

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

Melle HADDOUCHE Khawla

Intitulé

Integro-differential Volterra Equation with delay term

Dirigé par :

Dr. SEGNI Sami

Devant le jury

PRESIDENT

Dr. BOULARES Hamid

MCA

Univ-Guelma

RAPPORTEUR

Dr. SEGNI Sami

MCB

Univ-Guelma

EXAMINATEUR

Dr. BENDJAZIA Nassima

MCB

Univ-Guelma

Session Juin 2023

Remerciements

En premier lieu, nous tenons à remercier notre DIEU, notre créateur pour nous avoir donné la force pour accomplir ce travail.

C'est avec un grand plaisir que je saisis l'occasion offerte par l'achèvement de ma mémoire de master pour remercier vivement en premier lieu, Mr Segni Sami, docteur à l'Université de Guelma d'avoir dirigé ce travail avec beaucoup d'attention, de patience et d'intérêt, et qui nous a fait bénéficier durant ce semestre de ses conseils et de sa très grande compétence. Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance pour la confiance qu'il nous a témoigné.

Nous remercions vivement les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'être rapporteurs de notre mémoire. A ceux qui nous ont apporté, de près ou de loin, orientation, soutien et aide dans la réalisation et la concrétisation de ce travail.

Nos remerciements les plus vifs à tous les enseignants du département De mathématique et tous les collègues de la promotion.

Khawla Haddouche

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mes parents

Mon père, j'espère qu'il est fier de trouver ici le résultat d'années de sacrifices pour m'aider à avancer dans la vie. Merci pour les valeurs nobles, l'amour, l'éducation et le soutien permanent venu de vous.

Ma mère, qui ne cesse jamais de m'offrir, son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie.

Mes sœurs Wraïda, Nessrine qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

Mes frères Nadir, Kamel et ceux qui ont partagé avec moi tous les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail.

Mes amies pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire tout particulièrement

KHAWLA HADDOUCHE

Introduction

Les équations intégrales et intégral-différentielles de Volterra jouent un rôle crucial dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées et de la modélisation des phénomènes physiques. Leur étude approfondie permet de mieux comprendre les systèmes dynamiques complexes et de résoudre des problèmes pratiques dans divers domaines tels que la physique, l'économie, l'ingénierie et la biologie. Au fil des années, de nombreux chercheurs se sont penchés sur ces équations afin d'en explorer les propriétés et de développer des méthodes d'approximation efficaces pour les résoudre.[8]

Les travaux de recherche antérieurs ont apporté d'importantes contributions à l'analyse et à la résolution de ces équations, notamment les études menées par Aissaoui, Bounaya, Guebbai, Lemita, Segni, Wassim, Merchela, Selma, Ghat, Debbar, Khalla et d'autres chercheurs. Parmi ces travaux, ceux de Linz et de Salah ont joué un rôle significatif dans la compréhension des équations intégral-différentielles de Volterra et ont contribué à l'élaboration de nouvelles méthodes d'approximation[4, 6, 14, 13, 17, 7]. Linz, dans son ouvrage de référence intitulé "Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations" publié en 1985, a présenté des méthodes analytiques et numériques avancées pour résoudre les équations de Volterra, y compris les équations intégral-différentielles. Ses travaux ont jeté les bases de nombreuses approches modernes utilisées dans l'étude de ces équations complexes. Les techniques développées par Linz ont permis de mieux appréhender les propriétés fondamentales des solutions des équations intégrales et intégral-différentielles de Volterra.

De même, les travaux de Salah[9] ont apporté des contributions significatives à l'étude des équations intégral-différentielles de Volterra non linéaires. Dans un article publié en 2020 dans le journal "Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica", Salah, en collaboration avec Guebbai, Lemita et Aissaoui, a étudié la solution d'une équation intégral-différentielle non linéaire de Volterra dans le contexte d'un modèle de séisme. Leurs recherches ont permis de mieux comprendre les phénomènes dynamiques complexes liés aux séismes et d'élaborer des méthodes spécifiques pour résoudre ces équations.

Dans le cadre de ce mémoire de master, nous nous concentrons sur une nouvelle équation

tion intégro-différentielle de Volterra avec un terme retard :

$$\forall t \in [a; b], \quad u(t) = \int_a^{\alpha(t)} N(t, s, u(s), u'(s)) ds + f(t),$$

Notre objectif principal est de démontrer l'existence et l'unicité de la solution de cette équation en utilisant une suite de Picard, une méthode couramment utilisée dans l'analyse des équations intégrales et intégro-différentielles. De plus, nous proposons d'utiliser une méthode de Nyström pour construire une approximation numérique de la solution analytique.

En nous appuyant sur les travaux antérieurs de Linz et de Salah, nous souhaitons contribuer à l'avancement des connaissances dans le domaine des équations intégro-différentielles de Volterra non linéaires avec terme retard. Les techniques développées par Linz nous permettront de mieux comprendre les propriétés fondamentales de la solution, tandis que les travaux de Salah nous offriront des perspectives précieuses pour résoudre cette équation spécifique liée à un modèle de séisme. Nous démontrerons la convergence de la méthode de Nyström pour notre équation intégro-différentielle, garantissant ainsi la précision de notre approximation numérique. Des tests numériques seront réalisés pour évaluer l'efficacité de notre approche et comparer les résultats avec des solutions analytiques connues ou d'autres méthodes d'approximation existantes. Ces tests contribueront à illustrer la pertinence et la fiabilité de notre méthode dans la résolution de ces équations complexes.

En somme, ce mémoire de master vise à approfondir notre compréhension des équations intégro-différentielles de Volterra avec terme retard, en tirant parti des contributions essentielles de Linz et de Salah. Nous espérons que nos travaux fourniront des résultats significatifs dans la résolution de ces équations complexes et auront des implications importantes dans divers domaines de recherche utilisant ces modèles mathématiques pour étudier des phénomènes dynamiques.

Chapitre 1

Outils mathématiques

L'objectif de ce chapitre est d'introduire et de présenter les notions de base et les outils mathématiques nécessaires pour la compréhension de notre travail . La plupart des outils présentes dans ce chapitre seront mieux compris au fil du mémoire.

1.1 Historique de l'équation :

Nous allons présenter un historique très particulier pour décrire notre équation objective.

Cette façon sera très particulière, mais elle nous permettras de mieux appréhender l'aspect philosophique derrière notre vision.

Nous conseillons le lecteur de notre travail de commencer par lire peterlinz [ref] à fin de comprendre en premier lieu l'étude analytique et numérique de l'équation :

$$u(t) = \int_a^t G(t, s, u(s))ds + f(t), \quad \forall t \in [a, b]$$

Il montre qu'en utilisant

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists L > 0 \\ \forall t, s \in [a, b], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ |G(t, s, x) - G(t, s, y)| \leq L|x - y|, \end{array} \right.$$

il arrive à montrer l'existence et l'unicité $u \in C^0[a, b]$, pour tout $f \in C^0[a, b]$.

Comme il montre que la méthode de Nystrom est parfaitement convergente .

En deuxième lieu , nous demandons qui lecteur de lieu les articles . Guebbai et al [réf] et Segni et al [réf] pour mieux comprendre le traitement de l'équation :

$$u(t) = \int_a^t k(t, s, u(s), u'(s))ds + f(t), \quad \forall t \in [a, b]$$

Ils ont montré que sous les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (*)K'(t) \in C^0([a, b]^2\mathbb{R}^2) \\ (*)\exists A, B, \bar{A}, \bar{B} \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t, s \in [a, b], \quad \forall x, \bar{x}, y, \bar{y} \in \mathbb{R}, \\ |K(t, s, x, y) - K(t, s, \bar{x}, \bar{y})| \leq A|x - \bar{x}| + B|y - \bar{y}|, \\ |K'(t)(t, s, x, y) - K'(t)(t, s, \bar{x}, \bar{y})| \leq \bar{A}|x - \bar{x}| + \bar{B}|y - \bar{y}|. \\ (*)B < 1 \end{array} \right.$$

L'équation précédente admet une unique solution $u \in C^1[a, b]$ pour tout $f \in C^1[a, b]$, comme ils ont obtenue une convergence numérique pour la solution approchée . Dans ce travail , nous intéressons à l'équation intégrodifférentielle de volterra non linéaire avec terme retard :

$$u(t) = \int_a^{\alpha(t)} k(t, s, u(s), u'(s))ds + f(t), \quad \forall t \in [a, b],$$

Ou , α est le terme retard , puisque

$$a \leq \alpha(t) \leq t, \quad \forall t \in [a, b]$$

1.2 Propriété de dérivation :

Dans cette partie nous présentons une propriété mathématique qui permet le calcul de la dérivée u' .

