République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE ET DES SCIENCES DE LA MATIÈRE

Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : EDP Et Analyse Numérique

Par l'étudiante : SARRA GHARSSI

Intitulé :

Quelques théorèmes du point fixe dans des espaces métriques et leurs applications

Dirigé par : Dr. AHMED ALI

Soutenue le : 19 Juin 2023 à 11:30

Devant le jury :

Mousaab BOUAFIA	MCA	Univ-Guelma	Président
Ahmed. ALI	MCB	Univ-Guelma	Rapporteur
Nassima REZGUI	MCB	Univ-Guelma	Examinatrice

Session : Juin 2023.

بسم الله الرحمن الرحيم

Table des matières

Dédicace

Je dédie ce mémoire

A ma très chère mère **Fatiha**.

Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit, ton affection me couvre ,ta bienveillance me guide et la présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles.

A mon très cher père **Alarbi**.

Tu a toujours été à mes côtés pour me soutenir et m'encourager que ce travail traduit ma gratitude et mon affection.

A mes frères `Ali Abdallah`, `Abdelhamid` et `Yassine`.

A mes sœur `Samhan` et `Souhayla` pour leurs soutiens moral et leurs conseils précieux tout au long de mes études

Aux épouses de mes chers frères Abdelhamid et Ali (`Nadjette` et `Raja`).

A mes chère amies pour leurs aides et supports dans les moments difficiles.

A tous mes points fixes.

Remerciements

Je tiens tout d'abord, à remercier Dieu le tout Puissant et Miséricordieux, qui m'a donné la force, le courage et la patience pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens tout à remercier mon directeur de mémoire. **Dr. Ahmed ALI**, Maitre de canférance à l'université 8 Mai 1945 - Guelma, pour partout le support qu'elle m'a occasion tout au long de la conception et la rédaction de ce mémoire. C'est un su me diriger d'une façon exemplaire. Sans ses idées et son expertise, la réalisation de ce mémoire n'aurait pas été possible.

Nous tenons à remercier également tous les membres du jury : **Dr. Mosaab BOUAFIA**, d'avoir accepter de présider et juger ce travail **Dr Nassima REZGUI** d'avoir accepté d'examiner et juger ce travail. Nous adresses nos sincères remerciements à tous Nos enseignants et toute personnes qui par leur paroles, conseils et critiques ont orienté nos réflexions tout au long de nos études durant notre parcours universitaire. Nous tenons à remercier nos chers collègues qui nous ont apporté leurs soutiens moral et pour les agréables moments tout au long de nos chemins et grands remerciements à tout les membres de ma famille.

Encore un grand merci à tous ceux qui nous ont soutenus de près ou de loin pour la réalisation de ce modeste travail.

ملخص

نظرية النقطة الثابتة هي أداة مفيدة للغاية، يمكن تطبيقها في جميع فروع التحليل الرياضي تقريبا. هناك العديد من المشكلات التي لا يمكن حلها باستخدام النظريات الأخرى الموجودة، ولكن يمكن حلها بسهولة باستخدام هذه النظرية .

في هذه المذكرة قمنا بدراسة عدة نظريات للنقطة الثابتة لتطبيقات مختلفة، معرفة على فضاءات مترية، مع شروط خاصة مثل : نظرية باناخ (Bannach)، نظرية كانان (Kannan)، نظرية تشاترجيا (Chatterjea)، نظرية سوزوكي (Suzuki)، نظرية بيراند (Berinde)، ...

خلال هذه الدراسة قمنا بتفصيل بعض البراهين و إعطاء عدة أمثلة لبعض هذه النظريات .

في الختام، قمنا بتطبيق بعض هذه النظريات لدراسة مشكلة وجود حل لجملة معادلات خطية و مشكلة حل معادلات تفاضلية عادية .

الكلمات المفتاحية :
فضاءات مترية تامة، نظرية النقطة الثابتة، تقلصات، تطبيق α-مقبول، نظام معادلات خطية، معادلات تفاضلية عادية.

Abstract

The fixed point theory is a highly useful tool that is applied to almost all branches of mathematical analysis. by applying the other existing theories there are many problems that cannot be solved but can be easily resolved by using this theory.

In this work, we explore several fixed-point theorems, for various applications, defined on complete metric spaces with special conditions, such as the Banach theorem, Kannan theorem, Chatterjea theorem, Suzuki theorem, theorem of Berinde, and others.

Throughout this study, we detailed some proofs and give several examples for some of these theorems.

Finally, we apply some of these theorems to study the existence problem of solutions for systems of linear equations and ordinary differential equations.

Keywords :
Complete metric spaces, fixed point theorem, contractions, application α-admissible, system of linear equations, ordinary differential equations.

Résumé

La théorie du point fixe est un outil très utile qui s'applique dans presque toutes les branches de l'analyse mathématique. Il existe de nombreux problèmes qui ne peuvent pas être résolus en utilisant les autres théorèmes existantes, mais qui peuvent être résolus facilement en utilisant cette théorie.

Dans ce mémoire, nous étudions plusieurs théorèmes du point fixe, pour diverses applications, définis sur des espaces métriques avec des conditions spéciales, tels que le théorème de Banach, le théorème de Kannan, le théorème de Chatterjea, le théorème de Suzuki, le théorème de Berinde, ect.

Au cours de cette étude, nous avons détaillé certaines preuves et donnons des plusieurs exemples pour quelques ces théorèmes.

Enfin, nous appliquons certains de ces théorèmes pour étudier le problème d'existence de la solution d'un système d'équations linéaires et le problème des équations différentielles ordinaires.

Mots clés :
Espaces métriques complets, théorème du point fixe, contractions, application α-admissible, système d'équations linéaires, équations différentielles ordinaires.

Notations

Les notations, symboles et abréviations les plus fréquemment utilisés sont répertoriés ci-dessous.

$\mathbb{N}$	:	L'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{Q}$	:	L'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$	:	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	:	L'ensemble des nombres réels positifs.
(X, d)	:	L'espace métrique muni de la distance d.
$C(I)$	:	L'espace des fonctions continues sur l'intervalle I.
$C([a,b], \mathbb{R})$	:	L'espace des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles.
$B(X, \mathbb{R})$	:	L'ensemble des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$.
$\delta(A)$	:	le diamètre de l'ensemble A.
$B(a,r)$	:	boule ouverte de centre a et de rayon r.
$\widetilde{B}(a,r)$	:	La boule fermée de centre a et de rayon r.
$s(a,r)$	:	Le sphère de centre a et de rayon r.
$\emptyset$	:	L'ensemble vide.
$x_n \to \ell$	:	La suite $\{x_n\}$ converge vers ℓ.
$\sup(A)$	:	la borne supérieure de l'ensemble A.
$\inf(A)$	:	la borne inférieure de l'ensemble A.
$\overline{A}$	:	L'adhérence d'une partie A
$T\colon X \to Y$	:	T est une application univoque de X dans Y.
$f(A)$	:	L'image directe par f de l'ensemble A.
$f^{-1}(A)$	:	L'image réciproque par f de l'ensemble A.

$Fix(T)$	:	L'ensemble des points fixes de T.
$i.e.,$	:	C'est à dire.
$\|x\|_2$	:	La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.
$\|x\|_\infty$	:	$:= \sup\{\|x(t)\|,\ t \in I = [0,1]\}$.

Introduction

La théorie du point fixe, l'un des domaines les plus dynamiques, a fasciné de nombreux chercheurs depuis 1922 avec le célèbre principe de contraction de Banach. C'est la branche émergente la plus rapide des mathématiques ayant de nombreuses applications dans les problèmes du monde réel. Il existe une vaste littérature sur la théorie du point fixe et c'est un domaine de recherche très actif à l'heure actuelle. Diverses conclusions relatives aux points fixes, points fixes communs, points de coïncidence, points fixes stricts communs, cercles fixes, disques fixes, ellipse fixe, etc. Pour les application univoque et multivoques ont été explorés avec des conditions contractantes distinctives dans de nombreux contextes et cette tradition se poursuit toujours. Les théorèmes du point fixe sont des outils très importants pour prouver l'existence et l'unicité des solutions à divers problèmes mathématiques et ils jouent un rôle important dans plusieurs domaines théoriques et appliqués des mathématiques, tels que les équations intégrales, les équations aux dérivées partielles, les inégalités variationnelles, l'analyse non linéaire systèmes dynamiques, fractales, économie, théorie des jeux, problèmes d'équilibre, problèmes d'optimisation et modélisation mathématique. En fait, l'existence d'une solution à tout problème du monde réel est comparable à l'existence d'un point fixe d'une application appropriée.

Les questions naturelles et fondamentales de la théorie du point fixe peuvent être résumées comme suit :

(Q_1) Pour une auto-application T sur un ensemble non vide X, quelles conditions sont nécessaires et suffisantes vérifiées pour que l'application T possède un point fixe dans cette structure ?

(Q_2) Quelles sont les propriétés nécessaires et suffisantes qui vérifiée par une application T pour garantir que l'équation à point fixe $T(x) = x$ a une solution ?

La théorie du point fixe est divisé en trois branches de recherche principales :

1. Théorie du point fixe métrique,
2. Théorie du point fixe topologique,
3. Théorie du point fixe discret.

Brièvement, ce champ de recherche consiste à élire les conditions nécessaires ou suffisantes pour qu'une application T d'un ensemble à lui-même ait un point fixe. Autrement dit, il cherche à examiner et à définir des contraintes sur l'ensemble X et une application $T \colon X \to X$ telle qu'il existe un point $x \in X$, où $T(x) = x$.

Les racines du théorème du point fixe remontent au moins aussi loin que 1817 lorsque le théorème des valeurs intermédiaires de Bolzano est apparu. En 1883, Poincaré généralisé ce résultat dans ce que l'on appelle le théorème de Bolzano-Poincaré-Miranda. Il est arrivé au premier résultat sur le point fixe en utilisant une application continue.

