République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles et Analyse Numérique**

Par :

Melle. BESSAKLIA Hasna

Intitulé

Théorie des Risque et Probabilité de Ruine

Dirigé par : Dr. EZZEBSA Abdelali

Devant le jury

PRESIDENT	**Pr. SAKRANI Samia**	**Prof**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. EZZEBSA Abdelali**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. BENCHAABANE Abbes**	**MCA**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2023

Table des matières

الملخص

التـأمين هـو عمليـة تسيير للمخـاطر عن طــريق الالتــزامات المقيــدة بين مؤسسات التـأمين و المُــؤَمنين في حـــدود قـدرة المُـؤَمنين على تغطيـــة المخـــاطر بـدفع اشتـراكات متمثلــة في التسعيـــرات النــاجمة عن المخــاطر و أحـداث عشـوائية خـــلال مـراحل التأميـن، وفي خضـم هــذا تعمـل شـــركات التـأمين على تـأمين و إعـادة تـأمين المخــاطر بطـرق مختلفـــة خـلال مدة التـأمين، وهـذا لمـواكبـة دينــاميكية المخاطر وتسييـرها بطـريقـة عقلانيـــة حتـى تـكون الشــركات على قدر من الثقـــة والالتــزام أمـــام زبائنـــها.

Résumé

L'assurance est une opération de gestion de risque qui engage la compagnie d'assurance vis-à-vis ses assurés à supporter les coûts des sinistres et cela contre une prime qui se verse mensuellement tout au long de la période de couverture. En effet, les assureurs et réassureurs font face à plusieurs types de risque durant la période du contrat d'assurance. C'est pourquoi, la gestion de tous ces risques est une opération primordiale pour la compgnie d'assurance afin de se protéger contre ces dangers probables et respecter ses engagements. La gestion de risque repose sur la mdélisation mathématique de situation financière de la compagnie d'assurance, ses réserves financières, ses dépenses, le coût des sinistres, le taux de croissance...etc.

Abstract

Insurance is a risk management operation that commits the insurance company to its policyholders to bear the costs of claims and this against a premium that is paid monthly throughout the coverage period. Indeed, insurers and reinsurers face several types of risk during the period of the insurance contract. Therefore, the management of all these risks is an essential operation for the insurance company to protect itself against these probable dangers and meet its commitments. Risk management is based on the mathematical modeling of the insurance company's financial situation, its financial reserves, expenses, cost of claims, growth rate...etc.

Introduction

Notre mémoire, s'articule autoure de mesure des risques et probabilité de ruine, nous avons traité quelques unes des mesures des risques les plus connues et leurs estimations classiques qui permettent de traiter les situations de risques dangereux, et d'étudiée la prbabilité de ruine en utilisant l'un des processus de comptage qui est le processus de Poisson.

Ce travail est composé de deux chapitres. Dans le premier chapitre nous effectuons quelques définitions et propriétés sur les différentes mesures des risques pour prendre en compte et d'anticiper les possibilités de survenance de tels phénomènes, afin d'en limiter les impacts humains, environnementaux et économiques. En plus, nous avons introduire les modèles d'assurance les plus connues dans la pratique qui sont les modèles individuels et collectifs, afin de traiter la théorie de ruine et processus de Poisson.

Le deuxième chapitre expose en premier lieu la modèle de risque classique (ou de **Carmér-Lundberg**) avec définitions dans la théorie de la ruine suivi le processus de **Poisson** ou est un outil extrmêment utilisé tant pour la modélisation des sinistres.

Chapitre 1

Gestion des risques

La gestion du risque permet à une organisation de s'assurer qu'elle connaît et comprend les risques auxquels elle s'expose. la gestion du risque ammène égalemment l'entreprise (organisme) à dresser à mettre en œuvre un plan destiné à prévenir les sinisters ou à en réduire l'incindence. Un plan de gestion du risque comprend des stratégies et des techniques visant à reconnaître ces menaces et à les endiguer.

1.1 Mesures des risques

Définition 1.1.1 (3) *Une mesure de risque est une fonctionnelle ϱ faisant correspondre à un risque X un nombre positif noté $\varrho(X)$, éventuellement infini. L'idée est que ϱ quantifie le niveau de danger inhérent au risque X : de grandes valeurs de $\varrho(X)$ indiqueront que X est* ***"dangereux"*** *(dans un sens à précisier).Dorénavant, nous considérons $\varrho(X)$ comme le montant de capital dont la compagnie doit disposer pour faire face à une perte financière de montant X. Plus précisément, pour autant que ϱ soit normalisée, i.e.*

$$\varrho(0) = 0$$

$\varrho(X)$ est le montant minimum qui, additionné à la perte X en début de période rend la couverture de X ***"acceptable"****. La compagnie devra donc disposer du montant $\varrho(X)$, constitué pour partie par les primes payées par l'assuré, et pour le reste par l'apport en capital des actionnaires.*

Cohérence

Il est généralement admis qu'une mesure de risque doit vérifier certaines conditions pour être utile dans les applications. Ceci mène à la notion de mesure de risque cohérente, selon la terminologie de **ARTZNER,DELBAEN,EBER** & **HEATH (1999)**.

Définition 1.1.2 (3) *Une mesure de risque est dite cohérente lorsqu'elle satisfait les quatres axiomes suivants :*

Axiome 1 *(* ***invariance par translation****) : $\varrho(X + c) = \varrho(X) + c$ pour tout risque X et toute constante c. L'invariance par translation garantit que*

$$\varrho(X - \varrho(X)) = 0.$$

De plus, quelle que soit la constante c, nous devrions avoir

$$\varrho(c) = c.$$

Axiome 2 *(* ***sous-additivité*** *) : $\varrho(X + Y) \leq \varrho(X) + \varrho(Y)$ quelles que soient les risques X et Y. La sous-additivité traduit la réduction de risque par diversification. L'effet de diversification est alors mesuré par*

$$\varrho(X) + \varrho(Y) - \varrho(X + Y) \geq 0,$$

qui représente l'économie de capital réalisée en couvant simultanément les risques

X et Y. On parle d'additivité lorsqu'il y a égalité i.e. $\varrho(X+Y) = \varrho(X) + \varrho(Y)$ quelles que soient les risques X et Y. Dans ce cas, l'effet de diversification est nul.

