République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l’Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l’obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par : **BOUDOUDA Marwa**

Intitulé

QUELQUES INÉGALITÉS IMPLIQUANT LA CONSTANTE *e* ET UNE APPLICATION À L’INÉGALITÉ DE CARLEMAN

Dirigé par : Dr. BAHLOU Tarek

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. BOUSSETILA Nadjib**	**Prof.**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. BAHLOUL Tarek**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. LARIBI Naima**	**MCA**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2023

Dédicace

Je dédie ce travail,
comme preuve de respect, de gratitude, et de reconnaissance à :

À mes très chers parents,

À mes frères Marwane et Safwane

À ma soeur Safwa

À mon cher mari, pour la patience et le soutien dont il a fait preuve pendant toute la durée de ce travail.

À ma chère fille Janna Taline

À tous mes amis et collègues

A tous ceux qui , par un mot , m'ont donné la force de continuer

À tous ceux qui, ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail

Marwa

Remerciements

Je tiens tous d'abord à remercier ALLAH le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la patience d'accomplir ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur de mémoire, Monsieur BAHLOUL Tarek. Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Sans oublier de remercier mes parents et mon mari pour leurs soutiens morals, leurs encouragements et leurs sacrifices, pour la bonne marche de mes études.

Je désire aussi remercier les professeurs de l'université de 8 mai 1945 Guelma, qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires.

Dans l'impossibilité de citer tous les noms, nos sincères remerciements vont à tous ceux et celles, qui de près ou de loin, ont permis par leurs conseils et leurs compétences dans la réalisation de ce mémoire

Résumé

Il est bien connu que la constante e joue un rôle important dans de nombreux domaines des mathématiques. L'inégalité de Carleman est le bon exemple d'applications de l'approximation de e

Mon travail consiste a appliqué l'inégalité de Carleman pour avoir une bonne approximations de e.

Mots clés : Inégalité de Carleman, Approximations de e.

Abstract

It is well known that the constant e plays an important role in many areas of mathematics. The Carleman's inequality is good example of applications of approximation of e.

My work consists of applying Carleman's inequality to obtain a good approximation of

key words : Carleman's inequality, approximations of e

الملخص

من المعروف جيدا أن الثابت e يلعب دورا مهما في العديد من المجالات الرياضياتية. تعتبر متباينة كارمان أفضل مثال لتقريب العدد e.

يتمثل عملي في تطبيق متباينة كارلمان للحصول على تقريب جيد لـ e.

الكلمات المفتاحية: متباينة كارمان، تقريب العدد e.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

L'invention des logarithmes

Il est bien connu que la constante e joue un rôle important dans de nombreux domaines des mathématiques. Il intervient dans de nombreuses inégalités, identités, développements de séries et certaines fonctions spéciales.

L'inégalité de Carleman est le bon exemple d'applications de l'approximation de e de nombreux résultats ont permis de généraliser l'inégalité susmentionnée en utilisant de meilleures approximations de e

[2] L'histoire du nombre e débute en Suisse, grâce aux travaux de *John Napier* (ou Neper). Fort de ses études à l'université de *St-Andrews*, il consacre une bonne partie de sa vie à la gestion et à l'administration de ses terres. Les mathématiques le fascinent particulièrement et en 1614, il publie un manifeste qui lui prit près de vingt ans à rédiger, *le Mirifici logarithorum canonis descriptio.* Cet ouvrage a un but précis : simplifier le travail de tous les hommes qui ont des calculs à effectuer dans l'exercice de leur métier, donc permettre à tous ces calculateurs d'alléger leurs tâches quotidiennes. Ce qui embête le plus ces hommes, il l'énonce lui-même :

« (...) il n'existe rien (à juste titre, chers étudiants en mathématiques) d'aussi fastidieux dans la pratiques des mathématiques, et qui gêne et empêche autant le travail des calculateurs que les multiplications, les divisions, l'extraction de racines carrées et cubiques de nombres immenses, qui en outre prennent du temps et sont sujettes à d'innombrables fautes d'inattention (...) »

Ainsi, *Napier* invente les logarithmes, qui ont pour objectif de substituer aux multiplications et aux divisions, des additions et des soustractions. Voici donc un exemple de l'utilité de cet outil innovateur, qui rappelons-le à l'époque, était d'une efficacité incontestée compte tenue que la calculatrice n'existait pas encore.

