République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par : Hassainia Chaima

Intitulé

Distribution de Lindley modifiée, propriétés et applications

Dirigé par : Dr. BENCHAABANE Abbes

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. SEKRANI Samia**	**MCA**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. BENCHAABANE Abbes**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. EZZEBSA Abdelali**	**MCA**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2023

ملخص

هذا المذكرة تهدف إلى دراسة توزيع ليندلي المعدل بمعلمة واحدة معدلة بوظيفة التكيف الأسي، والتي لا تعتمد سوى على معلمة وحيدة. يتم دراسة الخصائص الرئيسية للتوزيع، مع التركيز على معامل الثقة، والتوزيعات اللانهائية. ثم يتم النظر في النموذج الذي يترتب عليه هذا المعلمة. يتم تقدير المعلمة باستخدام طريقتي المتوسطات والمعقولية العظمى. ويتم تقديم تطبيقات عملية تظهر أن النموذج المقترح مناسب لتكييف هذه البيانات

ABSTRACT

This paper aims to study a modified Lindley distribution with a simple one-parameter defined using an exponential fitting function which depends on only one parameter. Its main properties are investigated, with emphasis on moments, reliability parameter and asymptotic distributions of extreme order statistics. Then, the associated parametric model is considered. Parameter estimation is performed using the method of moments and maximum likelihood. Practical applications are given, demonstrating that the proposed model is suitable for fitting such data

RÉSUMÉ

Ce mémoire consiste à étudier une distribution de Lindley modifiée à un paramètre simple définie avec une fonction d’ajustement exponentielle, ne dépendant qu'un seul paramètre. Ses principales propriétés sont étudiées, en mettant l'accent sur les moments, le paramètre de fiabilité et les distributions asymptotiques des statistiques d'ordre extrême. Ensuite, le modèle paramétrique associé est considéré. L'estimation du paramètre est réalisée via les méthodes des moments et du maximum de vraisemblance. Des applications pratiques sont données, montrant que le modèle proposé est adéquat pour ajuster ces données.

Remerciement

Je tiens à remercier tout d'abord mon directeur de recherches, monsieur BENCHAABANE ABBES, et surtout pour sa confiance, ses remarques et ses conseils, sa disponibilité et sa bienveillance.

Qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde de gratitude.

Je voudrais également remercier les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer ce travail et pour toutes leurs remarques et critiques.

Merci à vous tous

Dédicace

J'ai le grand plaisir de dédier ce modeste travail :

A ma très chère mère, qui me donne toujours l'espoir de vivre et qui n'a jamais cessé de prier pour moi.

A mon très cher père, pour ses encouragements, son soutien, surtout pour son amour et son sacrifice afin que rien n'entrave le déroulement de mes études.

A ma chère tante, qui m'a beaucoup aidée et m'a encouragée à arriver au bout.

A mon très proche ami qui a toujours était à mes côtés.

Chaima

Table des matières

Introduction

Dans de nombreuses sciences appliquées telles que la médecine, l'ingénierie et la finance, entre autres, la modélisation et l'analyse des données de durée de vie sont cruciales. Plusieurs distributions de durée de vie ont été utilisées pour modéliser ce type de données. La qualité des procédures utilisées dans une analyse statistique dépend fortement du modèle de probabilité ou des distributions supposés. Pour cette raison, des efforts considérables ont été déployés dans le développement de grandes classes de distributions de probabilité standard ainsi que de méthodologies statistiques pertinentes. Cependant, il existe encore de nombreux problèmes importants où les données réelles ne suivent aucun des modèles de probabilité classiques ou standard.

La distribution exponentielle traditionnelle est souvent utilisée dans plusieurs domaines de la statistique. Les modèles exponentiels et apparentés ont été utilisés dans de nombreuses applications pour résoudre différents types de problèmes provenant de nombreux domaines. Mais ces résultats n'ont parfois pas atteint la précision requise. Cela a conduit au développement de quelques nouvelles distributions alternatives, telles que la distribution de Lindley proposée par Lindley (1958) et Lindley (1965). Elle a été utilisée pour analyser de nombreuses données de durée de vie, en particulier dans les applications de modélisation de la fiabilité de résistance au stress.

Cependant, la distribution de Lindley présente certaines limitations pour l'analyse précise de diverses données de durée de vie. Les chercheurs se sont donc concentrés sur la recherche de nouvelles distributions qui, dans un sens, améliorent la distribution de Lindley en utilisant différentes approches.

Dans ce mémoire, nous présentons d'abord une famille générale de distributions de Lindley modifiées. Elle est basée sur l'utilisation d'une nouvelle fonction de réglage qui vise à moduler le terme polynomial dans la définition de la fonction de répartition cumulée donnée, offrant ainsi une nouvelle alternative aux techniques de pondération ou de composition standard. Parmi autres choses, cette modification vise à opérer un compromis entre les distributions exponentielle et Lindley, ce qui ne peut pas être atteint par la distribution de Lindley précédente et la plupart des dérivations existantes dans la littérature. Ensuite, nous nous concentrons sur une distribution de Lindley modifiée à un paramètre simple définie avec une fonction de réglage exponentielle, ne dépendant qu'un seul paramètre. Ses principales propriétés sont étudiées, en mettant l'accent sur les moments, le paramètre de fiabilité et les distributions asymptotiques des statistiques d'ordre extrême. Ensuite, le modèle paramétrique associé est considéré. L'estimation du paramètre est réalisée via les méthodes des moments et du maximum de vraisemblance. Des applications pratiques sont données, montrant que le modèle proposé est adéquat pour ajuster ces données. Nous ne prétendons pas que le nouveau modèle est toujours préférable aux modèles exponentiels ou de Lindley, mais il fournit une alternative simple qui peut donner satisfaction au statisticien dans certaines situations.