Axiome 3 *(**homogénéité**) : $\varrho(cX) = c\varrho(X)$ pour tout risque X et toute constante positive c. On associe souvent l'homogénéité à une certaine invariance par rapport aux unités monétaires. L'homogénté peut également être vue comme un cas limite de la sous-additivité, lorsqu'il n'y a aucune diversification possible. En effet, si nous supposons que c est un entier positif, la propriété d'homogénéité assure que*

$$\begin{aligned} \varrho(cX) &= \underbrace{\varrho(X + X + ... + X)}_{c\ termes} \\ &= \varrho(X) + \varrho(X) + ... + \varrho(X) = c\varrho(X) \end{aligned}$$

Axiome 4 *(**monotonicité**) $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1 \Longrightarrow \varrho(X) \leq \varrho(Y)$ quels que soient les risque X et Y. Cette propriété exprime le fait qu'il faut plus de capital lorsque la perte financière devient plus sévère. Elle est donc très naturelle.*

Remarque 1.1.1 *Dans le cadre de la théorie du risque, les mesures de risque doivent également contenir un chargement de sécurité c'est-à-dire qu'elles doivent satisfaire l'inégalité*

$$\varrho(X) \geq E(X)$$

pour tout risque X. Le capital minimal doit excéder la perte attendue, sans quoi la ruine devient certaine (sous les conditions de la loi des grands nombres).

Value-at-Risk (Valeur à risque)

Au cours de la dernière décennie, les quantiles ont été largement utilisés en gestion des risques, sous l'appellation désormais consacrée de Value-at-Risk. Le recours à cette mesure de risque a été institutionalisé par les autorités de contrôle du secteur bancaire dans les traités de Bâle successifs.

Définition 1.1.3 (3) *Etant donné un risque X et un niveau de probabilité $\alpha \in (0,1)$, la VaR correspondante, notée $VaR(X,\alpha)$, est le quantile d'ordre α de X. Formellement,*

$$VaR(X,\alpha) = F_X^{-1}(\alpha).$$

Propriétés de La VaR

La VaR est invariante par translation et homogène

Le fait que la VaR jouisse de ces deux propriétés est une conséquence directe des résultats suivants, garantissant que la VaR d'une fonction g du risque X s'obtient en tranformant la VaR de X par la même fonction.

Lemme 1.1.1 (1) *Pour tout $p \in (0,1)$,*

i) si g est un fonction strictement croissante et continue à gauche

$$F_{g(X)}^{-1}(p) = g(F_X^{-1}(p)).$$

ii) si g est un fonction strictement décroissante, continue à droite, et si F_X est bijective,

$$F_{g(X)}^{-1}(p) = g(F_X^{-1}(1-p)).$$

Démonstration Nous ne démontrons que (i), le raisonnement menant à (ii) est analogue. Si g est strictement croissante et continue à gauche, alors, pour tout $0 < p < 1$,

$$F_{g(X)}^{-1}(p) \leq x \Longleftrightarrow p \leq F_{g(X)}(x).$$

Puisque g est continue à gauche,

$$g(z) \leq x \Longleftrightarrow z \leq \sup\{y \in \mathbb{R} \,|g(y) \ \leq x\},$$

pour tout x, z. Ainsi

$$p \leq F_{g(X)}(x) \Longleftrightarrow p \leq F_X(\sup\{y \in \mathbb{R} \,|g(y) \ \leq x\}).$$

Si $\sup\{y \in \mathbb{R} \,|g(y) \ \leq x\}$ est fini, on obtient l'équivalence souhaitée, puisque

$$p \leq F_x(\sup\{y \in \mathbb{R} \,|g(y) \ \leq x\}) \Longleftrightarrow F^{-1}_{g(X)}(p) \leq g(F^{-1}_X(p)),$$

en utilisant le fait que $p \leq F_X(z)$ est équivalent à $F^{-1}_X(z) \leq z$.

Si $\sup\{y \in \mathbb{R} \,|g(y) \ \leq x\}$ est infini, l'équivalence ci-dessus ne peut être utilisée, mais le résultat reste valable. En effet si $\sup\{y \in \mathbb{R} \,|g(y) \ \leq x\} = +\infty$, l'équivalence devient

$$p \leq 1 \Longleftrightarrow F^{-1}_X(p) \leq +\infty.$$

La stricte croissante de g et la continuité à droite permet d'obtenir

$$F^{-1}_X(p) \leq \sup\{y \in \mathbb{R} \,|g(y) \ \leq x\} \Longleftrightarrow g(F^{-1}_X(p)) \leq x,$$

et en combinant toutes les inégalités, on peut écrire

$$F^{-1}_{g(X)}(p) \leq x \Longleftrightarrow g(F^{-1}_X(p)) \leq x$$

pour tout x, ce qui implique $F^{-1}_{g(X)}(p) = g(F^{-1}_X(p))$ pour tout p.

La VaR n'est pas sous-additive

L'exemple suivant illustre le fait que la VaR d'une somme peut excéder la somme des VaR associées à chacun des termes. Dès lors, l'effet de diversification n'est pas toujours positif avec la VaR, de sorte que cette mesure de risque ne favorise pas systématiquement la diversifiction.

