République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par :

M[elle] Cheikh Narimane

Intitulé

Inégalités intégrales de type Boole

Dirigé par : Dr. Meftah Badreddine

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Azzouza	Noureddine	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Meftah	Badreddine	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Merad	Meriem	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2023

Remerciement

Avant tout nous adressons nos remerciements au Dieu, le tout puissant pour la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il nous a donné durant cette année d'études et pour la réalisation de ce travail que nous espérons être utiles.
Au début, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide, je tiens à remercier tout particulièrement Mon Enseignant Et Encadreur
Et J'exprime toute ma gratitude à Monsieur MEFTAH BADR EDDINE Docteur à l'université, 08 Mai 1945 Guelma .
Qui a accepté de m'encadrer, qui m'a donné la confiance et m'a rendu fière de travailler avec lui
Pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée
J´ai eu l'honneur d'être parmi vos élèves et de bénéficier de votre riche enseignement.
Aux membres du jury :
Président de jury
Monsieur le Docteur AZZOUZA Noureddine *Mes sincères remerciements pour avoir accepté*
de présider le jury, vous nous offrez le grand honneur et le grand plaisir

Examinateur de jury Dr.MERAD Meriem,

Vous nous avez fait un grand honneur en acceptant de siéger parmi les membres de jury de ce mémoire.

J´ adresse également mes sincères remerciements à mes parents et à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, voire d'un mot d'encouragement qu'ont contribué à la réalisation de ce travail.

Merci à tous et à toutes.

Dédicace

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots
Qu'il faut… Tous les mots ne sauraient exprimer la
Gratitude, l'amour, Le respect, la reconnaissance…
Je dédie ce modeste travail particulièrement à mes chers parents, qui ont consacré leur existence à bâtir la mienne, pour leur soutien, patience et soucis de tendresse et d'affection pour tout ce qu'ils ont fait pour que je puisse arriver à ce stade.

***A mon cher père**, tu as toujours été à mes côtés pour me soutenir et m'encourager. Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, la reconnaissance et la gratitude pour tous les soutiens et les sacrifices dont il a fait prennent à mon égard.*

Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

***A ma chère mère**, qui a œuvrée pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.*

A mon cher frère : ***Omar***
A mes chères sœurs : ***Lamis et Ikram.***
A mes chers neveux : ***Moayad et Louay.***
A mes très chère amie : ***Sara, Ghada et Amira.***

À Toute ma promotion 2éme année master mathématique (2022/2023) et à tous mes enseignants.

À toutes les personnes qui m'ont aidé, soutenu et contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Narimane

الملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة المتراجحات التكاملية من نوع بول للدوال ذات المشتقات المتمتعة بالتحدب.

في الفصل الأول, نذكَر ببعض تعريفات التحدب الكلاسيكي, وكذلك بعض المساواة التكاملية التي سنستعملها لاحقا.

في الفصل الثاني, سنذكَر ببعض النتائج المعروفة في الأدبيات حول المتراجحات التكاملية من نوع نيوتن- كوتس ذات ثلاثة نقط.

في حين ان الفصل الأخير سيخصص بالكامل للمتراجحات التكاملية من نوع بول.

الكلمات المفتاحية :

متراجحة بول, متراجحةهولدر, الدوال المحدبة, الدوال المحدودة.

Abstract

The aim of this memory, is to study the Boole type inequalities for functions whose first derivatives are s-convex, bounded as well as Hölderian. For this we propose :

In the first chapter, a preliminaries concerning some classes of classical convexity, as well as some classes of functions.

In the second chapter, we discuss some classical three-point Newton-Cotes types inequalities.

While the last chapter is devoted to some new results regarding Boole integral inequalities.

Keywords :

Boole inequality, Hölder inequality, s-convex functions, bounded functions, Hölderian functions.

Résumé

Dans ce mémoire, nous allons étudier les inégalités intégrales de type Boole pour les fonctions dont les dérivées premières en valeurs absolues sont s-convexe.

Dans le premier chapitre, nous donnons un bref rappel sur certains types de convexité classique ainsi que sur certaines identités intégrales que nous utiliserons plus tard.

Dans le deuxième chapitre, nous citons certains résultats classiques concernant les inégalités de type Newton-Cotes à trois points.

Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré aux nouvelles inégalités intégrales de type Boole pour les fonctions dont les dérivées premières sont s-convexes.

Mots clés :

Inégalité de type Boole, inégalités de Hölder, fonctions convexes, fonctions s-convexes, fonctions bornées, fonctions Hölderienne.

Table des matières

1 Préliminaires **3**

1.1 Quelques classes de fonctions 3

1.2 Quelques identités et inégalités intégrales importantes 5

1.2.1 Inégalité de Hölder 5

1.2.2 Inégalité des moyennes d'ordre q 5

1.3 Quelques identités intégrales importantes 6

2 Inégalités intégrales de type Newton-Cotes à trois points **9**

2.1 Inégalités intégrales de type Simpson 9

2.1.1 Inégalités intégrales de type Simpson pour les fonctions dont les dérivées premières sont convexes 9

2.2 Inégalités intégrales de type dual Simpson 14

2.2.1 Inégalités intégrales de type dual Simpson pour les fonctions dont les dérivées premières sont s-convexes 14

3 Inégalités intégrales de type Boole **19**

3.1 **Applications** 32

3.1.1 Applications aux quadratures 32

3.1.2 **Applications aux moyennes spéciales** 33

Introduction

Les inégalités jouent un rôle important dans diverses branches des mathématiques modernes telles que la théorie de l'espace de Hilbert, la théorie des probabilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'analyse numérique, la théorie qualitative des équations différentielles et des équations aux différences, etc. Elles représentent un outil puissant et indispensable.

Le fondement mathématique de cette théorie a été établi en partie au cours des $18^{ème}$ et $19^{ème}$ siècles par d'éminents mathématiciens tels que : Gauss, Cauchy, Čebyšev. Dans les années qui suivirent, le sujet attira de nombreux mathématiciens : Poincaré, Lyapunov, Gronwall, Hölder, Hadamard, Pólya, Bellman et Ostrowski. La littérature dans ce contexte est vaste et variée parmi les ouvrages dont on peut trouver une très bonne description de l'évolution historique des inégalités que l'on peut consulter, Mitrinović, Pečarić et Fink [6, 7, 8].

Cette théorie évolue constamment dans plusieurs directions et de différentes manières. De nouvelles inégalités ont été établies, des généralisations, des raffinements, des extensions ainsi que des variantes sur plusieurs axes unidimensionnels, multidimensionnels, fractionnaires et discrets.

L'objectif de ce mémoire est de faire une petite synthèse concernant les inégalités intégrales de type Boole et d'établir de nouvelles généralisations de ce type d'inégalités intégrales.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques classes de fonctions ainsi que quelques identités et inégalités intégrales utiles pour notre étude.

Dans le second chapitre nous traiterons certains résultats concernant les inégalités intégrales de type Newton-Cotes à trois points.

Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré aux nouvelles inégalités de type Boole dont ces nouveaux résultats sont soumis pour une éventuelle publication.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques type de convexité ainsi que quelques identités de fonctions. Concernant la convexité en peut consulter [9].

1.1 Quelques classes de fonctions

Dans tout ce qui va suivre nous désignons par $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.1 ([9]) *Un ensemble $I \subseteq \mathbb{R}$, est dit convexe si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0, 1]$, on a :*

$$tx + (1 - t)\, y \in I.$$

Définition 1.2 ([9]) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe, si*

$$f\left(tx + (1 - t)\, y\right) \leq tf\left(x\right) + (1 - t)\, f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$.

Définition 1.3 ([1]) *Une fonction positive $f : I \subset [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est dite s-convexe au* *second sens pour un certain nombre fixé* $s \in]0,1]$, *si*

$$f(tx+(1-t)y) \ \leq t^s f(x)+(1-t)^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et* $t \in [0,1]$.

Définition 1.4 **(**[4]**)** *Une fonction* f *est dite bornée sur* I, *s'il existe des constantes* $-\infty < m < M < +\infty$ *telles que*

$$m \leq f(x) \leq M$$

pour tout $x \in I$.

Définition 1.5 **(**[4]**)** *Une fonction* f *est dite* L*-Lipschitzienne sur* I, *s'il existe* $L > 0$ *telle que*

$$|f(x)-f(y)| \leq L\,|x-y|$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$.