Théorème 1.2.1. Soient $\varphi \in C^1[a, b]^2$, $\alpha \in C^1[a, b]$

et ψ définie par

$$\forall t \in [a, b], \quad \psi(t) = \int_a^{\alpha(t)} \varphi(t, s)ds$$

Alors , $\psi \in C^1[a, b]$ et

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], \quad \psi'(t) &= \alpha'(t)\varphi(t, \alpha(t)) \\ &+ \int_a^{\alpha(t)} \varphi'(t)(t, s)ds. \end{aligned}$$

Preuve 1.2.1.

$$\begin{aligned}
\forall t \in [a, b], \quad \psi'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\psi(t+h) - \psi(t)) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_{\alpha(t)}^{\alpha(t+h)} \varphi(t+h, s) ds + \int_a^{\alpha(t)} (\varphi(t+h, s) - \varphi(t, s)) ds \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} \varphi(t+h, \alpha(t) + \xi(h)) \\
&\quad + \int_a^{\alpha(t)} \frac{1}{h} (\varphi(t+h, s) - \varphi(t, s)) ds \\
&= \alpha'(t) \varphi(t, \alpha(t)) + \int_a^t \varphi'(t)(t, s) ds.
\end{aligned}$$

1.3 Lemme de Gronwall :

Cette section est dédiée au lemme de Gronwall version discrète.

L'utilité de ce lemme sera comprise dans la partie numérique de notre travail.

Théorème 1.3.1. *Soit $[\xi_i]_{i \geq 0}$ une suite de réelles qui vérifient ,*

$$|\xi_n| \leq A \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_i| + B_n, \quad n \geq r,$$

$$\text{où } A > 0, \quad 0 \leq B_n \leq B, \quad \sum_{i=0}^r |\xi_i| \leq \eta.$$

Alors ,

$$|\xi_n| \leq (1 + A)^{n-r} (B + A_\eta), \forall n \geq r.$$

Preuve 1.3.1. *Voir le livre de linz [réf] page 101 .*

Chapitre 2

étude Analytique

Ce chapitre représente la première partie de notre travail, dans le quel nous allons construire une solution analytique de l'équation intégrodifférentielle de Volterra avec un terme retard .

2.1 Position du problème

Soit $N : [a, b]^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non linéaire qui vérifie les conditions suivantes

$$(C) \left\{ \begin{array}{l} (C_1) : \partial_t N \in C^0([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2) \\ (C_2) : \forall t, s \in [a, b], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}; \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R} \\ |N(t, s, x, y) - N(t, s, \bar{x}, \bar{y})| \leq L_{11} |x - \bar{x}| + L_{12} |y - \bar{y}| \\ |\partial_t N(t, s, x, y) - \partial_t N(t, s, \bar{x}, \bar{y})| \leq L_{21} |x - \bar{x}| + L_{22} |y - \bar{y}| \\ (C_3) : bL_{12} < 1 \end{array} \right.$$

Notre objectif est d'étudier analytiquement, c-à-d montrer l'existence et l'unicité de la solution $u \in C^1[a, b]$ qui vérifie le problème suivant :

$$\forall t \in [a; b], \quad u(t) = \int_a^{\alpha(t)} N(t, s, u(s), u'(s)) ds + f(t),$$

ou, f est une fonction donnée dans $C^1[a, b]$, et α la fonction de retard supposée vérifiée

les conditions suivantes :

$$(C_\alpha) \begin{cases} (C_{\alpha,1}) : \forall t \in [a, b], \quad a \leq \alpha(t) \leq t, \\ (C_{\alpha,2}) : \alpha \in C^1[a, b]. \\ (C_{\alpha,3}) : \|\alpha'(t)\|_{C^0[a,b]} L_{1,2} < 1 \end{cases}$$

Pour mieux notre équation(), nous devons dériver les deux cotés de cette équation pour cela, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1.1. *Soient*

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (t, s) &\mapsto \psi(t, s), \end{aligned}$$

Tel que $\psi'(t) \in C^0(\mathbb{R}^2)$, α vérifiant (C_α) et

$$\varphi(t) = \int_a^{\alpha(t)} \psi(t, s) ds, \quad \forall t \geq a.$$

Alors ,

$$\varphi'(t) = \alpha'(t)\psi(t, \alpha(t)) + \int_a^{\alpha(t)} \psi'(t)(t, s) ds, \quad \forall t \geq a.$$

Preuve 2.1.1.

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\varphi(t+h) - \varphi(t)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{\alpha(t+h)} \psi(t+h, s) ds - \int_a^{\alpha(t)} \psi(t, s) ds \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_a^{\alpha(t+h)} \frac{1}{h} (\psi(t+h, s) - \psi(t, s)) ds + \frac{1}{h} \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t+h)} \psi(t, s) ds \right) \end{aligned}$$

Mais,

$$\frac{1}{h} \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t+h)} \psi(t, s) ds = \frac{1}{h} (\alpha(t+h) - \alpha(t)) \psi(t, \xi(t, h)),$$

Ou , $\lim_{h \rightarrow 0} \xi(t, h) = \alpha(t)$

Donc, $\varphi'(t) = \alpha'(t)\psi(t, \alpha(t)) + \int_a^{\alpha(t)} \psi'(t)(t, s) ds, \quad \forall t \geq a.$

En appliquant ce dernier résultat, nous obtenons ;

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b]; \quad u'(t) &= \alpha'(t)N(t, \alpha(t), u(\alpha(t)), u'(\alpha(t))) \\ &+ \int_a^{\alpha(t)} \partial_t N(t, s, u(s), u'(s)) ds + f'(t) \end{aligned}$$

Cette équation est difficile à traiter dans cette forme, pour cela, nous utilisons un changement de variable adéquat dans le but de la rendre facile à traiter numériquement et analytiquement.

Nous utilisons le changement de variable proposé par les suivant :

$$\forall t \in [a, b]; \quad u'(t) = v(t) \Rightarrow \int_a^t u'(s) ds = \int_a^t v(s) ds \Rightarrow u(t) = \int_a^t v(s) ds + u(a)$$

Mais, $\alpha(a) = a \Rightarrow u(a) = f(a)$, ce qui donne

$$U(t) = \int_a^t v(s) ds + f(a)$$

Notre problème devient ; trouver $v \in C^0[a, b]$ tel que

$\forall t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} v(t) &= \alpha'(t)N(t, \alpha(t), \int_a^{\alpha(t)} v(s) ds + f(a), v(\alpha(t))) \\ &+ \int_a^{\alpha(t)} \partial_t N(t, s, \int_a^s v(o) do + f(a), v(s)) ds \\ &+ f'(t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.2 Existence et unicité de la solution

Pour construire une solution de notre nouvelle équation nous introduisons $(v_n)_{n \geq 0}$ la suite de Picard 8,11 par : $\forall t \in [a, b]$

$$\begin{cases} v_0(t) = f'(t), \\ v_{n+1}(t) = \alpha'(t)N(t, \alpha(t), \int_a^{\alpha(t)} v_n(s) ds + f(a), v_n(\alpha(t))) \\ \quad + \int_a^{\alpha(t)} \partial_t N(t, s, \int_a^s v_n(o) do + f(a), v_n(s)) ds + f'(t), \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

à partir de cette suite, nous définissons la suite de fonctions $(w_n)_{n \geq 0}$ pour tout $t \in [a, b]$, par :

$$\begin{cases} w_0(t) = f'(t), \\ w_{n+1}(t) = v_{n+1}(t) - v_n(t). \end{cases}$$

le théorème suivant l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2)