Le mémoire est organisé de la manièire suivante. La section 2 présente une nouvelle famille générale de distributions de Lindley modifiées. Une distribution spéciale à un paramètre est dérivée dans la section 3, avec l'étude de ses principales propriétés. Ensuite, l'estimation du paramètre est discutée dans la section 4. Les applications sont développées dans la section 5. Quelques remarques finales sont données dans la section 6.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

1.1 Généralités

Soit X une variable aléatoire continue, c'est à dire prend ses valeurs sur un ensemble infini non dénombrable de points, elle décrit, par exemple la durée de vie d'une batterie de voiture, ou bien d'heure d'arrive des voitures à un péage donnée d'autoroute. Nous donnons des fonctions qui caractérisent la variable aléatoire X.

1.1.1 Fonction de répartition et densité :

La fonction de répartition de la variable aléatoire réelle X est l'application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \mathbb{P}(X < x) \ ;$$

elle permet de traiter tous les problèmes faisant intervenir une seule variable aléatoire X. La probabilité de tout intervalle de $\mathbb{R}$ est égale à :

$$\mathbb{P}(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

La fonction de densité (de probabilité) de la variable aléatoire réelle X est l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

Nous avons vue que la fonction de densité est une dérivée de la fonction de répartition alors on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx,$$

et on peut trouver la probabilité de tout intervalle de comme $\mathbb{R}$ suit :

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

1.2 Moments d'une variable aléatoire

Maintenant nous donnons les moments puisque nous les besoins dans le dernier chapitre.

1.2.1 Espérance

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X, définie sur l'espace probabilisé $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \mathbb{P})$, est donnée par l'intégrale :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)dx.$$

$\mathbb{E}(X)$ est le moment d'ordre 1.

1.2.2 Moments d'ordre supérieur d'une variable aléatoire

L'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ est le moment d'ordre 1 de la distribution, il apporte peu de renseignements sur cette variable. Les moments d'ordre supérieur à 1 (moments d'inertie) donnent des indications sur l'étalement de la distribution

Définition 1 *Le moment d'ordre k de la variable aléatoire X , par rapport au point a, est donné par l'intégrale, si cette intégrale et la densité f existent :*

$$\mathbb{E}((X-a)^k) = \int_{\mathbb{R}} (x-a)^k f(x)dx.$$

On note, en général, m_k les moments $\mathbb{E}(X^k)$, c'est à dire :

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)dx.$$

Les moments les plus utilisés sont :

1. Les moments autour de $a = \mathbb{E}(X)$, appelés *moments centrés*, et notés μ_k en général, c'est à dire :

$$\mu_k = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^k]$$

2. Le moment centré d'ordre 2 ou *variance,* est donnée par l'intégrale si cette intégrale et la densité f existent :

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)dx. \end{aligned}$$

1.3 Les lois de probabilité usuelles

La plupart des problèmes rencontrés au statistiques peuvent se résoudre à l'aide de quelque lois fondamentales continues, environs une dizaine, et les principales qui nous intéresse dans ce travail sont :

1.3.1 Loi exponentielle

Une variable aléatoire réelle positive X suit une loi exponentielle, de paramètre λ positif, si sa **densité de probabilité** est donnée par :

$$\begin{cases} f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad si \quad x \geq 0 \\ \\ f(x) = 0 \qquad sinon \end{cases}$$

X est appelée variable exponentielle.

1. Sa **fonction de répartition :**

$$\begin{aligned} F(a) &= \mathbb{P}(X < a) \\ &= \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - \exp(-\lambda a). \end{aligned}$$

2. **Les moments** sont données par : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda} \qquad Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

1.3.2 Loi gamma

Une variable aléatoire réelle positive X suit une loi gamma $\Gamma(t; \lambda)$, de paramètres positifs t et λ, si sa **densité de probabilité** est donnée par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{t-1}}{\Gamma(t)} \quad si \quad x \geq 0 \\ \\ f(x) = 0 \qquad sinon \end{cases}$$

Γ est la fonction *eulérienne* définie par l'intégrale pour $t > 0$:

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{t-1} dy$$

et la fonction Gamma satisfait aux relations suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \Gamma(t+1) = t\Gamma(t), \tag{1.1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \Gamma(n+1) = n!.$$

Par l'intégrations par parties et en utilisant les propriétés de la fonction Γ, on obtient :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{t}{\lambda} \quad , \quad Var(X) = \frac{t}{\lambda^2}$$

Remarque 2 *La loi exponentielle est un cas particulier de la famille des lois gamma, en effet, si en prend le paramètre* $t = 1$.

1.4 Les méthodes d'estimation

Passons nous à un aspect important de l'inférence statistique consiste à obtenir des estimations fiable des caractéristiques d'une population à partir d'un échantillon extrait de cette population c'est l'estimation et ces deux principales méthodes sont :

1.4.1 La méthode du maximum de vraisemblance (mv)

Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi de probabilité. La fonction de vraisemblance est définie par la forme suivante :

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i; \theta) & \text{si les } X_i \text{ sont discrètes} \\ \\ \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) & \text{si les } X_i \text{ sont continues} \end{cases}$$

L'estimation de maximum de vraisemblance de θ est la valeur $\hat{\theta}_n$ de θ qui rend maximale la fonction de vraisemblance $L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)$. L'estimateur de maximum de vraisemblance de θ est la variable aléatoire correspondante. Donc $\hat{\theta}_n$ sera en général calculé en maximisant la log-vraisemblance :

$$\hat{\theta}_n = \arg\max \ \log L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta).$$

Quand $\theta = (\theta_1, ..., \theta_d) \in \Theta$ et que toutes les dérivées partielles ci-dessous existent, $\hat{\theta}_n$ est solution du système d'équations appelées équations de vraisemblance :

$$\forall j \in \{1, ..., d\}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = 0,$$

$$o\grave{u} \qquad \frac{\partial^2}{\partial \theta_j^2} \log L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) < 0.$$

Dans ce cas, on le résout par des méthodes numériques, comme la méthode de Fisher Scoring.

