République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par : BOUHSSANE Nassima

Intitulé

Solutions périodiques pour deux classes d'équations différentielles de Duffing

Dirigé par : BOUATTIA Yassine

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr.**	AYACHI Asma	**MCB**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr.**	BOUATTIA Yassine	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr.**	MELLAL Romaissa	**MCB**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2023

Remerciments

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu "**Allah**" qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

C 'est avec un grand plaisir que je saisie l'occasion offerte par l'achévement de mon mémoire de Master pour remercier vivement en premier lieu, Monsieur **BOUATTIA Yassine**, Docteur à l'Université de Guelma d'avoir dirigé ce travail avec beaucoup d'attention, de patience et d'intérèt, et qui m'a fait bénéficier durant cette année de ses conseils et de sa trés grande compétence. Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance pour la confiance qu'elle m'a témoignée.

Je remercie trés vivement Madame **AYACHI Asma** , Maitre de conférence à l'Université de Guelma pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie trés vivement Madame **MELLAL Romaissa**, Maitre de conférence l'Université de Guelma pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie également l'enseignante qui a supervisé ma formation (mon stage) pour les conseils qu'elle m'a donné, et pour m'avoir accordé beaucoup de son temps.

Je ne pouvais terminer sans remercier mes parents, mon mari, mes sœurs, mes amies et toute ma famille.

إهداء

بسم الله الرحمان الرحيم
(قل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون)
صدق الله العظيم
أهدي ثمرة جهدي الى جنة الله في أرضه.
أمي الغالية
إلى من أحمل اسمه بكل عز وافتخار.
أبي الغالي
إلى من وهبني الله إياه *أكرم زوجي الغالي* الذي ساندني وأعانني في الحياة و لوقوفه إلى جانبي كي أحقّق طموحي.

إلى أميري وحبيبي وأول فرحتي و قرة عيني"كرم أسيد".

إلى من شاركوني الحياة بحلوها ومرها و وقفوا معي في كل خطوة *إخواتي المؤنسات الغاليات*
"رانيا، شيماء، روفيدة، رهف، فرح."
إلى اللذان يرسمان دائما البسمة على وجوهنا "رسيم و يزن".
إلى كل صديقات المشوار الدراسي اللاتي أكن لهن كل الحب والاحترام
" إيمان، ندى، روميساء."
إلى كل عائلتي الكريمة "بوحصان" و "برمضان".

Table des matières

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة الدورات الحدية للمعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية المضطربة بوسيط صغير، والدورات الحدية لمعادلة دوفينج التفاضلية باستخدام طريقة المتوسط من الرتبة الأولى.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'étudier les cycles limites des équations différentielles du second ordre perturbées par un petit paramètre, et les cycles limites de l'équation différentielle de Duffing en utilisant la méthode de la moyennisation du premier ordre.

Mots clés : Cycle limite, Méthode de la moyennisation, Système différentiel, Solution périodique, Equation de Duffing.

Abstract

The objective of this memory is to study the limit cycles of the differential equations of second order perturbed by a small parameter, and the limit cycles of Duffing differential equation by using the averaging method of the first order.

Key words : Limit cycle, Averaging method, Differential system, Periodic solution, Duffing's equation.

Introduction

Les équations différentielles de Duffing sont un ensemble d'équations différentielles non linéaires qui décrivent l'évolution temporelle d'un système oscillant. Elles ont été introduites par le physicien allemand Georg Duffing en 1918. Les équations de Duffing ont une grande importance en dynamique non linéaire car elles fournissent un modèle simple mais réaliste pour de nombreux systèmes physiques

Les équations de Duffing sont importantes en dynamique non linéaire car elles permettent de comprendre le comportement complexe des systèmes oscillants. Elles peuvent être utilisées pour modéliser des phénomènes tels que la résonance, l'amortissement et les effets non linéaires dans les oscillateurs mécaniques et électriques.

Les solutions périodiques sont des solutions qui se répètent après un certain intervalle de temps. Elles sont importantes en dynamique non linéaire car elles permettent de comprendre le comportement à long terme des systèmes dynamiques. Les deux classes de solutions périodiques pour les équations différentielles de Duffing que nous allons explorer sont les solutions périodiques harmoniques et les solutions périodiques sous-harmoniques.

La première classe de solutions périodiques pour les équations différentielles de Duffing est la classe des solutions périodiques harmoniques. Ces solutions sont caractérisées par une fréquence qui est un multiple entier de la fréquence fondamentale du système. Les solutions périodiques harmoniques ont été largement étudiées en dynamique non linéaire et ont une grande importance en physique.

Les solutions périodiques harmoniques peuvent être illustrées par l'exemple d'un oscillateur harmonique simple, qui est un système physique bien connu. Dans le cas de l'oscillateur harmonique, la solution périodique harmonique est simplement une oscillation sinusoïdale avec une fréquence donnée. Cependant, pour les équations différentielles de Duffing, les solutions périodiques harmoniques peuvent avoir des formes plus complexes, telles que des oscillations à double fréquence ou des oscillations à plusieurs modes.

La deuxième classe de solutions périodiques pour les équations différentielles de Duffing est la classe des solutions périodiques sous-harmoniques. Ces solutions sont caractérisées par une fréquence qui n'est pas un multiple entier de la fréquence fondamentale du système. Les solutions périodiques sous-harmoniques sont moins étudiées que les solutions périodiques harmoniques, mais elles ont une grande importance en physique.

Les solutions périodiques sous-harmoniques peuvent être illustrées par l'exemple d'un système oscillant avec un comportement chaotique. Dans ce cas, la solution périodique sous-harmonique est une oscillation dont la fréquence est liée à des rapports de nombres entiers simples. Les solutions périodiques sous-harmoniques sont importantes car elles permettent de comprendre le comportement complexe des systèmes dynamiques non linéaires.

Au cours de ce manuscrit, nous allons introduire ce que sont les équations différentielles de Duffing, les cycles limites puis comment appliquer la méthode de la moyenne pour étudier les cycles.

Ce mémoire comporte quatre chapitres où se divise

Le premier chapitre : "Notions préliminaires" :

Ce chapitre est consacré aux définitions des différents outils mathématiques qui seront utilisés par la suite. On représentera alors quelques rappels, et notions préliminaires sur les systèmes différentiels planaires.

Le deuxiéme chapitre : "Calcul trigonométrique" :

Ce chapitre proposera des exemples qui nous aideront plus tard à résoudre des systèmes différentiels en utilisant la méthode technique de la moyennisation.

Le troisième chapitre :"théorie de la moyennisation" :

Ce chapitre portera sur la théorie de la moyennisation du premier ordre pour étudier le nombre des cycles limites d'un système différentiel planaire.

Le quatrième chapitre :"Les cycles limites d'une classe des équations différentielles de second ordre et de l'équation de Duffing" :

Ce chapitre contient une étude des cycles limites d'une classe d'équations différentielles du second ordre et les équations différentielles du Duffing. On utilisera la méthode de la moyennisation du premier ordre.

Chapitre 1

Notions préliminaires

L'objectif essentiel de ce chapitre est d'étudier quelques notions générales et préliminaires pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des équations différentielles ordinaires. On commence par donner les notions de système dynamique, point critique, et linéarisation. Ensuite nous examinons la classification des points d'équilibres. On introduisons aussi quelques rappels sur portrait de phase et cycle limite. Enfin on achève par définir l'ensemble d'isochrone, les sous variétés et définition de l'équation de Duffing.

1.1 Systèmes dynamiques

Définition 1.1 *Un système dynamique sur $\mathbb{R}^n$ est une application :*

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, telle que :

- $U(.,x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ *est continue.*
- $U(t,.) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est continue.*
- $U(0,x) = x$.
- $U(t+s,x) = U(t,U(s,x))$ *pour* $t,s \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.1 *Soit le système linéaire :*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}^+, \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

où A est une matrice constante. la solution de (1.1) est :

$$x(t) = e^{tA} x_0$$

le système (1.1) engendré un système dynamique, car l'application :

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

qui à tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$ associe :

$$U(t, x) = e^{tA} x \tag{1.2}$$

vérifie les quatre propriétés prècèdentes.

1.2 Points critiques

Définition 1.2 *Soit le système non linéaire*

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.3}$$

On appelle point critique ou point d'équilibre du système (1.3), le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$f(x_0) = 0.$$

Remarque 1.1 *Un point qui n'est pas critique est dit régulier.*

1.3 Linéarisation

Définition 1.3 *Considérons le système (1.3) :*

Le système :

$$\dot{x} = Ax$$

où

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right) = Df(x_0), 1 \leq i, j \leq n$$

et

$$f(x_0) = 0$$

est appelé linéarisation de (1.3) en x_0.

Définition 1.4 *On appelle point critique hyperbolique de (1.3), le point x_0 telle que A n'a aucune valeur propre avec une partie réelle nulle.*

1.4 Classification des points d'équilibre

1.4.1 Cas des systèmes linéaires

Considérons le système linéaire :

$$\dot{x} = Ax \tag{(1.4)}$$

où $x = (x_1, ..., x_n)$ et A une matrice constante inversible. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de A.

