République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par :

Mr. Fridjat Ali

Intitulé

Inégalités intégrales de type Euler-Simpson

Dirigé par : Dr. Chiheb Tarik

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Meftah	Badreddine	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Chiheb	Tarik	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Merad	Meriem	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2023

Dédicaces

Je remercie Dieu Tout-Puissant de m'avoir aidé à terminer cet humble travail :

À ma chère maman « LAHGA »

À mon cher père « MOHMMED LARBI »

À ucune dévotion ne peut exprimer mon respect, mon amour éternel et mon amour.

Conscient des sacrifices que vous avez faits pour mon éducation et mon bien-être.

Que Dieu Tout Puissant vous accorde santé, bonheur et longue vie.

À mes chers frères « YOUNES,ABDE ELHAKIM, AL-AZHARI,YOUSSEF »

À mes sœurs, qui ont eu un grand impact sur de nombreux obstacles et difficultés.

À la famille Fridjat.

À mes chers amis de toujours.

A toute personne impliquée directement ou indirectement dans la réalisation de ce travail

Dr Moftah et mes chers collègues.

À tous les étudiants de promotion 2éme année Master en Mathématique.

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier Dieu le Tout-Puissant qui m'a ,donné Le désir, le courage et la force d'accomplir ce travail Qui a été fait dans ce département de mathématiques de l'université « 8 Mai 1945 Guelma ».

Je tiens à remercier les membres du jury :

Monsieur Meftah Badreddine, Pour M'avoir Fait L'honneur D'accepter La Presidence Du Jury.

Madame Merad Meriem, Pour Avoir Bien Voulu Examiner Ce Travail.

Je Tiens A Remercier Plus Particulierement Mon Encadreur, Monsieur Chiheb Tarik, Pour Avoir Accepte De M'encadrer Et pour l'aide qu'il m'a apportée.

Département de Mathématiques En particulier Messieurs Meftah Badreddine.

Et Pour La Famille, Merci Infiniment Pour Votre Présence, Vos Conseils Ainsi Que Votre Aide Morale.

Je Remercie Egalement Tous Mes Amies Et Touts Ceux Qui M'ont Soutenu De Près Ou De Loin Tout Au Long De Ce Travail.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة المتراجحات التكاملية من نوع أولر- سيمبسون للدوال ذات المشتقات المتمتعة بالتحدب

في الفصل الأول، نذكر ببعض تعريفات التحدب الكلاسيكي، وكذلك بعض المساواة التكاملية التي سنستعملها لاحقا.

في الفصل الثاني، سنذكر ببعض النتائج المعروفة في الادبيات حول المتراجحات التكاملية من نوع نيوتن- كوتس ذات ثلاثة نقط.

في حين ان الفصل الأخير سيخصص بالكامل للمتراجحات التكاملية من نوع أولر- سيمبسون.

كلمات مفتاحية

متراجحة أولر- سيمبسون، متراجحة هولدر، الدوال المحدبة، الدوال المحدودة.

Abstract

The aim of this memory, is to study the Euler-Simpson type inequalities for functions whose first derivatives are s-convex, bounded as well as Hölderian. For this we propose :

In the first chapter, a preliminaries concerning some classes of classical convexity, as well as some classes of functions.

In the second chapter, we discuss some classical three-point Newton-Cotes types inequalities.

While the last chapter is devoted to some new results regarding Euler-Simpson integral inequalities.

Keywords : Euler-Simpson inequality, Hölder inequality, s-convex functions, bounded functions, Hölderian functions.

Résumé

Dans ce mémoire, nous allons étudier les inégalités intégrales de type Euler-Simpson pour les fonctions dont les dérivées premières en valeurs absolues sont s-convexe.

Dans le premier chapitre, nous donnons un bref rappelle concernant quelques types de convexité classique ainsi que quelques identités intégrales que nous utiliserons ultérieurement.

Dans le deuxième chapitre, nous citons certains résultats classiques concernant les inégalités de type Newton-Cotes à trois points.

Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré aux nouvelles inégalités intégrales de type Euler-Simpson pour les fonctions dont les dérivées premières sont s-convexes.

Mots clés : Inégalité de type Euler-Simpson, inégalités de Hölder, fonctions convexes, fonctions s-convexes, fonctions bornées, fonctions Hölderienne.

Table des matières

Introduction

Les inégalités jouent un rôle important dans diverses branches des mathématiques modernes telles que la théorie de l'espace de Hilbert, la théorie des probabilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'analyse numérique, la théorie qualitative des équations différentielles et des équations aux différences, etc. Elles représentent un outil puissant et indispensable.

Le fondement mathématique de cette théorie a été établi en partie au cours des $18^{ème}$ et $19^{ème}$ siècles par d'éminents mathématiciens tels que : Gauss, Cauchy, Čebyšev. Dans les années qui suivirent, le sujet attira de nombreux mathématiciens : Poincaré, Lyapunov, Gronwall, Hölder, Hadamard, Pólya, Bellman et Ostrowski. La littérature dans ce contexte est vaste et variée parmi les ouvrages dont on peut trouver une très bonne description de l'évolution historique des inégalités que l'on peut consulter, Mitrinović, Pečarić et Fink [6, 7, 8].

Cette théorie ne cesse d'évoluer dans plusieurs directions et par différentes manières. Des nouvelles inégalités ont été établies, des généralisations, des raffinements, extensions ainsi que des variantes sur plusieurs axes unidimensionnels, multidimensionnels, fractionnaires et discrets.

L'objectif de ce mémoire est de faire une petite synthèse concernant les inégalités intégrales de type Euler-Simpson et d'établir de nouvelles généralisations de ce type d'inégalités intégrales.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques classes de fonctions ainsi que quelques identités et inégalités intégrales utiles pour notre étude.

Dans le second chapitre nous traiterons certains résultats concernant les inégalités intégrales de type Newton-Cotes à trois points.

Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré aux nouvelles inégalités de type Euler-Simpson dont ces nouveaux résultats sont accepté pour la publication dans la revue Computational Mathematics and Modeling.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques type de convexité ainsi que quelques identités de fonctions, concernant la convexité en peut consulter [8].

1.1 Quelques classes de fonctions

Dans tout ce qui va suivre nous désignons par $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.1 ([10]) *Un ensemble $I \subseteq \mathbb{R}$, est dit convexe si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0, 1]$, on a :*

$$tx + (1 - t)\, y \in I.$$

Définition 1.2 ([10]) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe, si*

$$f\left(tx + (1 - t)\, y\right) \leq t f\left(x\right) + (1 - t)\, f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$.

Définition 1.3 ([1]) *Une fonction positive $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+} = [0, \infty[$ est dite s-convexe* *au second sens pour un certain nombre fixé* $s \in]0,1]$*, si*

$$f(tx+(1-t)y) \ \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et* $t \in [0,1]$*.*

Définition 1.4 **(**[4]**)** *Une fonction* f *est dite bornée sur* I*, s'il existe des constantes* $-\infty < m < M < +\infty$ *telles que*

$$m \leq f(x) \leq M$$

pour tout $x \in I$*.*

Définition 1.5 **(**[4]**)** *Une fonction* f *est dite* L*-Lipschitzienne sur* I*, s'il existe* $L > 0$ *telle que*

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y|$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$*.*

Définition 1.6 **(**[4]**)** *Une fonction* f *est dite* r*-*L*-Hölderienne sur* $[a,b]$*, s'il existe* $L > 0$ *et* $0 < r \leq 1$ *telles que*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|^r$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$*.*

1.2 Quelques identités et inégalités intégrales importantes

1.2.1 Inégalité de Hölder

Théorème 1.1 ([7]) *Soit* $p > 1$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Si* f *et* g *sont des fonctions réelles définies sur* $[a, b]$, *et si de plus* $|f|^p$ *et* $|g|^q$ *sont intégrables sur* $[a, b]$, *alors*

$$\int_a^b |f(x) g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.2.2 Inégalité des moyennes d'ordre q