1.4.2 La méthode des moments

C'est la méthode la plus naturelle, que nous avons déjà utilisée sans la formaliser. L'idée de base est d'estimer une espérance mathématique par une moyenne empirique, une variance par une variance empirique, etc...

Si le paramètre à estimer est l'espérance de la loi des X_i, alors on peut l'estimer par la moyenne empirique de l'échantillon. Autrement dit, si $\theta = \mathbb{E}(X)$, alors **l'estimateur** de θ **par la méthode des moments** (**EMM**) est :

$$\hat{\theta}_n = \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Plus généralement, pour $\theta \in \mathbb{R}$, si $\mathbb{E}(X) = \varphi(\theta)$, où φ est fonction inversible alors l'estimateur de θ par la méthode des moments est :

$$\hat{\theta}_n = \varphi^{-1}(\overline{X}_n).$$

De la même manière, on estime la variance de la loi des X_i par la variance empirique de l'échantillon :

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2.$$

Plus généralement, si la loi des X_i a deux paramètres θ_1 et θ_2 tels que :

$$(\mathbb{E}(X), Var(X)) = \varphi(\theta_1, \theta_2)$$

où φ est une fonction inversible, alors les estimateurs de θ_1 et θ_2 par la méthode des moments sont :

$$(\hat{\theta}_{1n}, \hat{\theta}_{2n}) = \varphi^{-1}(\overline{X}_n, S_n^2).$$

Ce principe peut naturellement se généraliser aux moments de tous ordres, centrés ou non centrés : $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^k]$ et $\mathbb{E}\left(X^k\right)$, $k \geq 1$.

Chapitre 2

Modèles de durée

Dans ce chapitre nous introduisons des autres objets qui caractérisent une distribution comme les fonctions de hasard, moyenne de vie résiduelle et survie conditionnelle, et après nous traitons les modèles de survie usuelles.

2.1 Représentation d'une distribution de survie

On considère une variable aléatoire T à valeurs dans $[0, +\infty[$, et on note dans la suite $F(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$ sa fonction de répartition (continue à droite). Lorsque la densité de T existe, on la notera :

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \lim_{h \to +\infty} \frac{\mathbb{P}(t \leq T \leq t+h)}{h}.$$

2.1.1 La fonction de survie

Définition 3 *La fonction de survie est par définition le complément à un de la fonction de répartition :*

$$S(t) = 1 - F(t) = \mathbb{P}(T > t)$$

S est donc une fonction décroissante telle que $S(0) = 1$ (si $\mathbb{P}(T = 0) = 0$ ce que nous supposerons) et $\lim_{t \to +\infty} S(t) = 0$. Si la durée moyenne de survie existe alors elle s'exprime simplement à l'aide de :

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty tdF(t) = -\int_0^\infty tdS(t) = -\int_0^\infty S(t)dt$$

2.1.2 Survie conditionnelle

On pose tout d'abord $S_u(t) = \mathbb{P}(T > u + t | T > u)$ la fonction de survie conditionnelle ; on s'intéresse donc à la survie d'un élément après un instant $u + t$, sachant qu'il a déjà fonctionné correctement jusqu'en u. En revenant à la définition de la probabilité conditionnelle on peut écrire :

$$S_u(t) = \mathbb{P}(T > u + t | T > u) = \frac{\mathbb{P}(T > u + t)}{\mathbb{P}(T > u)} = \frac{S(u + t)}{S(u)}.$$

La fonction de survie conditionnelle s'exprime donc simplement à l'aide de la fonction de survie.

2.1.3 La fonction de hasard

Définition 4 *La fonction de hasard (ou taux de panne, taux de défaillance, taux de décès, risque instantané, etc.) est par définition :*

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{S^{'}(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt}\ln S(t).$$

Il en résulte directement que la fonction de hasard détermine entièrement la loi de T et qu'on a la relation suivante :

$$S(t) = \exp(-\int_0^t h(s)ds).$$

On note en général $H(t) = \int_0^t h(s)ds$ la «**fonction de hasard cumulée**», qui est telle que $S(t) = \exp(-H(t))$ et qui est évidemment croissante. On utilise dans certains tests d'adéquation le fait que $H(T)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1. Cette propriété découle de :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H(T) &> x) = \mathbb{P}(H^{-1}(x)) \\ &= S(H^{-1}(x)) = \exp(-H(H^{-1}(x))) = \exp(-x). \end{aligned}$$

D'après la définition de la fonction de survie conditionnelle et la formule ci-dessus on obtient :

$$S_u(t) = \exp(-\int_u^{u+t} h(s)ds).$$

Cela revient à dire que la fonction de hasard de la survie conditionnelle au fait d'être en fonctionnement à la date u est $t \to h(u+t)$. On en déduit en particulier que la fonction de hasard est croissante si et seulement si la durée de vie résiduelle après u est stochastiquement décroissante comme fonction de u. C'est souvent la fonction de hasard qui est utilisée pour spécifier un modèle de durée. Elle a en effet une interprétation « physique » ; en utilisant la définition de la fonction de hasard et de la fonction de survie on peut écrire :

$$h(t) = \lim_{u \to 0} \frac{\mathbb{P}(t < T \leq t + u)}{uS(t)} = \lim_{u \to 0} \frac{\mathbb{P}(t < T \leq t + u | T > t)}{u}$$

ce qui signifie que pour de « petites » valeurs de u, $h(t)u$ est approximativement la probabilité que le composant tombe en panne entre t et $t+u$, sachant qu'il est en fonctionnement en t. En d'autres termes :

$$\mathbb{P}(t < T \leq T + dt | T > t) = h(t)dt.$$

2.2 Les lois paramétriques usuelles

On ne reprend ci-après que les modèles les plus courants ; d'une manière générale, toutes les distributions utilisées pour modéliser des variables positives (log-normale, Pareto, logistique, etc.) peuvent être utilisées dans des modèles de *survie.* Toute fois, la distribution de base des modèles paramétriques de durée est la distribution exponentielle, et ses diverses généralisations. Le choix du modèle détermine en particulier la forme de la fonction de hasard ; on distinguera notamment les modèles à fonction de hasard monotone des modèles permettant d'obtenir des fonctions de hasard « en cloche » ou en « U » ; ces derniers modèles sont peu usités en assurance, la situation de référence étant un taux de hasard croissant (au sens large) avec le temps.

