République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

et Analyse Numérique

Par :
Mlle. FARTAS Lina Soundous

Intitulé

Sur un problème d'évolution du type p-b-Laplace

Dirigé par : Pr.CHAOUI Abderrezak

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr.**	**BADI Sabrina**	**Professeur**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr.**	**CHAOUI Abderrezak**	**Professeur**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr.**	**ELLAGGOUNE Fateh**	**Professeur**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2023

Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier Allah le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience durant ces longues années d'étude et m'a permi d'accomplir ce modeste travail.

Je voudrais présenter mes remerciements et mes profondes reconnaissances à mon encadreur Pr. ChAOUI Abderrezak., qui a su me guider avec patience, me prodiguer conseils judicieux et orientations scientifiques, c'est un grand honneur pour moi d'avoir travaillé sous sa direction.

mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon mémoire en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Pr.BADI Sabrina,
Pr. ELLAGGOUNE Fateh.

Qu'ils soient assurés de ma profonde gratitude. mes remerciements vont également à tous mes enseignants pour leur dévouement et leur assistance tout au long de mes études universitaires.

Enfin, mes remerciements vont vers toutes les personnes qui, de près ou de loin, nous ont apporté leurs soutiens et leurs conseils pour la réalisation de ce mémoire.

Dédicace

Je dédie ce travail tout d'abord à mes chers parents qui ont toujours été là pour moi.

« À ma mère, une maman de rêves, pour toutes ses prières, ses encouragements, ses sacrifices et pour tout ce que les mots ne peuvent pas l'exprimer »

« À mon père, l'exemple du papa idéal, pour sa compréhensivité, sa souplesse et son aide »

Merci infiniment pour votre présence et votre soutien.

Que Dieu vous procure santé, bonheur et longue vie.

« À ma moitié, ma chère sœur Roufaida, mon âme dans un autre corps, qui m'a toujours soutenu durant toute ma vie. »

« À ma grand-mère, pour sa générosité et ses prières, j'espère que vous serez fière de moi. »

A toute ma famille.

À tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Lina Soundous

Table des matières

ملخص

تناقش هذه المذكرة دمج طريقة روث مع طريقة العناصرالمنتهيةالمختلطة من أجل الحصول على حلول عددية لمعادلة زائدية من نمط P-bi-laplace.
الكلمات المفتاحية: معادلة التطور p-bi-Laplace، طريقة العناصر المنتهيةالمختلطة، حالة inf-sup والصياغة المختلطة، الوجود والوحدانية.

RÉSUMÉ

Ce mémoire discute une méthode d'éléments finis mixte combinés avec la méthode Euler implicite pour étudier l'équation hyperbolique p bi-Laplace, où l'existence et l'unicité de la solution pour le problème discrétisé sont montrés dans les espaces Lebesgue et Sobolev. Une formulation mixte et une condition d'inf-sup sont alors données pour prouver la pertinence du schéma et des estimations d'erreur a priori optimales pour les schémas entièrement discrets sont extraites.
Mots-clés : Évolution d'équation p-bi-Laplace, méthode d'élément finit mixte, condition d'inf-sup et la formulation mixte, existence et unicité.

ABSTRACT

The aim of this work is to discusses a mixed finite element method combined with the backward-Euler method to study the hyperbolic p−bi-Laplace equation, where the existence and uniqueness of solution for the discretized problem are shown in Lebesgue and Sobolev spaces. A mixed formulation and an inf-sup condition are then given to prove the well-posedness of the scheme and optimal a priori error estimates for fully discrete schemes are extracted.
Keywords : Evolution p-bi-Laplace equation, mixed finite element method, inf-sup condition and mixed formulation, existence and uniqueness.

INTRODUCTION

Ces dernières années, des progrès substantiels ont été réalisés dans l'étude des problèmes de quatrième ordre qui sont une généralisation non linéaire des problèmes bi-laplaciens. L'objectif principal de l'étude (2.1) découle des diverses applications dans le domaine de l'élasticité qui sont utilisées avec précision dans la modélisation des ondes de déplacement dans les ponts en suspension [16].

Des EDP d'ordre élevé avec un exposant constant ont été étudiés par plusieurs auteurs dans diverses conditions sur les données et par différentes méthodes, par exemple ([3], [5], [14]). Nous nous référons également à quelques références intéressantes dans l'étude de ce type d'équations avec un exposant variable comme dans ([17], [21]).
Une des options proposées pour résoudre notre problème est d'utiliser des éléments finis mixtes en ce qui concerne la distance et la méthode Euler implicite en ce qui concerne le temps.

Les éléments finis mixtes sont parmi les méthodes les plus populaires utilisées pour étudier cette famille de problèmes. Cette méthode permet de résoudre des problèmes mixtes lorsque les inconnues sont deux fonctions. Pour plus de détails sur cette méthode, voir ([8], [11]). En outre, la convergence de cette méthode est soumise à des conditions d'inf-sup tirées de ([12], [19]).

Notre mémoire est organisé comme suit, on commence par introduire des matériaux nécessaires et fondamentaux du p-bi-laplacien.
Le deuxième chapitre de ces travaux a été consacré à l'extraction d'un schéma de semi-discrétisation basé sur la méthode Euler implicite et à la preuve de l'existence et de l'unicité de la solution pour ce schéma.
Dans le dernier chapitre on donne une formulation mixte et une condition d'inf-sup pour prouver que le problème d'approximation mixte est bien posé, et on calcule des estimations d'erreurs avec l'aide de l'opérateur de projection de Ritz et des propriétés orthogonales de Galerkin.