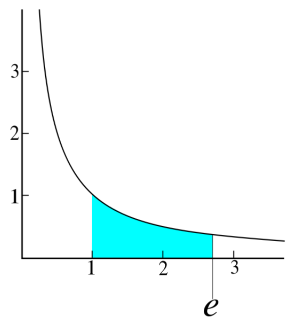
On définit le logarithme tel que : $log_a a^b = b$. Le logarithme est donc l'exposant qu'il faut affecter à la base a pour obtenir le nombre a^b.
En quoi toutefois ces logarithmes sont-ils liés au nombre e qui nous intéresse plus que tout ? Et bien c'est que ce nombre possède une particularité liée au logarithme. Si à l'époque de *Napier* , la base la plus courante était 10, on savait tout de même que d'autres bases pouvaient être utilisées si nécessaire. La spécificité de e est de servir de base pour définir le logarithme népérien, nommé ainsi en hommage à *Napier*, plusieurs années après sa mort. Bien que son collègue *William Oughtred* semble avoir utilisé e en appendice d'un traité de *Napier* en 1618, *Oughtred* n'aurait jamais proprement reconnu la constante comme telle.

Il faudra donc attendre l'apport d'autres mathématiciens pour que s'étende la compréhension du nombre e. D'ailleurs, la dénomination « e » arrivera seulement 100 ans plus tard, avec *Euler*. Toutefois, avant le travail de ce grand mathématicien, d'autres savants ont contribué à améliorer la compréhension du nombre e.

Le nombre e [8]
Quelques années plus tard, en 1647, le mathématicien belge *Grégoire* de *Saint-Vincent* s'intéresse à la courbe $xy = 1$ qu'on peut

également lire $y = \frac{1}{x}$. Dans le modèle fonctionnel actuel, on définit souvent cette équation comme celle de la fonction rationnelle. Cependant, *Saint-Vincent* étudie cette courbe comme celle d'une hyperbole, dont les deux branches figurent respectivement dans les quadrants I et III du plan cartésien. Dans son étude, le mathématicien cherche particulièrement à calculer l'aire sous la courbe de la branche de l'hyperbole du premier quadrant. Il découvre en effet une équivalence entre les aires de certaines régions. Par exemple, l'aire sous la courbe entre les valeurs de x égale à 1 et 1,5 est la même que l'aire sous la courbes entre les valeurs 2 et 3, ces deux couples de valeurs étant dans la même proportion. Deux ans plus tard, cette découverte permet à *Alphonse Antoine* de Sarasa, un élève de *Saint-Vincent* , d'établir un lien entre les fonctions logarithmiques et l'aire sous la courbe de l'hyperbole. Il en découle que l'aire sous la courbe entre les valeurs de x égale à 1 et à e est exactement 1 (il s'agit de l'aire de la région bleutée sur la figure ci-dessous)
Sous un angle algébrique, cela implique que : $\log_e e = 1$ ou comme le symbole usuel du logarithme népérien le veut $\ln e = 1$,

.



le nombre e et les intérêts composée [7]

Quelques années plus tard, dans un tout autre domaine des mathématiques, le suisse *Jacques Bernouilli* trouve une nouvelle approche pour définir le nombre e, et ce, grâce aux intérêts composés. Au XVIIe siècle, les intérêts sur les prêts étaient déjà connus depuis bien longtemps. *Bernouilli* se demande toutefois comment calculer l'intérêt de manière composée. Ce principe repose sur le fait d'ajouter le plus fréquemment possible les intérêts accumulés au montant initial déposé, afin d'augmenter son gain. Dans son expérience, *Bernouilli* calcule le montant obtenu si 1 dollar est déposé à 100% d'intérêt.