2.2.1 Le modèle exponentiel

La spécification la plus simple consiste à poser $h(t) = \lambda$, avec $\lambda > 0$. On en déduit immédiatement que :

$$S(t) = e^{-\lambda t}.$$

Le modèle exponentiel est caractérisé par le fait que les fonctions de survie conditionnelles $\{S_u(.), u > 0\}$ sont exponentielles de même paramètre, $\lambda > 0$ cela signifie que le comportement de la variable aléatoire T après l'instant u de dépend pas de ce qui est survenu jusqu'en u. Il est également caractérisé par le fait que la fonction de survie est multiplicative, au sens où $S(u + t) = S(u)S(t)$. Ces propriétés découlent aisément de l'expression de la fonction de survie conditionnelle. On vérifie aisément par un calcul direct que $\mathbb{E}(T) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $Var(T) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

2.2.2 Le modèle de Weibull

On suppose ici que la fonction de hasard est de la forme :

$$h(t) = \lambda \alpha t^{\alpha - 1}, \qquad \alpha, \lambda > 0$$

λ est un paramètre d'échelle et α un paramètre de forme. Il s'agit d'une généralisation simple du modèle exponentiel, permettant d'obtenir des fonctions de hasard croissantes avec t si $\alpha > 1$ (il y a alors « **usure** ») et décroissantes avec t si $\alpha < 1$ (il y a « **rodage** »). Lorsque $\alpha = 2$ et $\lambda = \dfrac{1}{2}$ ce modèle porte le nom de « **modèle de RAYLEIGH** », il est utilisé en physique pour modéliser la durée de vie de certaines particules ou le bruit en sortie de certains récepteurs de transmissions. La distribution de T est alors la distribution de Weibull $W(\alpha, \lambda)$, dont la fonction de survie s'écrit $S(t) = e^{-\lambda t^{\alpha}}, t > 0$. On peut notamment remarquer que si la variable T est distribuée selon une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ alors $T^{\frac{1}{\alpha}}$ suit $W(\alpha, \lambda)$.

2.2.3 Le modèle Gamma

Le modèle Gamma est une autre généralisation naturelle du modèle exponentiel : supposons que la durée T_r soit la durée d'attente de la réalisation d'un service dans une file d'attente et que la file d'attente soit composée de r serveurs indépendants et identiques qui traitent chacun une partie du service (ils sont donc montés en série). On fait l'hypothèse que la durée de réalisation du traitement de chacun des serveurs est une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Alors la durée globale de service est la somme de r variables exponentielles de même paramètre on en déduit que la durée de service est distribuée selon une loi Gamma de paramètre (r, λ) :

$$S_r(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\lambda^r u^{r-1}}{(r-1)!} e^{\lambda u} du.$$

2.3 Les modèles composites

L'objet de cette section est de décrire les principales caractéristiques des modèles de base couramment utilisés dans un cadre paramétrique ou semi-paramétrique, et faisant appel à un degré de sophistication supérieur à la simple analyse fixée a priori. Il s'agit de modèles que l'on rencontre en général lorsque l'on est confronté à une population hétérogène, composées d'individus avec des lois de survie différentes ; on a donc choisi de désigner ces modèles sous le nom générique de « modèles composites », et ils diffèrent par la manière dont l'hétérogénéité est prise en compte. Les modèles purement non paramétriques seront étudiés par ailleurs ; ils ne sont pas évoqués ici.

2.3.1 Les mélanges de lois

On considère un système composé de deux éléments indépendants montés en parallèle, chacun des éléments ayant une durée de vie de loi exponentielle avec des paramètres $\lambda_1$et λ_2. La durée de vie de l'équipement est mesurée par $T = T_1 \vee T_2$; la loi de T s'obtient facilement en observant que $1 - S(t) = (1 - e^{-\lambda_1 t})(1 - e^{-\lambda_2 t})$. On en déduit que dans le cas général la fonction de hasard est d'abord croissante, puis décroissante ; si $\lambda_1 = \lambda_2$, la fonction de hasard est croissante. L'indépendance temporelle est donc une propriété peu stable et elle se perd rapidement. On va voir qu'elle se perd également dans le cas de l'agrégation de lois.

2.3.2 Agrégation de lois

Il arrive souvent en pratique que les durées que l'on observe résultent de l'agrégation de sous- populations ayant chacune un comportement spécifique, souvent inobservable. On parle alors d'hétérogénéité. On suppose ici que la fonction de survie dépend d'un paramètre aléatoire ν ce paramètre étant distribué selon une loi π. D'un point de vue heuristique, on se trouve en présence de sous- populations à l'intérieur desquelles la loi de survie est homogène et décrite par la loi de survie conditionnelle au fait que la valeur du paramètre soit $\nu, S(t, \nu)$, la loi π décrivant le poids respectif de chaque sous-population dans la population totale. On a donc la forme suivante pour la fonction de survie initiale de la population totale :

$$\begin{aligned} S(t) &= \int S(t,\nu)\pi(d\nu) \\ S(t) &= \mathbb{P}(T > t) = \mathbb{E}_\nu[\mathbb{P}(T > t|\nu)] = \int S(t,\nu)\pi(d\nu). \end{aligned}$$

