République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par : **Azzouz Imen**

Intitulé

Fonctions à variation bornée et applications

Dirigé par : Azzouza Nourddine

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.Meftah Badreddine	MCA-UnivGuelma
RAPPORTEUR	Dr.Azzouza Nourddine	MCA -Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.Frioui Assia	MCA -Univ-Guelma

Session Juin 2023

الإهـــــداء

الحمد لله وكفى، الصلاة والسلام على الحبيب المصطفى وأهله ومن وفى،

أما بعد،

أهدي ثمرة جهدي واجتهادي إلى من علماني العطاء دون انتظار إلى من أشعلا مصباح عقلي وأطفأ ظلمة جهلي، وكانا لي خير من شد أزري" أبوي الحبيبين"

إلى أعظم مخلوقة في هذا الوجود إلى التي وهبتني الحياة، وكانت سر وجودي وفرحي إلى من علمتني معنى الصبر وعدم اليأس " أمي الحبيبة" حفظها الله.

إلى رفيق الدرب والكفاح إلى سندي في الحياة إلى من سألت ربي يوما حظا سعيدا فأهداني إياه زوجي العزيز

إلى من تجمعني معهم صلة الرحم الى من حبهم يمشي في عروقي ويلهج بذكراهم فؤادي إلى أخواتي اللواتي تطمئن نفسي بقربهم

إلى من أوصاني بهم المنان في كتاب العزيز في كل زمان إلى جميع أهلي.

إلى من عرفتنا بهم الجامعة وتشاركنا طعم النجاح والتفوق معا، إلى من جمعتنا دروب العلم والصداقة الوفية إلى كل من ذكرهم قلبي ونسيهم قلمي.

Remerciements

Avant tout nous adressons nos remerciements au Dieu, le tout puissant pour la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il nous a donné durant cette année d'études et pour la réalisation de ce travail que nous espérons être utiles.

En premier lieu, Nos vifs remerciements s'adressent à Mr ***Meftah Badreddine*** *d'avoir lieu accepté de présider le jury*

Nous tenons à remercier notre encadreur Mr ***Azzouza Noureddine*** *pour l'orientation, la confiance, la patience qui a constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port.*

Qu'elle trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité.

Nous tenons à remercier Mr ***Frioui Assia*** *d'avoir accepté d'examiner cette modeste contribution et de l'enrichir par ses propositions.*

Nous adressons également nos remerciements à nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Fonction à variation bornée

Azzouz imen
Université 8 Mai 1945 Guelma
Mémoire de Master en mathématiques
Option : EDP Et Analyse Numérique

11 Juillet 2023

Table des matières

Table des notations

Notations	**Définitions**
$[a,b]$	Un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.
$I^{-}(f)$	Est l'intégrale inférieure de f $I^{-}(f)=\sup_{P\in Sub([a,b])} s(f,P)$.
$I^{+}(f)$	Est l'intégrale supérieure de f $I^{+}(f)=\inf_{P\in Sub([a,b])} S(f,P)$.
$S(f,P)$	La somme de darboux supérieure de f pour la subdivision P.
$s(f,P)$	La somme de darboux inférieure de f pour la subdivision P.
$\int_a^b f(x)\,dx$	l'intégrale de Riemann.
$Sub([a,b])$	L'ensemble des subdivisions P de $[a,b]$, $P=(x_0,x_1,...,x_n)$.
$V(f,P)$	La variation f sur $[a,b]$, pour la subdivision P
$V_a^b(f)$	La variation totale de f sur $[a,b]$, $V_a^b(f)=\sup_{P\in Sub([a,b])} V(f,P)$
$VB[a,b]$	Espace des fonctions à variation bornée sur $[a,b]$.
$f\in C^1[a,b]$	f est continue dérivable.
$St(f,g)$	L'intégrale de Stieltjes de f,par rapport à g, $\int_a^b f(x)\,dg(x)$.

Introduction

Les fonctions à variation bornée est une notion importante en analyse mathématique, qui permet de quantifier le "mouvement" ou la variation d'une fonction sur un intervalle donné.

Une fonction est dite à variation bornée si sa variation totale sur intervalle est finie, c'est -à-dire si la différence entre les valeurs de la fonction à différence points de l'intervalle.

Les fonctions à variation bornée, ainsi que les fonctions absoluement continues jouent un rôle important dans l'analyse des fonctions de plusieurs variables, les équations différentielles partielles, calcul des variations..., courbes rectifiables...

Les fonctions absolument continues répondent au problème de reconstruction d'une primitive, c.a.d, retrouver une fonction a partir de sa derivée, car il n'est pas toujours exact que

$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ (contre exemple de l'escalier du diable sur l'ensemble de Cantor).

Une fonction à variation bornée posséde des propritétés intéressants, par exemple elle est nécessairement bornée sur l'intervalle $[a, b]$, ce qui signifie qu'elle ne prend pas des valeurs infinies. De plus, une fonction à variation bornée peut être intégrée, ce qui permet de définir une intégrale de Riemann pour cette fonction.

