République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par : **BELAAZ Nor Elhouda**

Intitulé

Stabilisation de l'équation des ondes viscoélastiques dissipatives, avec un feedback sur une partie de la frontière

Dirigé par : Dr. ARIES Mohammed essalih

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. BAHLOUL Tarek**	**MCA**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. ARIES Mohammed essalih**	**MCB**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. ALI Ahmed**	**MCB**	**Univ-Guelma**

2022-2023
Session Juin 2023

Table des matières

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier chaleureusement **Dr. Aries Mohammed es-salih** pour sa disponibilité, son dynamisme et sa gentillesse. Il a su me guider avec un enthousiasme constant et communicatif et m'encourager pendant ces années. Il m'a témoigné sa confiance.

Ses grandes qualités scientifiques et humaines ont été indispensables à l'élaboration de cette mémoire. Pour tout cela, je ne l'en remercierai jamais assez.

Je remercie **Dr. Bahloul Tarek** pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant le jury de cette mémoire. Je remercie également le **Dr. Ali Ahmed**, d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury, et je les en remercie sincèrement.

Durant mes années de recherche à l'université de 08 Mai 1945 de Guelma, le cadre de travail était idéal et l'ambiance conviviale.

J'ai une pensée reconnaissante pour tous mes professeurs qui, tout au long de mes études, ont aiguillonné mon goût pour les mathématiques.

Je tiens à remercier ma famille : en particulier mon père et ma mère, ma soeur et mes frères, pour leur amour et leur soutien sans faille. Je les remercie de m'avoir supporté et encouragé pendant les moments de doute.

Je n'aurai jamais pu faire cette mémoire sans eux. Enfin, toute personne ayant aidé de près où de loin à la réalisation de cette mémoire est vivement remerciée.

Résumé

Dans ce mémoire, est consacré à l'étude de l'existence, l'unicité, la régularité et stabilisation des solutions du système viscoélastique non linéaire.

Pour le problème **d'existence, d'unicité** et de **régularité** on a utilisé la méthode de **Galerkin**.

Pour la stabilisation, on a obtenu des **taux de décroissance uniforme** de l'énergie en considérant un **feedback non linéaire** g agissant sur le bord du domaine Ω et des termes mémoires à l'intérieur du domaine Ω et sur sa frontière.

Les estimations obtenus dépendent à la fois du comportement du terme d'amortissement g au voisinage de zéro et du développement de la fonction de relaxation h à l'infini.

Les démonstrations sont basées sur **la technique des multiplicateurs**, la construction d'une fonction poids Φ (qui dépend du comportement de g au voisinage de zéro), et sur une inégalité intégrale non linéaire.

Mots clés : Equation d'onde, viscoélastique, feedback frontière, terme mémoire, la stabilisation, méthode du multiplicateur.

ملخص:

في هذه المذكرة نقوم بدراسة وجود, تفرد, انتظام و استقرار حلول نظام اللزوجية غير خطية.

مشكلة الوجود, التفرد و الانتظام استخدمنا طريقة جالركين. لتحقيق الاستقرار, تم الحصول على معدلات اضمحلال طاقة موحدة من خلال النظر في ردود الفعل غير الخطية g التي تعمل على حافة المجال Ω و شروط الذاكرة داخل المجال Ω وعلى حدوده.

تعتمد التقديرات التي تم الحصول عليها على سلوك مصطلح التخميد g بالقرب من الصفر وعلى تطور وظيفة الاسترخاء h عند اللانهاية.

تستند البراهين الى تقنية المضاعفات, و بناء دالة الوزن Φ (التي تعتمد على سلوك g بالقرب من الصفر), وعلى عدم المساواة المتكاملة غير الخطية.

Abstract

In this memoir, is devoted to the study of the existence, uniqueness, regularity and stabilization of the solutions of the nonlinear viscoelastic system.

For the problem of existence, uniqueness and regularity we used the method of Galerkin.

For stabilization, uniform energy decay rates were obtained by considering a nonlinear feedback g acting on the edge of the Ω domain and memory terms inside the Ω domain and on its boundary.

The estimates obtained depend both on the behavior of the damping term g near zero and on the relaxation function h at infinity.

The proofs are based on the technique of multipliers, the construction of a weight function Φ (which depends on the behavior of g near zero), and on a nonlinear integral inequality.

Chapitre 1

Rappels et Définitions

On n'a pas l'intention de présenter ici la théorie d'analyse fonctionnelle en toute généralité.

On va tout simplement introduire les notions de base, suffisantes pour la compréhension de notre problème.

1.1 Rappels sur les espaces fonctionnels

Dans tout la suit, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontièr Γ.

1.1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1 *Soit H un espace vectoriel. Un produit scalaire (u, v) est une forme linéaire en ses deux arguments de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, symétrique, définie positive, ie*

$$(u, v) \geq 0 \ \ \forall u, v \in H \quad \textit{et } (u, u) > 0 \textit{ si } u \neq 0.$$

Rappelons qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{1/2}(v, v)^{1/2}.$$

Définition 1.1.2 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire (u, v) et qui est complet pour la norme.*

$$\|u\|_H = (u, u)^{1/2}.$$

Remarque 1.1.1 *Soit* $\mathbf{V}, \mathbf{H}$ *deux espaces de Hilbert sur* $\mathbb{R}$ *de norme respectives* $|.|_{\mathbf{V}}$ $|.|_{\mathbf{H}}$ *tels que :*

$$\mathbf{V} \subset \mathbf{H} \quad et\ \mathbf{V} \quad dense\ dans\ \mathbf{H}.$$

En identifiant $\mathbf{H}$ à son dual, on obtient : $\mathbf{V} \subset \mathbf{H} = \mathbf{H}' \subset \mathbf{V}'$.
Où les injections canoniques sont continues et denses.

1.1.2 Espaces de Lebegue $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.3 *On désigne par* L^1 *l'ensemble des fonctions intégrables sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^n$*, dans lequel on identifie deux fonctions qui se coïncident p.p (c'est-à-dire sur le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle).*

$$L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \ \int_\Omega f(x)dx < \infty \right\}.$$

on définit

$$\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)|\, dx.$$

Définition 1.1.4 *Soit* $p \in \mathbb{R}$ *avec* $1 \leq p < \infty$, *on pose,*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ f \quad mesurable\ et\ |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}.$$

On note

$$\|f\|_p = \left[\int |f(x)|^p\, dx \right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Définition 1.1.5 *On notera par* $L^\infty(\Omega)$ *l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur* Ω.

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad est\ mesurable,\ et \\ \exists C > 0\ tel\ que\ |f(x)| \leq C \quad p.p\ sur\ \Omega \end{array} \right\}.$$

muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \inf \{C \,|f(x)| \leq C \ \ \text{p.p sur } \Omega\}, \quad p = \infty.$$

Théorème 1.1.1 *L^p est un espace vectoriel et $\|.\|_p$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Théorème 1.1.2 *L^p muni de la norme $\|.\|_p$ est un espace de Banach, pour tout $1 \leq p \leq \infty$. De plus L^2 muni de la norme $\|.\|_2$ est un espace de Hilbert.*

Définition 1.1.6 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace L^p_{loc} par l'ensemble des fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f \in L^p(\Omega')$, pour tout Ω' où $\Omega' \subset \Omega$ et dont la fermeture est compacte dans Ω.*

Proposition 1.1.1 *Soit (u_n) une suite bornée dans $L^q(\Omega)$, on suppose que (u_n) converge vers u dans $L^p_{loc}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq q$, alors on a,*

$$u_n \in L^q(\Omega) \quad et \quad u_n \longrightarrow u \ dans \ L^p(\Omega).$$

Remarque 1.1.2 *Si Ω est un ouvert borné, alors $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, pour $1 \leq p \leq q \leq \infty$.*

1.1.3 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

On appelle suport d'une fonction $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ le plus petit fermé K en dehors du quel la fonction φ est nulle presque partout, on note $K = \text{supp}\varphi$. Une fonction φ est dite à support compact dans Ω si son support est un compact contenu dans Ω.

-On désigne par $D(\Omega)$ l'espace de fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω.

-On désigne par $D'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur $D(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

On définit l'opérateur de dérivation :

$$\mathbf{D}^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi, \quad \alpha = (\alpha_1 ... \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n.$$

Définition 1.1.7 *On appelle espace de Sobolev d'ordre m sur $L^p(\Omega)$ l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ défini par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ v \in L^p(\Omega), \quad \mathbf{D}^\alpha v \in L^p(\Omega) \quad |\alpha| \leq m \right\}.$$

muni de la norme

$$\begin{cases} |\upsilon|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq\alpha\leq m} |\mathbf{D}^\alpha \upsilon|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}; & 1 \leq p \leq \infty. \\ |\upsilon|_{W^{m,p}(\Omega)} = \max |\mathbf{D}^\alpha \upsilon|_{L^\infty(\Omega)}; & p = \infty. \end{cases}$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.
Pour $p = 2$, on note :

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

Définition 1.1.8 *H^m est un espace de Hilbert muni du produit scalaire,*

$$(u, \upsilon)_{H^m(\Omega)} = (u, \upsilon)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha|\leq m} (\mathbf{D}^\alpha u, \mathbf{D}^\alpha \upsilon)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \|u\|_{m,\Omega} = (u, u)^{1/2}_{m,\Omega},$$

pour $m = 1$

$$(u, \upsilon)_{H^1(\Omega)} = (u, \upsilon)_{1,\Omega} = (u, \upsilon)_{L^2(\Omega)} + (u', \upsilon')_{L^2(\Omega)}.$$

La norme associe :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \left\|u'\right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Définition 1.1.9 *Soit $1 \leq p \leq \infty, W^{m,p}_\Gamma(\Omega)$ désigne la fermeture de $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

1.1.4 Trace d'une fonction

Lorsque υ est une fonction de $L^2(\Omega)$, on ne peut pas considérer la restriction de la fonction à un ensemble de mesure nulle car les fonctions de L^2 sont justement définies à un ensemble de mesure nulle près.

Nous allons montrer dans cette partie qu'il n'est pas nécessaire que la fonction ait un représentant continu pour que l'on puisse considérer sa restriction à Γ .

C'est ce que nous applerons la trace de la fonction sur le bord du domaine.

Définition 1.1.10 *Soit υ une fonction de $H^m(\Omega)$ pour $m = 1$ ou 2 υ n'est pas nécessairement continue sur Ω (sauf en dimension 1) ni sur $\overline{\Omega}$. On définit les trace de υ sur la frontière Γ par l'application linéaire continue, appelée trace.*

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

$$\upsilon \longrightarrow \upsilon_{/\Gamma}.$$

Cette application est surjective.

Donc $H_0^1(\Omega)$ est le noyau de γ_0 C'est -à-dire :

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ \upsilon \in H^1(\Omega);\ \gamma_0 \upsilon = 0 \ \right\}.$$

Définition 1.1.11 *H_0^1 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de H^1.*

Définition 1.1.12 *On désigne par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.*

On définit aussi l'application trace,

$$\gamma_1 : H^2(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

$$\upsilon \longrightarrow \nabla \upsilon . \nu.$$

Cette application est linéaire, continue et surjective.

Théorème 1.1.3 *H_0^2 est le noyau de γ_1.*

$$H_0^2 = \left\{ \upsilon \in H^2(\Omega);\quad \gamma_0 \upsilon = 0,\ \gamma_1 \upsilon = 0 \right\}.$$

Définition 1.1.13 *On désigne par $H^{-2}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^2(\Omega)$.*

1.2 Quelques critères de convergence

On regroupe ici les résultats qui nous permettront de manipuler les différentes notions de convergence des suites dans les espaces $L^p(\Omega)$,

$$\text{pour } 1 \leq p < \infty,\quad 1 \leq q \leq \infty,\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

1.2.1 Convergence forte

Définition 1.2.1 *Soit $1 \leq p \leq \infty$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (fortement) vers u dans L^p si $u_n \in L^q$ et si,*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|u_n - u\| = 0,$$

et on note $u_n \longrightarrow u$.

1.2.2 Convergence faible

Définition 1.2.2 *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^p(\Omega)$, avec $1 \leq p < \infty$ converge faiblement dans L^p vers une fonction u si $u \in L^p(\Omega)$, telle que :*

$$\forall \upsilon \in L^q(\Omega),\ \ on\ a\ \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_\Omega u_n \upsilon dx = \int_\Omega u\ \upsilon dx,$$

on note $u_n \rightharpoonup u$. avec $L^q(\Omega)$ est le dual topologique de l'espace $L^p(\Omega)$.

Convergence faible et convergence presque partout

Le lemme suivant nous donne un lien entre la convergence presque partout et la convergence faible dans les espace $L^p(\Omega)$, pour $1 < p < \infty$.

Lemme 1.2.1 *Soient $1 < p < \infty$ et $(u_n)_n$ une suite bornée de $L^p(\Omega)$ convergeant presque partout dans Ω vers u. Alors, $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega)$.*

1.2.3 Convergence faible*

Définition 1.2.3 *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faible* vers u dans L^∞ , et on note $u_n \rightharpoonup^* u$ si $u_n \in L^1$ et si,*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_\Omega (u_n(x) - u(x))\Phi(x)dx = 0, \qquad \forall \Phi \in L^1(\Omega).$$

1. La limite (forte ou faible) d'une suite de fonction est toujours unique.

2. Dans le cas $p = 1$, le symbole * est posé pour montrer que la définition de convergence faible dans L^1 n'est pas entièrement la même que dans les espaces L^p, pour $1 \leq p < \infty$. En effet, le dual de L^∞ est strictement plus grand que L^1.

3. La convergence forte dans L^p, implique la convergence faible dans L^p, pour $1 \leq p \leq \infty$.

1.3 Injections et inégalités

1.3.1 Injections compactes

Théorème 1.3.1 ***(de compacité de Rellich-Kondrachov)*** *Soit Ω un domaine régulier borné, L'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte. En conséquence, toutes les suites faiblement convergentes dans $H^1(\Omega)$ convergent fortement dans $L^2(\Omega)$.*

1.3.2 Théorème d'Aubin-Lions

Théorème 1.3.2 *Soient B_0, B et B_1 trois espace de Banach avec $B_0 \subset B \subset B_1$, on suppose que $B_0 \hookrightarrow B$ est compact, et $B \hookrightarrow B_1$ est continue, soit $1 < p < \infty$ et $1 < q < \infty$.*

On suppose que B_i est réflexif, $i = 0, 1$.
On definit

$$W = \left\{ u \in L^p(0,T;B_0) \quad u' \in L^q(0,T;B_1) \right\}.$$

Telle que : $(W \subset L^p(0,T;B))$.
Alors W est un espace de Banach réflexif pour la norme :

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p} + \left\| u' \right\|_{L^q},$$

l'injection $W \hookrightarrow L^p(0,T;B)$ est compact.
Nous définirons l'espaces $L^p(0,T;X)$.

1.3.3 Théorème d'injection de Sobolev

Théorème 1.3.3 *Il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

1.3.4 Inégalités de Sobolev, Hölder, Poincaré et Young

Théorème 1.3.4 ***(Inégalité de Sobolev)***

Soient $\Omega = \mathbb{R}^N$ ou Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ dont la frontière est bornée et $1 \leq p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p*}(\Omega)$ où $\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, avec injection continue.

Théorème 1.3.5 ***(Inégalité de Hölder)***

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq p' \leq \infty$, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |fg| \, dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} .$$

Lorsque $p = p' = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Remarque 1.3.1 ***Inégalité de Hölder généralisée***

Il convient de retenir une conséquence très utile de l'inégalité de Hôlder. Soient $f_1, f_2, ..., f_k$ des fonctions réelles telles que :

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega), \quad 1 \leq i \leq k \text{ avec } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Alors le produit $f = f_1 f_2 ... f_k \in L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} ... \|f_k\|_{p_k} .$$

Théorème 1.3.6 ***(Inégalités de Poincaré)***

Il existe une constante C (dépendant de Ω) telle que :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} , \quad \forall u \in H^1_\Gamma(\Omega).$$

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} , \quad \forall u \in H^2_\Gamma(\Omega).$$

Théorème 1.3.7 ***(Inégalité de Young)***

Pour tout réel positif a et b et pour tout ϵ strictement positif on a :

$$ab \leq \frac{\epsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\epsilon} |b|^2 .$$

1.3.5 Lemme de Gronwall

Nous rapelons ici le lemme classique de Gronwall qui on a utilisé pour établir des inégalité.