·Si les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont réelles et du même signe, la solution $x = 0$ est appelée *noeud.*

·Si les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont réelles, non nulles et de signe différent, la solution $x = 0$ est appelée *selle.*

· Si les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont complexes avec $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$, $i = 1, ..., n$. La solution $x = 0$ est appelée *foyer.*

· Si les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont complexes avec $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$ et $\mathrm{Im}(\lambda_i) \neq 0$, $i = 1, ..., n$. La solution $x = 0$ est appelée *centre*.

1.4.2 Cas des systèmes non linéaires

Considérons maintenant le système non-linéaire

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.5}$$

où $x = (x_1, ..., x_n)$, $f = (f_1, ..., f_n)$.

Définition 1.5 *Un point critique x_0 de (1.5) est appelé puits si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives. Il est appelé source si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles positives ; Il est appelé selle s'il est hyperbolique et si $A = Df(x_0)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.*

1.5 Portrait de phase et cycles limites

Définition 1.6 *Soit le système planaire :*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \tag{1.6}$$

où P, Q sont des polynômes en x et y, les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.6) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelés orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentés dans le plan (x, y) s'appelle portrait de phase, et le plan (x, y) est appelé plan de phase.

Définition 1.7 *Une solution périodique du système (1.6) est une solution telle que :*

$$(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t)) \text{ pour } T > 0$$

A toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace des phases.

Définition 1.8 *Un cycle limite du système (1.6) est une orbite fermée isolée, c'est à dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.*

Définition 1.9 *L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable x sur le cycle limite.*

1.6 Stabilité des cycles limites

Soit :

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

Définition 1.10 *Une solution $\Phi(t)$ du système (1.7) telle que $\Phi(t_0) = \Phi_0$ est dite stable au sens de Lyapunov si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tel que toute solution $x(t)$ de (1.7) dont la valeur initiale $x(t_0)$ vérifie :*

$$\|x(t_0) - \Phi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \Phi(t)\| < \varepsilon, \ \forall t \geq t_0,$$

si en plus de cette définition on a :

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t) - \Phi(t)\| = 0$$

alors la solution est dite asymptotiquement stable.

Quand $\Phi(t) = 0$ la définition devient :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, *tel que toute solution $x(t)$ de (1.7) dont la valeur initiale $x(t_0)$ vérifie :*

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \ \forall t \geq t_0,$$

si en plus :

$$\lim_{t\to+\infty}\|x(t)\| = 0,$$

alors $\Phi(t) = 0$ *est asymptotiquement stable.*

Pour $n = 1$ *on a :*

L'étude de la stabilité de la solution $\Phi(t)$ *peut être ramenée à celle de la solution nulle* $y = 0$ *d'un système (Analogue) au système (1.7).*

Preuve. En effet : posons $y(t) = x(t) - \Phi(t)$ où $y(t)$ est la nouvelle fonction inconnue.

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{dy}{dt} + \frac{d\Phi(t)}{dt} = f(t, y + \Phi) \\
\frac{dy}{dt} &= f(t, y + \Phi) - f(t, \Phi) \\
&= g(t, y)
\end{aligned}$$

On voit bien que $y \equiv 0$ est une solution de ce système. ∎

Exemple 1.2 *(* $n = 1$ *)*

$$\frac{dx}{dt} = -x + 1;\ x(0) = 1.$$

La solution telle que $x(0) = x_0$ *est :*

$$x(t) = (x_0 - 1)e^{-t} + 1.$$

La solution $\Phi(t)$ *telle que* $\Phi(0) = 1$ *est* $\Phi(t) = 1$

$$|x(t) - \Phi(t)| = \left|(x_0 - 1)e^{-t}\right| < |x_0 - 1|\,,\ \forall t > 0.$$

Il suffit de prendre $\delta \leq \varepsilon$ *;* $\delta = \varepsilon \Rightarrow \Phi(t)$ *est stable.*

Stabilité asymptotique :

$$\lim_{t\to+\infty}\|x(t) - \Phi(t)\| = \lim_{t\to+\infty}\left|(x_0 - 1)e^{-t}\right| = 0,$$

d'où $\Phi(t)$ est asymptotiquement stable.

Exemple 1.3 *Soit le système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} ; \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution qui vérifie $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ est :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *telle que :*

$$\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < \delta \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon, \ \forall t > 0.$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| = |x(t)| + |y(t)| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| + |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < 2(|x_0| + |y_0|)$$

$$= 2 \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < 2\delta, \ \textit{On prend } \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}; \ \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est stable au sens de Lyapunov.*

$$\lim_{t \to +\infty} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \lim_{t \to +\infty} x^2(t) + y^2(t) = x_0^2 + y_0^2 = c > 0 \nrightarrow 0$$

donc la solution n'est pas asymptotiquement stable.

Remarque 1.2 *Il est possible que la solution $\Phi(t)$ soit non bornée et stable et même asymptotiquement stable. De même il est possible que la solution soit bornée et non stable.*

Exemple 1.4 • *Dans le premier cas, on a les deux exemples.*

1) $\frac{dx}{dt} = 1$; $x(0) = 0$.

2) $\frac{dx}{dt} = -x + t + 1$; $x(0) = 0$.

• *Dans le deuxième cas, on a l'exemple.*

$\frac{dx}{dt} = \sin^2(x)$; $x(0) = 0$, $\Phi(t) \equiv 0$.

a) $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$

On pose

$$\begin{cases} x = x_1 \\ \dot{x} = x_2 \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}.$$

La solution $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de ce système est asymptotiquement stable.

b) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}.$

$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est asymptotiquement stable.

1.7 Ensemble isochrone

Définition 1.11 *L'ensemble isochrone est un ensemble formé uniquement par des solutions périodiques, qui ont la même période.*

1.8 Sous-variétés

Définition 1.12 *Les sous-variétés sont les parties des espaces R^n sur lesquelles on peut appliquer les méthodes du calcul différentiel.*

1.9 Equation de duffing

Définition 1.13 *L'équation de Duffing est une équation différentielle de second ordre non linéaire de la forme :*

$$\ddot{x} + c\dot{x} + g(x) = p(t)$$

où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue et localement Lipschitzienne,* c *est une constante et* $c \geq 0$, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue, et* $T-$*périodique. Une classe importante de l'équation est donnée par l'équation*

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t)$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *sont des constantes.*

Chapitre 2

Calcul trigonométrique

Le calcul trigonométrique est une méthode de calcul utilisée dans la méthode de la moyenne. Dans ce chapitre, on va présenter quelques exemples en utilisant ces techniques dans le but de les utiliser dans le chapitre suivant.

2.1 Résultats auxiliaires :

Comme :

$$\begin{cases} z = \exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta \\ \frac{1}{z} = \bar{z} = \exp(-i\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z^n = \exp(in\theta) = \cos n\theta + i\sin n\theta \\ \frac{1}{z^n} = \exp(-in\theta) = \cos n\theta - i\sin n\theta \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta \Longrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}(\frac{1}{z} + z) \\ z - \frac{1}{z} = 2i\sin\theta \Longrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta \\ z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos n\theta = 2(z^n + \frac{1}{z^n}) \\ \sin n\theta = \frac{1}{2i}(z^n - \frac{1}{z^n}) \end{cases}$$

2.1.1 Proposition : (Formulation du binome) :

pour tous complexes (réels) a et b et tout entier n : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n-k}$.

pour tous $0 \leq k \leq n$, on pose $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Les nombres $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ sont appelés coefficients binomiaux.

$$\begin{aligned}
\cos^2\theta &= \frac{1}{4}(\frac{1}{z}+z)^2 = \sum_{k=0}^{2} C_2^k a^{2-k} b^k = \frac{1}{4}(C_2^0 z^2 + C_2^1 z\frac{1}{z} + C_2^2 \frac{1}{z^2}) = \frac{1}{4}(z^2+\frac{1}{z^2}+2). \\
\sin^2\theta &= \frac{-1}{4}(z-\frac{1}{z})^2 = \sum_{k=0}^{2} C_2^k a^{2-k} b^k = -\frac{1}{4}(C_2^0 z^2 - C_2^1 z\frac{1}{z} + C_2^2 \frac{1}{z^2}) = -\frac{1}{4}(z^2+\frac{1}{z^2}-2).
\end{aligned}$$

2.1.2 Application : (linéarisation) :

A l'aide du binome de Newton et de la formule d'Euler, pour tout entier $n \geq 2$, on peut transformer $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$ en somme de termes de la forme $cos(kx)$ et $sin(kx)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 2.1

$$\begin{aligned}
\cos^4\theta &= \frac{1}{16}(z+\frac{1}{z})^4 \\
&= \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{4} C_4^k a^{4-k} b^k \\
&= \frac{1}{16}(C_4^0 z^4 + C_4^1\ z^3\frac{1}{z} + C_4^2 z^2\frac{1}{z^2} + C_4^3 z\frac{1}{z^3} + C_4^4\frac{1}{z^4}) \\
&= \frac{1}{16}(z^4+4z^2+6+\frac{4}{z^2}+\frac{1}{z^4}) \\
&= \frac{1}{16}(z^4+\frac{1}{z^4}) + \frac{1}{4}(z^2+\frac{1}{z^2}) + \frac{3}{8} \\
&= \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Exemple 2.2

$$\begin{aligned}
\sin^4\theta &= \frac{1}{16}(z-\frac{1}{z})^4\\
&= \frac{1}{16}(z^4-4z^2+6-\frac{4}{z^2}+\frac{1}{z^4})\\
&= \frac{1}{16}z^4-\frac{1}{4}z^2+\frac{3}{8}-\frac{1}{4z^2}+\frac{1}{16z^4}\\
&= \frac{1}{16}(z^4+\frac{1}{z^4})-\frac{1}{4}(z^2+\frac{1}{z^2})+\frac{3}{8}\\
&= \frac{1}{8}\cos 4\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Il y a une autre méthode pour la linéarisation de $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$ on va l'aborder par la suite.