Brouwer (1881-1966) a prouvé le théorème utile suivant en 1912. Les théorèmes du point fixe de Browder sont fondamentaux dans la théorie du point fixe et ses applications. Le théorème du point fixe de Brouwer énoncé

“ `Toute application continue` T `d'une boule fermée` B `de` $\mathbb{R}^n$ `en elle même possède au moins un point fixe`”.

En d'autres termes,

$$\text{Si } T \colon B \to B \text{ est continue, il existe au moins un } x \in B \text{ tel que } T(x) = x.$$

Le cas particulier de ce théorème sur la droite réelle peut être énoncé de la manière suivante.

$$\text{Si } T \colon [0, 1] \to [0, 1] \text{ une application continue. Alors il a un point fixe.}$$

Schauder (1899-1943) a prouvé le théorème suivant pour les applications compactes.

“ `Toute application continue` $T \colon C \to C$ `d'un compact convexe` C `d'un espace de Banach possède au moins un point fixe` ”.

Ce théorème est important dans le traitement numérique des équations en analyse.

Banach (1892-1945) [3] a étudié le concept de contraction dans un espace métrique en 1922 dans le cadre de discussion de sa thèse de doctorat. En utilisant la condition de contraction, il a établi une conclusion intéressante dans l'espace métrique.

“ `Chaque application contractante d'un espace métrique complet en lui-même a un point fixe unique` ”.

Le principe de contraction de Banach est important pour l'analyse non linéaire comme l'optimisation, les inéquations variationnelles, les équations différentielles et la théorie du contrôle. Après cela, Ce principe a été généralisé et étendu dans plusieurs directions.

En 1973, **Geraghty** [10] a généralisé le principe de contraction de Banach en remplaçant la constante de contraction par une fonction ayant certaines propriétés spécifiées et qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0,1[$.

Wardowski [24] a généralisé le principe de contraction de Banach d'une manière différente d'autres résultats bien connus. Ce résultat de Wardowski a été étendu dans de plusieurs directions pour les applications univoques et multivoques.

En 2008, **Suzuki** a introduit un nouveau type d'applications et a présenté une généralisation du principe de contraction de Banach. Toutes ces généralisations ne s'appliquent qu'aux auto-applications.

En 2012, **Samet** et al. [21] ont introduit une nouvelle notion appelée α-admissibilité, ils ont obtenu des résultats pour les applications $\alpha-\psi$-contractantes. Plus tard, plusieurs auteurs ont étudié de tels concepts pour établir des résultats,

Ce mémoire est composé d'une introduction et de trois chapitres.

Chapitre I : Le premier contient des rappels et des notions de base qui seront utiles à notre travail. Plus particulièrement, nous présentons dans ce chapitre :

— Quelques définitions sur les espaces métriques, complets, compactes et les espaces de Banach,

— Quelques définitions sur les applications contractantes,

— Les applications α-admissibles.

Chapitre II : Dans le deuxième chapitre, nous présentons dans des espaces métriques, quelques théorèmes du point fixe pour différentes classes d'applications, et nous donnons des preuves pour certaines de ces théories.

Chapitre III : Dans le dernier chapitre nous appliquons les deux théorèmes (2.2) et (2.17) pour affirmer l'existence de solution pour un système d'équations linéaires , et des problèmes d'existence de solution d'une équation différentielle ordinaires.

Chapitre 1

Préliminaires sur les espaces métriques

Le concept d'espaces métriques a été introduit par le mathématicien français Maurice Fréchet (1878-1973) en 1906 dans son thèse de doctorat en généralisant l'idée d'espaces euclidiens. Ce concept est une abstraction de la distance dans l'espace euclidien né des propriétés bien connues de la distance euclidienne dans un cadre abstrait, et il fournit une riche offre de fonctions continues.
La structure particulière d'un espace métrique induit une topologie comportant de nombreux applications de la topologie dans l'analyse moderne.
Le terme topologie a été inventé par J.B. Listing (1808–1882) en 1847, mais Felix Hausdorff (1868–1942) a popularisé le terme topologie en 1914 et a développé ce sujet dans son livre "Fondamentaux de la théorie des ensembles", qui découlait de l'analyse. Ses travaux marquants retracent le parcours systématique de la topologie générale.

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques concepts et définitions que nous utiliserons dans les chapitres suivantes

1.1 Espaces métriques

1.1.1 Distances

On commence par définir la notion de distance.

Définition 1.1. Une `distance` (ou `métrique`) sur un ensemble non vide X est une application :

$$\begin{array}{rccc} d: & X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (x, y) & \longmapsto & d(x, y). \end{array}$$

vérifiant pour tous x, y, z dans X, les propriétés suivantes :

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$ **(réflexivité)**
2. $d(x, y) = d(y, x)$ **(symétrie)**
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ **(inégalité triangulaire)**.

L'ensemble X muni de la distance d est appelé `espace métrique`, on note un tel espace (X, d).

Le nombre réel positif $d(x, y)$ est appelé la distance entre x et y dans X.

Exemple 1.1. *Un exemple fondamental d'espace métrique est l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle ; pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $d(x, y) = |x - y|$, la valeur absolue du nombre réel $x - y$.*

Le couple (X, d) est appelé espace métrique usuel sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.2. *Soit X un ensemble quelconque. Pour tous $x, y \in X$, on pose :*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & si \quad x = y \\ 1 & si \quad x \neq y \end{cases}.$$

Alors d est une distance sur X, appelée distance triviale ou distance discrète.

Exemple 1.3. *Soit $X = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tous $f, g \in X$, on pose*

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Alors d est une distance sur EX.

Exemple 1.4. *Pour tous $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose :*

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors d_2 est une distance appelée la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.1. *Soit (X, d) un espace métrique.*

1. *Pour tous $x, y, z \in X$, on a*

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y).$$

2. *Pour tous* $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1} \in X$, *on a*

$$d(x_1, x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1}).$$

Définition 1.2. Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X, (A \neq \varnothing)$ et soit $x \in X$.

On appelle distance de x à A, le réel défini par

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \{d(x, a)\}.$$

Proposition 1.2. *Nous avons*

$$d(x, A) = 0 \Longleftrightarrow x \in \overline{A}.$$

Définition 1.3. Soit A une parties non vides d'un espace métrique (X, d).

Le `diamètre` de A est défini par

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} \{d(x, y)\}.$$

La distance d est dite bornée si $\delta(X) < +\infty$.

1.1.2 Boules ouvertes, boules fermées et Sphères

Définition 1.4. Soient (X, d) un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$.

1. On appelle `boule ouverte` de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}.$$

2. On appelle `boule fermée` de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$\widetilde{B}(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}.$$

3. On appelle `sphère` de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$S(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) = r\}.$$

Remarque 1.1.

1. Par définition, $B(a, 0) = 0$ et $\widetilde{B}(a, 0) = a$.
2. Il est clair que $B(a, r) \subset \widetilde{B}(a, r)$.
3. Notons que l'on a $\widetilde{B}(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$.

Définition 1.5. Un sous-ensemble M d'un espace métrique (X, d) est appelé

1. **Ouvert** si, et seulement si pour tout $x \in M$ il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset M$, où
$$B(x, r) = \{a \in X : d(x, a) < r\}$$
2. **Borné** si, et seulement si le diamètre de M est borné, c'est à dire $\delta(M) < +\infty$, où
$$\delta(M) = \sup\{d(x, y)/x, y \in M\}$$
3. **Fermé** si, et seulement si pour toute suite $\{x_n\}$ dans M telle que $x_n \to x \in X$, alors $x \in M$
4. **Compact** si, et seulement si toute suite dans M admet une sous-suite convergente dans M.

1.1.3 Suites dans un espace métrique

Définition 1.6 (Suite convergente). Soit (X, d) un espace métrique.
Une suite $\{x_n\}$ dans (X, d) `converge` vers un élément x de X si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq \mathbb{N} : \quad d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Autrement dit, la suite $\{x_n\}$ converge vers x dans X si, et seulement si

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Dans ce cas, on dit que x est la limite de $\{x_n\}$. On note

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x.$$

Proposition 1.3. *Toute suite convergente est bornée.*

Proposition 1.4. *Soit (X, d) un espace métrique. Soient $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ deux suites convergentes dans (X, d) respectivement vers x et y. Alors on a*

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y).$$

Définition 1.7 (Suite de Cauchy). Soient (X, d) un espace métrique et $\{x_n\}$ une suite dans X. La suite $\{x_n\}$ est de `Cauchy` si, et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists N \in \mathbb{N}),\ (\forall n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon)$$

C'est à dire

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Exemple 1.5. *La suite* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *telle que* $x_n = \dfrac{1}{n}$ *est de Cauchy dans* $\mathbb{R}$.

En effet, étant donné $\varepsilon > 0$*, par la propriété d'Archimède, il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $n_0 > 2$.

Donc

$$\begin{aligned} m, n > n_0 \implies |x_m - x_n| &= \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| \\ &= \frac{1}{m} + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Mais pour $m > n_0$ *on a* $\dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{n_0}$ *et pour* $n > n_0$ *on a* $\dfrac{1}{n_0} < \dfrac{1}{n}$. *Alors,*

$$m, n > n_0 \implies |x_m - x_n| < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0}.$$

d'où

$$m, n > n_0 \implies |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Par conséquent, $\{x_n\}$ *est de Cauchy.*

Exemple 1.6. *Soit* $X = C[0,1]$ *un espace métrique avec la métrique* d_∞ *de définie par*

$$d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)| \quad \textit{pour tous} \quad f, g \in X.$$

La suite $\{f_n\}$ *en* X *donnée par*

$$f_n(t) = \frac{nt}{n+t} \quad \textit{pour tout} \quad t \in [0,1],$$

est une suite de Cauchy dans X.