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRE ET RAPPEL D'ANALYSE FONCTIONNELLE

1.1 Notions des espaces

Espaces $\mathbf{L}^p(\Omega)$

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on pose :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \ mesurable \ et \ \int_\Omega |f|^p dx < \infty \ p.p \right\}.$$

On munit l'espace $L^p(\Omega)$ de la norme suivante :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, L'espace appelé L_∞ généralise les espaces L_p à $p = \infty$. Aucune intégration n'est utilisée pour les définir, à la place, la norme sur L_∞ est donnée par,

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \ p.p \ sur \ \Omega\}.$$

Espaces $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $1 \leq p \leq \infty$, et $m \in \mathbb{N}$. On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| \leq m\},$$

où $D^\alpha u$ est une dérivée partielle de u au sens faible (au sens des distributions).
On munit l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & si \ 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^\infty(\Omega)} & si \ p = +\infty \end{cases}$$

Espaces $\mathbf{W}_0^{m,p}(\Omega)$

On a definit l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ comme cela :

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \{f \in W^{m,p}(\Omega);\ D^\alpha f\backslash_{\partial\Omega} = 0, \quad |\alpha| \le m-1\},$$

L'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ est la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans l'espace $W^{m,p}(\Omega)$.

Espaces $W_0^{2,p}(\Omega)$

On a definit l'espace $W_0^{2,p}(\Omega)$ comme cela :

$$W_0^{2,p}(\Omega) = \left\{f \in W^{2,p}(\Omega);\ D^\alpha f\backslash_{\partial\Omega} = 0, \quad |\alpha| \le 1\right\},$$

avec :

$$W_0^{2,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{2,p}(\Omega)}.$$

Espaces dual $\mathbf{W}^{-m,q}(\Omega)$

Soient p, q deux réels vérifiant, $1 \le q < \infty$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et m un entier de $\mathbb{N}^*$. On appelle espace de Sobolev et on note $W^{-m,q}(\Omega)$ le dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

1.2 Convergence faible

Définition 1.2.1 :

u_n converge faiblement dans un espace de Banach E vers u si l'on a :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \langle u', u_n\rangle = \langle u', u\rangle \Leftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle u', u_n - u\rangle = 0, \forall u' \in E'.$$

avec E' l'espace dual de E.

Notation 1.2.1 :

1. On note par $u_n \rightharpoonup u$ la convergence faible dans E.

2. On note par $u_n \to u$ la convergence forte dans E.

Remarque 1.2.1 :

Si $u_n \to u$ fortement ($\|u_n - u\|_E \to 0$) $\Longrightarrow u_n \rightharpoonup u$ car :

$$\forall u' \in E'; \langle u', u_n - u \rangle \leq \|u'\| \|u_n - u\| \to 0.$$

Remarque 1.2.2 :

La convergence faible n'implique pas la convergence forte. On peut considérer une suite orthogonale dans un espace de Hilbert de dimension infinie et montrer ensuite qu'elle converge faiblement vers 0, mais on ne peut en extraire aucune sous-suite fortement convergente.

1.3 Notions des opérateurs

Soit E un espace de Banach.

Définition 1.3.1 :

Soit $A : E \longrightarrow E$ un opérateur dans un espace réel de Banach, on dit que A est coercive ssi :

$$\lim_{\|u\| \longrightarrow \infty} \frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|} = \infty.$$

$\langle A(u), u \rangle$: Crochet de dualité.

Définition 1.3.2 :

Soit $A : E \longrightarrow E$ un opérateur dans un espace réel de Banach, on dit que A est monotone ssi :

$$\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2 \rangle \geq K\|u_1 - u_2\|, \forall u_1, u_2 \in E, u_1 \neq u_2.$$

Définition 1.3.3 :

Soit $A : E \longrightarrow E$ un opérateur dans un espace réel de Banach, on dit que A est semi continue ssi $u_n \rightarrow u$ implique $A(u_n) \overset{faiblement}{\longrightarrow} A(u)$ pour tout $u_n, u \in E$.

1.4 Les inégalités utilisées

1.4.1 Inégalité de Poincaré

Supposons que Ω est un ouvert borné, $1 \leq p < \infty$. Alors, il existe une constante $C = C(\Omega, p)$ telle que :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

1.4.2 Inégalité de Holder

Soit $1 \leq p < \infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p telles que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Si $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, alors $uv \in L^1(\Omega)$ et :

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_p\|v\|_q.$$

• **Inégalité de Holder avec trois paramètres :**

Soient $p > 0$, $q > 0$ et $r > 0$ satisfaite $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. et si $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, alors $uv \in L^r(\Omega)$ et :

$$\|uv\|_r \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

1.4.3 Inégalité de Young

Soient p et q deux réels vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$, alors :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \forall \epsilon > 0, ab \leq \frac{\epsilon^p}{p} a^p + \frac{1}{q\epsilon^q} b^q.$$

1.5 Quelques théorèmes utilisées

1.5.1 Normes équivalentes

Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur un même espace vectoriel normé E sont équivalentes s'il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que :

$$\forall x \in E; \alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1.$$

1.5.2 Formules de Green

Soit Ω un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ régulière, alors : $\forall u, v \in H^1(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u.v.\gamma_i ds.$$

Où γ_i la iéme composante du vecteur unitaire normale extèrieure.