Lemme 2.1 *pour $n\in\mathbb{N}$, on définit :*

$$\begin{aligned}
\cos^n\theta &= \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} n\\ \frac{n}{2}\end{pmatrix}+\frac{2}{2^n}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\begin{pmatrix} n\\ k\end{pmatrix}\cos((n-2k)\theta).\\
\sin^n\theta &= \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} n\\ \frac{n}{2}\end{pmatrix}+\frac{2}{2^n}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}(-1)^{\frac{n}{2}-k}\begin{pmatrix} n\\ k\end{pmatrix}\cos((n-2k)\theta).
\end{aligned}$$

Exemple 2.3

$$\begin{aligned}
\cos^6\theta &= \frac{1}{64}C_6^3+\frac{2}{64}\sum_{k=0}^{2}C_6^k\cos((6-2k)\theta)\\
&= \frac{20}{64}+\frac{2}{64}(\cos 6\theta+6\cos 4\theta+15\cos 2\theta)\\
&= \frac{5}{16}+\frac{1}{32}\cos 6\theta+\frac{3}{16}\cos 4\theta+\frac{15}{32}\cos 2\theta.
\end{aligned}$$

Exemple 2.4

$$\begin{aligned}\cos^8\theta &= \frac{1}{2^8}C_8^4 + \frac{2}{2^8}\sum_{k=0}^{3} C_8^k \cos((8-2k)\theta)\\ &= \frac{70}{256} + \frac{2}{256}(\cos 8\theta + 8\cos 6\theta + 28\cos 4\theta + 56\cos 2\theta)\\ &= \frac{35}{128} + \frac{1}{128}\cos 8\theta + \frac{1}{16}\cos 6\theta + \frac{7}{32}\cos 4\theta + \frac{7}{16}\cos 2\theta.\end{aligned}$$

Exemple 2.5

$$\begin{aligned}\sin^6\theta &= \frac{1}{2^6}C_6^3 + \frac{2}{2^6}\sum_{k=0}^{2} (-1)^{3-k} C_6^k \cos((6-2k)\theta)\\ &= \frac{20}{64} + \frac{2}{64}(-\cos 6\theta + 6\cos 4\theta - 15\cos 2\theta)\\ &= \frac{5}{16} - \frac{1}{32}\cos 6\theta + \frac{3}{16}\cos 4\theta - \frac{15}{32}\cos 2\theta.\end{aligned}$$

2.2 Les Intégrales trigonométrique

Lemme 2.2 *pour $n, m \in \mathbb{N}$, on définit :*

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos^m\theta \sin^n\theta d\theta$$

alors

$$I_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}$$

et

$$I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$$

Corollaire 2.1 *-Si m et n sont pairs $I_{m,n} = coeff(m,n)\times$ $I_{0,0} = coeff(m,n) \times 2\pi$ (on abaissant m et n, de 2 en 2, jusqu'à arriver à 0 et 0).*

-Sinon $I_{m,n}$= $coeff(m,n) \times I_{1,0}$ ou bien $I_{0,1} = 0$ à chaque fois.

Donc $I_{m,n} \neq 0$ si et seulement si m et n sont pairs tous les deux.

Preuve.

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \int_0^{2\pi} \cos^m\theta\sin^n\theta d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \cos\theta\cos^{m-1}\theta\sin^n\theta d\theta \\
&= \left[\sin\theta\cos^{m-1}\theta\sin^n\theta\right]_0^{2\pi} \\
&\quad - \int_0^{2\pi} \sin\theta\left((m-1)(-\sin\theta)\cos^{m-2}\theta\sin^n\theta + n\cos\theta\cos^{m-1}\theta\sin^{n-1}\theta\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[(m-1)\cos^{m-2}\theta\sin^{n+2}\theta - n\cos^m\theta\sin^n\theta\right]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[(m-1)\cos^{m-2}\theta\sin^n\theta\left(1-\cos^2\theta\right) - n\cos^m\theta\sin^n\theta\right]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[(m-1)\left(\cos^{m-2}\theta\sin^n\theta - \cos^m\theta\sin^n\theta\right) - n\cos^m\theta\sin^n\theta\right]d\theta \\
&= (m-1)\int_0^{2\pi}\cos^{m-2}\theta\sin^n\theta d\theta - (m+n-1)\int_0^{2\pi}\cos^m\theta\sin^n\theta d\theta \\
&= (m-1)\, I_{m-2,n} - (m+n-1)\, I_{m,n}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow I_{m,n} + (m+n-1)\, I_{m,n} = (m-1)\, I_{m-2,n}$$

$$\Longrightarrow I_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}.$$

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n} = \frac{m-1}{m+n}\frac{m-2-1}{m-2+n} \\
I_{m-4,n} &= \frac{m-1}{m+n}\frac{m-3}{m-2+n}\frac{m-5}{m-4+n} I_{m-6,n} \\
&= \frac{m-1}{m+n}\frac{m-3}{m-2+n}\frac{m-5}{m-4+n}\frac{m-7}{m-6+n} I_{m-8,n} \\
&= ... = \frac{m-1}{m+n}\frac{m-3}{m-2+n}\frac{m-5}{m-4+n}\frac{m-7}{m-6+n}\cdots\frac{1}{2+n} I_{0,n}
\end{aligned}$$

■

Application :

Dans cette partie, on va proposer quelques exemples.

Exemple 2.6

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta\\ &= \left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}\\ &= \pi.\end{aligned}$$

Exemple 2.7

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta &= \int_0^{2\pi}\cos^2(1-\cos^2\theta)d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}(\cos^2\theta-\cos^4\theta)d\theta\\ &= \pi-\frac{3}{4}\pi\\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Exemple 2.8

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos^6\theta d\theta &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{16}+\frac{1}{32}\cos 6\theta+\frac{3}{16}\cos 4\theta+\frac{15}{32}\cos 2\theta\right)d\theta\\ &= \left[\frac{5}{16}\theta+\frac{1}{32}\frac{1}{6}\sin 6\theta+\frac{3}{16}\frac{1}{4}\sin 4\theta+\frac{15}{32}\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}\\ &= \frac{5}{8}\pi.\end{aligned}$$

Exemple 2.9

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^4\theta d\theta &= \int_0^{2\pi}\cos^2(1-\cos^2\theta)^2\theta d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\cos^2\theta-2\cos^4\theta+\cos^6\theta\right)d\theta\\ &= \pi-2\frac{3\pi}{4}+\frac{5\pi}{8}\\ &= \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

Exemple 2.10

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^8\theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{35}{128} + \frac{1}{128}\cos 8\theta + \frac{1}{16}\cos 6\theta + \frac{7}{32}\cos 4\theta + \frac{7}{16}\cos 2\theta \right) d\theta \\
&= \left[\frac{35}{128}\theta + \frac{1}{128}\frac{1}{8}\sin 8\theta + \frac{1}{16}\frac{1}{6}\sin 6\theta + \frac{7}{32}\frac{1}{4}\sin 4\theta + \frac{7}{16}\frac{1}{2}\sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{35}{64}\pi.
\end{aligned}$$

Exemple 2.11

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^6\theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta (1-\cos^2\theta)^3 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \left(1 - 3\cos^2\theta + 3\cos^4\theta - \cos^6\theta\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta - 3\cos^4\theta + 3\cos^6\theta - \cos^8\theta\right) d\theta \\
&= \pi - 3\left(\frac{3}{4}\pi\right) + 3\left(\frac{5}{8}\pi\right) - \left(\frac{35}{64}\pi\right) \\
&= \frac{5}{64}\pi.
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Théorie de la moyennisation

Dans ce chapitre on va étudier la méthode de moyennisation est l'une des plus importantes méthodes perturbatives utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. Cette méthode a une longue histoire qui commence avec les travaux classiques de Lagrange et Laplace en 1788 qui ont donné une justificationintuitive de la méthode.

