République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP et Analyse Numérique**

Par : **Bouzid Bochra**

Intitulé

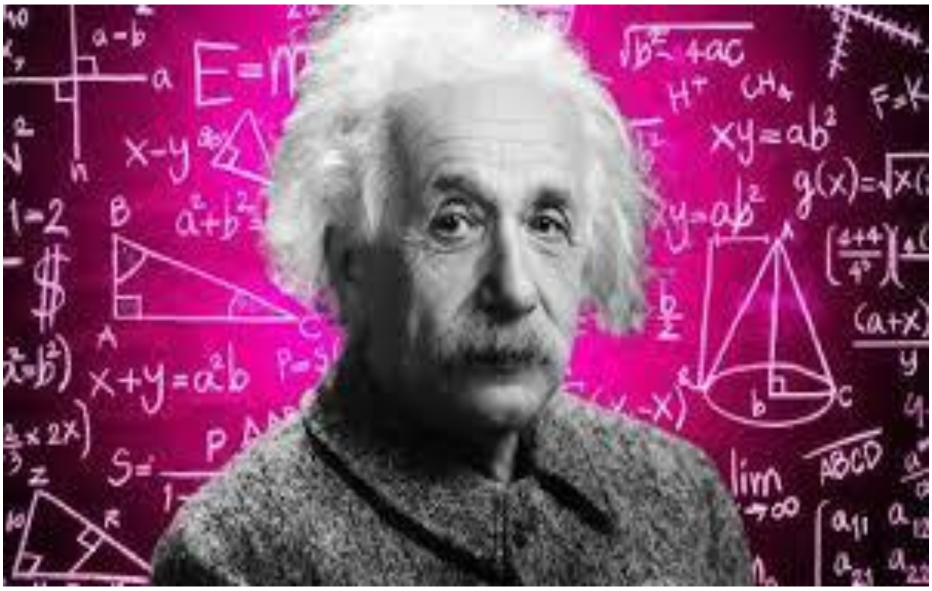
Contrôlabilité exacte et totale des systèmes linéaires en dimension finie

Dirigé par : **Pr. BADRAOUI Salah**
Directeur du Laboratoire d'Analyse et Contrôle des Equations Différentielles « ACED »

Devant le jury

Président	**Dr. Hamlaoui Abdelhamid**	**Univ. 8 Mai 1945 Guelma**
Rapporteur	**Pr. Badraoui Salah**	**Univ. 8 Mai 1945 Guelma**
Examinateur	**Dr. Benarioua Khadir**	**Univ. 8 Mai 1945 Guelma**

Session Juin 2023



Education is not the learning of facts, but training the mind to think .

Albert Einstein

التعليم ليس تعلم الحقائق، بل هو تدريب العقل على التفكير.

ألبرت اينشتاين

Table des matières

Dédicace **2**

Remerciements **3**

Résumé **4**

Abstract **5**

Abstract in Arabic **6**

Introduction **7**

1 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes **9**

1.1 Introduction 9

1.2 Recherche de l'exponentielle d'une matrice 10

1.2.1 Méthode de Laplace 10

1.2.2 Méthode de Sylvester 13

1.3 Critères de contrôlabilité 15

2 Contrôlabilité des systèmes linéaires instationnaires **23**

2.1 Introduction 23

2.2 Systèmes différentiels instationnaires sans second membre 24

2.2.1 Introduction 24

2.2.2 Existence globale et unicité 25

2.3 Systèmes différentiels lineaires instationnaires avec second membre . . 29

2.3.1 Introduction 29

2.3.2 Résolution des systèmes différentiels lineaires instationnaires avec second membre 30

2.4 Contrôlabilité des systèmes instationnaires 32
2.4.1 Définitions et Proposition 32
2.4.2 Résultats prélimintaires sur la contrôlabilité 33
2.4.3 Le Grammien de contrôlabilité 36
2.4.4 Application 39

3 Contrôlabilité totale des systèmes linéaires 43

3.1 Définitions 44
3.1.1 Matrices strictement positives 44
3.2 Critères de contrôlabilité totale 46
3.3 Application 48

Perspectives 50

Références 51

Dédicace

Je dédie cet humble travail de recherche à mes chers parents pour leurs sacrifices, leurs efforts, leur amour et leurs prières tout au long de mes études.

A mon cher mari pour son aide, sa patience et ses encouragements.

A mes très chères soeurs et mon adorable frère pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

A mes chères nièces : Afnen - Aden - Younes - Abdrrahmene - Safia - Mohamed Mouslem.

A toute les personnes que j'aime.

✍

Remerciements

*Avant tout nous adressons nos remerciements à **ALLAH** , le tout puissant pour la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il nous a donné durant cette année d'études et pour la réalisation de ce travail que nous espérons être utile.*

*En premier lieu, Nos vifs remerciements s'adressent à **Mr. Hamlaoui Abdelhamid** d'avoir lieu accepté de présider le jury.*

*Nous tenons à remercier notre encadreur **Mr. Badraoui Salah** pour l'orientation, la confiance, la patience qui a constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port. Qu'il trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité.*

*Nous tenons à remercier **Mr. Benarioua Khadir** d'avoir accepté d'examiner cette modeste contribution et de l'enrichir par ses propositions.*

Nous adressons également nos remerciements à nos parents pour leur contribution par leur soutien et leur patience.

Résumé

La contrôlabilité *est une notion très importante dans les sciences appliquées surtout en sciences de l'ingénieur.*

Ce mémoire de Master en Mathématques traite la notion de contrôlabilité des systèmes différentiels linéaires en dimension finie.

Le mémoire est composé d'une introduction, trois chapitres et perspectives.

Dans l'Introduction nous expliquons de façon très brève la notion de contrôlabilité et ses vastes domaines d'applications.

Dans le Premier chapitre, nous traitons la contrôlabilité des systèmes différentiels inéaires autonomes en dimension finie.

Dans le Deuxième chapitre, nous traitons la contrôlabilité des systèmes différentiels linéaires instationnaires en dimension finie.

Dans le Trosième chapitre, nous traitons la contrôlabilité totale des systèmes différentiels linéaires en dimension finie.

Comme Perspectives, l'étude de la contrôlabilité des systèmes différentiels non-linéaires en dimension finie sera un complément très intéressant de ce mémoire.

Abstract

Controllability *is a very important concept in applied sciences, especially in engineering sciences.*

This Master's thesis in Mathematics deals with the notion of controllability of linear differential systems in finite dimension.

The thesis is composed of an Introduction, three Chapters and Perspectives.

In the first chapter, we deal with the controllability of finite dimensional autonomous linear differential systems.

In the second chapter, we deal with the controllability of autonomous linear differential systems in finite dimension.

In the second chapter, we deal with the controllability of nonautonomous linear differential systems in finite dimension.

In the third chapter, we deal with the total controllability of finite dimensional linear differential systems.

As Perspectives, the study of the controllability of non-linear differential systems in finite dimension will be a very interesting complement to this thesis.

ملخـص

يعد مفهوم قابلية التحكم مفهوما مهما للغاية في العلوم التطبيقية، خاصة في علوم المهندس.

تتناول أطروحة الماستر في الرياضيات هذه مفهوم التحكم في الأنظمة الخطية ذات البعد المنتهي.

في الفصل الأول نعالج قابلية التحكم في الأنظمة التفاضلية الخطية الذاتية ذات البعد المنتهي.

في الفصل الثـاني نعالج قابلية التحكم في الأنظمة التفاضلية الخطية غير الذاتية ذات البعد المنتهي.

في الفصل الثـالث ندرس قابلية التحكم التام في الأنظمة التفاضلية الخطية غير الذاتية ذات البعد المنتهي.

كافاق مستقبلية ، فإن دراسة قابلية التحكم في الأنظمة غير الخطية ذات البعد المنتهي تكون مكملاً هاما للغاية لهذه المذكرة.

Introduction

Un système de contrôle est un système dynamique sur lequel on peut agir au moyen d'un contrôle (commande) qui s'appelle aussi entrée (input en Anglais) pour arriver à un état désiré qui s'appelle sortie (output en Anglais). Comme exemples :

Une voiture sur laquelle on agit avec les pédales d'accélération et de frein pour arriver à une vitesse souhaitée, un satellite, une navette spatiale, un robot, une réction chimique, . . . sont des systèmes dynamiques.

La plupart de ces systèmes physiques, mécaniques, chimiques, biologiques, . . . se modélisent par des équations mathématiques : équations différentielles ordinaires, équations aux dérivées partielles, équations intégrales, . . .

La théorie du contrôle est donc un domaine des Mathématiques qui traite ces équations. Un problème de contrôlabilité est alors de chercher - s'il est possible - une loi de contrôle à travers ces équations pour amener le système d'un éatat initial vers un état désiré.

Il se peut que le problème de contrôlabilité se résout par plusieurs contrôles. Si on peut trouver parmi ces contrôles un contrôle qui miminise ou maximise un certain critère selon nos besoins (énergie, interêt, . . .), nous sommes alors devant un problème de contrôle optimal.

Dans ce mémoire de Master, nous détaillons des résultats connus sur :

La contrôlabilibité exacte des systèmes différentiels linéaires autonomes, c'est l'objet du premier chapitre.

La contrôlabilibité exacte des systèmes différentiels linéaires instationnaires, c'est l'objet du deuxième chapitre.

La contrôlabilibité totale des systèmes différentiels linéaires instationnaires, c'est l'objet du troisième chapitre.