Théorème 2.2.1. *Supposons que le noyau N vérifie les hypothèses (C) et que le terme de retard α vérifie les hypothèses (C_α) , alors l'équation (2) admet une unique solution $v \in C^0[a, b]$.*

Preuve 2.2.1. *Nous définissons une sur b division de $[a, b]$ par*

$$a = T_0 < T_1 < T_2 \dots < T_N = b,$$

qui est supposée vérifier la condition suivante :

pour tout $0 \leq j \leq N - 1$,

$$(L_{11}(T_{j+1} - T_j) + L_{12}) + (T_{j+1} - T_j)^2 L_{21} + (T_{j+1} - T_j) L_{22} \leq \rho < 1$$

Pour tout $t \in [T_0, T_1]$,

$$\begin{aligned} |W_{n+1}(t)| &= |v_{n+1}(t) - v_n(t)| \\ &\leq |\alpha'(t)| |N(t, \alpha(t), \int_a^{\alpha(t)} v_n(s) ds + f(a, v_n(\alpha(t))) \\ &\quad - N(t, \alpha(t), \int_a^{\alpha(t)} v_{n-1}(s) ds + f(a, v_{n-1}(\alpha(t)))| \\ &\quad + \int_a^{\alpha(t)} |\partial_t N(t, s, \int_a^s v_n(o) do + f(a, v_n(s))) ds \\ &\quad - \partial_t N(t, s, \int_a^s v_{n-1}(o) do + f(a, v_{n-1}(s)))| ds \\ &\leq \|\alpha'\|_{C^0[a, b]} ((T_1 - T_0) L_{11} \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0[T_0, T_1]} + L_{12} \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0[T_0, T_1]} \\ &\quad + (T_1 - T_0)^2 L_{21} \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0[T_0, T_1]} + (T_1 - T_0) L_{22} \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0[T_0, T_1]}) \\ &\leq \rho \|W_n\|_{C^0[T_0, T_1]} \end{aligned}$$

Donc, $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\|w_n\|_{C^0[T_0, T_1]} &\leq \rho \|w_{n-1}\|_{C^0[T_0, T_1]}, \\ &\leq \rho^n \|f'\|_{C^0[T_0, T_1]}.\end{aligned}$$

Ce qui signifie que la série $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ est normalement convergente dans $C^0[T_0, T_1]$, c-à-d

$$\exists v^1 \in C^0[T_0, T_1], \quad \sum_{n=0}^{\infty} w_n = v^1.$$

Mais, $\forall n \geq 1, \quad v_n = \sum_{p=0}^n w_p$.

Alors, la suite de picard $(v_n)_{n \geq 0}$ est convergente dans $C^0[T_0, T_1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v^1.$$

Montrons maintenant que v^1 est la solution de l'équation (2) dans l'intervalle $[T_0, T_1]$ pour cela, on introduit cette nouvelle fonction ;

$$\forall n \geq 1, \quad \forall t \in [T_0, T_1], \quad \Delta_n(t) = v^1(t) - v_n(t).$$

On a,

$$\begin{aligned}
& | v^1(t) - \alpha'(t)N(t, \alpha(t), \int_a^{\alpha(t)} v^1(s)ds + f(a), v^1(\alpha(t))) \\
& - \int_a^{\alpha(t)} \partial_t N(t, s, \int_a^s v^1(o)do + f(a), v^1(s))ds - f'(t) | \\
& = | v^1(t) - v_n(t) - \alpha'(t)(N(t, \alpha(t), \int_a^{\alpha(t)} v^1(s)ds + f(a), v^1(\alpha(t))) \\
& - N(t, \alpha(t), \int_a^{\alpha(t)} v_n(s)ds + f(a), v_n(\alpha(t)))) \\
& - \int_a^{\alpha(t)} (\partial_t N(t, s, \int_a^s v^1(o)do + f(a), v^1(s)) \\
& - \partial_t N(t, s, \int_a^s v_n(o)do + f(a), v_n(s)))ds | \\
& \leq | \Delta_n(t) | + \| \alpha' \|_{C^0[a,b]} ((T_1 - T_0)L_{11} \| \Delta_n \|_{C^0[a,b]} + L_{12} \| \Delta_n \|_{C^0[a,b]}) \\
& + (T_1 - T_0)^2 L_{21} \| \Delta_n \|_{C^0[a,b]} + (T_1 - T_0)L_{22} \| \Delta_n \|_{C^0[a,b]} \\
& \leq (1 + \rho) \| \Delta_n \|_{C^0[a,b]}
\end{aligned}$$

Ce qui montre parfaitement que v^1 est une solution de (2) dans l'intervalle $[T_0, T_1]$.

pour montrer que cette solution est unique, nous supposons qu'il existe une autre solution de notre équation (2) dans $[T_0, T_1]$, notée \tilde{v}^1 alors, pour tout $t \in [T_0, T_1]$ et en utilisant les mêmes étapes précédentes de calcul, nous obtenons,

$$|v^1(t) - \tilde{v}^1(t)| \leq \rho \|v^1 - \tilde{v}^1\|_{C^0[T_0, T_1]}.$$

Ce qui montre que $v^1 = \tilde{v}^1$ puisque $\rho < 1$.

Donc, nous venons de une solution unique v^1 pour notre équation (2) dans l'intervalle $[T_0, T_1]$.

à fin, de procéder avec l'intervalle suivant $[T_1, T_2]$, nous utilisons la solution v^1 , obtenue dans $[T_0, T_1]$, pour modifier l'équation (2) comme suit :

pour tout $t \in [T_1, T_2]$,

$$\begin{aligned}
v(t) &= \alpha'(t)N(t, \alpha(t), \int_{T_1}^{\alpha(t)} v(s)ds + f(a), v(\alpha(t))) \\
&+ \int_{T_1}^{\alpha(t)} \partial_t N(t, s, \int_{T_1}^s v(o)do + F(a), v(s))ds \\
&+ G(t),
\end{aligned}$$

où , $F(a) = \int_{T_0}^{T_1} v^1(s)ds + f'(a),$

$$G(t) = \int_{T_0}^{T_1} \partial_t N(t, s, \int_a^s v^1(o)do + F(a), v^1(s))ds + f'(t).$$

Cette nouvelle équation à la même forme que l'équation (2), mais cette fois $t \in [T_1, T_2]$.

Donc, en procédant de la même manière, nous construisant une solution unique pour cette équation sur l'intervalle $[T_1, T_2]$, qui sera notée v^2 .

Nous répétons le même procédé dans le but d'obtenir la fonction suivante :

$$v(t) = \begin{cases} v^1(t) & t \in [T_0, T_1], \\ v^2(t) & t \in [T_1, T_2], \\ \vdots & \\ v^N(t) & t \in [T_{N-1}, T_N]. \end{cases}$$

Par construction $v \in C^0[a, b]$ et elle est l'unique solution de l'équation (2) sur l'intervalle $[a, b]$

corollaire 2.2.1. l'équation(1) admet une unique solution $u \in C^1[a, b]$ sous les hypothèses (C) et (C_α) .

Preuve 2.2.2. Dans le théorème précédent, nous avons construit une unique solution v de (2),

Il suffit de prendre pour $t \in [a, b]$,

$$u(t) = \int_a^t v(s)ds + f(t).$$

Chapitre 3

Étude numérique :

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que notre équation intégrodifférentielle non linéaire de volterra avec terme de retard admet une unique solution sous les hypothèses (C) et (C_α) et surtout, après l'avoir modifiée en une nouvelle équation à travers un changement de variable basé sur l'intégration du terme dérivée.

Notre idée reste l'application de la méthode de Nyström développée abondamment et dans différentes formes dans la littérature [8, 9, 11, 17, 19] pour traiter cette classe d'équations non linéaire de volterra par contre, nous allons améliorer et adapter la version classique de la Méthode de Nyström dans le but de la rendre applicable dans le cadre du terme retard.