Lemme 1.3.1 *Soient u, υ deux fonction intégrable positives sur $[0, \infty)$, et M une constante positive telles que :*

$$u(t) \leq M + \int_0^t \upsilon(s)u(s)ds, \quad \forall t \geq 0.$$

Alors on a :

$$u(t) \leq M \exp \int_0^t \upsilon(s)ds, \quad \forall t \geq 0.$$

1.3.6 Formules de Green

La formule de Green est un outil fondamental pour la résolution des edp. Elle coïncide, en dimension 1, avec la formule d'intégration par parties.

Pour tout $u \in C^2(\Omega)$ et $\upsilon \in C^1(\Omega)$ on a la formule de Green suivante :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla \upsilon dx = \int_{\partial\Omega} \upsilon \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma - \int_\Omega \upsilon \Delta u dx.$$

Où$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u.\nu$ (dérivée normale de u).

Par concéquant on a :

$$\int_\Omega u\nabla \upsilon - \upsilon \nabla u dx = \int_{\partial\Omega} \left(\upsilon \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \upsilon}{\partial \nu} \right) d\Gamma.$$

1.4 Espace de fonctions à valeurs vectorielles

Les espaces de fonctions à valeurs vectorielles sont adaptés à l'étude de problèmes d'évolution où les fonction définies sur un interval de temps et à valeur dans un espace de Banach réel.

Dans cette section,on présente brièvement quelques résultats utiles sur les espaces de fonctions à valeurs vectorielle.

Soit $1 < T < \infty$, et $(X, \|.\|_X)$ désigne un espace de Banach.
On définit les espaces suivants :

$$C([0,T]\,;X) = \{u \in [0,T] \longrightarrow X \quad \text{continue}\},$$

et

$$L^p(0,T;X) = \left\{ u \in (0,T) \longrightarrow X \quad \text{mesurable}\,; \quad \int_0^T \|u(t)\|\, dt < \infty \right\} \; 1 \leq p < \infty.$$

Muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \; dt \right)^{1/p},$$

et

$$L^\infty(0,T;X) = \{u \in (0,T) \longrightarrow X \quad \text{mesurable}\,; \; \exists C > 0 \quad \|u(t)\|_X \leq C \quad \text{p.p}\}.$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf\{C > 0; \|u(t)\|_X \leq C \quad \text{p.p}\}.$$

1.4.1 Approximation de Galerkin

Dans ce travail on utilise la méthode de Galerkin.

Définition 1.4.1 *Soit V un espace de Hilbert et $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ une famille d'espaces vectoriels de dimension finies vérifiant :*

(i)$\forall m, V_m \subset V$.
(ii) $Vm \longrightarrow V$ quand $m \leftarrow \infty$ au sens suivant :
Il existe $\mathbf{V}$ un sous espace dense de V tel que pour tout $v \in \mathbf{V}$ on peut trouver une suite $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
Pour tout $m, v_m \in V_m$ et $v_m \longrightarrow v$ dans V quand $m \longrightarrow \infty$.
L'espace V_m s'appelle une approximation de Galerkin d'ordre m ($m \neq \dim V_m$).

Schéma de la méthode

Soit (P) le problème exact pour le quel on cherche à montrer l'existence d'une solution, on suppose que la solution de (P) est unique.

Après avoir fait un choix d'une approximation de Galerkin, il convient de définir le problème approché (P_m) dans l'espace V_m ayant une unique solution u_m.

Le schéma possède 5 étapes :

Etape1 : On définit la solution u_m du problème (P_m).

Etape2 : On établit des estimations sur u_m dites estimations a priori.

Etape3 : En utilisant les résultats de compacité faible de la boule unité dans un espace de Hilbert, en pouvant extraire une sous suite (u_{mk}) $k \in \mathbb{N}$ de (u_m) qui converge vers une limite notée u.

Etape4 : On montre que u est solution du problème (P) donc la solution cherchée d'après l'unicité.

Etape5 : On montre que (u_{mk}) converge fortement vers u dans un espace Hilbert donné.

Chapitre 2

Existence et unicité des solutions du système viscoélastique non linéaire

2.1 introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité de la solution d'un problème viscoélastique avec des termes mémoire et un feedback sur une partie de la frontière. D'abord, nous montrons que le problème admet une solution faible unique en utilisant la méthode de Galerkin, en suite, on donne résultats sur la continuité par rapport aux données et sur la régularité de cette solution faible.

On rappelle que le problème (P) est défini par :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \int_0^t h(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau = 0 & \text{dans } \Omega \text{ x } (0,\infty) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \text{ x } (0,\infty) \\ \frac{\partial u}{\partial v} - \int_0^t h(t-\tau)\frac{\partial u}{\partial v}(\tau)d\tau + g(u') = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \text{ x } (0,\infty) \\ u(x,0) = u^0(x); \quad u'(x,0) = u^1(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{P}$$

où Ω un ouvert borné étoilé, de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ avec une frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ de classe C^2. Ici $\Gamma_0$et $\Gamma_1$sont fermés, disjoints tels que :

$$\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega.$$

$$\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \varnothing.$$

Et υ représente le vecteur unitaire normal à la frontière Γ extérieur à Ω.

Hypothèses géométriques sur le domaine Ω

On suppose que les conditions géométriques suivantes sont vérifiées :
il existe un $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$, tels que :

$$\forall x \in \Gamma_0,\ x - x^0.\upsilon(x) \geq \delta > 0,$$

$$\forall x \in \Gamma_1, x - x^0.\upsilon(x) \leq 0.$$

On considère l'espace de hilbert suivante :

$$\mathbf{V} = \left\{ \upsilon \in H^1(\Omega);\ \upsilon = 0 \text{ sur } \ \Gamma_1 \right\},$$

muni des produits scalaires suivants :

$$(u, \upsilon) = \int\limits_{\Omega} u(x)\upsilon(x)dx, \quad (u, \upsilon)_{\Gamma_0} = \int\limits_{\Gamma_0} u(x)\upsilon(x)d\Gamma,$$

et muni des normes suivantes :

$$\| \ u \ \|^2 = \int\limits_{\Omega} u(x)^2 dx, \quad \| \ u \ \|^2_{\Gamma_0} = \int\limits_{\Gamma_0} u(x)^2 d\Gamma.$$

L'énergie associée au problème (P) est définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[\int\limits_{\Omega} \mid u^{'}(x,t) \mid^2 + \mid \nabla u(x,t) \mid^2 \right] dx.$$

Maintenant on enonce les hypothèses sur le noyan h et le feedback g.

(H.1) Hypothèses sur le noyan h :

On suppose que $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$est une fonction décroissante et de classe C^2 qui satisfait :

$$\int\limits_0^{\infty} h(t)dt < 1, \tag{2.1}$$

$$1 - \int\limits_0^{\infty} h(s)ds = \ell > 0, \tag{2.2}$$

et

$$h^{'}(t) < 0 \ \forall t \geq 0. \tag{2.3}$$

On suppose qu'il existe trois constants $\zeta_{1,}\zeta_2$ et ζ_3 telle que :

$$-\zeta_1 h(t) \leq h^{'}(t) \leq -\zeta_{,2}\, h(t) \ \text{ pour tout } t \geq 0. \tag{2.4}$$

$$0 \leq h^{''}(t) \leq \zeta_3 h(t) \ \text{ pour tout } t \geq 0. \tag{2.5}$$

(H.2) Hypothèses sur le feedback g **:**

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction non décroissante et de classe C^1, telle que :

$$g(s)s > 0, \qquad \text{pour tout} \quad s \neq 0. \tag{2.6}$$

On suppose qu'il existe quatre constants $C_i > 0; \, i = 1, 2, , 3, 4$ telles que :

$$C_1(\mid s \mid) \leq g(\mid s \mid)^p \leq C_2(\mid s \mid)^{\frac{1}{p}} \ \ \forall \mid s \mid \leq 1. \tag{2.7}$$

$$C_3(\mid s \mid) \leq g(\mid s \mid) \leq C_4 \mid s \mid \ \ \forall \ \mid s \mid \geq 1. \tag{2.8}$$

Où $p \geq 1$.

(H.3) Hypothèses sur la donnée initiale

Pour tout donnée initiale $(u^0, u^1) \in (\mathbf{V} \cap H^2(\Omega))^2$ vérifient la condition de compatibilité :

$$\frac{\partial u^0}{\partial v} + g(u^1) = 0 \ \text{ sur } \Gamma_0. \tag{2.9}$$

Ce chapitre comporte deux sections :

Dans la première section, on étudie l'existence et l'unicité des solutions forte du problème (P).

Dans la deuxième section, on étudie l'existence et l'unicité et la régularité dela solution faible.

2.1.1 Théorème principal

On a le théorème suivante, d'existence et d'unicité et de régularité des solutions de problème (P).

Théorème 2.1.1 *Supposons que les hypothèses (H.1),(H.2) et (H.3) sont satisfais,*

(1) Solution forte. pour tout donné initiale $(u^0, u^1) \in (\mathbf{V} \cap H^2(\Omega))^2$ alors le problème (P) possède une unique solution **(forte),**

$$u : (0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R},$$

telle que $\quad u \in L^\infty(0, \infty; \mathbf{V})$, $u^{'} \in L^\infty(0, \infty; \mathbf{V})$ et $u^{''} \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$.

(2) Solution faible. on suppose que $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$ alors le problème (P) possède une unique solution **(faible),**

$$u : \Omega \times (0, \infty) \to \mathbb{R},$$

tel que

$$u \in C^0(0, \infty); \mathbf{V}) \cap C^1(0, \infty); L^2(\Omega)).$$

2.2 Existence de la solution forte

Dans ce paragraphe, on démontre l'existence et unicité des solutions fortes pour le problème (P).

Premièrement, on considère les solutions fortes, et ensuite, utilisant des arguments de densité, on prolonge le même résultat pour les solutions faibles.

2.2.1 la formulation variationnelle

La formulation variationnelle de problème (P) est obtenue par une intégration par partie on multiplie formellement la premier équation de (P) par w et on intègre sur Ω. on obtient alors,

$$\int_\Omega u^{''}.w \; dx - \int_\Omega \Delta u.w \; dx + \int_\Omega \int_0^t h(t-\tau)\Delta u(\tau).w \; d\tau dx = 0.$$

L'application de la formule de Green donne :

$$\begin{cases} \int_\Omega u^{''}.w \; dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial v} w \; d\Gamma + \int_\Omega \nabla u \nabla w \; dx + \int_\Gamma \int_0^t h(t-\tau)\frac{\partial u}{\partial v} w \; d\Gamma \\ \qquad - \int_\Omega \int_0^t h(t-\tau)\nabla u(\tau).\nabla u^{'} \; d\tau dx = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

En multipliant la troisiéme équation de (P) par w et en intègrant formellement sur Γ, on obtient :

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial v} w \; d\Gamma - \int_{\Gamma} \int_{0}^{t} h(t-\tau) \frac{\partial u}{\partial v} w \; d\tau d\Gamma + \int_{\Gamma} g(u^{'}) w \; d\Gamma = 0.$$

Comme $u = 0$ sur Γ_1, alors l'equation précédente devient,

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial v} u^{'} d\Gamma - \int_{\Gamma} \int_{0}^{t} h(t-\tau) \frac{\partial u}{\partial v} u^{'} d\tau d\Gamma = - \int_{\Gamma} g(u^{'}) u^{'} d\Gamma.$$

D'ou la formulation variationnelle de problème (P) :

$$\begin{cases} \text{trouver } u(t) \in V \text{ telle que :} \\ (u^{''}(t), w) + (\nabla u(t), \nabla w) - \int_0^t h(t-\tau)(\nabla u(\tau), \nabla w) \; d\tau \\ +(g(u^{'}(t)), w)_{\Gamma_0} = 0 \quad \forall w \in V. \end{cases}$$

Transformation du problème $(\mathbf{P})$ en un problème avec conditions initiales homogènes

Les solutions fortes du problème (p) avec condition aux limite $(g(y^{'}(t)), w)_{\Gamma_0}$ ne peut pas être obtenne par la méthode des bases speciales ; donc, une base formée par les fonctions propres ne peut pas être utiliser pour le (P).

Ceci, conduit à dérivée par rapport à t, la formulation varaitionnelle précédente.

En estimant $u^{''}(0)$, on rencontre de serieuses difficultés. Alors, pour éviter ces difficultés, on transforme le problème (P), en un problème équivalent avec une condition initiale égale à zéro.

Pour cela, on effectue le changement de fonction suivant :

$$v(x,t) = u(x,t) - \Phi(x,t). \tag{2.11}$$

$$\Phi(x,t) = u^0(x) + tu^1(x), \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty).$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
u'' &= v'', \quad \Delta u = \Delta v + \Delta \Phi, \quad u' = v' + \Phi_t = v' + u^1(x). \\
\int_0^t h(t-\tau)\Delta u(\tau)\, d\tau &= \int_0^t h(t-\tau)\Delta v(\tau)\, d\tau + \int_0^t h(t-\tau)\Delta \Phi(\tau)\, d\tau. \\
u &= 0 \text{ sur } \Gamma_1 \Longrightarrow v = 0 \text{ sur } \Gamma_1. \\
\frac{\partial u}{\partial v} - \int_0^t h(t-\tau)\frac{\partial u(\tau)}{\partial v} d\tau &= \frac{\partial u}{\partial v} - \int_0^t h(t-\tau)\frac{\partial v(\tau)}{\partial v} d\tau + \frac{\partial u}{\partial v} - \int_0^t h(t-\tau)\frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial v} d\tau.
\end{aligned}$$

Donc le problème équivalent à (P) s'écrit :

$$\begin{cases}
v'' - \Delta v + \int_0^t h(t-\tau)\Delta v(\tau)\, d\tau = F & \text{dans } \Omega \times (0,\infty) \\
v = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0,\infty) \\
\frac{\partial v}{\partial v} - \int_0^t h(t-\tau)\frac{\partial v}{\partial v}(\tau)\, d\tau + g(v' + \Phi') = G & \text{sur } \Gamma_0 \times (0,\infty) \\
v(0) = v'(0) = 0 & \text{dans } \Omega
\end{cases} \qquad \text{(p')}$$

où

$$\begin{aligned}
F &= \Delta \Phi - \int_0^t h(t-\tau)\Delta \Phi(\tau)\, d\tau. \\
G &= \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \int_0^t h(t-\tau)\frac{\partial \Phi}{\partial v}(\tau)\, d\tau).
\end{aligned}$$

Notons que si v est solution de (P') dans $[0;T]$; alors $u = v + \Phi$ est solution de (P) sur le même intervalle.

A partir des estimations qui seront démontrer ci dessous, il est facile demontre l'inégalité suivante :

$$|\ \Delta v(t)\ |^2 + |\ \nabla v'(t)\ |^2 \leq C(T), \quad t \in [0,T]\,.$$

Où $T > 0$ est arbitraire.

A partir de (2.11), l'inigalité précédente est vérifiée pour la solution u. Ensuit, en utilisant les méthodes standards, on prolonge u à l'intervalle $]0,+\infty[$.

Il suffit, donc de montrer que le problème (P') à une solution locale, qui sera donnée en utilisant la méthode de **Faedo-Galerkin.**

On établit, sur cette solution approchée, des estimations a priori.

Soit $w_1.w_2...w_m$ une suite de fonctions ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall w_i \in V \cap H^2(\Omega). \\ \forall m;\ w_1.w_2...w_m \text{ sont linéairement indépendants.} \\ \text{L'ensemble des combinaisons linéaires fines des } w_i \text{ sont denses dans } V \cap H^2(\Omega). \end{cases}$$

Soit $(w_v)_{v\in\mathbb{N}}$ une base dans $V \cap H^2(\Omega)$ orthonormale dans $L^2(\Omega)$.