Notations

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des nombres naturels.
- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.
- $M_{n,m}(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices à termes réels à n lignes et m colonnes.
- $M_n(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à termes réels.
- $L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$: l'espace de Hilbert défini par :

$$L^2(0,T;\mathbb{R}^m) = \left\{ u : (0,T) \longrightarrow \mathbb{R}^m : \int_0^T |u(s)|^2 \, ds < \infty \right\}$$

où $u(s) = (u_1(s), \ldots, u_m(s))$ et $(s)|^2 = \sum_{j=1}^{m} u_j^2(s)$.
Le produit scalaire $\langle .,. \rangle_1$ défini sur $L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ est défini par : pour $u = (u_1, \ldots, u_m)$ et $v = (v_1, \ldots, v_m) \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$: $\langle u, v \rangle_1 = \sum_{j=1}^{n} \int_0^T u_j(s)v_j(s)ds$

- $ran(A)$: l'image de l'opérateur linéaire A.
- $ker(A)$: le noyau de l'opérateur linéaire A.
- M^{-1} : la matrice inverse de M.
- M^{τ} : la transposée de la matrice M.
- x^{τ} : la transposée du vecteur colonne x.

Chapitre 1

Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous traitons la contrôlabilité des systèmes de contrôle linéaires autonomes en dimension finie donnée par :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad t > 0 \\ y(0) = y^0 \end{cases} \tag{1.1}$$

où :

$I =]0, \alpha[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \cup \{\infty\}$.
$A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.
$y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $u : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$.
$y^0 \in \mathbb{R}^n$ est la donnée initiale.
La fonction $u \in L^2(I, \mathbb{R}^m)$ est appelée contrôle ou entrée du système (1.1).
$L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ est l'espace de Hilbert définie par :

$$L^2(I, \mathbb{R}^m) = \left\{ u : I \longrightarrow \mathbb{R}^m : \int_I |u(t)|^2 \, dt < \infty \right\} \tag{1.2}$$

où $|u(t)|^2 = \sum_{j=1}^{m} u_j^2(t)$ (le carrée de la norme de $u(t)$ dans $\mathbb{R}^m$).
La solution du systéme différentiel dépend de la donnée initiale et du second membre

et peut s'exprimer par la formule :

$$y(t, y^0, u) = e^{At}y^0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds, \ t \in I \tag{1.3}$$

Dans ce qui suit, on convient de noter $T > 0$ au lieu de $T \in \mathbb{R}_+^*$.

1.2 Recherche de l'exponentielle d'une matrice

Il y a plusieurs méthodes pour calculer l'exponentielle d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dans ce paragraphe nous allons exposer deux méthodes : méthode de la transformation de Laplace et méthode de Sylvester.

1.2.1 Méthode de Laplace

Soit $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 1.1

La transformée de Laplace de f notée $\widehat{f}(s) = L(f)(s)$ est la fonction (si elle existe) définie par :

$$\widehat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

Remarque 1.1. $L(f)$ existe sil elle est localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et il existe deux constantes $c \geq 0$ et $\sigma \in \mathbb{R}$ telles que :

$$|f(t)| \leq ce^{\sigma t}, \text{ pour tout } t \geq 0$$

Propriétés 1.1.

Propriété 1. L est linéaire :

$$L(f + g) = L(f) + L(g) \text{ et } L(cf) = cL(f), \ c \in \mathbb{R} \text{ constante.}$$

Propriété 2. Transformée d'une translation : $L\{f(t-a)\} = e^{-as}L(f(t))$, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Propriété 3. $L(e^{at}f) = L(f)(s-a)$, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Propriété 4. Transformée d'une homothétie : : $L\{f(at)\} = \frac{1}{a}L(f)(\frac{s}{a})$, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Exemples 1.1. (fondamentaux)

Exemple 1. $L(1) = \frac{1}{s}$.

Exemple 2. $L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$, $s > a$.

Exemple 3. $L(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2}$, pour toute constante $a \in \mathbb{R}$.

Exemple 4. $L(\sin \alpha t) = \frac{\alpha}{s^2+a^2}$, pour toute constante $a \in \mathbb{R}^*$

Définition 1.2

Si $L(f)(s) = g(s)$ on écrit $L^{-1}(g)(s) = f(t)$.

Par exemple : $L^{-1}(\frac{1}{s-a}) = e^{at}$.

L^{-1} est linéaire : $L^{-1}(f+g) = L^{-1}(f) + L^{-1}(g)$ et $L^{-1}(cf) = cL^{-1}(f)$.

Exemples 1.2.

Exemple 1. $L^{-1}(\frac{1}{s}) = 1$.

Exemple 2. $L^{-1}(\frac{1}{s-a}) = e^{at}$, pour toute constante $a \in \mathbb{R}$.

Exemple 3. $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = \cos at$, pour toute constante $a \in \mathbb{R}^*$.

Exemple 4. $L^{-1}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right) = \sin at$, pour toute constante $a \in \mathbb{R}^*$.

Propriété 1.2.

$$L(f') = sL(f) - f(0)$$

par conséquent :

$$L(f) = \frac{L(f') + f(0)}{s}$$

Appliquons cee résultat on aura par récurence :

$$L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Théorème 1.1

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors :

$$e^{At} = L^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\} \tag{1.4}$$

Démonstration. Soit $\Phi(t) = e^{At}$, alors $\Phi(t)$ est une solution de l'équations matricielle :

$$\begin{cases} \Phi'(t) = A\Phi(t) \\ \Phi(0) = I \end{cases} \tag{1.5}$$

car $\Phi'(t) = Ae^{At} = A\Phi(t)$ et $\Phi(0) = e^0 = I$.

Prenons la trasformation de Laplacde de l'équation $\Phi'(t) = A\Phi(t)$:

$$L(\Phi'(t)) = L(A\Phi(t)).$$

D'après la propriété 1.2 :

$$L(\Phi'(t)) = sL(\Phi(t)) - \Phi(0) = sL(\Phi(t)) - I.$$

Comme $L(A\Phi(t)) = AL(\Phi(t))$, on obtient :

$$sL(\Phi(t)) - I = AL(\Phi(t)),$$

ceci donne l'expression (1.4).

Exemple 1.3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

On a : $sI - A = \begin{pmatrix} s-1 & -1 \\ 1 & s-3 \end{pmatrix}$ et $(sI-A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{s-3}{(s-2)^2} & \frac{1}{(s-2)^2} \\ \frac{-1}{(s-2)^2} & \frac{s-1}{(s-2)^2} \end{pmatrix}$.

Calculons les transformées de Laplace des termes de la matrice $(sI - A)^{-1}$:

(*) On a :$\frac{s-3}{(s-2)^2} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2}$, $L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) = e^{2t}$ et comme $L(t) = \frac{1}{s^2}$ et

$L(e^{at}f) = L(f)(s-a)$, alors $L(e^{2t}t) = \frac{1}{(s-2)^2} \Longrightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2}\right) = te^{2t}$ et :

$$L^{-1}\left(\frac{s-3}{(s-2)^2}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2}\right) = e^{2t} - e^{2t}t = (1-t)e^{2t}.$$

(*) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2}\right) = te^{2t}$.

(*) $L^{-1}\left(\frac{-1}{(s-2)^2}\right) = -L^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2}\right) = -te^{2t}$.

(*) $L^{-1}\left(\frac{s-1}{(s-2)^2}\right) = L^{-1}\left(\frac{s-2}{(s-2)^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2}\right) =$

$e^{2t} + te^{2t} = (1+t)\,e^{2t}$.

Donc :

$$e^{At} = \begin{pmatrix} (1-t)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1+t)\,e^{2t} \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

1.2.2 Méthode de Sylvester

Cette méthode est basée sur le théorème de Cayley-Hamilton : $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une racine de son polynôme caractéristique. Comme conséquence, toutes les puissance A^k avec $k \geq n$ s'écrit comme combinaison linéaire de I, A, $A^2, \ldots,$ A^{n-1}, et par conséquent, il existe n constantes $\{\alpha_j\}_{j=0}^{n-1}$ telles que :

$$e^A = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j A^j \tag{1.7}$$

Soit $f(A) = e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j$. D'après la relation (1.7) :

$$f(A) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j A^j \equiv S(A) \tag{1.8}$$

Donc, pour calculer e^A il suffit de trouver les coefficients $\{\alpha_j\}_{j=0}^{n-1}$.

Soit (λ_k, v) une paire propre, i.e ; $Av = \lambda_k v$ ($v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$), alors :

$$f(A)v = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j v = S(A)v = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j A^j v \tag{1.9}$$

Mais $A^j v = \lambda_k^j v$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda_k^j v = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \lambda_k^j v \tag{1.10}$$

ce qui montre que

$$f(\lambda_k) = e^{\lambda_k} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \lambda_k^j \equiv S(\lambda_k) \tag{1.11}$$

On démontre que si λ_k est une valeur propre de multiplicité algébrique $m \geq 2$, à cette valeur correspondent m équations algébriques :

$$\begin{aligned} f(\lambda_k) = S(\lambda_k),\ \frac{d}{d\lambda} f(\lambda_k) = \frac{d}{d\lambda} S(\lambda_k),\ \ldots, \\ \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} f(\lambda_k) = \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} S(\lambda_k) \end{aligned} \tag{1.12}$$

où :

$$f(\lambda) = e^{\lambda} \ \text{ et } \ S(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \lambda^j.$$

De cette façon on aura n équations à n inconnues : $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$.