Théorème 1.2 ([2]) *Soient* $x = (x_i)_{i=1,2,...,n}$ *et* $p = (p_i)_{i=1,2,...,n}$ *deux* n*-uplets de nombres strictement positifs et soit* $q \in \overline{\mathbb{R}}$, *l'inégalité des moyens d'ordre* q *pondérés par* p *est définie par :*

$$M_n^{[q]} = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i^q \right)^{\frac{1}{q}} & \text{pour } q \neq -\infty, 0, +\infty, \\ \left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \right)^{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} & \text{pour } q = 0, \\ \min(x_1, x_2, ..., x_n) & \text{pour } q = -\infty, \\ \max(x_1, x_2, ..., x_n) & \text{pour } q = +\infty. \end{cases}$$

Pour $-\infty \leq q < r \leq +\infty$, *on a :*

$$M_n^{[q]} \leq M_n^{[r]}.$$

Remarque 1.1 ([2]) *La version intégrale du Théorème 1.2 est : pour* $q \geq 1$ *et si* $|f|$ *et* $|g|^q$ *sont intégrables sur* $[a, b]$, *alors :*

$$\int_a^b |f(x) g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| \, dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)| \, |g(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.3 Quelques identités intégrales importantes

Lemme 1.1 ([6]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction absolument continue sur I° telle que $f' \in L^1[a,b]$, où $a,b \in I^{\circ}$ avec $a<b$, alors l'égalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{8}\left(3f\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+3f\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \\
= &\tfrac{b-a}{9}\left(\int_0^1 \tfrac{1}{4}tf'\left((1-t)a+t\tfrac{5a+b}{6}\right)dt+\int_0^1 \tfrac{1}{4}(t-1)f'\left((1-t)\tfrac{a+5b}{6}+tb\right)dt\right. \\
&+\int_0^1 \left(t-\tfrac{5}{8}\right)f'\left((1-t)\tfrac{5a+b}{6}+t\tfrac{a+b}{2}\right)dt \\
&\left.+\int_0^1 \left(t-\tfrac{3}{8}\right)f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+5b}{6}\right)dt\right).
\end{aligned}$$

Preuve. Posons

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \tfrac{1}{4}tf'\left((1-t)a+t\tfrac{5a+b}{6}\right)dt, \\
I_2 &= \int_0^1 \left(t-\tfrac{5}{8}\right)f'\left((1-t)\tfrac{5a+b}{6}+t\tfrac{a+b}{2}\right)dt, \\
I_3 &= \int_0^1 \left(t-\tfrac{3}{8}\right)f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+5b}{6}\right)dt
\end{aligned}$$

et

$$I_4=\int_0^1 \tfrac{1}{4}(t-1)f'\left((1-t)\tfrac{a+5b}{6}+tb\right)dt.$$

En intégrant par partie I_1, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \tfrac{3}{2(b-a)}tf\left((1-t)a+t\tfrac{5a+b}{6}\right)\Big|_{t=0}^{t=1}-\tfrac{3}{2(b-a)}\int_0^1 f\left((1-t)a+t\tfrac{5a+b}{6}\right)dt \\
&= \tfrac{3}{2(b-a)}f\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)-\tfrac{3}{2(b-a)}\int_0^1 f\left((1-t)a+t\tfrac{5a+b}{6}\right)dt \\
&= \tfrac{3}{2(b-a)}f\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)-\tfrac{9}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{5a+b}{6}} f(u)\,du. \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

D'une manière analogue, on obtient :

$$I_2 = \frac{9}{8(b-a)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{15}{8(b-a)} f\left(\frac{5a+b}{6}\right) - \frac{9}{(b-a)^2} \int_{\frac{5a+b}{6}}^{\frac{a+b}{2}} f(u)\, du, \tag{1.2}$$

$$I_3 = \frac{15}{8(b-a)} f\left(\frac{a+5b}{6}\right) + \frac{9}{8(b-a)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{9}{(b-a)^2} \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+5b}{6}} f(u)\, du \tag{1.3}$$

et

$$I_4 = \frac{3}{2(b-a)} f\left(\frac{a+5b}{6}\right) - \frac{9}{(b-a)^2} \int_{\frac{a+5b}{6}}^{b} f(u)\, du. \tag{1.4}$$

En additionnant (1.1)-(1.4), puis en multipliant l'égalité résultante par $\frac{b-a}{9}$, on obtient le résultat souhaité. Ainsi la preuve est terminée. ■

Lemme 1.2 ([5]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction absolument continue sur I° telle que $f' \in L^1[a,b]$, où $a, b \in I^\circ$ avec $a < b$, alors l'égalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}\left(2f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2f(b)\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\, du \\ = \; & \frac{b-a}{4}\int_0^1 \left(t - \frac{4}{3}\right) f'\left((1-t)\,a + t\frac{a+b}{2}\right) dt \\ & + \frac{b-a}{4}\int_0^1 \left(t + \frac{1}{3}\right) f'\left((1-t)\,\frac{a+b}{2} + tb\right) dt. \end{aligned}$$

Preuve. Considérons les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \left(t - \frac{4}{3}\right) f'\left((1-t)\,a + t\frac{a+b}{2}\right) dt$$

et

$$I_2 = \int_0^1 \left(t + \frac{1}{3}\right) f'\left((1-t)\,\frac{a+b}{2} + tb\right) dt.$$

En intégrant par partie I_1, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \tfrac{2}{b-a}\left(t-\tfrac{4}{3}\right) f\left(\left(1-t\right)a+t\tfrac{a+b}{2}\right)\Big|_{t=0}^{t=1} - \tfrac{2}{b-a}\int\limits_0^1 f\left(\left(1-t\right)a+t\tfrac{a+b}{2}\right)dt \\
&= -\tfrac{2}{3(b-a)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \tfrac{8}{3(b-a)} f\left(a\right) - \tfrac{2}{b-a}\int\limits_0^1 f\left(\left(1-t\right)a+t\tfrac{a+b}{2}\right)dt \\
&= \tfrac{8}{3(b-a)} f\left(a\right) - \tfrac{2}{3(b-a)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \left(\tfrac{2}{b-a}\right)^2 \int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(u\right)du. \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

D'une manière similaire on obtient :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \tfrac{2}{b-a}\left(t+\tfrac{1}{3}\right) f\left(\left(1-t\right)\tfrac{a+b}{2}+tb\right)\Big|_{t=0}^{t=1} - \tfrac{2}{b-a}\int\limits_0^1 f\left(\left(1-t\right)\tfrac{a+b}{2}+tb\right)dt \\
&= \tfrac{2}{b-a}\left(1+\tfrac{1}{3}\right) f\left(b\right) - \tfrac{2}{b-a}\left(\tfrac{1}{3}\right) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{2}{b-a}\int\limits_0^1 f\left(\left(1-t\right)\tfrac{a+b}{2}+tb\right)dt \\
&= \tfrac{8}{3(b-a)} f\left(b\right) - \tfrac{2}{3(b-a)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \left(\tfrac{2}{b-a}\right)^2 \int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b} f\left(u\right)du. \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

En additionnant (1.5)-(1.6), puis en multipliant l'égalité résultante par $\frac{b-a}{4}$, on obtient le résultat souhaité. Ainsi la preuve est terminée. ■

Chapitre 2

Inégalités intégrales de type Newton-Cotes à trois points

2.1 Inégalités intégrales de type Maclaurin

Dans cette sous section nous allons nous intéressé à la quadrature dite Maclaurin, dont la forme est la suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{b-a}{8}\left(3f\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+3f\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right).$$

