthode de les moyennisation nous a permis d'obtenir des conditions suffisantes de l'existence des cycles limites en transformant le problème de la recherche des cycles limites d'un système différentiel en un problème algébrique de la recherche des racines non dégénérées d'un système non linéaire, et donne une condition suffisante pour l'existence des cycles limites.

Cette méthode donne de bons résultats pour certaines classes d'équations différentielles ordinaires, mais elle ne donne pas toute les solutions périodiques de l'EDO.

Bibliographie

- [1] A. Buica, J.P Françoise and J. Llibre, Periodic solutions of non linear periodic differential systems with a small parameter, Comm. On Pure and Appl. Anal, 6 (2007), 103-111.
- [2] A. Cima, J. Llibre, and M. A Teixeira, Limit cycles of some polynomial differential system in dimension 2, 3 and 4 via averaging theory, Applicable Analysis, 87 (2008), 149-164.
- [3] H. Djebabla, Etude des cycles limites de certaines classes d'EDO du quatrième ordre, Mémoire Master en Math, Université 8 Mai 1945 Guelma, 2021
- [4] S.Gouaidia, B. Kaidouchi, Cycles limites de quelques EDO d'ordre supérieur via la méthode de moyennisation, Mémoire Master en Math, Université 8 Mai 1945 Guelma, 2021
- [5] M.Hamamda, cycles Limites d'une classe des équations différentielles du troisième ordre, Année 2015-2016.
- [6] J.Libre, M.Antonio Teixeira, Limit cycles bifurcating from a two-dimensional isochorous cylinder. Applied Mathematics letters 22 (2009) 1231-1234.
- [7] J.Libre, M.Antonio Teixeira, On the periodic orbits of the fourth-order differential equation $u'''' + qu'' - u = \varepsilon F(u, u', u'', u''')$, J. Math. Anal. Appl, 387 (2012) 181-188.
- [8] J Llibre, A Makhlof, Limit cycles for fourth order autonomous differential equations, vol. 2012 (2012), No. 22, pp. 1-17.

- [9] J. Llibre and A. Makhlouf, On the limit cycles for a class of fourth-order differential equations, *J. Phys. A : Math. Theor*, 45,(2012) 055214,(16pp).
- [10] J. Llibre and A. Makhlouf, Periodic orbits of the fourh-order non autonomous differential equation $u'''' + qu'' + pu = \varepsilon F(t, u, u', u'', u''')$, *Appl. Math & Comp* 219, 827-836, 2012.
- [11] J.Libre,L.Roberto.On the periodic orbits of the third-order differential equation.*Applied Mathematics letters* 26 (2013) 425-430.
- [12] J. Llibre, N. Sellami, and A. Makhlouf, Limit Cycles for a Class of Fourth-Order Differential Equations, *Applicable Analysis* 88 (12), (2009), 1617-1630.
- [13] J. Llibre, J. Yu, and X. Zhang, Limit Cycles for a Class of Third Order differential Equations, *Rocky Mountain J. Math.* 40 N 2 (2010), pp. 581-594.
- [14] I. G. Malkin, Some problems of the theory of nonlinear oscillations, (Russian) Gosudarstv. Izdat. Tehn-Teor. Lit, Moscow, 1956.
- [15] M. Roseau, Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité, (French) Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol 8. Springer-Verlag, Berlin New York, 1966
- [16] F.Touati,cycles limites d'une classe des équations différentielles du second ordre et de l'équation de duffing, Année 2014-2015
- [17] F. Vehrulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems* (Universitext) (Berlin : Springer). 1996.