De manière analogue on peut calculer e^{At}, en remarquant que les valeurs propres de At $(t \neq 0)$ sont les valeurs propres de A multipliées par t.

Exemple 1.4. Prenons la même matrice que nous avons pris dans l'exemple 1.3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique $p_\lambda(A) = (\lambda - 2)^2 \Longrightarrow \lambda_1 = 2$ est une valeur propre de multiplicité $m = 2$. Donc $\lambda_1 = 2t$ est une valeur propre de multiplicité $m = 2$ de la matrice At.

D'après ce qui précède :

$$f(At) \equiv e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 At \equiv S(At) \tag{1.13}$$

Sachant que $f(\lambda) = e^{\lambda}$ et $S(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$, les coefficients α_0, α_1 se déterminent du système algébrique suivant :

$$\begin{cases} f(\lambda_1) = S(\lambda_1) \\ \frac{d}{d\lambda} f(\lambda_1) = \frac{d}{d\lambda} S(\lambda_1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e^{\lambda_1} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 \\ e^{\lambda_1} = \alpha_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} e^{2t} = \alpha_0 + \alpha_1 (2t) \\ e^{2t} = \alpha_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = (1-2t)e^{2t} \\ \alpha_1 = e^{2t} \end{cases}$$

Par conséquent :

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A t e^{2t} = (1-2t)e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (1-t)\, e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1+t)\, e^{2t} \end{pmatrix}.$$

1.3 Critères de contrôlabilité

Définition 1.3

Soit y^0, $y^1 \in \mathbb{R}^n$. On dit que le contrôle u transfère un état y^0 à un état y^1 au temps $T > 0$ si :

$$y(t, y^0, u) = y^1.$$

Définition 1.4

On dit que le système (1.1) est contrôlable au temps $T > 0$, si pour tout y^0, $y^1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tel que $y(t, y^0, u) = y^1$. On dit aussi que la paire (A, B) est contrôlable au temps $T > 0$.

Considérons sur $[0, T]$ le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay + Bu, \;\; t \in]0, T] \\ y(0) = y^0 \end{cases} \tag{1.14}$$

La solution peut s'écrire pour tout $t \in [0, T]$:

$$y(t, y^0, u) = y^0 + L_t u$$

où L_t est l'opérateur linéaire définie par :

$$\begin{aligned} L_t : L^2(0, T; \mathbb{R}^m) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longrightarrow \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s)ds \end{aligned} \tag{1.15}$$

Définition 1.5

L'ensemble des points accessible à partir de y^0 dans un temps $T > 0$ est l'ensemble :

$$Acc(y^0, T) = \{y^1 \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \exists \text{ un contôle } u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \text{ vérifiant } y(T, y^0, u) = y^1\}$$

$Acc(y^0, T)$ se note aussi $R(y^0, T)$.

Exemple 1.5. Etudions la contrôlabilité du système de contrôle suivant :

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = y_2 + u \end{cases} \tag{1.16}$$

Le système (1.16) équivaut à

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$A \in M_2(\mathbb{R})$ et $B \in M_{2,1}(\mathbb{R})$.

Soit $y^0, y^1 \in \mathbb{R}^2$, existe-t-il un contrôle $u \in L^2([0, T], \mathbb{R})$ tel que $y(T, y^0, u) = y^1$, où $y(t, y^0, u)$ est la solution de (1.16) ?.

Soit $y^0 = \binom{y_1^0}{y_2^0}$, $y^1 = \binom{y_1^1}{y_2^1}$:

$$(1.16) \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = y_2 + u \\ y_1(0) = y_1^0;\ y_2(0) = y_2^0 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_1(0) = y_1^0 \end{cases} \Longrightarrow y_1(t) = e^{2t} y_1^0,$$

et

$$\begin{cases} y_2' = y_2 + u \\ y_2(0) = y_2^0 \end{cases} \Longrightarrow y_2(t) = e^t y_2^0 + \int_0^t e^{(t-s)} u(s) ds.$$

Donc la solution de (1.16) est :

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{2t} y_1^0 \\ y_2(t) = e^t y_2^0 + \displaystyle\int_{t_0}^t e^{(t-s)} u(s) ds \end{cases}$$

Soit $y^1 = \binom{y_1^1}{y_2^1} \in \mathbb{R}^2$, alors

$$y(T, y^0, u) = y^1 \Longrightarrow \begin{cases} y_1(T) = y_1^1 \\ y_2(T) = y_2^1 \end{cases}$$

Mais $y_1(T) = y_1^1 \Longrightarrow e^{2T} y_1^0 = y_1^1$, ce n'est pas vrai, car si on prend $y_1^0 = 0$; $y_1^1 = 1(\neq 0)$ on obtiendra $e^{2T} y_1^0 = y_1^1 \Longrightarrow e^{2t}.0 = 1$. On conclut que le système (1.16) n'est pas contrôlable.

Proposition 1.2

Le systéme (1.1) est contrôlable en $T > 0$ si et seulement si l'opérateur $L_T : L^2(0, T, \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ défini par :

$$u \longrightarrow L_T u = \int_0^T e^{(T-s)A} B u(s) ds$$

est surjectif.

Démonstration.

La nécessité. Supposons que le système (1.1) est controlable en $T > 0$, Montrons que L_T est surjectif :

Soit $y^* \in \mathbb{R}^n$; cherchons $u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m)$ tel que $L_T u = y^*$.

Comme (1.1) est contrôlable en $T > 0$, alors :

pour $y^0 = 0$; $y^1 = y^* \in \mathbb{R}^n$, $\exists u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tel que : $y(T, 0, u) = y^*$,c.-à-d. :

$$e^{AT} y^0 + \int_0^T e^{A(T-s)} Bu(s)ds = y^*,$$

c.-à-d. :

$$\int_0^T e^{A(T-s)} Bu(s)ds = y^*.$$

Donc, pour $y^* \in \mathbb{R}^n$, $\exists u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m)$: $L_T u = y^*$.

Alors L_T est surjectif.

La suffisance. Supposons que L_T est surjectif :

$$\text{pour tout } y^* \in \mathbb{R}^n, \ \exists u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m) : L_T u = y^*.$$

Soit $y^0, y^1 \in \mathbb{R}^n$. Prenons $y^* = y^1 - e^{At} y^0 \in \mathbb{R}^n$.

Comme L_T est surjectif : $\exists u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m)$: $L_T u = y^*$,
c.-à-d. : $\exists u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m)$: $L_T u = y^1 - e^{At} y^0 \Leftrightarrow e^{At} y^0 + L_T u = y^1 \Longleftrightarrow$

$e^{At} y^0 + L_T u = y(T, y^0, u) = y^1$.

Alors, le système (1.1) est contrôlable en $T > 0$.

Définition 1.6

Le systéme (1.1) est dit contrôlable à zéro en $T > 0$ si :

$$\text{pour tout } y^0 \in \mathbb{R}^n, \ \exists u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m) : y(T, y^0, u) = 0.$$

Proposition 1.3

La controlabilité du systéme (1.1) en $T > 0$ est équivalente à la contrôlabilité à zéro en $T > 0$.

Démonstration.

La nécessité. Si le systéme (1.1) est contrôlable :

pour tout $y^0, y^1 \in \mathbb{R}^n$, $\exists u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m) : y(T) = y^1$, c.-à-d. : $e^{AT}y^0 + L_T u = y^1$.
Il suffit de prendre $y^1 = 0$; donc, il existe $u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m)$ tel que $y(T) = 0$. Alors, le systéme (1.1) est contrôlable à zéro.

La suffisance. Si le sytéme (1.1) est contrôlable à zéro :

$$\text{pour tout } y^* \in \mathbb{R}^n, \exists u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m) : y(T, y^*, u) \equiv e^{AT}y^* + L_T u = 0$$

Soit $y^0, y^1 \in \mathbb{R}^n$, cherchons $u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m)$ tel que : $y(T, y^0, u) = e^{AT}y^0 + L_T u = y^1$.

On a :

$$e^{AT}y^0 + L_T u = y^1 \iff e^{AT}y^0 - y^1 + L_T u = 0$$

$$\iff e^{AT}(y^0 - e^{AT}y^1) + L_T u = 0.$$

Comme (1.1) est contrôlable à zéro, alors pour $y^* = y^0 - e^{-AT}y^1 \in \mathbb{R}^n$, $\exists u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m) : y(T, y^*) = 0$.

c.-à-d. : $\exists u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m) : e^{AT}(y^0 - e^{-AT}y^1) + L_T u = 0$,

c.-à-d. : $\exists u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m) : e^{AT}y^0 + L_T u = y^1$.

Donc, (1.1) est contrôlable .

Théorème 1.4 (Critère de Kalman)

systéme linéaire (1.1) est contrôlable en temps $T > 0$ si et seulement si la condition de Kalman suivante est vérifiée :

$$rang K \equiv rang \left[B \vdots AB \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B \right] = n.$$

Ce critère est une caractérisation purement algébrique due au Mathématicien hongrois Imre Kalman en 1960.

Démonstration.

Ce résultat est basé sur la formule de Sylvester : pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $\alpha_0(t), \ldots, \alpha_{n-1}(t) \in \mathbb{R}$:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k \tag{1.18}$$

La démonstration de cette formule se déduit du théorème de Cayley-Hamilton : chaque matrice carrée est une racine de son polynôme caractéristique : $p_A(A) = 0$, où p_A est le polynôme caractéristique de A.