2.1.1 Inégalités intégrales de type Maclaurin pour les fonctions dont les dérivées premières sont s-convexes

Théorème 2.1 ([6]) *Soit $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f'\in L^1[a,b]$ avec $0\leq a<b$. Si $|f'|$ est s-convexe où $q\geq 1$, alors :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{8}\left(3f\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+3f\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{9(s+1)(s+2)}\left(\tfrac{|f'(a)|+|f'(b)|}{4}+\left(\tfrac{3s-2}{4}+4\left(\tfrac{5}{8}\right)^{s+2}\right)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right. \\
&\left.+\left(\tfrac{7s+4}{8}+2\left(\tfrac{3}{8}\right)^{s+2}\right)\left(\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|+\left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|\right)\right).
\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.1, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité des moyennes d'ordre q et la s-convexité de $|f'|$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \left|\tfrac{1}{8}\left(3f\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+3f\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{9}\left(\int_0^1 \tfrac{1}{4}t\left|f'\left((1-t)a+t\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|dt+\int_0^1\left|t-\tfrac{5}{8}\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{5a+b}{6}+t\tfrac{a+b}{2}\right)\right|dt\right. \\
& \left.+\int_0^1\left|t-\tfrac{3}{8}\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|dt+\int_0^1\tfrac{1}{4}(1-t)\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+5b}{6}+tb\right)\right|dt\right) \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{9}\left(\int_0^1\tfrac{1}{4}t\left((1-t)^s|f'(a)|+t^s\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|\right)dt\right. \\
& +\int_0^{\frac{5}{8}}\left(\tfrac{5}{8}-t\right)\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right)dt \\
& +\int_{\frac{5}{8}}^1\left(t-\tfrac{5}{8}\right)\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right)dt \\
& +\int_0^{\frac{3}{8}}\left(\tfrac{3}{8}-t\right)\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|\right)dt \\
& +\int_{\frac{3}{8}}^1\left(t-\tfrac{3}{8}\right)\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|\right)dt \\
& \left.+\int_0^1\tfrac{1}{4}(1-t)\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|+t^s|f'(b)|\right)dt\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{9}\left(|f'(a)|\int_0^1\tfrac{1}{4}t(1-t)^s\,dt+\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|\int_0^1\tfrac{1}{4}t^{s+1}dt\right. \\
& +\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|\int_0^{\frac{5}{8}}\left(\tfrac{5}{8}-t\right)(1-t)^s\,dt+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int_0^{\frac{5}{8}}\left(\tfrac{5}{8}-t\right)t^s dt \\
& +\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|\int_{\frac{5}{8}}^1\left(t-\tfrac{5}{8}\right)(1-t)^s\,dt+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int_{\frac{5}{8}}^1\left(t-\tfrac{5}{8}\right)t^s dt \\
& +\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int_0^{\frac{3}{8}}\left(\tfrac{3}{8}-t\right)(1-t)^s\,dt+\left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|\int_0^{\frac{3}{8}}\left(\tfrac{3}{8}-t\right)t^s dt \\
& +\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int_{\frac{3}{8}}^1\left(t-\tfrac{3}{8}\right)(1-t)^s\,dt+\left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|\int_{\frac{3}{8}}^1\left(t-\tfrac{3}{8}\right)t^s dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right| \int_0^1 \tfrac{1}{4}(1-t)^{s+1}\,dt + |f'(b)| \int_0^1 \tfrac{1}{4}(1-t)\,t^s dt\Bigg) \\
&= \tfrac{b-a}{9}\Bigg(|f'(a)| \int_0^1 \tfrac{1}{4} t(1-t)^s\,dt + \left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right| \Bigg(\int_0^1 \tfrac{1}{4} t^{s+1} dt \\
&\quad + \int_0^{\frac{5}{8}} \left(\tfrac{5}{8}-t\right)(1-t)^s\,dt + \int_{\frac{5}{8}}^1 \left(t-\tfrac{5}{8}\right)(1-t)^s\,dt\Bigg) \\
&\quad + \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \Bigg(\int_0^{\frac{5}{8}} \left(\tfrac{5}{8}-t\right) t^s dt + \int_{\frac{5}{8}}^1 \left(t-\tfrac{5}{8}\right) t^s dt \\
&\quad + \int_0^{\frac{3}{8}} \left(\tfrac{3}{8}-t\right)(1-t)^s\,dt + \int_{\frac{3}{8}}^1 \left(t-\tfrac{3}{8}\right)(1-t)^s\,dt\Bigg) \\
&\quad + \left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right| \Bigg(\int_0^{\frac{3}{8}} \left(\tfrac{3}{8}-t\right) t^s dt + \int_{\frac{3}{8}}^1 \left(t-\tfrac{3}{8}\right) t^s dt \\
&\quad + \int_0^1 \tfrac{1}{4}(1-t)^{s+1}\,dt\Bigg) + |f'(b)| \int_0^1 \tfrac{1}{4}(1-t)\,t^s dt\Bigg) \\
&= \tfrac{b-a}{9(s+1)(s+2)}\Bigg(\tfrac{|f'(a)|+|f'(b)|}{4} + \left(\tfrac{3s-2}{4} + 4\left(\tfrac{5}{8}\right)^{s+2}\right)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \\
&\quad + \left(\tfrac{7s+4}{8} + 2\left(\tfrac{3}{8}\right)^{s+2}\right)\left(\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right| + \left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|\right)\Bigg),
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé

$$
\int_0^1 \tfrac{1}{4} t(1-t)^s\,dt = \int_0^1 \tfrac{1}{4}(1-t)\,t^s dt = \tfrac{1}{4(s+1)(s+2)}, \tag{2.1}
$$

$$
\int_0^1 \tfrac{1}{4} t^{s+1} dt = \int_0^1 \tfrac{1}{4}(1-t)^{s+1}\,dt = \tfrac{1}{4(s+2)}, \tag{2.2}
$$

$$
\int_0^{\frac{5}{8}} \left(\tfrac{5}{8}-t\right)(1-t)^s\,dt = \int_{\frac{3}{8}}^1 \left(t-\tfrac{3}{8}\right) t^s dt = \tfrac{1}{(s+1)(s+2)}\left(\tfrac{5s+2}{8} + \left(\tfrac{3}{8}\right)^{s+2}\right), \tag{2.3}
$$

$$
\int_{\frac{5}{8}}^1 \left(t-\tfrac{5}{8}\right)(1-t)^s\,dt = \int_0^{\frac{3}{8}} \left(\tfrac{3}{8}-t\right) t^s dt = \tfrac{1}{(s+1)(s+2)}\left(\tfrac{3}{8}\right)^{s+2}, \tag{2.4}
$$

$$\int_{0}^{\frac{5}{8}} \left(\tfrac{5}{8}-t\right) t^{s} dt = \int_{\frac{3}{8}}^{1} \left(t-\tfrac{3}{8}\right)(1-t)^{s}\, dt = \tfrac{1}{(s+1)(s+2)} \left(\tfrac{5}{8}\right)^{s+2}$$

et

$$\int_{\frac{5}{8}}^{1} \left(t-\tfrac{5}{8}\right) t^{s} dt = \int_{0}^{\frac{3}{8}} \left(\tfrac{3}{8}-t\right)(1-t)^{s}\, dt = \tfrac{1}{(s+1)(s+2)} \left(\tfrac{3s-2}{8} + \left(\tfrac{5}{8}\right)^{s+2}\right). \tag{2.5}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 2.2 ([6]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f' \in L^1[a,b]$ avec $0 \leq a < b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe au second sens pour un certain nombre $s \in]0,1]$ fixé et $q, p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}
&\left| \tfrac{1}{8}\left(3f\left(\tfrac{5a+b}{6}\right) + 2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 3f\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(u)\, du \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{72(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(2\left(\tfrac{|f'(a)|^q + \left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} + 2\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|^q + |f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\tfrac{3^{p+1}+5^{p+1}}{8}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + \left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \right)\right).
\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.1, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité de Hölder et la s-convexité au second sens de $|f'|^q$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left| \tfrac{1}{8}\left(3f\left(\tfrac{5a+b}{6}\right) + 2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 3f\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(u)\, du \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{9} \left(\tfrac{1}{4}\left(\int_{0}^{1} t^{p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{0}^{1} \left|f'\left((1-t)a + t\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \left(\int_{0}^{1} \left|t-\tfrac{5}{8}\right|^{p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{0}^{1} \left|f'\left((1-t)\tfrac{5a+b}{6} + t\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_{0}^{1} \left|t-\tfrac{3}{8}\right|^{p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{0}^{1} \left|f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2} + t\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& \left. + \tfrac{1}{4}\left(\int_{0}^{1} (1-t)^{p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{0}^{1} \left|f'\left((1-t)\tfrac{a+5b}{6} + tb\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \tfrac{b-a}{9}\left(\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^1\left((1-t)^s\left|f'(a)\right|^q+t^s\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&+\left(\int\limits_0^{\frac{5}{8}}\left(\tfrac{5}{8}-t\right)^p dt+\int\limits_{\frac{5}{8}}^1\left(t-\tfrac{5}{8}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\times\left(\int\limits_0^1\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|^q+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\int\limits_0^{\frac{3}{8}}\left(\tfrac{3}{8}-t\right)^p dt+\int\limits_{\frac{3}{8}}^1\left(t-\tfrac{3}{8}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\times\left(\int\limits_0^1\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\left.+\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^1\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|^q+t^s\left|f'(b)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\
=\ & \tfrac{b-a}{72(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(2\left(\tfrac{\left|f'(a)\right|^q+\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+2\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\tfrac{5^{p+1}+3^{p+1}}{8}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).
\end{aligned}
$$