Définition 1.6 **(**[4]**)** *Une fonction* f *est dite* r*-*L*-Hölderienne sur* $[a,b]$, *s'il existe* $L > 0$ *et* $0 < r \leq 1$ *telles que*

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|^r$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$.

1.2 Quelques identités et inégalités intégrales importantes

1.2.1 Inégalité de Hölder

Théorème 1.1 ([6]) *Soit $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si f et g sont des fonctions réelles définies sur $[a, b]$, et si de plus $|f|^p$ et $|g|^q$ sont intégrables sur $[a, b]$, alors :*

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.2.2 Inégalité des moyennes d'ordre q

Théorème 1.2 ([2]) *Soient $x = (x_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ et $p = (p_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ deux n-uplets de nombres strictement positifs et soit $q \in \overline{\mathbb{R}}$, l'inégalité des moyens d'ordre q pondérés par p est définie par :*

$$M_n^{[q]} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i^q \right)^{\frac{1}{q}} & \text{pour } q \neq -\infty, 0, +\infty, \\ \left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \right)^{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} & \text{pour } q = 0, \\ \min(x_1, x_2, ..., x_n) & \text{pour } q = -\infty, \\ \max(x_1, x_2, ..., x_n) & \text{pour } q = +\infty. \end{cases}$$

Pour $-\infty \leq q < r \leq +\infty$, on a :

$$M_n^{[q]} \leq M_n^{[r]}.$$

Remarque 1.1 ([2]) *La version intégrale du Théorème 1.2 est pour $q \geq 1$ et si $|f|$ et $|g|^q$ sont intégrables sur $[a, b]$, alors on a :*

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\, dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|\, |g(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.3 Quelques identités intégrales importantes

Lemme 1.1 ([10]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction absolument continue sur I° telle que $f' \in L^1[a,b]$, où $a, b \in I^{\circ}$ avec $a < b$, alors l'égalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{6}\left(f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ = & \tfrac{b-a}{2}\int_0^1 \left[\left(\tfrac{t}{2} - \tfrac{1}{3}\right) f'\left(\tfrac{1+t}{2}b + \tfrac{1-t}{2}a\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{t}{2}\right) f'\left(\tfrac{1+t}{2}a + \tfrac{1-t}{2}b\right)\right] dt. \qquad (1.1) \end{aligned}$$

Preuve. Posons

$$I_1 = \int_0^1 \left(\tfrac{t}{2} - \tfrac{1}{3}\right) f'\left(\tfrac{1+t}{2}b + \tfrac{1-t}{2}a\right) dt$$

et

$$I_2 = \int_0^1 \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{t}{2}\right) f'\left(\tfrac{1+t}{2}a + \tfrac{1-t}{2}b\right) dt.$$

En intégrant par partie I_1, on trouve :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \left(\tfrac{t}{2} - \tfrac{1}{3}\right) f'\left(\tfrac{1+t}{2}b + \tfrac{1-t}{2}a\right) dt \\ &= \tfrac{2}{b-a}\left(\tfrac{t}{2} - \tfrac{1}{3}\right) f\left(\tfrac{1+t}{2}b + \tfrac{1-t}{2}a\right)\Big|_0^1 - \tfrac{1}{b-a}\int_0^1 f\left(\tfrac{1+t}{2}b + \tfrac{1-t}{2}a\right) dt \\ &= \tfrac{1}{3(b-a)} f(b) + \tfrac{2}{3(b-a)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_0^1 f\left(\tfrac{1+t}{2}b + \tfrac{1-t}{2}a\right) dt \\ &= \tfrac{1}{3(b-a)} f(b) + \tfrac{2}{3(b-a)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{2}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(u)\,du. \qquad (1.2) \end{aligned}$$

D'une manière analogue, on obtient :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{t}{2}\right) f'\left(\tfrac{1+t}{2}a + \tfrac{1-t}{2}b\right) dt \\ &= -\tfrac{2}{b-a}\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{t}{2}\right) f\left(\tfrac{1+t}{2}a + \tfrac{1-t}{2}b\right)\Big|_0^1 - \tfrac{1}{b-a}\int_0^1 f\left(\tfrac{1+t}{2}a + \tfrac{1-t}{2}b\right) dt \\ &= \tfrac{1}{3(b-a)} f(a) + \tfrac{2}{3(b-a)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{2}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(u)\,du. \qquad (1.3) \end{aligned}$$

En sommant (1.2) et (1.3), puis en multipliant l'identité résultante par $\frac{b-a}{2}$ on trouve l'identité souhaitée dans (1.1). ■

Lemme 1.2 ([3]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction absolument continue sur I° telle que $f' \in L^1[a,b]$, où $a, b \in I^{\circ}$ avec $a < b$, alors l'égalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{3}\left(2f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \\
&= \tfrac{b-a}{16}\left(\int_0^1 tf'\left((1-t)a + t\tfrac{3a+b}{4}\right)dt + \int_0^1 \left(t-\tfrac{5}{3}\right)f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right)dt\right. \\
&\left.+ \int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{3}\right)f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2} + t\tfrac{a+3b}{4}\right)dt + \int_0^1 (t-1)f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4} + tb\right)dt\right).
\end{aligned}$$

Preuve. Posons

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 tf'\left((1-t)a + t\tfrac{3a+b}{4}\right)dt, \\
I_2 &= \int_0^1 \left(t-\tfrac{5}{3}\right)f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right)dt, \\
I_3 &= \int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{3}\right)f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2} + t\tfrac{a+3b}{4}\right)dt, \\
I_4 &= \int_0^1 (t-1)f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4} + tb\right)dt.
\end{aligned}$$

En intégrant par partie I_1, on trouve :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \tfrac{4}{b-a}tf\left((1-t)a + t\tfrac{3a+b}{4}\right)\Big|_{t=0}^{t=1} \\
&\quad -\tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)a + t\tfrac{3a+b}{4}\right)dt \\
&= \tfrac{4}{b-a}f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - \tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)a + t\tfrac{3a+b}{4}\right)dt \\
&= \tfrac{4}{b-a}f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - \tfrac{16}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{3a+b}{4}} f(u)\,du. \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

D'une manière analogue, on obtient :

$$I_2 = -\frac{8}{3(b-a)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{20}{3(b-a)} f\left(\frac{3a+b}{4}\right) - \frac{16}{(b-a)^2} \int\limits_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}} f(u)\, du, \tag{1.5}$$

$$I_3 = \frac{20}{3(b-a)} f\left(\frac{a+3b}{4}\right) - \frac{8}{3(b-a)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{16}{(b-a)^2} \int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+3b}{4}} f(u)\, du \tag{1.6}$$

et

$$I_4 = \frac{4}{b-a} f\left(\frac{a+3b}{4}\right) - \frac{16}{(b-a)^2} \int\limits_{\frac{a+3b}{4}}^{b} f(u)\, du. \tag{1.7}$$

En additionnant (1.4)-(1.7), puis en multipliant le résultat par $\frac{b-a}{16}$, nous obtenons le résultat souhaité. $\blacksquare$

Chapitre 2

Inégalités intégrales de type Newton-Cotes à trois points

Dans tout ce que suit I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, dont l'intérieur est noté par I°, $a, b \in I^{\circ}$ avec $a < b$ et on note par $L^1[a, b]$ l'espace des fonctions intégrables sur $[a, b]$.

2.1 Inégalités intégrales de type Simpson

Dans cette première sous section nous allons nous intéressé à la première quadrature de Simpson dite aussi $\frac{1}{3}$-Simpson donnée comme suit :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

2.1.1 Inégalités intégrales de type Simpson pour les fonctions dont les dérivées premières sont convexes

Dans l'article [10], Sarikaya et ses collaborateurs ont établi les résultats suivants basés sur l'identité donnée par le Lemme 1.1.

Le résultat suivant concerne les fonctions dont la valeur absolue de la dérivée première est convexe.