En effet, pour $m \geq n$*, la fonction*

$$t \mapsto \frac{mt}{m+t} - \frac{nt}{n+t} = \frac{(m-n)t^2}{(m+t)(n+t)},$$

continue sur $[0,1]$*, prend son maximum à un moment donné à* $t_0 \in [0,1]$. *Donc*

$$\begin{aligned} d_\infty(f_m, f_n) &= \sup_{t\in[0,1]} |f_m(t) - f_n(t)| \\ &= \frac{(m-n)t_0^2}{(m+t_0)(n+t_0)} \\ &\leq \frac{t_0^2}{(n+t_0)} \leq \frac{1}{n} \to 0 \quad \textit{pour tous} \quad n, m. \end{aligned}$$

De plus, la suite $\{f_n\}$ converge vers une certaine limite. En effet, soit $f(t) = t$. Alors

$$|f_n(t) - f(t)| = \left|\frac{nt}{n+t} - t\right| = \frac{t^2}{n+t} \leq \frac{1}{n} \to 0 \quad si \quad n \to +\infty.$$

Par conséquent, $\{f_n\}$ converge vers la limite f, où $f(t) = t$ pour tout $t \in [0,1]$.

Proposition 1.5. *Dans un espace métrique on a*

1. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy est borné.*

Démenstration.

1. Soit $\{x_n\}$ une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$,

   $$|x_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

   En utilisant l'inégalité triangulaire on obtient pour tous $p \geq N$ et $q \geq N$

   $$\begin{aligned} |x_p - x_q| &= |(x_p - \ell) - (x_q - \ell)| \\ &\leq |x_p - \ell| + |x_q - \ell| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

   Ceci prouve que la suite $\{x_n\}$ est de Cauchy. Par contre, il y a des suites de Cauchy qui ne convergent pas.

2. Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy. D'après la définition, prenons $\varepsilon = 1$, on trouve qu'il existe un entier N tel que, pour tous $p, q \geq N$, on ait

   $$|u_p - u_q| \leq 1$$

   Fixons $q = N$ on trouve que, pour tout $p \geq N$,

   $$|u_p| = |u_N + (u_p - u_N)| \leq |u_N| + 1$$

   On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$|u_n| \leq \max(|u_N| + 1, |u_0|, |u_1|, \cdots, |u_{N-1}|).$$

Ainsi la suite $\{x_n\}$ est bornée. ■

Proposition 1.6. *Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy. Supposons que $\{x_n\}$ admette une suite extraite convergente, de limite x. Alors la suite $\{x_n\}$ est elle-même converge vers la même limite.*

Démenstration.

Soient $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante et $\{x_{\varphi(n)}\}$ une sous-suite de $\{x_n\}$ convergeant vers x. On montre que $\{x_n\}$ tend vers x quand n tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > N_0 \quad \texttt{implique} \quad \left|x_{\varphi(n)} - x\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$p > N_1 \text{ et } q > N_1 \quad \texttt{impliquent} \quad |u_p - u_q| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Choisissons un $n > N_0$ tel que $\xi(n) > N_1$. Alors, pour tout $p > N_1$ on a par l'inégalité triangulaire :

$$|x_p - x| \leq \left|x_{\varphi(n)} - x\right| + \left|x_p - x_{\varphi(n)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

Cela prouve que $\{x_n\}$ tend vers x quand n tend vers $+\infty$. ■

1.1.4 Applications Continues

Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et soit $f\colon X \to Y$ une application.

Définition 1.8. On dit que f est `continue` en $x_0 \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad d(x_0, x) < \delta \implies d'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur X si f est continue en tout point de X.

Proposition 1.7. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue en un point $x \in X$.*
2. *Pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X converge vers x, la suite $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.*

Définition 1.9. Une application f est dite `uniformément continue` sur X si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in X, \quad d(x, x') < \delta \implies d'(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Proposition 1.8. *Une application f est continue au point x si, et seulement si pour toute suite $\{x_n\}$ qui converge vers x dans X, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x).$$

Définition 1.10. Soient X, Y deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une fonction continue. Alors :

1. Pour tout ouvert U de Y , $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.
2. Pour tout fermé F de Y , $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.
3. Pour tout compact K de X, $f(K)$ est un compact de Y.

1.2 Espace métrique complet

Définition 1.11 (**Espace métrique**)**.** Un espace métrique (X, d) est `complet` si, et seulement si toute suite de Cauchy de X est convergente dans X.

Exemple 1.7. $(\mathbb{R}, |\ .\ |)$ *et* $(\mathbb{R}^n, d_2)$ *sont complets.*

Exemple 1.8. $(\mathbb{Q}, |\ .\ |)$ *n'est pas complet, car il existe dans* $\mathbb{Q}$ *une suite* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *définit par*

$$x_n = \frac{E(3^n\sqrt{2} - 1)}{3^n}$$

est de Cauchy, mais ne converge pas.
En effet , on a $\sqrt{2} - \dfrac{1}{3^n} < x_n \leq \sqrt{2}$ *d'où* $x_n \to \sqrt{2}$ *dans* $\mathbb{R}$.
Donc $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy. Par ailleurs,* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. *L'unicité de la limite implique que* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas dans* $\mathbb{Q}$.

Remarque 1.2. L'intérêt des espaces complet est de pouvoir y représenter ses éléments comme limites d'une suite de Cauchy. Par exemple, dans $\mathbb{R}$: $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ ce qui définit parfaitement le nombre e.

Exemple 1.9. $\mathbb{R}^n$ *muni d'une norme quelconque* (elles sont toutes équivalentes) *est un espace complet.*

Exemple 1.10. $(C([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ *est un espace complet.*

Exemple 1.11. *L'espace* $(C([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_1)$ *n'est pas complet. En effet, la suite de fonctions continues.*

$$f_n(t) = \begin{cases} (2t)^n, & si \;\; t \in [0, 1/n] \\ 1, & si \;\; t \in [1/n, 1] \end{cases},$$

est de Cauchy pour la norme $\|.\|_1$*. Puisque*

$$\int_0^1 \mid f_n(t) - f_m(t) \mid dt = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{x+m}\right| \to 0 \text{ quand } n,\ m \to \infty$$

mais si f_n *convergeant, sa limite* f *devrait être nulle dans* $[0, 1/2[$*, égal à* 1 *dans* $[1/2, 1]$*, c'est à dire* $f \notin C([0,1],\mathbb{R})$*.*

Exemple 1.12. *L'espace* $(]-1,1[, \mid . \mid)$ *n'est pas complet. En effet, la suite de Cauchy* $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathbb{R}$ *vers 1 mais* $1 \notin]-1,1[$*.*

Définition 1.12. Un sous-ensemble M d'un espace métrique (X, d) est `complet` si pour toute suite de Cauchy $\{x_n\}$ dans M il existe $x \in M$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

Théorème 1.13. *Soit* X *un ensemble. Alors l'espace* $B(X, \mathbb{R}^p)$ *des fonctions bornées de* X *dans* $\mathbb{R}^p$ *muni de la norme*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_{\mathbb{R}^p},$$

est complet, où $\|.\|_{\mathbb{R}^p}$ *est l'une des normes équivalentes sur* $\mathbb{R}^p$*.*

Proposition 1.9. *Soit* (X, d) *un espace métrique et soit* M *un sous-ensemble de* X*.*

1. *Si* M *est complet alors* M *est fermé.*
2. *Si* X *est complet donc* M *est fermé si,et seulement si ,* M *est complet.*

1.3 Espaces métriques compacts

Définition 1.13 (Propriété de Borel-Lebesgue). Un espace métrique (X, d) est dit `espace métrique compact` si de tout recouvrement de X par une famille d'ouverts $\{U_i\}_{i\in I}$, i.e.,

$$X \subset \bigcup_{i\in I} U_i,$$

on peut extraire un sous recouvrement fini : il existe $i_1, ..., i_m \in I$ tels que

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{i_k}.$$

Exemple 1.14. *L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas compact.*

En effet. Considérons le recouvrement de $\mathbb{R}$ par la famille d'ouverts $]-n,n[$ pour $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $n_1, \cdots, n_m$ tels que

$$\mathbb{R} \subset \bigcup_{i=1}^{m}]-n_i, n_i[.$$

Posons $N = \max\{n_1, \cdots, n_m\}$. On a donc $\mathbb{R} \subset]-N, N[$, ce qui est absurde.

Définition 1.14 (Propriété de Bolzano-Weierstrass). Un espace métrique (X,d) est dit `séquentiellement compact` si de toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X, on peut extraire une sous-suite convergente. (ou bien toute suite d'éléments de X admet une valeur d'adhérence dans X).

Théorème 1.15. *Soit (X,d) un espace métrique. Alors X est compact si, et seulement s'il est séquentiellement compact.*

Proposition 1.10. *Soit (X,d) un espace métrique. Une partie A de X est dit compacte si, et seulement si de tout recouvrement de A par une famille d'ouverts $\{U_i\}_{i\in I}$ de X, on peut extraire un sous recouvrement fini. En d'autres termes, si $\{U_i\}_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de X telle que $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, alors il existe $J \subset I$ fini tel que $A \subset \bigcup_{i\in J} U_i$.*

Lemme 1.16. *Tout intervalle fermé $[a,b]$ est compact dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.*

Théorème 1.17. *Soit (X,d) un espace métrique et $A \in X$*

1. *Si X est compact et si A est une partie fermée alors A est compacte.*
2. *Si A est une partie compacte alors A fermé et bornée.*

Théorème 1.18. *Un espace compact est complet.*

Corollaire 1.19. *Les parties compactes d'un espace métrique sont fermées et bornées.*

Proposition 1.11. *Tout espace métrique compact (X,d) est complet.*

Proposition 1.12. *L'image d'un compact par une application continue est un compact.*

1.4 Espaces de Banach

1.4.1 Définitions

Les espaces vectoriels considérés sont des K-espaces vectoriels avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

Définition 1.15. Soit X un K-espace vectoriel. Une application $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}_+$ est dite une `norme` si, et seulement si, pour tous $x, y \in X$ et $\alpha \in K$, on ait

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0,$ **(séparation)**
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|,$ **(homogénéité)**
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|,$ **(inégalité triangulaire)**

Dans ce cas, si pour x et y dans X, on pose $d(x, y) = \|x - y\|$, alors (E, d) est un espace métrique. On dit que d est la distance associé à la norme $\|\cdot\|$.