La preuve est ainsi achevée. ■

2.2 Inégalités intégrales de type Milne

Dans cette seconde sous section nous allons nous intéressé à la première quadrature de Milne donnée comme suit :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{b-a}{3}\left(2f(a)-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+2f(b)\right).$$

2.2.1 Inégalités intégrales de type Milne pour les fonctions dont les dérivées premières sont s-convexes

Théorème 2.3 ([5]) *Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f' \in L^1[a,b]$. Si $|f'|$ est s-convexe sur $[a,b]$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{3}\left(2f(a) - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 2f(b)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\tfrac{4s+5}{3(s+1)(s+2)}|f'(a)| + \tfrac{2s+10}{3(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| + \tfrac{4s+5}{3(s+1)(s+2)}|f'(b)|\right).
\end{aligned}
$$

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux deux membres de l'identité du Lemme 1.2, ensuite faisons appelle à la s-convexité de $|f'|$ sur $[a,b]$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{3}\left(2f(a) - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 2f(b)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\int_0^1 \left|t-\tfrac{4}{3}\right|\left|f'\left((1-t)a + t\tfrac{a+b}{2}\right)\right|dt + \int_0^1 \left|t+\tfrac{1}{3}\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2} + tb\right)\right|dt\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\int_0^1 \left(\tfrac{4}{3}-t\right)\left|f'\left((1-t)a + t\tfrac{a+b}{2}\right)\right|dt + \int_0^1 \left(t+\tfrac{1}{3}\right)\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2} + tb\right)\right|dt\right) \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\int_0^1 \left(\tfrac{4}{3}-t\right)\left((1-t)^s|f'(a)| + t^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right)dt\right. \\
&\left. + \int_0^1 \left(t+\tfrac{1}{3}\right)\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| + t^s|f'(b)|\right)dt\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{4}\left(|f'(a)|\int_0^1 \left(\tfrac{4}{3}-t\right)(1-t)^s dt + \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int_0^1 \left(\tfrac{4}{3}-t\right)t^s dt\right. \\
&\left. + \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int_0^1 \left(t+\tfrac{1}{3}\right)(1-t)^s dt + |f'(b)|\int_0^1 \left(t+\tfrac{1}{3}\right)t^s dt\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\tfrac{4s+5}{3(s+1)(s+2)}|f'(a)| + \tfrac{2s+10}{3(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| + \tfrac{4s+5}{3(s+1)(s+2)}|f'(b)|\right).
\end{aligned}
$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 2.4 ([5]) *Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f' \in L^1[a,b]$. Si $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$ pour $q > 1$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $s \in (0,1]$,* *alors :*

$$\left|\frac{1}{3}\left(2f\left(a\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+2f\left(b\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b}f\left(u\right)du\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{4^{p+1}-1}{3^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^{q}+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}+|f'(b)|^{q}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.2, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité de Hölder et la s-convexité de $|f'|^{q}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3}\left(2f\left(a\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+2f\left(b\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b}f\left(u\right)du\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{4}\left(\left(\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{4}{3}-t\right)^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{0}^{1}\left|f'\left(\left(1-t\right)a+t\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int\limits_{0}^{1}\left(t+\frac{1}{3}\right)^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{0}^{1}\left|f'\left(\left(1-t\right)\frac{a+b}{2}+tb\right)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
\leq\ & \frac{b-a}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{4^{p+1}-1}{3^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\int\limits_{0}^{1}\left(\left(1-t\right)^{s}\left|f'\left(a\right)\right|^{q}+t^{s}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int\limits_{0}^{1}\left(\left(1-t\right)^{s}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}+t^{s}\left|f'\left(b\right)\right|^{q}\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
=\ & \frac{b-a}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{4^{p+1}-1}{3^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^{q}+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}+|f'(b)|^{q}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Chapitre 3

Inégalités intégrales de type Euler-Simpson

Dans ce chapitre, nous allons d'abord démontrer une nouvelle identité, en s'appuyant sur cette dernière nous prouverons de nouvelles inégalités de type Newton-Cotes à trois points, dont la forme est la suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{b-a}{15}\left(8f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 8f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right).$$

Lemme 3.1 ([3]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I°, $a, b \in I^\circ$ avec $a < b$ et $f' \in L^1[a,b]$, alors l'égalité suivante est vérifiée*

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{15}\left(8f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 8f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \\
= \; & \tfrac{b-a}{16}\Bigg(\int_0^1 t f'\left((1-t)\,a + t\tfrac{3a+b}{4}\right) dt \\
& + \int_0^1 \left(t - \tfrac{17}{15}\right) f'\left((1-t)\,\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right) dt \\
& + \int_0^1 \left(t + \tfrac{2}{15}\right) f'\left((1-t)\,\tfrac{a+b}{2} + t\tfrac{a+3b}{4}\right) dt \\
& + \int_0^1 (t-1)\, f'\left((1-t)\,\tfrac{a+3b}{4} + tb\right) dt\Bigg).
\end{aligned}$$

Preuve. Considérons les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 t f'\left((1-t)\,a + t\tfrac{3a+b}{4}\right) dt,\\
I_2 &= \int_0^1 \left(t-\tfrac{17}{15}\right) f'\left((1-t)\,\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right) dt,\\
I_3 &= \int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{15}\right) f'\left((1-t)\,\tfrac{a+b}{2} + t\tfrac{a+3b}{4}\right) dt
\end{aligned}$$

et

$$I_4 = \int_0^1 (t-1)\, f'\left((1-t)\,\tfrac{a+3b}{4} + tb\right) dt.$$

En intégrant par partie I_1, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \tfrac{4}{b-a} t f\left((1-t)\,a + t\tfrac{3a+b}{4}\right)\Big|_{t=0}^{t=1} - \tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)\,a + t\tfrac{3a+b}{4}\right) dt\\
&= \tfrac{4}{b-a} f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - \tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)\,a + t\tfrac{3a+b}{4}\right) dt\\
&= \tfrac{4}{b-a} f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - \tfrac{16}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{3a+b}{4}} f(u)\, du. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

D'une manière similaire, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \tfrac{4}{b-a}\left(t-\tfrac{17}{15}\right) f\left((1-t)\,\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right)\Big|_{t=0}^{t=1}\\
&\quad -\tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)\,\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right) dt\\
&= -\tfrac{8}{15(b-a)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \tfrac{68}{15(b-a)} f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\\
&\quad -\tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)\,\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right) dt\\
&= -\tfrac{8}{15(b-a)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \tfrac{68}{15(b-a)} f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - \tfrac{16}{(b-a)^2}\int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}} f(u)\, du\ , \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \tfrac{4}{b-a}\left(t+\tfrac{2}{15}\right) f\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)\Big|_{t=0}^{t=1} \\
&\quad -\tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)dt \\
&= \tfrac{68}{15(b-a)} f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)-\tfrac{8}{15(b-a)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \\
&\quad -\tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)dt \\
&= \tfrac{68}{15(b-a)} f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)-\tfrac{8}{15(b-a)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{16}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+3b}{4}} f(u)\,du \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_4 &= \tfrac{4}{b-a}(t-1) f\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)\Big|_{t=0}^{t=1} \\
&\quad -\tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)dt \\
&= \tfrac{4}{b-a} f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)-\tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)dt \\
&= \tfrac{4}{b-a} f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)-\tfrac{16}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+3b}{4}}^{b} f(u)\,du. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

En additionnant (3.1)-(3.4), puis en multipliant l'égalité résultante par $\frac{b-a}{16}$, on obtient le résultat souhaite. ■