Si l'intérêt du capital est calculé annuellement, on obtient 2 dollars à la fin de l'année. Si l'intérêt est calculé mensuellement, on obtient alors 2,61 dollars à la fin de l'année, ce qui est bien. Si l'intérêt est plutôt calculé quotidiennement, on obtient 2,71 dollars à la fin de l'année, ce qui est beaucoup mieux !
Or, si on calcule l'intérêt chaque seconde, on obtient toujours 2,71 dollars. Voilà qui semble bien curieux ?
L'idée de *Bernouilli* était que le montant obtenu augmenterait nécessairement si le nombre de fois qu'on calculait l'intérêt augmentait, mais il semble que non. Par ce calcul, *Bernouilli* venait en fait de découvrir la constante e.
Le procédé qui vient d'être exposé se nomme le calcul de la limite de l'expression $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ Cela signifie qu'on cherche la valeur obtenue lorsque n est de plus en plus grand, et ultimement, lorsque n correspond à l'infini. Comme l'a démontré *Bernouilli*, cette valeur équivaut à e. Le mathématicien comprit alors rapidement le lien entre ce nombre mystérieux et l'exponentiation, ainsi que les logarithmes. Avec e, il lui était également possible de construire des courbes logarithmiques, que *Bernouilli* nomma spirales logarithmiques. Ces spirales se retrouvent dans la nature sous la forme de coquillages ou de pétales de fleurs. Elles ont d'ailleurs fasciné *Bernouilli* jusqu'à sa mort.

D'autres définitions pour le nombre e

Dans les années qui suivirent le travail de *Bernouilli* sur les intérêts composés, *Euler* entreprit de considérer le nombre e avec

rigueur. Tel que mentionné plus tôt, c'est lui qui le nomma officiellement ainsi. Si on ignore la véritable raison du choix de la lettre e pour traiter la singulière constante, plusieurs aiment croire qu'on l'attribue à la première lettre du nom du mathématicien *Euler*, ou encore à la première lettre du mot « exponentiel ». D'autres suggèrent qu'il s'agit simplement de la première lettre de l ?alphabet disponible dans les travaux *d'Euler*.
Ainsi, au milieu du XVIIIe siècle, le mathématicien de grande renommée *Euler* s'intéresse au nombre e. Il cherche en fait de nouvelles façons de l'obtenir. Il détermine d'abord le développement de e en série tel que :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{k!} + ...$$

Donc, plus on augmente la valeur de k pour laquelle on effectue le calcul, plus la valeur obtenue se rapproche de e.

Euler élabore également une autre technique d'estimation du nombre e, basée sur le développement des fractions continues.

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + ...}}}}}}}}$$

Cette technique permet d'affirmer que le nombre e est bien un nombre irrationnel, soit un nombre dont le développement décimal est infini et ne présente aucune régularité. Par ailleurs, une preuve de l'irrationalité de e est donnée dans la rubrique du même nom de ce site.

À l'époque, *Euler* est parvenu à déterminer avec exactitude les 18 premières décimales du nombre e. De nos jours, tout comme pour le nombre irrationnel ?, des mathématiciens de tous genres cherchent à calculer de nouvelles décimales au nombre e. Le dernier record est détenu depuis 2007 par *Shigeru Kondo et Steve*

Pagliarulo avec cent mille millions de décimales.

Notre mémoire est composée d'une introduction et de deux chapitres. Le premier chapitre donne quelques inégalités impliquant la constante e comme l'inégalité de Carleman, l'inégalité arithmético-géométrique et approximation de la constante e . Dans le deuxième chapitre, nous allons appliquer l'inégalité de Carleman. Cette inégalité de Carleman a été étudiée par [11] [12], et est une technique qui a trouvé une large application. Voir [4][9]

Chapitre 2

Quelques inégalités impliquant la constante e

2.1 Introduction

2.1.1 Théorème de Rolle

Theorème 2.1. *[3] Soit $a < b$ deux réels, et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Puisque f est continue, il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $f([a, b]) = [m, M]$.
• Si $m = M$, f est constante et f' est identiquement nulle sur $]a, b[$.
• Supposons alors $m < M$ quitte à échanger les rôles de m et M. Alors $m < f(a)$ ou $f(a) < M$.

1. Si $m < f(a)$, alors il existe $c \in]a, b[$, tel que $f(c) = m$.

$$\forall x \in]a, c[, \quad f(x) > f(c) \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

$$\forall x \in]c, b[, \quad f(x) > f(c) \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

Comme f est dérivable en c, le passage à la limite dans les deux inégalités ci-dessus donne respectivement $f'(c) = \lim_{x \to c^-} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$
et $f'(c) = \lim_{x \to c^+} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$
d'où, par continuité de f en c, $\quad f'(c) = 0$.