En remarquant que $\Delta u = div(\nabla u)$ alors on a :

$$\int_{\Omega} \Delta u.vdx = -\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} (\nabla u.\eta) v ds.$$

1.5.3 Théorème de Valeur moyenne

Pour toute fonction f à valeurs réelles, définie et continue sur $[a,b]$, avec $a < b$, il existe un réel c compris entre a et b vérifiant :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

1.5.4 Lemme de Gronwall

— **Cas continu :** Soient α, β et γ prennent leurs valeurs dans $I = [1, \infty[$ comme fonction réelle, en supposant que β et γ sont deux fonctions continues. Si β est non-négative, α est non-décroissante et si γ satisfait l'inégalité intégrale suivante :

$$\gamma(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\gamma(s)ds \qquad \forall t \in I,$$

alors :

$$\gamma(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_a^t \beta(s)ds\right).$$

— **Cas discret :** Si $\gamma_n \geq 0,\ \alpha_n \geq \alpha_{n-1},\ \beta_j \geq 0$ et

$$\gamma_n \leq \alpha_n + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \gamma_j \qquad n \geq 0,$$

alors :

$$\gamma_n \leq \alpha_n \exp\left(\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j\right).$$

1.5.5 Théorème de Browder [2]

Soit V un espace de Banach réflexif, et $A : V \longrightarrow V$ un opérateur borné, semi continue, coercif et monotone sur V. Alors l'équation $A(u) = f$ admet au moins une solution $u \in V$ pour toute $f \in V$. De plus si A est strictement monotone alors l'équation $A(u) = f$ admet une solution unique $u \in V$ pour toute $f \in V$.

1.6 Rappel de la méthode des éléments finis

1.6.1 Formulation variationnelle

La méthode des éléments finis repose sur la formulation variationnelle d'une équation aux dérivées partielles. Pour se fixer les idées nous prendrons par exemple le problème de laplacien dans un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$, avec une condition de bord de Dirichlet homogène :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta u = f & dans\ \Omega, \\ u_{|r} = 0 & sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

Avec Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$.

On peut donc définir la formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P})$ comme suit :

$$(\mathcal{Q}) \begin{cases} Trouver\ u \in V & tel\ que \\ a(u, v) = l(v) & \forall v \in V. \end{cases}$$

Avec $a(\cdot\,,\,\cdot)$ une forme bilinéaire symétrique, et $l(\cdot)$ une forme linéaire.

Rappelons que le théorème fondamental de Lax-Milgram nous donne l'existence et l'unicité de la solution d'un tel problème sous certaines conditions de régularité sur a et l dans le cas linéaire, et le théorème de Browder dans le cas non-linéaire.

1.6.2 Espace d'approximation

Les espaces d'approximations V_h sont définis de la même façon qu'en dimension un, en choisissant des fonctions qui sont globalement continue sur $\overline{\Omega}$ et qui sont polynomiale sur chaque triangle du maillage. Pour l'approximation $\mathbb{P}_1$ on a :

$$V_h = \left\{ v \in C(\overline{\Omega}) \ tel \ que \ v_{|K_i} \in \mathbb{P}_1 \ pour \ tout \ K_i \in \ \mathcal{T}_h \right\},$$

Avec K_i est un triangle.

On définit aussi le sous-espace V_0^h par :

$$V_0^h = \{ v \in V_h \ tel \ que \ v = 0 \ sur \ \partial\Omega \}.$$

Chapitre 2

PROBLÈME SEMI DISCRÉTISÉ (Discrétisation en temps)

2.1 Position du problème

Soit Ω un ensemble ouvert et bornée dans $\mathbb{R}$ avec une frontière contractante et continue $\partial\Omega$. Soit T le temps final. Fixons $T > 0$ et considérons le problème hyperbolique suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta(div(|\Delta u|^{p-2}\nabla u)) = f(x,t) & dans\ [0;T]\times\Omega, \\ u = 0,\ \nabla u = 0 & dans\ [0;T]\times\partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = U_1 & dans\ \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $2 \leq p \leq +\infty$, $f(t)$ une fonction donné dans $L^q(\Omega)$.

Définition 2.1.1 : La fonction u est la solution faible du problème (2.1) si :

$$\begin{cases} 1. u \in L^\infty([0,T], W_0^{2,p}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}([0,T], L^2(\Omega))\ tel\ que \\ \forall v \in L^\infty([0,T], W_0^{2,p}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}([0,T], L^2(\Omega)) \\ 2. \int_0^T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v\right) dt + \int_0^T (|\Delta u|^{p-2}\Delta u, \Delta v) dt = \int_0^T (f,v). \end{cases}$$

2.2 Semi discrétisation

On divise l'intervalle de temps $[0,T]$ en n sous-intervalles de longueur $\tau = \frac{T}{n}$ et notons par u^i les valeurs de u à $t_i = i\tau, i = 0,1,...,n$ et que :

$$\delta u^i(x) = \frac{u^i - u^{i-1}}{\tau},$$

$$\delta^2 u^i(x) = \frac{\delta u^i(x) - \delta u^{i-1}(x)}{\tau}.$$

Définissons u^{-1} par : $u^{-1}(x) = u^0(x) - \tau u^1(x)$. Pour $i = 1, ..., n$, un schéma d'approximation récurrent est de la forme suivante :

$$\begin{cases} trouver\ u^i \cong u(., t_i), telle\ que \\ (\delta^2 u^i, v) + (|\Delta u^i|^{p-2} \Delta u^i, \Delta v) = (f^i, v) \end{cases} \quad 2.2$$