Théorème 3.1 ([3]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f' \in L^1[a,b]$ avec $0 \le a < b$. Si $|f'|$ est s-convexe au second sens pour certain $s \in]0,1]$ fixé, on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{15}\left(8f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+8f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\le\ & \tfrac{(68s+136)(b-a)}{135(s+1)(s+2)} \\
&\times\left(\tfrac{15|f'(a)|+(32s+34)\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|+(4s+38)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+(32s+34)\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|+15|f'(b)|}{68s+136}\right).
\end{aligned}$$

Preuve. A partir du Lemme 3.1, les propriétés de la valeur absolue et la s-convexité au second sens de $|f'|$, on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{15}\left(8f\left(\frac{3a+b}{4}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+8f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{9}\left(\int_0^1 t\left|f'\left((1-t)a+t\frac{3a+b}{4}\right)\right|dt\right. \\
&+\int_0^1\left|t-\frac{17}{15}\right|\left|f'\left((1-t)\frac{3a+b}{4}+t\frac{a+b}{2}\right)\right|dt \\
&+\int_0^1\left(t+\frac{2}{15}\right)\left|f'\left((1-t)\frac{a+b}{2}+t\frac{a+3b}{4}\right)\right|dt \\
&\left.+\int_0^1(1-t)\left|f'\left((1-t)\frac{a+3b}{4}+tb\right)\right|dt\right) \\
\leq\ & \frac{b-a}{9}\left(\int_0^1 t\left((1-t)^s\left|f'(a)\right|+t^s\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\right)dt\right. \\
&+\int_0^1\left(\frac{17}{15}-t\right)\left((1-t)^s\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|+t^s\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right)dt \\
&+\int_0^1\left(t+\frac{2}{15}\right)\left((1-t)^s\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+t^s\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|\right)dt \\
&\left.+\int_0^1(1-t)\left((1-t)^s\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|+t^s\left|f'(b)\right|\right)dt\right) \\
=\ & \frac{b-a}{9}\left(\left|f'(a)\right|\int_0^1 t(1-t)^s\,dt+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\int_0^1 t^{s+1}dt\right. \\
&+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\int_0^1\left(\frac{17}{15}-t\right)(1-t)^s\,dt+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\int_0^1\left(\frac{17}{15}-t\right)t^s dt \\
&+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\int_0^1\left(t+\frac{2}{15}\right)(1-t)^s\,dt+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|\int_0^1\left(t+\frac{2}{15}\right)t^s dt \\
&\left.+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|\int_0^1(1-t)^{s+1}\,dt+\left|f'(b)\right|\int_0^1(1-t)\,t^s dt\right) \\
=\ & \frac{(68s+136)(b-a)}{135(s+1)(s+2)} \\
&\times\left(\frac{15|f'(a)|+(32s+34)\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|+(4s+38)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+(32s+34)\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|+15|f'(b)|}{68s+136}\right),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t(1-t)^s\,dt &= \int_0^1 (1-t)\,t^s dt = \tfrac{1}{(s+1)(s+2)}, && (3.5)\\
\int_0^1 t^{s+1}dt &= \int_0^1 (1-t)^{s+1}\,dt = \tfrac{1}{s+2}, && (3.6)\\
\int_0^1 \left(\tfrac{17}{15}-t\right)(1-t)^s\,dt &= \int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{15}\right)t^s dt = \tfrac{17s+19}{15(s+1)(s+2)} && (3.7)
\end{aligned}$$

et

$$\int_0^1 \left(\tfrac{17}{15}-t\right)t^s dt = \int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{15}\right)(1-t)^s\,dt = \tfrac{2s+19}{15(s+1)(s+2)}. \quad (3.8)$$

La preuve est ainsi terminée. ■

Corollaire 3.1 ([3]) *Pour $s=1$, le Théorème 3.1 donne :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{15}\left(8f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+8f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\
\leq\ & \tfrac{34(b-a)}{135}\left(\tfrac{5|f'(a)|+22\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|+14\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+22\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|+5|f'(b)|}{68}\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.2 ([3]) *En utilisant la s-convexité de $|f'|$ le Théorème 3.1 devient :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{15}\left(8f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+8f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\
\leq\ & \tfrac{(b-a)}{135(s+1)^2(s+2)}\left(\left(15(s+1)+2^{1-s}(32s+34)\right)\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right)\right.\\
&\left.+\left(2^{2-s}(32s+34)+(s+1)(4s+38)\right)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right) \qquad (3.9)\\
\leq\ & \tfrac{(b-a)}{135(s+1)^2(s+2)}\left(\tfrac{15(s+1)^2+2^{3-s}(9s+18)(s+1)+2^{3-2s}(32s+34)}{s+1}\right)\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.3 ([3]) *Pour $s=1$, le Corollaire 3.2 donne :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{15}\left(8f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+8f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\
\leq\ & \tfrac{(b-a)}{135}\left(8|f'(a)|+18\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+8|f'(b)|\right)\\
\leq\ & \tfrac{17(b-a)}{135}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right).
\end{aligned}$$

Théorème 3.2 ([3]) *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f'\in L^1[a,b]$ avec $0\le a<b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe au second sens pour un certain nombre $s\in\,]0,1]$ et $q>1$ avec $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$, on a :*

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{15}\left(8f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+8f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\
\le\ &\frac{b-a}{9}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&+\left.\left(\frac{(17)^{p+1}-2^{p+1}}{(15)^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Preuve. En utilisant le Lemme 3.1, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité de Hölder et la s-convexité au second sens de $|f'|^q$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{15}\left(8f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+8f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\
\le\ &\frac{b-a}{9}\left(\left(\int_0^1 t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left((1-t)a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&+\left(\int_0^1\left(\tfrac{17}{15}-t\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\int_0^1\left(t+\tfrac{2}{15}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left.\left(\int_0^1(1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\
\le\ &\frac{b-a}{9}\left(\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left((1-t)^s|f'(a)|^q+t^s\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&+\left(\frac{(17)^{p+1}-2^{p+1}}{(15)^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\frac{(17)^{p+1}-2^{p+1}}{(15)^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left.\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q+t^s|f'(b)|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{b-a}{9}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{(17)^{p+1}-2^{p+1}}{(15)^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 3.4 ([3]) *En utilisant la s-convexité de $|f'|^q$, le Théorème 3.2, donne :*

$$\left|\frac{1}{15}\left(8f\left(\frac{3a+b}{4}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+8f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{9}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\left((s+1)^2+2^{1-s}\left(s+1+2^{1-s}\right)\right)|f'(a)|^q+2^{2-2s}|f'(b)|^q}{(s+1)^3}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$+\left(\frac{2^{2-2s}|f'(a)|^q+\left((s+1)^2+2^{1-s}\left(s+1+2^{1-s}\right)\right)|f'(b)|^q}{(s+1)^3}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\frac{(17)^{p+1}-2^{p+1}}{(15)^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{2^{1-s}\left(2s+2+2^{1-s}\right)|f'(a)|^q+2^{1-s}\left(s+1+2^{1-s}\right)|f'(b)|^q}{(s+1)^3}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{2^{1-s}\left(s+1+2^{1-s}\right)|f'(a)|^q+2^{1-s}\left(2s+2+2^{1-s}\right)|f'(b)|^q}{(s+1)^3}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).$$