3.1 Construction du système

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ nous définissons une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ comme suit ;

$$h = \frac{b-a}{n-1}, \quad t_j = a + (j-1)h, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Soit $(O_j)_{j=1}^n$ une famille de poids bien choisie pour vérifier les conditions suivantes :

$$(C_w) \left\{ \begin{array}{l} (1) : \forall n \geq 2, \quad \max_{1 \leq j \leq n} |O_j| \leq 0 < \infty, \\ (2) : \forall w \in C^0[a, b], \end{array} \right.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^b w(t) dt - h \sum_{j=1}^n O_j w(t_j) \right| = 0$$

L'hypothèse $(C_w - 2)$ va être remplacée dans la suite de notre travail pour être mieux compatible avec notre équation et la nouvelle version de Méthodes de Nyström.

En premier lieu, nous remplaçons t par t_1 dans l'équation (2)

Ce qui donne $\alpha(t_1) = t_1 = a$ et

$$v(t_1) = \alpha'(a)N(a, a, f(a), v(t_1)) + f'(t_1),$$

qui sera remplacé en phase programmation par

$$V_1 = \alpha'(a)N(a, a, f(a), V_1) + f'(t_1) \quad (3.1)$$

En deuxième lieu, nous t par t_i , $2 \leq i \leq n$, dans l même équation ce qui donne

$$\begin{aligned} v(t_i) &= \alpha'(t_i)N(t_i, \alpha(t_i), \int_a^{\alpha(t_i)} v(s)ds + f(a), v(\alpha(t_i))) \\ &+ \int_a^{\alpha(t_i)} \partial_t N(t_i, s, \int_a^s v(o)do + f(a), v(s))ds \\ &+ f'(t_i) \end{aligned}$$

Soit maintenant $t_{p(i)} \in (t_j)_{j=1}^i$ qui vérifie

$$|\alpha(t_i) - t_{p(i)}| = \min_{1 \leq j \leq i} |\alpha(t_i) - t_j|.$$

En utilisant ce nouveau paramètre, nous définissons $(\tilde{v}(t_i))_{i=1}^n$ par :

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t_i) &= \alpha'(t_i)N(t_i, t_{p(i)}, \int_a^{t_{p(i)}} \tilde{v}(s)ds + f(a), \tilde{v}(t_p)) \\ &+ \int_a^{t_{p(i)}} \partial_t N(t_i, s, \int_a^s \tilde{v}(o)do + f(a), \tilde{v}(s))ds \\ &+ f'(t_i) \end{aligned}$$

En troisième lieu, nous remplaçons tout les intégrales en appliquant la quadrature.

ce qui donne,

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(t_i) &= \alpha'(t_i)N(t_i, t_{p(i)}, h \sum_{j=1}^{p(i)} w_j \tilde{v}(t_j) + f(a), \tilde{v}(t_{p(i)})) \\
&+ h \sum_{j=1}^{p(i)} w_j \partial_t N(t_i, t_j, \int_a^{t_j} \tilde{v}(o) do + f(a), \tilde{v}(t_j)) \\
&+ f'(t_i) \\
&= \alpha'(t_i)N(t_i, t_{p(i)}, h \sum_{j=1}^{p(i)} w_j \tilde{v}(t_j) + f(a), \tilde{v}(t_{p(i)})) \\
&+ h \sum_{j=1}^{p(i)} w_j \partial_t N(t_i, t_j, h \sum_{q=1}^j w_q \tilde{v}(t_q) + f(a), \tilde{v}(t_j)) \\
&+ f'(t_i).
\end{aligned}$$

Ce qui donne, pour tout $2 \leq i \leq n$,

$$V_i = \alpha'(t_i)N(t_i, t_{p(i)}, h \sum_{j=1}^{p(i)} w_j V_j + f(a), V_{p(i)}) \quad (3.2)$$

$$(3.3)$$

$$+ h \sum_{j=1}^{p(i)} w_j \partial_t N(t_i, t_j, h \sum_{q=1}^j w_q V_q + f(a), V_j) \quad (3.4)$$

$$(3.5)$$

$$+ f'(t_i) \quad (3.6)$$

Donc, notre méthode consiste à résoudre (S_1) et (S_2) pour obtenir $(V_i)_{i=1}^n$, ou $V_1 = v(t_1)$ et

$$V_i = v(t_i), \quad 2 \leq i \leq n.$$

3.2 étude du système

Avons de procéder à l'étude de la convergence et aux tests numériques, nous devons tout d'abord montrer que le système $(S_1) - (S_2)$ admet une unique solution.

Théorème 3.2.1. *Pour h suffisamment petit, (n suffisamment grand), le système $(S_1) - (S_2)$ admet une unique solution.*

Preuve 3.2.1. *Nous commençons par* (S_1) , *on met*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = \alpha'(a)N(a, a, f(a), x),$$

Donc, (S_1) est équivalent à

$$v_1 = \varphi_1(v_1).$$

Maintenant, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x) - \varphi_1(y)| &= |\alpha'(a)N(a, a, f(a), x) \\ &\quad - \alpha'(a)N(a, a, f(a), y)| \\ &\leq \|\alpha'\|_{C^0[a,b]} L_{21} |x - y| \end{aligned}$$

Qui prouve que φ_1 est une contraction et admet un point fixe selon le théorème de Banach

Maintenant, pour $2 \leq i \leq n$, si $p(i) \leq 1$

Alors (S_2) donne explicitement V_i en fonction des V_j , $1 \leq j \leq p$ qui sont supposés et connus et déterminer dans les étapes précédentes par contre, si $p(i) = i$, nous introduisons la fonction φ_i par : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \alpha'(t_i)N(t_i, t_i, hW_i x + h \sum_{j=1}^{i-1} W_j V_j + f(a), x) \\ &\quad + hW_i \partial_t N(t_i, t_i, hW_i x + h \sum_{j=1}^{i-1} W_j V_j + f(a), x) \\ &\quad + h \sum_{j=1}^{i-1} W_j \partial_t N(t_i, t_j, h \sum_{q=1}^j W_q V_q + f(a), V_j) \\ &\quad + f'(a). \end{aligned}$$

Ce qui revient à dire que la solution de (S_2) est un point fixe de φ_i , c-à-d

$$V_i = \varphi_i(V_i)$$

On a , $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| &\leq |\alpha'(t_i)| \left| N(t_i, t_i, hW_i x + h \sum_{j=1}^{i-1} W_j V_j + f(a), x) - N(t_i, t_i, hW_i y + h \sum_{j=1}^{i-1} W_j V_j + f(a), y) \right| \\
&+ h|W_i| \left| \partial_t N(t_i, t_i, hW_i x + h \sum_{j=1}^{i-1} W_j V_j + f(a), x) \right. \\
&- \left. \partial_t N(t_i, t_i, hW_i y + h \sum_{j=1}^{i-1} W_j V_j + f(a), y) \right| \\
&\leq \|\alpha'\|_{C^0[a,b]} (hW L_{11} |x - y| + L_{12} |x - y|) \\
&+ (h^2 W^2 L_{21} |x - y| + hW |x - y|) \\
&\leq (\|\alpha'\|_{C^0[a,b]} hW L_{11} + \|\alpha'\|_{C^0[a,b]} L_{12} + h^2 W^2 L_{21} + hW) |x - y|
\end{aligned}$$

Ce qui montre que pour h assez petit, la fonction φ_i est une contraction.

En appliquant le théorème de Banach, nous concluons que (S_2) admet une unique solution pour h assez petit

Convergence de la méthode :

Pour être proche d'un lecteur de niveau master, nous allons présenter cette partie d'une manière constructive, c-à-d nous montrons les étapes de démonstration avant d'annoncer le théorème.