Soit V_m l'espace engendré par $w_1.w_2...w_m$ et soit,

$$\upsilon_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_j(t) w_j,$$

une solution approchée du problème de cauchy suivant :

$$\begin{cases} (\upsilon''_m(t), w) + (\nabla \upsilon_m(t), \nabla w) - \int_0^t h(t-\tau)(\nabla \upsilon_m(\tau), \nabla w)\ d\tau + (g(\upsilon'_m(t) + \varphi'(t)), w)_{\Gamma_0} \\ \qquad = (F(t), w) + (G(t), w)\Gamma_0, \quad \forall w \in V_m \\ \qquad \upsilon_m(0) = \upsilon'_m(0) = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Par les méthodes standards des équations différentielles, on peut prouver l'existence de la solution du problème (P') sur $[0; t_m]$, ensuite cette solution peut être prolonger à l'intervalle fermé $[0; T]$.

2.2.2 Estimation à priori

Première estimation (estimation de υ et υ')

On pose $w = \gamma'_j(t) w_j$ dans (2.12) et puis on fait la somme sur j avec $\upsilon_m(0) = 0$ on obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2} \mid \upsilon'_m(t) \mid^2 + \frac{1}{2} \mid \nabla \upsilon_m(t) \mid^2\right\} + (g(\upsilon'_m(t) + \Phi'(t)), \upsilon'_m(t) + \Phi'(t))\Gamma_0 \\ &= (F(t), \upsilon'_m(t)) + \frac{d}{dt}(G(t), \upsilon_m(t))\Gamma_0 \\ &- h(0) \mid \nabla \upsilon_m(t) \mid^2 - (G'(t), \upsilon_m(t))_{\Gamma_0} + (g(\upsilon'_m(t) + \Phi'(t)), \Phi'(t))_{\Gamma_0} \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$+\frac{d}{dt}(\int_0^t h(t-\tau)(\nabla \upsilon_m(\tau), \nabla \upsilon_m(t))\ d\tau) - \int_0^t h^{'}(t-\tau)(\nabla \upsilon_m(\tau), \nabla \upsilon_m(t))d\tau,$$

d'aprés les hypothèses (H.1), (H.2) et (2.13), et en appliquant l'inégalité de Young et d'aprés on a :

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2} \mid \upsilon_m^{'}(t) \mid^2 + \frac{1}{2} \mid \nabla \upsilon_m(t) \mid^2\right\} + C_3 \int_{|\upsilon_m^{'}+\Phi^{'}|} \mid \upsilon_m^{'} + \Phi^{'} \mid d\Gamma$$

$$\leq k_1(\eta) + (F(t), \upsilon_m^{'}(t)) + \frac{d}{dt}(G(t), \upsilon_m(t))_{\Gamma_0}$$

$$-h(0) \mid \nabla \upsilon_m(t) \mid^2 - (G^{'}(t), \upsilon_m(t))_{\Gamma_0} + \eta \int_{|\upsilon_m^{'}+\Phi^{'}|} \mid \upsilon_m^{'} + \Phi^{'} \mid d\Gamma \qquad (2.14)$$

$$+\frac{d}{dt}\left(\int_0^t h(t-\tau)\,(\nabla \upsilon_m(\tau)\,, \nabla \upsilon_m(t))d\tau\right) - \mid \nabla \upsilon_m(t) \mid \int_0^t h^{'}(t-\tau) \mid \nabla \upsilon_m(\tau) \mid d\tau.$$

Où $k_1(\eta)$ est une constante positive qui dépend de u^1 et η.

Considérons l'inégalité de Cauchy-Schwarz en tenant compte de l'hypothèse (2.4), on obtient :

$$|\nabla \upsilon_m(t)| \int_0^t h^{'}(t-\tau) \mid \nabla \upsilon_m(\tau) \mid d\tau$$

$$\leq \frac{\zeta_1^2}{2} \mid \nabla \upsilon_m(t) \mid^2 + \frac{1}{2}\left(\int_0^t h(t-\tau) \mid \nabla \upsilon_m(\tau) \mid d\tau\right)^2 \qquad (2.15)$$

$$\leq \frac{\zeta_1^2}{2} \mid \nabla \upsilon_m(t) \mid^2 + \frac{1}{2} \parallel h \parallel_{L^1(0,\infty)} \int_0^t h(t-\tau) \mid \nabla \upsilon_m(\tau) \mid^2 d\tau.$$

D'autre part, soit $C_0 > 0$ une constante telle que :

$$\mid \upsilon \mid_{\Gamma_0} \leq C_0 \mid \nabla \upsilon \mid \quad \text{pour tout} \quad \upsilon \in V. \qquad (2.16)$$

Ensuite, en combinant (2.14), (2.15) et (2.16) on peut ecrire :

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2} \mid \upsilon_m^{'}(t) \mid^2 + \frac{1}{2} \mid \nabla \upsilon_m(t) \mid^2\right\} + (C_3 - \eta) \int\limits_{|\upsilon_m^{'}+\Phi^{'}|\succ 1} \mid \upsilon_m^{'} + \Phi^{'} \mid^2 d\Gamma$$

$$\leq k_1(\eta) + \frac{1}{2} \mid F(t) \mid^2 + \frac{1}{2} \mid \upsilon_m^{'}(t) \mid^2 + \frac{d}{dt}(G(t), \upsilon_m(t))_{\Gamma_0} + \frac{C_0^2}{2} \mid G^{'}(t) \mid^2_{\Gamma_0} \tag{2.17}$$

$$+\left(\frac{1+\zeta_1^2}{2} - h(0)\right) \mid \nabla \upsilon_m(t) \mid^2 + \frac{1}{2} \parallel h \parallel_{L^1(0,\infty)} \int\limits_0^t h(t-\tau) \mid \nabla \upsilon_m(t) \mid^2 d\Gamma$$

$$+\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t h(t-\tau)(\nabla \upsilon_m(\tau), \nabla \upsilon_m(t)) d\tau\right).$$

En intégrant (2.17) sur l'intervalle $]0, t[$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse $\upsilon_m(0) = \upsilon_m^{'}(0) = 0$, on obtient :

$$\frac{1}{2} \mid \upsilon_m^{'}(t) \mid^2 + \frac{1}{2} \mid \nabla \upsilon_m(t) \mid^2 + (C_3 - \eta) \int\limits_0^t \int\limits_{|\upsilon_m^{'}+\Phi^{'}|\succ 1} \mid \upsilon_m^{'} + \Phi^{'} \mid^2 d\Gamma ds$$

$$\leq k_2(\eta, T) + \frac{1}{2} \parallel F \parallel_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \frac{C_0^2}{2} \parallel G^{'} \parallel_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))} + G(t), \upsilon_m(t))\Gamma_0$$

$$+\int\limits_0^t \frac{1}{2} \mid \upsilon_m^{'}(s) \mid^2 + \left(\frac{1+\zeta_1^2}{2} - h(0)\right) \mid \nabla \upsilon_m(s) \mid^2 ds \tag{2.18}$$

$$+\frac{1}{2} \parallel h \parallel_{L^1(0,\infty)} \int\limits_0^t \mid \nabla \upsilon_m(\tau) \mid^2 d\tau + \eta \mid \nabla \upsilon_m(t) \mid^2$$

$$+\frac{1}{4\eta} \parallel h \parallel_{L^1(0,\infty)} \parallel h \parallel_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \mid \nabla \upsilon_m(\tau) \mid^2 d\tau,$$

mais d'aprés (2.16), on a :

$$(G(t), \upsilon_m(t))_{\Gamma_0} \leq \frac{C_0^2}{4\eta} \mid G(t) \mid_{\Gamma_0}^2 + \eta \mid \nabla \upsilon_m(\tau) \mid^2 . \tag{2.19}$$

En combinant (2.18) et (2.19), en choisissant $\eta > 0$ assez petite, et en appliquant le lemme de Gronwall, on obtient la premère estimation :

$$\mid \upsilon_m'(t) \mid^2 + \mid \nabla \upsilon_m(t) \mid^2 + \int_0^t \int_{|\upsilon_m' + \Phi'| \succ 1} \mid \upsilon_m' + \Phi' \mid^2 d\Gamma ds \leq L_1. \qquad ((2.20))$$

Où L_1 une constante positive indépendante de $m \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T]$. D'aprés (2.20) et considérons les hypothèses (H.1) et (H.2), on deduit aussi que :

$$\int_0^t \mid g(\upsilon_m'(s) + \Phi'(s)) \mid_{\Gamma_0}^2 ds \leq L_{2.}. \tag{2.21}$$

Où L_2 une constante positive indépendante de $m \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T]$.

A l'aide des estimations (2.20) et (2.21) on a :

$$\upsilon' \in L^\infty(0, T; V), \tag{2.22}$$

$$\upsilon \in L^\infty(0, T; V). \tag{2.23}$$

Seconde estimation (estimation de υ'')

Premièrement, on estime le terme $\upsilon_m''(0)$ dans la norme de $L^2(\Omega)$. Considérons $w = \upsilon_m''(0)$ dans (2.12) et notons $\upsilon_m(0) = \upsilon_m'(0) = 0$, trouve que :

$$\mid \upsilon_m''(0) \mid^2 + (g(u^1), \upsilon_m''(0))_{\Gamma_0} = (\Delta u^0, \upsilon_m''(0)) + \left(\frac{\partial u^0}{\partial \upsilon}, \upsilon_m''(0) \right)_{\Gamma_0} . \tag{2.24}$$

L'indentité précédente et l'hypothèse (H.3) donnent :

$$\mid \upsilon_m''(0) \mid^2 \leq L_3. \tag{2.25}$$

Où L_3 est une constante positive indépendante de $m \in \mathbb{N}$.

Maintenant, en dérivant (2.12), et en multipliant le résultat par $\gamma_j''(t)$ et en sommant sur j on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\mid \upsilon_m''(t)\mid^2+\frac{1}{2}\mid \nabla\upsilon_m'(t)\mid^2\right\}-h(0)(\nabla\upsilon_m(t),\nabla\upsilon_m''(t))$$

$$-\int_0^t h'(t-\tau)(\nabla\upsilon_m(t),\nabla\upsilon_m''(t))d\tau+(g'(\upsilon_m'(t)+\Phi'(t))\upsilon_m''(t),\upsilon_m''(t))_{\Gamma_0} \quad (2.26)$$

$$=(F'(t),\upsilon_m''(t))+\frac{d}{dt}(G'(t),\upsilon_m'(t))_{\Gamma_0}-(G''(t),\upsilon_m'(t))_{\Gamma_0}.$$

A partir de (2.26), en intégrant par partie, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\mid \upsilon_m''(t)\mid^2+\frac{1}{2}\mid \nabla\upsilon_m'(t)\mid^2\right\}+h(0)\mid \nabla\upsilon_m'(t)\mid^2+\int_{\Gamma_0} g'(\upsilon_m'+\Phi')(\upsilon_m'')^2d\Gamma$$

$$=(F'(t),\upsilon_m''(t))+\frac{d}{dt}(G'(t),\upsilon_m'(t))_{\Gamma_0}-(G''(t),\upsilon_m'(t))_{\Gamma_0} \quad (2.27)$$

$$+\frac{d}{dt}\left(\int_0^t h'(t-\tau)(\nabla\upsilon_m(\tau),\nabla\upsilon_m'(t))d\tau\right)-h'(0)(\nabla\upsilon_m(\tau),\nabla\upsilon_m'(t))$$

$$-\int_0^t h''(t-\tau)(\nabla\upsilon_m(\tau),\nabla\upsilon_m'(t))d\tau+h(0)(\nabla\upsilon_m(\tau),\nabla\upsilon_m'(t)).$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young, sous l'hypothèse (2.16) on déduit :

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\mid \upsilon_m''(t)\mid^2+\frac{1}{2}\mid \nabla\upsilon_m'(t)\mid^2\right\}+(h(0)-3\eta)\mid \nabla\upsilon_m'(t)\mid^2+\int_{\Gamma_0} g'(\upsilon_m'+\Phi')(\upsilon_m'')^2d\Gamma$$

$$\leq \frac{1}{2} \mid F^{'}(t) \mid^2 + \frac{1}{2} \mid \upsilon_m^{''}(t) \mid^2 + \frac{C_0^2}{4\eta} \mid G^{''}(t) \mid_{\Gamma_0}^2 + \frac{h^{'}(0)^2}{4\eta} \mid \nabla\upsilon_m(t) \mid^2 \tag{2.28}$$

$$+\frac{d}{dt}(G^{'}(t), \upsilon_m^{'}(t))_{\Gamma_0} + \frac{\zeta_3^2}{4\eta} \parallel h \parallel_{L^1(0,\infty)} \int_0^t h(t-\tau) \mid \nabla\upsilon_m(\tau) \mid^2 d\tau$$

$$+\frac{d}{dt}\left(\int_0^t h^{'}(t-\tau)(\nabla\upsilon_m(\tau), \nabla\upsilon_m^{'}(t))d\tau \right) + h(0)\frac{d}{dt}(\nabla\upsilon_m(\tau), \nabla\upsilon_m^{'}(t)).$$

Intégrons (2.28) sur l'intervalle $[0,t]$, notons que $\upsilon_m(0) = \upsilon_m^{'}(0) = 0$ et considérons l'hypothèse (2.25) on peut écrire :

$$\frac{1}{2} \mid \upsilon_m^{''}(t) \mid^2 + \frac{1}{2} \mid \nabla\upsilon_m^{'}(t) \mid^2 + (h(0) - 3\eta) \int_0^t \mid \nabla\upsilon_m^{'}(s) \mid^2 ds$$

$$+ \int_0^t \int_{\Gamma_0} g^{'}(\upsilon_m^{'} + \Phi^{'})(\upsilon_m^{''})^2 d\Gamma ds$$

$$\leq \frac{L_3}{2} + \frac{1}{2} \parallel F^{'} \parallel_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \frac{C_0^2}{4\eta} \parallel G^{''} \parallel_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))} + \frac{1}{2} \int_0^t \mid \upsilon_m^{''}(s) \mid^2 ds \tag{2.29}$$

$$+\frac{h^{'}(0)^2}{4\eta} \int_0^t \mid \nabla\upsilon_m(s) \mid^2 ds + \frac{\zeta_3^2}{4\eta} \parallel h \parallel_{L^1(0,\infty)} \int_0^t \mid \nabla\upsilon_m(\tau) \mid^2 d\tau + (G^{'}(t), \upsilon_m^{'}(t))_{\Gamma_0}$$

$$+ \int_0^t h^{'}(t-\tau)(\nabla\upsilon_m(\tau), \nabla\upsilon_m^{'}(t))d\tau + \frac{h(0)^2}{4\eta} \mid \nabla\upsilon_m(t) \mid^2 + \eta \mid \nabla\upsilon_m(t) \mid^2 .$$

puisque

$$\int_0^t h^{'}(t-\tau)(\nabla\upsilon_m(\tau), \nabla\upsilon_m^{'}(t))d\tau \leq \frac{\zeta_1^2}{4\eta} \parallel h \parallel_{L^1(0,\infty)} \parallel h \parallel_{L^\infty(0,\infty)} \mid \upsilon_m^{''}(t) \mid^2$$

$$+\frac{1}{2} \mid \nabla \upsilon_m^{'}(t) \mid^2 \tau + \eta \mid \nabla \upsilon_m(t) \mid^2, \tag{2.30}$$

et

$$(G^{'}(t), \upsilon_m^{'}(t))_{\Gamma_0} \leq \frac{C_0^2}{4\eta} \mid G^{'}(t) \mid_{\Gamma_0}^2 + \eta \mid \upsilon_m^{'}(t) \mid^2 . \tag{2.31}$$

D'aprés (2.30) et (2.31) et en choisissant $\eta > 0$ suffisamment petit, considérons la première estimation et en appliquant le lemme de Gronwall on obtient la seconde estimation :

$$\mid \upsilon_m^{''}(t) \mid^2 + \mid \nabla \upsilon_m^{'}(t) \mid^2 + \int_0^t \mid \nabla \upsilon_m^{'}(s) \mid^2 ds + \int_0^t \int_{\Gamma_0} g^{'}(\upsilon_m^{'} + \Phi^{'})(\upsilon_m^{''})^2 d\Gamma ds \leq L_4. \tag{2.32}$$

Où L_4 une constante positive indépendante de $m \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T]$, finalement on déduit que :

$$\upsilon^{''} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{2.33}$$

Passage à la limite

d'aprés (2.22), (2.23) et (2.33) on déduit que l'on peut extraie sous suite noté aussi υ_m telle que :

$$\upsilon_m \rightharpoonup^* \upsilon \quad \text{dans } L^\infty(0, T; V). \tag{2.34}$$

$$\upsilon_m^{'} \rightharpoonup^* \upsilon^{'} \text{ dans } L^\infty(0, T; V). \tag{2.35}$$

$$\upsilon_m^{''} \rightharpoonup^* \upsilon^{''} \text{ dans } L^\infty(0, T; V). \tag{2.36}$$

D'où l'existence d'une solution forte pour T suffisamment grand.

