République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles et Analyse Numérique**

Par : **Ferdjallah Razika**

Intitulé

Contrôlabilité faible d'un système intégro-différentiel fractionnaire linéaire

Dirigé par : **Dr. Berhail Amel**

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. ELLAGGOUNE Fateh	Prof	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. BERHAIL Amel	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. BOUHADJAR Slimane	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2023

Remerciements

Avant tout, je remercie **ALLAH** le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté et la force pour terminer ce travail dans les meilleures conditions.

Aussi, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans
l'aide et l'encadrement de **Dr. Barhail Amel,** je la remercie de m'avoir guidé et de m'avoir fourni tous les conseils et les informations importantes et utiles.

Je remercie les membres du jury **Dr. Ellaggoune Fateh** et **Dr. Bouhadjar Slimane** parce qu'ils m'ont fait l'honneur d'arbitrer mon travail.

Enfin, je remercie **ma famille** et **toutes les personnes** qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Merci beaucoup

Dédicaces

J'ai le grand plaisir de dédier ce modeste travail :

A ma **très chère mère**, qui me donne toujours l'espoir de vivre et qui n'a jamais cessé de prier pour moi.

A mon **très cher père**, pour ses encouragements, son soutien, surtout pour son amour et son sacrifice afin que rien n'entrave le déroulement de mes études.

A ma sœur **Nawel**, qui m'a beaucoup aidée et m'a encouragée à arriver au bout et aussi ma sœur **Radia** et ses enfants**, Yacob** et **Zahra.**

A mes frères **Radwan** et **Hamza.**

A mon cher mari **Islam**, pour ses encouragements et sa confiance

A mes chères amis **Chaima, Sara, Safa, Lidia, Salma, Warda…**

Razika

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions la contrôlabilité d'un système dynamique linéaire intégro-différentiel fractionnaire où en utilisant la dérivée fractionnaire de Caputo. Dans le processus de preuve, on établit l'obtention de la solution intégrale en employant la fonction Mittag-Leffler et la transformation de Laplace puis, nous allons étudier la contrôlabilité faible de notre système en utilisant la matrice Grammienne . Finalement, nous fournissons un exemple illustrant les résultats obtenus.
Mots clés : Contrôlabilité, fonction Mittag-Leffler, matrice de Gramien, dérivée fractionnaire de Caputo.

Abstract

In this work, we investigate the controllability of integro-differential linear fractional dynamical system by using fractional Caputo derivatives. In the process of proof, we mainly use Mittag-Leffler function to obtain the integral solution. then, we study the weak controllability of our system by using the Gramian matrix. At last, we give an example to illustrate our main result.
keywords : Controllability, Mittag-Leffler function, Gramian matrix, fractional derivative of Caputo.

Table des matières

Notations et Abréviations **1**

Introduction générale **2**

1 Préliminaires **3**

1.1 Fonctions spéciales 3

1.1.1 Fonction Gamma 3

1.1.2 Fonction Mittag-Leffler 4

1.2 Calcul Fractionnaire 5

1.2.1 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville 5

1.2.2 Dérivée fractionnaire de Caputo 6

1.3 Transformation de Laplace 7

1.4 Opérateur linéaire 9

1.4.1 Adjoint d'un opérateur 9

1.4.2 Résolvante d'un opérateur 10

2 Contrôlabilité **11**

2.1 Système contrôlé 11

2.2 Contrôlabilité 12

2.2.1 Critère de Contrôlabilité de Kalman 13

2.2.2 Caractérisation de la Contrôlabilité 14

2.2.3 Grammienne de contrôlabilité 16

2.3 Contrôle Optimal 16

3 Contrôlabilité d'un système intégro-différentiel fractionnaire linéaire **18**

3.1 Position du problème 18

3.2 Solution intégrale 19

3.3 Contrôlabilité d'un système fractionnaire 20
3.4 Contrôle Optimal 23
3.5 Condition de rang 25

Conclusion générale **30**

Bibliographie **31**

Notations et Abréviations

- $\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{N}$	Ensemble des nombres entiers.
- $\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
- $D(A)$	Domaine de l'opérateur A.
- $Im(A)$	Image de l'opérateur A.
- A^*	Adjoint de l'opérateur A.
- $KerA$	Noyau de l'opérateur A.
- $Re(z)$	Partie réelle d'un nombre complexe z.
- $\sigma(A)$	Spectre de l'opérateur A.
- $I_a^\alpha f$	Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction f.
- ${}^cD_a^\alpha f$	Dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α d'une fonction f.
- ${}^{RL}D_a^\alpha f$	Dérivée fractionnaire de Rimann-Liouville d'ordre α d'une fonction f.
- $\mathcal{L}(.)$	Transformée de Laplace.
- $\mathcal{L}^{-1}(.)$	Transformée de Laplace inverse.
- $\Gamma(.)$	Fonction Gamma.
- $E_{\alpha,\beta}(.)$	Fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.
- $E_\alpha(.)$	Fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre.

Introduction générale

La contrôlabilité s'intéresse au comportement de systèmes dynamiques en fonction de leurs paramètres. Elle peut être vue comme une stratégie permettant de sélectionner la bonne entrée d'un système pour que la sortie soit celle désirée. Donc, le but est d'amener le système d'un état initial donnée a un certain état final, en respectant éventuellement certains critères.
On rencontre dans la pratique de très nombreux problèmes de contrôle, dans toutes les disciplines : par exemple garer la voiture, piloter un avion ou un satellite vers une orbite, optimiser les flux d'information dans un réseau, contrôler une épidémie, réaliser une opération chirurgicale au laser,...

Depuis plusieurs décennies de nombreux travaux ont été menés sur les problèmes de contrôlabilité des équations fractionnaires [9], [3], [8], [7].
Nous nous sommes intéressés dans ce travail essentiellement à l'étude de contrôlabilité d'un système intégro-différentiel fractionnaire linéaire ou les dérivées sont prises au sens de Caputo.

Ce travail est organisé comme suit :
Dans le premier chapitre, nous donnons quelques notions préliminaires concernant le calcul fractionnaire, la transformée de Laplace et les opérateurs linéaires, qui seront bénéfique pour les chapitres qui vont suivre.
Le deuxième chapitre, est basé sur l'étude de la théorie de contrôle d'un problème distribué, où on a présenté les notions de base de cette théorie : contrôlabilité (exacte, faible et nulle) des systèmes distribués linéaires, condition de Kalman, contrôle optimal,...
Le dernier chapitre est dédié aux résultats d'existence des solutions d'un système intégro-différentiel fractionnaire linéaire au sens de Caputo où on a utilisé la fonction de Mittag-Lefler et la transformation de Laplace pour obtenir la solution intégrale, puis on a présenté les conditions nécessaires pour assurer la contrôlabilité de notre problème.
2

1

Préliminaires

Ce chapitre est introductif dans lequel on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de calcul fractionnaire et qui représentent des outils indispensables dans la suite de notre travail.