La distribution d'hétérogénéité dépend *a* priori de t, puisque les individus des différentes sous- populations ne sortent pas du groupe à la même vitesse. A la date t, et en supposant la taille de la population infinie, on a ainsi :

$$\pi_t(d\nu) = \frac{S(t,\nu)}{S(t)}\pi(d\nu).$$

La fonction de hasard à la date t s'écrit alors :

$$h(t) = \int h(t,\nu)\pi_t(d\nu).$$

Chapitre 3

Une famille générale de distributions de Lindley modifiées

3.1 Distribution de Lindley d'un seul paramètre

D.V.Lindley a introduit une distribution d'un seul paramètre connue par la distribution de Lindley (DL) donnée par sa fonction de densité suivante :

$$f(x,\theta) = \frac{\theta^2}{\theta+1}(1+x)\,e^{-\theta x}; \qquad x>0, \theta>0 \tag{3.1}$$

La fonction de densité (3.1) est une mélange de deux distributions l'une exponentielle (θ) et l'autre gamma $(2,\theta)$ comme suit :

$$f(x,1,\theta) = pf_1(x) + (1-p)\,f_2(x)$$

où

$$p = \frac{\theta}{\theta+1}, f_1(x) = \theta e^{-\theta x}, f_2(x) = \theta^2 x e^{-\theta x}.$$

Il est simple de noté que cette fonction est une mélange de distribution exponentielle de paramètre (θ) et de distribution de gamma de paramètres $(2, \theta)$. Et sa fonction de répartition donnée par l'expression suivante :

$$F(x) = 1 - \frac{\theta + 1 + \theta x}{\theta + 1} e^{-\theta x}; \qquad x > 0, \theta > 0 \tag{3.2}$$

Les quatre premiers moments de DL d'un seul paramètre sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} \mu_1^{'} &= \frac{\theta + 2}{\theta\,(\theta + 1)}, \qquad \mu_2^{'} = \frac{2\,(\theta + 3)}{\theta^2\,(\theta + 1)} \\ \mu_3^{'} &= \frac{6(\theta + 4)}{\theta^3\,(\theta + 1)}, \qquad \mu_4^{'} = \frac{24(\theta + 5)}{\theta^4\,(\theta + 1)} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Et leurs moments centrés sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{\theta^2 + 4\theta + 2}{\theta^2\,(\theta + 1)^2} \\ \mu_3 &= \frac{2\left(\theta^3 + 6\theta^2 + 6\theta + 2\right)}{\theta^3\,(\theta + 1)^3} \\ \mu_4 &= \frac{3\left(3\theta^4 + 24\theta^3 + 44\theta^2 + 32\theta + 8\right)}{\theta^4\,(\theta + 1)^4} \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.2 La distribution de Lindley modifiée

Le résultat suivant présente une nouvelle fonction de distribution générale basée sur une modification de la fonction de distribution de Lindley en introduisant une fonction d'ajustement notée $w(x)$

Proposition 5 *Soit $w(x)$ une fonction définie sur $(0, +\infty)$ et $F(x)$la fonction définie par*

$$F(x) = 1 - \left[1 + \frac{\theta x}{1 + \theta} w(x)\right] \exp^{-\theta x}, x > 0, \tag{3.5}$$

(il est entendu que $F(x) = 0$ pour $x \leq 0$).Supposons que $w(x)$ satisfait les hypothèses suivantes

1. $w(x)$*est positive et différentiable sur* $(0, +\infty)$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} w(x)$ *existe*

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} w(x) \exp^{-\theta x} = 0$

4. $x(\theta w(x) - w^{'}(x)) + 1 - w(x) + \theta > 0$. *Alors,* $F(x)$ *possède les propriétés d'une fonction de répartition.*

Preuve. Il est clair que $F(x)$ est continue à droite et, grâce aux hypothèses sur $w(x)$,on a $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$. D'autre part, $F(x)$ est différentiable et nous avons

$$F^{'}(x) = \frac{\theta}{1+\theta}\left[x(\theta w(x) - w^{'}(x)) + 1 - w(x) + \theta\right]\exp^{-\theta x} > 0.$$

Ainsi, $F(x)$ est croissante. Nous en déduisons que $F(x)$ a les propriétés d'une fonction de répartition. ■

Nous introduisons une nouvelle famille générale de distributions de Lindley modifiées. Voici quelques notions de base et caractéristiques de cette famille générale. En différenciant $F(x)$, on obtient la fonction de densité de probabilité correspondante

$$f(x) = \frac{\theta}{1+\theta}\left[x\left(\theta w(x) - w^{'}(x)\right) + 1 - w(x) + \theta\right]\exp^{-\theta x} \qquad , x > 0.$$

La fonction de hazard de risque correspondante est donnée par

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f(x)}{1 - F(x)} \\ &= -\theta\frac{xw^{'}(x) + w(x)}{1 + \theta + \theta x w(x)} + \theta, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Remarque 6 *1. Si* $w(x) = 0$, $F(x)$ *devient la fdr de la distribution exponentielle de paramètre* θ.

2. *Si $w(x) = 1$, $F(x)$ devient la fdr de la distribution de Lindley de paramètre θ.*

Remarque 7 *Le principal intérêt de l'expression $F(x)$ est que, si $w(x) \in (0, 1]$ nous avons les inégalités suivantes*

$$G(x) < F(x) \leq H(x),$$

où $G(x)$ est la fonction de répartition de la distribution de Lindley avec le paramètre θ et $H(x)$ est la fonction de répartition de la distribution exponentielle avec le paramètre θ. Ainsi, le modèle statistique lié à $F(x)$ est intermédiaire entre les modèles exponentiel et Lindley, avec différents objectifs potentiels.

Remarque 8 *La fdr $F(x)$, définie à l'aide d'une fonction polynomiale $w(x)$, correspond à la fdr existante dans la littérature. Par exemple,*

1. *En prenant*

$$w(x) = (1 + \theta)(\theta x + 2)/(\theta^2 + 2)$$

$F(x)$ correspond à la fdr de la distribution d'Akash.