Corollaire 3.5 ([3]) *En utilisant l'inégalité des moyennes d'ordre q discrète le Corollaire 3.4, donne :*

$$\left|\frac{1}{15}\left(8f\left(\frac{3a+b}{4}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+8f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$
$$\leq \frac{2(b-a)}{9}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\left((s+1)^2+2^{1-s}\left(s+1+2^{1-s}\right)+2^{2-2s}\right)}{(s+1)^3}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{(17)^{p+1}-2^{p+1}}{(15)^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{2^{1-s}\left(3s+3+2^{2-s}\right)}{(s+1)^3}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Corollaire 3.6 ([3]) *Pour $s = 1$, le Théorème 3.2, donne*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{15}\left(8f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+8f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{9}\left(\tfrac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{3|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+3|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+\left.\left(\tfrac{(17)^{p+1}-2^{p+1}}{(15)^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q+3\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{3\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.7 ([3]) *En utilisant la convexité de $|f'|^q$, le Corollaire 3.6, donne :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{15}\left(8f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+8f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{9}\left(\tfrac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{7|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{|f'(a)|^q+7|f'(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+\left.\left(\tfrac{(17)^{p+1}-2^{p+1}}{(15)^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{5|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{3|f'(a)|^q+5|f'(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.8 ([3]) *En utilisant l'inégalité des moyennes d'ordre q discrète le Corollaire 3.7, donne :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{15}\left(8f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+8f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{2(b-a)}{9}\left(\tfrac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(1+\left(\tfrac{(17)^{p+1}-2^{p+1}}{(15)^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\tfrac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Théorème 3.3 ([3]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f' \in L^1[a,b]$ avec $0 \leq a < b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe au second sens pour un certain nombre $s \in]0,1]$ fixé et $q \geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{15}\left(8f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+8f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{18}\left(\left(\tfrac{2|f'(a)|^q+2(s+1)\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}+\tfrac{19}{15}\left(\tfrac{(34s+38)\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+(4s+38)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{19(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right.
\end{aligned}$$

$$+\frac{19}{15}\left(\frac{(4s+38)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+(34s+38)\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q}{19(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{2(s+1)\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+2|f'(b)|^q}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg).$$

Preuve. D'après le Lemme 3.1, l'inégalité des moyennes d'ordre q et la s-convexité de $|f'|^q$, on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{15}\left(8f\left(\frac{3a+b}{4}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+8f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\
\leq\ & \frac{b-a}{9}\left(\left(\int_0^1 tdt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t\left|f'\left((1-t)a+t\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&+\left(\int_0^1\left(\frac{17}{15}-t\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left(\frac{17}{15}-t\right)\left|f'\left((1-t)\frac{3a+b}{4}+t\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\int_0^1\left(t+\frac{2}{15}\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left(t+\frac{2}{15}\right)\left|f'\left((1-t)\frac{a+b}{2}+t\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\left.+\left(\int_0^1(1-t)\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1(1-t)\left|f'\left((1-t)\frac{a+3b}{4}+tb\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\
\leq\ & \frac{b-a}{9}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t\left((1-t)^s|f'(a)|^q+t^s\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&+\left(\frac{19}{30}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left(\frac{17}{15}-t\right)\left((1-t)^s\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+t^s\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\frac{19}{30}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left(t+\frac{2}{15}\right)\left((1-t)^s\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+t^s\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\left.+\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1(1-t)\left((1-t)^s\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+t^s|f'(b)|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\
=\ & \frac{b-a}{9}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|^q\int_0^1 t(1-t)^s dt+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q\int_0^1 t^{s+1}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&+\left(\frac{19}{30}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q\int_0^1\left(\frac{17}{15}-t\right)(1-t)^s dt+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\int_0^1\left(\frac{17}{15}-t\right)t^s dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\frac{19}{30}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\int_0^1\left(t+\frac{2}{15}\right)(1-t)^s dt+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q\int_0^1\left(t+\frac{2}{15}\right)t^s dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\left.+\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q\int_0^1(1-t)^{s+1}dt+|f'(b)|^q\int_0^1(1-t)t^s dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \tfrac{b-a}{18}\left(\left(\tfrac{2|f'(a)|^q+2(s+1)\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}} + \tfrac{19}{15}\left(\tfrac{(34s+38)\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+(4s+38)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{19(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
& \left. + \tfrac{19}{15}\left(\tfrac{(4s+38)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+(34s+38)\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q}{19(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{2(s+1)\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+2|f'(b)|^q}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right),
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé (3.5)-(3.8). La preuve est terminée. ■

Corollaire 3.9 ([3]) *Pour $s=1$, le Théorème 3.3, donne :*

$$
\begin{aligned}
& \left|\tfrac{1}{15}\left(8f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+8f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq \quad & \tfrac{b-a}{18}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q+2\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{2\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
& \left. + \tfrac{19}{15}\left(\left(\tfrac{12\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+7\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{19}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{7\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+12\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q}{19}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Corollaire 3.10 ([3]) *En utilisant la s-convexité de $|f'|^q$ le Théorème 3.3, donne :*

$$
\begin{aligned}
& \left|\tfrac{1}{15}\left(8f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+8f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq \quad & \tfrac{b-a}{18}\left(\left(\tfrac{\left(2+2^{2-s}\right)|f'(a)|^q+2^{2-s}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{2^{2-s}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left(2^{2-s}+2\right)|f'(b)|^q}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
& +\tfrac{19}{15}\left(\tfrac{2^{1-s}(34s+38)}{19(s+1)^2(s+2)}\left|f'(a)\right|^q+\tfrac{2^{1-s}(34s+38)+(4s+38)(s+1)}{19(s+1)^2(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
& \left. +\tfrac{19}{15}\left(\tfrac{2^{1-s}(34s+38)+(4s+38)(s+1)}{19(s+1)^2(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+\tfrac{2^{1-s}(34s+38)}{19(s+1)^2(s+2)}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}
$$

Corollaire 3.11 ([3]) *En utilisant la s-convexité de $|f'|^q$ le Corollaire 3.10, donne :*

$$
\begin{aligned}
& \left|\tfrac{1}{15}\left(8f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+8f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq \quad & \tfrac{b-a}{18}\left(\left(\tfrac{\left(\left(2+2^{2-s}\right)(s+1)+2^{3-2s}\right)|f'(a)|^q+2^{3-2s}|f'(b)|^q}{(s+1)^2(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right.
\end{aligned}
$$

$$+\left(\frac{2^{3-2s}|f'(a)|^q+\left(2^{3-2s}+\left(2^{2-s}+2\right)(s+1)\right)|f'(b)|^q}{(s+1)^2(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{19}{15}\left(\frac{2^{2-2s}(34s+38)+2^{1-s}(38s+76)(s+1)}{19(s+1)^3(s+2)}\left|f'(a)\right|^q\right.$$
$$\left.+\ \frac{2^{2-2s}(34s+38)+2^{1-s}(4s+38)(s+1)}{19(s+1)^3(s+2)}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{19}{15}\left(\frac{2^{2-2s}(34s+38)+2^{1-s}(4s+38)(s+1)}{19(s+1)^3(s+2)}\left|f'(a)\right|^q\right.$$
$$\left.\left.+\ \frac{2^{2-2s}(34s+38)+2^{1-s}(38s+76)(s+1)}{19(s+1)^3(s+2)}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Corollaire 3.12 ([3]) *En utilisant l'inégalité des moyennes d'ordre q discrète le Corollaire 3.11, donne :*

$$\left|\frac{1}{15}\left(8f\left(\frac{3a+b}{4}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+8f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$
$$\leq\ \frac{b-a}{9}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(\frac{\left(2+2^{2-s}\right)(s+1)+2^{4-2s}}{(s+1)^2(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}+\frac{19}{15}\left(\frac{2^{3-2s}(34s+38)+2^{1-s}(42s+114)(s+1)}{19(s+1)^3(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Corollaire 3.13 ([3]) *Pour $s=1$, le Corollaire 3.10, donne :*

$$\left|\frac{1}{15}\left(8f\left(\frac{3a+b}{4}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+8f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$
$$\leq\ \frac{b-a}{18}\left(\left(\frac{2|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+2|f'(b)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\ \frac{19}{15}\left(\left(\frac{6|f'(a)|^q+13\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{19}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{13\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+6|f'(b)|^q}{19}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).$$

Corollaire 3.14 ([3]) *Pour $s=1$, le Corollaire 3.11, donne :*

$$\left|\frac{1}{15}\left(8f\left(\frac{3a+b}{4}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+8f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$
$$\leq\ \frac{b-a}{18}\left(\left(\frac{5|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{6}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(a)|^q+5|f'(b)|^q}{6}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\ \frac{19}{15}\left(\left(\frac{25|f'(a)|^q+13|f'(b)|^q}{38}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{13|f'(a)|^q+25|f'(b)|^q}{38}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).$$