Comme la contrôlabilité de (1.1) équivaut à la contrôlabilité à zéro, alors (1.1) est contrôlable en $T > 0$ si et seulement si , pour tout $y^0 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u tel que : $e^{AT}y^0 + \displaystyle\int_0^T e^{A(T-s)} B(s)u(s)ds = 0$, ceci équivaut à :

$$y^0 = -\int_0^T e^{-AT} B(s)u(s)ds = 0 \tag{1.19}$$

D'après (1.18) :

$$y^0 = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^T \beta_k(s)u(s)ds \tag{1.20}$$

où $\beta_k(s) = -\alpha_k(-s)$. Posons $\displaystyle\int_0^T \beta_k(s)u(s)ds = \gamma_k \in \mathbb{R}^n$ on obtient :

$$y^0 = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \gamma_k \tag{1.21}$$

Mais $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \gamma_k = K\gamma$ où $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nm}$.

Par conséquent, (1.1) est contrôlable en $T > 0$ si et seulement si , pour tout $y^0 \in \mathbb{R}^n$, il existe $\gamma \in \mathbb{R}^{nm}$ tel que $y^0 = K\gamma$.

C'est-à-dire K est une application linéaire (matrice) surjective de $\mathbb{R}^{nm}$ dans $\mathbb{R}^n$, ce qui donne $\operatorname{Im} K = \mathbb{R}^n$, donc $\dim(\operatorname{Im} K) = n$, alors $rangK = n$.

Remarques 1.2.

Remarque 1. La matrice K se nomme Matrice de Kalman et la condition rang$K = n$ se nomme Condition de Kalman.

Remarque 2. Le critère de Kalman ne dépend ni du temps T ni de la donnée initiale y^0. Autrement dit, si un systéme linéaire autonome est contrôlable en temps T à partir de y^0 , alors il est contrôlable en tout temps $T > 0$ à partir de tout point $y^0 \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.6. Soit le système de contrôle suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \ t \in I \\ y(0) = y^0 \end{cases}$$

où les matrices A et B sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le système est contrôlable si la matrice de contrôlabilité est de rang maximal. On a :

$$K = [B, AB] = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\det K = 4 \neq 0$, donc $rangK = 2$. Le système est alors contrôlable.

Exemple 1.7. Soit le systéme input-output suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t) \\ y(0) = y^0 \end{cases} \tag{1.22}$$

où $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Discutons selon les valeurs réelles de α et β la contrôlabilité de ce système.

Le système (1.22) est un systéme de contrôle linéaire autonome.

Appliquons le critère de Kalman :

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$K = \left[B \vdots AB \right] = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \beta \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \beta \\ 0 & 2 - (\alpha + \beta) \end{pmatrix}.$$

$rangK = 2$ ($=$ l'ordre de A) $\Longleftrightarrow 2 - (\alpha + \beta) \neq 2$.

Donc, (1.22) est contrôlable si et seulement si $\alpha + \beta \neq 2$.

Chapitre 2

Contrôlabilité des systèmes linéaires instationnaires

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons traiter la contrôlabilité des systèmes de contrôle linéaires instationnaires en dimension finie donnée par :

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t), \quad t > 0 \\ y(0) = y^0 \end{cases} \tag{2.1}$$

où :

$I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $t_0 \in I$.

$A(t) \in M_n(\mathbb{R})$ et $B(t) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, pour tout $t \in I$.

$y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $u : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sont deux applications.

$y^0 \in \mathbb{R}^n$ est la donnée initiale.

La fonction $u \in L^2(I, \mathbb{R}^m)$ est appelée contrôle ou entrée du système (2.1).

$L^2(I; \mathbb{R}^m)$ est l'espace de Hilbert défini par :

$$L^2(I, \mathbb{R}^m) = \left\{ u : I \longrightarrow \mathbb{R}^m : \int_I |u(t)|^2 \, dt < \infty \right\} \tag{2.2}$$

où $|u(t)|^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} u_j^2(t)$ (le carrée de la norme de $u(t)$ dans $\mathbb{R}^m$).

2.2 Systèmes différentiels instationnaires sans second membre

2.2.1 Introduction

Considérons le système différentiel linéaire instationnaire sans second membre dans $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t), \ t \in I \\ y(t_0) = y^0 \end{cases} \tag{2.3}$$

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $t_0 \in I$.

$t \longmapsto A(t)$ est une application de classe C^k $(k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ de I dans $M_n(\mathbb{R})$.

Notons qu'une solution de (2.3) sera forcément de classe C^{k+1}.

Définition 2.1

La résolvante du problème (2.3) est la solution unique de l'équation différentielle matricielle :

$$\begin{cases} \frac{dS(t,t_0)}{dt} = A(t)S(t,t_0), \ t \in I \\ S(t_0,t_0) = I \end{cases} \tag{2.4}$$

où $S(t,t_0) \in M_n(\mathbb{R})$ et I est la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$.

Pourquoi on cherche la résolvante : Si on connait la solution $S(t,t_0)$ de (2.4), alors la solution du problème (2.3) se donne par l'expression :

$$y(t) = S(t,t_0)y^0 \tag{2.5}$$

En effet :

$$\begin{cases} y' = A(t)S(t,t_0)y^0 = A(t)y(t) \\ y(t_0) = S(t_0,t_0)y^0 = Iy^0 = y^0 \end{cases}$$

Si $t_0 = 0$, on note $S(t) = S(t,0)$ et l'expression de la solution devient :

$$y(t) = S(t)y_0 \tag{2.6}$$

Si $A(t) = A$ matrice constante, on a : $S(t,t_0) = e^{(t-t_0)A}$.

Si $A(t) = A$ matrice constantei et $t_0 = 0$, on a : $S(t) = e^{At}$ et $S(t-t_0) = e^{A(t-t_0)} = S(t)S^{-1}(t_0)$.

2.2.2 Existence globale et unicité

Théorème 2.1

Soit $t_0 \in I$ et $y^0 \in \mathbb{R}^n$. Il existe une unique solution y de l'equation (2.3). La solution est definie sur I tout entier.

Démonstration.

La preuve de ce théorème repose sur la remarque suivante :

y est solution de (2.3) si et seulement si y est continue et verifie l'équation intégrale :

$$y(t) = y^0 + \int_{t_0}^{t} A(s)y(s)ds, \text{ pour tout } t \in I \tag{2.7}$$

c'est-à-dire, si y est un point fixe de l'application

$$y \longmapsto Ly : (Ly)(t) = y^0 + \int_{t_0}^{t} A(s)y(s)ds \tag{2.8}$$

Ainsi, ce théorème est un resultat du principe de point fixe.

Supposons que $I = [a,b]$ compact.

Soit $X = C(I,\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Il est connu que X est un espace de Banach pour la norme $\|y\| = \sup\limits_{t\in I} |y(t)|$ où $|y(t)|$ est une norme de $y(t)$ dans $\mathbb{R}^n$, par exemple :

$$|y(t)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2(t)}.$$

Nous avons alors l'application L :

$$\begin{aligned} & L : X \longrightarrow X \\ & y \longmapsto Ly : Ly(t) = y^0 + \int_{t_0}^{t} A(s)y(s)ds \end{aligned} \tag{2.9}$$

$(*)$ Soit y, $z \in X$ et $t \in I$:

$$\begin{aligned} |Ly(t) - Lz(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} A(s) \left[y(s) - z(s) \right] ds \right| \\ &\leq \|A\| \int_{t_0}^{t} \|(y - z)(s)\| \, ds \\ &\leq |t - t_0| \, . \, \|A\| \, . \, \|y - z\| \end{aligned} \tag{2.10}$$

où :

$$\|A\| = \max_{t \in I} \|A(t)\| \, , \|y - z\| = \max_{t \in I} |y(t) - z(t)| \ \ .$$

On voit que :

$$\|Ly - Lz\| \leq (b - a) \|A\| \, \|y - z\| \, , \tag{2.11}$$

ce qui prouve que L est continue de X dans lui-même.

$(*)$ Pour $m \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$ on note $L^m = L^{m-1} \circ L$, on obtient par les mêmes calculs :

$$\begin{aligned} \left| L^2 y(t) - L^2 z(t) \right| = |L(Ly(t)) - L(Lz(t))| &\leq \|A\| \int_{t_0}^{t} \|Ly - Lz\| \, ds \\ &\leq \|A\| \, \|A\| \, \|y - z\| \int_{t_0}^{t} |s - t_0| \, ds \\ &\leq \|A\|^2 \, . \frac{1}{2} (b - a)^2 \, \|y - z\| \end{aligned} \tag{2.12}$$

Par récurrence, on obtient :

$$\|L^m y(t) - L^m z(t)\| \leq \|A\|^m \, \frac{(b - a)^m}{m!} \, \|y - z\| \, , \tag{2.13}$$

ce qui implique que :

$$\|L^m y - L^m z\| \leq \frac{(b-a)\,\|A\|^m}{m!}\,\|y-z\|\,. \tag{2.14}$$

$(*)$ Comme $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{(b-a)^m\|A\|^m}{m!} = 0$, alors il existe un $m \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand tel que $\frac{(b-a)\|A\|^m}{m!} = \lambda < 1$, donc L^m est une application contractante. D'aprés le théorème du point fixe de Picard, L^m admet un unique point fixe $y \in X$.

Montrons que L et L^m ont les mêmes points fixes.

$(*)$ Si y est point fixe de L, c-à-d., $Ly = y$, alors :

$$L^m y = L^{m-1}Ly = L^{m-1}y = L^{m-2}Ly = L^{m-2}y ... = Ly = y$$

c.-à-d., y point fixe L^m.