2.2.3 Analyse du terme non linéaire

Proposition 2.2.1 *D'aprés* (2.24), (2.35) *et* (2.36) *et sous les hypothèses (H.2) on déduit qu'il existe* $\chi \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_0))$ *telle que :*

$$g(\upsilon_m^{'} + \Phi^{'}) \rightharpoonup \chi \quad \textit{faiblement sur } L^2(0, T; L^2(\Gamma_0)) \tag{2.37}$$

Preuve. Retournant vers (2.12), et utilisant des argument standard, on peut montrer à partir des estimations précédentes que

$$\upsilon^{''} - \Delta \left(\upsilon - \int_0^t h(t-\tau)\upsilon(\tau) d\tau \right) = F \quad \text{sur } D^{'}(\Omega \times (0, T)). \tag{2.38}$$

Maintenant, puisque $\upsilon'', F \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, on a,

$$\Delta\left(\upsilon - \int_0^t h(t-\tau)\upsilon(\tau)d\tau\right) \in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Alors d'aprés la première équation du problème (P') on a,

$$\upsilon'' - \Delta\left(\upsilon - \int_0^t h(t-\tau)\upsilon(\tau)d\tau\right) = F \quad \text{sur } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.39}$$

En appliquant la formule de Green, et en utilisant (2.39), on déduit que :

$$\frac{\partial}{\partial \upsilon}\left(\upsilon - \int_0^t h(t-\tau)\upsilon(\tau)d\tau\right) + \chi = G \quad \text{sur } D'(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)).$$

Et puisque $\chi, G \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))$ on déduit :

$$\frac{\partial}{\partial \upsilon}\left(\upsilon - \int_0^t h(t-\tau)\upsilon(\tau)d\tau\right) + \chi = G \quad \text{sur } L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)). \tag{2.40}$$

Notre but est de démontrer que $\chi = g(\upsilon' + \Phi')$.
Premiérement, on définit :

$$z_m(t) = \upsilon_m(t) - \int_0^t h(t-\tau)\upsilon_m(\tau)d\tau \in V_m. \tag{2.41}$$

Maintenant considérant en particulier $w = z_m(t)$ dans (2.12) et integrant sur $(0,T)$ on obtient :

$$\int_0^T (\upsilon_m''(t), z_m(t))dt + \int_0^T |\nabla z_m(t)|^2\, dt + \int_0^T (g(\upsilon_m'(t) + \Phi'(t)), z_m(t))_{\Gamma_0} dt$$

$$= \int_0^T (F(t), z_m(t))dt + \int_0^T (G(t), z_m(t))_{\Gamma_0} dt. \tag{2.42}$$

A partir de la première et de la deuxiéme estimations, et utilisant le théorème d'Aubin-Lions, il existe une sous suite de υ_m qui sera noté encore υ_m telle que :

$$\upsilon_m \longrightarrow \upsilon \text{ fortement sur } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.43}$$

$$\upsilon_m^{'} \longrightarrow \upsilon^{'} \text{ fortement sur } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.44}$$

comme l'injection $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \hookrightarrow L^2(\Gamma_0)$ est compact et notons que :

$$\mid \upsilon_m(t) \mid_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \leq C \mid \nabla\upsilon_m(t) \mid, \quad \text{et} \quad \mid \upsilon_m^{'}(t) \mid_{\Gamma_0} \leq C \mid \nabla\upsilon_m^{'}(t) \mid .$$

D'aprés la première et la deuxiéme estimations et l'utilisation de nouveau du théorème d'Aubin-Lions,

$$\upsilon_m \longrightarrow \upsilon \text{ fortement sur } L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)). \tag{2.45}$$

$$\upsilon_m^{''} \rightharpoonup \upsilon^{''} \text{ faiblement sur } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.46}$$

Ensuit, d'aprés les convergences (2.37),(2.43),(2.45) et (2.46) on peut passer à la limite dans (2.42) on obtient :

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^T \mid \nabla z_m(t) \mid^2 dt = -\int_0^T (\upsilon^{''}, z(t))dt - \int_0^T (\chi(t), z(t))_{\Gamma_0} dt$$
$$+ \int_0^T (F(t), z(t))dt + \int_0^T (G(t), z(t))_{\Gamma_0} \tag{2.47}$$

Combinons (2.39),(2.40) et (2.47) et on appliquant la formule de Green généralisée, on déduit que :

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^T \mid \nabla z_m(t) \mid^2 dt = \int_0^T \mid \nabla z(t) \mid^2 dt.$$

On note aussi d'aprés la second estimation, on conclut que :

$$\nabla z_m \longrightarrow \nabla z \text{ fortement sur } L^2(0,T,L^2(\Omega)). \tag{2.48}$$

On considère $w = v'_m(t)$ dans (2.12) et on intègre sur $(0, T)$ on trouve :

$$\int_0^T (v''_m(t), v'(t))dt + \int_0^T (\nabla z_m(t), \nabla v'_m(t))dt + \int_0^T (g(v'_m(t)+\Phi'(t)), v'_m(t)+\Phi'(t))_{\Gamma_0} dt$$

$$= \int_0^T (F(t), v'_m(t))dt + \int_0^T (G(t), v'_m(t))_{\Gamma_0} dt + \int_0^T (g(v'_m(t)+\Phi'(t)), \Phi'(t))_{\Gamma_0} dt. \tag{2.49}$$

On a d'aprés la seconde estimation,

$$\nabla v'_m \rightharpoonup \nabla v' \quad \text{faiblement sur } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \tag{2.50}$$

d'apés les convergences (2.37),(2.45),(2.47) et (2.50) on peut passer à la limite dans (2.37) et on obtenir :

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \int_0^T (g(v'_m(t)+\Phi'(t)), v'_m(t)+\Phi'(t))_{\Gamma_0} dt = -\int_0^T (v''(t), v'(t))dt - \int_0^T (\nabla z(t), \nabla v'(t))dt$$
$$+ \int_0^T (F(t), v'(t))dt + \int_0^T (G(t), v'(t))_{\Gamma_0} dt$$
$$+ \int_0^T (\chi(t), \Phi'(t))_{\Gamma_0} dt. \tag{2.51}$$

D'aprés (2.39),(2.43) et (2.51) et en appliquant la formule de Grenn, on obtient :

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \int_0^T (g(v'_m(t) + \Phi'(t)), v'_m(t) + \Phi'(t))_{\Gamma_0} dt = \int_0^T (\chi(t), v'(t) + \Phi'(t))_{\Gamma_0} dt. \tag{2.52}$$

D'autre part puisque g est une fonction monotone non décroissante, on obtient :

$$\int_0^T (g(v'_m(t) + \Phi'(t) - g(\Psi), (v'_m(t) + \Phi'(t)) - \Psi)_{\Gamma_0} \geq 0.$$

Pour tout $\Psi \in L^2(\Gamma_0)$. La dernière inégalité donne :

$$\int_0^T (g(\upsilon'_m(t) + \Phi'(t)), \Psi)_{\Gamma_0} dt + \int_0^T (g(\Psi), \upsilon'_m(t) + \Phi'(t) - \Psi)_{\Gamma_0} dt$$

$$\leq \int_0^T (g(\upsilon'_m(t) + \Phi'(t)), \upsilon'_m(t) + \Phi'(t))_{\Gamma_0} dt. \tag{2.53}$$

D'aprés (2.53), on deduit :

$$\begin{aligned} &\liminf_{m \longrightarrow \infty} \int_0^T (g(\upsilon'_m(t) + \Phi'(t)), \Psi)_{\Gamma_0} dt \\ &+ \liminf_{m \longrightarrow \infty} \int_0^T (g(\Psi), \upsilon'_m(t) + \Phi'(t) - \Psi)_{\Gamma_0} dt \\ &\leq \liminf_{m \longrightarrow \infty} \int_0^T (g(\upsilon'_m(t) + \Phi'(t)), \upsilon'_m(t) + \Phi'(t))_{\Gamma_0} dt. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Considérons les convergences (2.37),(2.52) et comme,

$$\upsilon'_m + \Phi' \rightharpoonup \upsilon' + \Phi' \text{ faiblement sur } L^2(0, T; L^2(\Gamma_0)),$$

on déduit que :

$$\int_0^T (\chi(t) - g(\Psi), \upsilon'(t) + \Phi'(t) - \Psi)_{\Gamma_0} dt \geq 0.$$

Considérons $\Psi = (\upsilon' + \Phi') + \lambda\xi$ où $\xi \in L^2(\Gamma_0)$ et $\lambda > 0$ on peut écrire :

$$\int_0^T (\chi(t) - g((\upsilon'(t) + \Phi'(t)) + \lambda\zeta), (-\lambda\xi))_{\Gamma_0} dt \geq 0,$$

et donc

$$\int_0^T (\chi(t) - g((v^{'}(t) + \Phi^{'}(t)) + \lambda\zeta), \xi)_{\Gamma_0} dt \geq 0.$$

Pour tout $\xi \in L^2(\Gamma_0)$, comme l'opérateur g donné par :

$$g : L^2(\Gamma_0) \longrightarrow (L^2(\Gamma_0))^{'} = L^2(\Gamma_0)$$

$$v \longrightarrow g(v)$$

est Hemicontinue on a :

$$\int_0^T (\chi(t) - g((v^{'}(t) + \Phi^{'}(t)), \xi)_{\Gamma_0} dt \leq 0.$$

Pour tout $\xi \in L^2(\Gamma_0)$.
Donc

$$\int_0^T (\chi(t) - g((v^{'}(t) + \Phi^{'}(t)), \xi)_{\Gamma_0} dt = 0 \quad \forall \xi \in L^2(\Gamma_0),$$

qui implique que :

$$\chi(t) = g(v^{'}(t) + \Phi^{'}(t)).$$

■

2.2.4 Unicité du la solution forte

Soit v_1, v_2 deux solutions régulieres du problème (P').
Alors $z = v_1 - v_2$ vérifie :

$$(z^{''}(t), \omega) + (\nabla z(t), \nabla \omega) - \int_0^t h(t-\tau)(\nabla z(\tau), \nabla \omega) d\tau$$

$$+ (g(v_1^{'}) - g(v_2^{'}), \omega)_{\Gamma_0} = 0, \tag{2.55}$$

pour tout $\omega \in V$.

Posons $\omega = z'(t)$ dans (2.55) et observons que g est une fonction monotone, il s'ensuit que on a :

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left[| z'(t) |^2 + \frac{1}{2} | \nabla z(t) |^2\right] - \int_0^t h(t-\tau)(\nabla z(\tau), \nabla z'(t))d\tau \leq 0.$$

puisque

$$\int_0^t h(t-\tau)(\nabla z(\tau), \nabla z'(t))d\tau = -h(0) | \nabla z(t) |^2 - \int_0^t h'(t-\tau)(\nabla z(\tau), \nabla z(t))d\tau$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^t h(t-\tau)(\nabla z(\tau), \nabla z(t))d\tau. \tag{2.56}$$

Alors, sous les hypothèses (H1) on obtient :

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2} | z'(t) |^2 + \frac{1}{2} | \nabla z(t) |^2 \leq \frac{\xi_1^2}{2} | \nabla z(t) |^2 + \frac{1}{2} \| h \|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t h(t-\tau) | \nabla z(\tau) |^2 \, d\tau$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^t h(t-\tau)(\nabla z(\tau), \nabla z(t))d\tau. \tag{2.57}$$

Integrons la derniére inégalité sur $(0,t)$, on déduit que :

$$\frac{1}{2} | z'(t) |^2 + \frac{1}{2} | \nabla z(t) |^2 \leq \frac{\xi_1^2}{2} \int_0^t | \nabla z(s) |^2 \, ds + \frac{1}{2} \| h \|^2_{L^1(0,\infty)} \int_0^t | \nabla z(\tau) |^2 \, d\tau$$

$$\int_0^t h(t-\tau)(\nabla z(\tau), \nabla z(t))d\tau. \tag{2.58}$$

Maintenant, pour tout $\eta > 0$, on a,

$$\int_0^t h(t-\tau)(\nabla z(\tau), \nabla z(t))d\tau \leq \eta | \nabla z(t) |^2 + \frac{1}{4\eta} \| h \|_{L^1(0,\infty)} \| h \|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t | \nabla z(\tau) |^2 \, d\tau, \tag{2.59}$$

d'aprés (2.58) et appliquant le lemme de Gronwall, on conclut que :

$$| z^{'}(t) |=| \nabla z(t) |= 0.$$

Ceci qui achève la démonstration.

Remarque 2.2.1 *Notons que, en fait, la solution forte u du problème (P') appartient à* $L^{\infty}(0, \infty; V \cap H^{3/2}(\Omega))$.

2.3 Existence des solutions faibles

Supposons que $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$.
Puisque

$$D(-\Delta) = \left\{ u \in V \cap H^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial v} = 0 \ \text{ sur } \Gamma_0 \right\},$$

est dense dans V et $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ dense dans $L^2(\Omega)$ alors il existe deux suites $(u_n^0)_{n\geq 0} \subset D(-\Delta)$ et $(u_n^1)_{n\geq 0} \subset H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ telle que :

$$u_n^0 \longrightarrow u^0 \ \text{ fortement dans } V. \tag{2.60}$$

$$u_n^1 \longrightarrow u^1 \ \text{ fortement dans } L^2(\Omega). \tag{2.61}$$

De plus, d'aprés les hypothèses (H.2) et (H.3), on a :

$$\frac{\partial u_n^0}{\partial v} + g(u_n^1) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0.$$

Alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n : \Omega \times (0 \times \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution régulière du problème (P) verifiant.

$$\begin{cases} u'' - \Delta u_n + \int_0^t h(t-\tau)\Delta u_n(\tau)d\tau = 0 & \text{dans } \Omega \text{ x } (0,\infty) \\ u_n = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \text{ x } (0,\infty) \\ \frac{\partial u}{\partial v} - \int_0^t h(t-\tau)\frac{\partial u}{\partial v}(\tau)d\tau + g(u_t) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \text{ x } (0,\infty) \\ u_n(0) = u_n^0 \ ; \ \ u_n^{'}(0) = u_n^1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{P”}$$

Considérant les arguments utilisés dans la première estimation, on obtient :

$$| u_n^{'}(t) |^2 + | \nabla u_n(t) |^2 + \int_0^t | u_n^{'}(s) |_{\Gamma_0}^2 \, ds \leq L,$$

et

$$\int_0^t | g(u_n^{'}(s)) |_{\Gamma_0}^2 \, ds \leq L.$$

Où L constante positive indépendant de $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T]$.