Théorème 2.1 ([10]) *Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f' \in L^1[a,b]$. Si $|f'|$ est convexe sur $[a,b]$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\left| \tfrac{1}{6}\left(f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \le \tfrac{5(b-a)}{72}\left(|f'(a)| + |f'(b)|\right).$$

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux deux membres de l'identité du Lemme 1.1, ensuite faisons appelle à la convexité de $|f'|$ sur $[a,b]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left| \tfrac{1}{6}\left(f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \\
\le\ & \tfrac{b-a}{2}\left(\int_0^1 \left|\tfrac{t}{2} - \tfrac{1}{3}\right| \left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}b + \tfrac{1-t}{2}a\right)\right| dt + \int_0^1 \left|\tfrac{1}{3} - \tfrac{t}{2}\right| \left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}a + \tfrac{1-t}{2}b\right)\right| dt\right) \\
\le\ & \tfrac{b-a}{2}\left(\int_0^1 \left|\tfrac{t}{2} - \tfrac{1}{3}\right| \left(\tfrac{1+t}{2}|f'(b)| + \tfrac{1-t}{2}|f'(a)|\right) dt\right. \\
& \left. + \int_0^1 \left|\tfrac{1}{3} - \tfrac{t}{2}\right| \left(\tfrac{1+t}{2}|f'(a)| + \tfrac{1-t}{2}|f'(b)|\right) dt\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{2}\int_0^1 \left|\tfrac{t}{2} - \tfrac{1}{3}\right| \left(\tfrac{1+t}{2}|f'(b)| + \tfrac{1-t}{2}|f'(a)| + \tfrac{1+t}{2}|f'(a)| + \tfrac{1-t}{2}|f'(b)|\right) dt \\
=\ & \tfrac{b-a}{2}\int_0^1 \left|\tfrac{t}{2} - \tfrac{1}{3}\right| \left(|f'(a)| + |f'(b)|\right) dt \\
=\ & \tfrac{b-a}{2}\left(|f'(a)| + |f'(b)|\right)\int_0^1 \left|\tfrac{t}{2} - \tfrac{1}{3}\right| dt \\
=\ & \tfrac{b-a}{2}\left(|f'(a)| + |f'(b)|\right)\int_0^1 \left|\tfrac{t}{2} - \tfrac{1}{3}\right| dt,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait

$$\int_0^1 \left|\tfrac{t}{2} - \tfrac{1}{3}\right| dt = \tfrac{5}{36}.$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Concernant les fonctions dont la valeur absolue de la dérivée première à une certaine puissance est convexe, ils ont établi le théorème suivant.

Théorème 2.2 ([10]) *Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f' \in L^1[a,b]$. Si $|f'|^q$ est convexe sur $[a,b]$ pour $q > 1$ et $s \in \left]0,1\right]$, alors on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left(f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{12}\left(\tfrac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{1/p}\left(\left(\tfrac{3|f'(b)|^q + |f'(a)|^q}{4}\right)^{1/q} + \left(\tfrac{3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{4}\right)^{1/q}\right),
\end{aligned}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Preuve. En utilisant le Lemme 1.1, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité de Hölder et le fait que $|f'|^q$ est convexe, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left(f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2}\left(\left(\int_0^1 \left|\tfrac{t}{2} - \tfrac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}b + \tfrac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. + \left(\int_0^1 \left|\tfrac{1}{3} - \tfrac{t}{2}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}a + \tfrac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2}\left(\int_0^1 \left|\tfrac{t}{2} - \tfrac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\int_0^1 \left(\tfrac{1+t}{2}|f'(b)|^q + \tfrac{1-t}{2}|f'(a)|^q\right) dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. + \left(\int_0^1 \left(\tfrac{1+t}{2}|f'(a)|^q + \tfrac{1-t}{2}|f'(b)|^q\right) dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{2}\left(\int_0^1 \left|\tfrac{t}{2} - \tfrac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{1}{2}|f'(b)|^q \int_0^1 (1+t)\,dt + \tfrac{1}{2}|f'(a)|^q \int_0^1 (1-t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. + \left(\tfrac{1}{2}|f'(a)|^q \int_0^1 (1+t)\,dt + \tfrac{1}{2}|f'(b)|^q \int_0^1 (1-t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{12}\left(\tfrac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{1/p}\left(\left(\tfrac{3|f'(b)|^q + |f'(a)|^q}{4}\right)^{1/q} + \left(\tfrac{3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{4}\right)^{1/q}\right),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les faits que

$$\int_0^1 (1+t)\,dt = \tfrac{1}{2}(1+t)^2\Big|_{t=0}^{t=1} = \tfrac{3}{2}, \int_0^1 (1-t)\,dt = -\tfrac{1}{2}(1-t)^2\Big|_{t=0}^{t=1} = \tfrac{1}{2}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left|\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right|^p dt &= \int_0^{\frac{2}{3}} \left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2}\right)^p dt + \int_{\frac{2}{3}}^1 \left(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right)^p dt \\
&= -\tfrac{2}{p+1}\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2}\right)^{p+1}\Big|_{t=0}^{t=\frac{2}{3}} + \tfrac{2}{p+1}\left(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right)^{p+1}\Big|_{t=\frac{2}{3}}^{t=1} \\
&= \tfrac{2}{p+1}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{p+1} + \tfrac{2}{p+1}\left(\tfrac{1}{6}\right)^{p+1} \\
&= \tfrac{2}{p+1}\left(\tfrac{2^{p+1}}{6^{p+1}} + \tfrac{1}{6^{p+1}}\right) = \tfrac{2}{p+1}\left(\tfrac{1+2^{p+1}}{6^{p+1}}\right) = \tfrac{1+2^{p+1}}{6^p\times 3(p+1)}.
\end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Une variante du Théorème 2.2 est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.3 ([10]) *Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f' \in L^1[a,b]$. Si $|f'|^q$ est convexe sur $[a,b]$ pour $q \geq 1$ et $s \in]0,1]$, alors on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{5(b-a)}{72}\left(\left(\tfrac{61|f'(b)|^q+29|f'(a)|^q}{90}\right)^{1/q} + \left(\tfrac{61|f'(a)|^q+29|f'(b)|^q}{90}\right)^{1/q}\right).
\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.1, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité des moyennes d'ordre q et la convexité de $|f'|^q$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2}\left(\left(\int_0^1 \left|\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right| dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left|\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right| \left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}b+\tfrac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. + \left(\int_0^1 \left|\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2}\right| dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left|\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2}\right| \left|f'\left(\tfrac{1+t}{2}a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{2}\left(\int_0^1 \left|\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right| dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\int_0^1 \left|\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right| \left(\tfrac{1+t}{2}|f'(b)|^q+\tfrac{1-t}{2}|f'(a)|^q\right) dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. + \left(\int_0^1 \left|\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2}\right| \left(\tfrac{1+t}{2}|f'(a)|^q+\tfrac{1-t}{2}|f'(b)|^q\right) dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 \left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right| dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \Bigg(\left(\frac{1}{2}\left|f'(b)\right|^q \int_0^1 \left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|(1+t)\,dt + \frac{1}{2}\left|f'(a)\right|^q \int_0^1 \left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|(1-t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\left|f'(a)\right|^q \int_0^1 \left|\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right|(1+t)\,dt + \frac{1}{2}\left|f'(b)\right|^q \int_0^1 \left|\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right|(1-t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg) \\
&= \frac{b-a}{2}\left(\frac{5}{36}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\frac{61|f'(b)|^q+29|f'(a)|^q}{648}\right)^{1/q}+\left(\frac{61|f'(a)|^q+29|f'(b)|^q}{648}\right)^{1/q}\right) \\
&= \frac{5(b-a)}{72}\left(\left(\frac{61|f'(b)|^q+29|f'(a)|^q}{90}\right)^{1/q}+\left(\frac{61|f'(a)|^q+29|f'(b)|^q}{90}\right)^{1/q}\right),
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé les faits que

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|(1+t)\,dt &= \int_0^1 \left|\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right|(1+t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right)(1+t)\,dt + \int_{\frac{2}{3}}^1 \left(\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right)(1+t)\,dt \\
&= \left(\frac{t}{3}-\frac{t^2}{12}-\frac{t^3}{6}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\frac{2}{3}} + \left(-\frac{t}{3}+\frac{t^2}{12}+\frac{t^3}{6}\right)\Bigg|_{t=\frac{2}{3}}^{t=1} \\
&= \frac{22}{81}-\frac{1}{12}=\frac{61}{324}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|(1-t)\,dt &= \int_0^1 \left|\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right|(1-t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right)(1-t)\,dt + \int_{\frac{2}{3}}^1 \left(\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right)(1-t)\,dt \\
&= \left(\frac{t}{3}-\frac{5t^2}{12}+\frac{t^3}{6}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\frac{2}{3}} + \left(-\frac{t}{3}+\frac{5t^2}{12}-\frac{t^3}{6}\right)\Bigg|_{t=\frac{2}{3}}^{t=1} \\
&= \frac{14}{81}-\frac{1}{12}=\frac{29}{324}.
\end{aligned}
$$

La preuve est ainsi achevée. ■

2.2 Inégalités intégrales de type dual Simpson

Dans cette sous section nous allons nous intéressé à la quadrature dite dual Simpson, dont la forme est la suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{b-a}{3}\left(2f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right).$$

2.2.1 Inégalités intégrales de type dual Simpson pour les fonctions dont les dérivées premières sont s-convexes

Dans le papier [3], Chiheb et ses collaborateurs ont exploré l'inégalité de dual Simpson via la s-convexité de la première dérivée, dont ils ont obtenu les résultats suivants.