Exemple 1.1.1 *Étant donnée une variable aléatoire de la loi $Pareto(\alpha, \theta)$ a pour fonction de répartition*

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{\theta}{\theta + x}\right)^{\alpha} & si\ x > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Sa fonction quantile se calcule facilement et vaut :

$$F_X^{-1}(p) = \theta[(1-p)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1]$$

Considérons les risques indépendants $X \hookrightarrow Par(1,1)$ et $Y \hookrightarrow Par(1,1)$, i.e.

$$\mathbb{P}(X > t) = \mathbb{P}(Y > t) = \frac{1}{1+t},\ t > 0.$$

Nous avons alors

$$VaR(X;\alpha) = VaR(Y;\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} - 1.$$

De puls, on peut vérifier que

$$\mathbb{P}(X + Y \leq t) = 1 - \frac{2}{2+t} + 2\frac{\ln(1+t)}{(2+t)^2},\ t > 0$$

puisque

$$\mathbb{P}(X + Y \leq 2VaR(X;\alpha)) = \alpha - \frac{(1-\alpha)}{2}\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$$

l'inégalité

$$VaR(X;\alpha) + VaR(Y;\alpha) < VaR(X+Y;\alpha)$$

donc la VaR ne peut pas être sous-additive

La VaR est monotone [3]

Clairement, si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$ alors l'inégalité

$$F_X(x) \geq F_Y(x) \text{ est vérifiée pour tout } x.$$

De ce fait, l'inégalité $VaR(X;\alpha) \leq VaR(Y;\alpha)$ est satisfaite quel que soit le niveau de probabilité α.

$Tail\ VaR$ **et mesures apparentées**

La VaR au niveau α renseigne à propos du niveau de perte qui ne sera dépassé que dans $1-\alpha\%$ des cas au plus. Elle ne donne par contre aucune information à propos de ce qui se passe lorsque la VaR est dépassée. Au contraire, la $Tail\ VaR$ donne une idée de ce qui se passe lorsque la VaR au même niveau est dépassée. Cette notion est formellement définie ci-dessous.

Définition 1.1.4 (3) *La $Tail\ Value-at-Risk$ au niveau α, notée $TVaR(X;\alpha)$ est définie par*

$$TVaR(X;\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} VaR(X;\xi)d\xi.$$

A la lumière de cette définition, la $TailVaR$ apparaît comme la moyenne des VaR de niveau supérieur à α.

La $TVaR$ contient un chargement de sécurité [1]

Clairement, $TVaR(X;0) = \mathbb{E}(X)$. De plus, on voit facilement que

$$TVaR(X;\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\left\{\mathbb{E}(X) - \int_{0}^{\alpha} VaR(X;\xi)d\xi\right\}. \tag{1.1}$$

Il découle facilement de (1.1) que la $TailValue-at-Risk$ est une fonction non-décroissante du niveau α. En effet

$$\frac{d}{d\alpha}TVaR(X;\alpha) = \frac{TVaR(X;\alpha)}{1-\alpha} - \frac{VaR(X;\alpha)}{1-\alpha}.$$

comme $\alpha \to VaR(X;\alpha)$ est une fonction non-décroissante,

$$TVaR(X;\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} \underbrace{VaR(X;\xi)}_{\geq VaR[X;\alpha]} d\xi \geq VaR(X;\alpha),$$

ce qui garantit

$$\frac{d}{d\alpha}TVaR(X;\alpha) \geq 0,$$

et

$$TVaR(X;\alpha) \geq TVaR(X;0) = \mathbb{E}(X).$$

Ainsi, la $TailVaR$ contient toujours un chargement de sécurité.

La $TVaR$ est cohérent pour des risques continus

La $TVaR$ est invariante par traslation et homogène. En effet, comme la $TVaR$ est invariante par traslation,

$$\begin{aligned} TVaR(X+c;\alpha) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} VaR(X+c;\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} (VaR(X+\xi)+c)d\xi \\ &= TVaR(X;\alpha)+c \end{aligned}$$

De la même manière, l'homogènéité de la VaR garantit l'homogénéité de la $TVaR$. Il ne nous reste donc plus qu'à établir la monotonicité et la sous-additivités de cette mesure de risque afin de prouver sa cohérence. Ces propriétés s'obtiennent grâce au résultat suivant.

Propriété 1.1.1 (3) *Soient le risque X et le niveau de perte x tels que $\overline{F}_X(x) > 0$.*

Quel que soit l'événement aléatoire E tel que $\mathbb{P}(E) = \overline{F}_X(x)$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\mathbb{E}(X \ |E) \leq \mathbb{E}(X \ |X > x).$$

Démonstration *Pour établir le résultat annoncé, il suffit de remarque que*

$$\mathbb{P}(E \ |X > x) = \frac{\mathbb{P}(X > x\,|E)\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(X > x)} = \mathbb{P}(X > x \ |E).$$

Dès lors, écrivons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X \ |X > x) &= x + \mathbb{E}(X - x \ |X > x, E)\mathbb{P}(E \ |X > x) + \mathbb{E}(X - x \ |X > x, \overline{E})\mathbb{P}(\overline{E} \ |X > x) \\
&\geq x + \mathbb{E}(X - x \ |X > x, E)\mathbb{P}(E \ |X > x) = x + \mathbb{E}(X - x \ |X > x, E)\mathbb{P}(X > x \ |E) \\
&\geq x + \mathbb{E}(X - x \ |X > x, E)\mathbb{P}(X > x \ |E) + \mathbb{E}(X - x \ |X \leq x, E)\mathbb{P}(X \leq x \ |E) \\
&= \mathbb{E}(X \ |E)
\end{aligned}$$

Expected Shortfall

Définition 1.1.5 (6) ***L'expected shortfall*** $(\mathbb{E}S)$ *de niveau de probabilité α est la perte moyenne audelà de la VaR au niveau α, i.e.*

$$\mathbb{E}S_\alpha = \mathbb{E}\left((X - VaR(X, \alpha))^+\right)$$

Conditionnal Tail Expectation

Définition 1.1.6 (6) ***La Conditionnal Tail Expectation*** (CTE) *de niveau α est le montant de la perte moyenne sachant que celle-ci dépasse la VaR au niveau α, i.e.*

$$CTE(X, \alpha) = \mathbb{E}(X \setminus X > VaR(X, \alpha))$$

Mesures de risque de Wang

Ces mesures de risque exploitent la représentation de l'espérance mathématique . L'idée est alors de transfomer la fonction de queue afin de générer un chargement de sécurité.