3.1 Méthode de la moyenne

Théorème 3.1 *Considérons les deux équations suivantes :*

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon F\left(t, x\right) + \varepsilon^2 G\left(t, x, \varepsilon\right) \\ x\left(0\right) = x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

et

$$\begin{cases} \dot{y} = \varepsilon f^0(y) \\ y(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

où x, y, $x_0 \in D$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t \in [0, \infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, F et G sont périodiques de période T par rapport à la variable t, et $f_0(y)$ est la fonction moyenne de $F(t, y)$ en *ce qui concerne t c-à-d :*

$$f^0(y) = \frac{1}{T}\int_0^T F(t,y)dt$$

on suppose :

(i) $F, \partial F/\partial x, \partial^2 F/\partial x^2, G$ *et* $\partial G/\partial X$ *sont définies,continues et bornées par une constante indépendante de* ε *dans*

(ii) T *est une constane indépendante de* ε*.*

(iii) $y(t)$ *appartient à* D *sur le temps échelle* $1/\varepsilon$*.*

Alors les propriétées suivantes sont vérifées.

(a) Sur le temps échelle $1/\varepsilon$ *on a*

$$x(t) - y(t) = O(\varepsilon), \text{ quand } \varepsilon \to 0$$

(b) Si p *est un point d'équilibre du système moyenne (3.2),tel que*

$$\left[\frac{\partial f^0}{\partial y}\right]_{y=p} \neq 0 \tag{3.3}$$

Alors il éxiste une solution T *périodique* $\Phi(t,\varepsilon)$ *de l'équation (3,1) proche de* p *tel que*

$$\Phi(t,\varepsilon) \to p, \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

(c) Si (3,3) est négative, alors la solution périodique corréspondante de $\Phi(t,\varepsilon)$ *de l'équation (3,2) dans l'éspace* (t,x) *est asymptotiquement stable pour* ε *suffisamment petit.si (3,3) est positive, alors c'est instable.*

3.2 Forme générale

Soit l'équation :

$$\ddot{x} + \varepsilon f(x)\dot{x} + x = 0 \tag{3.4}$$

qui équivalante à le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon f(x)\, y \end{cases} \tag{3.5}$$

qui équivalante aussi à le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \tag{3.6}$$

où f est une fonction pair et

$$F(x) = \int\limits_0^x f(s)\, ds$$

En posant

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$$

on obtient

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \cos\theta\dot{x} + \sin\theta\dot{y} \\ &= \cos\theta r\sin\theta - \sin\theta\left(r\cos\theta + \varepsilon r\sin\theta f(r\cos\theta)\right) \\ &= -\varepsilon r\sin^2\theta f(r\cos\theta) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \dot{\widehat{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}} = \frac{1}{r}\left(\cos\theta\dot{y} - \sin\theta\dot{x}\right) \\ &= \frac{1}{r}\left(-\cos\theta\left(r\cos\theta + \varepsilon r\sin\theta f(r\cos\theta)\right) - \sin\theta\left(r\sin\theta\right)\right) \\ &= -1 - \varepsilon\cos\theta\sin\theta f(r\cos\theta) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\dot r}{\dot\theta} &= \frac{\varepsilon r\sin^2\theta f\left(r\cos\theta\right)}{-1-\varepsilon\cos\theta\sin\theta f\left(r\cos\theta\right)}\\ &= \underbrace{\varepsilon r\sin^2\theta f\left(r\cos\theta\right)}_{=F(\theta,r)}+\varepsilon^2 G\left(\theta,r,\varepsilon\right).\end{aligned}$$

Exemple 3.1 *Soit l'équation suivante :*

$$\left\{\begin{array}{l}\dot x=-y+\varepsilon x\left(x^4-x^2+1\right)\\ \dot y=x+\varepsilon y\left(y^4+\frac{43}{108}y^2-\frac{139}{144}\right)\end{array}\right. \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\dot r &= \cos\theta\dot x+\sin\theta\dot y\\ &= \cos\theta\left(-r\sin\theta+\varepsilon r\cos\theta\left(r^4\cos^4\theta-r^2\cos^2\theta+1\right)\right)\\ &\quad+\sin\theta\left(r\cos\theta+\varepsilon r\sin\theta\left(r^4\sin^4\theta+\frac{43}{108}r^2\sin^2\theta-\frac{139}{144}\right)\right)\\ &= \varepsilon\left(r^5\left(\cos^6\theta+\sin^6\theta\right)+r^3\left(-\cos^4\theta+\frac{43}{108}\sin^4\theta\right)+r\left(\cos^2\theta-\frac{139}{144}\sin^2\theta\right)\right)\\ &= \varepsilon r\left(r^4\left(\cos^6\theta+\sin^6\theta\right)+r^2\left(-\cos^4\theta+\frac{43}{108}\sin^4\theta\right)+(\cos^2\theta-\frac{139}{144}\sin^2\theta)\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\dot\theta &= \dot{\overbrace{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}}=\frac{1}{r}\left(\cos\theta\dot y+\sin\theta\dot x\right)\\ &= \frac{1}{r}\cos\theta\left(r\cos\theta+\varepsilon r\sin\theta\left(r^4\sin^4\theta+\frac{43}{108}r^2\sin^2\theta-\frac{139}{144}\right)\right)\\ &\quad-\frac{1}{r}\sin\theta\left[-r\sin\theta+\varepsilon r\cos\theta\left(r^4\cos^4\theta-r^2\cos^2\theta+1\right)\right]\\ &= 1+\varepsilon\cos\theta\sin\theta\left(r^4\sin^4\theta-r^4\cos^4\theta+\frac{43}{108}r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta-\frac{139}{144}-1\right).\end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} &= \frac{\varepsilon r\left(r^4\left(\cos^6\theta+\sin^6\theta\right)+r^2\left(-\cos^4\theta+\frac{43}{108}\sin^4\theta\right)+\left(\cos^2\theta-\frac{139}{144}\sin^2\theta\right)\right)}{1+\varepsilon\cos\theta\sin\theta\left(r^4\sin^4\theta-r^4\cos^4\theta+\frac{43}{108}r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta-\frac{139}{144}-1\right)} \\
&= \underbrace{\varepsilon r\left(r^4\left(\cos^6\theta+\sin^6\theta\right)+r^2\left(-\cos^4\theta+\frac{43}{108}\sin^4\theta\right)+\left(\cos^2\theta-\frac{139}{144}\sin^2\theta\right)\right)}_{=F(\theta,r)}+\varepsilon^2G\left(\varepsilon,\theta,r\right).
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
f^0(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\theta,r)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}r\int_0^{2\pi}\left[r^4(\cos^6\theta+\sin^6\theta)+r^2\left(-\cos^4\theta+\frac{43}{108}\sin^4\theta\right)\right]d\theta \\
&\quad+\frac{1}{2\pi}r\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\theta-\frac{139}{144}\sin^2\theta\right)d\theta \\
&= r\left(r^4-\frac{13}{36}r^2+\frac{1}{36}\right).
\end{aligned}
$$

Alors

$$
f^0(r)=0\Rightarrow\frac{5}{8}r\left(r^4-\frac{13}{36}r^2+\frac{1}{36}\right)=0\Rightarrow r_1=\frac{1}{2}\ \textit{et}\ r_2=\frac{1}{3}.
$$

Donc il existe deux cycles limites d'amplitude $\frac{1}{2}$ *et* $\frac{1}{3}$.

On a :

$$
\left[\frac{\partial f^0}{\partial r}\right]_{r=\frac{1}{2}}=\frac{5}{8}\left[5r^4-\frac{13}{12}r^2+\frac{1}{36}\right]_{r=\frac{1}{2}}=\frac{25}{576}\ \textit{(positif)}
$$

Donc le cycle limite d'amplitude $\frac{1}{2}$ *est instable.*

$$
\left[\frac{\partial f^0}{\partial r}\right]_{r=\frac{1}{3}}=\frac{5}{8}\left[5r^4-\frac{13}{12}r^2+\frac{1}{36}\right]_{r=\frac{1}{3}}=-\frac{25}{1296}\ \textit{(négatif)}
$$

Donc le cycle limite d'amplitude $\frac{1}{3}$ *est stable.*

Chapitre 4

Cycles limites d'une classe d'équations différentielles de second ordre et de l'équation différentielle de Duffing

Ce chapitre est le fruit de notre travail on va étudier les cycles limites des équations différentielles de seconde ordre et précisément les cycles limites de l'équation différentielle de Duffing en utilisant la méthode de la moyennisation du premier ordre

4.1 Deuxiéme méthode de la moyennisation du premier ordre

Considérons le système différentiel :

$$\dot{X} = F_0(t, X) + \varepsilon F_1(t, X) + \varepsilon^2 F_2(t, X, \varepsilon), \tag{4.1.1}$$

où $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ pour ε_0 suffisamment petit. Les fonctions F_0, $F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ et $F_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions de classe C^2, T-périodique en t et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Supposons que le système non perturbé

$$\dot{X} = F_0(t, X) \tag{4.1.2}$$

a une sous-variété de solutions périodiques. Une de ces solutions est donnée par la théorie de la moyennisation.