Définition 1.16. Un `espace de Banach` est un espace vectoriel normé complet.

Corollaire 1.20. *Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach est lui-même un espace de Banach pour la norme induite.*

On rappelle le résultat suivant :

Théorème 1.21. *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Corollaire 1.22. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.*

Démenstration.

Soit donc X un espace vectoriel normé de dimension finie et $\{e_1, ..., e_n\}$ base de X. Notons, pour tout $x \in E$, $(x_1, ..., x_n)$ les coordonnées de x dans cette base sont

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_\infty = \sup_{1 \leq j \leq n} \mid x_j \mid.$$

La norme $x \longmapsto \|(x_1, ..., x_n)\|_\infty$ étant équivalente à la norme de X, on obtient un isomorphisme bi-continu $X \ni x \longmapsto (x_1, ..., x_n) \in K^n$, comme K^n muni de la norme $\|.\|_\infty$ est complet, X est complet. ■

1.4.2 Exemples d'espaces de Banach

Voici quelques exemples d'espaces de Banach, qui sont des espaces de fonctions, importants en Analyse.

Soit F un espace de Banach, dont on note $|\ .\ |_F$ la norme (par exemple, F est un espace vectoriel normale de dimension finie, K^N ou même K).

1. L'espace $B(A, F)$ des applications bornées de A dans F où A est un ensemble, muni de la norme du sup :

$$\|f\|_B = \sup_{x \in A} | f(x) |_F.$$

2. L'espace $C_b(X, F)$ des applications continues bornées de (X, d), espace métrique à valeurs dans F, muni de la norme sup$\|.\|_B$.

3. $C(K, F)$, l'espace des applications continues de (K, d), espace métrique compact à valeurs dans F, muni de la norme du sup $\|.\|_B$.

   La norme du sup$\|.\|_B$ définit sur chacun de ces espaces la topologie de la convergence uniforme des applications à valeurs dans F.

1.5 Applications contractantes

Tout d'abord, on va donner quelques définitions concernant les applications contractantes.

Définition 1.17. Soit (X, d) un espace métrique. L'application $T : X \to X$ est dite `Lipschitzienne` s'il existe un nombre réel $k \geq 0$ tel que pour tous $x, y \in X$ on a

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \tag{1.1}$$

- Si $k = 1$, T est appelée `non expansive`.
- Si $k < 1$, T est dite `contraction` ou application contractante.
- Si $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$ pour tout $x \neq y$, T est dite `contractive`.

Le nombre k est appelé constante de Lipschitz.

On remarque qu'une application contractante peut admettre au plus un point fixe. Nous remarquons aussi que

$$\text{Contraction} \Rightarrow \text{Contractive} \Rightarrow \text{Non expansive} \Rightarrow \text{Lipschitzienne}$$

Mais les implications inverses ne sont pas vraies en général. De plus, toutes ces applications sont continues.

Exemple 1.23. *Soit l'application* $T\colon [1,+\infty[\to [1,+\infty[$ *définit par*

$$T(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

f *est une contraction* $(k = \frac{1}{2})$ *parce que pour tous* x, y *de* $[1,+\infty[$

$$\begin{aligned}
|T(x) - T(y)| &= \left|\frac{1}{2}\left(x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}(x-y)\left(1 - \frac{1}{xy}\right)\right| \\
&= \frac{|xy-1|}{2xy}|x-y| \\
&\leq \frac{xy}{2xy}|x-y| \\
&= \frac{1}{2}|x-y|.
\end{aligned}$$

Exemple 1.24. *Soit* $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$T(x) = \frac{1}{3}\,x + 2.$$

Pour tous x, y *de* $\mathbb{R}$, $(x \neq y)$ *on a*

$$\begin{aligned}
|T(x) - T(y)| &= \left|\frac{1}{3}\,x + 2 - \frac{1}{3}\,y - 2\right| \\
&= \frac{1}{3}|x-y| \\
&\leq \frac{1}{3}|x-y|.
\end{aligned}$$

Donc f *est une application contractante .*

Exemple 1.25. *On définit l'application* $T\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *par :*

$$T(x) = \frac{x}{x+1}.$$

Pour tous x, y *dans* $\mathbb{R}^+$ *on a*

$$\begin{aligned}
|T(x) - T(y)| &= \left|\frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1}\right| \\
&= \left|\frac{x(1+y) - y(1+x)}{(x+1)(y+1)}\right| \\
&= \left|\frac{x-y}{(x+1)(y+1)}\right| \\
&= \frac{|x-y|}{(x+1)(y+1)} \\
&< |x-y|.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire f *est non expansive.*

Proposition 1.13. *Soit T une contraction. Alors $T^n, (T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T, n$ fois $)$ est aussi une contraction.*
De plus, si k est la constante de T, k^n est la constante de T^n.

1.6 Applications α-admissible

En 2012, Samet et al. [21] ont introduit le concept d'une `application` α`-admissible` et ont établi des divers théorèmes de point fixe pour de telles applications définies sur des espaces métriques complets.

Définition 1.18 ([21])**.** Soient $T\colon X \to X$ une application et $\alpha\colon X \times X \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors T est dit α-admissible si

$$\alpha(x, y) \geq 1 \implies \alpha(Tx, Ty) \geq 1 \tag{1.2}$$

Exemple 1.26. *Soit $X =]0, +\infty[$. On définit $T\colon X \to X$ et $\alpha\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ par $Tx = 2$ et*

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 2 & si\ x \geq y \\ 0 & si\ x < y \end{cases}.$$

Alors, T est α-admissible.

Exemple 1.27. *Soit $X = [0, +\infty[$. On définit $T\colon X \to X$ et $\alpha\colon X \times X \to [0, +\infty[$ par $Tx = \sqrt{x}$ pour tout $x \in X$ et*

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} e^{x-y} & si\ x \geq y \\ 0 & si\ x < y \end{cases}.$$

Alors, T est α-admissible.

Exemple 1.28. *Soit $X = [0, 1]$. On définit $T\colon X \to X$ et $\alpha\colon X \times X \to [0, +\infty[$ respectivement comme suit :*

$$Tx = \frac{\sin^2 x}{16},\ pour\ x \in X \quad et \quad \alpha(x, y) = \begin{cases} e^{x+y}, & si\ 0 \geq x \geq 1\ ,\ 0 \geq y \geq \dfrac{1}{8}, \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Donc T est α-admissible.

Définition 1.19 ([15])**.** Une application α-admissible T est dite triangulaire α-admissible si

$$\alpha(x, z) \geq 1 \text{ et } \alpha(z, y) \geq 1 \implies \alpha(x, y) \geq 1. \tag{1.3}$$

Exemple 1.29. *Soit $X = \mathbb{R}$, $Tx = \sqrt[3]{x}$ et $\alpha(x,y) = e^{x-y}$ alors T est une application triangulaire α-admissible. En effet, si $\alpha(x,y) = e^{x-y} \geq 1$ alors $x \geq y$ ce qui implique $Tx \geq Ty$. Autrement dit, $\alpha(Tx,Ty) = e^{Tx-Ty} \geq 1$. Aussi, si*

$$\begin{cases} \alpha(x,z) \geq 1 \\ \alpha(z,y) \geq 1 \end{cases}.$$

alors

$$\begin{cases} x - z \geq 0 \\ z - y \geq 0 \end{cases}.$$

Autrement dit, $x - y \geq 0$ et donc $\alpha(x,y) = e^{x-y} \geq 1$

Lemme 1.30 ([15])**.** *Soit $T\colon X \to X$ une application triangulaire α-admissible. Supposons qu'il existe $x_1 \in X$ tel que $\alpha(x_1, Tx_1) \geq 1$. On définit une suite $\{x_n\}$ par $x_{n+1} = Tx_n$. Alors on a $\alpha(x_n, x_m) \geq 1$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ avec $n < m$.*

Démenstration.

Puisqu'il existe $x_0 \in X$ tel que $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ alors de (1.2), on déduit que $\alpha(x_1, x_2) = \alpha(Tx_0, T^2x_0) \geq 1$. De même manière, on obtient $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Supposons que $m < n$. Puisque

$$\begin{cases} \alpha(x_m, x_{m+1}) \geq 1 \\ \alpha(x_{m+1}, x_{m+2}) \geq 1 \end{cases}.$$

alors de (1.3) on a $\alpha(x_m, x_{m+2}) \geq 1$. Encore une fois, puisque

$$\begin{cases} \alpha(x_m, x_{m+2}) \geq 1 \\ \alpha(x_{m+2}, x_{m+3}) \geq 1 \end{cases}.$$

alors on en déduit $\alpha(x_m, x_{m+3}) \geq 1$.
De même façon, on obtient $\alpha(x_m, x_n) \geq 1$. ■

Chapitre 2

Quelques théorèmes du point fixe dans des espaces métriques

Dans ce chapitre, nous présentons dans des espaces métriques, quelques théorèmes du point fixe pour différentes classes d'applications contractantes, et nous avons donné des preuves et des exemples pour certaines de ces théories.