1.1 Fonctions spéciales

1.1.1 Fonction Gamma

Une des fonctions de base pour le calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge la fonction factorielle a l'ensemble des nombres complexes.

Définition 1.1. *[8] La fonction Gamma* $\Gamma(z)$ *est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad Re(z) > 0, \tag{1.1}$$

de plus on a

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

1.1.2 Fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler (notée $E_{\alpha,\beta}$ qui tient son nom du mathématicien suédois Gosta Mittag-Leffler (1903)) est une fonction spéciale, c'est-à-dire qui ne peut être calculée à partir d'équations rationnelles, qui s'applique dans le plan complexe et dépend de deux paramètres. Cette fonction est une généralisation directe de la fonction exponentielle, et elle joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire.

Définition 1.2. *[6] Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$, on définit la fonction de Mittag-Leffler comme suit*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0. \tag{1.2}$$

En particulier, si $\alpha = 1$ nous trouvons la fonction exponentielle $E_1(z) = e^z$.
Plus généralement, la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres est définie par

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0. \tag{1.3}$$

Si A est une matrice $(n.n)$, on obtient

$$E_{\alpha,\beta}(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + \beta)}. \tag{1.4}$$

Remarque 1.1. *:*
1) Pour $\beta = 1$, on trouve la relation (1.2) car

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} = E_\alpha(z).$$

2) Si $\alpha = \beta = 1$, il est clair que

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

3) La fonction $E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)$ est une fonction positive, décroissante. Elle vérifie les formules suivantes :

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n E_n(\lambda z^n) = \lambda E_n(\lambda z^n),$$

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n [z^{\beta-1} E_{n,\beta}(\lambda z^n)] = z^{\beta-n-1} E_{n,\beta-n}(\lambda z^n).$$

Lemme 1.1. *Soit $\beta, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\pi\alpha}{2} < \mu < min(\pi, \alpha\pi)$. Alors, il existe une constant C dépend de α, β et μ tel que*

$$| E_{\alpha,\beta}(z) | \leq \frac{C}{1 + | z |},$$

avec $\mu \leq | arg(z) | \leq \pi$.

1.2 Calcul Fractionnaire

Cette section sera consacrée aux définitions élémentaires sur les intégrales et les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo.

1.2.1 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.3. *[6] Soit $\Omega = [a, b)$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est une fonction continue sur Ω. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction f est définie par :*

$$I_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t > a, \tag{1.5}$$

quand l'intégrale existe.

Définition 1.4. *[6] La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville (notée par ${}^{RL}D$) d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction $f \in C^n(\Omega)$ est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\alpha} f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_a^{n-\alpha} f(t) && (1.6) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds. && (1.7) \end{aligned}$$

avec $n-1 < \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}^*$, quand l'intégrale existe.

Remarque 1.2. *:*

1) L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville est une simple généralisation de la formule de Cauchy suivante :

$$\begin{aligned} I_a^n f(t) &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ..... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Exemple 1.1. *:*

1) On considère la fonction f définie par

$$f(t) = (t-a)^{\beta}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} f(t) &= I_a^{\alpha} (t-a)^{\beta} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^{\beta} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1} (t-a)^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$^{RL}D_a^{\alpha}(t-a)^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

2) Pour $\alpha,\beta>0$*, on a*

$$I_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta-1}E_{\nu,\beta}(\lambda(t-a)^{\nu}\right]=(z-a)^{\alpha+\beta-1}E_{\nu,\beta+\alpha}(\lambda(z-a)^{\nu}),$$

et

$$^{RL}D_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta-1}E_{\nu,\beta}(\lambda(t-a)^{\nu}\right](z)=(z-a)^{\beta-\alpha-1}E_{\nu,\beta-\alpha}(\lambda(z-a)^{\nu})).$$

1.2.2 Dérivée fractionnaire de Caputo

L'approche de Riemann-Liouville a des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville en la borne inférieure.
Malgré le fait que des problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement, leurs solutions sont pratiquement inutiles, car il n'y a aucune interprétation physique pour de telle type de conditions initiales. Une certaine solution pour ce problème a été proposée par M. Caputo.

Définition 1.5. *[6] Soit* f *une fonction de classe* $C^n([a,b])$*. La dérivée de Caputo d'ordre* $\alpha>0$ *de la fonction* f *est définie par l'intermédiaire de la dérive fractionnaire de Riemann-Liouville c'est à dire :*

$$^{c}D_a^{\alpha}f(t)={}^{RL}D_a^{\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right], \tag{1.8}$$

avec $n-1<\alpha<n, \quad n\in\mathbb{N}^*$*, quand l'intégral existe.*

Définition 1.6. *[6] La dérivée fractionnaire de caputo d'ordre* α *d'une fonction* f *une fonction de classe* $C^n([a,b])$ *définie par :*

$$^{c}D_a^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t\frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}}ds, \quad t>a,$$

avec $n-1<\alpha<n, \quad n\in\mathbb{N}^*$.

Remarque 1.3. *Une différence entre la définition de Riemann-Liouville et la définition de Caputo est que la dérivée de Caputo d'une constante est nulle, par contre, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante* C *est :*

$$^{RL}D_a^{\alpha}C=\frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\neq 0.$$

Lemme 1.2. *[6] Soit $f \in C^n([a,b])$, nous avons les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) &= f(t), \\ I_a^\alpha D_a^\alpha f(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(a). \end{aligned} \tag{1.9}$$

1.3 Transformation de Laplace

Comme dans le cas entier, la transformée de Laplace est utilisée pour la résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaires. C'est un outil qui permet de convertir une équation différentielle en une équation linéaire ou disparaissent les formes dérivées.

Définition 1.7. *[2] La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ d'un variable réel positif $t \in (0, +\infty)$ est la fonction $F(s)$ définie par :*

$$F(s) = (\mathcal{L}f)(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt, \quad s \in \mathbb{C}. \tag{1.10}$$

La transformée de Laplace de la fonction f existe si l'intégrale (1.10) converge.