Soit $X(t, z)$ la solution du système non perturbé (4.1.2) telle que $X(0, z) = z$. La linéarisation du système non perturbé (4.1.2) le long de la solution $X(t, z)$ s'écrit

$$\dot{Y} = D_X F_0(t, X(t, z))Y \tag{4.1.3}$$

Notons par $M_z(t)$ la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (4.1.3). Supposons qu'il existe un ensemble ouvert V avec $\bar{V} \subset \Omega$, tel que pour chaque $z \in \bar{V}$, $X(t, z, 0)$ est T-périodique, où $X(t, z, 0)$ est la solution du système non perturbé (4.1.2), avec $X(0, z, 0) = z$. L'ensemble $\bar{V}$ est isochrone pour le système (4.1.1). Alors, on à le résultat suivant.

Théorème 4.1 : (Perturbation d'un ensemble isochrone) :

Soit V un ensemble ouvert et borné avec $\bar{V} \subset \Omega$ tel que pour chaque $z \in \bar{V}$, la solution

$X(t,z)$ est T-périodique, considérons la fonction $\mathcal{F} : \bar{V} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{T}\int_0^T M_z^{-1}(t,z)\, F_1(t, X(t,z))\, dt \tag{4.1.4}$$

S'il existe $a \in V$ avec $\mathcal{F}(a) = 0$ et $\det\left(\frac{d\mathcal{F}}{dz}(a)\right) \neq 0$, alors il existe une solution T-périodique $\phi(t,\varepsilon)$ du système (4.1.1) telle que $\phi(0,\varepsilon) \to a$ quand $\varepsilon \to 0$.

Preuve : Voir le corollaire 1 de l'article [10].

Exemple 4.1.1 : Considérons le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon\left(kx\cos^2 t - 2\cos^3 t\right) \end{cases} \tag{4.1.5}$$

où ε suffisamment petit et k est une constante. Ce système peut s'écrire sous la forme (4.1.1) avec

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ F_0(t,X) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix},\ F_1(t,X) = \begin{pmatrix} 0 \\ kx\cos^2 t - 2\cos^3 t \end{pmatrix}$$

La partie non perturbé du système (4.1.5) est :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \tag{4.1.6}$$

Il correspond à l'oscillateur harmonique simple dont la solution est :

$$\begin{cases} x(t) = x_0\cos t + y_0\sin t \\ y(t) = -x_0\sin t + y_0\cos t \end{cases}$$

Nous observons que pour toute condition initiale $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \diagdown \{(0,0)\}$, la solution correspondante est 2π-périodique et peut être écrite comme

$$\begin{cases} x(t) = r\cos(a-t) \\ y(t) = r\sin(a-t) \end{cases}$$

où $r > 0$ et a est une constantes.

Soit $X(t,z,\varepsilon)$ la solution du système (4.1.5) tel que $X(0,z,\varepsilon) = z = (r,a)$. L'équation du système non perturbé (4.1.6) le long de la solution périodique $X(t,z,0)$ est :

$$\dot{Y} = D_X F_0(t, X(t,z,0))Y$$

Soit $M(t)$ la matrice fondamentale de ce système différentiel linéaire, elle s'écrit :

$$M(t) = M_z(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

D'aprés l'équation (4.1.4) on à :

$$\mathcal{F}(z) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(r,a) \\ \mathcal{F}_2(r,a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}kr\sin a \\ \frac{3}{8}kr\cos a - \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

qui a une seule racine pour $r_0 > 0$ donnée par $(r_0, a_0) = (\frac{2}{k}, 0)$ avec $k > 0$.

Le Jacobien est :

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)}{\partial(r,a)}\right)/_{(r_0,a_0)} = \frac{3}{32}k \neq 0.$$

Alors d'après le théorème 4.1, le système (4.1.5) a une solution unique 2π-périodique $x(t,\varepsilon)$ qui tend vers la solution périodique $\frac{2}{k}\cos t$ quand $\varepsilon \to 0$.

4.2 Cycles limites de l'équation différentielle $\ddot{x}+x-f(t)=\varepsilon F(t,x,\dot{x})$

Dans cette section, nous allons appliquer le théorème 4.2 pour l'étude des solutions périodiques de l'équation différentielle du second ordre de la forme

$$\ddot{x}+x-f(t)=\varepsilon F(t,x,\dot{x}) \tag{4.2.1}$$

Théorème 4.2 : On considère l'équation différentielle (4.2.1), où ε est suffisamment petit, $F(t+2\pi,x,\dot{x})=F(t,x,\dot{x})$ et f est 2π-périodique tel que

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)\,dt=\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\,dt=0.$$

Soit

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(x_0,y_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(t)\,F(t,x(t),y(t))\,dt, \\ \mathcal{F}_2(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t)\,F(t,x(t),y(t))\,dt, \end{cases} \tag{4.2.2}$$

où

$$\begin{cases} x(t)=x_0\cos t+y_0\sin t+\int_0^t f(\theta)\sin(t-\theta)\,d\theta, \\ y(t)=-x_0\sin t+y_0\cos t+\int_0^t f(\theta)\cos(t-\theta)\,d\theta. \end{cases}$$

Alors, pour chaque (x_0^*,y_0^*) solution du système :

$$\mathcal{F}_1(x_0,y_0)=0,\ \mathcal{F}_2(x_0,y_0)=0, \tag{4.2.3}$$

avec

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}\right)/_{(x_0,y_0)=\left(x_0^*,y_0^*\right)}\neq 0, \tag{4.2.4}$$

l'équation différentielle (4.2.1) a une solution périodique $x(t,\varepsilon)$ qui tend vers la solution périodique :

$$x(t)=x_0^*\cos t+y_0^*\sin t+\int_0^t f(\theta)\sin(t-\theta)\,d\theta, \tag{4.2.5}$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x - f(t) = 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

Preuve. En introduisant les variables $(x, y) = (x, \dot{x})$ l'équation différentielle du second ordre (4.2.1) s'écrit comme un système différentiel du premier ordre défini dans un sous-ensemble ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + f(t) + \varepsilon F(t, x, y). \end{cases} \tag{4.2.6}$$

Appliquons le théorème 4.1 de la moyennisation d'ordre 1 pour le système (4.2.6). On note que ce système peut s'écrit sous la forme du système (4.1.1) avec

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \; F_0(t, X) = \begin{pmatrix} y \\ -x + f(t) \end{pmatrix} \text{ et } F_1(t, X) = \begin{pmatrix} 0 \\ F(t, X) \end{pmatrix}.$$

Le système non perturbé du système (4.2.6) est :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + f(t), \end{cases} \tag{4.2.7}$$

ce système admet une solution périodique si est seulement si

$$\int_0^{2\pi} f(t) \sin(t)\, dt = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(t)\, dt = 0.$$

Alors, les solutions 2π-périodiques de (4.2.7) sont $(x(t), y(t))$ telle que :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t + y_0 \sin t + \int_0^t f(\theta) \sin(t - \theta)\, d\theta \\ -x_0 \sin t + y_0 \cos t + \int_0^t f(\theta) \cos(t - \theta)\, d\theta \end{pmatrix}. \tag{4.2.8}$$

Soit $X(t, z, \varepsilon)$ la solution du système (4.2.6) tel que $X(0, z, 0) = z = (x_0, y_0)$. La linéarisation du système non perturbé (4.2.7) le long de la solution périodique $X(t, z, 0)$

est :

$$\dot{Y} = D_X F_0(t, X(t,z))Y.$$

Soit $M(t)$ La matrice fondamentale du système non perturbé (4.2.7)

$$M(t) = M_z(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

d'où

$$M^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Soit $V \neq \varnothing$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et soit $z = (x_0^*, y_0^*) \in V$. Toutes les hypothèses du théorème 4.1 sont satisfaites. Par conséquent, nous allons étudier les zéros z de la fonction $\mathcal{F}(z)$ donnée par :

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_z^{-1}(t,z) F_1(t, X(t,z))\, dt$$

c.à.d

$$\mathcal{F}(z) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(x_0, y_0) \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t \; F(t, x(t), y(t))\, dt, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t \; F(t, x(t), y(t))\, dt, \end{cases}$$

où $x(t), y(t)$ sont données par (4.2.8).

Alors, pour chaque (x_0^*, y_0^*) solution du système

$$\mathcal{F}_1(x_0, y_0) = 0, \quad \mathcal{F}_2(x_0, y_0) = 0,$$

avec

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(x_0, y_0)}\right) /_{(x_0,y_0)=\left(x_0^*, y_0^*\right)} \neq 0,$$

L'équation différentielle (4.2.1) a une seule solution 2π-périodique $x(t,\varepsilon)$ telle que $x(t,\varepsilon)$ tend vers

$$x(t) = x_0^* \cos t + y_0^* \sin t + \int_0^t f(\theta) \sin(t-\theta)\, d\theta,$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x - f(t) = 0$ quand $\varepsilon \to 0$. Ceci termine la démonstration du théorème 4.2.■

Applications :

Nous donnons deux exemples concernant le théorème 4.2.

Exemple 4.2.1 : Soit l'équation différentielle

$$\ddot{x} + x + \frac{3}{2}\varepsilon\dot{x} = -3\sin 2t, \tag{4.2.9}$$

qui est équivalente à l'équation différentielle (4.2.1) avec $F(t,x,\dot{x}) = -\frac{3}{2}\dot{x}$ et $f(t) = -3\sin 2t$.