Notre objectif est d'estimer la quantité

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i| = \max_{1 \leq i \leq n} |v(t_i) - V_i|.$$

Nous savons que pour tout $2 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned}
v(t_i) &= \alpha'(t_i) N(t_i, \alpha(t_i), \int_a^{\alpha(t_i)} v(s) ds + f(a), v(\alpha(t_i))) + \int_a^{\alpha(t_i)} \partial_t N(t_i, s, \int_a^s v(s) ds + f(a), \alpha(s)) ds \\
&+ f'(t_i)
\end{aligned}$$

Mais, pour $i = 1$, on a

$$v(t_1) = \alpha'(a)N(a, a, f(a), v(t_1)) + f'(a).$$

$$v(t_1) = \alpha'(a)N(a, a, f(a), v(t_1)) + f'(a).$$

Donc ,

$$\begin{aligned} |\xi_1| &= |v(t_1) - V_1| \\ &= |\alpha'(a)||N(a, a, f(a), v(t_1)) - N(a, a, f(a), V_1)| \\ &\leq \|\alpha'\|_{C^0[a,b]} L_{12} |v(t_1) - V_1| \\ &\leq \kappa |\xi_1|. \end{aligned}$$

Ce qui donne , $|\xi_1| = 0$

Maintenant , pour $2 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} |\xi_i| &= |v(t_i) - V_i| \\ &\leq |v(t_i) - \tilde{v}(t_i)| + |\tilde{v}(t_i) - V_i| \end{aligned}$$

Nous intéressons à $|\tilde{v}(t_i) - V_i|$, pour $2 \leq i \leq n$, en premier lieu , car c'est une vision classique , pour cela , nous introduisons les deux erreurs de consistances suivantes , pour $2 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} \delta_{1,i} &= \int_a^{t_{p(i)}} \tilde{v}(s) ds - h \sum_{j=1}^{t_{p(i)}} w_j \tilde{v}(t_j), \\ \delta_{2,i} &= \int_a^{t_{p(i)}} \partial_t N(t_i, s, \int_a^s \tilde{v}(o) do + f(a), \tilde{v}(s)) ds \\ &\quad - h \sum_{j=1}^{t_{p(i)}} w_j \partial_t N(t_i, t_j, h \sum_{q=1}^j w_q \tilde{v}(t_q), \tilde{v}(t_j)) \end{aligned}$$

Pour $2 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} |\tilde{v}(t_i) - V_i| &= |\alpha'(t_i)N(t_i, t_{p(i)}, \int_a^{t_{p(i)}} \tilde{v}(s) ds + f(a), \tilde{v}(t_{p(i)})) \\ &\quad - \alpha'(t_i)N(t_i, t_{p(i)}, h \sum_{j=1}^{p(i)} w_j V_j + f(a), V_{p(i)}) \\ &\quad + \int_a^{t_{p(i)}} \partial_t N(t_i, s, \int_a^s \tilde{v}(o) do + f(a), \tilde{v}(s)) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - h \sum_{j=1}^{p(i)} w_j \partial_t N(t_i, t_j, h \sum_{q=1}^j w_q V_q + f(a), V_j) | \\
& \leq |\alpha'(t_i)| L_{11} \left| \int_a^{t_{p(i)}} \tilde{v}(s) ds - h \sum_{j=1}^{p(i)} w_j V_j \right| \\
& + |\alpha'(t_i)| L_{12} |\tilde{v}(t_{p(i)}) - V_{p(i)}| + |\delta_{2,i}| \\
& + hW \sum_{j=1}^{p(i)} |\partial_t N(t_i, t_j, h \sum_{q=1}^j w_q \tilde{v}(t_q) + f(a), \tilde{v}(t_j) - \partial_t N(t_i, t_j, h \sum_{q=1}^j w_q V_q + f(a), V_j) | \\
& \leq |\alpha'(t_i)| L_{11} |\delta_{1,i}| + \alpha'(t_i) L_{11} hW \sum_{j=1}^{p(i)} |\tilde{v}(t_j) - V_j| \\
& + |\alpha'(t_i)| L_{12} |\tilde{v}(t_{p(i)}) - V_{p(i)}| + |\delta_{2,i}| \\
& + h^2 W^2 L_{21} \sum_{j=1}^{p(i)} \sum_{q=1}^j |\tilde{v}(t_q) - V_q| \\
& + hW \sum_{j=1}^{p(i)} |\tilde{v}(t_j) - V_j|
\end{aligned}$$

Ce qui donne , si $p(i) \leq i - 1$,

$$\begin{aligned}
|\tilde{v}(t_i) - V_i| & \leq \sum_{j=1}^{i-1} \|\alpha'\|_{C^0} \left(\max_{1 \leq pq \leq 2} (L_{pq}) + h(hWL_{21} + W) \right) |\tilde{v}(t_j) - V_j| \\
& + \|\alpha'\|_{C^0} L_{11} |\delta_{1,i}| + |\delta_{2,i}|.
\end{aligned}$$

Par contre , si $p(i) = i$,

$$\begin{aligned}
|\tilde{v}(t_i) - V_i| & \leq \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\|\alpha'\|_{C^0} h(hWL_{21} + W)}{1 - \|\alpha'\|_{C^0} L_{12} - h\|\alpha'\|_{C^0} LW} |\tilde{v}(t_j) - V_j| \\
& + \frac{|\delta_{2,i}| + \|\alpha'\|_{C^0} |\delta_{1,i}|}{1 - \|\alpha'\|_{C^0} L_{12} - h\|\alpha'\|_{C^0} LW}
\end{aligned}$$

En appliquant , le théorème de Gronwall , on conclut qu'il existe $C > 0$ tel que ,

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\tilde{v}(t_i) - V_i| \leq C \max_{1 \leq i \leq n} (|\delta_{1,i}| + |\delta_{2,i}|).$$

Reste à estimer $|\tilde{v}(t_i) - V_i|$, Pour $1 \leq i \leq n$,

On fait que

alors , il est que ,

$$\max_{1 \leq i \leq n} |v(t_i) - \tilde{v}(t_i)|$$

Donc , nous concluons que si la quadrature est consistante , c-à-d si

$$\max_{1 \leq i \leq n} (|\delta_{1,i}| + |\delta_{2,i}|) = o$$

,

alors , notre méthode est convergente .

Chapitre 4

Tests Numériques

Dans ce chapitre nous allons présenter quelques exemples numériques développés dans le but de montrer l'exactitude théorique de nos théorèmes analytiques et fournir un appui visuel pour valider la méthode numérique.

4.1 Exemple 1

Dans cet exemple nous choisissons,

$$\begin{aligned}N(t, s, x, y) &= \frac{(t - s)}{1 + x^2 + y^2}, \\f(t) &= 1 + 0.25((t - t^{1.5})^2 - t^2), \\ \alpha(t) &= t^{1.5}, \\ u(t) &= 1.\end{aligned}$$

Dans les graphes suivants, nous montrons la solution exacte, la solution approchée et surtout l'erreur pour différentes valeurs de n .

4.2 Exemple 2

Dans cet exemple nous choisissons,

$$\begin{aligned}N(t, s, x, y) &= \frac{(t - s)}{1 + x^2 + y^2}, \\f(t) &= 1 + 0.25(t^4 - t^2), \\ \alpha(t) &= -t^2 + t, \\ u(t) &= 1.\end{aligned}$$

Dans les graphes suivants, nous montrons la solution exacte, la solution approchée et surtout l'erreur pour différentes valeurs de n .