Posons $z_{m,n} = u_m - u_n$, $m, n \in \mathbb{N}$ ou u_m, u_n sont deux solutions réguliéres de (P'') correspondantes à $u_n^0(x), u_n^1(x), u_m^0(x)$ et $u_m^1(x)$, suivant les mêmes étapes que celles utilisées dans l'unicité des solutions fortes de (P') et tenant compte de (2.60) et (2.61) on déduit qu'il existe :

$$u : \Omega \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},$$

telle que :

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{fortement dans } C^0([0, T] ; V). \tag{2.62}$$

$$u_n^{'} \longrightarrow u^{'} \quad \text{fortement dans } C^0([0, T] ; L^2(\Omega)). \tag{2.63}$$

D'aprés (2.62) et (2.63), on a aussi :

$$u_n^{'} \rightharpoonup u^{'} \quad \text{faiblement dans } L^2([0, T] ; L^2(\Gamma_0)). \tag{2.64}$$

$$g(u_n^{'}) \rightharpoonup \chi \quad \text{faiblement dans } L^2([0, T] ; L^2(\Gamma_0)). \tag{2.65}$$

D'aprés les convergences précédentes, on peut passer à la limite en utilisant des arguments standards afin d'obtenir :

$$u^{''} - \Delta u + \int_0^t h(t - \tau) \Delta u(\tau) d\tau = 0 \quad \text{dans } L^2(0, \infty; V^{'}). \tag{2.66}$$

2.3.1 Caractérisation des conditions aux limites

Considérons le problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\Delta p = u' & \text{dans } \Omega \\ \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \\ \frac{\partial p}{\partial v} = \int_0^t \chi(s)ds & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \tag{2.67}$$

où u est la solution faible de (P), vérifiant (2.66). Tenons compte de la régularité de la frontière Γ de Ω, on a :

$$p \in L^2(0,\infty;H), \tag{2.68}$$

où

$$H = \left\{u \in V; \Delta u \in L^2(\Omega)\right\}.$$

Maintenant on va montrer que :

$$u - \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = -p' \quad \text{dans } H_{loc}^{-1}(0,\infty;V), \tag{2.69}$$

où $H_{loc}^{-1}(0,\infty;V)$ est le dual topologique de $H_{loc}^{1}(0,\infty;V)$.
En effet d'aprés (2.66), on obtient :

$$-\Delta\left[u - \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau\right] = -u'' \quad \text{dans } L_{loc}^2(0,\infty;V'),$$

et d'aprés (2.69) on a :

$$-\Delta\left[u - \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau\right] = \Delta p' \quad \text{dans } D_{loc}'(0,\infty;V).$$

Soit θ une fonction de test de $D(0,\infty)$.

$$\left\langle -\Delta\left[u - \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau\right], \theta\right\rangle = \left\langle -\Delta p, \theta'\right\rangle \quad \text{dans } V', \quad \forall\theta \in D(0,\infty),$$

on intègre sur $(0,T)$ on obtient :

$$\int_0^T -\Delta\left(u-\int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau\right)(t)\theta(t)dt=\int_0^T -\Delta p(t)\theta^{'}(t)dt \quad \text{dans } V^{'},$$

par conséquent,

$$\int_0^T \left(u-\int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau\right)(t)\theta(t)dt=\int_0^T p(t)\theta^{'}(t)dt \quad \text{dans } V^{'},$$

d'où

$$u-\int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau=-p^{'} \;\; \text{dans } H^{-1}_{loc}(0,\infty;V).$$

On considère les opérateurs du trace suivants :

$$\widehat{\gamma}_0 : H^{-1}_{loc}(0,\infty;V) \longrightarrow H^{-1}_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_0)),$$
$$\widehat{\gamma}_1 : H^{-1}_{loc}(0,\infty;H) \longrightarrow H^{-1}_{loc}(0,\infty;V),$$

D'aprés (2.69), on obtient :

$$(\widehat{\gamma}_1/\Sigma_0)\left(u-\int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau\right)=-(\widehat{\gamma}_1/\Sigma_0)(p^{'})=-(\overline{\gamma_1}(p))^{'}, \qquad (2.70)$$

où

$$\overline{\gamma_1} : L^2_{loc}(0,\infty;H) \longrightarrow L^2_{loc}(0,\infty;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)),$$

est l'opérateur trace donnée par :

$$(\overline{\gamma_1}u)(t)=\gamma_1(u(t)),$$

et

$$\gamma_1 : H \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma_0),$$

est l'opérateur classique de dérivée normale.
Donc, d'aprés (2.67) et (2.70) on peut conclue que :

$$(\widehat{\gamma}_1/\Sigma_0)\left(u-\int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau\right)=\left(\int_0^t \chi(s)ds\right)^{'}=-\chi(t). \qquad (2.71)$$

Alors d'aprés (2.71) la condition aux limite a un sens, et de plus on a :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(u-\int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau\right)+\chi=0 \quad \text{sur } H_{loc}^{-1}(0,\infty;L^2(\Gamma_0)).$$

Puisque $\chi\in L^2(0,\infty;L^2(\Gamma_0))$, on a la caractérisation au bord que valable p, p sur Σ_0.

Notre but est de montrer que $\chi=g(u^{'})$. En effet, multiplie la première equation de (P'') par $u_n^{'}$ et integranons sur Ω, on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mid u_n^{'}(t)\mid^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mid\nabla u_n(t)\mid^2+(g(u_n^{'}(t)),u_n^{'}(t))_{\Gamma_0}\\ &=\frac{d}{dt}\left(\int_0^t h(t-\tau)(\nabla u_n(\tau),\nabla u_n(t))d\tau-h(0)\mid\nabla u_n(t)\mid^2\right)\\ &-\int_0^t h^{'}(t-\tau)(\nabla u_n(\tau),\nabla u_n(t))d\tau.\end{aligned} \tag{2.72}$$

Intègrons la dernière égalité sur $]0,t[$. On obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mid u_n^{'}(t)\mid^2+\frac{1}{2}\mid\nabla u_n(t)\mid^2+\int_0^t(g(u_n^{'}(s)),u_n^{'}(s))_{\Gamma_0}ds\\ &=\frac{1}{2}\mid u_n^1\mid^2+\frac{1}{2}\mid\nabla u_n^0\mid^2+\int_0^t h(t-\tau)(\nabla u_n(\tau),\nabla u_n(t))d\tau\\ &-h(0)\int_0^t\mid\nabla u_n(s)\mid^2ds-\int_0^t\int_0^s h^{'}(s-\tau)(\nabla u_n(\tau),\nabla u_n(s))d\tau ds,\end{aligned} \tag{2.73}$$

d'aprés (2.73) et tenant compte les convergences (2.60),(2.61),(2.62) et (2.63), on déduit que :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^t(g(u_n^{'}(s)),u_n^{'}(s))_{\Gamma_0}ds=-\frac{1}{2}\mid u^{'}(t)\mid^2-\frac{1}{2}\mid\nabla u(t)\mid^2\frac{1}{2}\mid u^1\mid^2$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2} \mid \nabla u_n^0 \mid^2 + \int_0^t h(t-\tau)(\nabla u_n(\tau), \nabla u_n(t))d\tau \\
&-\int_0^t \int_0^s h^{'}(s-\tau)(\nabla u_n(\tau), \nabla u_n(s))d\tau ds \\
&-h(0)\int_0^t \mid \nabla u(s) \mid^2 ds. \qquad (2.74)
\end{aligned}
$$

D'autre part, supposons que w est une solution faible du problème linéaire suivant.

$$
\begin{cases}
w^{''} - \Delta w + \int_0^t h(t-\tau)\Delta w(\tau)d\tau = 0 & \text{dans } L^2(0,\infty;V^{'}) \\
w = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \text{ x } (0,\infty) \\
\frac{\partial w}{\partial v} - \int_0^t h(t-\tau)\frac{\partial w}{\partial v}(\tau)d\tau + \chi & \text{sur } L^2(0,\infty;L^2(\Gamma_0)) \\
w(0) = u^0; \quad w^{'}(0) = u^1 & \text{dans}\Omega
\end{cases} \qquad (S)
$$

alors considérons les même arguments que ceux utilisés pour démontrer (2.74), on conclut que :

$$
\begin{aligned}
\int_0^t (\chi(s), w^{'}(s))_{\Gamma_0} ds = &-\frac{1}{2} \mid w^{'}(t) \mid^2 - \frac{1}{2} \mid \nabla w(t) \mid^2 \frac{1}{2} \mid w^1 \mid^2 + \frac{1}{2} \mid \nabla u^0 \mid^2 \\
&+ \int_0^t h(t-\tau)(\nabla w(\tau), \nabla w(t))d\tau \qquad (2.75) \\
&- \int_0^t \int_0^s h^{'}(s-\tau)(\nabla w(\tau), \nabla w(s))d\tau ds \\
&-h(0)\int_0^t \mid \nabla w(s) \mid^2 ds.
\end{aligned}
$$

Puisque u est une solution faible du problème (S), alors d'aprés (2.74) et (2.75) il s'ensuit que :

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \int_0^t (g(u_n^{'}(s)), u_n^{'}(s))_{\Gamma_0} ds = \int_0^t (\chi(s), u^{'}(s))_{\Gamma_0} ds.$$

La convergence précédente combinée avec (2.64), joue un role essentile pour montrer que $\chi = g(u^{'})$ en utilisant les même arguments considérés avant.

Maintenant, l'unicité des solution faibles est obtenue en utilisant la procédure de régularisation de Lions-Visik.

Donc

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} g(u_n^{'}) = \chi.$$

Ce qui achève la démonstration.

Chapitre 3

Le taux de décroissance de l'énergie du système viscoélastique non linéaire

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude du taux de décroissance des solutions d'un système viscoélastiques dissipatifs avec un terme mémoire et un feedback non linéaire sur une partie de la frontière.

On suppose qu'il existe une fonction $g_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1, strictement croissante et qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$g_0(\mid s \mid) \leq g(\mid s \mid) \leq g_0^{-1}(\mid s \mid), \quad \forall \mid s \mid \leq 1. \tag{3.7}$$

$$C \mid s \mid \leq g(\mid s \mid) \leq \frac{1}{c} \mid s \mid, \qquad \forall \ \mid s \mid \geq 1. \tag{3.8}$$

L'existence globale des solutions fortes et faibles à été étudié dans le chapitre précédent.

Si les données initiales $(u^0, u^1) \in (V \cap H^2(\Omega))^2$, et sont vérifient la condition de compatibilité suivante :

$$\frac{\partial u^0}{\partial \nu} + g(u^1) = 0, \quad \text{sur } \Gamma_0. \tag{3.9}$$

Alors le problème (P) possède unique solution **forte** $u : \Omega \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$(u, u', u'') \in L^\infty(0, \infty; V \times V \times L^2(\Omega)).$$

Si $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$. Alors le problème possède unique solution **faible** $u : \Omega \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$u \in C^0([0, \infty[\,; V) \cap C^1([0, \infty[\,; L^2(\Omega)).$$

Définition 3.1.1 *L'énergie associée au problème (P) est donnée par :*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left(\mid u^{'}(x, t) \mid^2 + \mid \nabla u(x, t) \mid^2 \right) dx. \tag{3.10}$$

Proposition 3.1.1 *L'énergie associée au problème (P) vérifie l'identité :*

$$\frac{dE}{dt} = -(g(u^{'}), u^{'})_{\Gamma_0} + \int\limits_0^t h(t - \tau)(\nabla u(\tau), \nabla u) d\tau. \tag{3.11}$$

Preuve. On multiplie la première équation de (P) par $u^{'}$ et on intègre formellement sur Ω.

$$\int\limits_{\Omega} u^{''}.u^{'} dx - \int\limits_{\Omega} \Delta u.u^{'} dx + \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^t h(t - \tau) \Delta u(\tau).u^{'} d\tau dx = 0,$$

on applique la formule de Green on obtient :

$$\int\limits_{\Omega} u^{''}.u^{'} dx - \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} u^{'} d\Gamma + \int\limits_{\Omega} \nabla u.\nabla u^{'} dx + \int\limits_{\Gamma} \int\limits_0^t h(t-\tau) \frac{\partial u}{\partial \nu} u^{'} d\tau d\Gamma$$

$$- \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^t h(t - \tau) \nabla u(\tau).\nabla u^{'} d\tau dx = 0,$$

on multiplie la troisiéme équation de (P) par $u^{'}$ et on intègre formellement sur Γ on obtient :

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} u^{'} d\Gamma - \int\limits_{\Gamma} \int\limits_0^t h(t - \tau) \frac{\partial u}{\partial \nu} u^{'} d\tau d\Gamma + \int\limits_{\Gamma} g(u^{'}) u^{'} d\Gamma = 0,$$

et par conséquence

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} u' d\Gamma - \int_{\Gamma} \int_{0}^{t} h(t-\tau) \frac{\partial u}{\partial \nu} u' d\tau d\Gamma = - \int_{\Gamma} g(u') u' d\Gamma,$$

par ailleurs on a :

$$\int_{\Omega} u''.u' dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u'^2 dx.$$

$$\int_{\Omega} \nabla u.\nabla u' dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mid \nabla u \mid^2 dx.$$

donc on a :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} \left(u'^2 + \mid \nabla u \mid^2 \right) dx \right] + \int_{\Gamma} g(u') u' d\Gamma - \int_{\Omega} \int_{0}^{t} h(t-\tau) \nabla u(\tau).\nabla u' d\tau dx = 0,$$

finalement d'aprés la définition de $E(t)$ on trouve :

$$\frac{dE}{dt} = -(g(u'), u')_{\Gamma_0} + \int_{0}^{t} h(t-\tau)(\nabla u(\tau), \nabla u)_{\Omega} d\tau.$$

■

Lemme 3.1.1 *Soient $E : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction non-croissante et $\Phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante de classe C^1 telle que :*

$$\Phi(0) = 0 \quad et \quad \Phi(t) \longrightarrow \infty \quad quand \quad t \longrightarrow \infty.$$

Si il existe $\alpha \geq 0$ et $\omega > 0$ telle que :

$$\int_{S}^{\infty} E(t)^{1+\alpha} \Phi'(t) dt \leq \frac{1}{\omega} E(0)^{\alpha} E(S), \quad \forall S \geq 0.$$

Alors on a :

$$\text{si} \quad \alpha = 0, \quad E(t) \leq E(0) \exp^{1-\omega\Phi(t)}, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\text{si} \quad \alpha > 0, \quad E(t) \leq E(0) \left(\frac{1+\alpha}{1+\omega\alpha\Phi(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve. On introduit la fonction $f : [0.\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, défini par :

$$f(\tau) = E(\Phi^{-1}(\tau)),$$

alors f est une fonction non-croissante et satisfait :

$$\forall\ 0 \leq S \leq T < \infty,$$

$$\int\limits_{\Phi(S)}^{\Phi(T)} f(\tau)^{1+\alpha} d\tau = \int\limits_{\Phi(S)}^{\Phi(T)} E(\Phi^{-1}(\tau))^{1+\alpha} d\tau = \int\limits_{S}^{T} E(t)^{1+\alpha} \Phi'(t) dt$$

$$\leq \frac{1}{\omega} E(0)^{\alpha} E(S) = \frac{1}{\omega} f(0)^{\alpha} f(\Phi(S)),$$

on note $s = \Phi(S)$,
et on a :

$$\lim_{T \longrightarrow \infty} \Phi(T) = \infty,$$

f satisfiée

$$\forall s \geq 0, \quad \int\limits_{s}^{\infty} f(\tau)^{1+\alpha} d\tau \leq \frac{1}{\omega} f(s).$$

Alors si on applique le lemme de Gronnwall on obtient :
Si $\alpha = 0$

$$f(s) \leq f(0) e^{1-\omega s}, \quad \forall s \geq 0.$$

Si $\alpha > 0$

$$f(s) \leq f(0) \left(\frac{1+\alpha}{1+\omega\alpha\Phi(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \forall s \geq 0,$$

d'où le resultat en posant $E(t) = f(\Phi(t))$.
Ce que achéve la démonstration du lemme. ■

Remarque 3.1.1 *Le lemme précédent sera utiliser pour démontrer le théorème suivante :*

3.2 Théorème principal

Théorème 3.2.1 *Supposons que les deux hypothèses (A.1) et (A.2) sont satisfaites, et que $h(0)$ et $\| h \|_{L^1(0,\infty)}$ sont assez petites.*

Supposons qu'il existe une fonction $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, concave, non décroissante, telle que :

$$\Phi(t) \longrightarrow \infty \;\text{ quand } t \longrightarrow \infty.$$

Alors

(i) Si g_0 est linéaire, l'énergie $E(t)$ associée au problème (P) vérifie l'estimation :

$$E(t) \leq CE(0)e^{1-\Phi(t)}. \tag{3.12}$$

(ii) Si g_0 est polynômiale au voisinage de 0, alors E vérifie l'estimation :

$$E(t) \leq \frac{CE(0)}{\Phi(t)^{2/p-1}}. \tag{3.13}$$

Avant de démontrer le résultat principal de la stabilisation, on commence par quelques notations.