Propriétés de la transformation de Laplace :

1. La transformation de Laplace est une application linéaire donc pour tous réels σ, ρ et pour toutes fonctions f, g admettant des transformées de Laplace, on a

$$\mathcal{L}\{\sigma f + \rho g\} = \sigma \mathcal{L}\{f\} + \rho \mathcal{L}\{g\}.$$

2. Soient $\mathcal{F}(s)$ et $\mathcal{G}(s)$ les transformées de Laplace de $f(t)$ et $g(t)$ respectivement alors le produit de convolution $(f * g)$ est donné par :

$$(\mathcal{L}(f * g)(t))(s) = \mathcal{F}(s).\mathcal{G}(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-r)g(r)dr\right\}. \tag{1.11}$$

3. La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre n d'une fonction f est

$$(\mathcal{L}f^{(n)}(t))(s) = t^n(\mathcal{L}f(s))(t) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0).$$

Définition 1.8. *[4] L'inverse de la transformation de Laplace de la fonction $G(s)$ est donnée par la formule :*

$$(\mathcal{L}^{-1}g)(t) = \mathcal{L}^{-1}\{g(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} g(s)ds, \tag{1.12}$$

Définition 1.9. *[4] La formule de transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire et la dérivée au sens de Caputo sont données par :*

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{{}^{c}D_{t_0}^{\alpha} f(t)\right\}(\lambda) = \lambda^{\alpha} F(\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\lambda^{\alpha-k-1}, \quad (n-1 < \alpha \leq n), \\ \mathcal{L}\left\{I_0^{1-\alpha} f(t)\right\}(\lambda) = \lambda^{\alpha-1} F(\lambda). \end{cases} \tag{1.13}$$

De plus, si

$$Re\lambda > \|A\|^{\frac{1}{\alpha}},$$

la transformée de Laplace inverse de l'opérateur résolvant en termes de fonction de Mittag-Leffler est donnée par :

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{-1}\left\{\lambda^{\alpha-1}(\lambda^{\alpha} I - A)^{-1}\right\}(t) = E_{\alpha}(At^{\alpha}), \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{(\lambda^{\alpha} - A)^{-1}\right\}(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At^{\alpha}). \end{cases} \tag{1.14}$$

1.4 Opérateur linéaire

Définition 1.10. *[6] Soit X un espace de Hilbert. Un opérateur linéaire est une application linéaire* $A : D(A) \subset X \to X$ *où* $D(A)$ *est appelé le domaine de* A*. On dit que l'opérateur* A *est à domaine dense si* $\overline{D(A)} = X$ *.*

Définition 1.11. *[6] L'opérateur* A *est dit borné si*

$$\exists M > 0, \forall x \in D(A), \|Ax\|_X \leq M\|x\|_X.$$

On note par $\mathcal{L}(X)$ *l'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés de* X *dans* X *muni de la topologie de la convergence uniforme :*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|. \tag{1.15}$$

Définition 1.12. *[3] Soit* $A : D(A) \to X$ *un opérateur linéaire défini sur le domaine* $D(A) \subseteq X$*. L'opérateur* A *est dit fermé si et seulement si son domaine* $D(A)$ *est un espace complet par rapport à la norme :*

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X.$$

Remarque 1.4. *La densité du domaine est nécessaire et suffisante pour l'existence de l'adjoint.*

Définition 1.13. *Pour un opérateur linéaire* $A : D(A) \subset X \to X$ *nous noterons par*

$$ImA = \{Ax : x \in D(A)\},$$

l'image de A*, et par*

$$kerA = \{x \in D(A) : Ax = 0\},$$

le noyau de A*.*

Remarque 1.5. *:*

1) L'opérateur $A : D(A) \subset X \to ImA$ *est surjectif.*

2) Si $kerA = \{0\}$*, alors* A *est injectif.*

3) Pour un opérateur bijectif A*, on peut définir l'opérateur inverse* $A^{-1} : D(A^{-1}) \subset X \to X$*.*

1.4.1 Adjoint d'un opérateur

Définition 1.14. *L'adjoint d'un opérateur* $(A, D(A))$ *à domaine dense est l'unique opérateur* A^* *ayant pour domaine*

$$D(A^*) = \{x \in X, y \in D(A) \to (x, Ay)\ est\ continue\},$$

est vérifiant

$$\forall x \in D(A^*), \forall y \in D(A),\ (A^*x, y) = (x, Ay).$$

Remarque 1.6. *:*
1) L'opérateur adjoint des opérateurs non bornés peut être défini comme un opérateur borné.
2) Soit $A : D(A) \subset X \to X$. *A est dit auto adjoint, si* $D(A) = D(A^*)$ *et* $A = A^*$.

Proposition 1.1. *(Propriétés d'orthogonalité) Soit* $A \in \mathbb{R}^{n.n}$*, on a*
1) Le noyau de A^* *est l'orthogonal de l'image de* A :

$$ker(A^*) = [ImA]^{\perp},$$

En effet,

$$\forall x \in X,\ x \in KerA^* \Leftrightarrow \forall y \in X \quad (A^*x, y) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in X \quad (x, Ay) = 0 \Leftrightarrow x \in (ImA)^{\perp}.$$

2) L'orthogonal du noyau de A^* *est l'adhérence de l'image de* A *:*

$$(KerA^*)^{\perp} = \overline{ImA}.$$

3) De plus, on a

$$Im(A^*) = [kerA]^{\perp}.$$

1.4.2 Résolvante d'un opérateur

Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Banach. Pour tout nombre complexe λ tel que $(\lambda I - A)^{-1}$ existe et est continu, on définit la résolvante de A par :

$$R_{\lambda} = (\lambda I - A)^{-1}.$$

L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles la résolvante existe est appelé l'ensemble résolvant, noté $\rho(A)$. Le spectre $\sigma(A)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant :

$$\sigma(A) = \mathbb{C}/\rho(A).$$

2

Contrôlabilité

La théorie du contrôle (ou commande) analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères.

2.1 Système contrôlé

Un système du contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre appelé le contrôle, habituellement soumis à des contraintes. Un système contrôlé est un système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $x(t)$ est le vecteur des états, x_0 est la condition initiale, u est le contrôle appartiennent à un ensemble de contrôles admissibles U_{ad} et f est suffisamment régulier, de sorte que pour toute x_0 et tout contrôle $u \in U_{ad}$ le système (2.1) admet une unique solution $x(t)$. On notera cette solution par $x(t, x_0, u(.))$.

Ce système est représenté comme suit

$$u(input) \to x' = f(x,u) \to x(output)$$

Parmi les objectifs principaux de la théorie du contrôle qui seront abordés dans ce travail est la notion de la contrôlabilité.