$(*)$ Si y est un point fixe de L^m : $L^m y = y$, alors

$$L^m Ly = L^{m+1}y = L(L^m y) = Ly$$

c.-à-d. Ly est un point fixe de L^m.

Donc, Ly et y sont points fixes de L^m qui est contractante et admet de ce fait un unique point fixe : $Ly = y$.

Remarque 2.1. La même méthode s'applique pour l'existence d'une solution unique du système linéaire avec second membre :

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \quad & , t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.15}$$

avec :

$t \longmapsto A(t)$ est une application de classe C^k $(k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ de I dans $M_n(\mathbb{R})$ et $t \longmapsto A(t)$ est une application de classe C^k $(k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ de I dans $M_n(\mathbb{R})$.

$t \longmapsto b(t)$ est une application de classe C^k $(k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ de I dans $\mathbb{R}^n$.

Dans ce cas, l'application L est définie par :

$$Ly(t) = y^0 + \int_{t_0}^{t} \{A(s)y(s) + b(s)\}\, ds \tag{2.16}$$

Remarques 2.2.

Remarque 1. Nous avons vu au chapitre 1 que la solution du système autonome sans second membre

$$\begin{cases} y' = Ay(t), \ t \in I \\ y(t_0) = y^0 \end{cases}$$

est $y(t) = e^{(t-t_0)A}$, donc, dans ce cas la résolvante est :

$$S(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}. \tag{2.17}$$

Remarque 2. Si $n = 1$: la solution du problème :

$$\begin{cases} y' = \alpha(t)y(t), \ \ t \in I, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

se calcule directement en séparant les variables :

$$y(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} y_0,$$

donc, la résolvante est : $S(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$.

Remarque 2.3. (importante). Si la matrice $A = A(t)$ dépend de t (non constante), $S(t, t_0) \neq e^{(t-t_0)A}$.

ll est rare de pouvoir calculer l'expression explicite de la résolvante d'un système linéaire instationnaire : $y' = A(t)y(t)$.

Propriétés 2.1.

Propriété 1. Pour tout t, t_0, $t_1 \in I$ on a : $S(t, t_1)S(t_1, t_0) = S(t, t_0)$.

Propriété 2. Pour tout t, $s \in I$ on a : $S(t,s)$ est inversible et on a : $S^{-1}(t,s) = S(s,t)$.

Démonstration.

Propriété 1. D'après la relation (2.5) on a : $y(t) = S(t,t_1)y(t_1)$ et $y(t_1) = S(t_1,t_0)y(t_0)$, donc : $y(t) = S(t,t_1)S(t_1,t_0)y(t_0)$, d'une part; et d'autre part
on a $y(t) = S(t,t_0)y(t_0)$, c'est-à-dire on :

$$\text{pour tout } y(t_0) \in \mathbb{R}^n : S(t,t_1)S(t_1,t_0)y(t_0) = S(t,t_0)y(t_0)$$

ce qui implique que : $S(t,t_1)S(t_1,t_0) = S(t,t_0)$.

Propriété 2. De la propriété 1, on a pour tout t, $s \in I$: $S(t,s)S(s,t) = S(t,t) = I$. Par conséquent $S(t,s)$ est inversible, de plus : $S^{-1}(t,s) = S(s,t)$.

2.3 Systèmes différentiels lineaires instationnaires avec second membre

2.3.1 Introduction

Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \qquad t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.18}$$

où :

I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

$t \longmapsto A(t)$ est une application de classe C^k $(k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ de I dans $M_n(\mathbb{R})$.

$t \longmapsto b(t)$ est une application de classe C^k $(k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ de I dans $\mathbb{R}^n$.

Si l'application b est non identiquement nulle, le système (2.18) se nomme système différentiel linéaire instationnaire avec second membre ou système différentiel instationnaire affine.

2.3.2 Résolution des systèmes différentiels lineaires instationnaires avec second membre

Définition 2.2

Une solution de (2.18) est une application $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$y'(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Notons qu'une solution est automatiquement de classe C^{k+1}.

Théorème 2.2

La solution du problème de cauchy de (2.18) est :

$$y(t) = S(t, t_0)y^0 + \int_{t_0}^{t} S(t, s)b(s)ds \tag{2.19}$$

où $S(t, t_0)$ est la résolvante du système (2.3).

Si $t_0 = 0$, on note $S(t) = S(t, 0)$ et l'expression de la solution devient

$$y(t) = S(t)y_0 + S(t)\int_{t_0}^{t} S^{-1}(s)b(s)ds \tag{2.20}$$

Démonstration.

La solution du système homogène $y'(t) = A(t)y(t)$ associé au système instationnaire (2.18) est :

$$y(t) = S(t, t_0)y(t_0). \tag{2.21}$$

La méthode de variation de la constante de Lagrange consiste à recherche la solution de (2.18) en variant la constante $y(t_0)$ dans (2.21) comme suit :

$$y(t) = S(t, t_0)z(t). \tag{2.22}$$

Pour que y soit une solution de (2.18) on doit avoir pour tout $t \in I$:

$$\begin{cases} y'(t) \equiv A(t)S(t,t_0)z(t) + S(t,t_0)z'(t) = A(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) \equiv z(t_0) = y^0 \end{cases} \tag{2.23}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} S(t,t_0)z'(t) = b(t), \\ z(t_0) = y^0. \end{cases} \tag{2.24}$$

En tenant compte que $S^{-1}(t,t_0) = S(t_0,t)$, on aura :

$$\begin{cases} z'(t) = S(t_0,t)b(t) \\ z(t_0) = y^0. \end{cases} \tag{2.25}$$

Par intégration sur $[0,t]$:

$$z(t) = y^0 + \int_{t_0}^{t} S(t_0,s)b(s)ds \tag{2.26}$$

Mais $z(t) = S(t_0,t)y(t)$, on aura alors :

$$S(t_0,t)y(t) = y^0 + \int_{t_0}^{t} S(t_0,s)b(s)ds \tag{2.27}$$

Par conséquent on obtient :

$$y(t) = S(t,t_0)y^0 + S(t,t_0)\int_{t_0}^{t} S(t_0,s)b(s)ds.$$

En tenant compte que : $S(t,t_0)S(t_0,s) = S(t,s)$, on obtient l'expression (2.19).

2.4 Contrôlabilité des systèmes instationnaires

2.4.1 Définitions et Proposition

Définition 2.3

Soit $y^0, y^1 \in \mathbb{R}^n$ et $y(t, y^0, u)$ la solution du système de contrôle (2.1). On dit que le contrôle u transfère un état y^0 à un état y^1 au temps $t_1 > 0$ si :$y(t_1, y^0, u) = y^1$.

Si pour tout $y^0, y^1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle $u \in L^2([t_0, t_1]\,; \mathbb{R}^n)$ qui transfère y^0 à y^1 au temps $t_1 > 0$, on dit que le système (2.1) est contrôlable sur $[t_0, t_1]$.

On dit aussi que la paire (A, B) est contrôlable au temps sur $[t_0, t_1]$.

Définition 2.4

On dit aussi que système de contrôle (2.1) est contrôlable à zéro sur $[t_0, t_1]$ si : pour tout $y^1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle $u \in L^2([t_0, t_1]\,; \mathbb{R}^n)$: $y(t_1, y^0, u) = y^1$.

Proposition 2.3

Le système (2.1) est contrôlable sur $[t_0, t_1]$ si et seulement s'il est contôlable à zéro.

Démonstration. Il est édient que la contrôlabilité (exacte) de (2.1) implique la contrôlabilité à zéro.

Nous montrons que la contrôlabilité à zéro implique la contrôlabilité exacte : Soit y^0 et $y^1 \in \mathbb{R}^n$. Prenons l'état $y^* = y^0 - S(t_0, t_1)y^1 \in \mathbb{R}^n$; alors il existe un contrôle u tel que

$$S(t_1, t_0)y^* + \int_{t_0}^{t_1} S(t_1, s)B(s)u(s)ds = 0 \qquad (2.28)$$

mais $S(t_1,t_0)y^* = S(t_1,t_0)\left[y^0 - S(t_0,t_1)y^1\right]$, (2.28) devient :

$$S(t_1,t_0)\left[y^0 - S(t_0,t_1)y^1\right] + \int_{t_0}^{t_1} S(t_1,s)B(s)u(s)ds = 0,$$

ce qui implique que : $S(t_1,t_0)y^0 - y^1 + \int_{t_0}^{t_1} S(t_1,s)B(s)u(s)ds = 0$ et par suite :

$$S(t_1,t_0)y^0 + \int_{t_0}^{t_1} S(t_1,s)B(s)u(s)ds = y^1.$$

Ainsi, (2.1) est contrôlable sur en t_1.

2.4.2 Résultats prélimintaires sur la contrôlabilité

Le système (2.1) est contrôlable sur $[t_0,t_1]$ si et seulement s'il existe un contrôle $u \in L^2(t_1,t_0;\mathbb{R}^m)$ tel que :

$$y^1 = S(t_1,t_0)y^0 + \int_{t_0}^{t_1} S(t_1,s)B(s)u(s)ds$$

c'est-à-dire :

$$y^1 - S(t_1,t_0)y^0 = \int_{t_0}^{t_1} S(t_1,s)B(s)u(s)ds$$

Définissons alors l'opérateur $L : L^2(t_1,t_0,\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$Lu = \int_{t_0}^{t_1} S(t_1,s)B(s)u(s)ds \tag{2.29}$$

Donc la cible y^1 s'écrit :

$$y^1 = S(t_1,t_0)y^0 + Lu \tag{2.30}$$

Il est à noter que L'opérateur L est un opérateur linéaire borné défini sur $L^2(t_1,t_0;\mathbb{R}^m)$ tout entier.