Soit m la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ défini par $m(x) = x - x^0$.

Rappelons qu'il existe un $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$, tels que :

$$\forall x \in \Gamma_0, \; m(x).\nu(x) \geq \delta > 0,$$

$$\forall x \in \Gamma_1, \; m(x).\nu(x) \leq 0.$$

Etant donné $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$. et des fonctions assez petites,

$$f_0 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$f = (f_1, ..., f_N) : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N,$$

on définit la fonction :

$$f_0 \diamondsuit f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},$$

par :

$$(f_0 \diamondsuit f)(t) = \int_0^t f_0(t-s) \; \| f(t,.) - f(s) \|_\Omega^2 \, ds.$$

$$= \int_0^t f_0(s.t) \int_\Omega \sum_{i=1}^N (f_i(t,x) - f_i(s,x))^2 \, dxds.$$

On montre ensuite, par un simple calcul, que l'on a :

$$\int_0^t h(t-\tau)(\nabla u(\tau).\nabla u')_\Omega d\tau = \frac{1}{2}(h'\diamondsuit\nabla u)(t) - \frac{1}{2}(h\diamondsuit\nabla u)'(t)$$

$$+ \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2} \parallel \nabla u \parallel^2 \int_0^t h(s)ds\right\} - \frac{1}{2}h(t) \parallel \nabla u \parallel^2 . \tag{3.14}$$

Remarque 3.2.1 *D'après* (3.11) *le signe de l'énergie* $E(t)$ *associée au problème* (P) *n'est pas connu. Pour cela on définit l'énergie modifée* $\varepsilon(t)$ *associée au problème* (P)*.*

Définition 3.2.1 *L'énergie modifée est donnée par :*

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \parallel u' \parallel^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t h(s)ds\right) \parallel \nabla u \parallel^2 + \frac{1}{2}(h\diamondsuit\nabla u)(t). \tag{3.15}$$

Proposition 3.2.1 *La dérivée de* $\varepsilon(t)$ *par repport au temps* t *est donnée par :*

$$\frac{d\varepsilon}{dt}(t) = -(g(u_t), u_t)_{\Gamma_0} + \frac{1}{2}(h'\diamondsuit\nabla u)(t) - \frac{1}{2}h(t) \parallel \nabla u \parallel^2 . \tag{3.16}$$

On observe, d'après les hypothèses (3.3),(3.6) et (3.14) que,

$$\varepsilon(t) \geq 0,$$

et

$$\frac{d\varepsilon}{dt}(t) \leq 0.$$

Lemme 3.2.1 *Sous les hypothèses* (3.2) *et* (3.15) *on a :*

$$0 \leq E(t) \leq l^{-1}\varepsilon(t) \quad \textit{pour tout } t \geq 0. \tag{3.17}$$

Remarque 3.2.2 *D'aprés* (3.17)*, la décroissance uniforme de* $\varepsilon(t)$ *implique la décroissance uniforme de* $E(t)$*.*

Une identité fondamentale

Lemme 3.2.2 *Soit* u *la solution du problème* (P)*, alors on a l'identité fondamentale suivante :*

$$\int_S^T \Phi'(t)\varepsilon(t)\left(\int_\Omega u'(t)^2 + \mid \nabla u(t) \mid^2\right) dxdt = -\left[\Phi'(t)\varepsilon(t)(u'(t), Mz(t))\right]_S^T$$

$$+\int_S^T \Phi''(t)\varepsilon(t)(u'(t), Mz(t))_\Omega dt$$

$$+\int_S^T \Phi'(t)\varepsilon'(t)(u'(t), Mz(t))_\Omega dt$$

$$+2\int_S^T \Phi'(t)\varepsilon(t)\int_0^t h(t-\tau)(\nabla u(t), \nabla u(\tau))_\Omega d\tau dt$$

$$-\int_S^T \Phi'(t)\varepsilon(t)\int_0^t\int_0^t h(t-\tau)h(t-s)(\nabla u(\tau), \nabla u(s))_\Omega ds d\tau$$

$$-h(0)\int_S^T \Phi'(t)\varepsilon(t)(u'(t), Mu(t))_\Omega dt$$

$$-\int_S^T \Phi'(t)\varepsilon(t)\int_0^t h'(t-\tau)(u'(t), Mu(\tau))_\Omega d\tau dt$$

$$+\int_S^T \Phi'(t)\varepsilon(t)\int_\Gamma \left(m.\nu u'(t)^2 + \partial_\nu z Mz(t) - m.\nu \mid \nabla z(t) \mid^2\right) d\Gamma.$$

Preuve. On utilise la technique des multiplicateurs, on multiplie la première équation de (P) par :

$$Mz := 2m.\nabla z + (n-1)z. \tag{3.18}$$

Où

$$z(t) = u(t) - \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau. \tag{3.19}$$

Et par une fonction concave $\Phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, de classse C^2, non décroissante, telle que $\Phi(t) \longrightarrow \infty$ quand $t \longrightarrow \infty$.

En integrant, ensuit, sur $[S,T]$ on trouve :

$$\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)(u^{''}(t) - \Delta z(t), Mz(t))_\Omega dt = 0.$$

$$\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_\Omega u^{''}(t)Mz(t)dxdt - \int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_\Omega \Delta z(t)Mz(t)dxdt = 0. \tag{3.20}$$

En intégratent par partie le membre de droite, on obtient :

$$\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_\Omega u^{''}(t)Mz(t)dxdt = -\left[\Phi^{'}(t)\varepsilon(t)(u^{'}(t), Mz(t))_\Omega\right]_S^T + \int_S^T \Phi^{''}(t)\varepsilon(t)(u^{'}(t), Mz(t))dt$$
$$+\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon^{'}(t)(u^{'}(t), Mz(t))_\Omega dt + \int_S^T \Phi(t)\varepsilon^{'}(t)(u^{'}(t), Mz^{'}(t))_\Omega dt. \tag{3.21}$$

Observant que :

$$|\ \nabla z(t)\ |^2 = |\ \nabla u(t)\ |^2 - 2\int_0^t h(t-\tau)(\nabla u(t), \nabla u(\tau))_\Omega d\tau$$
$$+\int_0^t\int_0^t h(t-\tau)h(t-s)(\nabla u(\tau), \nabla u(s))_\Omega ds d\tau. \tag{3.22}$$

D'aprées l'égalité précédente, on a :

$$\int_S^T \Phi' \varepsilon \left(\int_\Omega u'(t)^2 + |\nabla u(t)|^2 \right) dxdt = \int_S^T \Phi' \varepsilon \left(\int_\Omega u'(t)^2 + |\nabla z(t)|^2 \right) dxdt$$

$$+ 2 \int_S^T \Phi' \varepsilon \int_0^t h(t-\tau)(\nabla u(t), \nabla u(\tau)) d\tau dt$$

$$- \int_S^T \Phi' \varepsilon \int_0^t \int_0^t h(t-\tau)h(t-s)(\nabla u(\tau), \nabla u(s)) ds d\tau dt. \tag{3.23}$$

D'autre part, on a :

$$(u'(t), Mz'(t))_\Omega + (\Delta z(t), Mz(t))_\Omega = -n \mid u'(t) \mid^2 + \int_{\Gamma_0} m.\nu \mid u' \mid^2 d\Gamma - 2h(0)(u'(t), m.\nabla u(t))_\Omega$$

$$-2 \int_0^t h'(t-\tau)(u'(t), m.\nabla u(\tau))_\Omega d\tau + (n-1) \mid u'(t) \mid^2$$

$$- h(0)(n-1)(u'(t), u(t))$$

$$- (n-1) \int_0^t h'(t-\tau)(u'(t), u(\tau))_\Omega d\tau$$

$$+ (n-2) \mid \nabla z(t) \mid^2 - \int_{\Gamma_0} m.\nu \mid \nabla z \mid^2 d\Gamma$$

$$+ 2 \int_\Gamma \frac{\partial z}{\partial \nu} m.\nabla z d\Gamma - (n-1) \mid \nabla z(t) \mid^2$$

$$+ (n-1) \int_\Gamma \frac{\partial z}{\partial \nu} z d\Gamma, \tag{3.24}$$

d'où

$$\mid u'(t) \mid^2 + \mid \nabla z(t) \mid^2 = (u'(t), Mz'(t))_\Omega + (\Delta z(t), Mz(t))_\Omega$$

$$+\int_{\Gamma_0} m.\nu \mid u^{'} \mid^2 d\Gamma - h(0)(u^{'}(t), m.Mu(t))_\Omega$$

$$-\int_0^t h^{'}(t-\tau)(u^{'}(t), m.Mu(\tau))_\Omega d\tau$$

$$+\int_\Gamma \frac{\partial z}{\partial \nu} Mz d\Gamma + \int_\Gamma m.\nu \mid \nabla z(t) \mid^2 d\Gamma.$$

En multipliant l'équation précédente par ε et Φ, puis en integrant sur l'intervalle $[S,T]$, on obtient l'identité suivante :

$$\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\left(\int_\Omega u^{'}(t)^2 + \mid \nabla u(t) \mid^2\right) dxdt = -\left[\Phi^{'}(t)\varepsilon(t)(u^{'}(t), Mz(t))_\Omega\right]_S^T$$

$$+\int_S^T \Phi^{''}(t)\varepsilon(t)(u^{'}(t), Mz(t))_\Omega dt$$

$$+\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon^{'}(t)(u^{'}(t), Mz(t))_\Omega dt$$

$$+2\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_0^t h(t-\tau)(\nabla u(t), \nabla u(\tau))_\Omega d\tau dt.$$

$$-\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_0^t\int_0^t h(t-\tau)h(t-s)(\nabla u(\tau), \nabla u(s))_\Omega ds d\tau dt$$

$$-h(0)\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)(u^{'}(t), Mu(t))_\Omega dt$$

$$-\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_0^t h^{'}(t-\tau)(u^{'}(t), Mu(\tau))_\Omega d\tau dt$$

$$+\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_\Gamma \Big(m.\nu u^{'}(t)^2+\partial_\nu zMz(t)-m.\nu\mid\nabla z(t)\mid^2\Big)\,d\Gamma.$$

■

Etude des termes du bord :

Sur Γ_1, on a $u=0$,
donc $z=0$ et $\nabla z=(\partial_\nu)\nu$.
On déduit que :

$$m.\nu u^{'}(t)^2+\partial_\nu zMz(t)-m.\nu\nabla z(t)^2=m.\nu(\partial\nu z(t))^2\leq 0. \tag{3.25}$$

Ensuite, on voit que :

$$\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_{\Gamma_0} m.\nu u^{'}(t)^2+\partial_\nu zMz(t)-m.\nu\nabla z(t)^2$$

$$\leq C\epsilon\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_{\Gamma_0} u^{'}(t)^2+g(u^{'}(t))^2+\epsilon\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_{\Gamma_0} z(t)^2. \tag{3.26}$$

Preuve. D'aprés la définition de z et la troisiéme équation de (P), on a sur Γ_0 l'égalité suivante :

$$\partial_\nu z=\frac{\partial z}{\partial\nu}=\frac{\partial u}{\partial\nu}-\int_0^t h(t-\tau)=-g(u^{'}),$$

donc on obtient :

$$\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_{\Gamma_0} m.\nu u^{'}(t)^2+\partial_\nu zMz(t)-m.\nu\nabla z(t)^2$$

$$=\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_{\Gamma_0} m.\nu u^{'}(t)^2-g(u^{'}(t))(2m.\nabla z(t)+(n-1)z(t))-(m.\nu)\nabla z(t)^2$$

$$\leq C\epsilon\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_{\Gamma_0} u^{'}(t)^2+g(u^{'}(t))^2+\epsilon\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_{\Gamma_0} z(t)^2.$$

■

Lemme 3.2.3

$$\begin{aligned}
2\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)^2dt \leq & -\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_0^t h(s)ds\nabla u(t)dt+\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)(h\Diamond\nabla u)(t)dt \\
& -\Big[\Phi^{'}(t)\varepsilon(t)(u^{'}(t),Mz(t))_\Omega\Big]_S^T+\int_S^T \Phi^{''}(t)\varepsilon(t)(u^{'}(t),Mz(t))_\Omega dt \\
& +\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)(u^{'}(t),Mz(t))_\Omega dt \\
& +2\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_0^t h(t-\tau)(\nabla u(t),\nabla u(\tau))_\Omega d\tau dt \\
& -\int_S^T \Phi^{'}\varepsilon(t)\int_0^t\int_0^t h(t-\tau)h(t-s)(\nabla u(\tau),\nabla u(s))_\Omega ds d\tau dt \\
& -h(0)\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)(u^{'}(t),Mu(t))_\Omega dt \\
& -\int_S^T \Phi^{'}\varepsilon(t)\int_0^t h^{'}(t-\tau)(u^{'}(t),Mu(\tau))_\Omega d\tau dt \\
& +C\epsilon\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_{\Gamma_0} u^{'}(t)^2+g(u^{'}(t))^2+\epsilon\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_{\Gamma_0} z(t)^2. \\
& =: I_1+I_2+...+I_{11}. \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

Preuve. Le but principal de ce paragraphe est d'établir des inégalités intégrales qui permettent d'obtenir la décroissance uniforme de l'énergie du problème (P).

Dans la suite, nous allons analyser les termes du membre de droite de (3.27). Les termes le plus importants seront I_2 et I_{10}.