Cela implique

$$\begin{cases} trouver\ u^i \cong u(., t_i), telle\ que \\ (\delta u^i - \delta u^{i-1}, v) + \tau(|\Delta u^i|^{p-2} \Delta u^i, \Delta v) = \tau(f^i, v) \end{cases} \quad 2.3$$

Théorème 2.2.1

Soit $f \in L^q(\Omega)$, le problème (2.3) admet une solution faible unique $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$ pour $1 \leq i \leq n$.

Preuve

Définissons l'opérateur A comme suit,

$$A : W_0^{2,p}(\Omega) \longrightarrow (W_0^{2,p}(\Omega))^*$$

tel que :

$$Au^i = \delta u^i + \tau \Delta_p^2 u^i, \quad 2.4$$

avec :

$$\Delta_p^2 u^i = \Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u). \tag{2.5}$$

On a appliqué la théorie des opérateurs monotones pour prouver que A est un opérateur semi-continu, coercif et monotone. Soit le fonctionnel K dans $W_0^{2,p}(\Omega)$ comme suit,

$$K(u^i) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}(\delta u^i)^2 + \frac{\tau}{p}|\Delta u^i|^p\right) dx. \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
(K^{'}(u^i), v) &= \frac{d}{dt}\{A(u^i + tv)\}_{t=0} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega [\delta(u^i + tv)]^2 dx + \frac{\tau}{p}\int_\Omega |\Delta(u^i + tv)|^p dx\right\}_{t=0} \\
&= \left\{\int_\Omega \delta(u^i + tv) v dx + \tau\int_\Omega |\Delta(u^i + tv)|^{p-1}\Delta v dx\right\}_{t=0} \\
&= \int_\Omega \delta u^i v dx + \tau\int_\Omega (|\Delta u^i|^{p-2}\Delta u^i)\Delta v dx \\
&= \int_\Omega \delta u^i v dx + \tau\int_\Omega \Delta(|\Delta u^i|^{p-2}\Delta u^i) v dx \\
&= (\delta u^i, v) + \tau(\Delta_p^2 u^i, v) = (Au^i, v) \quad \forall v \in W_0^{2,p}(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Cela implique que $K^{'} = A$ et K différentiable au sens de Gateau, c'est-à-dire semi-continu.

En utilisant l'inégalité dans [18], pour $p \in [1, \infty)$ et $a, b \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$|b|^p \geq |a|^p + p|a|^{p-2}a(b-a) + \frac{|b-a|^p}{2^{p-1}-1}, \tag{2.8}$$

et par le théorème de valeur moyenne on obtient :

$$\begin{aligned}(A(u^i)-A(v),u^i-v) &= (\delta(u^i-v),u^i-v)+\tau(\Delta_p^2 u^i-\Delta_p^2 v,u^i-v)\\ &= \frac{1}{2}\delta\|u^i-v\|^2+\tau(\Delta_p^2 u^i-\Delta_p^2 v,u^i-v)\\ &\geq C(\tau)\|u^i-v\|^2+\tau(\Delta_p^2 u^i-\Delta_p^2 v,u^i-v)\\ &\geq \tau(\Delta_p^2 u^i-\Delta_p^2 v,u^i-v)\\ &= \tau\int_\Omega|\Delta u^i|^{p-2}\Delta u^i(\Delta u^i-\Delta v)dx-\tau\int_\Omega|\Delta v|^{p-2}\Delta v(\Delta u^i-\Delta v)dx\\ &= \frac{2}{p(2^{p-1}-1)}\int_\Omega|\Delta u^i-\Delta v|^p dx\\ &= \frac{2}{p(2^{p-1}-1)}\|\Delta(u^i-v)\|_{L^p}^p dx\\ &\geq C\|u^i-v\|_{W_0^{2,p}}.\end{aligned} \quad 2.9$$

Comme la norme $\|.\|_{W_0^{2,p}(\Omega)}$ est équivalente à la semi norme $\|\Delta(.)\|_{L^p(\Omega)}$ sur l'espace $W_0^{2,p}(\Omega)$, on a :

$$(A(u^i)-Av,u^i-v)\geq C(p)\|u^i-v\|_{W_0^{2,p}(\Omega)}^p. \quad 2.10$$

Cela prouve que A est monotone , puis

$$(A(u^i),u^i)\geq C(p)\|u^i\|_{W_0^{2,p}(\Omega)}^p. \quad 2.11$$

D'où on a conclue la coercivité de A . Par l'inégalité de Hölder on obtient :

$$|(f^i,v)|=\left|\int_\Omega f^i v dx\right|\leq C\|f^i\|_q\|v\|_p. \quad 2.12$$

et en utilisant $W_0^{2,p}(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)$, on aura :

$$|(f^i,v)|\leq C\|f^i\|_q\|v\|_{W_0^{2,p}(\Omega)}. \quad 2.13$$

Cela implique que $f^i\in(W_0^{2,p}(\Omega))^*=W^{-2,q}(\Omega)$.