2. Si $f(a) < M$ un raisonnement analogue donne le même résultat : $f'(c) = 0$.

□

2.1.2 Théorème des accroissements finis

Theorème 2.2. *Soit $a < b$ deux réels, et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Notons que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est le coefficient directeur de la droite reliant $(a, f(a))(b, f(b))$ (qu'on appelle une corde entre deux points du graphe de f) tandis que $f'(c)$ est le coefficient directeur de la tangente en c. Le théorème des accroissements finis nous dit donc que, étant donné une corde reliant deux points sur le graphe de f, on peut trouver quelque part entre ces deux points une tangente au graphe qui est parallèle à la corde en question

Démonstration. On considère la fonction g définie sur $[a, b]$ par

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Alors g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et on a de plus $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(a)$ d'ou $g(a) = g(b)$.
Le théorème de Rolle nous dit donc qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$g'(c) = 0$, c'est-à-dire :

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Une application fondamentale de l'égalité des accroissements finis est de nous donner un lien entre signe de la dérivée et sens de variation de la fonction, qui justifie l'utilisation de la dérivée pour dresser des tableaux de variations. □

2.1.3 Inégalité arithmético-géométrique

Theorème 2.3. *[1]*
Soit $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls.Alors,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$$

avec égalité si et seulement si $a_1 = a_2 = ... = a_n$

Démonstration. La fonction ln est strictement concave, donc :

$$\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n}\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(a_k)}{n} = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{n}}\right)$$

avec égalité si et seulement si $a_1 = a_2 = ... = a_n$
Ainsi, par croissance de l'exponentiel

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

On peut l'écrire aussi

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$$

□

2.1.4 Formule de Taylor

Taylor-Lagrange [5]

Si $a, b \in \mathbb{R}$, on note $Int(a, b)$ l'intervalle ouvert dont les bornes sont a et b, c'est-à-dire $Int(a, b) =]a; b[$ si $a < b$ et $Int(a, b) =]b; a[$ si $b < a$

Theorème 2.4. *Soit $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ et f une application de $]\alpha; \beta[$ dans $\mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f de classe C^n et que $f^{(n)}$ dérivable. Soit $a, b \in]\alpha; \beta[$. Alors, il existe $c \in Int(a, b)$ t.q :*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \tag{2.1}$$

On rappelle que, par convention, $x^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $0! = 1$

Démonstration. La démonstration de ce théorème consiste a appliquer le théorème des accroissements finis à une fonction convenablement choisie. On pose

$$d = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right)$$

De sorte que $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) - \dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} d$.
Il s'agit maintenant de démontrer qu'il existe $c \in Int(a, b)$ t.q $d = f^{(n+1)}(c)$
Pour tout $x \in]\alpha; \beta[$, on pose :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} d$$

On remarque que $\varphi(a) = f(b)$ (grâce au choix de d)
et $\varphi(b) = f(b)$.
La fonction φ est dérivable sur $]\alpha;\beta[$, et on a pour tout $x \in]\alpha;\beta[$;

$$\begin{aligned}
\varphi\prime(x) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^{k}}{k!} f^{(k+1)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} d \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^{k}}{k!} f^{(k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^{k}}{k!} f^{(k+1)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} d \\
&= \frac{(b-x)^n}{n!} (f^{(n+1)}(x) - d)
\end{aligned}$$

On utilise maintenant le théorème de Rolle. La fonction φ est continue sur l'intervalle fermé dont les bornes sont a et b et dérivable sur l'intervalle ouvert dont les bornes sont a et b .
Comme $\varphi(a) = \varphi(b)$. Il existe donc $c \in Int(a, b)$ t.q $\varphi'(c) = 0$ ce qui donne (comme $b - c \neq 0$) : $\qquad d = f^{(n+1)}(c)$
On en déduit bien

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

□

Taylor-Young

Notation : Lorsque l'on dit qu'une propriété est vraie "au voisinage" de a ou encore "pour x suffisamment proche de a ", cela signifie qu'il existe $\gamma > 0$ t.q pour tout $x \in [a - \gamma; a + \gamma]$ la propriété est vraie

Theorème 2.5. *Soit $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ et f une application de $]\alpha;\beta[$ dans $\mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f de classe C^n. Soit $a \in]\alpha;\beta[$.*
Alors, on a :

1. *Pour tout* $x \in \,]\alpha;\beta[\,$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n h(x), \tag{2.2}$$

avec $\lim_{x\to a} h(x) = 0$.
(et donc h *continue en* a*, si on ajoute* $h(a) = 0$*). On dit que* h *est "un petit o " de* $(x-a)$ *et on note* $h(x) = o(x-a)$