Nous appellerons désormais fonction de distorsion toute fonction non-décroissante $g : [0,1] \to [0,1]$ tel que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$

Définition 1.1.7 (3) *La mesure de risque de* ***Wang*** *associé à la fonction de distorsion g, notée $\rho_g(.)$, et définie par*

$$\rho_g(X) = \int_0^\infty g(\overline{F}_X(x))dx.$$

Remarque 1.1.2

1) La fonction de distorsion $g(q) = q$ correspond à l'éspérance mathématique $\mathbb{E}(X)$.

2) Clairement, si $g(q) \geq q$ quel que soit $q \in [0,1]$, on a alors $\rho_g(X) \geq \mathbb{E}(X)$, de sorte que les mesures de risques de **Wang** associée à de telles fonctions de distorsion contiennent un chargement de sécurité.

3) De plus, il est intéressant de remarquer que lorsque $g_1(q) \leq g_2(q)$ quel que soit $q \in [0,1]$ nous avons alors $\rho_{g_1}(X) \leq \rho_{g_2}(X)$.

Mesures de risque de Wang et VaR [3]

En substituant $\int_0^{\overline{F}_X(x)} dg(\alpha)$ à $g(\overline{F}_X(x))$ dans définiion et en permutant les intégrales, on obtient le résultat suivant :

Propriété 1.1.2 *Quel que soit le risque X , la mesure de risque de* ***Wang*** *associée à la fonction de distorsion g peut s'écrire*

$$\rho_g(X) = \int_0^1 VaR[X, 1-\alpha]dg(\alpha). \qquad ((1.1.2))$$

Anisi, les mesures de risque de ***Wang*** *sont des mélanges de VaR. En particulier, si* *nous considérons la fonction de distorsion* $g : [0,1] \to [0,1]$ *définie par*

$$g_\alpha(x) = \Pi(x \geq 1 - \alpha)$$

pour une valeur $\alpha \in [0,1]$ *fixée, il vient alors par* (1.1.2)

$$\rho_g(X) = VaR(X;\alpha)$$

qui montre que la VaR *au niveau de probabilité* α *est une mesure de* ***Wang*** *particulière correspondant à une fonction de distorsion passant de* 0 *à* $1-\alpha$.

Mesure de risque Wang et $TVaR$ [3]

De la même manière, en repartant de (1.1.2) avec la fonction de distorsion

$$g_\alpha(x) = \min\left\{\frac{x}{1-\alpha}, 1\right\},$$

pour $\alpha \in [0,1]$ fixé on obtient

$$\rho_{g_\alpha}(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{1-\alpha} VaR\,(X; 1-\xi)\,d\xi = TVaR(X;\alpha).$$

Propriétés des mesures de risque de Wang [3]

Les principales propriétés des mesures de risque de **Wang** sont résumées dans le résultat suivant :

Propriétés 1.1.1

i) Les mesures de risque de **Wang** sont homogènes.

ii) Les mesures de risque de **Wang** sont invariantes par translation.

iii) Les mesures de risque de **Wang** sont monotones.

Wang-Transform

Définition 1.1.8 (6) *On appelle **Wang-Transform** (WT) la mesure de risque de **Wang** issue de la fonction de Distorsion*

$$g_\alpha(x) = \Phi\left[\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(\alpha)\right].$$

*Certaines mesures de risque uselles telles que la VaR ou la $TVaR$ sont des mesures de risque de **Wang**, le tableau ci dessous reprend les fonctions de distorsion correspondantes.*

Mesure de risque	**Paramètre**	**Fonction de distorsion**
Value-at-Risk	VaR_α	$g(x) = \mathbf{1}_{[\alpha,+\infty]}(x)$
Tail-Value-at-Risk	$TVaR_\alpha$	$g(x) = \min(x/(1-\alpha); 1)$
Wang-transform	WT_α	$g_\alpha(x) = \Phi\left[\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(\alpha)\right]$

La Prime pure

Notons S la charge totale des sinistres relative à une police déterminée au cours d'une période d'assurance. Pour être précis, S représente ici le risque effectivement transféré à l'assureur, après application des clauses conventionnelles relatives aux dommages, et ne coicide donc peut-être pas avec le préjudice que subit le patrimoine de l'assuré. Classiquem, le rôle de l'assurance est de substituer une constante c (la prime d'assurance) à la variable aléatoire S. Une manière raisonnable de déterminer c serait de choise la constante "la plus proche" de la variable aléatoire S. La distance utilisée pour mesurer la proximité entre S et c doit tenir compte du fait que c doit mettre l'assureur en mesure de dédommager les sinistres, sans excédent, ni déficit. Anisi, la distance doit pénaliser aussi bien les cas où c est inférieure à S que ceux où c est supérieure à S . Une distance pénalisant toute sur - ou sous-évaluation de la prime est l'écart quadratique moyen

$$d_2(S, C) = \mathbb{E}[(S - c)^2]$$

Maintenant que nous nous sommes donnés une mesure d_2 de proximité, tentons de trouver la constante c la plus proche de S , c'est-à-dire la valeur de c qui minimise $d_2(S, c)$. Dans ce but, écrivons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(S - c)^2] &= \mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S] + \mathbb{E}[S] - c)^2] \\
&= \mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])^2] + 2(\mathbb{E}[S] - c)\underbrace{\mathbb{E}[S - \mathbb{E}[S]]}_{=0} + (\mathbb{E}[S] - c)^2 \\
&= (\mathbb{E}[S] - c)^2 + \text{constante par rapport à } c
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que la valeur de c minimisant $(\mathbb{E}[S] - c)^2$ n'est autre que $\mathbb{E}[S]$. Anisi, $\mathbb{E}[S]$ est la consante la plus proche de S (au sens de la distance d_2 que nous avons introduite plus haut). Si on désire substituer une constante à S, un choix naturel est donc $\mathbb{E}[S]$.[3]

Mesure de risque d'Esscher

La mesure de risque d'Esscher consiste à mesure le risque comme étant la prime pure, i.e. l'espérance de la transformée d'Esscher du risque initial.