Théorème 2.4 ([3]) *Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f' \in L^1[a,b]$ avec $0 \le a < b$. Si $|f'|$ est s-convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in]0,1]$, alors on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{3}\left(2f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\le\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\tfrac{1}{(s+1)(s+2)}\left(|f'(a)| + |f'(b)|\right) + \tfrac{4s+14}{3(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right. \\
&\left. + \tfrac{8s+10}{3(s+1)(s+2)}\left(\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right| + \left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|\right)\right).
\end{aligned}$$

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux deux membres de l'identité du Lemme 1.2, ensuite faisons appelle à la s-convexité de $|f'|$ sur $[a,b]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{3}\left(2f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\le\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\int_0^1 t\left|f'\left((1-t)a + t\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|dt + \int_0^1 \left(\tfrac{5}{3}-t\right)\left|f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right)\right|dt\right. \\
&\left. + \int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{3}\right)\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2} + t\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|dt + \int_0^1 (1-t)\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4} + tb\right)\right|dt\right) \\
\le\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\int_0^1 t\left((1-t)^s|f'(a)| + t^s\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|\right)dt\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^1 \left(\tfrac{5}{3}-t\right)\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right)dt\\
&+\int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{3}\right)\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|\right)dt\\
&\left.+\int_0^1 (1-t)\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|+t^s\left|f'(b)\right|\right)dt\right)\\
= &\ \tfrac{b-a}{16}\left(\left(\int_0^1 t(1-t)^s dt\right)|f'(a)|+\left(\int_0^1 t^{s+1}dt+\int_0^1 (\tfrac{5}{3}-t)(1-t)^s\,dt\right)\left|f'(\tfrac{3a+b}{4})\right|\right.\\
&+\left(\int_0^1 (\tfrac{5}{3}-t)t^s dt+\int_0^1 (t+\tfrac{2}{3})(1-t)^s dt\right)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\\
&\left.+\left(\int_0^1 (t+\tfrac{2}{3})t^s dt+\int_0^1 (1-t)^{s+1}dt\right)\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|+\left(\int_0^1 (1-t)t^s dt\right)|f'(b)|\right)\\
= &\ \tfrac{b-a}{16}\left(\tfrac{1}{(s+1)(s+2)}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right)+\tfrac{4s+14}{3(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right.\\
&\left.+\tfrac{8s+10}{3(s+1)(s+2)}\left(\left|f'(\tfrac{3a+b}{4})\right|+\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|\right)\right),
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 t(1-t)^s\,dt &= \int_0^1 t^s(1-t)\,dt=\tfrac{1}{(s+1)(s+2)}, && (2.1)\\
\int_0^1 t^{s+1}dt &= \int_0^1 (1-t)^{s+1}\,dt=\tfrac{1}{s+2}, && (2.2)\\
\int_0^1 \left(\tfrac{5}{3}-t\right)(1-t)^s\,dt &= \int_0^1 t^s\left(t+\tfrac{2}{3}\right)dt=\tfrac{5s+7}{3(s+1)(s+2)}, && (2.3)\\
\int_0^1 t^s\left(\tfrac{5}{3}-t\right)dt &= \int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{3}\right)(1-t)^s\,dt=\tfrac{2s+7}{3(s+1)(s+2)}. && (2.4)
\end{aligned}
$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 2.1 ([3]) *Dans le Théorème 2.4, si on prend $s=1$, on obtient :*

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{3}\left(2f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+2f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\
\leq\ &\tfrac{5(b-a)}{24}\left(\tfrac{|f'(a)|+6\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|+6\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+6\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|+|f'(b)|}{20}\right).
\end{aligned}
$$

Théorème 2.5 ([3]) *Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f' \in L^1[a,b]$ avec $0 \leq a < b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in]0,1]$ où $q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{3}\left(2f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{16(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q + \left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q}{1+s}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q + |f'(b)|^q}{1+s}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. + \left(\frac{5^{p+1}-2^{p+1}}{3^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{1+s}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + \left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q}{1+s}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.2, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité de Hölder, ensuite faisons appelle à la s-convexité de $|f'|^q$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{3}\left(2f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{16}\left(\left(\int_0^1 t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left((1-t)a + t\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+ \left(\int_0^1 \left(\tfrac{5}{3}-t\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{3}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2} + t\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\left. + \left(\int_0^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4} + tb\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
\leq\ & \frac{b-a}{16(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left(\int_0^1 \left((1-t)^s|f'(a)|^q + t^s\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+ \left(\frac{5^{p+1}-2^{p+1}}{3^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\int_0^1 \left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q + t^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. + \left(\int_0^1 \left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q + t^s\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)
\end{aligned}$$

$$+\left(\int_0^1\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q+t^s\left|f'(b)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg)$$

$$= \frac{b-a}{16(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q}{1+s}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{1+s}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{5^{p+1}-2^{p+1}}{3^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{1+s}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q}{1+s}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right)\right).$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 2.6 ([3]) *Soit $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f'\in L^1[a,b]$ avec $0\leq a<b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s\in\left]0,1\right]$ où $q\geq 1$, alors on a :*

$$\left|\frac{1}{8}\left(3f\left(\frac{5a+b}{6}\right)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+3f\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{16}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+(s+1)\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{(s+1)\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right.$$

$$+\left(\frac{7}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{(5s+7)\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+(2s+7)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{3(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.+\left(\frac{7}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{(2s+7)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+(5s+7)\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q}{3(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.2, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité des moyennes d'ordre q, ensuite faisons appelle à la s-convexité de $|f'|^q$, on obtient :

$$\left|\frac{1}{3}\left(2f\left(\frac{3a+b}{4}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+2f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{16}\left(\left(\int_0^1 t\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t\left|f'\left((1-t)\,a+t\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\int_0^1\left(\frac{5}{3}-t\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left(\frac{5}{3}-t\right)\left|f'\left((1-t)\,\frac{3a+b}{4}+t\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^1\left(t+\frac{2}{3}\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left(t+\frac{2}{3}\right)\left|f'\left((1-t)\,\frac{a+b}{2}+t\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\int\limits_0^1 (1-t)\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int\limits_0^1 (1-t)\left|f'\left((1-t)\,\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg)\\
\leq\ & \tfrac{b-a}{16}\Bigg(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int\limits_0^1 t\left((1-t)^s\left|f'(a)\right|^q+t^s\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\tfrac{7}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int\limits_0^1\left(\tfrac{5}{3}-t\right)\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\tfrac{7}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int\limits_0^1\left(t+\tfrac{2}{3}\right)\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int\limits_0^1 (1-t)\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q+t^s\left|f'(b)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg)\\
=\ & \tfrac{b-a}{16}\Bigg(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f'(a)\right|^q\int\limits_0^1 t\,(1-t)^s\,dt+\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q\int\limits_0^1 t^{s+1}dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\tfrac{7}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q\int\limits_0^1\left(\tfrac{5}{3}-t\right)(1-t)^s\,dt+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\int\limits_0^1\left(\tfrac{5}{3}-t\right)t^s\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\tfrac{7}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\int\limits_0^1\left(t+\tfrac{2}{3}\right)(1-t)^s\,dt+\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q\int\limits_0^1\left(t+\tfrac{2}{3}\right)t^s dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q\int\limits_0^1 (1-t)^{s+1}\,dt+\left|f'(b)\right|^q\int\limits_0^1 (1-t)\,t^s dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg)\\
=\ & \tfrac{b-a}{16}\Bigg(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\tfrac{\left|f'(a)\right|^q+(s+1)\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{(s+1)\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\
&+\left(\tfrac{7}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\tfrac{(5s+7)\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+(2s+7)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{3(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\tfrac{7}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\tfrac{(2s+7)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+(5s+7)\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q}{3(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg),
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé (2.1)-(2.4). La preuve est ainsi achevée. ■

Chapitre 3

Inégalités intégrales de type Boole

Dans ce chapitre, nous allons d'abord démontrer une nouvelle identité, en s'appuyant sur cette dernière nous prouverons de nouvelles inégalités de type Newton-Cotes à cinq-points, dont la forme est la suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{b-a}{90}\left(7f(a)+32f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+12f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+32f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+7f(b)\right).$$

Cette dernière peut être vue comme combinaison de la méthode de Simpson et celle du dual Simpson. Ces nouveaux résultats sont soumis pour une éventuelle publication [5].