Proposition 2.4

Le système de contrôle (2.1) est contrôlable sur $[t_0,t_1]$ si et seulement si l'opérateur L est surjectif.

Démonstration.

La nécessité. Supposon que le système (2.1) est contrôlable sur $[t_0, t_1]$. Soit $y^* \in \mathbb{R}^n$ quelconque, alors pour $y^0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ et $y^1 = y^*$, il existe un contrôle $u \in L^2(t_1, t_0; \mathbb{R}^m)$ tel que : $S(t_1, t_0)0 + Lu = y^1$, c.-à-d. : $Lu = y^*$. Donc, L est surjectif.

La suffisance. Supposons que L est surjectif, alors pour tout $y^* \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle $u \in L^2(t_1, t_0; \mathbb{R}^m)$ tel que : $Lu = y^*$. Soit y^0 et $y^1 \in \mathbb{R}^n$ quelconques. Prenons $y^* = y^1 - S(t_1, t_0)y^0$, comme L est surjevtif, il existe alors un $u \in L^2(t_1, t_0, \mathbb{R}^m)$ tel que : $Lu = y^*$, ce qui donne $S(t_1, t_0)y^0 + Lu = y^1$. Le système est donc contrôlable sur $[t_0, t_1]$.

L'adjoint de L

L'espace $L^2(t_1, t_0; \mathbb{R}^m)$ est un espace de Hilbert pour la norme suivante :

$$\langle u, v \rangle_1 = \int_{t_0}^{t_1} \langle u(s), v(s) \rangle \, ds \tag{2.31}$$

où $\langle u(s), v(s) \rangle$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^m$:

$$\langle u(s), v(s) \rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j(s) v_j(s) \tag{2.32}$$

où $u, v : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^m : u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$ et $v(t) = (v_1(t), \ldots, v_m(t))$.

Proposition 2.5

L'adjoint L^* de L existe et il est défini par :

$$\begin{cases} L^* : \mathbb{R}^n \longrightarrow L^2(t_1, t_0; \mathbb{R}^m), \\ (L^* y)(t) = u(t) = B^*(t) S^*(t_1, t) y. \end{cases} \tag{2.33}$$

où :

$B^*(t)$ est la matrice transposée de $B(t)$. On note aussi $B^*(t) = B^\tau(t)$.

$S^*(t_1, t)$ est la matrice transposée de $S(t_1, t)$. On note aussi $S^*(t_1, t) = S^\tau(t_1, t)$.

Démonstration. L'opérateur L est un opérateur linéaire borné défini sur $L^2(t_1, t_0; \mathbb{R}^m)$

tout entier, donc son adjoint L^* existe. On a pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ et tout $u \in L^2(t_1, t_0; \mathbb{R}^m)$:

$$\begin{aligned}\langle L^* y, u \rangle_1 &= \langle y, Lu \rangle \\ &= \left\langle y, \int_{t_0}^{t_1} S(t_1, s)B(s)u(s)ds \right\rangle \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \langle y, S(t_1, s)B(s)u(s) \rangle \, ds \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \langle B^*(s)S^*(t_1, s)y, u(s) \rangle \, ds \\ &= \langle B^*(.)S^*(t_1, .)y, u \rangle_1\end{aligned}$$

On obtient alors (2.33).

On a un résultat de contrôlabilité lié à l'opérateur adjoint L^*.

Proposition 2.6

Le système de contrôle (2.1) est contrôlable sur $[t_0, t_1]$ si et seulement l'opérateur L^* est injectif.

Pour démontrer ce critère on utlisera le résultat suivant connu en Analyse fonctionnelle (voir p.e. [Brézis]) :

Soit H un espace de Hilbert et $A : H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire borné. Alors on a :

$$\text{(a) } ran(A)^\perp = \ker(A^*), \quad \text{(b) } \ker(A^*)^\perp = \overline{ran(A)}. \tag{2.34}$$

où :

$ran(A)^\perp$ est l'orthogonal de l'image de A.

$\overline{ran(A)}$ est la fermeture de l'image de A.

A^* est l'opérateur adjoint de A.

Démonstration.

La nécessité. Supposons que (2.1) est contrôlable sur $[t_0, t_1]$ alors, d'après la proposition 2.4, l'opérateur L est surjectif, c-à-d : $ran(L) = \mathbb{R}^n$, donc $ran(L)^\perp = \{0\}$, et d'après (2.34a) : $\ker(L^*) = \{0\}$, ce qui montre que L^* est injectif.

La suffusance. Supposons que L^* est injectif, alors $\ker(L^*) = \{0\}$ et par suite on aura $\ker(L^*)^\perp = \mathbb{R}^n$, et d'après (2.34) : $\overline{ran(L)} = \mathbb{R}^n$, mais $\overline{ran(L)} = ran(L)$ car $ran(L)$ est un sous espace vectoriel de dimension finie, alors : $ran(L) = \mathbb{R}^n$. Donc, L est surjectif et le système (2.1) est contrôlable sur $[t_0, t_1]$ selon la proposition 2.4.

2.4.3 Le Grammien de contrôlabilité

Définition 2.5

Le grammien de contrôlabilité du système (2.1) est la matrice $Q \in M_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$Q = LL^* \tag{2.35}$$

Soit $z \in \mathbb{R}^n$. D'après (2.33) :

$$(L^*z)(s) = B^*S^*(t_1, s)z \tag{2.36}$$

et d'après (2.29) :

$$(LL^*z)(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} S(t_1, s)B(s)B^*(s)S^*(t_1, s)zds$$

c'est-à-dire :

$$Q = LL^* = \int_{t_0}^{t_1} S(t_1, s)B(s)B^*(s)S^*(t_1, s)ds \tag{2.37}$$

Remarque 2.4.

Remarque 1. Le grammien de contrôlabilité Q est symétrique :

$$\begin{aligned} Q^* &= \left\{\int_{t_0}^{t_1} S(t_1, s)B(s)B^*(s)S^*(t_1, s)ds\right\}^* \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \{S(t_1, s)B(s)B^*(s)S^*(t_1, s)\}^* \, ds \\ &= \int_{t_0}^{t_1} S(t_1, s)B(s)B^*(s)S^*(t_1, s)ds = Q. \end{aligned}$$

Remarque 2. Le grammien est une matrice définie positive : Soit $z \in \mathbb{R}^n$ quelconque :

$$\begin{aligned}
\langle Qz, z\rangle &= \left\langle \int_{t_0}^{t_1} S(t_1,s)B(s)B^*(s)S^*(t_1,s)zds, z \right\rangle \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \langle S(t_1,s)B(s)B^*(s)S^*(t_1,s)z, z\rangle\, ds \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \langle B(s)B^*(s)S^*(t_1,s)z, S^*(t_1,s)z\rangle\, ds \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \langle B^*(s)S^*(t_1,s)z, B^*(s)S^*(t_1,s)z\rangle\, ds \\
&= \int_{t_0}^{t_1} |B^*(s)S^*(t_1,s)z|^2\, ds \geq 0.
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\langle Qz, z\rangle = \int_{t_0}^{t_1} |B^*(s)S^*(t_1,s)z|^2\, ds \geq 0. \tag{2.38}$$

Alors, Q est une matrice symmétrique définie positive.

On a un résultat important qui relie la contrôlabilité de (2.1) et le grammien Q.

Théorème 2.7

Le système (2.1) est contrôlable sur $[t_0, t_1]$ si et seulement si la matrice Q est inversible.

Démonstration.

Raisonnons la nécessité et la suffisance par contraposition.

La nécessité. Raisonnons la nécessité par l'absurde : Supposons que le système (2.1) et contrôlable mais Q n'est pas inversible. Comme Q est symétrique définie positive et n'est pas inversible, alors il existe $y^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $\langle Qy^0, y^0\rangle = 0$, alors de (2.38) on aura :

$$\int_{t_0}^{t_1} \left|B^*(s)S^*(t_1,s)y^0\right|^2 ds = 0 \Rightarrow B^*(s)S^*(t_1,s)y^0 = 0, \;\; p.p \text{ sur } \;[t_0, t_1] \tag{2.39}$$

On a aussi (2.1) est contrôlable sur $[t_0, t_1]$ par hypothèse, alors il existe un contrôle u qui transfère $y(t_0) \equiv y^0$ vers la cible $y(t_1) \equiv y^1 = 0$:

$$S(t_1, t_0)y^0 + \int_{t_0}^{t_1} S(t_1,s)B(s)u(s)ds = 0 \tag{2.40}$$

De (2.40) on déduit :

$$y^0 = -S^{-1}(t_1,t_0)\int_{t_0}^{t_1} S(t_1,s)B(s)u(s)ds = -\int_{t_0}^{t_1} S(t_0,s)B(s)u(s)ds. \tag{2.41}$$

De (2.41) puis (2.39) on obtiendra :

$$\begin{aligned}\left|y^0\right|^2 = \left\langle y^0, y^0\right\rangle &= \left(y^0\right)^\tau \int_{t_0}^{t_1} S(t_0,s)B(s)u(s)ds \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(y^0\right)^\tau S(t_0,s)B(s)u(s)ds \\ &= \int_{t_0}^{t_1} B^*(s)S^*(t_0,s)y^0u(s)ds = 0 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Il s'ensuit de (2.42) que $y^0 = 0$, ce qui contredit la supposition y^0 est non nul. Donc la matrice Q est strictement définie positive, donc elle est inversible. On conclut alors que la contrôlabilité de (2.1) implique l'inversibilité de Q.