2.1 Principe de contractions de Banach

Le principe de contraction de Banach, également connu sous le nom de principe de Banach, est un outil important dans la théorie des espaces métriques. Il garantit l'existence et l'unicité des points fixes de certaines auto-applications d'espaces métriques et fournit une méthode constructive pour trouver ces points fixes. Le principe est apparu pour la première fois sous une forme explicite dans la thèse de doctorat de Banach [3], où il a été utilisé pour établir l'existence d'une solution à une équation intégrale.

Définition 2.1. Soit (X, d) un espace métrique. On dit que T admet un `point fixe` x s'il existe $x \in X$ tel que

$$Tx = x$$

L'ensemble de tous les points fixes de T est noté $Fix(T)$.

Exemple 2.1.

1. *Une translation du plan n'a pas de points fixes.*
2. *Une rotation du plan a un seul point fixe qui est son centre.*

3. *Soit* $X = \mathbb{R}$ *et considérons l'application* T *telle que* $Tx = x^2$.

   T *admet* 1 *et* 0 *comme points fixes. Cependant,* T *n'a pas de points fixes dans* $X =]0, 1/2[$.

4. *Soit* $X = C[0,1]$ *l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle fermé* $[0,1]$. *Soit* T *défini sur* X *par*

$$T(f) = f(0) + \int_0^x f(y)dy.$$

   Toute fonction $f(x) = \lambda e^x$ *pour tout* $x \in [0,1]$, *où* λ *est une constante réelle, est un point fixe de* T.

5. *La projection* $\pi_1 : (x, y, z) \mapsto x$ *définit de* $\mathbb{R}^3$ *dans l'axe* (xx') *a une infinité de points fixes, tous situés sur cet axe.*

Le principe de contraction de Banach peut être énoncé comme suit.

Théorème 2.2 (Principe de contraction de Banach). [3] *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une contraction. Alors*

(*i*) T *admet un point fixe unique* $x^* \in X$,

(*ii*) *Pour tout* $x \in X$, *la suite de Picard* $\{T^n x\}$ *converge vers* x^*,

(*iii*) *On a l'estimation suivante : Pour tout* $x \in X$,

$$d(T^n x, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, Tx), \; n \in N.$$

Démenstration.

Soit $x_0 \in X$ un point quelconque. On définit la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ comme suite

$$x_n = T(x_{n-1}) \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

La suite $\{x_n\}$ est une suite bien définie d'éléments de X.

Par hypothèse, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &\leq k d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\;\;\vdots \\ &\leq k^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Si p et p sont des entiers tels que $n \geq p \geq 0$ l'inégalité triangulaire donne :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_p) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{p+1}, x_p) \\ &\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \cdots + k^p) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{k^p}{1-k} d(x_1, x_0). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Comme $k \in]0,1[$, $k^p \to 0$ quand $p \to +\infty$, donc la suite $\{x_n\}$ est de Cauchy dans X qui est complet. Elle y converge donc vers un élément $u \in X$.

Nous avons

$$d(x_{n+1}, Tu) = d(Tx_n, Tu) \leq kd(x_n, u),$$

et comme

$$d(x_n, u) \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty,$$

on trouve

$$Tu = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = u.$$

Donc u est un point fixe de T.

Pour l'unicité de u. Supposons que $v \in X$ est un autre point fixe de T tel que $v \neq u$. On aura alors $d(u, v) > 0$ et

$$\begin{aligned} d(u, v) &= d(T(u), T(v)) \\ &\leq kd(u, v) \\ &< d(u, v). \end{aligned}$$

C'est une contradiction. Donc $d(u, v) = 0$, c'est-à-dire $u = v$.

L'unicité de u montre donc aussi qu'il est indépendant du choix du point x_0.

Par l'inégalité triangulaire et l'inéquation (2.1) , on trouve pour tout $n < p$

$$\begin{aligned} d(x_n, u) &\leq d(x_n, x_p) + d(x_p, u) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) + d(x_p, u) \end{aligned}$$

On passe a la limite $p \to +\infty$, on obtient

$$d(x_n, u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0),$$

qui fournit une approximation du taux de convergence de $\{x_n\}$ vers le point fixe u. ∎

Exemple 2.3. *Soit $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par $Tx = \dfrac{2}{3}x + 1, x \in \mathbb{R}$. alors T est une contraction et $x^* = 3$ est le point fixe unique de T.*

En 1962, Edelstein a prouvé une autre version du principe de contraction de Banach dans un espace métrique compact.

Théorème 2.4. [8] *Soient (X, d) un espace métrique compact et $T\colon X \to X$ une application contractive, c'est à dire pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$ on ait*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y).$$

Alors, T a un point fixe unique dans X.

2.2 Théorème du point fixe de Kannan

Dans le théorème de Banach nous utilisons la continuité de l'application T pour prouver l'existence du point fixe. Ainsi, il est naturel de se poser la question suivante : existe-t-il des conditions de contraction qui n'obligent pas l'application T d'être continue ?
En 1968, Kannan a répondu à cette question par l'affirmative et a prouvé un théorème de point fixe pour la condition de contraction suivante, qui est appelée contraction de Kannan.

Théorème 2.5 (Kannan 1968). [14] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $f\colon X \to X$ une application de Kannan, c'est à dire qu'il existe $0 < k < \dfrac{1}{2}$ tel que pour tous $x, y \in X$, on ait*

$$d\left(T(x), T(y)\right) \leq k\left[d(x, T(x)) + d(y, T(y))\right]. \tag{2.2}$$

Alors T admet un point fixe unique dans E.

<u>**Démenstration.**</u>

L'existence : Soit $x_0 \in E$, on définit la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$x_n = T(x_{n-1}),\ n = 1, 2, \cdots, n$$

en utilisant la condition (2.2), on obtient

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \\ &\leq k[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})], \end{aligned}$$

ce qui implique

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{k}{1-k} d(x_{n-1}, x_n).$$

Par récurrence sur n, on a

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{k}{1-k}\right)^n d(x_0, x_1).$$

On pose $r = \dfrac{k}{1-k}$. Si n, p sont deux entiers naturels, alors

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (r^n + r^{n+1} + ... + r^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{r^n}{1-r} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Comme $\alpha \in [0, \dfrac{1}{2}[$ on a $r \in [0, 1[$ et donc $d(x_n, x_{n+p}) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est alors de Cauchy. Comme X est complet, il existe $u \in X$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = u$. Ainsi u est un point fixe de X car

$$\begin{aligned} d(u, T(u)) &\leq d(u, x_n) + d(x_n, T(u)) \\ &\leq d(u, x_n) + a[d(x_n, x_{n-1}) + d(x_n, T(u))], \end{aligned}$$

et donc

$$d(u, T(u)) \leq \frac{1}{1-a} d(u, x_n) + \frac{a}{a-1} d(x_n, x_{n-1}).$$

Soit $\varepsilon > 0$ un réel arbitraire, comme $\{x_n\}_{n \geq 0}$ converge vers u, il existe un entier naturel $N = N(\varepsilon)$ tel que

$$\forall n \geq N \geq 1 \Rightarrow d(u, x_n) \leq \varepsilon \frac{1-a}{1+a},$$

et

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq \varepsilon \frac{1-a}{1+a}.$$

Il en résulte que

$$d(u, T(u)) \leq \frac{\varepsilon}{1+a} + \frac{\varepsilon a}{1+a} = \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on déduit que $T(u) = u$.

L'unicité : Soit v est un autre point fixe de f, alors

$$\begin{aligned} d(v, u) &\leq a[d(u, T(u)) + d(v, T(v))] \\ &= 0, \end{aligned}$$

et donc $u = v$, ce qui achève la preuve. ■

Exemple 2.6. *Soit* $X = \mathbb{R}$ *et* $T\colon X \to X$ *une application définie par :*

$$T(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 2 \\ \dfrac{-1}{2} & si\ x > 2 \end{cases}.$$

Alors

1. T *n'est pas continue,*
2. T *satisfait la condition* (2.2) *avec* $k = \dfrac{1}{5}$ *et par conséquent, d'après le théorème de Kannan,* T *admet un point fixe unique* $u = 0$ *dans* X*.*

2.3 Théorème du point fixe de Chatterjea

En 1971 Chatterjea a obtenu la variante du théorème de point fixe de Kannan.

Théorème 2.7 (**Chatterjea**)**.** [5] *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et* $T\colon X \to X$ *une application de Chatterjea, c'est à dire qu'il existe* $a \in [0, \frac{1}{2}[$ *tel que pour tous* $x, y \in X$ *on ait*

$$d(T(x), T(y)) \leq a\left[d(x, T(y)) + d(y, T(x))\right]. \tag{2.3}$$

Alors, T *admet un point fixe unique dans* X*.*

Démenstration.

L'existance : Soit $x_0 \in X$ un arbitraire, on définit la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$x_n = T(x_{n-1}) = f_n(x_0), n = 1, 2, ..., n$$

En utilisant la condition (2.3), on obtient

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \\ &\leq a[d(x_{n-1}, T(x_n)) + d(x_n, T(x_{n-1}))] \\ &= a[d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)] \\ &\leq a[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})]. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{a}{1-a}\right)^n d(x_0, x_1).$$

On pose $r = \dfrac{a}{1-a}$. Si n, p sont deux entiers naturels, alors

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (r^n + r^{n+1} + ... + r^{n+p-1})\ d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{r^n}{1-r}\ d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Comme $\lambda \in [0, \frac{1}{2}[$, on a $r \in [0, 1[$ et donc $d(x_n, x_{n+p}) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. La suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est alors de Cauchy. Comme X est complet, il existe $u \in X$. u est un point fixe de T car :

$$\begin{aligned} d(u, T(u)) &\leq d(u, x_n) + d(x_n, T(u)) \\ &\leq d(u, x_n) + a[d(x_{n-1}, x_n) + d(u, T(u))], \end{aligned}$$

donc

$$d(u, T(u)) \leq \frac{1}{1-a} d(u, x_n) + \frac{a}{1-a} d(x_{n-1}, x_n).$$

Soit $\varepsilon > 0$ un réel arbitraire, comme $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u, il existe un entier naturel $N = N(\varepsilon)$ tel que

$$\forall n \geq N \geq 1 \Rightarrow d(u, x_n) \leq \varepsilon\ \frac{1-a}{1+a},$$

et

$$d(x_{n-1}, u) \leq \varepsilon\ \frac{1-a}{1+a}.$$

Il en résultat que

$$d(u, T(u)) \leq \frac{\varepsilon}{1+a} + \frac{\varepsilon a}{1+a}.$$

Comme ε est arbitraire, on déduit que $T(u) = u$.