Lemme 3.1 **([5])** *Soit $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I°, $a,b\in I^\circ$ avec $a<b$ et $f'\in L^1[a,b]$, alors l'égalité suivante est vérifiée*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{90}\left(7f(a)+32f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+12f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+32f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+7f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\\
=\;&\tfrac{b-a}{16}\left(\int_0^1\left(t-\tfrac{14}{45}\right)f'\left((1-t)a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)dt+\int_0^1\left(t-\tfrac{11}{15}\right)f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)dt\right.\\
&\left.+\int_0^1\left(t-\tfrac{4}{15}\right)f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)dt+\int_0^1\left(t-\tfrac{31}{45}\right)f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)dt\right).
\end{aligned}$$

Preuve. Considérons les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \left(t - \tfrac{14}{45}\right) f'\left((1-t)\,a + t\tfrac{3a+b}{4}\right) dt, \\
I_2 &= \int_0^1 \left(t - \tfrac{11}{15}\right) f'\left((1-t)\,\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right) dt, \\
I_3 &= \int_0^1 \left(t - \tfrac{4}{15}\right) f'\left((1-t)\,\tfrac{a+b}{2} + t\tfrac{a+3b}{4}\right) dt, \\
I_4 &= \int_0^1 \left(t - \tfrac{31}{45}\right) f'\left((1-t)\,\tfrac{a+3b}{4} + tb\right) dt.
\end{aligned}$$

En intégrant par partie I_1, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \tfrac{4}{b-a}\left(t - \tfrac{14}{45}\right) f\left((1-t)\,a + t\tfrac{3a+b}{4}\right)\Big|_{t=0}^{t=1} \\
&\quad - \tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)\,a + t\tfrac{3a+b}{4}\right) dt \\
&= \tfrac{124}{45(b-a)} f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) + \tfrac{56}{45(b-a)} f(a) - \tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)\,a + t\tfrac{3a+b}{4}\right) dt \\
&= \tfrac{124}{45(b-a)} f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) + \tfrac{56}{45(b-a)} f(a) - \tfrac{16}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{3a+b}{4}} f(u)\, du. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

D'une manière similaire, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \tfrac{4}{b-a}\left(t - \tfrac{11}{15}\right) f\left((1-t)\,\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right)\Big|_{t=0}^{t=1} \\
&\quad - \tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)\,\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right) dt \\
&= \tfrac{16}{15(b-a)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \tfrac{44}{15(b-a)} f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) \\
&\quad - \tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)\,\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right) dt \\
&= \tfrac{16}{15(b-a)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \tfrac{44}{15(b-a)} f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - \tfrac{16}{(b-a)^2}\int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}} f(u)\, du\ , \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \tfrac{4}{b-a}\left(t-\tfrac{4}{15}\right) f\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)\Big|_{t=0}^{t=1} \\
&\quad -\tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)dt \\
&= \tfrac{44}{15(b-a)} f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+\tfrac{16}{15(b-a)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \\
&\quad -\tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)dt \\
&= \tfrac{44}{15(b-a)} f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+\tfrac{16}{15(b-a)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{16}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+3b}{4}} f(u)\,du \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_4 &= \tfrac{4}{b-a}\left(t-\tfrac{31}{45}\right) f\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)\Big|_{t=0}^{t=1} \\
&\quad -\tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)dt \\
&= \tfrac{56}{45(b-a)} f(b)+\tfrac{124}{45(b-a)} f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right) \\
&\quad -\tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)dt \\
&= \tfrac{56}{45(b-a)} f(b)+\tfrac{124}{45(b-a)} f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)-\tfrac{16}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+3b}{4}}^{b} f(u)\,du. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

En additionnant (3.1)-(3.4), puis en multipliant l'égalité résultante par $\frac{b-a}{16}$, on obtient le résultat souhaite. ■

Théorème 3.1 ([5]**)** *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f'\in L^1[a,b]$ avec $0\le a<b$. Si $|f'|$ est s-convexe au second sens pour certain $s\in\,]0,1]$ fixé, on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{90}\left(7f(a)+32f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+12f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+32f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+7f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\le\ & \tfrac{b-a}{16(s+1)(s+2)}\left(\left(\tfrac{14s-17}{45}+2\left(\tfrac{31}{45}\right)^{s+2}\right)(|f'(a)|+|f'(b)|)\right. \\
&+2\left(\tfrac{32s+19}{45}+\tfrac{(14)^{s+2}+(12)^{s+2}}{(45)^{s+2}}\right)\left(\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|\right) \\
&\left.+\,2\left(\tfrac{4s-7}{15}+2\left(\tfrac{11}{15}\right)^{s+2}\right)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right).
\end{aligned}$$

Preuve. A partir du Lemme 3.1, les propriétés de la valeur absolue et la s-convexité au second sens de $|f'|$, on a :

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{90}\left(7f(a)+32f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+12f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+32f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+7f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{14}{45}\right|\left|f'\left((1-t)a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|dt\right. \\
&+\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{11}{15}\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)\right|dt \\
&+\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{4}{15}\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|dt \\
&\left.+\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{31}{45}\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)\right|dt\right) \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{14}{45}\right|\left((1-t)^s\left|f'(a)\right|+t^s\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|\right)dt\right. \\
&+\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{11}{15}\right|\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right)dt \\
&+\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{4}{15}\right|\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|\right)dt \\
&\left.+\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{31}{45}\right|\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|+t^s\left|f'(b)\right|\right)dt\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\left|f'(a)\right|\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{14}{45}\right|(1-t)^s\,dt+\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{14}{45}\right|t^s dt\right. \\
&+\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{11}{15}\right|(1-t)^s\,dt+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{11}{15}\right|t^s dt \\
&+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{4}{15}\right|(1-t)^s\,dt+\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{4}{15}\right|t^s dt \\
&\left.+\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{31}{45}\right|(1-t)^s\,dt+\left|f'(b)\right|\int\limits_0^1\left|t-\tfrac{31}{45}\right|t^s dt\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{16(s+1)(s+2)}\left(\left(\tfrac{14s-17}{45}+2\left(\tfrac{31}{45}\right)^{s+2}\right)\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right)\right. \\
&+2\left(\tfrac{32s+19}{45}+\tfrac{(14)^{s+2}+(12)^{s+2}}{(45)^{s+2}}\right)\left(\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|\right) \\
&\left.+2\left(\tfrac{4s-7}{15}+2\left(\tfrac{11}{15}\right)^{s+2}\right)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right),
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé

$$\begin{aligned}\Omega_{1,s} &= \int\limits_0^1 \left|t-\tfrac{14}{45}\right|(1-t)^s\,dt = \int\limits_0^1 \left|t-\tfrac{31}{45}\right| t^s dt \\ &= \tfrac{14s-17}{45(s+1)(s+2)} + \tfrac{2}{(s+1)(s+2)}\left(\tfrac{31}{45}\right)^{s+2}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{2,s} &= \int\limits_0^1 \left|t-\tfrac{14}{45}\right| t^s dt = \int\limits_0^1 \left|t-\tfrac{31}{45}\right| (1-t)^s\,dt \\ &= \tfrac{31s+17}{45(s+1)(s+2)} + \tfrac{2}{(s+1)(s+2)}\left(\tfrac{14}{45}\right)^{s+2}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{3,s} &= \int\limits_0^1 \left|t-\tfrac{11}{15}\right|(1-t)^s\,dt = \int\limits_0^1 \left|t-\tfrac{4}{15}\right| t^s dt \\ &= \tfrac{11s+7}{15(s+1)(s+2)} + \tfrac{2}{(s+1)(s+2)}\left(\tfrac{4}{15}\right)^{s+2} \end{aligned} \tag{3.7}$$

et

$$\begin{aligned}\Omega_{4,s} &= \int\limits_0^1 \left|t-\tfrac{11}{15}\right| t^s dt = \int\limits_0^1 \left|t-\tfrac{4}{15}\right| (1-t)^s\,dt \\ &= \tfrac{4s-7}{15(s+1)(s+2)} + \tfrac{2}{(s+1)(s+2)}\left(\tfrac{11}{15}\right)^{s+2}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