2.2 Contrôlabilité

Soit $T > 0$, considérons un système différentiel linéaire défini sur $[0,T]$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

où A est une matrice carré $(n.n)$ appelée matrice d'état et B une matrice $(n.m)$ appelée matrice de commande ou du contrôle, $x(t)$ est l'état du système et x_0 la condition initiale. La solution de (2.2) est donnée par :

$$x(t,x_0,u(t)) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds. \tag{2.3}$$

La contrôlabilité est la notion de base dans l'analyse des systèmes dynamiques. Il s'agit d'imposer à un système un comportement souhaité, c'est à dire d'amener, en temps fini, un système d'un état initial arbitraire à un état désiré au moyen d'un contrôle.
Plus précisément, on peut définir plusieurs notions de contrôlabilité. Les plus importantes sont la contrôlabilité exacte, la contrôlabilité approchée et la contrôlabilité à zéro

Définition 2.1. *[5] On dit que le système (2.1) (resp .2.2) est exactement contrôlable en temps T si pour tous les états x_0, x_1 dans l'espace d'état, il existe un contrôle admissible u tel que :*

$$x_1 = x(T,x_0,u). \tag{2.4}$$

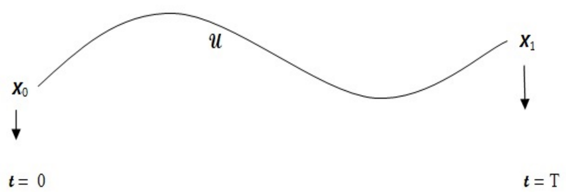

Figure1 : Contrôlabilité exacte

Remarque 2.1. *Il existe des cas où l'état désiré peut être approché mais non exactement atteint, c'est le cas de la contrôlabilité faible.*

Définition 2.2. *[5] Soit $T > 0$. Le système de contrôle (2.2) est approximativement (faiblement) contrôlable en temps T si pour tout x_0, x_1 dans l'espace d'état, et $\forall \varepsilon > 0$, il existe un contrôle u tel que la solution du système vérifie :*

$$\|x(T, x_0, u) - x_1\| \leq \varepsilon. \tag{2.5}$$

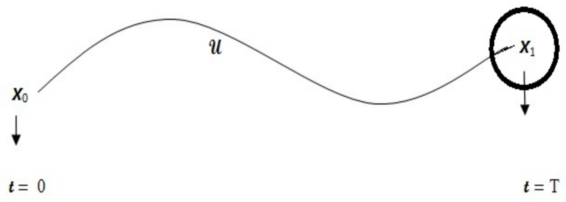

Figure2 : Contrôlabilité approchée

Définition 2.3. *[5] Le système (2.2) est dite " nulle-contrôlable" ou on a une "contrôlabilité à zéro" si $x_1 = 0$.*

Remarque 2.2. *:*

1. *La contrôlabilité faible ou approchée est plus simple à vérifier dans les applications.*
2. *La contrôlabilité exacte est la plus forte des trois notions.*

Exemple 2.1. *Le fait de tourner le volant ou non d'une automobile ne va pas affecter la vitesse (la vitesse n'est pas contrôlable par le volant), alors que le fait d'accélérer ne va pas influencer la direction de la voiture.*

2.2.1 Critère de Contrôlabilité de Kalman

Kalman a présenté une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité pour un système linéaire de dimension finie.

Définition 2.4. ***Matrice de Contrôlabilité** :*
La matrice

$$W = (B, AB, \cdots, A^{n-1}B), \tag{2.6}$$

dite matrice de contrôlabilité de Kalman.

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t et pas de contrainte sur le contrôle.

Théorème 2.1. *[10] Le système linéaire (2.2) est contrôlable si et seulement si :*

$$rang W = n. \tag{2.7}$$

On dit aussi que la paire (A, B) est contrôlable.

Remarque 2.3. *:*
1) La matrice W est appelée : Matrice de Kalman et la condition est appelée " Condition de Kalman". Cette condition ne dépend ni de temps ni de la donnée initiale. Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps T depuis x_0, alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.
2) Si la matrice A définissant le système (2.2) est diagonale à éléments distincts deux à deux, alors le système est contrôlable ssi la matrice B n'a aucune colonne nulle.

Exemple 2.2. *On considère un système dynamique décrit par :*

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

tel que les matrices A et B sont donnée :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ce système est contrôlable car la Matrice de contrôlabilité W est de rang maximale. En effet,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$det W = -1 \Rightarrow rang W = 2.$$

On donne ci-après un résultat permettant de donner une caractérisation de la contrôlabilité.

2.2.2 Caractérisation de la Contrôlabilité

Pour tout $t \in [0, T]$, on peut écrire la solution (2.3) du système (2.2) sous la forme :

$$x(t, x_0, u) = X_0 + L_t u, \tag{2.8}$$

où $L_t u$ est l'opérateur linéaire borné défini par :

$$L_t : \begin{cases} L_2(0, T, U) \to \mathbb{R}^n \\ u \to \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s) ds, \end{cases} \tag{2.9}$$

et

$$X_0 = e^{tA} x_0.$$

Pour simplifier les calculs, prenons $X_0 = 0$.

On considère son l'adjoint L_t^* donné par :

$$L_t^* : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow L^2(0, T, U) \\ z \longrightarrow L_t^*(z) = B^* e^{A^*(T-t)} z, \end{cases}$$

tel que

$$(L_t^*(z), u) = (z, L_t u), \forall u \in L^2(0, T, U), \quad \forall z \in \mathbb{R}^n. \tag{2.10}$$

Proposition 2.1. *[10] Le système (2.2) est exactement contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement si l'opérateur L_T est surjectif i.e*

$$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, \exists u \in U_{ad}, \; x(x_0, u)(T) = x_1.$$

Démonstration. Soit $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ deux états quelconques. L'équation en u :

$$x(T, x_0, u) = x_1,$$

a une solution dans $L^2(0, T, U)$ si et seulement si l'équation

$$L_T u = x_1 - e^{TA} x_0,$$

a une solution dans $L^2(0, T, U)$. L'équivalence des deux équations entraine la proposition. □

Remarque 2.4. *:*

1) D'après la proposition précédente, on peut dire que le système (2.2) est contrôlable si et seulement si $ImL_T = \mathbb{R}^n$.

2) La matrice W est de rang maximal si et seulement si l'application linéaire L_t est surjective.

Proposition 2.2. *[1] Il y a équivalence entre*

- *Le système (2.2) est faiblement contrôlable,*
- $\overline{ImL_T} = \mathbb{R}^n$,
- $\overline{Im(L_T L_T^*)} = \mathbb{R}^n$,
- $Ker(L_T^*) = \{0\}$.