Définition 1.1.9 (6) *On appelle mesure d'**Esscher** de paramètre $h > 0$ du risque X, la mesure de risque donnée par :*

$$\mathbb{E}s(X; h) = \frac{\mathbb{E}[Xe^{hX}]}{\mathbb{E}[e^{hX}]} = \frac{d}{dh} \ln \mathbb{E}[e^{hX}]$$

*La mesure de risque d'**Esscher** n'est pas cohérente car elle n'est ni homogène, ni montone. En revanche, elle contient un chargement de sécurité puisque $\mathbb{E}s(X; h)$ est une fonction croissant en h et $\mathbb{E}s(X; 0) = \mathbb{E}(X)$.*

Primes stop-loss

un traité de réassurance stop-loss (ou excédent de perte) consiste à faire prendre en charge par le réassureur la partie de la charge totale S des sinistres qui dépasse une certaine somme d. La portion réassurée, notée S^R, est donc définie par

$$S^R = (S-d)_+ = \begin{cases} 0 \text{ , si } S \leq d, \\ S-d \text{ , si } S > d \end{cases}$$

Notez que cet échange de risque entre assureur et réassureur est semblable à la clause de découvert obligatoire imposée aux assurés par une compagnie. La prime pure que la cédante devra verser au réassureur pour un tel contrat, appelée prime stop-loss, est donnée par

$$\mathbb{E}(S^R) = \mathbb{E}[(S-d)_+]$$

Ceci découle à la définition suivante.

Définition 1.1.10 (3) *Etant donné un risque X, la prime stop-loss pour une rétention $t \geq 0$ est définie par*

$$\pi_X(t) = \mathbb{E}[(X-t)_+].$$

La fonction π_X est encore appelée la transformée stop-loss de la variable aléatoire X.

1.2 Comparaison des risques

L'objet de ce comparason est de présenter des outils permettant de classer les risques selon leur ‹‹**dangerosité**››

Relation associée à une mesure de risque

Nous avons étudié un certain nombre de mesures de risque. Une idée naturelle pour comparer deux risques X et Y est de choisir une mesure de risque ρ et de comparer $\rho(X)$ et $\rho(Y)$, ce que l'on peut toujours faire puisque $\boldsymbol{R}$ est ordonné par la relation d'ordre totale $\leq$. Cette démarche nous permet d'introduire la relation $<_\rho$définie commet suit.

$$X <_\rho Y \text{ si } \rho(X) \leq \rho(Y)$$

La relation $<_\rho$issue de la mesure de risque ρ est réflexive et transitive. De plus il est toujours possible de comparer par $<_\rho$deux loi de probabilité ou deux variables aléatoites.

Le principal mérite de ce type de relation est qu'il est toujours possible de comparer deux risques. Il faut nénmoins rester prudent car l'on peut avoir simultanément $X <_\rho Y$ et $X >_{\rho'} Y$ pour deux mesures de risque ρ et ρ' différentes. C'est pour cette raison que l'on préférera se tourner vers des ordes partiels qui permettent de disposer de davantage de propriétés.

Ordre stochastique

Définition 1.2.1 (6) ***Dominance stochastique***

On dite que X domine selon l'ordre stochastique Y $(Y <_{st} X)$ si pour toute fonction de distorsion g, on a :

$$\rho_g(Y) \leq \rho_g(X).$$

Cette notion est équivalente à celle de comparaison uniforme des VaR puisque toute mesure de risque de ***Wang*** *peut s'écrire comme somme de VaR :*

$$X <_{st} Y \Leftrightarrow \rho_g(X) \leq \rho_g(Y)$$

pour toute fonction de distorsion g

$$\Leftrightarrow Var(X;\alpha) \leq Var(Y;\alpha) \forall \alpha \in [0,1].$$

La relation $<_{st}$est un ordre partiel sur l'ensemble des lois de probabilités. L'ordre stochastique ne permet pas de comparer toutes les variables aléatoires. En effet il est possible d'avoir simultanément :

$$Var(X;\alpha) \leq Var(Y;\alpha),$$

et

$$Var(X;\beta) > Var(Y;\beta).$$

En revanche on a l'équivalence suivante (pour autant que les espérances existent :

$$X <_{st} Y \Longleftrightarrow \mathbb{E}(\varphi(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(Y))$$

pour toute fonction φ croissante. En particulier, on a l'implication :

$$X <_{st} Y \Longleftrightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$$

*qui sinifie intuitivement que le risque X est plus ‹‹**petit**›› que le risque Y. Cette conséquence explique le fait que l'on parle de dominance stochastique au premier ordre pour désigner la relation $<_{st}$.*