Les fonctions $\mathcal{F}_1(x_0,y_0)$ et $\mathcal{F}_2(x_0,y_0)$ données par (4.2.2) sont respectivement

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(x_0,y_0) = -\frac{3}{4}x_0, \\ \mathcal{F}_2(x_0,y_0) = -\frac{3}{4}y_0 + \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 0$ a une seule racine $(x_0^*, y_0^*) = (0,2)$. Comme

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}\right) /_{(x_0,y_0)=\left(x_0^*,y_0^*\right)} = \frac{9}{16} \neq 0,$$

alors d'après le théorème 4.2, l'équation (4.2.9) admet une solution périodique qui tend vers la solution $x(t) = \sin 2t$ de l'équation différentielle $\ddot{x} + x + 3\sin 2t = 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

Exemple 4.2.2 : Considérons l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + x + \sin^6 t = \varepsilon\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right), \tag{4.2.10}$$

avec $b \neq \frac{32}{15}c$ et $b \neq \frac{32}{25}c$.

Prenons $F(t,x,\dot{x}) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ et $f(t) = -\sin^6 t$ dans l'équation différentielle (4.2.1), les fonctions $\mathcal{F}_1(x_0,y_0)$, $\mathcal{F}_2(x_0,y_0)$ sont respectivement

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(x_0,y_0) = \frac{1}{64}y_0(15b-32c), \\ \mathcal{F}_2(x_0,y_0) = \frac{8}{35}c - \frac{25}{64}bx_0 + \frac{1}{2}cx_0 - \frac{5}{28}b. \end{cases}$$

Le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 0$ a une seule racine $(x_0^*, y_0^*) = (-\frac{16}{35}, 0)$. Comme

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}\right)/_{(x_0,y_0)=\left(x_0^*,y_0^*\right)} = \frac{1}{4096}(15b-32c)(25b-32c) \neq 0,$$

d'après le théorème 4.2, l'équation (4.2.10) admet une solution périodique qui tend vers la solution

$$x(t) = -\frac{5}{16} - \frac{1}{1120}\cos 6t + \frac{1}{80}\cos 4t - \frac{5}{32}\cos 2t$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x + \sin^6 t = 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

4.3 Cycles limites de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = \varepsilon F(t,x,\dot{x})$

Dans cette section, nous allons appliquer le théorème 4.2 pour l'étude des solutions périodiques de l'équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\ddot{x} + x = \varepsilon F(t,x,\dot{x}). \tag{4.3.1}$$

Ces orbites bifurquent des orbites périodiques de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$.

Théorème 4.3 : Considérons l'équation différentielle (4.3.1), où ε est suffisamment petit et $F(t+2\pi,x,\dot{x}) = F(t,x,\dot{x})$.

Soit :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1\left(x_0,y_0\right) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin t\ F\left(t, x_0\cos t + y_0\sin t, -x_0\sin t + y_0\cos t\right)dt, \\ \mathcal{F}_2\left(x_0,y_0\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos t\ F\left(t, x_0\cos t + y_0\sin t, -x_0\sin t + y_0\cos t\right)dt. \end{cases} \quad (4.3.2)$$

Alors, pour chaque (x_0^*, y_0^*) solution du système (4.2.3) satisfaisant (4.2.4), l'équation différentielle (4.3.1) a une solution périodique $x(t,\varepsilon)$ qui tend vers la solution périodique

$$x(t) = x_0^*\cos t + y_0^*\sin t, \quad (4.3.3)$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

Preuve : L'équation (4.3.1) est un cas particulier de l'équation (4.2.1) du théorème 4.2 lorsque $f(t) = 0$. Nous omettons la preuve.■

Corollaire 4.3 : Soit l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + x + \varepsilon\left(f\left(x\right) + g\left(\dot{x}\right)\right) = \varepsilon h\left(t\right) \quad (4.3.4)$$

où $h(t+2\pi) = h(t)$ et ε est suffisamment petit.

Alors, pour chaque (x_0^*, y_0^*) solution du système (4.2.3) satisfaisant (4.2.4), l'équation différentielle (4.3.4) a une solution périodique $x(t,\varepsilon)$ qui tend vers la solution périodique (4.3.3) de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

Preuve : Pour la démonstration, on a besoin du théorème 4.3.

L'équation différentielle (4.3.4) est équivalente à l'équation (4.3.1) où $F\left(t,x,\dot{x}\right) = h\left(t\right) - f\left(x\right) - g\left(\dot{x}\right)$.

Le système différentiel associé à l'équation différentielle (4.3.4) est :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon\left(h\left(t\right) - f\left(x\right) - g\left(y\right)\right) \end{cases}$$

En calculant les fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ définies par (4.3.2), on obtient :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1\left(x_0, y_0\right) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin t \ \left(h\left(t\right) - f\left(x\right) - g\left(y\right)\right) dt \\ \mathcal{F}_2\left(x_0, y_0\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos t \ \left(h\left(t\right) - f\left(x\right) - g\left(y\right)\right) dt \end{cases}$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t + y_0 \sin t \\ -x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix}. \tag{4.3.5}$$

Les zéros (x_0^*, y_0^*) du système (4.2.3) par rapport aux variables x_0 et y_0 fournissent les orbites périodiques de l'équation (4.3.4) si (4.2.4) est satisfaite. Alors l'équation différentielle (4.3.4) a une solution de $2\pi-$périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution périodique

$$x\left(t\right) = x_0^* \cos t + y_0^* \sin t,$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \to 0$. Ceci termine la preuve du corollaire 4.3.■

4.4 Cycles limites de l'équation différentielle de Duffing

Dans cette section on s'intéresse à la recherche des solutions périodiques de la classe d'équations différentielles de second ordre dite équation de Duffing de la forme :

$$\ddot{x} + x + \varepsilon f(x) = \varepsilon \cos t \tag{4.4.1}$$

où ε est suffisamment petit.

Soit l'équation différentielle de Duffing (4.4.1), et soit les équations différentielles associées

$$\ddot{x} + x + \varepsilon(a_0 + a_1 x) = \varepsilon \cos t \tag{4.4.2}$$

$$\ddot{x} + x + \varepsilon(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = \varepsilon \cos t \tag{4.4.3}$$

$$\ddot{x} + x + \varepsilon(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5) = \varepsilon \cos t \tag{4.4.4}$$

Proposition 4.4 :

1. L'équation de Duffing (4.4.2) où $a_1 \neq 0$ possède un seul cycle limite.

2. L'équation de Duffing (4.4.3) où $a_3 \neq 0$ a un cycle limite si $\triangle < 0$, et trois cycles limites si $\triangle > 0$ où

$$\triangle = -48a_3(16a_1^3 + 81a_3).$$

3. Considérons l'équation de Duffing (4.4.4) où $a_5 \neq 0$ et soient :

$$\begin{aligned}
D_2 &= -\frac{6a_3}{5a_5}, \\
D_3 &= \frac{96a_3}{125a_5^3}(100a_1a_5 - 27a_3^2), \\
D_4 &= \frac{128}{3125a_5^5}(972a_3^4a_1 - 7920a_1^2a_3^2a_5 + 9375a_3a_5^2 + 16000a_1^3a_5^2), \\
D_5 &= \frac{4096}{78125a_5^7}(300000a_3a_1^2a_5^2 - 121500a_1a_3^3a_5 + 2592a_3^4a_1^3 \\
&\quad +13122a_3^5 - 23040a_1^4a_3^2a_5 + 51200a_1^5a_5^2 + 390625a_5^3, \\
E_2 &= \frac{2304a_3^2}{15625a_5^6}(4800a_1^2a_3a_5 - 1296a_1a_3^3 + 15625a_5^2), \\
F2 &= -\frac{384}{25}\frac{a_1a_3}{a_5^2}.
\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

On a les quatres cas suivants :

i) L'équation de Duffing (4.4.4) a un cycle limite si

$$D_5 > 0 \wedge (D_4 \leq 0 \vee D_3 \leq 0 \vee D_2 \leq 0)$$

ou

$$D_5 = 0 \wedge D_4 = 0 \wedge D_3 \neq 0 \wedge E_2 \neq 0$$

ou

$$D_5 = 0 \wedge D_4 < 0$$

ou

$$D_5 = 0 \wedge D_4 = 0 \wedge D_3 = 0 \wedge D_2 \neq 0 \wedge F_2 = 0.$$

ii) L'équation de Duffing (4.4.4) a deux cycles limites si

$$D_5 = 0 \wedge D_4 = 0 \wedge D_3 > 0 \wedge E_2 = 0.$$

iii) L'équation de Duffing (4.4.4) a trois cycles limites si

$$D_5 < 0$$

ou

$$D_5 = 0 \wedge D_4 > 0$$

iv) L'équation de Duffing (4.4.4) a cinq cycles limites si

$$D_5 > 0 \wedge D_4 > 0 \wedge D_3 > 0 \wedge D_2 > 0.$$

Preuve :

1. Soit l'équation de Duffing (4.4.2). Les fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ définies dans (5.16) sont :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(x_0, y_0) = \frac{1}{2}a_1 y_0, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_1 x_0. \end{cases}$$

Le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 0$ a une seule solution $(x_0^*, y_0^*) = (\frac{1}{a_1}, 0)$. Le Jacobien est donné

par :
$$\det\left(\frac{\partial\left(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\right)}{\partial\left(x_0,y_0\right)}\right)/_{(x_0,y_0)=\left(x_0^*,y_0^*\right)}=\frac{1}{4}a_1^2\neq 0.$$
D'après le corollaire 4.3, l'équation (4.4.2) a une solution de 2π-périodique $x(t,\varepsilon)$ qui tend vers la solution périodique
$$x(t)=\frac{1}{a_1}\cos t,$$
de l'équation différentielle $\ddot{x}+x=0$ quand $\varepsilon\to 0$.