2.2.3 Grammienne de contrôlabilité

On introduit la matrice de contrôlabilité dit "Grammienne de contrôlabilité " par

$$W_t = L_t L_t^* = \int_0^T e^{sA} BB^* e^{sA^*} ds, \tag{2.11}$$

tel que A^* et B^* désignent les matrices transposées des matrices A et B.

Corollaire 2.1. *[5] Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *La paire (A, B) est contrôlable au temps $T > 0$.*
2. *L'opérateur L_t est surjectif.*
3. *L'opérateur L_t^* est injectif.*
4. *La matrice W_t est inversible.*

Remarque 2.5. *La matrice de contrôlabilité W est toujours positive car*

$$\langle W_t x, x\rangle = \int_0^T |B^t e^{sA^t} x|^2 ds = \|L_t^* x\|^2 \geqslant 0. \tag{2.12}$$

2.3 Contrôle Optimal

Dans le cas où le système est contrôlable, il existe une infinité de contrôles. Il est intéressant de construire un qui "consomme le moins d'énergie".
La fonctionnelle d'énergie que l'on choisit ici est

$$J(u) = \int_0^T \|u(s)\|^2 ds.$$

On notera

$$U_{ad}(x_0, x_1) = \{u \in U, x(T, x_0, u) = x_1\}.$$

Donc, on cherche la solution du problème d'optimisation avec contrainte suivant :

$$(P)\ \{min\ J(u), \quad u \in U_{ad}\}. \tag{2.13}$$

Deux questions se posent alors :
- Trouver l'existence d'un contrôle optimal.
- Trouver un moyen de le calculer c'est à dire décrire une méthode pour calculer le contrôle, en fonction des divers paramètres du problème.

Théorème 2.2. *[10] Le problème (P) admet une solution unique si :*
- *J est continue, coercive, et strictement convexe.*
- *U_{ad} est convexe, fermé, et non vide.*

Le théorème suivant définit l'unique contrôle u qui minimise la fonctionnelle J sur l'ensemble $U_{ad}(x_0, x_1)$.

Théorème 2.3. *[10]*

Le contrôle u qui transfère x_0 en $x_1 = x(T, x_0, u)$ est donné par :

$$u(s) = B^* e^{(T-s)A^*} W_T^{-1}(x_1 - e^{TA} x_0). \tag{2.14}$$

Pour la preuve, en utilisant la formule (2.3).

3

Contrôlabilité d'un système intégro-différentiel fractionnaire linéaire

Dans ce chapitre, on s'intéresse a l'étude de la contrôlabilité approchée d'un problème fractionnaire (au sens de Caputo) linéaire.

3.1 Position du problème

On considère le système intégro-différentiel fractionnaire non linéaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD_0^\alpha x(t) = Ax(t) + I_0^{1-\alpha}Bu(t) + f(t, x(t), u(t)), \quad t \in J = (0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où :

- ${}^cD_0^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α tel que $0 < \alpha < 1$.
- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état.
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le contrôle.
- $A \in M(n, n)$, $B \in M(n, m)$
- $f : J.\mathbb{R}^n.\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée.
- $x(0)$ est la condition initiale.

3.2 Solution intégrale

Dans cette section, on démontre un résultat d'équivalence entre l'équation différentielle de notre problème et l'équation intégrale en utilisant la transformation de Laplace.

Lemme 3.1. *Soit le système linéaire suivant*

$$\begin{cases} {}^cD_0^\alpha x(t) = Ax(t) + I_0^{1-\alpha}Bu(t) + f(t), \quad t \in J \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Alors, x est la solution du problème (3.2) si et seulement si x est une solution de l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = E_\alpha(At^\alpha)x_0 + \int_0^t E_\alpha(A(t-s)^\alpha)Bu(s)ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)f(s)ds. \tag{3.3}$$

Démonstration. En appliquant la transformation de Laplace (1.13) sur (3.2), on obtient

$$\mathcal{L}\{{}^cD_0^\alpha x(t)\}(\lambda) = \mathcal{L}\{Ax(t)\}(\lambda) + \mathcal{L}\{I_0^{1-\alpha}Bu(t)\}(\lambda) + \mathcal{L}\{f(t)\}(\lambda),$$

on arrive à

$$\lambda^\alpha X(\lambda) - \lambda^{\alpha-1}x(0) = AX(\lambda) + \lambda^{\alpha-1}BU(\lambda) + F(\lambda),$$

ce qui implique

$$(\lambda^\alpha I - A)X(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}x(0) + \lambda^{\alpha-1}BU(\lambda) + F(\lambda).$$

Nous trouvons

$$X(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}x(0)(\lambda^\alpha I - A)^{-1} + \lambda^{\alpha-1}BU(\lambda)(\lambda^\alpha I - A)^{-1} + F(\lambda)(\lambda^\alpha I - A)^{-1}.$$

Appliquons la transformation de Laplace inverse (1.14), on trouve

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(\lambda)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\lambda^{\alpha-1}x(0)(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\lambda^{\alpha-1}BU(\lambda)(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\} + \mathcal{L}^{-1}\{F(\lambda)(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\},$$

utilisant la transformation de Laplace du produit de convolution de deux fonctions (1.11), on obtient

$$x(t) = E_\alpha(At^\alpha)x(0) + \int_0^t E_\alpha(A(t-s)^\alpha)Bu(s)ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)f(s)ds.$$

D'où

$$x(t) = E_\alpha(At^\alpha)x_0 + \int_0^t E_\alpha(A(t-s)^\alpha)Bu(s)ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)f(s)ds. \tag{3.4}$$

La preuve est complète. □

3.3 Contrôlabilité d'un système fractionnaire

Définition 3.1 (**Contrôlabilité exacte**). *:*
Le système (3.2) est dit exactement (ou complètement) contrôlable sur J *si pour tout état final désiré* $x_1 \in \mathbb{R}^n$*, il existe un contrôle* $u \in \mathbb{R}^m$ *telle que* x *vérifie*

$$x(T,u) = x_1.$$

Définition 3.2 (**Contrôlabilité à zéro**). *:*
Le système (3.2) est dit contrôlable à zéro (ou nul contrôlable) sur J *s'il existe un contrôle* $u \in \mathbb{R}^m$ *telle que* x *vérifie*

$$x(T,u) = 0.$$

c'est à dire, si chaque état non nul x_0 *peut être dirigé vers l'état nul* $x_1 = 0$ *à l'aide d'un contrôle* u*, alors le système est dit être contrôlable nullement.*