Ordre convexe

Définition 1.2.2 (6) ***Ordre convexe croissant***

On dit que X est mois dangereux que Y sur la base de l'ordre convexe croissant

$(<_{icx})$ *et l'on note* $X <_{icx} Y$ *si, pour toute fonction de distorsion* g *concave, on a :*

$$\rho_g(X) \leq \rho_g(Y).$$

Cette notion est équivalente à celle de comparaison uniforme des $TVaR$*, puisque :*

$$X <_{icx} Y \Longleftrightarrow \rho_g(X) \leq \rho_g(Y)$$

pour toute fonction de distorsion g *concave*

$$TVaR(X;\alpha) \leq TVaR(Y;\alpha)\ ,\forall \alpha \in [0,1]$$

On supposera dans la suite que les risque ont des primes pures finies ce qui garanti l'existence des $TVaR$*. Cette relation est également connue sous les noms de dominance stochastique du deuxième ordre, d'ordre* $Stop - loss$ *et d'ordre sur les* $TVaR$*.*

Définition 1.2.3 ***Ordre convexe*** *On dira que le risque* X *est moins dangereux que la risque* Y *de même prime pure au sens de l'ordre convex* $(<_{cx})$*, s'il est moins dangereux au sens de l'ordre convexe croissant i.e. si*

$$X <_{cx} Y \Longleftrightarrow X <_{icx} Y \ \ et \ \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y).$$

Pour toute fonction φ*convexe croissant et pour autant que les variances existent, on a :*

$$X <_{cx} Y \Longleftrightarrow \mathbb{E}(\varphi(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(Y)).$$

Lordre convexe permet de comparer des variables aléatoires de même espérance, ce que ne permettait pas l'ordre stochastique puisque

$$X <_{st} Y \ \ et \ \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) \Longleftrightarrow X =_{loi} Y.$$

Proposition 1.2.1 Théorème de séparation *On a*

$$X <_{icx} Y \Longleftrightarrow \exists Z \text{ tel que } X <_{st} Z <_{ct} Y.$$

*Le théorème de séparation permet d'établir que si X est mois dangereux que Y selon l'ordre convexe croissant, X est à la fois plus ‹‹**petit**›› ($<_{st}$) et moins **‹‹variable››** ($<_{icx}$) que Y*

1.3 Modèles d'assurance

Le modèle individuel [1]

À chaque police d'assurance i correspond un risque individuel. L'assuré a une probabilité p_i de subir un sinistre. Si ce dernier a lieu, son coût est aléatoire et est noté X_i. Le modèle est dit « **individuel** » car le risque global se décompose comme la somme des individules.

Proposition 1.3.1 *Soient Z_i des variables aléatoire de loi de **Bernoulli** de paramètre p_i indépendantes et X_i des variables aléatoires indépendantes entres elles et des Z_i.On pose*

$$S = \sum_{i=1}^{n} Z_i X_i$$

-Si les X_i sont positives ou dans L^1, on a

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbb{E}(X_i)$$

et $S \in L^1$si $\forall\ 1 \leq i \leq n,\ X_i \in L^1$. De plus, si tous les $X_i \in L^2$

$$Var(S) = \sum_{i=1}^{n} p_i Var(X_i) + \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)\mathbb{E}(X_i)^2$$

Démonstration : *Pour l'espéranc par indépendance,*

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Z_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbb{E}(X_i)$$

Pour la variance par indépendance,

$$Var(S) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(Z_i X_i)$$

et nous avons

$$\begin{aligned} Var(Z_i X_i) &= \mathbb{E}(Z_i^2 X_i^2) - \mathbb{E}(Z_i X_i)^2 = \mathbb{E}(Z_i X_i^2) - p_i^2 \mathbb{E}(X_i)^2 = p_i \mathbb{E}(X_i^2) - p_i^2 \mathbb{E}(X_i)^2 \\ &= p_i Var(X_i) + p_i \mathbb{E}(X_i)^2 - p_i^2 \mathbb{E}(X_i)^2 \\ &= p_i Var(X_i) + p_i(1 - p_i)\mathbb{E}(X_i)^2 \end{aligned}$$

Corollaire 1.3.1 *On suppose que les variables aléatoires Z_i ont la même loi de* ***Bernoulli*** *de paramètre p. On pose $N = \sum_{i=1}^{n} Z_i$.On suppose également que les X_i sont positives ou dans L^1et de même espérance notée $\mathbb{E}(X)$.On a*

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(N)$$

Si de plus les X_i sont dans L^2 et de même variance notée $Var(X)$, on a

$$Var(S) = \mathbb{E}(N)Var(X) + Var(N)\mathbb{E}(X)^2$$

Démonstration : *On remarque que par construction, $N \sim B(n, p)$. En appliquant* *la proposition* (1.3.2) *à note cas particulier, on obtient respectivement :*

$$\mathbb{E}(S) = np\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$$
$$Var(S) = npVar(X) + np(1-p)\mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(N)Var(X) + Var(N)\mathbb{E}(X)^2$$

Le modèle collectif [1]

Sur une branche d'assurance, dans une classe d'individus homogènes, on peut supposer que ces derniers auront des sinistres dont la loi est proche, idéalement ils seront indépendants et de même loi. Le défaut du précédent modèle est qui'il ne tient pas compte de la possibilité qu'un individu ait plusieurs accident, tout du moins ce n'est pas naturel. Nous allons nous placer dans un modèle dit ‹‹**Collectif** ›› où l'assureur aura un nombre aléatoire de sinstres, généralement noté N, et une séquence de sinisters aléatoires $X_1, ..., X_N$.

Somme aléatoire et première formule de Wald Nous commençons par un petit résultat qui nous sera utile et dont plusieurs démonstrations auront le même modèle.