2. *En prenant*

$$w(x) = (1 + \theta)(\theta x + \theta + 2)/(\theta^2 + \theta + 2)$$

$F(x)$ correspond ā la fdr de la distribution de sujatha.

3. *En prenant*

$$w(x) = (1 + \theta) [\theta x + 2 (\theta + 1)] / \left(\theta^2 + 2\theta + 2\right)$$

$F(x)$ correspond à la fdr de la distribution de lindley améliorée du second degré.

Remarque 9 *Les fonctions simples $w(x)$ sont celles telles que $w(x) \in [0, 1]$ et $w(x)$ est décroissante. Certains d'entre eux sont présentés ci dessous.*

- *Fonction exponentielle* :$w(x) = \exp^{-\lambda x}$ *avec* $\lambda > 0$,
- *Fonction fractionnaire* :$w(x) = (1 + x^{\lambda})^{-\beta}$ *avec* $\lambda, \beta > 0$,
- *Fonction fraction-exponentielle* :$w(x) = (1 - \exp^{-x})\left(1 + \exp^{-X}\right)^{-\lambda}$ *avec* $\lambda > 0$,
- *Produit des fonctions définies ci-dessus (par exemple,* $w(x) = (1+x^{\lambda})^{-\beta} \exp^{-\gamma x}$ ......)
- *Plus généralement, pour toute fdr* $K(x)$ *d'une distribution continue sur* $(0, +\infty), w(x) = 1 - k(x)$ *vérifie les hypothéses souhaitées .*

Dans la suite, nous étudierons un cas particulier simple de $F(x)$, défini avec une fonction exponentielle d'ajustement dépendant de θ.

3.2.1 Présentation

Nous concentrons notre attention sur la distribution de Lindley à un paramètre caractérisé par la fdr $F(x)$ donnée par (3.5) avec la fonction d'ajustement simple $w(x) = \exp^{-\theta x}$, $\theta > 0$, c'est-à-dire

$$F(x) = 1 - \left[1 + \frac{\theta x}{1+\theta} \exp^{-\theta x}\right] \exp^{-\theta x}, x > 0. \tag{3.6}$$

Cette distribution sera appelée distribution de Lindley modifiée (LM). Par différenciation de $F(x)$, la fdr correspondante est obtenue comme

$$f(x) = \frac{\theta}{1+\theta} \exp^{-2\theta x} \left[(1+\theta) \exp^{\theta x} + 2\theta x - 1\right], \quad x > 0.$$

La fonction de hazard correspondant est donné par

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{\theta\,(\theta x - 1)}{(1+\theta) \exp^{\theta x} + \theta x} + \theta, \quad x > 0.$$

Plusieurs remarques sur les fonctions LM sont présentées ci-dessous.

Remarque 10 *1. Puisque*

$$F^{''}(x) = -\left[\theta^2/(1+\theta)\right]\exp^{-2\theta x}\left[(1+\theta)\exp^{\theta x}+4(\theta x-1)\right] < 0, \quad \textit{pour } x > 1/\theta$$

la fonction $F(x)$ est concave selon x pour tout $\theta > 0$ et $x > 1/\theta$.

2. Il est immédiat que $f(0) = \theta^2/(1+\theta)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Le(s) mode(s) de la distribution LM est obtenu en résolvant l'équation $f^{'}(x) = 0$, c'est-à dire $(1+\theta)\exp^{\theta x}+4\theta x = 4$. Une brève étude analytique montre que la distribution LM est unimodale.

Remarque 11 *Un avantage de la définition de $f(x)$est que nous pouvons l'écrire comme une combinaison linéaire de fdp exponentielles et gamma comme*

$$f(x) = f_1(x) + a(f_2(x) - f_3(x)) \tag{3.7}$$

- *$f_1(x)$ est la fdp de la distribution exponentielle avec le paramètré θ,i.e.,$f_1(x) = \theta\exp^{-\theta x}, x > 0$.*
- *$f_2(x)$ est la fdp de la distribution gamma de paramétré $(2, 2\theta)$,i.e.,$f_2(x) = (2\theta)^2 x\exp^{-2\theta x}, x > 0$.*
- *$f_3(x)$ est la pdf de la distribution exponentielle de paramétre 2θ,i.e., $f_3(x) = 2\theta\exp^{-2\theta x}, x > 0$.*
- *$a = 1/\left[2(1+\theta)\right]$.*

Cette représentation sera utile pour déterminer les propriétés mathématiques de la distribution LM.

3.2.2 Moments

Soit X une variable aléatoire suivant la distribution LM, c'est-à-dire avec fdr donnée par (3.6). Introduisons tout d'abord la fonction gamma définie par $\tau(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} \exp^{-t} dt,\ x > 0$. En utilisant (3.7), pour toute fonction $\varphi(x)$, on a

$$\begin{aligned} E(\varphi(X)) &= \int_0^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(x) f_1(x) dx + a \left[\int_0^{+\infty} \varphi(x) f_2(x) dx - \int_0^{+\infty} \varphi(x) f_3(x) dx \right]. \end{aligned}$$

En particulier, en utilisant les propriétés bien connues de la fonction gamma, pour tout entier positif r, le $r^{éme}$ moment de X existe et il est déterminé par

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \int_0^{+\infty} x^r f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^r \theta \exp^{-\theta x} dx + \frac{1}{2(1+\theta)} \left[\int_0^{+\infty} x^r (2\theta)^2 x \exp^{-2\theta x} dx - \int_0^{+\infty} x^r (2\theta)^2 \exp^{-2\theta x} dx \right] \\ &= \frac{\tau(r+1)}{\theta^r} + \frac{1}{2(1+\theta)} \left[\frac{\tau(r+2)}{(2\theta)^r} - \frac{\tau(r+1)}{(2\theta)^r} \right] \\ &= \frac{1}{\theta^r} \left(1 + \frac{r}{2^{r+1}(1+\theta)} \right) r! \end{aligned}$$