La preuve est ainsi terminée. ■

Corollaire 3.1 ([5]) *Sous les hypothèses du Théorème 3.1, et si $|f'|$ est une fonction convexe, on a :*

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{1}{90}\left(7f(a)+32f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+12f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+32f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+7f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(u)\,du\right| \\ \leq\ & \tfrac{6453(b-a)}{87480}\left(\tfrac{53507|f'(a)|+215494\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|+107298\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+215494\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|+53507|f'(b)|}{645300}\right). \end{aligned}$$

Corollaire 3.2 ([5]) *En utilisant la convexité de $|f'|$ le Corollaire 3.1 donne :*

$$\left|\frac{1}{90}\left(7f(a)+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+7f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$

$$\leq \frac{239(b-a)}{3240}\left(\frac{80627|f'(a)|+161396\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+80627|f'(b)|}{322650}\right) \tag{3.9}$$

$$\leq \frac{239(b-a)}{3240}\left(\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2}\right). \tag{3.10}$$

Théorème 3.2 ([5]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f' \in L^1[a,b]$ avec $0 \leq a < b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe ou second sens pour un certain nombre $s \in]0,1]$ et $q > 1$ avec $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$, on a :*

$$\left|\frac{1}{90}\left(7f(a)+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+7f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{16}\left(\left(\frac{(14)^{p+1}+(31)^{p+1}}{(45)^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{4^{p+1}+(11)^{p+1}}{(15)^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).$$

Preuve. En utilisant le Lemme 3.1, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité de Hölder et la s-convexité au second sens de $|f'|^q$, on obtient :

$$\left|\frac{1}{90}\left(7f(a)+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+7f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{16}\left(\left(\int_0^1\left|t-\frac{14}{45}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left((1-t)a+t\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\int_0^1\left|t-\frac{11}{15}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left((1-t)\frac{3a+b}{4}+t\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^1\left|t-\frac{4}{15}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left((1-t)\frac{a+b}{2}+t\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.+\left(\int_0^1\left|t-\frac{31}{45}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left((1-t)\frac{a+3b}{4}+tb\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$\leq \frac{b-a}{16}\left(\left(\int_0^1\left|t-\frac{14}{45}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left((1-t)^s\left|f'(a)\right|^q+t^s\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$+\left(\int_0^1\left|t-\frac{11}{15}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left((1-t)^s\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+t^s\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\int_0^1\left|t-\frac{4}{15}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left((1-t)^s\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+t^s\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\left.+\left(\int_0^1\left|t-\frac{31}{45}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left((1-t)^s\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+t^s\left|f'(b)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$
$$= \frac{b-a}{16}\left(\left(\int_0^1\left|t-\frac{14}{45}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\int_0^1\left|t-\frac{4}{15}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right)$$
$$= \frac{b-a}{16}\left(\left(\frac{(14)^{p+1}+(31)^{p+1}}{(45)^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{4^{p+1}+(11)^{p+1}}{(15)^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 3.3 ([5]) *Sous les hypothèses du Théorème 3.2, et si $|f'|^q$ est une fonction convexe, on obtient :*

$$\left|\frac{1}{90}\left(7f(a)+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+7f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{16}\left(\left(\frac{(14)^{p+1}+(31)^{p+1}}{(45)^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{4^{p+1}+(11)^{p+1}}{(15)^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).$$

Corollaire 3.4 ([5]) *En utilisant la convexité de $|f'|^q$, le Corollaire 3.3 donne :*

$$\left|\frac{1}{90}\left(7f(a)+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+7f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{16}\left(\left(\frac{(14)^{p+1}+(31)^{p+1}}{(45)^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{3|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+3|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{4^{p+1}+(11)^{p+1}}{(15)^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+3\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).$$

Corollaire 3.5 ([5]) *En utilisant la convexité de $|f'|^q$, le Corollaire 3.4 donne :*

$$\left|\frac{1}{90}\left(7f(a)+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+7f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{16}\left(\left(\frac{(14)^{p+1}+(31)^{p+1}}{(45)^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{7|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(a)|^q+7|f'(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{4^{p+1}+(11)^{p+1}}{(15)^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{5|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3|f'(a)|^q+5|f'(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).$$

Corollaire 3.6 ([5]) *En utilisant l'inégalité des moyennes d'ordre q discrète, le Corollaire 3.5 donne :*

$$\left|\frac{1}{90}\left(7f(a)+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+7f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{8}\left(\left(\frac{(14)^{p+1}+(31)^{p+1}}{(45)^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\frac{4^{p+1}+(11)^{p+1}}{(15)^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.11)$$

$$\leq \frac{b-a}{180}\left(\frac{(14)^{p+1}+(31)^{p+1}+(12)^{p+1}+(33)^{p+1}}{90(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3.12)$$

Théorème 3.3 ([5]) *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f'\in L^1[a,b]$ avec $0\leq a<b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe au second sens pour un certain nombre $s\in\,]0,1]$ fixé et $q\geq 1$, on a :*

$$\left|\frac{1}{90}\left(7f(a)+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+7f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{16}\left(\left(\frac{1157}{4050}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\Omega_{1,s}|f'(a)|^q+\Omega_{2,s}\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{137}{450}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\Omega_{3,s}\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right.\right.$$

$$\left.+\Omega_{4,s}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{137}{450}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\Omega_{4,s}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\Omega_{3,s}\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.+\left(\frac{1157}{4050}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\Omega_{2,s}\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+\Omega_{1,s}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right),$$

où $\Omega_{1,s}, \Omega_{2,s}, \Omega_{3,s}$ et $\Omega_{4,s}$ sont définis par (3.5)-(3.8) respectivement.

Preuve. D'après le Lemme 3.1, l'inégalité des moyennes d'ordre q et la s-convexité de $|f'|^q$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{90}\left(7f(a)+32f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+12f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+32f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+7f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{14}{45}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{14}{45}\right|\left|f'\left((1-t)a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{11}{15}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{11}{15}\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{4}{15}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{4}{15}\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\left.+\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{31}{45}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{31}{45}\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\left(\tfrac{1157}{4050}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{14}{45}\right|\left((1-t)^s|f'(a)|^q+t^s\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+\left(\tfrac{137}{450}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{11}{15}\right|\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\tfrac{137}{450}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{4}{15}\right|\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\left.+\left(\tfrac{1157}{4050}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{31}{45}\right|\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q+t^s|f'(b)|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\left(\tfrac{1157}{4050}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|^q\int_0^1\left|t-\tfrac{14}{45}\right|(1-t)^s dt+\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q\int_0^1\left|t-\tfrac{14}{45}\right|t^s dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+\left(\tfrac{137}{450}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q\int_0^1\left|t-\tfrac{11}{15}\right|(1-t)^s dt+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\int_0^1\left|t-\tfrac{11}{15}\right|t^s dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\tfrac{137}{450}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\int_0^1\left|t-\tfrac{4}{15}\right|(1-t)^s dt+\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q\int_0^1\left|t-\tfrac{4}{15}\right|t^s dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\left.+\left(\tfrac{1157}{4050}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q\int_0^1\left|t-\tfrac{31}{45}\right|(1-t)^s dt+|f'(b)|^q\int_0^1\left|t-\tfrac{31}{45}\right|t^s dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{b-a}{16}\Big(\left(\tfrac{1157}{4050}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\Omega_{1,s}\left|f'(a)\right|^q+\Omega_{2,s}\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\tfrac{137}{450}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\Omega_{3,s}\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q+\Omega_{4,s}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\tfrac{137}{450}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\Omega_{4,s}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+\Omega_{3,s}\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\tfrac{1157}{4050}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\Omega_{2,s}\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q+\Omega_{1,s}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\Big),
\end{aligned}
$$

où $\Omega_{1,s}, \Omega_{2,s}, \Omega_{3,s}$ et $\Omega_{4,s}$ sont définis par (3.5)-(3.8) respectivement. ■