Chapitre 3

PROBLÈME COMPLÈTEMENT DISCRÉTISÉ

3.1 Formulation mixte

En prenant $X = W_0^{2,p}(\Omega)$ et $Y = L^q(\Omega)$, introduisons une variable auxiliaire

$$w^i = |\Delta u^i|^{p-2}\Delta u^i. \tag{3.1}$$

On sait que l'inverse de la fonction $\psi(z) = |z|^{p-2}z$ est donné par : $\psi^{-1}(z) = sgn(z) \times |z|^{\frac{1}{p-1}}z = |z|^{q-2}z$, on peut écrire le problème (2.2) comme cela :

$$\begin{cases} -\Delta u^i = |w^i|^{q-2}w^i, \\ \\ -\Delta w^i = f^i - \delta^2 u^i. \end{cases} \tag{3.2}$$

Le système mixte peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} a(w^i, v) + c(u^i, v) = 0 \quad \forall v \in X, \\ \\ c(w^i, \eta) = L_Y(\eta) \quad \forall \eta \in Y. \end{cases} \tag{3.3}$$

avec

$$a(w^i, v) := \int_\Omega |w^i|^{q-2}w^i v dx, \tag{3.4}$$

$$c(w^i, \eta) := \int_\Omega -\Delta w^i \eta dx, \tag{3.5}$$

$$L_Y(\eta) := \int_\Omega (f^i - \delta^2 u^i)\eta dx, \tag{3.6}$$

où $f^i = f(t_i, x)$.

Proposition (condition d'inf-sup)

Pour $u \in X$ on a :

$$\gamma \leq C \inf_{0 \neq \eta \in Y} \sup_{0 \neq u^i \in X} \frac{c(u^i, \eta)}{\|u^i\|_X \|\eta\|_Y}. \qquad 3.7$$

Preuve

Soit $u^i \in W_0^{2,p}(\Omega)$, prenons $\eta = |\Delta u^i|^{p-2} \Delta u^i$, on a :

$$\|\eta\|_{L^q(\Omega)} = \||\Delta u^i|^{p-1}\|_{L^q(\Omega)} = \|\Delta u^i\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}$$

et

$$c(u^i, \eta) = \|\Delta u^i\|_{L^p(\Omega)}^p,$$

Par conséquent

$$c(u^i, \eta) = \|\Delta u^i\|_{L^p(\Omega)}^p \|\Delta u^i\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|\Delta u^i\|_{L^p(\Omega)} = \|\Delta u^i\|_{L^p(\Omega)} \|\eta\|_{L^q(\Omega)}.$$

Cela implique

$$\|u\|_{W_0^{2,p}} = \|\Delta u^i\|_{L^p(\Omega)} \leq C \frac{c(u^i, \eta)}{\|\eta\|_{L^q(\Omega)}}.$$

Ainsi, on conclue que :

$$\gamma \leq C \inf_{0 \neq \eta \in Y} \sup_{0 \neq u^i \in X} \frac{c(u^i, \eta)}{\|u^i\|_X \|\eta\|_Y}.$$

Ceci complète la preuve.

3.2 Discrétisation complète

Soit Υ_T est une triangulation faite de triangles T tel que l'intersection de deux éléments différents est soit un sommet, un bord, ou vide.

$$\exists \mu > 0, \frac{h_T}{\rho_T} \leq \mu \quad \forall T \in \Upsilon_h, \tag{3.8}$$

où h_T est le diamètre de T et ρ_T est le diamètre de la plus grande boule contenue à l'intérieur de T. On définie les bords par e et on définie :

$$h = \max_{T \in \Upsilon_T} h_T.$$

Soit $\mathbb{P}^k(\Upsilon_h)$ définir l'espace de polynômes par morceaux de degré k sur une triangulation Υ_h :

$$\mathbb{P}^k(\Upsilon_h) = \{\phi : \phi_{\backslash T} \in \mathbb{P}^k(T) \quad \forall T \in \Upsilon_h\}.$$

Les espaces finis discrets suivants sont donnés par :

$$X^h = \mathbb{P}^k(\Upsilon_h) \cap C^0(\bar{\Omega}),$$

et

$$X_0^h = \{\phi \in X^h ; \phi_{|\partial\Omega} = 0\},$$

Ici R est l'opérateur de projection de Ritz tel que :

$$\int_\Omega \nabla(Rv)\nabla\phi = \int_\Omega \nabla v \nabla \phi dx \qquad \forall \phi \in X^h \cap H_0^1(\Omega).$$

L'opérateur de Laplace discrétisé est défini par :

$$(\Delta_h v)_{\backslash T} := \Delta(v_{\backslash T}) \qquad \forall T \in \Upsilon. \tag{3.9}$$

Le schéma entièrement discret pour (3.3) comme cela : trouver une paire $(u_h^i, w_h^i) \in X_0^h \times X^h$ tel que :

$$\begin{cases} a(w_h^i, v) + c_h(u_h^i, v) = 0, \\ \\ c_h(w_h^i, \eta) = L(\eta) \qquad \forall (v,\eta) \in X^h \times X_0^h. \end{cases} \tag{3.10}$$

En appliquant la formulation de Green on aura :

$$c_h(u_h, v) = \sum_{T \in \Upsilon_h} \int_T \nabla u_h \nabla v dx = \int_\Omega \nabla u_h \nabla v dx. \tag{3.11}$$