2. *Pour tout* $x \in \,]\alpha;\beta[\,$,

$$f(x) = k = 0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n H(x),$$

Avec H *est bornée au voisinage de* a*, (c'est-à-dire qu'il existe* $\gamma > 0$ *et* $M \in \mathbb{R}$ *t.q.*
$|x-a| \leq \gamma \Rightarrow |H(x)| \leq M$*)*
On dit que H *est "un grand O" de* $(x-a)$*, et on note* $H(x) = O(x-a)$

Démonstration. On va démontrer le premier item du théorème 2.5 en appliquant le théorème 2.4 à l'ordre $n-1$.
Soit $x \in \,]\alpha;\beta[\,, x \neq a$.
D'après le théorème 2.4 , il existe $c_x \in Int(a;x)$ t.q

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c_x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n h(x) \end{aligned}$$

avec $h(x) = \frac{1}{n!}\left(f^{(n+1)}(c_x) - f^{(n)}(a)\right)$
Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Comme $f^{(n)}$ est continue en a, il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$|y-a| \leq \alpha \Rightarrow \left| f^{(n)}(y) - f^{(n)}(a) \right| \leq \varepsilon$$

Ce qui prouve bien que $\lim_{x\to a} h(x) = 0$
Pour montrer le deuxième item, on remarque simplement que pour $x \in \left]\alpha;\beta\right[, \quad x \neq a$

$$H(x) = h(x) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

On a donc $\lim_{x\to a} H(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$, on en déduit que H est une fonction bornée au voisinage de a.

$\square$

Remarque 2.1. . *Dans le cas où $a = 0$, on parle aussi de série de Maclaurin, d'après Colin Maclaurin qui a beaucoup utilisé ce cas particulier des séries de Taylor à partir du milieu du $XVIII$e siècle.*

2.2 Inégalité de Carleman

Cette inégalité a été présentée en 1922 dans [10] par le mathématicien suédois *Torsten Carleman (1892-1942)* et elle est appelée inégalité de *Carleman*. *Carleman* a découvert cette inégalité au cours de son important travail sur les fonctions quasi-analytiques et il était loin d'imaginer à l'époque que cette découverte ferait l'objet d'un si grand intérêt.

Theorème 2.6. *[10] Pour* $(a_k)_{k\geq 1}$ *des réels positifs ou nuls , on a :*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant \mathrm{e}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{2.3}$$

Démonstration.
Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*, c_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$.
Observons que : $c_1 c_2 \cdots c_n = (n+1)^n$,
et donc

$$(c_1 c_2 \cdots c_n)^{1/n} = n+1$$

. Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors, d'après l'inégalité arithmético-géométrique,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k c_k\right)^{1/n}\\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} a_k c_k.\end{aligned}$$

Une inversion de somme conduit alors à

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n} &\leqslant \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{n(n+1)}\right)a_kc_k\\ &= \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{N+1}\right)a_kc_k\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{N}a_k\frac{c_k}{k}.\end{aligned}$$

Or la suite de nombres rationnels $\frac{c_k}{k}=(1+\frac{1}{k})^k$ croît vers le nombre irrationnel e (nombre), donc $\frac{c_k}{k} <$ e pour tout$k \geqslant 1$. D'où

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n} \leqslant \mathrm{e}\sum_{k=1}^{N}a_k,$$

et cette inégalité est stricte lorsque N est assez grand, à moins que la suite $(a_k)_{k\geq 1}$ ne soit identiquement nulle. L'inégalité de Carleman s'en déduit en faisant tendre N vers l'infini. □

2.3 Approximation de la constante e

Theorème 2.7. *[12] pour $x > 0$, on a :*

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^x = e\left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(1+x)^k}\right] \tag{2.4}$$

avec $b_k > 0$, $k = 1, 2, ...$ et $\{b_k\}_{k=1}^n$ satisfait la relation du récurrence suivante :

$$b_1 = \frac{1}{2}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{n+2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{n+2-j}\right] \quad n = 1, 2, ... \tag{2.5}$$

Démonstration.

On pose $y = \frac{1}{1+x}$, donc $0 < y < 1$ et (2.4) s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k y^k = 1 - \left(\frac{1}{1-y}\right)^{\frac{1-y}{y}} /e \tag{2.6}$$

on note $h(y) = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{\frac{1-y}{y}} /e$.