Théorème 3.4 ([5]) *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f'\in L^1[a,b]$ avec $0\leq a<b$. Si $f'(x)$ est bornée, alors on a :*

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{90}\left(7f(a)+32f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+12f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+32f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+7f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\
\leq\ & \tfrac{239(b-a)(M-m)}{6480}.
\end{aligned}
$$

Preuve. D'après le Lemme 3.1, on a :

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{90}\left(7f(a)+32f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+12f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+32f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+7f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\\
=\ & \tfrac{b-a}{16}\Big(\int_0^1\left(t-\tfrac{14}{45}\right)\left(f'\left((1-t)a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}+\tfrac{m+M}{2}\right)dt\\
&+\int_0^1\left(t-\tfrac{11}{15}\right)f'\left(f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{m+M}{2}+\tfrac{m+M}{2}\right)dt\\
&+\int_0^1\left(t-\tfrac{4}{15}\right)\left(f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}+\tfrac{m+M}{2}\right)dt\\
&+\int_0^1\left(t-\tfrac{31}{45}\right)\left(f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)-\tfrac{m+M}{2}+\tfrac{m+M}{2}\right)dt\Big)\\
=\ & \tfrac{b-a}{16}\Big(\int_0^1\left(t-\tfrac{14}{45}\right)\left(f'\left((1-t)a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right)dt\\
&+\int_0^1\left(t-\tfrac{11}{15}\right)f'\left(f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right)dt\\
&+\int_0^1\left(t-\tfrac{4}{15}\right)\left(f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right)dt\\
&+\int_0^1\left(t-\tfrac{31}{45}\right)\left(f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)-\tfrac{m+M}{2}\right)dt\Big), \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

où nous avons pris en considération que

$$\int_0^1 \left(t-\tfrac{14}{45}\right)dt+\int_0^1 \left(t-\tfrac{11}{15}\right)dt+\int_0^1 \left(t-\tfrac{4}{15}\right)dt+\int_0^1 \left(t-\tfrac{31}{45}\right)dt=0.$$

En appliquant la valeur absolue aux deux côtés de (3.13), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{90}\left(7f(a)+32f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+12f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+32f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+7f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\int_0^1 \left|t-\tfrac{14}{45}\right|\left|f'\left((1-t)a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right|dt\right. \\
&+\int_0^1 \left|t-\tfrac{11}{15}\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right|dt \\
&+\int_0^1 \left|t-\tfrac{4}{15}\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right|dt \\
&\left.+\int_0^1 \left|t-\tfrac{31}{45}\right|\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)-\tfrac{m+M}{2}\right|dt\right). \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Puisque $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$\left|f'\left((1-t)a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right| \leq \tfrac{M-m}{2}, \qquad (3.15)$$

$$\left|f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right| \leq \tfrac{M-m}{2}, \qquad (3.16)$$

$$\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right| \leq \tfrac{M-m}{2} \qquad (3.17)$$

et

$$\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)-\tfrac{m+M}{2}\right| \leq \tfrac{M-m}{2}. \qquad (3.18)$$

En substituant (3.15)-(3.18) dans (3.14), on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{90}\left(7f(a)+32f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+12f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+32f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+7f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)(M-m)}{32}\left(\int_0^1 \left|t-\tfrac{14}{45}\right|dt+\int_0^1 \left|t-\tfrac{11}{15}\right|dt+\int_0^1 \left|t-\tfrac{4}{15}\right|dt+\int_0^1 \left|t-\tfrac{31}{45}\right|dt\right) \\
=\ & \tfrac{239(b-a)(M-m)}{6480},
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé

$$\int_0^1 \left|t-\tfrac{14}{45}\right| dt = \int_0^1 \left|t-\tfrac{31}{45}\right| dt = \tfrac{1157}{4050} \text{ et } \int_0^1 \left|t-\tfrac{11}{15}\right| dt = \int_0^1 \left|t-\tfrac{4}{15}\right| dt = \tfrac{137}{450}.$$

La preuve est terminée. ■

Théorème 3.5 ([5]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ telle que $f' \in L^1[a,b]$ avec $0 \leq a < b$. Si f' est une fonction r-L-Hölderienne sur $[a,b]$, on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{90}\left(7f(a) + 32f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right) + 12f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 32f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) + 7f(b)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^{r+1}}{2^{2r+3}(r+1)(r+2)} L\left(\tfrac{180r+(3^r\times 17+21)(r+1)(r+2)}{180} + \tfrac{(14)^{r+2}+(12)^{r+2}+(33)^{r+2}+(31)^{r+2}}{(45)^{r+2}}\right).
\end{aligned}$$

Preuve. D'après le Lemme 3.1, on a :

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{90}\left(7f(a) + 32f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right) + 12f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 32f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) + 7f(b)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \\
=\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\int_0^1 \left(t-\tfrac{14}{45}\right)\left(f'\left((1-t)a + t\tfrac{3a+b}{4}\right) - f'(a) + f'(a)\right) dt\right. \\
&+\int_0^1 \left(t-\tfrac{11}{15}\right)\left(f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right) - f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) + f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right) dt \\
&+\int_0^1 \left(t-\tfrac{4}{15}\right)\left(f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2} + t\tfrac{a+3b}{4}\right) - f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right) dt \\
&\left.+\int_0^1 \left(t-\tfrac{31}{45}\right)\left(f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4} + tb\right) - f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right) + f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right) dt\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\int_0^1 \left(t-\tfrac{14}{45}\right)\left(f'\left((1-t)a + t\tfrac{3a+b}{4}\right) - f'(a)\right) dt\right. \\
&+\int_0^1 \left(t-\tfrac{11}{15}\right)\left(f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right) - f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right) dt \\
&+\int_0^1 \left(t-\tfrac{4}{15}\right)\left(f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2} + t\tfrac{a+3b}{4}\right) - f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right) dt \\
&+\int_0^1 \left(t-\tfrac{31}{45}\right)\left(f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4} + tb\right) - f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right) dt \\
&+f'(a)\int_0^1 \left(t-\tfrac{14}{45}\right) dt + f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\int_0^1 \left(t-\tfrac{11}{15}\right) dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\int_0^1\left(t-\tfrac{4}{15}\right)dt + f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\int_0^1\left(t-\tfrac{31}{45}\right)dt\Bigg) \\
= \; & \tfrac{b-a}{16}\Bigg(\int_0^1\left(t-\tfrac{14}{45}\right)\left(f'\left((1-t)\,a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)-f'(a)\right)dt \\
& +\int_0^1\left(t-\tfrac{11}{15}\right)\left(f'\left((1-t)\,\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)-f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right)dt \\
& +\int_0^1\left(t-\tfrac{4}{15}\right)\left(f'\left((1-t)\,\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)-f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right)dt \\
& +\int_0^1\left(t-\tfrac{31}{45}\right)\left(f'\left((1-t)\,\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)-f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)dt \\
& + \tfrac{17}{90}\left(f'(a)-f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)+\tfrac{7}{30}\left(f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right)\Bigg). \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