En substituant (3.11) dans (3.10) le problème (3.3) peut s'écrire comme cela :

$$\begin{cases} \int_\Omega |w_h^i|^{q-2} w_h^i v dx + \int_\Omega \nabla u_h^i \nabla v dx = 0, \\ \\ \int_\Omega \nabla w_h^i \nabla \eta dx = \int_\Omega (f^i - \delta^2 u^i) \eta dx \qquad \forall (v,\eta) \in X^h \times X_0^h. \end{cases} \tag{3.12}$$

Lemme 3.2.1 [13]

Pour $m \geq 2$ et $u \in W^{m+1,q}(\Omega)$, on a :

$$\|u - Ru\|_{L^q(\Omega)} + \|h(\nabla u) - \nabla(Ru)\|_{L^q(\Omega)} + \left(\sum_{T \in \Upsilon} \|h^2(\Delta u - \Delta(Ru))\|_{L^q(T)}^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C h^{m+1} |u|_{W^{m+1,q}(\Omega)}. \tag{3.13}$$

Lemme 3.2.2 [20]

Pour $w_i \in L^q(\Omega), w_h^i, v_h \in X^h$ et $p \geq 2$, il existe des constantes positives C_1, C_2 et C_3 telles que :

$$\frac{C_1}{2}\frac{\|w^i - w_h^i\|^2_{L^q\Omega}}{\|w^i\|^{2-q}_{L^q(\Omega)}\|w_h^i\|_{L^q(\Omega)}} + \frac{C_2}{2}\int_\Omega ||w^i|^{p-2}w^i - |w_h^i|^{p-2}w_h^i||w^i - w_h^i|dx$$

$$\leq a(w^i, w^i - w_h^i) - a(w_h^i, w^i - w_h^i). \qquad 3.14$$

$$a(w^i, w^i - v_h) - a(w_h^i, w^i - v_h)$$

$$\leq C_3\left(\int_\Omega ||w^i|^{q-2}w^i - |w^{ih}|^{q-2}w_h^i|w^i - w_h^i|dx\right)^{\frac{1}{q}}\|w^i - v_h\|_{L^q(\Omega)}. \qquad 3.15$$

Théorème 3.2.1

Pour $m \geq 2$, il existe $C \geq 0$ tel que :

$$\|u^i - u_h^i\|^{p-1}_{w_h^{2,p}(\Omega)} + \|w^i - w_h^i\|_{L^q(\Omega)} \leq C(h^{\frac{q}{2}(m+1)}|w^i|^{\frac{q}{2}}_{W^{m+1,q}(\Omega)} + h^{m+1}|w^i|_{W^{m+1,q}(\Omega)}$$

$$+h^{m-1}|u^i|_{W^{m+1,p(\Omega)}} + h^{m+1}|\delta^2 u^i|_{W^{m+1,q}(\Omega)}). \qquad 3.16$$

Preuve

En utilisant l'inégalité triangulaire, on aura :

$$\|u^i - u_h^i\|_{W_h^{2,p}(\Omega)} \leq \|Ru^i - u_h^i\|_{W_h^{2,p}(\Omega)} + \|u^i - Ru_h^i\|_{W_h^{2,p}(\Omega)}. \qquad 3.17$$

Par la condition d'inf-sup discrète dans la proposition, en obtiens :

$$\begin{aligned}
\|Ru^i - u_h^i\|_{W_h^{2,p}(\Omega)} &\leq \sup_{\eta\in X_0^h(\Omega);\eta\neq 0} \frac{c_h(Ru^i - u_h^i, \eta)}{\|\eta\|_{L_h^q(\Omega)}} \\
&\leq \sup_{\eta\in X_0^h(\Omega);\eta\neq 0} \frac{a(w^i, \eta) - a(w_h^i, \eta)}{\|\eta\|_{L_h^q(\Omega)}} \\
&\leq C_3 \frac{\left(\int_\Omega ||w^{ip-2}w^i - |w_h^i|^{p-2}w_h^i||w^i - w_h^i dx\right)^{\frac{1}{p}} \|\eta\|_{L^q(\Omega)}}{\|\eta\|_{L_h^q(\Omega)}} \\
&\leq C_3 C \left(\int_\Omega ||w^i|^{p-2}w^i - |w_h^i|^{p-2}w_h^i||w^i - w_h^i|dx\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \quad 3.18$$

En appliquant le Lemme 3.2.2 et en utilisant l'inégalité de Young, on aura :

$$C_2 \int_\Omega ||w^i|^{p-2}w^i - |w_h^i|^{p-2}w_h^i||w^i - w_h^i|dx \leq a(w^i, w^i - w_h^i) - a(w_h^i, w^i - w_h^i)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_\Omega ||w^i|^{p-2}w^i - |w_h^i|^{p-2}w_h^i||w^i - w_h^i|dx\right)^{\frac{1}{p}} \|w^i - w_h^i\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq \frac{C_3^q}{q\epsilon^q}\|w^i - w_h^i\|_{L^q(\Omega)}^q + \frac{\epsilon^p}{p}\int_\Omega ||w^i|^{p-2}w^i - |w_h^i|^{p-2}w_h^i||w^i - w_h^i|dx.
\end{aligned} \quad 3.19$$

Choisissant ϵ suffisamment petit où $\frac{\epsilon^p}{p} < 1$ on a :

$$\int_\Omega ||w^i|^{p-2}w^i - |w_h^i|^{p-2}w_h^i||w^i - w_h^i|dx \leq C\|w^i - w_h^i\|_{L^q(\Omega)}^q. \quad 3.20$$