Définition 3.3 (**Contrôlabilité faible**). *:*
Le système (3.2) est dit faiblement contrôlable sur J *si pour tout état final désiré* $x_1 \in \mathbb{R}^n$ *et* $\varepsilon > 0$*, il existe une commande (contrôle)* $u \in \mathbb{R}^m$ *telle que* x *vérifie*

$$\|x(T,u) - x_1\| < \varepsilon.$$

Remarque 3.1. *Le système (3.2) est dit faiblement contrôlable sur* J *si l'ensemble*

$$H = \{x(T,u) \in \mathbb{R}^n : u \in \mathbb{R}^m\},$$

dense dans $\mathbb{R}^n$*.*

Définition 3.4. *Soit la matrice de Mittag-Leffler* $E_\alpha \in M(n,n)$*.*
1) On définit l'opérateur de contrôlabilité par

$$\begin{cases} \varphi_t : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \\ \varphi_t u = \int_0^t E_\alpha((t-s)^\alpha A) B u(s) ds, \quad t \in J, \end{cases} \tag{3.5}$$

c'est un opérateur linéaire borné défini sur $\mathbb{R}^m$*.*
2) L'opérateur adjoint de φ_T *est donné par*

$$\begin{cases} \varphi_T^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ \varphi_T^* = B^* E_\alpha((T-\cdot)^\alpha A^*), \end{cases} \tag{3.6}$$

où A^*, B^* *sont les transpositions de* A *et* B *respectivement.*

3) Le Grammienne de contrôlabilité est défini par

$$\begin{cases} W_T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ W_T = \varphi_T \cdot \varphi_T^* = \int_0^T E_\alpha(A(T-t)^\alpha)BB^* E_\alpha(A^*(T-t)^\alpha)dt, \end{cases} \tag{3.7}$$

Le résultat suivant sera établi en posant l'existence de la fonction inverse de E_α^{-1} [7]. On peut supposer que zéro n'est pas une valeur propre de la matrice $E_\alpha(AT^\alpha)$.

Théorème 3.1. *Si E_α^{-1} existe alors, le système linéaire (3.2) est complètement contrôlable si et seulement s'il est nulle contrôlable.*

Démonstration. :

1) Montrons que la contrôlabilité complète implique la contrôlabilité nulle :

Supposons que le système (3.2) est complètement contrôlable, donc

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}^n, \, \exists u \in \mathbb{R}^m, \quad telle\, que : x(T,u) = x_1,$$

Utilisant la formule (3.3), on trouve

$$E_\alpha(AT^\alpha)x_0 + \int_0^T E_\alpha(A(T-s)^\alpha)Bu(s)ds + \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(T-s)^\alpha)f(s)ds = x_1,$$

il suffit de prendre : $x_1 = 0$, on arrive a

$$\exists u \in \mathbb{R}^m, \, tq : x(T,u) = 0,$$

donc le système (3.2) est nulle contrôlable.

2) Nous montrons maintenant que la contrôlabilité nulle implique la contrôlabilité complète :

Supposons que le système (3.2) est nul contrôlable, donc

$$\forall x_2 \in \mathbb{R}^n, \, \exists u \in \mathbb{R}^m tq : x(T,u) = 0,$$

c'est-à-dire que

$$E_\alpha(AT^\alpha)x_2 + \int_0^T E_\alpha(A(T-s)^\alpha)Bu(s)ds + \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(T-s)^\alpha)f(s)ds = 0.$$

Soient $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, $\exists u \in \mathbb{R}^m$, tq :

$$x(T,u) = E_\alpha(AT^\alpha)x_0 + \int_0^T E_\alpha(A(T-s)^\alpha)Bu(s)ds + \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(T-s)^\alpha)f(s)ds = x_1,$$

ce qui implique

$$E_\alpha(AT^\alpha)(x_0 - E_\alpha^{-1}(AT^\alpha)x_1) + \int_0^T E_\alpha(A(T-s)^\alpha)Bu(s)ds + \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(T-s)^\alpha)f(s)ds = 0.$$

Comme le système est nulle contrôlable, on pose

$$x_2 = x_0 - E_\alpha^{-1}(AT^\alpha)x_1 \in \mathbb{R}^n,$$

on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= E_\alpha(AT^\alpha)x_2 + \int_0^T E_\alpha(A(T-s)^\alpha)Bu(s)ds + \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(T-s)^\alpha)f(s)ds \\ &= E_\alpha(AT^\alpha)(x_0 - E_\alpha^{-1}(AT^\alpha)x_1) + \int_0^T E_\alpha(A(T-s)^\alpha)Bu(s)ds + \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(T-s)^\alpha)f(s)ds. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} x_1 &= E_\alpha(AT^\alpha)x_0 + \int_0^T E_\alpha(A(T-s)^\alpha)Bu(s)ds + \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(T-s)^\alpha)f(s)ds \\ &= x(T). \end{aligned}$$

Par conséquent, la contrôlabilité complète du système (3.2) est satisfaite.

Ceci termine la preuve. □

Proposition 3.1. *Soit* $\theta > 0$, *avec*

$$\langle Wz, z\rangle = \|\varphi_T^* z\|^2 = \int_0^T \|B^* E_\alpha(A^*(T-t)^\alpha)z\|^2 dt \geqslant \theta\|z\|^2 > 0, \quad z \neq 0, \tag{3.8}$$

alors le système est contrôlable si et seulement si toutes les valeurs propres de W *sont positives.*

Démonstration. :

La condition (3.8) implique que W est coercive c-à-d :

$$\exists\theta > 0 \; tq : \langle Wz, z\rangle \geq \theta\|z\|^2 \Rightarrow W \text{ est positif.}$$

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on trouve

$$\theta\|z\|^2 \leq \langle Wz, z\rangle \leq \|Wz\|\|z\|,$$

d'où

$$\theta\|z\| \leqslant \|Wz\| \Rightarrow \; kerW = \{0\},$$

donc W est un opérateur linéaire, injectif non singulier sur $\mathbb{R}^n$. Soit W^{-1} l'inverse de l'opérateur W, alors il est borné sur ImW qui est un sous espace de $\mathbb{R}^n$.

Donc, l'ensemble ImW est équivalent au domaine de W^{-1} qui est $\mathbb{R}^n$, ce qui implique que

$$Im\varphi_T \supseteq ImW = \mathbb{R}^n.$$

En utilisant à nouveau (3.8), nous déduisons les mêmes propriétés pour l'opérateur φ_T^*, on conclut que le système (3.2) est contrôlable.