Premièrement on étudie les termes :

$$I_1, I_3, ..., I_9 \text{ et } I_{11}.$$

Ici et dans la suite, C représentera différentes constantes positives qui doivent être différentes à des différents endroits. ∎

Estimation de I_3

$$I_3 = -\left[\Phi^{'}(t)\varepsilon(t)(u^{'}(t), Mz(t))_\Omega\right]_S^T .$$

On observe initialement de (3.19) que,

$$(u^{'}(t), Mz(t))_\Omega = (u^{'}(t), Mz(t))_\Omega - \int_0^t h^{'}(t-\tau)(u^{'}(t), Mu(\tau))_\Omega d\tau. \quad (3.28)$$

Lemme 3.2.4 *Soit u la solution de (P) on a :*

$$\left|\int_\Omega u^{'}(t), Mu(t)dx\right| \leq CE(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (3.29)$$

Preuve. on a :

$$\| Mu(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq \| 2m.\nabla u(t) \|_{L^2(\Omega)} .$$

$$\| Mu(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 - \| 2m.\nabla u(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 = \| 2m.\nabla u(t) + (n-1)u(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 - \| 2m.\nabla u(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

$$= \int_\Omega \left(|2m.\nabla u(t) + (n-1)u(t)|^2 - |2m.\nabla u(t)|^2\right) dx$$

$$= \int_\Omega \left((n-1)^2 u^2(t) + 4(n-1)u(t)m.\nabla u(t)\right) dx$$

$$= \int_\Omega \left((n-1)^2 u^2(t) + 2(n-1)u(t)m.\nabla (u^2(t))\right) dx$$

$$= 2(n-1)\int_{\Gamma}(m.\nu)\,u^2(t)d\Gamma + \int_{\Omega}(n-1)^2u^2(t) - 2(n-1)(\operatorname{div} m)u^2(t)dx$$

$$= 2(n-1)\int_{\Gamma}(m.\nu)\,u^2(t)d\Gamma + (1-n^2)\int_{\Omega}u^2(t)dx$$

$$= (1-n^2)\int_{\Omega}u^2(t)dx \leq 0.$$

$$\left|\int_{\Omega}u'(t)Mu(t)dx\right| \leq \left\|u'(t)\right\|_{L^2(\Omega)}\|Mu(t)\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \left\|u'(t)\right\|_{L^2(\Omega)}\|2m.\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \epsilon\left\|u'(t)\right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4\epsilon}\|2m.\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq CE(t).$$

■

Utilisant l'inégalité de Poincaré, il facile de voir que :

$$\int_{\Omega}|Mu(t)|^2 \leq C\int_{\Omega}|\nabla u(t)|^2 \leq 2CE(t) \leq 2C\ell^{-1}\varepsilon(t).$$

Où dans la dernière inégalité nous avons utilisé que $\|h\|_{L^2(0,\infty)} < 1$.
Donc :

$$-\int_0^t h(t-\tau)(u'(t), Mu(\tau))_{\Omega}d\tau \leq C\int_0^t h(t-\tau)(u'(t)^2_{\Omega}, \nabla u(\tau))^2_{\Omega}d\tau$$

$$\leq Cu'(t)^2_{\Omega}\int_0^t h(s)ds$$

$$+ 2C\int_0^t h(t-\tau)(\nabla u(\tau) + \nabla u(t))^2_{\Omega}) + \nabla u(t)^2_{\Omega}d\tau$$

$$\leq 2C\ell^{-1}h_{L^1(0,\infty)}\varepsilon + 2C(h\Diamond\nabla u)(t) + 2Ch_{L^1(0,\infty)}\nabla u(t)^2_{\Omega}$$

$$\leq C^{'}\ell^{-1}\varepsilon(t). \tag{3.30}$$

Combinons (3.28) et (3.30). On obtient :

$$(u^{'}(t), Mz(t))_\Omega \leq C\varepsilon(t), \tag{3.31}$$

et par conséquent,

$$I_3 \leq C\Phi^{'}(S)\varepsilon(S)^2.$$

Estimation de I_4

$$I_4 = \int_S^T \Phi^{''}(t)\varepsilon(t)(u^{'}(t), Mz(t))_\Omega dt.$$

Utilisons la concavité de Φ, on obtient à partir de (3.31), l'inigalité.

$$I_4 \leq C\Phi^{'}(S)\varepsilon(S)^2.$$

Estimation de I_5

$$I_5 = \int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)(u^{'}(t), Mz(t))_\Omega dt.$$

D'après (2.14), on obtient :

$$I_5 \leq C\Phi^{'}(S)\varepsilon(S)^2.$$

Estimation de $I_1 + I_6$

$$I_1 = -\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\left(\int_0^t h(s)ds\right)\|\nabla u(t)\|^2 dt.$$

$$I_6 = 2\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_0^t h(t-\tau)(\nabla u(t), \nabla u(\tau))_\Omega d\tau dt.$$

Considérant l'inégalité $ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2$ et utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit à partir de (2.14) et de (2.6) que pour tout $\alpha > 0$.

$$I_6 = 2\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_0^t h(t-\tau)(\nabla u(t), \nabla u(\tau))_\Omega d\tau dt.$$

$$= 2\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_0^t h(t-\tau)ds \left\|\nabla u(t)\right\|^2 d\tau dt$$

$$+ 2\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_0^t h(t-\tau)(\nabla u(t), \nabla u(\tau)-\nabla u(t))_\Omega d\tau dt$$

$$\leq 2\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_0^t h(t-\tau)ds \left\|\nabla u(t)\right\|^2 d\tau dt$$

$$+\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_0^t h(t-\tau)ds \left(\frac{1}{\alpha}\left\|\nabla u(t)\right\|^2 + \alpha\left\|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)\right\|^2\right) d\tau dt$$

$$\leq \left(2+\frac{1}{\alpha}\right)\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\left(\int_0^t h(s)ds\right)\left\|\nabla u(t)\right\|^2 dt + 2\alpha\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)^2 dt.$$

Donc

$$I_1 + I_6 \leq \left(2\ell^{-1}\left(2+\frac{1}{\alpha}\right)\|h\|_{L^1(0,\infty)} + 2\alpha\right)\int_S^T \Phi^{'}\varepsilon(t)^2 dt.$$

Estimation de I_7

$$I_7 = -\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_0^t\int_0^t h(t-\tau)h(t-s)(\nabla u(\tau), \nabla u(s))_\Omega ds d\tau dt.$$

Il est clair de voir que

$$I_7 \leq 0.$$

Estimation de I_8

$$I_8 = -h(0)\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)(u^{'}(t), Mu(t))_\Omega dt.$$

On a

$$I_8 \leq Ch(0)\int_S^T \Phi^{'}\varepsilon(t)E dt \leq C\ell^{-1}h(0)\int_S^T \Phi^{'}\varepsilon(t)^2 dt.$$

Estimation de I_9
Utilisons l'inégalité du Poincaré, on obtient :

$$I_9 = -\int_S^T \Phi^{'}\varepsilon(t)\int_0^t h^{'}(t-\tau)(u^{'}(t), Mu(\tau)-Mu(t))_\Omega d\tau dt$$

$$= -\int_S^T \Phi^{'}\varepsilon(u^{'}(t), Mu(\tau))_\Omega \int_0^t h^{'}(t-\tau)d\tau dt$$

$$-\int_S^T \Phi^{'}\varepsilon\int_0^t h^{'}(t-\tau)(u^{'}(t), Mu(\tau)-Mu(t))_\Omega d\tau$$

$$\leq C^{'}\ell^{-1}h(0)\int_S^T \Phi^{'}\varepsilon(t)^2dt + 2C\int_S^T \Phi^{'}\varepsilon(-\varepsilon^{'})dt.$$

Donc

$$I_9 \leq C\ell^{-1}h(0)\int_S^T \Phi^{'}\varepsilon^2 dt + C\Phi^{'}(S)\varepsilon(S)^2dt.$$

Estimation de I_{11}

$$I_{11} = \varepsilon\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\left(\int_{\Gamma_0} z(t)^2 d\Gamma\right)dt.$$

En utilisons la continuité de l'application trace de l'espace V dans l'espace $L^2(\Gamma_0)$, on obtient :

$$I_{11} \leq 2\varepsilon\int_S^T \Phi^{'}\varepsilon\int_{\Gamma_0} u(t)^2\left(\int_0^t h^{'}(t-\tau)u(\tau)d\tau\right)^2 dt$$

$$\leq C\ell^{-1}h(0)\int_S^T \Phi^{'}\varepsilon^2dt + 2\varepsilon\int_S^T \Phi^{'}\varepsilon\int_{\Gamma_0}\left(\int_0^t h(t-\tau)d\tau\right)\left(\int_0^t h(t-\tau)u(\tau)^2d\tau\right)$$

$$\leq C\ell^{-1}\int_S^T \Phi^{'}\varepsilon^2 dt + C\varepsilon\|h\|_{L^1}\int_S^T \Phi^{'}\varepsilon\int_0^t h(t-\tau)(\nabla u(\tau)-\nabla u(t)+\nabla u(t))_\Omega^2 d\tau dt$$

$$\leq C\ell^{-1}\int_S^T \Phi^{'}\varepsilon^2 dt + C\varepsilon\|h\|_{L^1}\int_S^T \Phi^{'}\varepsilon\int_0^t h(t-\tau)(\nabla u(\tau)-\nabla u(t)+\nabla u(t))_\Omega^2 d\tau dt$$

$$\leq (C\varepsilon\ell^{-1}+C\varepsilon\|h\|_{L^1}+C\varepsilon\ell^{-1}\|h\|_{L^1}^2)\int_S^T \Phi^{'}\varepsilon^2 dt.$$

Donc

$$I_{11}\leq C\varepsilon(\ell^{-1}+\|h\|_{L^1})\int_S^T \Phi^{'}\varepsilon^2 dt.$$

Maintenant on revient à l'étude des termes les plus importants : I_2 et I_{10}.

3.2.1 Estimation du taux de décroissance quand g_0 est linéaire et $1/h \leq \Phi^{'}$

Estimation de I_{10}

$$I_{10} = C\varepsilon\int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)\int_{\Gamma_0} u^{'}(t)^2 + g(u^{'}(t))^2.$$

Quand g_0 est linéaire, il est clair de voir que l'on a :

$$I_{10}\leq C\varepsilon\int_S^T \Phi^{'}\varepsilon\int_{\Gamma_0} u^{'}g(u^{'})\leq C\varepsilon C\int_S^T \varepsilon(\varepsilon^{'})\leq C\varepsilon C\varepsilon(S)^2.$$

Il reste à étudier I_2 :
Estimation de I_2

$$I_2 = \int_S^T \Phi^{'}(t)\varepsilon(t)(h\Diamond\nabla u)(t)dt.$$

Supposons qu'il existe une fonction Φ concave et non décroissante telle que $\Phi' \leq -h'/h$ et $\Phi(t) \longrightarrow \infty$ quand $t \longrightarrow \infty$.

Alors
$$\Phi'(t)h(t-s) \leq \Phi'(t-s)h(t-s) \leq -h'(t-s).$$

Donc
$$I_2 \leq \int_S^T \varepsilon \int_0^t h'(t-s)\left\|\nabla u(t) - \nabla u(s)\right\|^2 dsdt \leq -2\int_S^T \varepsilon'\varepsilon dt \leq \varepsilon(S)^2.$$

Utilisons le lemme et toutes les estimations de $I_1, ..., I_{11}$, on obtient :
$$2\int_S^T \Phi'\varepsilon^2 dt \leq C\varepsilon(S)^2 + \left[2\ell^{-1}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\|h\|_{L^1(0,\infty)} + 2\alpha + 2\ell^{-1}h(0) + \epsilon C\ell^{-1}\right]\int_S^T \Phi'\varepsilon^2 dt.$$

Donc si $\alpha, \epsilon, h(0)$ et $\|h\|_{L^1(0,\infty)}$ sont assez petits, on obtient :
$$\int_S^T \Phi'\varepsilon^2 dt \leq C\varepsilon(S)^2.$$

Qui implique que l'energie decroit au moins comme,
$$\varepsilon(t) \leq \varepsilon(0)e^{1-\Phi(t)/2C}.$$

Où Φ vérifie $\Phi' \leq -h'/h$ et Φ' bornée.

Donc, si $-h'/h$ est bornée inférieurement par une constante positive m, alors la fonction,
$$\Phi(t) = mt,$$

vérifie toutes les condtions nécessaires et l'on obtient que l'énergie décroit exponentiellement vers zéro.

Si on considere le noyau h défini par :
$$h(t) = h(0)e^{-mt},$$

ou si le noyau h vérifie :
$$h'/h \longrightarrow \infty, \quad \text{si } t \longrightarrow \infty,$$

par exemple

$$h(t) = h(0)e^{-(1+t)^p},$$

avec $0 < p < 1$.

Alors choisissant $\Phi(t) = \ln(h(0)/h(t))$, on obtient qu'il existe deux constantes $C, \omega > 0$ telles que :

$$\varepsilon(t) \leq C\varepsilon(0)h(t)^{\omega}.$$

Si

$$h(t) = h(0)/(1+t)^q,$$

avec $q > 1$, alors l'énergie décroit au moins polynômialement vers zéro.

Si

$$h(t) = e^{-tp},$$

avec $0 < p < 1$, alors

$$E(t) \leq C\varepsilon(0)e^{-\omega t^p}.$$

3.2.2 Estimation du taux de décroissance quand g est polynômiale au voisinage de zéro

Supposons que $g_0(s) = s^p$ avec $p > 1$.

Dans ce cas particulier, il est intéressant d'estimer I_{10} en utilisant la méthode développée par Komornik.

Il est nécessaire d'utiliser le multiplicateur,

$$\Phi' \varepsilon^{(p-1)/2} M z(t),$$

au lieu de

$$\Phi' \varepsilon M z(t).$$

Si les constantes $h(0)$ et $\|h\|_{L^1(0,\infty)}$ sont assez petites, et s'il existe une fonction concave Φ non décroissante telle que :

$$\Phi' \leq -h'/h,$$

et

$$\Phi(t) \longrightarrow \infty \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow \infty.$$

Des calculs similaires conduisent à :

$$\int_S^T \Phi' \varepsilon^{1+(p-1)/2} dt \leq C\varepsilon(S)^{1+(p-1)/2} + C \int_S^T \Phi' \varepsilon^{1+(p-1)/2} \int_{\Gamma_0} u'^2 - g(u')^2$$

$$\leq C\varepsilon(S)^{1+(p-1)/2} + C_\epsilon \varepsilon(S) + \epsilon \int_S^T \Phi' \varepsilon^{1+2(p-1)/2} dt.$$

En choisissant donc ϵ assez petit, on obtient :

$$\int_S^T \Phi' \varepsilon^{1+(p-1)/2} dt \leq C\varepsilon(S).$$

D'où

$$\varepsilon(t) \leq \frac{C\varepsilon(0)}{\Phi(t)^{2/(p-1)}}.$$

Alors nous sommes revient dans le cas précédent : il reste à étudier les contraintes sur Φ.

- Si $-h'/h$ est bornée inférieurement, alors $\Phi(t) = mt$ est une un bon choix et l'énergie décroit au moins polynômialement vers zéro.

- Si $-h'/h$ décroit vers zéro, alors $\Phi(t) := \ln(h(0)/h(t))$ est un bon choix et l'énergie décroit comme :

$$\varepsilon(t) \leq \frac{C\varepsilon(0)}{(-\ln h(t))^{2/(p-1)}}.$$

exemple 3.2.1 *:*

-Si on considere le noyau h defini par :

$$h(t) = e^{-mt},$$

on trouve que l'énergie décroit comme $t^{-2/(p-1)}$.

-Si

$$h(t) = h(0)/(1+t)^q,$$

avec, $q > 1$, alors l'énergie décroit d'une manière logarithmique vers zéro.

$$\varepsilon(t) \leq C \ln(t)^{-2/(p-1)}.$$

3.2.3 Estimation du taux de décroissance quand la non-linéarité est plus forte que le noyau

Théorème 3.2.2 *Soit Φ_0 une fonction concave telle que son inverse est définie par :*

$$\Phi_0^{-1} = 1 + \int_0^t \frac{1}{G_0(\frac{1}{\tau})}, \quad t \geq 1, \tag{3.32}$$

avec G_0 est une fonction non décroissante au voisinage de $(0,1)$ et

$$G_0(u) = g_0(u)/u.$$

Donc Φ_0^{-1} est croissante et convexe,Φ_0 est croissante et concave, et

$$\Phi_0^{'} \longrightarrow 0 \ \text{ quand } \ t \longrightarrow \infty.$$

Supposons que $\Phi_0^{'} \leq -\xi h^{'}/h$, avec ξ une constante positive. Alors on obtient avec $\Phi := \Phi_0$ que l'énergie décroît sous la forme :

$$\varepsilon(t) \leq \frac{C\varepsilon(0)}{\Phi_0(t)^2}.$$

$$I_2 \leq \xi\varepsilon(S)^2.$$

Il reste à étudier I_{10} : On estime I_{10} en utlisant la décomposition spéciale du domaine Γ_0.

$$\Gamma_0 = \Gamma_{0,1} \cup \Gamma_{0,2} \cup \Gamma_{0,3},$$

où

$$\Gamma_{0,1} = \left\{ x \in \Gamma_0, \left| u^{'}(x,t) \right| \leq G_0^{-1}(\Phi_0^{'}(t)) \right\},$$

$$\Gamma_{0,2} = \left\{ x \in \Gamma_0, G_0^{-1}(\Phi_0^{'}(t)) \leq \left| u^{'}(x,t) \right| \leq G_0^{-1}(\Phi_0^{'}(1)) \right\},$$

$$\Gamma_{0,3} = \left\{ x \in \Gamma_0, \left| u^{'}(x,t) \right| \geq G_0^{-1}(\Phi_0^{'}(1)) \right\}.$$

Ensuite, on estime facilement $\Phi_0^{'}(t)u^{'}(x,t)^2$ sur chaque $\Gamma_{0,i}$:

si $x \in \Gamma_{0,1}$, alors $\Phi_0^{'}(t)u^{'}(x,t)^2 \leq \Phi_0^{'}(t)G_0^{-1}(\Phi_0^{'}(t))^2$.

si $x \in \Gamma_{0,2}$, alors $\Phi_0'(t)u'(x,t)^2 \leq u'(x,t)g_0(u'(x,t)) \leq u'(x,t)g(u'(x,t))$.
si $x \in \Gamma_{0,3}$, alors $\Phi_0'(t)u'(x,t)^2 \leq Cu'(x,t)g_0(u'(x,t)) \leq Cu'(x,t)g(u'(x,t))$.