L'unicité : Supposons que v est un autre point fixe de f. En suite, nous avons $T(v) = v$ et

$$\begin{aligned} d(u, v) &= d(T(u), T(v)) \\ &\leq \lambda[d(u, T(v)) + d(v, T(u))]. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$d(u, v) \leq 2\lambda d(u, v).$$

Donc $u = v$, d'où l'unicité. ■

2.4 Théorème du point fixe de Suzuki

En 2008, Suzuki a publié son célèbre article [22] dans lequel il a présenté une condition nécessaire et suffisante dans un espace métrique complet en utilisant une généralisation attrayante du principe de contraction de Banach.

Théorème 2.8 (**Génerelisation de Suzuki** [22])**.** *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T\colon X \to X$*. On définit une fonction décroissante* $\theta : [0, 1[\to]\frac{1}{2}, 1]$ *vérifiant :*

$$\theta(r) = \begin{cases} 1 & si \;\; 0 \leq r \leq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ (1-r)r^{-2} & si \;\; \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \leq r \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ (1+r)^{-1} & si \;\; \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq r < 1 \end{cases} .$$

Supposons qu'il existe $r \in [0, 1[$ *, tel que*

$$\theta(r)d(x, Tx) \leq d(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq rd(x, y)$$

pour tous $x, y \in X$*. Alors,* T *admet un point fixe unique* x^* *dans* X*. De plus on a* $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x^*$*.*

En 2009, Suzuki a prouvé des versions généralisées des résultats de Banach et Edelstein dans un espace métrique compact comme suit

Théorème 2.9. [23] *Soient* (X, d) *un espace métrique compact et* $T\colon X \to X$ *une application. Supposons que pour tous* $x, y \in X$ *avec* $x \neq y$*, on a*

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) < d(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq d(x, y).$$

Alors, T *a un point fixe unique dans* X*.*

2.5 Théorème du point fixe de Hardy et Rogers

En 1973, Hardy et Rogers ont présenté un théorème de point fixe en utilisant une expression contractive plus large.

Théorème 2.10. [11] *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T\colon X \to X$ *une application telle qu'ils existent des nombres positifs* $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in [0, 1[$ *vérifiant* $a_1 + a_2 +$

$a_3 + a_4 + a_5 < 1$ et

$$d(Tx, Ty) \leq a_1 d(x, Tx) + a_2 d(y, Ty) + a_3 d(x, Ty) + a_4 d(y, Tx) + a_5 d(x, y)$$

pour tous $x, y \in X$. Alors, T a un point fixe unique dans X.

2.6 Théorème du point fixe de Berinde

En 2004, Berinde a introduit le concept de contraction faible ou quasi-contraction et a donné quelques théorèmes du point fixe à ce type de contractions dans des espaces métriques complets.

Théorème 2.11. [4] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T \colon X \to X$ une contraction faible c'est à dire qu'ils existent $r \in [0, 1[$ et $L \leq 0$ tels que, pour tous $x, y \in X$,*

$$d(Tx, Ty) \leq rd(x, y) + Ld(y, Tx).$$

Alors, T a un point fixe unique dans X.

2.7 Théorème du point fixe de Geraghty

En 1973, Geraghty [10] a introduit une classe de fonctions pour généraliser le principe de la contraction de Banach.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fonctions $\beta \colon \mathbb{R}_+ \to [0, 1[$ satisfaisant

$$\lim_{n\to\infty} \beta(t_n) = 1 \ \texttt{implique} \ \lim_{n\to\infty} t_n = 0$$

Exemple 2.12.

1. *Un exemple de fonction dans $\mathcal{F}$ peut être donné par*

$$\begin{cases} \beta(t) = e^{-2t} & \textit{pour } t > 0 \\ \beta(t) \in [0, 1[& \textit{pout } t = 0 \end{cases}.$$

2. *La fonction $\beta \colon [0, +\infty[\to [0, 1[$ défini par $\beta(t) = \dfrac{1}{1 + t^2}$ est dans $\mathcal{F}$.*

Définition 2.2. Soit (X, d) un espace métrique. L'application $T \colon X \to X$ est dite `contraction de Geraghty` si, et seulement s'il existe une fonction $\beta \in \mathcal{F}$ et pour tous $x, y \in X$ on ait :

$$d(Tx, Ty) \leq \beta(d(x, y))d(x, y). \tag{2.4}$$

En utilisant de telles applications, Geraghty a observé le résultat intéressant suivant.

Théorème 2.13 (Geraghty [10]). *Toute contraction de Geraghty d'un espace métrique complet dans lui même admet un point fixe unique.*

Démenstration.

Supposons que T possède deux points fixes u et v avec $u \neq v$. D'après (2.4), on a

$$d(u,v) = d(Tu,Tv) \leq \beta(d(u,v))d(u,v) < d(u,v).$$

Ce qui est une contradiction.

Donc le point fixe de T s'il existe il est unique.

Soit $x_0 \in X$ un élément arbitraire quelconque. On définit une suite $\{x_n\}$ dans X telle que $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$, pour tout $n \geq l$. Si $x_l = x_{l+1}$ pour un entier positif l, alors x_l est un point fixe de T. On suppose donc que $x_n = x_{n+1}$, pour tout $n \geq 0$.

Montrons d'abord $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$. En appliquant (2.4) et en utilisant la propriété de β, on a pour tout $n \geq 0$.

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &= d(Tx_n, Tx_{n+1}) \\ &\leq \beta(d(x_n, x_{n+1}))d(x_n, x_{n+1}) \\ &< d(x_n, x_{n+1}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Donc $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ est une suite décroissante de nombres réels non négatifs. Nous obtenons un $\delta > 0$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = \delta$.

Supposons que $\delta > 0$. Depuis (2.5), nous avons

$$\frac{d(x_{n+1}, x_{n+2})}{d(x_n, x_{n+1})} \leq \beta(d(x_n, x_{n+1})) < 1, \quad \text{pour tout } \ n \geq 0.$$

Alors

$$1 \leq \lim_{n\to+\infty} \beta(d(x_n, x_{n+1})) < 1,$$

ce qui implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \beta(d(x_n, x_{n+1})) = 1. \tag{2.6}$$

On résulte de la propriété de β que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$, ce qui contredit avec notre hypothèse. Donc $\delta = 0$, soit

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0. \tag{2.7}$$

On montre ensuite que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy. Si $\{x_n\}$ n'est pas une suite de Cauchy. nous obtenons un $\varepsilon > 0$ pour lequel on peut trouver deux suites d'entiers positifs $\{m(k)\}$ et $\{n(k)\}$ telles que

$$n(k) > m(k) > k, \quad d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geq \varepsilon \quad \text{et} \quad d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) < \varepsilon.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} \varepsilon \leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) &\leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \\ &< \varepsilon + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}). \end{aligned}$$

En utilisant (2.7), on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) = \varepsilon. \tag{2.8}$$

Maintenant,

$$d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \leq d(x_{m(k)+1}, x_{m(k)}) + d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}),$$

et

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}) + d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) + d(x_{n(k)+1}, x_{n(k)}),$$

donc

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) - d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}) - d(x_{n(k)+1}, x_{n(k)}) \leq d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}).$$

Des inégalités ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) - d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}) - d(x_{n(k)+1}, x_{n(k)}) &\leq d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \\ &\leq d(x_{m(k)+1}, x_{m(k)}) + d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}). \end{aligned}$$

En passant à la limite comme $k \to +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus et en utilisant $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) = \varepsilon$, on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) = \varepsilon \tag{2.9}$$

En appliquant (2.4), on trouve

$$\begin{aligned} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1)}) &= d(Tx_{m(k)}, Tx_{n(k)}) \\ &\leq \beta(d(x_{m(k)}, x_{n(k)}))d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \\ &< d(x_{m(k)}, x_{n(k)}), \end{aligned}$$

donc

$$\frac{d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}))}{d(x_{m(k)}, x_{n(k)})} \leq \beta(d(x_{m(k)}, x_{n(k)})) < 1.$$

Alors

$$1 \leq \lim_{k\to+\infty} \beta(d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) < 1,$$

ce qui implique que

$$\lim_{k\to+\infty} \beta(d(x_{m(k)}, x_{n(k)})) = 1 \tag{2.10}$$

On résulte de la propriété de β que $\lim\limits_{k\to+\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) = 0$, c'est-à-dire $\varepsilon = 0$, qui est une contradiction. Donc $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy. Comme (X, d) est complet, il existe un $u \in X$ tel que $x_n \to u$ lorsque $n \to +\infty$. En appliquant (2.4), on obtient

$$d(x_{n+1}, Tu) = d(Tx_n, Tu) \leq \beta(d(x_n, u))d(x_n, u) < d(x_n, u).$$

En passant à la limite si $n \to +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on trouve $d(u, Tu) = 0$, c'est-à-dire $u = Tu$, donc u est un point fixe de T. D'après ce que nous avons déjà prouvé, u est le unique point fixe de T. ■

Exemple 2.14. *Soit l'espace métrique* $X = [0, +\infty[$ *muni de la métrique usuelle. On prend* $\beta(t) = \dfrac{1}{1+t}$, *pour tout* $t \geq 0$. *Alors* $\beta \in \mathcal{F}$.
Définissons $T\colon X \to X$ *par*

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{x}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Le théorème (2.13) *s'applique ici et* $u = 0$ *est l'unique point fixe de* T.