La suffisance. Supposons que Q est inversible. Il suffit de démontrer que (1.2) est contrôlable à zéro :

Soit $y^0 \in \mathbb{R}^n$. Cherchons un contrôle de la forme $u(t) = B^*(t)S^*(t_1,t)z$ (où $z \in \mathbb{R}^n$) qui transfère y^0 vers la cible 0 au temps t_1 :

$$\begin{aligned} y(t_1) &= S(t_1,t_0)y^0 + \int_{t_0}^{t_1} S(t_1,s)B(s)B^*(t)S^*(t_1,t)zds \\ &= S(t_1,t_0)y^0 + Qz \end{aligned}$$

Il suffit de prendre z si bien que : $S(t_1,t_0)y^0+Qz = 0$, c'est-à-dire : $z = -Q^{-1}S(t_1,t_0)y^0$. Ce vecteur existe car Q est supposée inversible. Le contrôle

$$u(t) = -B^*(t)S^*(t_1,t)Q^{-1}S(t_1,t_0)y^0$$

transfère tout état initial y^0 vers 0. Donc, le système (2.1) est contrôlable sur $[t_0,t_1]$.

Remarque 2.5 (importante). Comme le gramien dépend de t_1 et ne dépend pas de l'état initial y^0, alors à la différeence du cas autonome, la contôlabilité des systèmes linéaires instationnaires dépend du temps t_1.

2.4.4 Application

Considéons le système de contrôle suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} y_1'(t) = 2ty_2 + \sqrt{t}u(t),\ t > 0, \\ y_2'(t) = -2ty_1,\ t > 0, \\ y_1(1) = y_1^0 = 0,\ y_2(1) = y_2^0 = 1 \end{array}\right. \tag{2.43}$$

Ce système se réécrit sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{c} y'(t) = A(t)y(t),\ t > 0, \\ y_1(1) = 0,\ y_2(1) = 1. \end{array}\right. \tag{2.44}$$

où : $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ -2t & 0 \end{pmatrix}$.

Calculons $S(t, t_0)$:

Posons $S(t, t_0) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ où a, b, c, d dépendent de t.

$S(t, t_0)$ vérifie : $\frac{d}{dt}S(t, t_0) = A(t)S(t, t_0)$, donc :

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ -2t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et avec $S(t_0, t_0) = I$, c'est-à-dire : $\begin{pmatrix} a(t_0) & b(t_0) \\ c(t_0) & d(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{c} a' = 2tc,\ a(t_0) = 1, \\ c' = -2ta,\quad c(t_0) = 0. \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} aa' + cc' = 0 \\ a(t_0) = 1,\ c(t_0) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\int_{t_0}^{t} (aa' + cc')(s)ds = 0.$$

Donc : $\frac{1}{2}a^2(t) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}c^2(t) = 0 \Longrightarrow a^2(t) + c^2(t) = 1 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a(t) = \cos\alpha(t) \\ c(t) = \sin\alpha(t) \end{array}\right.$

Mais $a'(t) = -\alpha'(t)\sin\alpha(t) = 2tc(t) = 2t\sin\alpha(t)$, pour tout $t > 0$, ce qui implique

que $\alpha'(t) = -2t \Longrightarrow \displaystyle\int_{t_0}^{t} \alpha'(s)ds = -t^2 + t_0^2$ ce qui implique que :

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) - t^2 + t_0^2.$$

Mais $a(t_0) = 1 \Longrightarrow \cos\alpha(t_0) = 1 \Longrightarrow \alpha(t_0) = 2k\pi$. On a donc :

$$a(t) = \cos\alpha(t) = \cos\left(2k\pi - t^2 + t_0^2\right) = \cos\left(t^2 - t_0^2\right).$$

On trouve finalement :

$$\begin{cases} a(t) = \cos\left(t^2 - t_0^2\right), \\ c(t) = -\sin\left(t^2 - t_0^2\right). \end{cases} \tag{2.45}$$

De la même façon on trouve du sytème différentiel :

$$\begin{cases} b' = 2td, \ b(t_0) = 0, \\ d' = -2tb, \quad d(t_0) = 1, \end{cases}$$

sa solution :

$$\begin{cases} b(t) = \sin\left(t^2 - t_0^2\right), \\ d(t) = \cos\left(t^2 - t_0^2\right). \end{cases} \tag{2.46}$$

De ce qui précède on obtient :

$$S(t, t_0) = \begin{pmatrix} \cos\left(t^2 - t_0^2\right) & \sin\left(t^2 - t_0^2\right) \\ -\sin\left(t^2 - t_0^2\right) & \cos\left(t^2 - t_0^2\right) \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

Etudions la contrôlabilité du système (3.43) sur $[0, \sqrt{\pi}]$:

De (2.47) on a : $S(t, s) = \begin{pmatrix} \cos\left(t^2 - s^2\right) & \sin\left(t^2 - s^2\right) \\ -\sin\left(t^2 - s^2\right) & \cos\left(t^2 - s^2\right) \end{pmatrix}$.

Du système (2.43) on a : $B(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{t} \\ 0 \end{pmatrix}$, $B^*(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{s} & 0 \end{pmatrix}$.

Calculons $S(t_1, s)B(s)$:

$$S(t_1, s)B(s) = \begin{pmatrix} \cos(\pi - s^2) & \sin(\pi - s^2) \\ -\sin(\pi - s^2) & \cos(\pi - s^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{t} \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\cos(s^2) & \sin(s^2) \\ -\sin(s^2) & -\cos(s^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{s} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{s}\cos(s^2) \\ -\sqrt{s}\sin(s^2) \end{pmatrix}.$$

Calculons $B^*(s)S^*(t_1, t_0)$:

$$B^*(s)S^*(t_1, t_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{s} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos(s^2) & -\sin(s^2) \\ \sin(s^2) & -\cos(s^2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\sqrt{s}\cos(s^2) & -\sqrt{s}\sin(s^2) \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$S(t_1, s)B(s)B^*(s)S^*(t_1, s)$$
$$= \begin{pmatrix} -\sqrt{s}\cos(s^2) \\ -\sqrt{s}\sin(s^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{s}\cos(s^2) & -\sqrt{s}\sin(s^2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} s\cos^2(s^2) & s\sin(s^2)\cos(s^2) \\ s\sin(s^2)\cos(s^2) & s\sin^2(s^2) \end{pmatrix}.$$

Calculons le grammien Q sur $[0, \sqrt{\pi}]$:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} s\cos^2(s^2) & s\sin(s^2)\cos(s^2) \\ s\sin(s^2)\cos(s^2) & s\sin^2(s^2) \end{pmatrix} ds.$$

On a :

$$\int_{t_0}^{t_1} s\cos^2(s^2)\,ds = \tfrac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} s(1+\cos(2s^2))ds = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{s^2}{2}\right]_0^{\sqrt{\pi}} + \tfrac{1}{8}\left[\sin(2s^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}} = \tfrac{\pi}{4}.$$
$$\int_{t_0}^{t_1} s\sin(s^2)\cos(s^2)\,ds = \tfrac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} s\sin(2s^2) = \tfrac{1}{8}\left[-\cos(2s^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}} = 0.$$
$$\int_{t_0}^{t_1} s\sin^2(s^2)\,ds = \tfrac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} s(1-\cos(2s^2))ds = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{s^2}{2}\right]_0^{\sqrt{\pi}} - \tfrac{1}{8}\left[\sin(2s^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}} = \tfrac{\pi}{4}.$$

Alors $Q = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$.

Comme Q est inversible, alors le système de contrôle (3.43) est contrôlable sur $[0, \sqrt{\pi}]$.

otations

Chapitre 3

Contrôlabilité totale des systèmes linéaires

Dans ce chapitre nous allons traiter un autre type de contrôlabilité c'est la conrôlabilité totale des systèmes de contrôle linéaires instationnaires en dimension finie donnée par :

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + Bu(t), \quad t > 0 \\ y(0) = y^0 \end{cases} \tag{3.1}$$

où :

$I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $t_0 \in I$.

$A(t) \in M_n(\mathbb{R})$ et $B(t) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, pour tout $t \in I$.

$y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $u : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sont deux applications.

$y^0 \in \mathbb{R}^n$ est la donnée initiale.

La fonction $u \in L^2(I, \mathbb{R}^m)$ est appelée contrôle ou entrée du système (3.1).

$L^2(t_0, t_1; \mathbb{R}^m)$ est l'espace de Hilbert défini par :

$$L^2(I, \mathbb{R}^m) = \left\{ u : I \longrightarrow \mathbb{R}^m : \int_I |u(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

où $|u(t)|^2 = \sum_{j=1}^{m} u_j^2(t)$ (le carrée de la norme de $u(t)$ dans $\mathbb{R}^m$).

3.1 Définitions

Définition 3.1

le système (3.1) est dit totalement contrôlable sur un intervalle $[t_0, t_1]$ s'il est contrôlable sur chaque sous intervalle $[a, b] \subset [t_0, t_1]$.

Avant de traiter ce type de contrôlabilité nous aurons besoin de quqelques notions préliminaires.