2. Soit l'équation de Duffing (4.4.3). Les fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ définies dans (5.16) sont :

$$\begin{cases}\mathcal{F}_1\left(x_0,y_0\right)=\frac{1}{8}y_0\left(4a_1+3a_3\left(x_0^2+y_0^2\right)\right), \\ \mathcal{F}_2\left(x_0,y_0\right)=\frac{1}{8}\left(4-x_0\left(4a_1+3a_3\left(x_0^2+y_0^2\right)\right)\right),\end{cases}$$

et
$$\det\left(\frac{\partial\left(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\right)}{\partial\left(x_0,y_0\right)}\right)=\frac{1}{64}\left(4a_1+3a_3\left(x_0^2+y_0^2\right)\right)\left(4a_1+9a_3\left(x_0^2+y_0^2\right)\right).$$
Si $4a_1+3a_3\left(x_0^2+y_0^2\right)=0$, alors $\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}\right)/_{(x_0,y_0)=\left(x_0^*,y_0^*\right)}=0$. Ainsi les zéros de $(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$, qui peuvent fournir des solutions périodiques sont données par $(x_0^*,0)$ tel que x_0^* est une racine réelle de l'équation cubique

$$-4+x_0\left(4a_1+3a_3x_0^2\right)=0. \tag{4.4.6}$$

Le nombre de zéros réels de cette équation du troisième degré est déterminé par son discriminant $\Delta=-48a_3\left(16a_1^3+81a_3\right)$. Or l'équation (4.4.6) a une racine réelle simple si $\Delta<0$, et trois racines réelles simples si $\Delta>0$. D'après le corollaire 4.3, l'équation de Duffing (4.4.3) possède une ou trois solutions 2π-périodiques.

3. Soit l'équation de Duffing (4.4.4). Les fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ définies dans (5.16) sont :

$$\begin{cases}\mathcal{F}_1\left(x_0,y_0\right)=\frac{1}{16}y_0\left(8a_1+6a_3\left(x_0^2+y_0^2\right)+5\left(x_0^2+y_0^2\right)^2\right), \\ \mathcal{F}_2\left(x_0,y_0\right)=\frac{1}{2}\left(1-a_1x_0\right)-\frac{3}{8}a_3x_0\left(x_0^2+y_0^2\right)-\frac{5}{16}a_5x_0\left(x_0^2+y_0^2\right)^2.\end{cases}$$

Le jacobien associé à ces fonctions est :

$$\begin{aligned}\det\left(\frac{\partial\left(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\right)}{\partial\left(x_0,y_0\right)}\right) &= \frac{1}{256}\left(8a_1+6a_3\left(x_0^2+y_0^2\right)+5a_5\left(x_0^2+y_0^2\right)^2\right)\\ &\quad\times\left(8a_1+18a_3\left(x_0^2+y_0^2\right)+25a_5\left(x_0^2+y_0^2\right)^2\right).\end{aligned}$$

Si $8a_1+6a_3\left(x_0^2+y_0^2\right)+5a_5\left(x_0^2+y_0^2\right)^2=0$, alors $\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}\right)/_{(x_0,y_0)=\left(x_0^*,y_0^*\right)}=0$. Ainsi les zéros de $(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ qui peuvent fournir des solutions périodiques à l'aide du corollaire 4.3 sont donnés par $(x_0^*,0)$ tels que x_0^* est une racine réelle de l'équation de degré 5

$$x_0^5+\frac{6a_3}{5a_5}x_0^3+\frac{8a_1}{5a_5}x_0-\frac{8}{5a_5}=0. \tag{4.4.7}$$

D'après l'appendice 1, l'équation (4.4.7) est équivalente à l'équation (4.5.1) avec

$$p=\frac{6}{5}\frac{a_3}{a_5},\ q=0,\ r=\frac{8}{5}\frac{a_1}{a_5}\ \text{et}\ s=-\frac{8}{5a_5}.$$

i) L'équation (4.4.7) admet une racine simple réelle si

$$D_5>0\wedge\left(D_4\leq 0\vee D_3\leq 0\vee D_2\leq 0\right)$$

ou

$$D_5=0\wedge D_4=0\wedge D_3\neq 0\wedge E_2\neq 0$$

ou

$$D_5=0\wedge D_4<0$$

ou

$$D_5=0\wedge D_4=0\wedge D_3=0\wedge D_2\neq 0\wedge F_2=0.$$

où D_k pour $k=\overline{2,5}$, E_2 et F_2 sont données par (4.4.2). Alors l'équation (4.4.4) possède un seul cycle limite.

ii) L'équation (4.4.7) a deux racines réelles simples si

$$D_5 = 0 \wedge D_4 = 0 \wedge D_3 > 0 \wedge E_2 = 0.$$

Alors l'équation (4.4.4) possède deux cycles limites.

iii) L'équation (4.4.7) a trois racines réelles simples si

$$D_5 < 0$$

ou

$$D_5 = 0 \wedge D_4 > 0.$$

Alors l'équation (4.4.4) possède trois cycles limites.

iv) L'équation (4.4.7) a cinq racines réelles simples si

$$D_5 > 0 \wedge D_4 > 0 \wedge D_3 > 0 \wedge D_2 > 0.$$

Alors l'équation (4.4.4) possède cinq cycles limites. Ceci termine la preuve de la proposition 4.4.■

Applications :

Nous donnons quelques exemples de l'équation de Duffing en appliquant le théorème 4.3, le corollaire 4.3 et la proposition 4.4.

Exemple 4.4.1 : Considérons l'équation de Duffing :

$$\ddot{x} + x - \varepsilon x^3 = \varepsilon a \sin t \tag{4.4.8}$$

où ε est suffisamment petit et $a \neq 0$.

En appliquant le théorème 4.3, cette équation est équivalente à l'équation (4.3.1) avec $F(t, x, \dot{x}) = x^3 + a \sin t$.

Calculons les fonctions $\mathcal{F}_1(x_0, y_0)$ et $\mathcal{F}_2(x_0, y_0)$ données par (4.3.2), on trouve :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(x_0, y_0) = -\frac{3}{8}y_0^3 - \frac{3}{8}x_0^2 y_0 - \frac{1}{2}a, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0) = \frac{3}{8}x_0\left(x_0^2 + y_0^2\right). \end{cases}$$

Puisque le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 0$ possède une seule racine $(x_0^*, y_0^*) = (0, -\sqrt[3]{\frac{4}{3}a})$ qui vérifie :

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(x_0, y_0)}\right) /_{(x_0, y_0) = \left(x_0^*, y_0^*\right)} = \frac{27}{64}\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}a\right)^4} \neq 0,$$

alors, l'équation (4.4.8) a une seule solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution périodique

$$x(t) = -\sqrt[3]{\frac{4}{3}a}\sin t,$$

de l'équation $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

Exemple 4.4.2 : Considérons l'équation de Duffing forcée :

$$\ddot{x} + x + \varepsilon\alpha x^3 + \varepsilon\beta\dot{x} = \varepsilon\gamma\cos t, \tag{4.4.9}$$

où $\gamma \neq 0$ et $\alpha \neq 0$.

En appliquant le corollaire 4.3, l'équation (4.4.9) est équivalente à l'équation (4.3.4) avec $f(x) = \alpha x^3$, $g(\dot{x}) = \beta\dot{x}$ et $h(t) = \gamma\cos t$.