En appliquant la valeur absolue aux deux côtés de (3.19), et en utilisant le fait que f' est une fonction r-L-Hölderienne sur $[a,b]$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
& \left|\tfrac{1}{90}\left(7f(a)+32f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)+12f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+32f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+7f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq \; & \tfrac{b-a}{16}\Bigg(\int_0^1\left|t-\tfrac{14}{45}\right|\left|f'\left((1-t)\,a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)-f'(a)\right|dt \\
& +\int_0^1\left|t-\tfrac{11}{15}\right|\left|f'\left((1-t)\,\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)-f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|dt \\
& +\int_0^1\left|t-\tfrac{4}{15}\right|\left|f'\left((1-t)\,\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)-f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|dt \\
& +\int_0^1\left|t-\tfrac{31}{45}\right|\left|f'\left((1-t)\,\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)-f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|dt \\
& + \tfrac{17}{90}\left|f'(a)-f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|+\tfrac{7}{30}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)-f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|\Bigg) \\
\leq \; & \tfrac{b-a}{16}\left(\tfrac{b-a}{4}\right)^r L\Bigg(\int_0^1\left|t-\tfrac{14}{45}\right|t^r dt+\int_0^1\left|t-\tfrac{11}{15}\right|t^r dt+\int_0^1\left|t-\tfrac{4}{15}\right|t^r dt \\
& +\int_0^1\left|t-\tfrac{31}{45}\right|t^r dt+\tfrac{3^r\times 17}{90}+\tfrac{7}{30}\Bigg) \\
= \; & \tfrac{b-a}{16}\left(\tfrac{b-a}{4}\right)^r L\left(\Omega_{2,r}+\Omega_{4,r}+\Omega_{3,r}+\Omega_{1,r}+\tfrac{3^r\times 17}{90}+\tfrac{7}{30}\right) \\
= \; & \tfrac{(b-a)^{r+1}}{2^{2r+3}(r+1)(r+2)}L\left(\tfrac{180r+(3^r\times 17+21)(r+1)(r+2)}{180}+\tfrac{(14)^{r+2}+(12)^{r+2}+(33)^{r+2}+(31)^{r+2}}{(45)^{r+2}}\right),
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé (3.5)-(3.8) en remplaçant le s par r. La preuve est terminée. ■

Corollaire 3.7 ([5]) *Sous les hypothèses du Théorème 3.6, et si f' est une fonction L-Lipschitzienne, nous avons*

$$\left|\frac{1}{90}\left(7f\left(a\right)+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+7f\left(b\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f\left(u\right)du\right|\leq\frac{563(b-a)^2L}{25920}.$$

3.1 Applications

3.1.1 Applications aux quadratures

Soit Υ la partition des points $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ de l'intervalle $[a,b]$ et considérons la formule de quadrature

$$\int_{a}^{b}f\left(u\right)du=\lambda\left(f,\Upsilon\right)+R\left(f,\Upsilon\right),$$

où

$$\lambda\left(f,\Upsilon\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(x_{i+1}-x_i)\left(7f(x_i)+32f\left(\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)+12f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+32f\left(\frac{x_i+3x_{i+1}}{4}\right)+7f(x_{i+1})\right)}{90}$$

et $R(f,\Upsilon)$ désigne l'erreur d'approximation associée.

Proposition 3.1 *Soit $n\in\mathbb{N}$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,b]$ avec $0\leq a<b$ et $f'\in L^1[a,b]$. Si $|f'|$ est convexe, alors on a :*

$$\left|R\left(f,\Upsilon\right)\right|\leq\sum_{i=0}^{n-1}\frac{6453(x_{i+1}-x_i)^2}{87480}\left(\frac{|f'(x_i)|+|f'(x_{i+1})|}{2}\right).$$

Preuve. En appliquant l'inégalité (3.10) du Corollaire 3.2 sur les sous-intervalles

$[x_i, x_{i+1}]$ pour $(i = 0, 1, ..., n-1)$ de la partition Υ, on a :

$$\left|\frac{7f(x_i)+32f\left(\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)+12f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+32f\left(\frac{x_i+3x_{i+1}}{4}\right)+7f(x_{i+1})}{90} - \frac{1}{x_{i+1}-x_i}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(u)\,du\right|$$
$$\leq \frac{6453(x_{i+1}-x_i)}{87480}\left(\frac{|f'(x_i)|+|f'(x_{i+1})|}{2}\right).$$

En multipliant les deux côtés de l'inégalité ci-dessus par $(x_{i+1}-x_i)$, puis en additionnant les inégalités obtenues pour tout $i = 0, 1, ..., n-1$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons le résultat souhaité. ■

Proposition 3.2 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a, b]$ avec $0 \leq a < b$ et $f' \in L^1[a, b]$. Si $|f'|^q$ est convexe, alors on a :*

$$|R(f, \Upsilon)|$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{8}\left(\left(\frac{(14)^{p+1}+(31)^{p+1}}{(45)^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{4^{p+1}+(11)^{p+1}}{(15)^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\frac{|f'(x_i)|^q+|f'(x_{i+1})|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Preuve. En appliquant l'inégalité (3.11) du Corollaire 3.6 sur les sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ pour $(i = 0, 1, ..., n-1)$ de la partition Υ, on a :

$$\left|\frac{7f(x_i)+32f\left(\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)+12f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+32f\left(\frac{x_i+3x_{i+1}}{4}\right)+7f(x_{i+1})}{90} - \frac{1}{x_{i+1}-x_i}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(u)\,du\right|$$
$$\leq \frac{x_{i+1}-x_i}{8}\left(\left(\frac{(14)^{p+1}+(31)^{p+1}}{(45)^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{4^{p+1}+(11)^{p+1}}{(15)^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\frac{|f'(x_i)|^q+|f'(x_{i+1})|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

En multipliant les deux côtés de l'inégalité ci-dessus par $(x_{i+1}-x_i)$, puis en additionnant les inégalités obtenues pour tout $i = 0, 1, ..., n-1$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons le résultat souhaité. ■

3.1.2 Applications aux moyennes spéciales

Pour des nombres réels quelconques a, b, c, on a :

La moyenne arithmétique : $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$ et $A(a, b, c, d) = \frac{a+b+c+d}{4}$.

La moyenne p-logarithmique : $L_p(a,b) = \left(\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right)^{\frac{1}{p}}$, $a,b > 0, a \neq b$ et $p \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$.

Proposition 3.3 *Soit $a,b \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < b$ et $q \geq 1$, alors on a :*

$$\left|7A\left(a^2,b^2\right) + 6A^2(a,b) + 16A^2(a,b,b,b) + 16A^2(a,a,a,b) - 45L_2^2(a,b)\right| \leq \tfrac{239}{72}\left(b^2-a^2\right).$$

Preuve. L'assertion découle de l'inégalité (3.10) du Corollaire 3.2, appliquée à la fonction $f(x) = x^2$. ■

Proposition 3.4 *Soit $a,b \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < b$ et $q \geq 1$, alors on a :*

$$\left|7A\left(a^3,b^3\right) + 6A^3(a,b) + 16A^3(a,b,b,b) + 16A^3(a,a,a,b) - 45L_3^3(a,b)\right| \leq \frac{239(b-a)\left(b^2-a^2\right)}{48}.$$

Preuve. L'assertion découle du Théorème 3.4, appliquée à la fonction $f(x) = x^3$, dont la dérivée $f'(x) = 3x^2$ est comprise entre $3a^2$ et $3b^2$ i.e. $\forall x \in [a,b]$, $3a^2 \leq f'(x) \leq 3b^2$. ■

Conclusion

La problématique de ce mémoire était d'étudier d'une part, certaines inégalités de type Boole et de se familiarisé avec certaines outils nécessaires utiliser dans les démonstrations de ce genre de problèmes, et d'autre part essayer d'établir des nouvelles estimations concernant ce type d'inégalités.

Dans la première partie, nous nous sommes intéressés à rappeler quelques classes de fonctions ainsi que quelques identités.

Dans la seconde partie nous avons étudié quelques inégalités intégrales de type Newton-Cotes à trois points via certains genres de convexités.

Et dans la troisième partie nous avons discuté des nouveaux résultats concernant les inégalités intégrales de type Newton-Cotes à cinq points.

Bibliographie

[1] W. W. Breckner, Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen. (German) Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 23 (1978), no. 37, 13–20.

[2] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić, Means and their inequalities. Translated and revised from the Serbo-Croatian. Mathematics and its Applications (East European Series), 31. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1988.

[3] T. Chiheb, H. Boulares, M. Imsatfia, B. Meftah and A. Moumen, On s-convexity of dual Simpson type integral inequalities. Symmetry, 15 (2023) no.3, 733.

[4] J. Heinonen, Lectures on analysis on metric spaces. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[5] B. Meftah and N. Cheikh, Some Boole type inequalities for differentiable s-convex functions. Submited.

[6] D. S. Mitrinović, Analytic inequalities. In cooperation with P. M. Vasić. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 165 Springer-Verlag, New York-Berlin 1970.

[7] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Classical and new inequalities in analysis. Mathematics and its Applications, 61. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[8] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Inequalities for functions and their integrals and derivatives, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.

[9] J. E. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Mathematics in Science and Engineering, 187. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[10] M. Z. Sarikaya, E. Set and M. E. Özdemir, On new inequalities of Simpson's type for convex functions, RGMIA Res. Rep. Coll. 13 (2) (2010) Article 2.