3.1.1 Matrices strictement positives

Définition 3.2

Une matrice symétrique $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite définie positive si :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n : q(x) = \langle x, Ax \rangle \equiv x^\tau Ax \geq 0.$$

Définition 3.3

Une matrice symétrique $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite strictement définie positive si :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} : q(x) = \langle x, Ax \rangle \equiv x^\tau Ax > 0.$$

Notons que pour $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$:

$$q(x) = |x|^2 \left(\frac{x}{|x|}\right)^\tau A \left(\frac{x}{|x|}\right) = |x|^2 q\left(\frac{x}{|x|}\right) = |x|^2 q(u), \text{ où } u = \frac{x}{|x|}$$

Comme $|x|^2 > 0$ et $|u| = 1$ on déduit ce qui suit :

$$q \text{ est strictement définie positive } \iff q(u) > 0, \text{ pour tout } u \in B'(0,1)$$

où $B'(0,1) = \{u \in \mathbb{R}^n : |u| = 1\}$ est la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 3.1

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors :

$A \in M_n(\mathbb{R})$ est strictement définie positive si et seulement si $A = B^\tau B$ pour une certaine matrice B où ses vecteurs colonnes sont linéairement indépendants.

Démonstration.

La suffisance. Supposons que $A = B^\tau B$ où $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, et $l_1, \ldots, l_m$ sont les vecteurs lignes de B et $c_1, \ldots, c_n$ sont les vecteurs colonnes de B. Alors

$$\ker(B^\tau B) = \ker B = \{0\}\,.$$

En effet soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(B^\tau B)$ et $y = Bx = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, alors $B^\tau y = 0$:

$$B^\tau y = 0 \Longrightarrow y^\tau B = 0 \Longrightarrow y_1 l_1 + \cdots + y_m l_m = 0 \Longrightarrow l_1^\tau y_1 + \cdots + l_m^\tau y_m = 0$$

c-à-d : $c_1 y_1 + \cdots + c_m y_m = 0$, et comme $c_1, \ldots, c_n$ sont linéairement indépendants par hypothèse : $y_1 = \cdots = y_m = 0$

c-à-d $y = 0 \Longrightarrow Bx = 0 \Longleftrightarrow c_1 x_1 + \cdots c_n x_n = 0 \Longrightarrow x_1 = \cdots = x_m = 0$, c-à-d $\ker(B^\tau B) = \{0\}\,.$

Soit $x \in \ker B \Longrightarrow Bx = 0 \Longrightarrow c_1 x_1 + \cdots c_n x_n = 0 \Longrightarrow x_1 = \cdots = x_m = 0$, car $c_1, \ldots, c_n$ sont linéairement indépendants. Donc $\ker B = \{0\}\,.$

La nécessité. elle est aussi vraie.

3.2 Critères de contrôlabilité totale

Théorème 3.2

Le système (3.1) est totalement contrôlable sur un intervalle $[t_0, t_1]$ si et seulement les vecteurs lignes (the rows en Anglais) de la matrice $S(t_0, .)B(.)$ sont linéairement indépendants sur chaque sous intervalle $]a, b[\subset [t_0, t_1]$.

Démonstration.

La suffisance. Soit $]a, b[\subset [t_0, t_1]$. Supposons que $s \in\,]a, b[\longmapsto M^\tau(s) = S(t_0, s)B(s)$ ses vecteurs lignes sont linéairement indépendants, alors les vecteurs colonnes de $M(s) = B^\tau(s)S^\tau(t_0, s)$ sont linéairement indépendants sur $]a, b[$.

La solution du système

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \qquad t \in]0, b] \\ y(a) = y^0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Montrons que :

$$Q(a, b) = \int_a^b S(a, s)B(s)B^\tau(s)S^\tau(a, s)ds \tag{3.3}$$

est strictement définie positive.

Si on pose $M(s) = B^\tau(s)S^\tau(a, s)$, alors $S(a, s)B(s)B^\tau(s)S^\tau(a, s) = M^\tau(s)M(s)$.

Comme les vecteurs lignes de $M^\tau(s) \equiv S(t_0, s)B(s)$ sont linéairement indépendants, alors les vecteurs colonnes de $M(s)$ sont linéairement indépendants. D'après le théorème 3.1 : $M^\tau(s)M(s) \equiv S(a, s)B(s)B^\tau(s)S^\tau(a, s)$ est strictement définie positive.

En conséquence, $\displaystyle\int_a^b M^\tau(s)M(s)ds$ est strictement définie positive ; car pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\left\langle x, \int_a^b M^\tau(s)M(s)ds.x \right\rangle = \int_a^b \langle x, M^\tau(s)M(s)ds.x\rangle > 0. \tag{3.4}$$

$\int_a^b M^\tau(s)M(s)ds$ est strictement définie positive $\Longrightarrow Q(a,b)$ est inversible.

Pour montrer que (3.2) est contrôlable, il suffit de démontrer qu'il est contrôlable à zéro. Pour ce faire, il suffit de prendre le contrôle :

$$u(t) = -M(t)Q^{-1}(a,b)S(b,a)y(a).$$

Pour ce contrôle on aura :

$$\begin{aligned} y(b) &= S(b,a)y(a) + \int_a^b S(b,s)B(s)u(s)ds \\ &= S(b,a)y(a) - \int_a^b S(b,s)B(s)M(s)Q^{-1}(a,b)S(b,a)y(a)ds \end{aligned} \tag{3.5}$$

On a :

$$S(b,s)B(s)M(s)Q^{-1}(a,b)$$

$$= S(b,s)B(s)M(s)Q^{-1}(a,b)$$

$$= S(b,s)B(s)B^\tau(s)S^\tau(a,s)\left(\int_a^b S(a,s)B(s)B^\tau(s)S^\tau(a,s)ds\right)^{-1}$$

$$= \left(\int_a^b S^\tau(a,s)^{-1}B^\tau(s)^{-1}B(s)^{-1}S(b,s)^{-1}S(a,s)B(s)B^\tau(s)S^\tau(a,s)ds\right)^{-1}$$

$$= \left(\int_a^b Ids\right)^{-1} = \frac{1}{b-a}I \tag{3.6}$$

Alors :

$$y(b) = S(b,a)y(a) - \int_a^b \frac{1}{b-a}IS(b,a)y(a)ds = S(b,a)y(a) - S(b,a)y(a) = 0.$$

Donc, (3.1) est contrôlable à zéro, et d'après la proposition 2.3, le système (3.1) est contrôlable sur $[a,b]$.

Corollaire 3.3

Le système (3.1) est contrôle sur$[t_0,t_1]$ si et seulement les vecteurs lignes de la matrice $S(t_0,.)B(.)$ sont linéairement indépendants en chaque point $s \in]t_0,t_1[$.

3.3 Application

Soit le système linéaire instationnaire de contrôle :

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + tu_1(t),\ t > 0, \\ y_1' = -y_1 + 3y_2 + (t-1)u_2(t),\ t > 0, \\ y_1(0) = y_1^0,\ y_2(0) = y_2^0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Ce système peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} y' = At + B(t)u,\ t > 0, \\ y(0) = y^0 \end{cases}$$

où :

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix},$$
$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}.$$

La solution de ce système est :

$$y(t) = S(t,0)y^0 + \int_0^t S(t,0)Bu(s)ds. \tag{3.7}$$

Dans notre cas la résolvante $S(t,0) = S(t) = e^{At}$ et $S(t,s) = S(t)S^{-1}(s) = e^{A(t-s)}$. Nous avons déjà calculé e^{At} au chapitre 1 :

$$S(t,0) = e^{At} = \begin{pmatrix} (1-t)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1+t)\,e^{2t} \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Appliquons le théorème 3.2 :

$$S(0,s)B(s) = e^{-As}B(s) = \begin{pmatrix} (1+s)e^{-2s} & -se^{-2s} \\ se^{-2s} & (1-s)\,e^{-2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s-1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} s(s+1)e^{-2s} & -s(s-1)e^{-2s} \\ s^2e^{-2s} & -(s-1)^2e^{-2s} \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que les vecteurs lignes de $S(0,s)B(s)$ sont linéairement indépendants sur $]0,1[$, donc d'après le théorème 3.2, le système (3.6) est contrôlable sur $[0,1]$. Par contre, les vecteurs lignes de $S(0,s)B(s)$ sont linéairement dépendants sur $]0,2[$, et par conséquent, le système (3.6) n'est pas contrôlable sur $[0,2]$.

On conclut que le système (3.6) n'est pas totalement contrôlable sur $[0,3]$.

Perspectives

Comme perspective, on étudiera la contrôlabilité des systèmes différentiels non-linéaires :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), u(t)), \ t \in I \\ y(t_0) = y^0 \end{cases} \tag{S}$$

où :

$I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $t_0 \in I$.

$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, une fonction non-linéaire continue par rapport à t et u et Lipshitzienne par rapport à y.

$y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $u : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sont deux applications.

$y^0 \in \mathbb{R}^n$ est la donnée initiale.

La fonction $u \in PC(I, \mathbb{R}^m)$ où $PC(I, \mathbb{R}^m)$ est l'espace des fonctions continues par morceaux sur I.

Références

[1] O. Bachelier, Cours d'Automatique, cours en ligne, 2017.

[2] H. Brézis, Analyse fonctionnelle et Applications, edition Masson, 1983.

[3] F. Jean, Systèmes dynamiques stabilité et commande, cours en ligne.

[4] P. Théo, Equations différentielles, cours en ligne.

[5] E. Trélat, Contrôle optimal : théorie et applications, 2020.

[6] L. Weiss, The concepts of differential controllability and differential observability, J. Math. Anal. Appl. 10, 442-449, 1965.