$\Rightarrow$) Supposons que le système fractionnaire (3.2) est contrôlable sur J, et que W n'est pas définie positive. Il existe une fonction vectorielle non nulle $z \in \mathbb{R}^n$ telle que

$$z^* W z = \int_0^T z^* E_\alpha(A(T-t)^\alpha) B B^* E_\alpha(A^*(T-t)^\alpha) z dt$$
$$=0.$$

En déduit que

$$z^* E_\alpha(A(T-s)^\alpha) B = 0.$$

La contrôlabilité du système (3.2) implique qu'il existe un contrôle non nul u tel que

$$0 = z + \int_0^T E_\alpha(A(T-s)^\alpha) B u(s) ds,$$

ce qui implique que

$$0 = z^* z + \int_0^T z^* E_\alpha(A(T-s)^\alpha) B u(s) ds.$$

Alors

$$z^* z = 0 \Rightarrow z = 0.$$

Ceci contredit l'hypothèse $z \neq 0$. Ainsi W est défini positive ce qui implique que toutes les valeurs propres sont positifs sauf la valeur propre nulle.

Alors (3.8) est valable pour tout $\theta > 0$. □

3.4 Contrôle Optimal

Il peut arriver que de nombreux contrôles transfert le système de l'état initial à l'état final à l'instant T, mais que l'un d'entre eux soit plus efficace que les autres. Ce contrôle minimise la fonctionnelle d'énergie

$$\|u\|^2 = \int_0^T \|u(s)\|^2 ds.$$

La formule explicite du contrôle optimal est donnée par le lemme suivant.

Lemme 3.2. *Soit W non singulier, alors le contrôle $\tilde{u} \in \mathbb{R}^m$ défini par*

$$\tilde{u}(t) = B^* E_\alpha(A^*(T-t)^\alpha) W^{-1}(x_1 - E_\alpha(AT^\alpha)x_0 - \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(T-s)^\alpha) f(s) ds), \ \forall \ t \in J, \quad (3.9)$$

est optimal et fait passer le système (3.2) de l'état initial x_0 à l'état final x_1 au temps T.

Démonstration. :

Première étape : Montrons que $\|\tilde{u}\| \leqslant \|u\|, \quad \forall u \in \mathbb{R}^m.$

Soit $u \in \mathbb{R}^m$ un contrôle quelconque qui dirige le système de l'état initial x_0 à l'état final x_1 au temps T. Alors,

$$\|u\|^2 = \|\tilde{u}\|^2 + \|u-\tilde{u}\|^2 + 2R\Big\langle \tilde{u}, u-\tilde{u}\Big\rangle,$$

avec

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{u}, u-\tilde{u}\rangle &= \int_0^T \langle \tilde{u}(t), u(t)-\tilde{u}(t)\rangle dt \\
&= \int_0^T \Big\langle B^* E_\alpha(A^*(T-t)^\alpha) W^{-1}\Big(x_1 - E_\alpha(AT^\alpha)x_0 \\
&- \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(T-s)^\alpha) f(s) ds\Big), u(t)-\tilde{u}(t)\Big\rangle dt \\
&= \Big\langle W^{-1}\Big(x_1 - E_\alpha(AT^\alpha)x_0 - \int_0^T (T-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(T-t)^\alpha) f(t) dt\Big), \\
&\int_0^T E_\alpha(A(T-t)^\alpha) B[u(t)-\tilde{u}(t)] dt\Big\rangle \\
&= \Big\langle W^{-1}\Big(x_1 - E_\alpha(AT^\alpha)x_0 - \int_0^T (T-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(T-t)^\alpha) f(t) dt\Big), \varphi_T[u(t)-\tilde{u}(t)]\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Puisque u et $\tilde{u}$ dirigent l'état x_0 vers x_1 au temps T, alors

$$\varphi_T(u(t)-\tilde{u}(t)) = 0.$$

Ainsi

$$\|u\|^2 - \|\tilde{u}\|^2 = \|u-\tilde{u}\|^2 \geqslant 0,$$

ce qui montre que

$$\|\tilde{u}\| \leq \|u\|, \qquad \forall u \in \mathbb{R}^m.$$

Deuxième étape : Montrons que $\tilde{u}$ oriente l'état x_0 vers x_1 à l'instant T.

On remplace la formule (3.9) dans l'expression de la solution (3.3), on arrive à :

$$\begin{aligned}
x(T) &= E_\alpha(AT^\alpha)x_0 + \int_0^T E_\alpha(A(T-t)^\alpha)Bu(s)ds + \int_0^T (T-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(T-t)^\alpha)f(s)ds \\
&= E_\alpha(AT^\alpha)x_0 + \int_0^T E_\alpha(A(T-t)^\alpha)B\tilde{u}(s)ds + \int_0^T (T-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(T-t)^\alpha)f(s)ds \\
&= E_\alpha(AT^\alpha)x_0 + \int_0^T E_\alpha(A(T-t)^\alpha)BB^*E_\alpha(A^*(T-t)^\alpha)W^{-1}\Big(x_1 - E_\alpha(AT^\alpha)x_0 \\
&- \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(T-s)^\alpha)f(s)ds\Big)dt + \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(T-s)^\alpha)f(s)ds \\
&= E_\alpha(AT^\alpha)x_0 + WW^{-1}\Big(x_1 - E_\alpha(AT^\alpha)x_0 - \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(T-s)^\alpha)f(s)ds\Big) \\
&+ \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(T-s)^\alpha)f(s)ds \\
&= x_1.
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. □

Les arguments ci-dessus peuvent être utilisés pour prouver la contrôlabilité complète et approximative du système (3.2). Nous mentionnons le résultat suivant.

Théorème 3.2. *Le système (3.2) est contrôlable si et seulement si W satisfait l'une des conditions suivantes :*

1. *W est coercive,*
2. *W est défini positif,*
3. *W est non singulier,*
4. *$ImW = \mathbb{R}^n$, et $kerW = \{0\}$.*

3.5 Condition de rang

La condition de rang est un outil efficace pour déterminer si le système est contrôlable ou non (dans le cas où A et B ne dépendent pas de t et pas de contrainte sur le contrôle).

Définition 3.5. *La condition de rang est donnée par :*

$$rang[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n, \tag{3.10}$$

où $A^n = 0$.