2.8 Théorème du point fixe de Meir-Keeler

En 1969, Meir et Keeler a prouvé le théorème du point fixe très intéressant suivant, qui est une généralisation du principe de contraction de Banach.

Théorème 2.15 (**Meir and Keeler** [17] **).** *Soit* (X, d) *un espace métrique complet, et* $T\colon X \to X$ *une application satisfaisant pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tous* $x, y \in X$:

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \delta \implies d(Tx, Ty) < \varepsilon.$$

Alors, T *a un point fixe unique* x^* *dans* X. *De plus, pour tout* $x \in X$ *on a* $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x^*$.

2.9 Théorème du point fixe de Matkowski

En 1975. L'idée de contraction de Boyd-Wong a été modifiée par Matkowski où il a imposé différents conditions à une fonction φ. De plus, cette idée a été généralisée et modifiée dans de nombreux manuscrits.

Définition 2.3. Une fonction $\varphi\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est appelée une fonction de comparaison s'il est strictement croissante et

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0, \quad \text{pour tout} \ \ t \in \mathbb{R}_+.$$

Définition 2.4. Une application $T\colon X \to X$ d'un espace métrique (X, d) est dite **contraction de Matkowski** (ou **φ-contraction**) si, et seulement s'il existe une fonction de comparaison φ telle que pour tous $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y)).$$

Théorème 2.16 (**Matkowski** [18])**.** *Toute φ-contraction d'un espace métrique complet (X, d) dans lui même admet un point fixe unique x^*. De plus, pour tout $x \in X$*

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = x^*$$

2.10 Théorème du point fixe de type Geraghty

In 2013 Cho et al ont introduit une notion de contraction généralisée de type α-Geraghty dans un espace métrique. Ils ont établi également une théorème du point fixe pour ces applications.

Définition 2.5. [6] Soit (X, d) un espace métrique et soit $\alpha\colon X \times X \to \mathbb{R}$ une fonction. Une application $T\colon X \to X$ appelée `contraction généralisée de type` α-`Geraghty` s'il existe $\beta \in \mathcal{F}$ tel que pour tous $x, y \in X$.

$$\alpha(x, y)d(Tx, Ty) \leq \beta(M(x, y))M(x, y),$$

où

$$M(x, y) = \max\{d(x, y), d(x, Ty), d(y, Ty)\}.$$

Théorème 2.17. [6] *Soient (X, d) un espace métrique complet, $\alpha\colon X \times X \to \mathbb{R}$ une fonction et $T\colon X \to X$ une application. Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *T une contraction généralisée de type α-Geraghty ;*
2. *T est triangulaire α-admissible ;*
3. *Il existe $x_1 \in X$ tel que $\alpha(x_1, Tx_1) \leq 1$;*
4. *T est continue.*

Alors T a un point fixe $x_* \in X$ et T est un application de Picard, c'est-à-dire que $\{T^n x_1\}$ converge vers x_*.

Démenstration.

Soit $x_1 \in X$ tel que $\alpha(x_1, Tx_1) \geq 1$. On définit la suite $\{x_n\} \subset X$ par $x_{n+1} = Tx_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Si $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$, alors x_{n_0} est un point fixe de T, et donc la preuve est terminée. Ainsi, dans toute la preuve on suppose que $x_n \neq x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le lemme (1.30), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1 \tag{2.11}$$

Ensuite nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &= d(Tx_n, Tx_{n+1}) \\ &\leq \alpha(x_n, x_{n+1}) d(Tx_n, Tx_{n+1}) \\ &\leq \beta(M(x_n, x_{n+1})) M(x_n, x_{n+1}), \end{aligned} \tag{2.12}$$

avec

$$\begin{aligned} M(x_n, x_{n+1}) &= \max\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, Tx_n), d(x_{n+1}, Tx_{n+1})\} \\ &= \max\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, x_{n+2})\}. \end{aligned}$$

Selon la définition de β, le cas $M(x_n, x_{n+1}) = d(x_{n+1}, x_{n+2})$ est impossible.
En effet

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq \beta(M(x_n, x_{n+1})) M(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq \beta(d(x_{n+1}, x_{n+2})), d(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ &< d(x_{n+1}, x_{n+2}), \end{aligned}$$

ce qu'est une contradiction.

Ainsi, nous concluons que $d(x_{n+1}, x_{n+2}) < d(x_n, x_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, la suite $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ est positive et non croissante.

Donc, il existe $r \geq 0$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = r$. On affirme que $r = 0$.

Supposons au contraire que $r > 0$. Alors, grâce à (2.12), on a

$$\frac{d(x_{n+1}, x_{n+2})}{d(x_n, x_{n+1})} \leq \beta(d(x_n, x_{n+1})) < 1,$$

ce qui donne que $\lim\limits_{n\to\infty} \beta(d(x_n, x_{n+1})) = 0$. Puisque $\beta \in F$, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0. \tag{2.13}$$

Nous montrerons que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy. Supposons, au contraire, que $\{x_n\}$ n'est pas un suite de Cauchy. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $k > 0$, il existe $m(k) > n(k) > k$ avec (le plus petit nombre satisfaisant la condition ci-dessous)

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geq \varepsilon \ \text{ et } \ d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) < \varepsilon. \tag{2.14}$$

Alors, nous avons

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \\ &\leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) \\ &< d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Lorsque $k \to \infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on trouve

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) = \varepsilon. \tag{2.15}$$

En utilisant (2.13) et (2.15), on obtient

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) = \varepsilon.$$

D'après le lemme (1.30), $\alpha(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}) \geq 1$.

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) &= d(T_{x_{m(k)-1}}, T_{x_{n(k)-1}}) \\ &\leq \alpha d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}) d(T_{x_{n(k)-1}}, T_{x_{m(k)-1}}) \\ &\leq \beta(M(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1})) M(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}). \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} M(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}) &= \max\left\{d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}), d(x_{n(k)-1}, Tx_{n(k)-1}), d(x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)-1})\right\} \\ &= \max\left\{d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}), d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}), d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)})\right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{d(x_{m(k)}, x_{n(k)})}{M(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1})} \leq \beta(M(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1})).$$

En utilisant (2.13) et en passant à la limite si $n \to \infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on en déduit que

$$\lim_{k\to\infty} \beta(d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1})) = 1$$

et donc

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}) = 0.$$

Ainsi, $\varepsilon = 0$, qui est une contradiction. Donc, nous concluons que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy.

On découle de la complétude de X qu'il existe x_* tel que

$$x_* = \lim_{n\to\infty} x_n \in X.$$

Puisque T est continue, on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = Tx_*$, et donc $x_* = Tx_*$, ce qui achève la preuve. ∎

Pour l'unicité d'un point fixe d'une contraction α-Geraghty généralisée, nous considérons l'hypothèse suivante.

(H) Pour tous $x, y \in Fix(T)$, il existe $z \in X$ tel que $\alpha(x, z) \geq 1$ et $\alpha(y, z) \geq 1$.

Théorème 2.18. *En ajoutant la condition* (*H*) *aux hypothèses du Théorème* (2.17)*, on obtient que x^* est l'unique point fixe de T.*

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre nous appliquons le théorème (2.2) pour affirmer l'existence et l'unicité de solutions d'un système d'équations linéaires, puis nous appliquons le théorème (2.17) pour étudier le problème aux limites d'une équation différentielle du second ordre.

3.1 Application au système d'équations linéaires

Dans cette section, nous appliquons le théorème de contraction de Banach pour trouver la solution du système suivant d'équations linéaires à n inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.1}$$

Le système d'équations linéaires (3.1) peut être reformulé comme suit

$$\begin{cases} x_1 = (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2 = -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n + b_2 \\ x_3 = -a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + (1 - a_{33})x_3 - \cdots - a_{3n}x_n + b_3 \\ \vdots \\ x_n = -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - a_{n3}x_3 - \cdots + (1 - a_{nn})x_n + b_n. \end{cases} \tag{3.2}$$

On suppose que $\alpha_{ij} = -a_{ij} + \delta_{ij}$, où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Alors, le système (3.2) est équivalent au système suivant :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1, 2, 3, \cdots, n. \tag{3.3}$$

Si $X^T = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $b^T(b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A = (a_{ij})_{n\times n}$ une matrice, c'est à dire.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T,\ b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T,$$

alors le système (3.3) est équivalent à

$$x = x - Ax + b. \tag{3.4}$$

Ainsi, on voit que la recherche d'une solution du problème (3.4) équivaut à la recherche d'un point fixe de la transformation $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ défini par

$$T(x) = x - Ax + b.$$

Si T est une contraction, alors nous pouvons utiliser le théorème de contraction de Banach (2.2) et obtenir la solution unique de $T(x) = x$ par la méthode des approximations successives.

Remarquons que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} Tx - Ty &= (x - Ax + b) - (y - Ty + b) = (x - y) - (Ax - Ay) \\ &= (x - y) - A(x - y) = (I - A)(x - y). \end{aligned}$$

Théorème 3.1. *Soit $X = \mathbb{R}^n$ un espace métrique de métrique $d_\infty(x, y) = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$. Si*

$$\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| \le \alpha < 1 \text{ pour tous } i = 1, 2, \cdots, n.$$

Alors le système d'équations linéaires (3.1) *admet une unique solution.*

Démenstration.