En substituant (3.20) dans (3.18), on obtiendra :

$$\|Ru^i - u_h^i\|_{W_h^{2,p}(\Omega)} < C\|w^i - w_h^i\|_{L^q(\Omega)}^{\frac{q}{p}}. \quad 3.21$$

En soustrayant (3.10) de (3.3), on obtient :

$$\begin{cases} a(w^i, v) - a(w_h^i, v) + c_h(u^i - u_h^i, v) = 0, \\ c_h(w^i - w_h^i, \eta) = 0. \end{cases} \quad 3.22$$

De la semi-linéarité de $a(.,.)$, on conclut :

$$\begin{aligned}a(w^i, w^i - w_h^i) - a(w_h^i, w^i - w_h^i) &= a(w^i, w^i - v) - a(w_h^i, w^i - v)\\ &+ a(w^i, v - w_h^i) - a(w_h^i, v - w_h^i)\\ &= \underbrace{a(w^i, w^i - v) - a(w_h^i, w^i - v)}_{I_1} + \underbrace{c_h(u^i - u_h^i, w_h^i - v)}_{I_2}.\end{aligned}$$

En appliquant le Lemme 3.2.2, on obtient :

$$\frac{C_1}{2}\frac{\|w^i - w_h^i\|^2_{L^q(\Omega)}}{\|w^i\|^{2-q}_{L^q(\Omega)} + \|w_h^i\|^{2-q}_{L^q(\Omega)}} + \frac{C_2}{2}\int_\Omega ||w^i|^{p-2}w^i - |w_h^i|^{p-2}w_h^i||w^i - w_h^i|dx \leq I_1 + I_2. \quad 3.23$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité de Young bien que le Lemme 3.2.2, on aura :

$$\begin{aligned}I_1 &\leq C_3\left(\int_\Omega ||w^i|^{q-2}w^i - |w_h^i|^{q-2}w_h^i||w^i - w_h^i|dx\right)^{\frac{1}{p}}\|w^i - v_h\|_{L_q(\Omega)}\\ &\leq \frac{\epsilon^p}{p}\int_\Omega ||w^i|^{q-2}w^i - |w_h^i|^{q-2}w_h^i||w^i - w_h^i|dx + \frac{C_3^q}{\epsilon^q q}\|w^i - v_h\|^q_{L_q(\Omega)}.\end{aligned} \quad 3.24$$

En choisissant ϵ tel que $\frac{\epsilon^p}{p} = \frac{C_2}{2}$, on a :

$$I_1 \leq \frac{C_2}{2}\int_\Omega ||w^i|^{q-2}w^i - |w_h^i|^{q-2}w_h^i||w^i - w_h^i|dx + C(q)\|w^i - v_h\|^q_{L_q(\Omega)}. \quad 3.25$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}I_2 &= c_h(u^i - u_h^i, w_h^i - v)\\ &= c_h(u^i - u_h^i - R(u^i - u_h^i), w_h^i - v) + c_h(R(u^i - u_h^i), w_h^i - v)\\ &= c_h(u^i - Ru^i, w_h^i - v) + c_h(Ru^i - u_h^i, w_h^i - v)\\ &= c_h(u^i - Ru^i, w_h^i - v) + \int_\Omega \delta^2(u^i - u_h^i)(Ru^i - u_h^i)dx.\end{aligned} \quad 3.26$$

En outre, en utilisant la continuité de c_h, on obtient

$$\begin{aligned}c_h(u^i - Ru^i, w_h^i - v) &\leq C\|u^i - Ru^i\|_{W_h^{2,p}}\|w_h^i - v\|_{L^q(\Omega)}\\ &= \frac{C}{2\epsilon^2}\|u^i - Ru^i\|^2_{W_h^{2,p}} + \frac{C\epsilon^2}{2}\|w_h^i - v\|^2_{L^q(\Omega)}\\ &= \frac{C}{2\epsilon^2}\|u^i - Ru^i\|^2_{W_h^{2,p}} + \frac{C\epsilon^2}{2}(\|w_h^i - w^i\|^2_{L^q(\Omega)} + \|w^i - v\|^2_{L^q(\Omega)}).\end{aligned} \quad 3.27$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \delta^2(u^i - u_h^i)(Ru^i - u_h^i)dx &\leq \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \|\delta^2(u^i - u_h^i)\|_{L^q(\Omega)} \|Ru^i - u_h^i\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq C\|\delta^2(u_h^i - u^i)\|_{L^q(\Omega)} \|Ru^i - u_h^i\|_{W_h^{2,p}(\Omega)} \\
&\leq \frac{C}{2\epsilon}\|\delta^2(u_h^i - u^i)\|^2_{L^q(\Omega)} + \frac{\epsilon}{2}\|Ru^i - u_h^i\|^2_{W_h^{2,p}(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

En appliquant l'inégalité triangulaire et (3.21) au côté droit de (3.28), en remplaçant (3.25)–(3.28) dans (3.23) et on choisissant ϵ assez petit, on trouve :

$$\|w_h^i - w^i\|^2_{L^q(\Omega)} \leq C\left(\|w^i - v\|^q_{L^q(\Omega)} + \|Ru^i - u^i\|^2_{W_h^{2,p}(\Omega)} + \|w^i - v\|^2_{L^q(\Omega)} + \|\delta^2 u^i - R\delta^2(u^i)\|^2_{L^q(\Omega)}\right). \tag{3.29}$$

D'après les propriétés de la projection de Ritz et le lemme 3.2.1, on a l'éstimation de $w^i - w_h^i$.