Les fonctions $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k(x_0, y_0)$ pour $k = 1, 2$ définies dans (5.16) sont :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(x_0, y_0) = \frac{3}{8}\alpha y_0^3 - \frac{1}{2}\beta x_0 + \frac{3}{8}\alpha x_0^2 y_0, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0) = -\frac{1}{2}\beta y_0 - \frac{3}{8}\alpha x_0 y_0^2 + \frac{1}{2}\gamma - \frac{3}{8}\alpha x_0^3. \end{cases}$$

Calculons les racine du système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 0$, on obtient :

$$(x_0^*, y_0^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{27}\dfrac{\left(\left(81\alpha\gamma^2 + 3\sqrt{3}\sqrt{64\beta^6 + 243\alpha^2\gamma^4}\right)^{\frac{2}{3}} - 12\beta^2\right)^2}{\alpha\gamma\left(81\alpha\gamma^2 + 3\sqrt{3}\sqrt{64\beta^6 + 243\alpha^2\gamma^4}\right)^{\frac{2}{3}}}, \\ \frac{2}{9}\dfrac{\beta\left(\left(81\alpha\gamma^2 + 3\sqrt{3}\sqrt{64\beta^6 + 243\alpha^2\gamma^4}\right)^{\frac{2}{3}} - 12\beta^2\right)}{\alpha\gamma\left(81\alpha\gamma^2 + 3\sqrt{3}\sqrt{64\beta^6 + 243\alpha^2\gamma^4}\right)^{\frac{1}{3}}} \end{pmatrix}^t.$$

Comme le Jacobien

$$\det\left(\frac{\partial\left(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\right)}{\partial\left(x_0, y_0\right)}\right) /_{(x_0,y_0)=\left(x_0^*,y_0^*\right)} = \frac{1}{4}\beta^2 + \frac{27}{64}\alpha^2\left(\left(x_0^*\right)^2 + \left(y_0^*\right)^2\right)^2 \neq 0,$$

alors l'équation (4.4.9) a une solution périodique $x(t,\varepsilon)$ qui tend vers la solution périodique

$$x(t) = \frac{1}{27}\frac{\left(\left(81\alpha\gamma^2+3\sqrt{3}\sqrt{64\beta^6+243\alpha^2\gamma^4}\right)^{\frac{2}{3}}-12\beta^2\right)^2}{\alpha\gamma\left(81\alpha\gamma^2+3\sqrt{3}\sqrt{64\beta^6+243\alpha^2\gamma^4}\right)^{\frac{2}{3}}}\cos t + \frac{2}{9}\frac{\beta\left(\left(81\alpha\gamma^2+3\sqrt{3}\sqrt{64\beta^6+243\alpha^2\gamma^4}\right)^{\frac{2}{3}}-12\beta^2\right)}{\alpha\gamma\left(81\alpha\gamma^2+3\sqrt{3}\sqrt{64\beta^6+243\alpha^2\gamma^4}\right)^{\frac{1}{3}}}\sin t,$$

quand $\varepsilon \to 0$.

Exemple 4.4.3 : Soit l'équation de Duffing :

$$\ddot{x} + x + \varepsilon\left(x^5 - 5x^3 + 20x^2 + \frac{9}{50}x + 48\right) = \varepsilon\cos t.$$

Selon la proposition 4.4 on à :

$$D_5 = -1.889029213 \times 10^{13} < 0.$$

Puisque la condition (iii) est vérifiée, on conclut que cette équation admet trois cycles limites $x_k(t,\varepsilon)$ pour $k = \overline{1,3}$ qui tendent vers les solutions périodiques $x_1(t) = 2.461652621\cos t$, $x_2(t) = -0.6877650408\cos t$ et $x_3(t) = -2.416031742\cos t$, de l'équation différentielle

$\ddot{x}+x=0$ quand $\varepsilon\to 0$.

Exemple 4.4.4 : Soit l'équation de Duffing :

$$\ddot{x}+x+\varepsilon\left(x^5-5x^3+4x-8\right)=\varepsilon\cos t.$$

Selon la proposition 4.4, on à :

$$D_2=6,\ D_3=1056,\ D_4=\frac{244864}{25}\text{ et }D_5=\frac{784330752}{3125}.$$

Puisque la condition de (iv) est vérifiée, on conclut que cette équation admet cinq cycles limites $x_k(t,\varepsilon)$ pour $k=\overline{1,5}$ qui tendent vers les solutions périodiques $x_1(t)=0.2677877780\cos t$, $x_2(t)=0.9684740107\cos t$, $x_3(t)=2.196452433\cos t$, $x_4(t)=-1.346099741\cos t$, et $x_5(t)=-2.086614481\cos t$, de l'équation $\ddot{x}+x=0$ quand $\varepsilon\to 0$.

4.5 Appendice

4.5.1 Classification des racines d'un polynôme de degré 5.

Soit $g_5(x)$ un polynôme de degré cinq donné par :

$$g_5(x)=x^5+px^3+qx^2+rx+s. \tag{4.5.1}$$

Le tableau suivant donne le nombre des racines réelles et imaginaires, et la multiplicité des racines répétées du polynôme g_5 de degré 5 dans tous les cas :

$$\begin{aligned}
&(1)\ \ D_5 > 0 \wedge D_4 > 0 \wedge D_3 > 0 \wedge D_2 > 0 \ \ \{1,1,1,1,1\}\\
&(2)\ \ D_5 > 0 \wedge (D_4 \leq 0 \vee D_3 \leq 0 \vee D_2 \leq 0) \ \ \{1\}\\
&(3)\ \ D_5 < 0 \ \ \{1,1,1\}\\
&(4)\ \ D_5 = 0 \wedge D_4 > 0 \ \ \{2,1,1,1\}\\
&(5)\ \ D_5 = 0 \wedge D_4 < 0 \ \ \{2,1\}\\
&(6)\ \ D_5 = 0 \wedge D_4 = 0 \wedge D_3 > 0 \wedge E_2 \neq 0 \ \ \{2,2,1\}\\
&(7)\ \ D_5 = 0 \wedge D_4 = 0 \wedge D_3 > 0 \wedge E_2 = 0 \ \ \{3,1,1\}\\
&(8)\ \ D_5 = 0 \wedge D_4 = 0 \wedge D_3 < 0 \wedge E_2 \neq 0 \ \ \{1\}\\
&(9)\ \ D_5 = 0 \wedge D_4 = 0 \wedge D_3 < 0 \wedge E_2 = 0 \ \ \{3\}\\
&(10)\ \ D_5 = 0 \wedge D_4 = 0 \wedge D_3 = 0 \wedge D_2 \neq 0 \wedge F_2 \neq 0 \ \ \{3,2\}\\
&(11)\ \ D_5 = 0 \wedge D_4 = 0 \wedge D_3 = 0 \wedge D_2 \neq 0 \wedge F_2 = 0 \ \ \{4,1\}\\
&(12)\ \ D_5 = 0 \wedge D_4 = 0 \wedge D_3 = 0 \wedge D_2 = 0 \ \ \{5\}
\end{aligned} \tag{4.5.2}$$

où

$$\begin{aligned}
&D_2 = -p,\\
&D_3 = 40rp - 12p^3 - 45q^2,\\
&D_4 = 12p^4r - 4p^3q^2 + 117prq^2 - 88r^2p^2 - 40qp^2s + 125ps^2 - 27q^4 - 300qrs + 160r^3,\\
&D_5 = -1600qsr^3 - 3750ps^3q + 2000ps^2r^2 - 4p^3q^2r^2 + 16p^3q^3s - 900rs^2p^3 + 825q^2p^2s^2\\
&\qquad + 144pq^2r^3 + 2250q^2rs^2 + 16p^4r^3 + 108p^5s^2 - 128r^4p^2 - 27q^4r^2 + 108q^5s + 256r^5\\
&\qquad + 3125s^4 - 72p^4rsq + 560r^2p^2sq - 630prq^3s,\\
&E_2 = 160r^2p^3 + 900q^2r^2 - 48rp^5 + 60q^2p^2r + 1500rpsq + 16q^2p^4\\
&\qquad - 1100qp^3s + 625s^2p^2 - 3375q^3s,\\
&F_2 = 3q^2 - 8rp.
\end{aligned} \tag{4.5.3}$$

Ces six polynômes forment un système de discrimination qui est suffisante pour la classification des racines du polynôme de degré cinq ci-dessus.

La colonne de droite du tableau décrit les situations des racines. Par exemple, $\{1,1,1,1,1\}$ signifie cinq racines réelles simples et $\{2,2,1\}$ signifie deux racines réelles doubles et une racine réelle simple. Il n'ya qu'une seule racine réelle simple, à la fois dans les cas (2) et (8), cependant, pas de racines répétée dans le cas (2), tandis que deux racines doubles imaginaires dans le cas (8).
Pour plus de détails voir l'annexe A dans l'article [9].

Conclusion

En conclusion, la méthode de la moyenne est une technique mathématique utile pour résoudre l'équation de Duffing et d'autres équations différentielles non-linéaires. Elle permet de simplifier considérablement la résolution de ces équations tout en conservant les caractéristiques essentielles du mouvement des systèmes physiques.

Nous espérons que cette présentation vous a permis de mieux comprendre l'importance de l'équation de Duffing et de la méthode de la moyenne dans la physique. Nous vous encourageons à poursuivre votre exploration de ce sujet fascinant.

Bibliographie

[1] **A. Buica and J. Llibre.** Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree. Bull. Sci. Math. 128 (2004), 7 - 22.

[2] **Y.bouattia.** Cycles limites de l'équation de Liénard dans les régimes fort et faible. Memoire de magister. U.B.M. Annaba. 2006.

[3] **L.boukhedir F. kabadji .** Sur la moyennisation dans les équations différentielles ordinaires. Memoire de master université 08 mais 1945 Guelma 2021.

[4] **L. Perko.** Differential equations and dynamical systems. third edition Springer (2000).

[5] **L. Yang,** Recent advances on determining the number of real roots of parametric polynomials. (1999), 225 - 242.

[6] **F.TOUATI .** Cycles limites d'une classe des équations différentielles du second ordre et de l'équation de Duffing. Thèse de Doctorat. U.B.M. Annaba. 2015.