Lemme 1.3.1 *Soit N une variable aléatoire à valeures dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$. On a alors l'égalité suivante :*

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(N > n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(N \geq n).$$

Démonstration : Remarquons dans un premier temps que

$$N = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{N>n\}} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{\{N>k\}}$$

En effet, $\forall w \in \Omega$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{N(w)>n\}} = \sum_{n=0}^{N(w)-1} \mathbf{1}_{\{N(w)>n\}} = N(w).$$

Ensuite, si on pose

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{\{N>k\}},$$

la suite (Y_n) est alors positive et croissante de limite N. Par le théorème de convergence monotone

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N) &= \mathbb{E}\left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{\{N>k\}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{\{N>k\}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(N>k) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N>n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N \geq n).\end{aligned}$$

Définition 1.3.1 *soient N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réeles. La variable aléatoire S définie par*

$$S = \sum_{n=1}^{N} X_n$$

*est appelée ‹‹ **somme aléatoire** ››. C'est une somme finie (puisque N est finie), $\forall w \in \Omega$,*

$$S(w) = \sum_{n=1}^{N(w)} X_n(w)$$

et $S(w) = 0$ si $N(w) = 0$.

Proposition 1.3.2 (Première formule de Wald). *Soient N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires **réelles postives de même espérance**. On suppose de plus que N et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépondantes. On a alors*

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X).$$

Chapitre 2

Probabilité de ruine

En assurance, la théorie du risque a pour objectif l'analyse mathélatique des fluctuations aléatoires dans les opérations d'assurance. On qualifie de risque, la probabilité que la réserve d'une compagnie d'assurance, qui est la différence entre le total des primes reçues et le total des montants des réclamations payées, devienne négative à un certain temps. A ce moment-là, on dit que la ruine apparaît, du fait d'un mauvais calcul du taux de cotisation des assurés ou de sinistres trop importants à couvrir.

Le défit de la théorie de la ruine a donc été de modéliser l'évolution de la richesse de la compagnie par un processus stochastique, estimer la probabilité de ruine, c'est-à-dire la probabilité que le scénario traduisant un échec se réalise, et d'estimer le niveau de réserve initiale pour rendre cette probabilité de ruine suffisamment faible.

En actuariat, on qualifie de risque la probabilité que la réserve d'une compagnie d'assurance, devient négative à un certain temps. A ce moment-là, on dit que la ruine apparaît ou la compgnie est en état d'insolvabilité.

2.1 Probabilité de ruine ultime

La probabilité de ruine ultime est définie par

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\inf_{t\geq 0} R_t < 0;\ R_0 = u\right)$$

avec $u \geq 0$ est le capital initial, la probabilité complémentaire ou probabilité de non ruine ultime est définie par

$$\phi(u) = 1 - \psi(u)$$

2.1.1 Modèles classiques

Modèle de Carmer-Lundberg [5]

Le modèle classique de la théorie représente l'évolution du résultat d'une compagnie d'assurances au cours du temps. Ce modèle est représenté par le processus de risque ou de réserve $\{R(t); t > 0\}$ donne par

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad t \geq 0$$

avec $c > 0$ est le taux de primes constant par unité de temps, $\{X_i\}_{i\geq 1}$ est une séquence de variables aléatoires non- négatives, indépendantes et identiquement distribuées des montants des réclamations et $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ modélisant la nombre de réclamations jusqu'au temps t. Le processus de surplus des sinstres est défini par

$$S(t) = u - R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i - ct$$

Le temps de ruine

$$\tau(u) = \inf\{t \geq 0 : R(t) < 0\} = \inf\{t \geq 0 : S(t) > u\}.$$

est le premier instant ou le processus de réserve devient négatif ou de maniere équivalente le processus de surplus excède le niveau u.Les probabilités de ruine en fonction de temps de ruine sont :

$$\forall\ u \geq 0,\ \ \psi(u, \infty) = \mathbb{P}(\exists\ s \geq 0\, / R(s) < 0\,)$$

-En temps fini t, la fonction donnée par

$$\forall u \geq 0, \psi(u, t) = \mathbb{P}(\exists\ s \geq [0, t]\, / R(s) < 0\,)$$

Les probabilités de non-ruine (ou de survie) correspondantes sont notées :

$$\varphi(u, t) = 1 - \psi(u, t) \ \text{ et } \varphi(u) = 1 - \psi(u)$$

On appelle chargement ou cœfficient de sécurité, la quantité définie par :

$$\eta = c - \lambda m$$

Si $\eta > 0$, l'activité est dit "rentable".

Si $\eta < 0$, la ruine est certaine

$$\psi(u) = 1$$

Généralemment, nous ferons l'hypotèse que l'activité est rentable. Notons par $\{V_n\}_{n \geq 0}$ le processus inversé associé au modèle de risque. L'approche de stabilité consiste à identifier la probabilité de ruine $\psi(u)$ associé au modèle de risque régie par un vecteur de paramètres $a = (c, \lambda, m)$, avec la distribution stationnaire du processsus inverse $\{V_n\}_{n\geq 0}$, i.e.

$$\psi(u) = \lim_{n\rightarrow} \mathbb{P}(V_n > u)$$

où u est la réserve intiale.

2.1.2 Le coefficient de sécurité

Soit un processus $\{Y_t, t \geq 0\}$ Défini par :

$$Y_t = ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

Le risque moyen sur un intervalle $[0, t]$ est égal à :

$$\mathbb{E}(Y_t) = ct - \mu\mathbb{E}(N_t) = (c - \lambda\mu)t$$

Nous appelons $(c - \lambda\mu)$ le coefficient de sécurité. Notons par

$$\theta = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$$

On note

$$\mu^{(n)} = \mathbb{E}(X^n), \mu = \mu^{(1)} = \mathbb{E}(X), \rho = \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{1}{1+\theta}$$

alors on a :

Définition 2.1.1

1) $\mathbb{E}(S(t)) = t(\lambda\mu - c) = tc(\rho - 1)$.

2) $Var(s(t)) = t\lambda\mu^{(2)}$.

3) $\mathbb{E}(e^{u\,\mathrm{S}(t)}) = e^{t\kappa(u)}$ où $\kappa(u) = \dfrac{\lambda}{c}(M_X(u) - 1) - u$.