Théorème 3.3. *Le système linéaire (3.2) est contrôlable si et seulement si la condition de rang (3.10) est vérifiée.*

Démonstration. Utilisant la solution du système (3.2)

$$x(T,u) = E_\alpha(AT^\alpha)x_0 + \varphi_T u + \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(T-s)^\alpha) f(s) ds \in \mathbb{R}^n,$$

alors

$$\varphi_T u = x(T,u) - E_\alpha(AT^\alpha)x_0 - \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(T-s)^\alpha) f(s) ds, \tag{3.11}$$

avec

$$\varphi_T u = \int_0^T E_\alpha(A(T-s)^\alpha) Bu(s) ds.$$

On a $A^n = 0$, alors la fonction Mittag-Leffler est donnée par

$$E_\alpha(A(T-s)^\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(T-s)^{k\alpha} A^k}{\Gamma(k\alpha+1)}, \tag{3.12}$$

donc

$$\begin{aligned}
\varphi_T u &= \int_0^T \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(T-s)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} A^k Bu(s) ds \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \left(\frac{1}{\Gamma(k\alpha+1)} \int_0^T (T-s)^{\alpha k} u(s) ds \right) \qquad (3.13)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} A^k B V_k^\alpha.
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
V_k^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(k\alpha+1)} \int_0^T (T-s)^{\alpha k} u(s) ds \\
&= I_0^{k\alpha+1} u(T) \in \mathbb{R}^m.
\end{aligned}$$

En utilisant (3.13), on obtient

$$\varphi_T u = [B\ AB....A^{n-1}B] \begin{pmatrix} V_0^\alpha \\ V_1^\alpha \\ ... \\ V_{n-1}^\alpha \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Par conséquent, l'équation (3.11) a une solution unique V_k^α si et seulement si la condition (3.10) est vérifiée.

Donc, il est toujours possible de trouver au moins une fonction $u \in \mathbb{R}^m$ pour garantir l'existence des vecteurs V_k^α. □

Exemple 3.1. *Considérons le système fractionnaire linéaire suivant :*

$$\begin{cases} {}^cD_0^{0.2}x(t) = Ax(t) + I_0^{1-0.2}Bu(t) + f(t), \quad t \in [0, 0.2], \\ x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{cases} \tag{3.15}$$

avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, *et* $f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$.

En utilisant (3.12), nous obtenons la matrice de Mittag-Leffler suivante :

$$\begin{aligned} E_{0.2}(A(t-s)^{0.2}) &= \sum_{k=0}^{1} \frac{A^k (t-s)^{0.2k}}{\Gamma(0.2k+1)} \\ &= \frac{I}{\Gamma(1)} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{(t-s)^{0.2}}{\Gamma(1.2)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{(t-s)^{0.2}}{\Gamma(1.2)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{(t-s)^{0.2}}{\Gamma(1.2)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Et en utilisant (1.4), on arrive à

$$\begin{aligned} E_{0.2,0.2}(A(t-s)^{0.2}) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k (t-s)^{k0.2}}{\Gamma(k0.2+0.2)} \\ &= \frac{I}{\Gamma(0.2)} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{(t-s)^{0.2}}{\Gamma(0.4)} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\Gamma(0.2)} & \frac{(t-s)^{0.2}}{\Gamma(0.4)} \\ 0 & \frac{1}{\Gamma(0.2)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{0.2}(A^*(t-s)^{0.2}) &= \sum_{k=0}^{1} \frac{(A^*)^k (t-s)^{0.2k}}{\Gamma(0.2k+1)} \\ &= \frac{I}{\Gamma(1)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{(t-s)^{0.2}}{\Gamma(1.2)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(t-s)^{0.2}}{\Gamma(1.2)} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

De plus, on calcul la contrôlabilité Grammienne

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{0.2} E_{0.2}(A(0.2-s)^{0.2})BB^* E_{0.2}(A^*(0.2-s)^{0.2})ds \\ &= \int_0^{0.2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{(0.2-s)^{0.2}}{\Gamma(1.2)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(0.2-s)^{0.2}}{\Gamma(1.2)} & 1 \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} 0.552 & 0.332 \\ 0.332 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

qui a un inverse

$$\begin{aligned} W^{-1} &= \frac{1}{det(W)} com^t(W) \\ &= \frac{1}{0.441776} \begin{bmatrix} 1 & -0.332 \\ -0.332 & 0.552 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2.261 & -0.7498 \\ -0.7498 & 1.2486 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Comme W^{-1} existe alors le système linéaire (3.15) est contrôlable, de plus, la fonction du contrôle est définie par :

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix},$$

tel que :

$$u_1(t) = (1.511 + 2.463(0.2-t)^{0.2})\left(x_1 - 1.789 - 0.451 \int_0^1 (0.2-s)^{-0.6} s ds\right).$$

$$u_2(t) = (0.4988 - 0.8166(0.2-t)^{0.2})\left(x_2 - 1 - \int_0^1 (0.2-s)^{-0.8} s ds\right).$$

Exemple 3.2. *Considérons le système fractionnaire linéaire suivant :*

$$\begin{cases} {}^cD_0^{0.3} x(t) = Ax(t) + I_0^{1-0.3} Bu(t) + f(t), \quad t \in [0, 0.3], \\ x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{cases} \tag{3.17}$$

avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$

Par des calculs numériques, on trouve

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & -2 \\ -4 & -12 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & -2 \\ -4 & -12 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ -24 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$rang[B, AB, A^2B] = rang \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & -6 & 18 \\ 0 & 4 & -24 \end{bmatrix} = 3.$$

Alors par le théorème (3.3) le système est contrôlable.

Conclusion générale

DANS ce travail, une méthode analytique a été proposée pour étudier la contrôlabilité d'un système linéaire intégro-différentiel d'ordre fractionnaire. Pour démontrer la contrôlabilité nous avons construit la matrice Grammienne en utilisant la fonction Mittag-Leffler. De plus, des exemples sont inclus pour vérifier l'efficacité des résultats.

Bibliographie

[1] Afifi. L, El Jai. A, Zerrik. E, : Systèmes Dynamiques 2, Analyse régionale des système linéaire distrués,Press Universitaires de Perpignan, 2008.

[2] Bekaddour K. : Transformée de la Laplace et Applications aux Équations Différentielles Fractionnaires, mémoire master, Université 8 Mai 1945 Guelma, 2017.

[3] Bouchahed, S. : Contrôlabilité faible d'un système différentiel fractionnaire non linéaire. , Mémoire mastar, Université 8 Mai 1945 Guelma 2022.

[4] Haubold, H.J., Mathai, A.M., Saxena, R.K. : Mittag-Leffler functions and their applications. J. Appl. Math. 2011

[5] Khodja, F.A et Benabbdallah, A : Une introduction à la théorie du contrôle, Note de cours, 2005.

[6] Kilbas, A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J. : Theory and Applications of Fractional Differential Equation. Elsevier, Amsterdam, 2006.

[7] Matar, M. : On Controllability of linear and nonlinear fractional integrodifferential systems, Fractional Differential Calculus, Volume 9, Number 1 (2019), 19–32

[8] Podlubny, I. : Fractional Differential Equations, Mathematics In Science And Engineering, 1999.

[9] Podlubny, I., Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional diferential equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif,USA, 1993.

[10] Trelat, E. : Contrôle optimal : Théorie et applications, Note de Cours, Université de Paris-sud, 2000.