Corollaire 3.15 ([3]) *En utilisant l'inégalité des moyennes d'ordre q discrète le Corollaire 3.14, donne :*

$$\left|\tfrac{1}{15}\left(8f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+8f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(u)\,du\right|\leq \tfrac{34(b-a)}{135}\left(\tfrac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Théorème 3.4 ([3]) *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f'\in L^1[a,b]$ avec $a<b$. Si $f'(x)$ est bornée, alors :*

$$\left|\tfrac{1}{15}\left(8f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+8f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(u)\,du\right|\leq \tfrac{(b-a)(M-m)}{8}.$$

Preuve. D'après le Lemme 3.1, on a :

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{15}\left(8f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+8f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(u)\,du\\
=\;&\tfrac{b-a}{16}\left(\int\limits_0^1 t\left(f'\left((1-t)\,a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}+\tfrac{m+M}{2}\right)dt\right.\\
&+\int\limits_0^1\left(t-\tfrac{17}{15}\right)\left(f'\left((1-t)\,\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{m+M}{2}+\tfrac{m+M}{2}\right)dt\\
&+\int\limits_0^1\left(t+\tfrac{2}{15}\right)\left(f'\left((1-t)\,\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}+\tfrac{m+M}{2}\right)dt\\
&\left.+\int\limits_0^1(t-1)\left(f'\left((1-t)\,\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)-\tfrac{m+M}{2}+\tfrac{m+M}{2}\right)dt\right)\\
=\;&\tfrac{b-a}{16}\left(\int\limits_0^1 t\left(f'\left((1-t)\,a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right)dt\right.\\
&+\int\limits_0^1\left(t-\tfrac{17}{15}\right)\left(f'\left((1-t)\,\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right)dt\\
&+\int\limits_0^1\left(t+\tfrac{2}{15}\right)\left(f'\left((1-t)\,\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right)dt\\
&\left.+\int\limits_0^1(t-1)\left(f'\left((1-t)\,\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)-\tfrac{m+M}{2}\right)dt\right),
\end{aligned}\tag{3.10}$$

où nous avons pris en considération que :

$$\int_0^1 t dt + \int_0^1 \left(t - \frac{17}{15}\right) dt + \int_0^1 \left(t + \frac{2}{15}\right) dt + \int_0^1 (t-1)\, dt = 0.$$

En appliquant la valeur absolue des deux côtés de (3.10), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{15}\left(8f\left(\frac{3a+b}{4}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 8f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{16}\left(\int_0^1 t\left|f'\left((1-t)a + t\frac{3a+b}{4}\right) - \frac{m+M}{2}\right| dt\right. \\
&+\int_0^1 \left(\frac{17}{15} - t\right)\left|f'\left((1-t)\frac{3a+b}{4} + t\frac{a+b}{2}\right) - \frac{m+M}{2}\right| dt \\
&+\int_0^1 \left(t + \frac{2}{15}\right)\left|f'\left((1-t)\frac{a+b}{2} + t\frac{a+3b}{4}\right) - \frac{m+M}{2}\right| dt \\
&\left.+\int_0^1 (1-t)\left|f'\left((1-t)\frac{a+3b}{4} + tb\right) - \frac{m+M}{2}\right| dt\right). \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Puisque $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$\left|f'\left((1-t)a + t\frac{3a+b}{4}\right) - \frac{m+M}{2}\right| \leq \frac{M-m}{2}, \qquad (3.12)$$

$$\left|f'\left((1-t)\frac{3a+b}{4} + t\frac{a+b}{2}\right) - \frac{m+M}{2}\right| \leq \frac{M-m}{2}, \qquad (3.13)$$

$$\left|f'\left((1-t)\frac{a+b}{2} + t\frac{a+3b}{4}\right) - \frac{m+M}{2}\right| \leq \frac{M-m}{2}, \qquad (3.14)$$

$$\left|f'\left((1-t)\frac{a+3b}{4} + tb\right) - \frac{m+M}{2}\right| \leq \frac{M-m}{2}. \qquad (3.15)$$

En substituant (3.12)-(3.15) dans (3.11), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{15}\left(8f\left(\frac{3a+b}{4}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 8f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)(M-m)}{16}\left(\int_0^1 t dt + \int_0^1 \left(\frac{17}{15} - t\right) dt + \int_0^1 \left(t + \frac{2}{15}\right) dt + \int_0^1 (1-t)\, dt\right) \\
=\ & \frac{(b-a)(M-m)}{8}.
\end{aligned}$$

La preuve est terminée. ■

Théorème 3.5 ([3]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f' \in L^1[a,b]$ avec $a < b$. Si f' est une fonction r-L-Hölderienne sur $[a,b]$, alors :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{15}\left(8f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 8f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{L}{60}\left(\tfrac{b-a}{4}\right)^{r+1}\left(\tfrac{34r+68}{(r+1)(r+2)} + \tfrac{15\times 3^r+19}{2}\right).
\end{aligned}$$

Preuve. D'après le Lemme 3.1, on a :

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{15}\left(8f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 8f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \\
=\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\int_0^1 t\left(f'\left((1-t)a + t\tfrac{3a+b}{4}\right) - f'(a) + f'(a)\right)dt\right. \\
& +\int_0^1 \left(t-\tfrac{17}{15}\right)\left(f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right) - f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) + f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right)dt \\
& +\int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{15}\right)\left(f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2} + t\tfrac{a+3b}{4}\right) - f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right)dt \\
& \left.+\int_0^1 (t-1)\left(f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4} + tb\right) - f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right) + f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)dt\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\int_0^1 t\left(f'\left((1-t)a + t\tfrac{3a+b}{4}\right) - f'(a)\right)dt\right. \\
& +\int_0^1 \left(t-\tfrac{17}{15}\right)\left(f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right) - f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right)dt \\
& +\int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{15}\right)\left(f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2} + t\tfrac{a+3b}{4}\right) - f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right)dt \\
& +\int_0^1 (t-1)\left(f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4} + tb\right) - f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)dt \\
& \left.+\tfrac{1}{2}\left(f'(a) - f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right) + \tfrac{19}{30}\left(f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right)\right). \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

En appliquant la valeur absolue des deux côtés de (3.16), et en utilisant le fait que f' est une fonction r-L-Hölderienne sur $[a,b]$, on obtient :

$$\left|\tfrac{1}{15}\left(8f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 8f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \frac{b-a}{16}\left(\int_0^1 t\left|f'\left((1-t)\,a+t\frac{3a+b}{4}\right)-f'(a)\right|dt\right.\\
&+\int_0^1\left(\frac{17}{15}-t\right)\left|f'\left((1-t)\,\frac{3a+b}{4}+t\frac{a+b}{2}\right)-f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|dt\\
&+\int_0^1\left(t+\frac{2}{15}\right)\left|f'\left((1-t)\,\frac{a+b}{2}+t\frac{a+3b}{4}\right)-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|dt\\
&+\int_0^1(1-t)\left|f'\left((1-t)\,\frac{a+3b}{4}+tb\right)-f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|dt\\
&\left.+\frac{1}{2}\left|f'(a)-f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|+\frac{19}{30}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)-f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\right)\\
\leq\ & \frac{L}{4}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{r+1}\left(\int_0^1 t^{r+1}dt+\int_0^1\left(\frac{17}{15}-t\right)t^r dt+\int_0^1\left(t+\frac{2}{15}\right)t^r dt\right.\\
&\left.+\int_0^1(1-t)\,t^r dt+\frac{3^r}{2}+\frac{19}{30}\right)\\
=\ & \frac{L}{60}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{r+1}\left(\frac{34r+68}{(r+1)(r+2)}+\frac{15\times 3^r+19}{2}\right),
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé (3.5)-(3.8) en remplaçant le s par r. La preuve est terminée. ■

Corollaire 3.16 ([3]) *Sous les hypothèses du Théorème 3.5 et si f' est une fonction L-Lipschitzienne, on a :*

$$
\left|\frac{1}{15}\left(8f\left(\frac{3a+b}{4}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+8f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\leq\frac{49}{960}(b-a)^2L.
$$

3.1 Applications

3.1.1 Applications aux quadratures

Soit Υ la partition des points $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ de l'intervalle $[a,b]$ et considérons la formule de quadrature

$$
\int_a^b f(u)\,du=\lambda(f,\Upsilon)+R(f,\Upsilon),
$$

où

$$\lambda\left(f,\Upsilon\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x_{i+1}-x_i}{15}\left(8f\left(\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)-f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+8f\left(\frac{x_i+3x_{i+1}}{4}\right)\right)$$

et $R(f,\Upsilon)$ désigne l'erreur d'approximation associée.