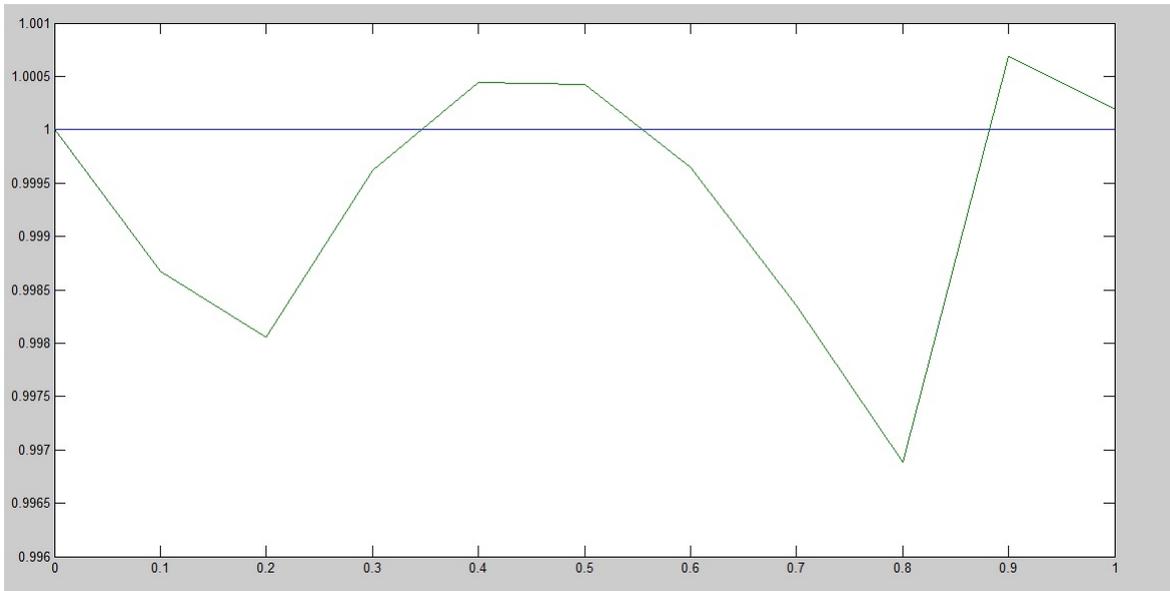


FIGURE 4.1 – $N=10, u_{ex}=Bleu, U_{ap}=vert$

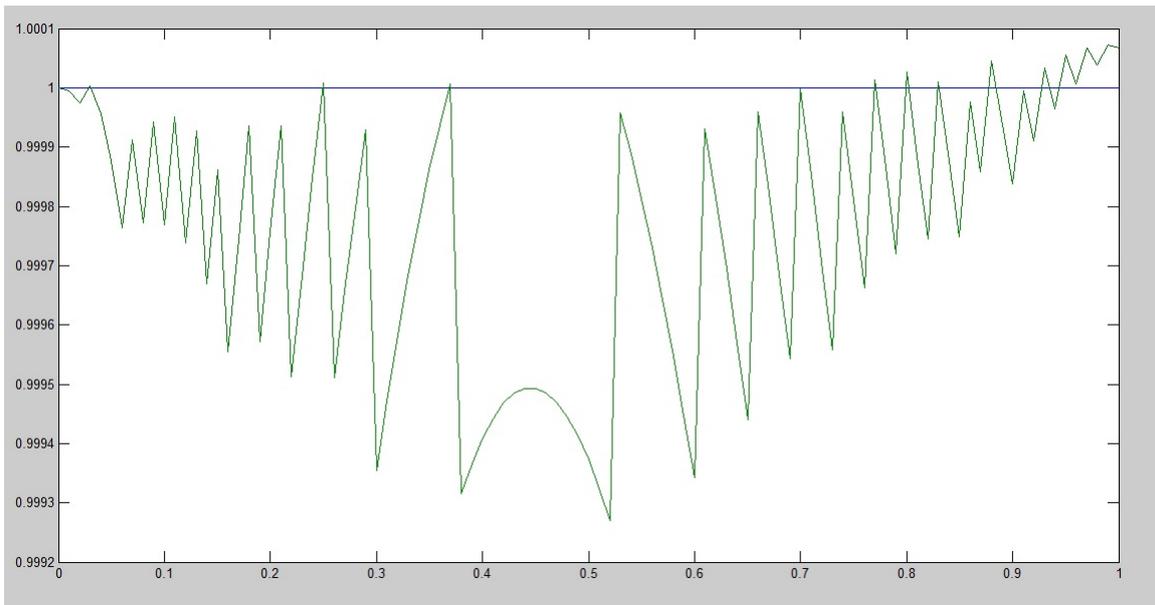


FIGURE 4.2 – $N=100, u_{ex}=Bleu, U_{ap}=Vert$

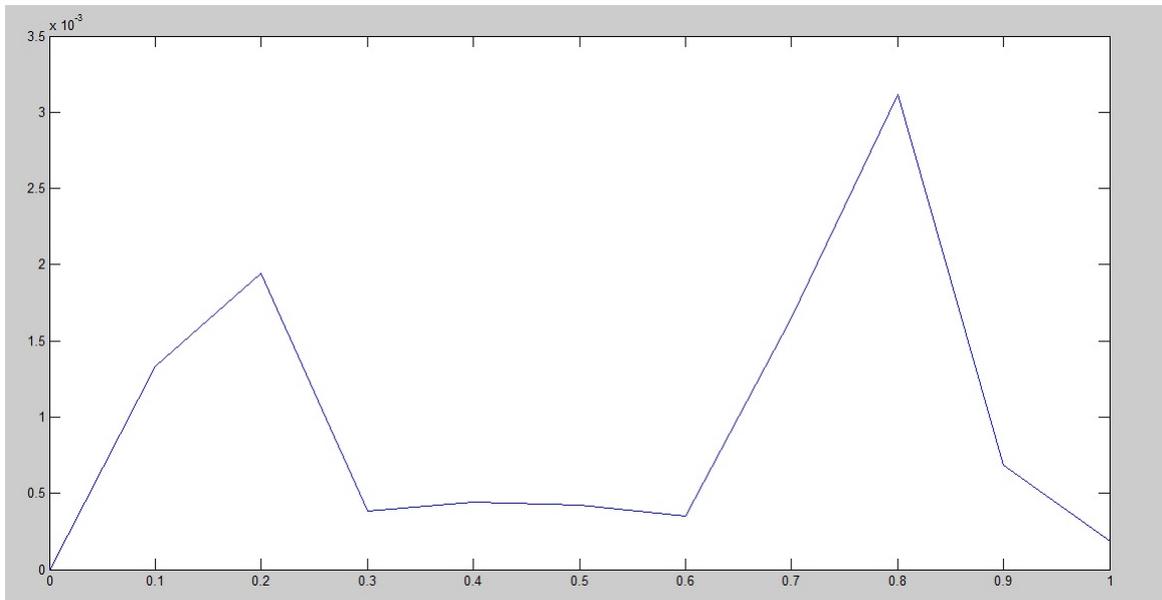


FIGURE 4.3 – $N=10$, erreur

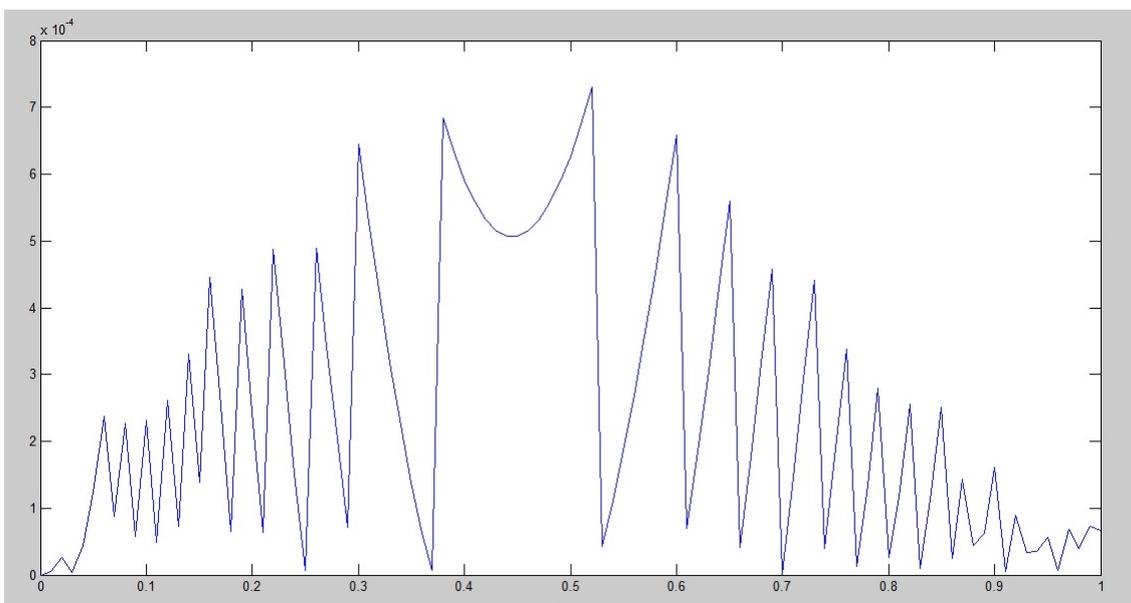


FIGURE 4.4 – $N=100$, erreur

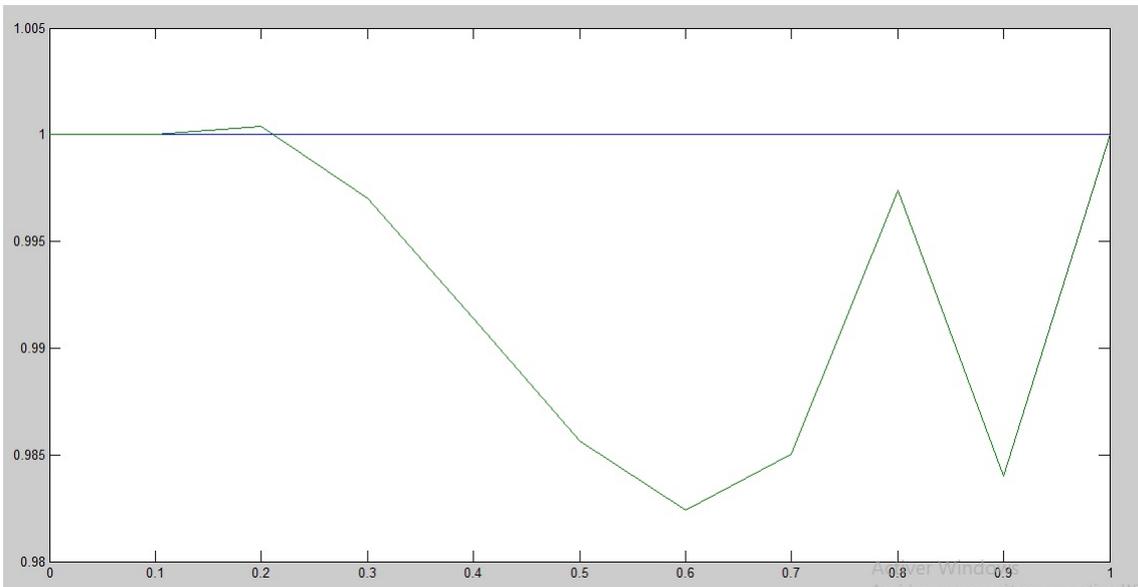


FIGURE 4.5 – $N=10, u_{ex}=\text{Bleu}, U_{ap}=\text{vert}$

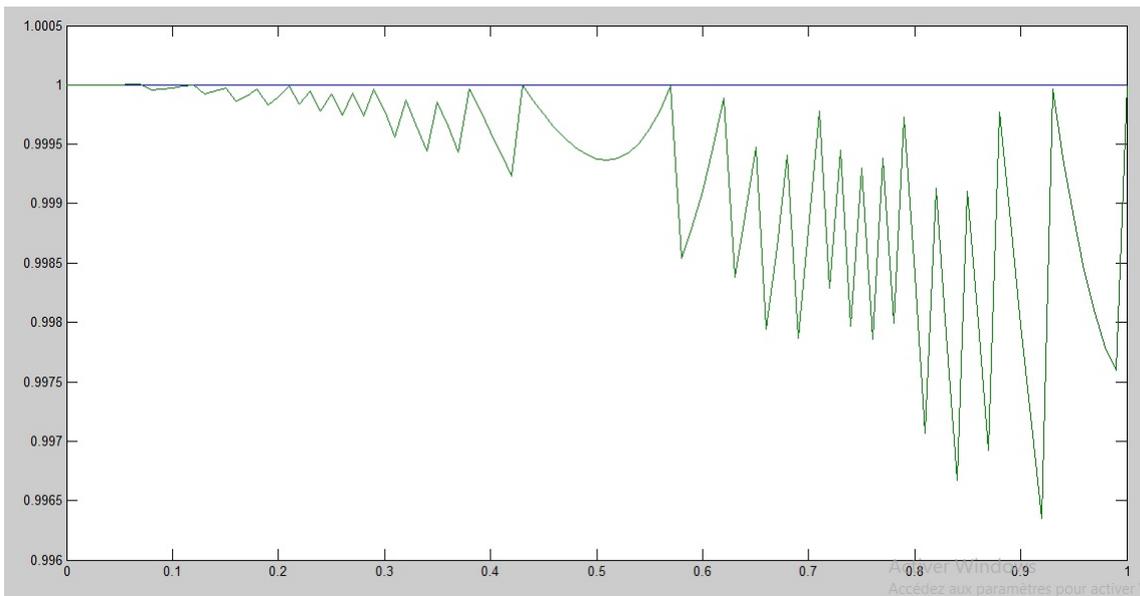


FIGURE 4.6 – $N=100, u_{ex}=\text{Bleu}, U_{ap}=\text{Vert}$

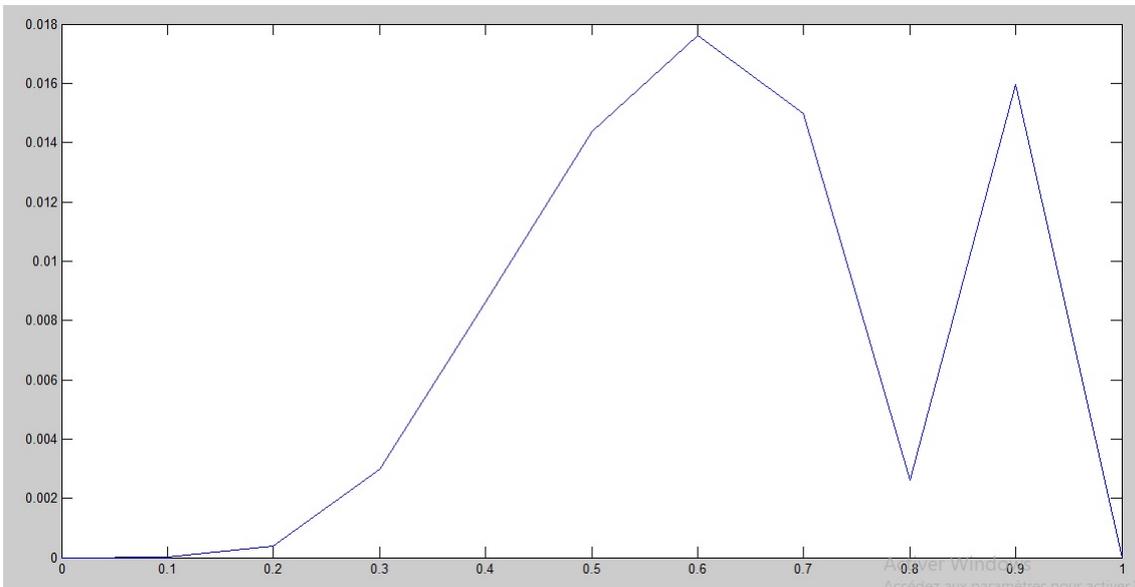


FIGURE 4.7 – $N=10$, erreur

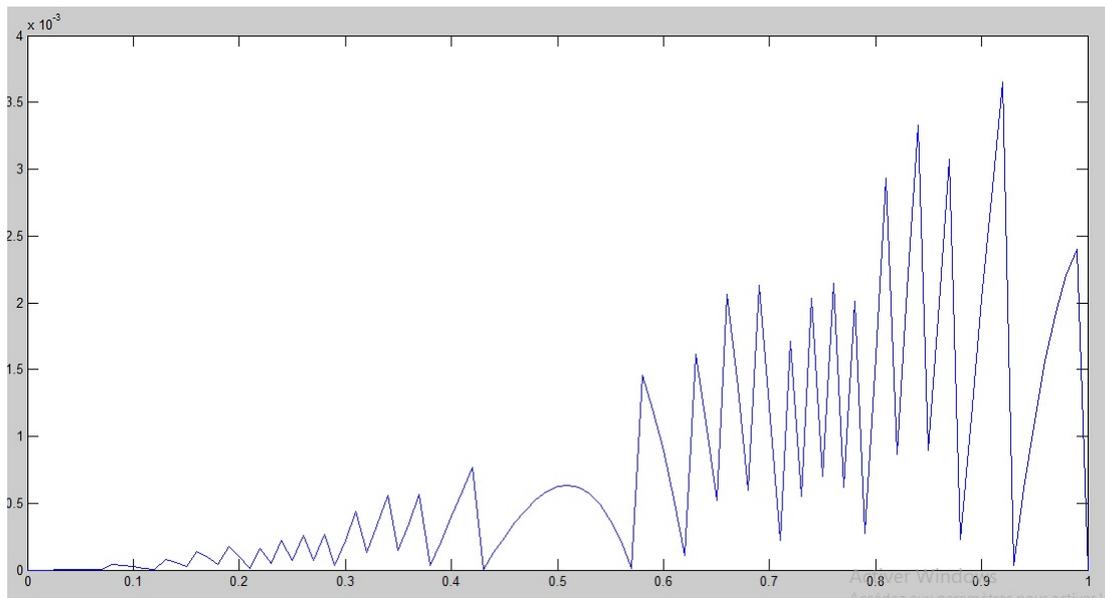


FIGURE 4.8 – $N=100$, erreur

Conclusion

En conclusion, ce mémoire de master a abordé les équations intégrales et intégral-différentielles de Volterra, mettant en évidence leur rôle crucial dans la modélisation des phénomènes physiques et l'étude des systèmes dynamiques complexes. Nous avons souligné l'importance de ces équations dans divers domaines tels que la physique, l'économie, l'ingénierie et la biologie.

En nous appuyant sur les travaux de chercheurs tels que Linz et Salah, nous avons exploré les propriétés fondamentales de ces équations complexes et développé des méthodes d'approximation efficaces pour les résoudre. Les contributions de Linz ont jeté les bases des approches modernes utilisées dans l'analyse des équations de Volterra, tandis que les recherches de Salah ont apporté des perspectives précieuses pour la résolution de problèmes spécifiques, tels que ceux liés aux séismes.

Dans le cadre de ce mémoire de master, nous nous sommes concentrés sur une nouvelle équation intégral-différentielle de Volterra avec un terme retard, représentant une nouveauté importante dans notre travail. En utilisant une suite de Picard, nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution de cette équation, et nous avons proposé la méthode de Nyström pour construire une approximation numérique de la solution analytique.

Nos travaux ont permis d'approfondir la compréhension des équations intégral-différentielles de Volterra non linéaires avec terme retard, en tirant parti des contributions essentielles de chercheurs renommés. Nous avons démontré la convergence de notre méthode d'approximation numérique, garantissant ainsi la précision de nos résultats. De plus, nous avons mené des tests numériques en variant spécifiquement le terme retard, mettant ainsi en évidence son impact significatif sur la solution de l'équation.

De plus, dans le cadre des tests numériques, nous avons spécifiquement choisi de varier le terme retard de l'équation. Ce choix est motivé par le fait que le terme retard est l'élément le plus important et novateur de notre équation. En explorant différentes valeurs du terme retard, nous avons pu évaluer l'impact de ce paramètre sur la solution