En particulier, les quatre premiers moments de X sont donnés par

$$\begin{aligned} \mu &= E(X) = \frac{5+4\theta}{4\theta(1+\theta)},\ E(X^2) = \frac{5+4\theta}{2\theta^2(1+\theta)}, \\ E(X^3) &= \frac{3(19+16\theta)}{8\theta^3(1+\theta)},\ E(X^4) = \frac{3(9+8\theta)}{\theta^4(1+\theta)}. \end{aligned}$$

La variance de X peut être déduite comme

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{(3+4\theta)(5+4\theta)}{16\theta^2(1+\theta)^2}.$$

le r^{éme} moment central de X est donné par

$$E((X-\mu)^r) = \sum_{K=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^k \left(\frac{5+4\theta}{4\theta(1+\theta)} \right)^k \frac{1}{\theta^{r-k}} \left(1 + \frac{r-k}{2^{r-k+1}(1+\theta)} \right) (r-k)!.$$

Les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement de X sont respectivement définis par

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{1}{\sigma^3} E\left[(X-\mu)^3\right], \quad \beta_2 = \frac{1}{\sigma^4} E\left[(X-\mu)^4\right].$$

Le tableau 1 indique les valeurs numériques pour les quantités ci-dessus c'est-à-dire $\mu : E(X^2), E(X^3), E(X^4), \sigma^2, \sqrt{\beta_1}$et $\beta_2$pour les valeurs sélectionnées pour θ.

Tableau 1 : ***Valeurs numériques liées aux moments de la distribution ML pour certains valeurs sélectionnées du paramètre*** θ.

$\theta \rightarrow$	0.005	0.05	0.5	0.1	1	10	20
μ	249.7512	24.7619	12.27273	2.3333	1.125	0.1022	0.0510
$E(X^2)$	99900.5	990.4762	245.4545	9.3333	2.25	0.0205	0.00510
$E(X^3)$	56955224	56571.43	7022.727	54	6.5625	0.0061	0.0008
$E(X^4)$	43176119403	4297143	267272.7	416	25.5	0.0024	0.0002
σ^2	37524.81	377.3243	94.8347	3.8888	0.9844	0.0010	0.0025
$\sqrt[2]{\beta_1}$	2.4447	2.1530	1.8551	0.0580	1.5385	20.7620	40.8766
β_2	8.5175	8.4980	8.4819	8.4612	8.5132	8.8728	8.9311

3.3 Applications

Maintenant, trois applications sont proposées pour illustrer l'utilité de la distribution proposée. Plus précisément, nous explorons le comportement d'ajustement de la distribution LM par rapport à ceux des distributions de Lindley et exponentielles. A cet égard, nous estimons les paramètres inconnus des modèles correspondants par la méthode du maximum de vraisemblance, et considérons leur écart-type respectif (SE), la - log-vraisemblance estimée (-logL), les valeurs de l'AIC (Akaike Information Criterion) et BIC (Bayesian Information Criterion), les valeurs de la statistique de Kolmogorov-Smirnov (KS) et les p-values correspondantes.

Données 1 : Le premier jeu de données fait référence au temps entre les pannes pour articles réparables, il a été reçu de Murthy et al. (2004). Les données sont : 1,43, 0,11, 0,71, 0,77, 2,63, 1,49, 3,46, 2,46, 0,59, 0,74, 1,23, 0,94, 4,36, 0,40, 1,74, 4,73, 2,23, 0,42, 0,36, 1,46, 1,06, 1,06 2,37, 0,63, 1,23, 1,24, 1,97, 1,86, 1,17.

Données 2 : Le deuxième jeu de données contient 30 mesures de précipitations en mars à Minneapolis, l'unité étant le pouce. Cet ensemble de données est fourni par Hinkley (1977). Les données sont : 0,77, 1,74, 0,81, 1,2, 1,95, 1,2, 0,47, 1,43, 3,37, 2,2, 3, 3,09, 1,51, 2,1, 0,52, 1,62, 1,31, 0,32, 0,59, 0,81, 2,81, 1,18 1,35, 4,75, 2,48, 0,96, 1,89, 0,9, 2,05.

Données 3 : Le troisième jeu de données correspond aux durées de vie de rupture par fatigue de certains Kevlar 373/époxy qui sont soumis à une pression constante jusqu'à ce qu'ils soient tous rompus. Cet ensemble de données provient d'Andrews et Herzberg (1985) et de Barlow et al. (1984). The data are : 0.0251, 0.0886, 0.0891, 0.2501, 0.3113, 0.3451, 0.4763, 0.5650, 0.5671, 0.6566, 0.6748, 0.6751, 0.6753, 0.7696, 0.8375, 0.8391, 0.8425, 0.8645, 0.8851, 0.9113, 0.9120, 0.9836, 1.0483, 1.0596, 1.0773, 1.1733, 1.2570, 1.2766, 1.2985, 1.3211, 1.3503, 1.3551, 1.4595, 1.4880, 1.5728, 1.5733, 1.7083, 1.7263, 1.7460, 1.7630, 1.7746, 1.8275, 1.760, 1,730, 1.7746, 1,8275, 1.760, 1,7630, 1,7746, 1,8275, 1.760, 1,7630, 1,7746, 1,8275, 1,8375, 1,7630, 1,7746, 1.8275, 1,8375, 1,7630, 1,7746, 1.8275, 1,8375, 1,7630, 1,7746, 1,8275, 1,8370, 1,7630 1.9558, 2.0048, 2.0408, 2.0903, 2.1093, 2.1330, 2.2100, 2.2460, 2.2878, 2.3203, 2.3470, 2.3513, 2.4951, 2.5260, 2.9911, 3.0256, 3.2678, 3.4045, 3.4846, 3.7433, 3.7455, 3.9143, 4.8073, 2.3513, 2.4951, 2.5260, 2.9911, 3.0256, 3.2678, 3.4045, 3.4846, 3.7433, 3.7455, 3.9143, 4.8073,

3.3.1 Interprétation des paramètres

1. (a) Un AIC négatif indique que le modèle est meilleur que le modèle de référence ;
   (b) Un AIC positif indique que le modèle est moins bon que le modèle de référence ;
   (c) Une différence de deux points ou plus entre les valeurs d'AIC indique une différence significative entre les modèles.