Alors :

$$\begin{aligned}
\ln h(y) &= -1 + \left(\frac{1-y}{y}\right)\ln(1-y) \\
&= -1 + (1-y)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{y^{n-1}}{n}\right) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{y^n}{n(n+1)}\right)
\end{aligned}$$

Donc $h(y) = e^{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n(n+1)}}$
si on pose $g(y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n(n+1)}$ ça donne $h(y) = e^{g(y)}$
et $g^{(n)}(0) = -\frac{(n-1)!}{n+1}$ $n = 1, 2, ..$
et aussi $h'(y) = h(y)g'(y)$

$$h^{(n+1)}(y) = \sum_{j=0}^{n} C_n^j h^{(j)}(y) g^{(n+1-j)}(y)$$

On obtient donc

$$b_1 = -h'(0) = -h(0)g'(0) = \tfrac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= -\frac{h^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \\
&= -\sum_{j=0}^{n} C_n^j h^{(j)}(0) g^{(n+1-j)}(0)/(n+1)! \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!}(-h^{(j)}(0)) \left(\frac{-(n-j)!}{(n+2-j)}\right) /(n+1)! \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{-h^{(j)}(0)}{j!}\right) . \frac{-1}{n+2-j} \\
&= \frac{1}{n+1} \left[\frac{1}{n+2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{n+2-j}\right]
\end{aligned}$$

de (2.5) On peut calculer facilement les six premiers valeurs de b_n :

$$b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{24}, \quad b_3 = \frac{1}{48}, \quad b_4 = \frac{73}{5760}, \quad b_5 = \frac{11}{1280}, \quad b_6 = \frac{1945}{580608},$$

□

Chapitre 3

Application de l'inégalité de Carleman

3.1 Théorème

soit $a_n \geq 0$, $n = 1, 2, ...$ et $0 < a_n < \infty$ On a :

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2...a_n)^{1/n} <$

$$e\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{24(n+1)^2} - \frac{1}{48(n+1)^3} - \frac{73}{5670(n+1)^4}\right)a_n \qquad (3.1)$$

Pour démonter le théorème ; On utilise le lemme suivant :

3.2 Lemme

pour tout $x > 0$, On a :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x <$$

$$e\left(1 - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{24(x+1)^2} - \frac{1}{48(x+1)^3} - \frac{73}{5670(x+1)^4}\right)(3.1)$$

Démonstration. Le terme droite du (3.2) on peut l'écrire :

$$e^{\frac{45360y^4-22680y^3-1890y^2-945y-584}{45360y^4}}$$

avec $\quad y = x+1$ et $\quad y > 1$
On définit :

$$f(x) \;=\; \frac{45360y^4}{45360y^4-22680y^3-1890y^2-945y-584}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x;$$

$y = x+1$

il faut montrer que : $f(x) < e \quad$ pour $x > 0$.
Soient $\qquad g(x) = ln(f(x))$,car $f(x) > 0$

et $\qquad h(x) = 45360y^4-22680y^3-1890y^2-945y-584.$
Donc $\qquad g(x) = ln(45360y^4) - ln(h(x)) + x[ln(x+1) - lnx]$
Alors

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{45360\times 4y^3}{45360y^4} - \frac{h'(x)}{h(x)} + ln(1+x) - ln(x) + \frac{x}{x+1} - 1 \\ &= \frac{45360\times 4y^3}{45360y^4} - \frac{h'(x)}{h(x)} + ln(1+x) - ln(x) + \frac{x+1-1}{x+1} - 1 \\ &= ln(1+x) - ln(x) + \frac{3}{x+1} - \frac{h'(x)}{h(x)}. \end{aligned}$$

par la formule de Taylor , on obtient :

$$ln(1+x) - ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k(1+x)^k} = \sum^{\infty}\frac{1}{ky^k}$$

donc on a :

$$p(y) = g'(x) = \sum^{\infty}\frac{1}{ky^k} + \frac{3}{y} - \frac{h'(x)}{h(x)}.$$

D'où

$$p'(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-k^2 y^{k-1}}{k^2 y^{2k}} - \frac{3}{y^2} - \frac{hh" - (h')^2}{h^2} \tag{3.2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{y^{k+1}} - \frac{3}{y^2} - \frac{hh" - (h')^2}{h^2} \tag{3.3}$$

on sait que $\sum_{n=1}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y}$

alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y^{k+1}} = \frac{1}{y^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y^{k-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{y}} = \frac{1}{y(y-1)}$