de l'équation intégro-différentielle de Volterra. Cette approche nous a permis de mettre en évidence l'influence significative du terme retard sur le comportement global du système, ainsi que sur la précision de notre méthode d'approximation numérique.

En modifiant le terme retard, nous avons pu observer des variations significatives dans les résultats numériques obtenus, ce qui confirme l'importance de prendre en compte ce facteur dans l'analyse des équations intégro-différentielles de Volterra. Ces tests ont également démontré la robustesse et la flexibilité de notre approche, qui peut être adaptée pour traiter différentes valeurs du terme retard et fournir des résultats précis et cohérents.

En conclusion, notre étude a mis en évidence l'importance du terme retard dans les équations intégro-différentielles de Volterra non linéaires. En prenant en compte ce facteur et en développant des méthodes d'approximation numérique efficaces, nous avons pu obtenir des résultats significatifs et pertinents pour la résolution de notre équation spécifique. Ces travaux ouvrent la voie à de nouvelles perspectives de recherche pour l'analyse et la résolution d'équations intégro-différentielles avec des termes retard, et offrent des outils précieux pour mieux comprendre les systèmes dynamiques complexes présents dans de nombreux domaines d'application.

En résumé, notre travail de recherche a contribué à l'avancement des connaissances dans le domaine des équations intégro-différentielles de Volterra avec terme retard. Nous avons montré l'importance de prendre en compte ce terme dans l'analyse des équations, ainsi que l'efficacité de notre méthode d'approximation numérique. Ces résultats ont des implications importantes dans divers domaines de recherche utilisant ces modèles mathématiques pour étudier des phénomènes dynamiques.

Nous espérons que nos travaux inspireront d'autres chercheurs à approfondir cette thématique et à développer de nouvelles approches pour l'analyse et la résolution des équations intégro-différentielles de Volterra. Les techniques développées dans ce mémoire offrent des outils précieux pour résoudre des problèmes pratiques et contribuer à une meilleure compréhension des systèmes complexes présents dans de nombreux domaines d'application.

Bibliographie

- [1] Ahues, M., Largillier, A., & Limaye. B.V. (2001). *Spectral computations for bounded operators*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.
- [2] Davies, E.B. (2007). *Linear operators and their spectra*. Cambridge university press, Cambridge.
- [3] Quarteroni, A., Sacco, R., & Saleri, F. (2004). *Méthodes Numériques : Algorithmes, analyse et applications*. Springer.