   (a) Le BIC est similaire à l'AIC, mais prend en compte le nombre de données dans l'ajustement du modèle.
   (b) Le BIC pénalise les modéle qui ont plus de paramètres ou qui sont plus complexes
   (c) Un BIC plus faible indique un meilleur modèle.
   (d) Contrairement à l'AIC, le BIC fournit une mesure absolue de la qualité du modèle.
   (e) Le BIC peut être plus sévère que l'AIC dans sa pénalisation des modèle complexes.

   (a) KS la statistique de kolmogorov-smirnov est utilisée pour comparer deux distribution de probabilité
   (b) Pour interpréter les valeurs de KS, il est important de prendre en compte la taille de l'échantillon et le niveau de significativité choisi
   (c) Si la valeur de KS est inférieure au seuil de significativité, on ne peut pas rejeter l'hypothése nulle selon laquelle les deux distributions sont identiques
   (d) Si la valeurs de KS est supérieure au seuil de significativité, on peut rejeter l'hypothése nulle et conclure que les deux distribution sont différentes.
   (e) La valeur de KS ne fournit pas d'information sur la nature de la différence entre les distributions.

   (a) Le SE est une mesure statistique qui indique à quel point les données sont dispersées autour de la moyenne
   (b) Plus le SE est petit, plus les données sont regroupées autour de la moyenne et moins elles sont dispersées

(c) Le SE est souvent utilisé pour évaluer la précision d'une estimation statistique.et peut être influencé par des valeurs aberrantes ou des données manquantes, ce qui peut fausser les résultats.

(a) La vraisemblance estimée est une mesure de la probabilité qu'un modèle donné soit correct

(b) Elle est calculée en utilisant les données observées et les paramètres du modèle pour déterminer la probabilité que les données observées soient générées par ce modèle

(c) Elle estimée est souvent utilisée pour comparer différents modèles statistiques et déterminer lequel est le plus probable.

Tableu 2 : ***Valeurs estimées, statistiques –logL, AIC, BIC, KS et valeur de p pour l'ensemble de données1***

Distribution	Estimation (SE)	-logL	AIC	BIC	K-S statistique	ρ-valeur
LM	$\hat{\theta} = 0.7297$	40.7526	83.5051	84.9063	0.1113	0.851
Lindley	$\hat{\theta} = 0.9762$	41.5473	85.0947	86.4958	00.1407	0.592
exponentiel	$\hat{\theta} = 0.6482$	43.0054	88.0108	89.4120	0.1845	0.259

Tableu 3 : ***Valeurs estimées, statistiques –logL, AIC, BIC, KS et valeur de p pour l'ensemble de données 2***

Distribution	Estimation (SE)	-logL	AIC	BIC	K-S statistique	ρ-valeur
LM	$\hat{\theta} = 0.5858$	41.9449	85.8898	87.2910	0.1567	0.453
Lindley	$\hat{\theta} = 0.5858$	43.1437	88.2875	89.6886	0.18823	0.238
exponentiel	$\hat{\theta} = 0.5858$	45.4744	92.9488	94.3499	0.2352	0.072

Tableu 4 : ***Valeurs estimées, statistiques –logL, AIC, BIC, KS et valeur de p pour l'ensemble de données 3***

Distribution	Estimation (SE)	-logL	AIC	BIC	K-S statistique	ρ-valeur
LM	$\hat{\theta} = 0.5858$	122.0391	246.0782	248.408	0.0970	0.444
Lindley	$\hat{\theta} = 0.7948$	123.6751	249.3503	251.681	0.1156	0.242
exponentiel	$\hat{\theta} = 0.5104$	127.1143	256.228	258.559	0.1663	0.026

Les tableaux 2, 3 et 4 résument les résultats d'une étude descriptive pour les distributions LM, Lindley et exponentielles ajustées pour l'ensemble de données 1, l'ensemble de données 2 et l'ensemble de données 3, respectivement. Puisque la plus petite statistique -logL, AIC, BIC, KS et les valeurs p les plus élevées sont obtenues pour la distribution LM.Par conséquent, la distribution LM pourrait être choisie comme modèle recommandé en fonction de ces mesures. Il est clair que la distribution LM offre un meilleur ajustement que les distributions de Lindley et exponentielle.

3.4 Remarques finales et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons vu comment une distribution de probabilité peut être construite sans ajouter un autre paramètre ni en utilisant les techniques de généralisation habituelles. La distribution proposée est appelée la distribution LM. On peut observer que la distribution LM a diveres propriétés désirables. On a dérivé des expressions exactes et explicites pour de nombreuses caractéristiques, en particulier les moments, les paramètres de fiabilité et les distributions asymptotiques des statistiques d'ordre. Pour l'estimation du paramètre, On a utilisé la méthode des moments et de la méthode du maximum de vraisemblance. De plus, les distributions LM, Lindley et exponentielles ont été ajustées à trois ensembles de données réelles et les résultats ont montré que la distribution LM est un puissant concurrent à un paramètre.

Bibliographie

[1] *Olivier Gaudoin*. Notes de cours Principes et Méthodes Statistiques

[2] *Philippe SAINT PIERRE*. Introduction à l'analyse des durées de survie, février 2015

[3] *Chesneau Christophe*. "A new modified Lindley distribution with properties and applications.

[4] *Renée Veysseyre*. Statistique et Probabilités pour l'ingénieur. Dunod, Paris, 2001, 2006