Proposition 3.1 *Soit $n\in\mathbb{N}$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ avec $0\leq a<b$ et $f'\in L^1[a,b]$. Si $|f'|$ est s-convexe, alors on a :*

$$\begin{aligned}\left|R\left(f,\Upsilon\right)\right| &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{135(s+1)^2(s+2)}\left(\frac{15(s+1)^2+2^{3-s}(9s+18)(s+1)+2^{3-2s}(32s+34)}{s+1}\right)\\ &\quad\times\left(\left|f'\left((x_i)\right)\right|+\left|f'\left((x_{i+1})\right)\right|\right).\end{aligned}$$

Preuve. En appliquant l'inégalité (3.9) du Corollaire 3.2 sur les sous-intervalles $[x_i,x_{i+1}]$ pour $(i=0,1,...,n-1)$ de la partition Υ, on obtient :

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{15}\left(8f\left(\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)-f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+8f\left(\frac{x_i+3x_{i+1}}{4}\right)\right)-\frac{1}{x_{i+1}-x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f\left(u\right)du\right|\\ \leq\ &\frac{(x_{i+1}-x_i)}{135(s+1)^2(s+2)}\left(\frac{15(s+1)^2+2^{3-s}(9s+18)(s+1)+2^{3-2s}(32s+34)}{s+1}\right)\left(\left|f'\left((x_i)\right)\right|+\left|f'\left((x_{i+1})\right)\right|\right).\end{aligned}$$

En multipliant les deux côtés de l'inégalité ci-dessus par $(x_{i+1}-x_i)$, puis en additionnant les inégalités obtenues pour tout $i=0,1,...,n-1$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons le résultat souhaité. ■

Proposition 3.2 *Soit $n\in\mathbb{N}$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ avec $0\leq a<b$ et $f'\in L^1[a,b]$. Si $|f'|^q$ est convexe, alors on a :*

$$\begin{aligned}&\left|R\left(f,\Upsilon\right)\right|\\ \leq\ &\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2(x_{i+1}-x_i)^2}{9}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(1+\left(\frac{(17)^{p+1}-2^{p+1}}{(15)^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\frac{|f'(x_i)|^q+|f'(x_{i+1})|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Preuve. En appliquant le Corollaire 3.10 sur les sous-intervalles $[x_i,x_{i+1}]$ pour $(i=$

$0,1,...,n-1)$ de la partition Υ, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{15}\left(8f\left(\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)-f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+8f\left(\frac{x_i+3x_{i+1}}{4}\right)\right)-\frac{1}{x_{i+1}-x_i}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \frac{2(x_{i+1}-x_i)}{9}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(1+\left(\frac{(17)^{p+1}-2^{p+1}}{(15)^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\frac{|f'(x_i)|^q+|f'(x_{i+1})|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

En multipliant les deux côtés de l'inégalité ci-dessus par $(x_{i+1}-x_i)$, puis en additionnant les inégalités obtenues pour tout $i=0,1,...,n-1$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons le résultat souhaité. ■

Proposition 3.3 *Soit $n\in\mathbb{N}$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ avec $0\leq a<b$ et $f'\in L^1[a,b]$. Si $|f'|^q$ est s-convexe, alors on a :*

$$\begin{aligned}
|R(f,\Upsilon)| \leq\ & \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{9}\left(\frac{|f'(x_i)|^q+|f'(x_{i+1})|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\left(\frac{\left(2+2^{2-s}\right)(s+1)+2^{4-2s}}{(s+1)^2(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}+\frac{19}{15}\left(\frac{2^{3-2s}(34s+38)+2^{1-s}(42s+114)(s+1)}{19(s+1)^3(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Preuve. En appliquant le Corollaire 3.13 sur les sous-intervalles $[x_i,x_{i+1}]$ pour $(i=0,1,...,n-1)$ de la partition Υ, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{15}\left(8f\left(\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)-f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+8f\left(\frac{x_i+3x_{i+1}}{4}\right)\right)-\frac{1}{x_{i+1}-x_i}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \frac{x_{i+1}-x_i}{9}\left(\left(\frac{\left(2+2^{2-s}\right)(s+1)+2^{4-2s}}{(s+1)^2(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}+\frac{19}{15}\left(\frac{2^{3-2s}(34s+38)+2^{1-s}(42s+114)(s+1)}{19(s+1)^3(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&\times\left(\frac{|f'(x_i)|^q+|f'(x_{i+1})|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

En multipliant les deux côtés de l'inégalité ci-dessus par $(x_{i+1}-x_i)$, puis en additionnant les inégalités obtenues pour tout $i=0,1,...,n-1$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons le résultat souhaité. ■

3.1.2 Applications aux moyennes spéciales

Pour des nombres réels quelconques a, b, c, on a :

La moyenne arithmétique : $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$ et $A(a,b,c,d) = \frac{a+b+c+d}{4}$.

La moyenne p-logarithmique : $L_p(a,b) = \left(\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right)^{\frac{1}{p}}$, $a, b > 0, a \neq b$ et $p \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$.

Proposition 3.4 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < b$ et $q \geq 1$, alors on a*

$$\begin{aligned} &\left|8A^2(a,a,a,b) - A^2(a,b) + 8A^2(a,b,b,b) - 15L_2^2(a,b)\right| \\ \leq\ & \frac{30(b-a)}{9}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{7a^q+b^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{a^q+7b^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\ &\left. + \left(\frac{(17)^{p+1}-2^{p+1}}{(15)^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{5a^q+3b^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3a^q+5b^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right). \end{aligned}$$

Preuve. L'assertion découle du Corollaire 3.7, appliquée à la fonction $f(x) = x^2$. ■

Proposition 3.5 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < b$ et $q \geq 1$, alors on a*

$$\left|8A^3(a,a,a,b) - A^3(a,b) + 8A^3(a,b,b,b) - 15L_3^3(a,b)\right| \leq \frac{147}{32}(b-a)^2 b.$$

Preuve. L'assertion découle du Corollaire 3.16, appliquée à la fonction $f(x) = x^3$. ■

Conclusion

La problématique de ce mémoire était d'étudier d'une part, certaines inégalités de type Euler-Simpson et de se familiarisé avec certaines outils nécessaires utiliser dans les démonstrations de ce genre de problèmes, et d'autre part essayer d'établir des nouvelles estimations concernant ce type d'inégalités.

Dans la première partie, nous nous sommes intéressés à rappeler quelques classes de fonctions ainsi que quelques identités.

Dans la seconde partie nous avons étudié quelques inégalités de type Newton-Cotes à trois points via certains genres de convexités.

Et dans la troisième partie nous avons discuté des nouveaux résultats concernant les inégalités de type Euler-Simpson pour les fonctions s-convexes, bornées et Hölderiennes.

Bibliographie

[1] W. W. Breckner, Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen. (German) Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 23 (1978), no. 37, 13–20.

[2] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić, Means and their inequalities. Translated and revised from the Serbo-Croatian. Mathematics and its Applications (East European Series), 31. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1988.

[3] T. Chiheb, B. Meftah and A. Fridjat, Some corrected dual Euler-Simpson type inequalities for differentiable s-convex functions. Accepted.

[4] J. Heinonen, Lectures on analysis on metric spaces. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[5] M. Djenaou and B. Meftah, Milne type inequalities for differentiable s-convex functions. Honam Mathematical J. 44 (2022), no. 3, pp. 325–338.

[6] B. Meftah and N. Allel, Maclaurin's inequalities for differentiable s-convex functions. Accepted.

[7] D. S. Mitrinović, Analytic inequalities. In cooperation with P. M. Vasić. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 165 Springer-Verlag, New York-Berlin 1970.

[8] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Classical and new inequalities in analysis. Mathematics and its Applications, 61. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[9] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Inequalities for functions and their integrals and derivatives, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.

[10] J. E. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Mathematics in Science and Engineering, 187. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.