BIBLIOGRAPHIE

[**1**] Adams, R.A. and Fournier, J.J.F. (2003) Sobolev Spaces. Vol. 140, Pure and Applied Mathematics. 2nd Edition, Elsevier, Amsterdam.

[**2**] AlHamzah, B. and Yebari, N., Existence and Uniqueness of Weak Solution for Weighted p-Laplacian Steklov Problem International Journal of Innovation and Applied Studies, Vol.11No.a Apr.2015, pp.69-76.

[**3**] Alsaedi, R., Dhifli, A. and Ghanmi, A., Low Perturbations of p-Biharmonic Equations with Competing Nonlinearities, Complex Var. Elliptic Eqs., 2021, Vol. 66, no. 4, pp. 642–657.

[**4**] Arama, A., Sur Quelques Résultat De La Théorie Des Opérateurs Monotones Et Application Aux EDP. Université Larbi Ben M'Hidi, Oum El Bouaghi, 2017.

[**5**] Bae, J.H., Kim, J.M., Lee, J. and Park, K., Existence of Nontrivial Weak Solutions for p-Biharmonic Kirchhoff-Type Équations, Bound. Val. Probl., 2019, Vol. 125, pp. 1–17.

[**6**] Bouguerne, W., Sur Un Probléme Intégro-Différentiel Parabolique Non Linéaire Avec Une Condition Au Limite De Dirichlet Inconnue. Université 8 Mai 1945, Guelma, Juin 2018.

[**7**] Brezis, H., Functional Analysis, Sobolev Spaces and Parial Differential Equations. Springer ; 2011th edition (November 10, 2010).

[**8**] Che, H., Wang, Y. and Zhou, Z., An Optimal Error Estimates of H1-Galerkin Expanded Mixed Finite Element Methods for Nonlinear Viscoelasticity-Type Equation, Math. Prob. Eng., 2011, Article ID 570980 ;
DOI : ttps ://doi.org/10.1155/2011/570980.

[**9**] Djaghouta, M. Chaoui, A. Zennir, B., On the discretization of evolution p-bi-Laplace equation, Sibirskii Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki, 2022, Volume 25, Number 4, Pages 371–383. DOI : https ://doi.org/10.15372/SJNM20220403 (Mi sjvm817).

[**10**] Elghazi, K., Méthode des éléments finis mixtes : application aux équations de Stokes stationnaires. Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Fes, 2021.

[**11**] Ewing, R.E., Lin, Y., Sun, T., Wang, J. and Zhang, S., Sharp L2-Error Estimates and Super convergence of Mixed Finite Element Methods for Non-Fickian Flows in Porous Media, SIAM J. Numer. An., 2002, Vol. 40, no. 4, pp. 1538–1560.

[**12**] Georgoulis, E.H. and Pryer, T., Analysis of Discontinuous Galerkin Methods Using Mesh-Dependent Norms and Applications to Problems with Rough Data, Calcolo, 2017, Vol. 54, no. 4, pp. 1533–1551.

[**13**] Gyulov, T. and Morosanu, G., On a Class of Boundary Value Problems Involving the p-Biharmonic Operator, J. Math. An. Appl., 2010, Vol. 367, no. 1, pp. 43–57.

[**14**] Huang, Y. and Liu, X., Sign-Changing Solutions for p-Biharmonic Equations with Hardy Potential in the Half-Space, J. Math. An. Appl., 2016, Vol. 444, pp. 1417–1437.

[**15**] Khafagy, S.A., Existence and uniqueness of weak solution for weighted p-Laplacian Dirichlet problem, Vol. 3, 2011, Online ISSN : 1943-023X, Jouranal

of Advanced Research in Dynamical and Control Systems.

[**16**] Lazer, A. and McKenna, P., Large-Amplitude Periodic Oscillations in Suspension Bridges : Some New Connections with Nonlinear Analysis, SIAM Rev., 1990, Vol. 32, no. 4, pp. 537–578.

[**17**] Li, L. and Tang, Ch., Existence and Multiplicity of Solutions for a Class of p(x)-Biharmonic Equations, Acta Mathematica Scientia, 2013, Vol. 33B, no. 1, pp. 155–170 ; URL : https ://doi.org/10.1016/S0252- 9602(12)60202-1.

[**18**] Lindqvist, P., Notes on The p-Laplace equation. NO-7491 Trondheim, Norway.

[**19**] Makridakis, C.G., On the Babuska–Osborn Approach to Finite Element Analysis : L2 Estimates for Unstructured Meshes, Numer. Math., 2018, Vol. 139, no. 4, pp. 831–844.

[**20**] Sandri, D., Sur l'approximation numérique des écoulements quasi-newtoniens dont la viscosité suit la loi puissance ou la loi de Carreau, RAIRO Model. Math.An. Numer., 1993, Vol. 27, no. 2, pp. 131–155.

[**21**] Zhou, Z., On a p(x)-Biharmonic Problem with Navier Boundary Condition, Bound. Val. Probl., 2018, Vol. 149, pp. 1–14.