On substitut dans l'équation (3.4) on trouve

$$\begin{aligned}
p'(y) &= -\frac{1}{y((y-1))} - \frac{3}{y^2} - \frac{hh" - (h')^2}{h^2} \\
&= -\frac{-4y+3}{y^2((y-1))} - \frac{hh" - (h')^2}{h^2} \\
&= \frac{(-4y+3)h^2 - y^2(y-1)(hh" - h'^2)}{y^2(y-1)h^2} \\
&= -\frac{43825380480y^8 - 46328708160y^7 + 2700507600y^6}{y^2(y-1)h^2} \\
&+ \frac{102649680y^5 - 313537392y^4 + 93347667y^3}{y^2(y-1)h^2} \\
&- \frac{7987141y^2 + 1947056y + 1023168}{y^2(y-1)h^2}
\end{aligned}$$

Et $p'(y) < 0$ pour $y > 1$. Donc p est décroissante sur$(1;\infty)$ et

$$\lim_{x\to\infty} p(y) = 0$$

.

Donc $p(y) > 0$ ce qui implique $f'(x) > 0$ car $\quad g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

D'ou f est croissante pour $x > 0$ et il est facile de voir que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = e$$

Ainsi $f(x) < e \quad$ pour $x > 0$ $\square$

3.3 Démonstration de théorème 1

Soit

$$c_k = (1 + \frac{1}{k})^k, \quad k = 1, 2, ..$$

Par l'inégalité arithmético-géométrique, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 ... a_n)^{\frac{1}{n}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_1 a_1 c_2 a_2 ... c_n a_n}{c_1 c_2 ... c_n} \right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (c_1 c_2 ... c_n)^{\frac{-1}{n}} (c_1 a_1 c_2 a_2 ... c_n a_n)^{\frac{1}{n}} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} (c_1 c_2 ... c_n)^{\frac{-1}{n}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} c_k a_k \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} (c_1 c_2 ... c_n)^{\frac{-1}{n}} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} c_k a_k \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{k})^k a_k.
\end{aligned}$$

De lemme 1, on obtient

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1 a_2 ... a_n)^{1/n} <$

$e\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{24(n+1)^2} - \frac{1}{48(n+1)^3} - \frac{73}{5670(n+1)^4}\right)a_n$

Conclusion

Nous avons discuté l'application de l'inégalité de Carleman, nous sommes appuyés principalement sur les études réalisées dans [11] qui reposaient sur des idées [4] [9] [10] et [12]

Le seul objectif du problème que nous avons étudié est la procédure suivie pour apprendre à appliquer l'inégalité de Carleman uniquement.

Bibliographie

[1] Bair, Jacques, Preuves pour démontrer l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique,Société Belge des Professeurs de Mathématiques d'Expression Française (SBPMef), vol 29 (2005) ,22-29

[2] BENTLEY, Peter J. Livre des nombres, Sélection du Reader's Digest (Canada), Montréal, 2008

[3] BOTEA, N. G.le théoreme des accroissements finis et les fonctions holomorphes. Bulletin Mathématique de La Société Roumaine Des Sciences, vol35 (1933) : 53-56. .

[4] B. Yang and L. Debnath, Some inequalities involving the constant e, and an application to Carleman's inequality, J. Math. Anal. Appl. 223 (1998) , 347-353

[5] Dany-Jack Mercier, Formules de Taylor et développements limités,Broché, 2016

[6] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Polya, Inequalities, Cambridge Univ. Press,London, 1952

[7] MAOR, Eli. The story of a number, Princeton University Press, Princeton, 1994.

[8] MONKA, Yvan. Le nombre e, (Page consultée le 21 mars 2010)

[9] P. Yan and G. Sun, A strengthened Carleman's inequality, J. Math. Anal. Appl. 240(1999) , 290-293.

[10] T. Carleman, Sur les fonctions quasi-analytiques. Conférences faites au cinquième congres des mathématiciens scandinaves (Helsingfors, 1923), 181-196.

[11] X. Yang, A Carleman's inequality, J. Math. Anal. Appl. 253 (2001) 691-694

[12] X.Yang, Approximations for Constant e and Their Applications , J. Math. Anal. Appl,vol 262 (2001), 651-659.