Donc, en utilisant les propriétés de Φ_0' donnée par (3.32), on obtient :

$$\int_S^T \Phi'\varepsilon \int_{\Gamma_0} u'(x,t)^2 dxdt \leq C\varepsilon(S)^2 + C\varepsilon(S)\int_S^\infty \Phi_0' G_0^{-1}(\Phi_0'(t))^2 dt. \tag{3.33}$$

Des estimations similaires (avec une partition différente de Γ_0 donnent la même estimation),

$$\int_S^T \Phi'\varepsilon \int_{\Gamma_0} g(u'(x,t))^2 dxdt \leq C\varepsilon(S)^2 + C\varepsilon(S)\int_S^\infty \Phi' G_0^{-1}(\Phi_0'(t))^2 dt. \tag{3.34}$$

Mais, on voit à partir de la définition spéciale de Φ_0, que

$$\int_S^\infty \Phi' G_0^{-1}(\Phi_0'(t))^2 dt = \int_{\Phi_0(s)}^\infty G_0^{-1}(\Phi_0'(\Phi_0^{-1}(\tau)))^2 d\tau = \int_{\Phi_0(s)}^\infty \frac{1}{\tau^2} d\tau = \frac{1}{\Phi_0(S)}. \tag{3.35}$$

Finallement, on trouve l'inégalité,

$$I_{10} \leq C_0\varepsilon(S)^2 + C_0\frac{\varepsilon(S)}{\Phi_0(S)}. \tag{3.36}$$

Donc on obtient, à partir de (3.36) et des estimations de $I_1, ..., I_{11}$, que,

$$\int_S^T \Phi'\varepsilon^2 dt \leq C\varepsilon(S)^2 + C\frac{\varepsilon(S)}{\Phi_0(S)}.$$

Si $\alpha, \varepsilon, h(0)$ et $\|h\|_{L^1(0,\infty)}$ sont assez petits. Donc utilisons une inégalité de Granwall généralisée, on obtient que l'énergie décroit au moins comme :

$$\varepsilon(t) \leq \frac{C\varepsilon(0)}{\Phi_0(t)^2} \leq C\varepsilon(0)g_0(\frac{1}{t})^2.$$

Ce résultat est intéressant quant g_0 est faible que tout polynôme au voisinage zéro.

3.3 Construction de la fonction poids dans le cas général

On commence par énoncer les deux lemmes suivants :

Lemme 3.3.1 *Soient f_1, f_2, deux fonction continues telles que :*

$$f_1(t) \longrightarrow 0 \quad quand \quad t \longrightarrow \infty,$$

et

$$\int_0^\infty f_1 = +\infty,$$

f_2 est non décroissante au voisinage de 0 et $f_2(0) = 0$.
Alors il existe toujours une fonction f_3 telle que :

$$f_3 \leq f_1, \quad \int_0^\infty f_3 = +\infty, \quad \int_0^\infty f_3(t) f_2(f_3(t)) dt < +\infty. \tag{3.37}$$

De plus si f_1 non croissante, alors on peut choisi f_3 non croissante.
Le lemme précédent découle dans le lemme suivant :

Lemme 3.3.2 *étant donnée $u_n \geq 0$ telle que $\sum u_n = \infty$, et $\varepsilon_n \geq 0$ telle que :*

$$\varepsilon_n \longrightarrow 0 \; quand \;\; n \longrightarrow \infty,$$

alors il existe une suite non croissante $(\theta_n)_n$ telle que :

$$\theta_n \leq 1, \;\; \sum \theta_n u_n = \infty,$$

avec

$$\sum \theta_n u_n \varepsilon_n < \infty.$$

Preuve. En effet, premièrement notons que si $\sum u_n \varepsilon_n < \infty$, alors choisissant θ_n pour tout n est suffisant. En général, puisque $\varepsilon_n \longrightarrow 0$, alors il existe une suite d'entiers $(n_p)_p$ telle que $n_p \leq n_{p+1}$ et $\varepsilon_n \leq 2 - p$ si $n \geq n_p$.

On définit, par récurrence, une suite d'entiers $(m_p)_p$ telle que $n_p \leq m_p < m_{p+1}$ et

$$\sum_{n=m_{p+1}}^{m_{p+1}} u_n \geq \sum_{n=m_{p-1}+1}^{m_p} u_n \geq 1.$$

On peut définir une telle suite car $\sum u_n = \infty$.
On définit maintenant,

$$\theta_{m_p+1} = ... = \theta_{m_{p+1}} = \sum_{n=m_p+1}^{m_{p+1}} u_n^{-1}.$$

Alors, il facile de preuvée que cette suiteest vérifie les propriétés précédantes. Premièrement elle est non croisante ; ensuite

$$\sum_{n=m_{p+1}}^{m_{p+1}} \theta_n u_n = 1.$$

Donc $\sum \theta_n u_n = \infty$. finalement on a :

$$\sum_{n=m_p+1}^{m_{p+1}} \theta_n u_n \varepsilon_n \leq \frac{1}{2^p} \sum_{n=m_p+1}^{m_{p+1}} \theta_n u_n = \frac{1}{2^p},$$

donc $\sum \theta_n u_n \varepsilon_n \leq \infty$. ■

Preuve. La démonstration du lemme 3.3.1 découle de la même construction.

En suppose que l'on est capable de construire une fonction continue non croissante,

$$\theta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

telle que :

$$\forall t \geq 0, \quad 0 \leq \theta(t) \leq 1,$$

$$\int_0^\infty \theta(t) f_1(t) dt = \infty,$$

$$\int_0^\infty \theta(t) f_1(t) f_2(f_1(t)) dt < \infty.$$

Alors, la fonction $f_3(t) = \theta(t) f_1(t)$ sera continue, non croissante, et vérifiera (3.37), puisque pour tout t assez grand, la monôtonicité de f_2 impliue que :

$$f_3(t) f_2(f_3(t)) \leq f_3 f_2(f_1(t)).$$

La construction d'une telle fonction θ découle à partir de la construction faite pour démontrer le lemme : Premièrement, pour tout $p \geq 1$, il existe une suite $(u_p)_p$ telle que :

$$0 \leq u_p < u_{p+1}, \quad u_p \longrightarrow \infty \text{ quand } p \longrightarrow \infty,$$

et

$$\forall t \geq u_p, \quad f_2(f_1(t)) \leq \frac{1}{2^p}.$$

Ensuite, il existe une autre suite $(x_p)_p$ telle que $u_p < x_p < x_{p+1}$, et

$$\int_{x_p}^{x_{p+1}} f_1(t)dt \geq \int_{x_{p-1}}^{x_p} f_1(t)dt \geq 1.$$

Ensuite, on considére une fonction $\widetilde{\theta}$ constante par morceaux :

$$\forall t \in (x_p, x_{p+1}), \quad \widetilde{\theta}(t) = \frac{1}{\int_{x_p}^{x_{p+1}} f_1(t)dt}.$$

Il est claire que $\widetilde{\theta}$ est non croissante, $\widetilde{\theta} < 1$, et

$$\forall p, \int_{x_p}^{x_{p+1}} \widetilde{\theta}(t)f_1(t)dt = 1, \quad \int_0^{\infty} \widetilde{\theta}(t)f_1(t)dt = \infty.$$

De plus

$$\forall p, \int_{x_p}^{x_{p+1}} \widetilde{\theta}(t)f_1(t)f_2(f_1(t))dt \leq \frac{1}{2^p}, \quad \int_0^{\infty} \widetilde{\theta}(t)f_1(t)f_2(f_1(t))dt < \infty.$$

Finalement, il n'est pas difficile de définir une fonction continue θ, affine par morceaux telle que :

$$\forall t \geq 0, \ \theta(t) \leq \widetilde{\theta}(t), \text{ et } \forall p, \int_{x_p}^{x_{p+1}} \widetilde{\theta}(t)f_1(t)dt \geq \frac{1}{2},$$

et cette fonction vérifie les propriétés requises. ■

Remarque 3.3.1 *Nous avons toujours considéré les cas où $-h^{'}/h$ est bornée inférieurement où si $-h^{'}/h \geq m\Phi_0^{'}$.*

3.3.1 Cas où $\lim(-h^{'}/h) = 0$ quand $t \longrightarrow \infty$

Maintenant, nous allons nous focaliser sur le cas où $-h^{'}/h$ décroit vers zéro à l'infini.

Alors : Posons $f_1 = -h^{'}/h$.

Alors

$$\int_0^X f_1 = \ln \frac{h(0)}{h(X)} \longrightarrow +\infty \quad \text{qd} \quad X \longrightarrow +\infty.$$

De plus si $-h^{'}/h$ est non croissante, alors f_1 est non croissante. Ensuite choisir $f_2 := G_0^{-1}(.)^2$; f_2 est non croissante dans un voisinage de 0.Utilisant le lemme 1, il existe $\Phi^{'} := f_3$ qui est non croissante et qui vérifie (3.37). Nous sommes maintenant capable d'estimer les deux derniers termes.

Estimation de I_2

$\Phi^{'}$ est non croissante, on déduit à partir de (3.37) que,

$$\Phi^{'}(t)h(t-s) \leq \Phi^{'}(t-s)h(t-s) \leq -h^{'}(t-s).$$

D'où

$$I_2 \leq \int_S^T \varepsilon \int_0^t h^{'}(t-s) \left\| \nabla u(t) - \nabla u(s) \right\|_{\Omega}^2 dsdt \leq -2 \int_S^T \varepsilon^{'} \varepsilon dt \leq \varepsilon(S)^2.$$

Estimation de I_{10}

On estime I_{10} en utilisant la décomposition spéciale du domaine,

$$\Gamma_0 = \Gamma_{0,1} \cup \Gamma_{0,2} \cup \Gamma_{0,3},$$

où

$$\Gamma_{0,1} = \left\{ x \in \Gamma_0, \left| u^{'}(x,t) \right| \leq G_0^{-1}(\Phi_0^{'}(t)) \right\}$$

$$\Gamma_{0,2} = \left\{ x \in \Gamma_0, G_0^{-1}(\Phi_0^{'}(t)) \leq \left| u^{'}(x,t) \right| \leq G_0^{-1}(\Phi_0^{'}(1)) \right\}$$

$$\Gamma_{0,3} = \left\{ x \in \Gamma_0, \left| u^{'}(x,t) \right| \leq G_0^{-1}(\Phi_0^{'}(1)) \right\}$$

Ensuite on estime facilement $\Phi_0^{'}(t)u^{'}(x,t)^2$ sur chaque $\Gamma_{0,i}$,

a- Si $x \in \Gamma_{0,1}$, alors $\Phi_0^{'}(t)u^{'}(x,t)^2 \leq \Phi_0^{'}(t)G_0^{-1}(\Phi_0^{'}(t))$,

b- Si $x \in \Gamma_{0,2}$, alors $\Phi_0^{'}(t)u^{'}(x,t)^2 \leq u^{'}(x,t)g_0(u^{'}(x,t)) \leq u^{'}(x,t)g(u^{'}(x,t))$,

c-Si $x \in \Gamma_{0,3}$, alors $\Phi_0^{'}(t)u^{'}(x,t)^2 \leq Cu^{'}(x,t)g_0(u^{'}(x,t)) \leq Cu^{'}(x,t)g(u^{'}(x,t))$.

Donc, utilisant les propriétés de Φ' données par (3.32), on obtient :

$$\int_S^T \Phi'\varepsilon \int_{\Gamma_0} u'(x,t)^2 dx dt \leq C\varepsilon(S)^2 + C\varepsilon(S) \int_S^\infty \Phi_0' G_0^{-1}(\Phi_0'(t))^2 dt$$

$$\leq C\varepsilon(S)^2 + C\varepsilon(S).$$

Des estimations similaires (avec des partitions différentes de Γ_0) donnent la même estimation,

$$\int_S^T \Phi'\varepsilon \int_{\Gamma_0} g(u'(x,t))^2 dx dt \leq C\varepsilon(S)^2 + C\varepsilon(S) \int_S^\infty \Phi_0' G_0^{-1}(\Phi_0'(t))^2 dt$$

$$\leq C\varepsilon(S)^2 + C\varepsilon(S).$$

D'où

$$I_{10} \leq C\varepsilon(S)^2 + C\varepsilon(S).$$

Maintenant on peut conclure l'étude : On obtient à partir de (3.27) et des estimations de $I_1, ...I_{11}$ que,

$$2\int_S^T \Phi'\varepsilon^2 dt \leq C\varepsilon(S)^2 + C\Phi'(S)\varepsilon(S)^2$$

$$+(2\ell^{-1}1 + \frac{1}{\alpha}) \|h\|_{L^1(0,\infty)} + 2\alpha + C\ell^{-1}h(0) + \varepsilon C\ell^{-1} \int_S^T \Phi'\varepsilon^2 dt$$

$$+C_\varepsilon C\varepsilon(S)^2 + C_\varepsilon C\varepsilon(S).$$

Donc si $\alpha, \varepsilon, h(0)$ et $\|h\|_{L^1(0,\infty)}$ sont assez petits, on obtien :

$$\int_S^T \Phi'\varepsilon^2 dt \leq C\varepsilon(S)^2 + C\varepsilon(S) \leq C'\varepsilon(S).$$

Alors une inégalité de type Gronwall montre que l'énergie décroit au moins comme,

$$\varepsilon(t) \leq \frac{C\varepsilon(0)}{\Phi_0(t)}.$$

Conclusion

Dons cette mémoire, nous étudie l'existence des solutions et la décroissance et la stabilisation d'une équation des ondes.

- Le taux de décroissance de l'énergie associée à un système viscoélastique non linéaire stabilisée par un feedback non linéaire $g(u^{'})$ agissant sur la frontière, et des termes mémoires interne et frontière, depend du comportement de g au voisinage de zéro et du noyau h à l'infini.

- La question qui se pose est la suivante : Peut-on construire une fonction spéciale Φ explicitement, de telle sort que si le noyau décroît exponentiellement vers zéro à l'infini, alors le taux de décroissance est donné par le terme feedback ?.

- Mais quand le noyau ne décroît pas exponentiellement vers zéro à l'infini, la décroissance dépend de son comportement à l'infini : comme dans le cas oú g est linéaire $g(r) = r\ et\ -h_0/h$ décroît vers zéro à l'infini.

Bibliographie

[1] A. Adams. Sobolev Spaces. Academic press New Yonk San Francisco London (1975).

[2] A. Favini, M. A. Horn, I. Lasiecka, and D. Tataru, Global existence and regularity of solutions to a Von K arm an system with nonlinear boundary dissipation, Differential and Integral Equations, 9 (1996), 267-269.

[3] A. Haraux, Comportement à l'infini pour une équation des ondes non linéaires dissipative, C.R. Math. Acad. Sci. Paris Sér. A 287 (1978) 507-509.

[4] A. Heminna, Stabilisation frontière de problèmes de Ventcel, C.R.Acad. Sci. Paris, 328, série I (1999). 1171-1174

[5] A. Heminna, Contrôlabilisation exacte et stabilisation frontière de divers problèmes aux limites modélisant des jonctions de multi structures, thèse, U.S.T.H.B, Alger .2000

[6] A. Khemmoudj, stabilisation de quelques Problèmes aux limites non linéaires. Thèse, USTHB, Alger 2007.

[7] A. Khemmoudj, Medjden M., Exponential Decay for the Semilinear Damped Cauchy-Ventcel Problem, Bol. Soc. Paran. Mat., 22(2), 97-116, 2004.

[8] C. M. Dafermos, An abstract volterra equation with application to linear viscoelasty, J. Differential Equations 7 (1970) 554-589.

[9] M. M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, and J. A. Soriano, Existence and boundary stabilization of a nonlinear hyperbolic equation with time-dependent coefficients,EJDE, 8(1998), 1-21.

[10] V. Komornik and E. Zuazua, A direct method for boundary stabilization of the wave equation, J. Math. Pures et Appl., 69 (1990), 33-54.