Puisque $X = \mathbb{R}^n$ est complet par rapport à la métrique d_∞, il suffit de montrer que l'application T est une contraction.

Nous avons

$$
\begin{aligned}
d_\infty(Tx, Ty) &= \max_{1\le i\le n} \left| \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij}(x_j - y_j) \right| \\
&\le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=i}^{n} |\alpha_{ij}||x_j - y_j| \\
&\le \max_{1\le i\le n} |x_j - y_j| \left(\max_{1\le i\le n} \sum_{j=i}^{n} |\alpha_{ij}| \right) \\
&= d_\infty(x, y) \left(\max_{1\le i\le n} \sum_{j=i}^{n} |\alpha_{ij}| \right) \\
&\le \alpha d_\infty(x, y).
\end{aligned}
$$

Ainsi, T est un contraction. Donc, d'après le théorème de contraction de Banach (2.2), le système linéaire (3.1) a une solution unique. ■

3.2 Application aux équations différentielles ordinaires

Nous considérons le problème aux limites suivant d'une équation différentielle du second ordre :

$$
\begin{cases}
-\dfrac{d^2x}{dt^2} = f(t, x(t)), \quad t \in [0,1], \\
x(0) = x(1) = 0,
\end{cases}
\tag{3.5}
$$

où $f\colon [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

La fonction de Green associée à (3.5) est donnée par

$$
G(t,s) = \begin{cases}
t(1-s), \quad 0 \le t \le s \le 1, \\
s(1-t), \quad 0 \le t \le s \le 1,
\end{cases}
$$

Soit $C(I)$ l'espace de toutes les fonctions continues définies sur $I = [0,1]$.

On considère que $d(x,y) = \|x - y\|_\infty = \sup\limits_{t\in I} \mid x(t) - y(t) \mid$ pour tous $x, y \in C(I)$. Alors $(C(I), d)$ est un espace métrique complet.

Soit $\phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ une fonction vérifiant les conditions suivantes :

1. ϕ est croissante ;
2. Pour tout $t > 0, \phi(t) < t$;
3. $\beta(t) = \dfrac{\phi(t)}{t} \in \mathcal{F}$.

Comme exemples de telles fonctions, nous pouvons énumérer les suivantes
$\phi(t) = \dfrac{t}{1+t}$ et $\phi(t) = \ln(1+t)$.
On considère les conditions suivantes :

(a) Il existe une fonction $\xi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in I$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $\xi(a,b) \geq 0$, on a

$$\mid f(t,a) - f(t-b) \mid \leq \phi(\mid a-b \mid);$$

(b) Il existe $x_1 \in C(I)$ tel que pour tout $t \in I$,

$$\xi\left(x_1(t), \int_0^1 G(t,s)f(s,x_1(s))ds\right) \leq 0;$$

(c) Pour tout $t \in I$ et pour tous $x, y \in C(I)$,

$$\xi(x(t),y(t)) \leq 0 \quad \texttt{implique} \quad \xi\left(\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))ds, \int_0^1 G(t,s)f(s,y(s))ds \geq 0\right);$$

(d) Pour tout point d'accumulation x d'une suite $\{x_n\}$ de points dans $C(I)$ avec $\xi(x_n, x_{n+1}) \geq 0$, on a $\lim_{n\to\infty} \inf \xi(x_n, x) \geq 0$.

Théorème 3.2. *Supposons que les conditions de* (a) *au* (d) *soient satisfaites. Alors* (3.5) *admet au moins une solution* $x^* \in C^2(I)$.

Démenstration.

On sait que $x \in C^2(I)$ est une solution de (3.5) si, et seulement si $x \in C(I)$ est solution de l'équation intégrale

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))ds \quad \text{pour tout } t \in I.$$

On définit $T\colon C(I) \to C(I)$ par

$$Tx(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))ds \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Alors le problème (3.5) revient à trouver $x^* \in C(I)$ qui est un point fixe de T.

Soient $x, y \in C(I)$ tels que $\xi(x(t), y(t)) \geq 0$ pour tout $t \in I$. De (a) on a

$$\begin{aligned}
| Tx(t) - Ty(t) | &= \left| \int_0^1 G(t,s)[f(s,x(s)) - f(s,y(s))]ds \right| \\
&\leq \int_0^1 G(t,s) \mid f(s,x(s)) - f(s,y(s)) \mid ds \\
&\leq \int_0^1 G(t,s)\phi(| x(s) - y(s) |)ds \\
&\leq \sup_{t\in I} \int_0^1 G(t,s)ds\phi(\|x-y\|_\infty) \\
&= \frac{1}{8}\frac{\phi(d(x,y))}{d(x,y)}d(x,y) \\
&< \beta(d(x,y))d(x,y).
\end{aligned}$$

On a donc $d(Tx, Ty) < \beta(d(x,y))d(x,y)$ pour tous $x, y \in C(I)$ tel que $\xi(x(t), y(t)) \geq 0$ pour tout $t \in I$.

On définit $\alpha\colon C(I) \times C(I) \to [0, \infty)$ par

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } \xi(x(t) - y(t)) \leq 0,\ t \in I, \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$

Alors, pour tous $x, y \in C(I)$, on a

$$\alpha(x,y)d(Tx,Ty) < \beta(d(x,y))d(x,y).$$

Évidemment, $\alpha(x,y) = 1$ et $\alpha(y,z) = 1$ implique $\alpha(x,z) = 1$ pour tous $x, y, z \in C(I)$.

Si $\alpha(x,y) = 1$ pour tous $x, y \in C(I)$, alors $\xi(x(t), y(t)) \leq 0$. De (c) on a $\xi(Tx(t), Ty(t)) \geq 0$, et donc $\alpha(Tx, Ty) = 1$. Ainsi, T est triangulaire α-admissible.

D'après (b) il existe $x_0 \in C(I)$ tel que $\alpha(x_1, Tx_1) = 1$.

De (d), on a pour tout point d'accumulation x d'une suite $\{x_n\} \subset C(I)$ nous avons $\alpha(x_n, x_{n+1}) = 1$, $\lim_{n\to\infty} \inf \alpha(x_n, x) = 1$.

En appliquant le théorème (2.17), T admet un point fixe dans $C(I)$, c'est-à-dire qu'il existe $x^* \in C(I)$ tel que $Tx^* = x^*$, et x^* est une solution de (3.5). ■

Index

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, D. O'Regan, and D. Sahu. *Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications*, volume 6. Springer, 2009.

[2] Q. H. Ansari. *Metric Spaces : including fixed point theory and set-valued maps.* Alpha Science International, 2010.

[3] S. Banach. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta mathematicae*, 3(1) :133–181, 1922.

[4] V. Berinde. Approximating fixed points of weak contractions using the picard iteration. In *Nonlinear Analysis Forum*, volume 9, pages 43–54, 2004.

[5] S. K. Chatterjea. Fixed-point theorems. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, 25 :727–730, 1972.

[6] S.-H. Cho, J.-S. Bae, and E. Karapınar. Fixed point theorems for α-geraghty contraction type maps in metric spaces. *Fixed point theory and applications*, 2013 :1–11, 2013.

[7] S. Dolecki. *Analyse fondamentale : espaces métriques, topologiques et normés.* Hermann, 2013.

[8] M. Edelstein. On fixed and periodic points under contractive mappings. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(1) :74–79, 1962.

[9] S. G. Georgiev and K. Zennir. Functional analysis with applications. In *Functional Analysis with Applications*. De Gruyter, 2019.

[10] M. A. Geraghty. On contractive mappings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 40(2) :604–608, 1973.

[11] G. E. Hardy and T. Rogers. A generalization of a fixed point theorem of reich. *Canadian Mathematical Bulletin*, 16(2) :201–206, 1973.

[12] V. I. Istratescu. *Fixed point theory : an introduction.* Springer, 1981.

[13] D. Jaggi. Some unique fixed point theorems. *Indian J. Pure Appl. Math*, 8(2) :223–230, 1977.

[14] R. Kannan. Some results on fixed points. *Bull. Cal. Math. Soc.*, 60 :71–76, 1968.

[15] E. Karapınar, P. Kumam, and P. Salimi. On α-ψ-meir-keeler contractive mappings. *Fixed Point Theory and Applications*, 2013(1) :1–12, 2013.

[16] E. Karapınar and B. Samet. Generalized $\alpha-\psi$-contractive type mappings and related fixed point theorems with applications. *Abstract and Applied Analysis*, 2012(24) :17 pages, 2012.

[17] E. Keeler and A. Meir. A theorem on contraction mappings. *J. Math. Anal. Appl*, 28 :326–329, 1969.

[18] J. Matkowski. Integrable solutions of functional equations, dissertations math. *CXXVII (Rozprawy) Warszawa*, 1975.

[19] H. K. Pathak. *An introduction to nonlinear analysis and fixed point theory.* Springer, 2018.

[20] D. Pradip, K. Nabanita, and R. Stojan. *Metric Fixed Point Theory : Applications in Science, Engineering and Behavioural Sciences.* Forum for Interdisciplinary Mathematics. Springer, 2022.

[21] B. Samet, C. Vetro, and P. Vetro. Fixed point theorems for α–ψ-contractive type mappings. *Nonlinear analysis : theory, methods & applications*, 75(4) :2154–2165, 2012.

[22] T. Suzuki. A generalized banach contraction principle that characterizes metric completeness. *Proceedings of the American mathematical Society*, 136(5) :1861–1869, 2008.

[23] T. Suzuki. A new type of fixed point theorem in metric spaces. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 71(11) :5313–5317, 2009.

[24] D. Wardowski. Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces. *Fixed point theory and applications*, 2012(1) :1–6, 2012.

[25] E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications : II/B : nonlinear monotone operators.* Springer Science & Business Media, 2013.