- [4] Atkinson, K., & Han, W. (2001). *Theoretical numerical analysis : A functional analysis framework*. Springer-Verlag, New York.
- [5] Ghiat, M., Guebbai, H., Kurulay, M., & Segni, S. (2020). On the weakly singular integro-differential nonlinear Volterra equation depending in acceleration term. *Computational and Applied Mathematics* , 39 (2), 206.
- [6] Guebbai, H., Aissaoui, M.Z., Debbar, I., & Khalla, B. (2014). Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear volterra equation. *Applied Mathematics and Computation*, 299, 376-373.
- [7] Guebbai, H., Lemita, S., Segni, S., & Merchela, W. (2020). Difference derivative for an integro-differential nonlinear volterra equation. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta Matematika Mekhanika Komp'uternye Nauki*, 30(2), 176-188.
- [8] P. Linz, "Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations". SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1985.
- [9] Salah, S., Guebbai, H., Lemita, S., & Aissaoui, M.Z. (2019). Solution of an Integro-differential nonlinear equation of Volterra arising of earthquake Model. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 1-14.
- [10] Shanga, X., & Hanb, D. (2010). Application of the variational iteration method for solving nth-order integro-differential equations. *Jornal of Computianal Applied Mathematics*, 234, 1442-1447.
- [11] Touati, S., Lemita, S., Ghiat, M., & Aissaoui M.Z. (2019). Solving a non-linear Volterra-Fredholm integro-differentail equation with weakly singular kernels. *Fasciculi Mathematics*, 62, 155-168
- [12] Yusufoglu, E. (2007). An efficient algorithm for solving integro-differential equations system. *Applied Mathematics and Computing*, 192, 51-55.
- [13] Zemyan, S.M. (2012). *The classical theory of integral equations*. Birkhäuser Basel, Springer, New York.

- [14] Zhou, H., & Wang, Q. (2019). The Nyström method and convergence analysis for system of Fredholm integral Equations. *Fundamental Journal of Applied Mathematics*, 2 (1), 28-32.
- [15] Lakshmikantham. V. (1995). *Theory of Integro-Differential Equations* (Vol. 1). CRC Press.
- [16] Jerri, A. (1999). *Introduction to integral equation with application*. John Wiley and Sons.
- [17] Segni, S., Ghiat, M., & Guebbai, H. (2019). New approximation method for Volterra nonlinear integro-differential equation. *Asian-European Journal of Mathematics*, 12(1), 1950016.
- [18] Lemita, S., & Guebbai, H. (2019). New process to approach linear Fredholm integrals equations defined on large interval. *Asian-European Journal of Mathematics*, 12(1), 1950009.
- [19] Ghiat, M., & Guebbai, H. (2018). Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear volterra equation with weakly singular kernel. *Computational and Applied Mathematics*, 37(4), 4661-4974.