4) Le cumulant d'ordre k de $S(t)$ est $t\lambda\mu^{(k)}$ pour $k \geq 2$.

2.1.3 Stabilité dans les modèles de risque

C'est l'académicien **Kalashnikov** [5] qui, le premier, a appliqué la méthode de stabilité forte au modèle de risque. En particulier il a obtenu des bornes de stabilité de la probabilité de ruine dans le modèle de risque classique avec un calcule explicite des constantes, en utilisant l'approche de stabilité forte, basée sur l'analyse de la stabilité des distributions limite des chaînes de Markov générales et une autre approche basée sur la théorie des processus régénératifs.

Théorème 2.1.1 (5) ***(Kalashnikov 2000)*** *Soit* $\psi_n(u)$ *et* $\psi_n^{'}(u)$ *les probabilités de ruine associées aux processus inversés* $\{V_n\}_{n\geq 0}$ *et* $\{V_n^{'}\}_{n\geq 0}$ *respectivement. Alors pour* $v(u) = e^{\epsilon u}$, $u \geq 0$ *et* $\epsilon > 0$,*Si*

$$\mathbb{E}\ \exp(\epsilon(Z - c\theta)) \leq \rho < 1$$
$$\mathbb{E}\exp(\epsilon Z) \leq \beta(\epsilon) < \infty.$$

Alors, l'inégalité de stabilité de la déviation des probabilités de ruine est donné par :

$$\sup_{n\geq 0}\left|\psi_n - \psi_n^{'}\right|_v = \sup_n \left|G_n - G_n^{'}\right|_v \leq \frac{\gamma(\epsilon)\mu}{1-\rho}$$

avec

$$\gamma(\epsilon) = \sup_n \mathbb{E}\ e^{\epsilon V_n} < \infty.$$

et

$$\mu = \sup_{-\infty<x<\infty} e^{\epsilon x}\left|F_\xi - F_{\xi'}\right|(x)$$

En résumé, le principe de l'application de la méthode de stabilité forte dans les modèles de risque est basé sur la représentation de la probabilité de ruine en fonction *de la distribution stationnaire d'un processus inverse noté* $\{V_n\}_{n\geq 0}$ *tel que*

$$\psi(u) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(V_n > u)$$

où

$$V_{n+1} = \xi_{n+1}(V_n + \eta_{n+1})_+, V_0 = 0$$

2.2 La base de la théorie de la ruine

2.2.1 Processus de réserve et de surplus

On note $\{R_t, t \geq 0\}$ le processus de réserve [4] , et $u = R(0)$ la réserve initiale. On fait les hypothèses suivantes :

- $(T_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$suite de v.a. positives i.i.d. égales aux temps inter-arrivée des sinistres,

- $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ instant d'occurence du i^{eme} sinistre,

- $N_t = \max\{n \in \mathbb{N}; \sigma_n \leq t\} = \max\{n \in \mathbb{N}; \sigma_{n+1} \geq t\}$ processus de comptage égal au nombre de sinistres jusqu'au temps t,

- $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ suite de v.a. positives i.i.d. égales aux montants des sinistres,

- p flux de prime générée par le portefeuille par unité de temps.

Ce qui donne

$$R_t = u + pt - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

On définit également le processus de surplus $\{S(t) : t \geq 0\}$

$$S_t = u - R_t$$

2.2.2 Distribution du nombre de sinistres

Le nombre de sinistres sur une période de temps donnée est supposé distribué selon une loi de **Poisson** [4] ou une loi **Binomiale.** Il est démontré que ces deux lois appartiennent à la famille de **Panjer**, caractérisée par l'existence d'une relation de récurence particulière entre leur masses de probabilité.

Famille de Panjer [4]

Le nombre de sinistres sur un exercice est modélisé par une variable aléatoire discrète à valeur entière, notée N. Parmi les distributions de N possibles, on s'intéresse à celles dont les masses de probabilités vérifient la relation de récurence

$$\exists a < 1, b \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^*, p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1} N \tag{2.1}$$

Définition 2.2.1

- N suit une loi de **Poisson** de paramètre ■ s.s.i.

$$\forall k \in \mathbb{N}, p_k = \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\right)$$

- N suit une loi **Binomiale** de paramètres $n > 0$ et $q \in [0,1]$ s.s.i.

$$\forall\ 0 \leq k \leq n,\ p_k = \binom{n}{k} q^k (1-q)^k$$

La loi de **Bernouilli** correspond au cas $n = 1$

Proposition 2.2.1 *Une variable aléatoire de comptage, notée N, dont les masses de probabilités sont liées par la relation de récurence* (2.1) *suit une loi de* ***Poisson*** *ou une loi* ***Binomiale****. Plus précisément :*

Si $a = 0$, alors $b = \lambda > 0$, et $N \sim Pois(\lambda)$

Si $a < 0$, alors $\exists n \in \mathbb{N}$, tel que $b = -a(n+1)$, alors $N \sim B(n, q)$ avec $q = a(a-1)^{-1}$ et $n = -1 + ba^{-1}$

Bibliographie

[1] BARDEL.N, cours Théorie du risque, 18 Mai 2020.

[2] CHABRIAC.C,Processus Stochastiques Modélisation, Universite de Toulouse le Miral, 2012

[3] DENUIT.M et CHARPENTIER.A, Mathématiques de L'assurance Non-Vie Tom1, Econmica, 31Mars 2004.

[4] GOFFARD.P.O, Introduction à la Théorie de la Ruine, Institut de mathématique de Luminy et Axa France.

[5] S.Hocine,Qualité de l'Approximation des Probabilités de Ruine par l'Approche Processus Régénératifs,Séminaire Mathématique de Bijaia(LaMOS),Volume15,2016,pp 7-12

[6] THÉROND.P- E, Mesure et gestion des risques d'assurance, Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon, 2007.