Notre mémoire est organisé sur un plan structuré par trois chapitres.

Le premier chapitre sera consacré essentiellement à des rappels et préliminaires sur les notions de base utilisées tout au long de ce méoire.

Dans le deuxième chapitre, on présente les fonctions à variations bornées d'un seule variable et leurs propriétés.

Le dernier chapitre est consacré à une application sur les fonctions à variations bornées.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on présente des notions utiliseés tout au lang de ce mémoire, en particulier les fonctions monotones, les fonctions continues et l'intégrale de Riemann.Pour plus de details, on réfère à [8] et [11].

1.1 Fonctions monotones

Définition 1.1.1 *Soit $f : [a, b] \longrightarrow$ une fonction réelle sur un intervalle dans $\mathbb{R}$. On dit que f est :*

1. *Croissante si pour tout $x, y \in [a, b]$, $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$*
2. *Décroissante si pour tout $x, y \in [a, b]$, $x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$,*
3. *Monotone si elle est soit croissante soit décroissante.*

1.1.1 Propriétés

- La somme de deux fonctions croissantes sur $[a, b]$ est croissante sur $[a, b]$.
- La somme de deux fonctions décroissantes sur $[a, b]$ est décroissante sur$[a, b]$.

– La somme de deux fonctions monotones sur $[a, b]$ est monotone sur $[a, b]$.
– Le produit de deux fonctions positives croissantes sur $[a, b]$ est une fonction croissante sur $[a, b]$.
– Le quotient d'une fonction positive croissante sur $[a, b]$ par une fonction positive et décroissante sur $[a, b]$ est une fonction croissante sur $[a, b]$.
– La composée de deux fonctions monotones est monotone.

1.2 Fonctions continues

Définition 1.2.1 (Continuité par point) *Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *on dit que* f *est*

– *Continue à droite en* $x_0 \in [a, b]$, *lorsque* $\lim_{x \to x_0, x \geq x_0} f(x) = f(x_0)$.
– *Continue à gauche en* $x_0 \in [a, b]$, *lorsque* $\lim_{x \to x_0, x \leq x_0} f(x) = f(x_0)$.
– *Continue en* $x_0 \in [a, b]$ *si et seulement si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

On dite que f est continue en $x_0 \in [a, b]$ si et seulement si f est continue à gauche et à droite de x_0.

Proposition 1.2.1 *Soit* f *et* g *deux fonctions définies sur un intervalle* $[a, b]$, *si les fonctions* f *et* g *sont continues en* $x_0 \in [a, b]$, *alors*

$\triangleright$. αf *est continue en* x_0 $(\alpha \in \mathbb{R})$;

$\triangleright$. $f \pm g$ *est continue en* x_0;

$\triangleright$. $f.g$ *est continue en* x_0;

$\triangleright$. $\frac{f}{g}$ *est continue en* x_0 *si* $g(x_0) \neq 0$;

$\triangleright$. *Si une fonction* f *est continue au point* x_0 *et une fonction* g *est continue au point* $g(x_0)$, *alors* $f \circ g$ *est continue en* x_0.

Proposition 1.2.2 *Soient* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in [a,b]$, f *est continue en* x_0 *si et seulement si pour toute suite* $(x_n)_n \subset [a,b]$ *qui converge vers* x_0 *on a la limite de la suite* $(f(x_n))_n$ *existe et vaut* $f(x_0)$.

Définition 1.2.2 (La fonction uniformément continue) *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction uniformément continue si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un* $\alpha(\varepsilon) > 0$, *tel que*

$$\forall x, y \in [a,b] \qquad |x-y| < \alpha(\varepsilon) \;\; \textit{implique} \;\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Remarque 1.2.1 *La continuité uniforme est une propriété plus forte que la continuité usuelle :*

Il existe des fonctions continues, qui ne sont pas uniformément continues.

Théorème 1.2.1 (Théorème de Heine) *Une fonction* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue sur un intervalle compact est uniformément continue.*

Définition 1.2.3 (Fonctions absolument continues) *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. *On dit que* f *est absolument continue sur l'inervalle* $[a,b]$ *si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$, *tel que pour tout ensemble fini d'intervalles disjoints ; non vides* $\{]\alpha_k, \beta_k[: \; k = 1, 2, ...n\}$ *vérifiant :*

$$\sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k) < \delta \, .$$

On a

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < \varepsilon.$$

L'ensemble des fonctions absolument continues sur $[a,b]$ *est noté* $AC[a,b]$.

Remarque 1.2.2 *Les fonctions absolument continues ont une relation importante avec les fonctions à variation bornée.*

Définition 1.2.4 (Fonction bornée) *Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *:*

- *On dit que* f *est majorée sur* $[a, b]$*, s'il existe* $M \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $x \in [a, b]$*,* $f(x) \leq M$*. Alors que* M *est un majorant de* f*.*
- *On dit que* f *est minorée sur* $[a, b]$*, s'il existe* $m \in \mathbb{R}$ *pour tout* $x \in [a, b], f(x) \geq m$*. On dit alors que* m *est un minorant de* f *.*
- *On dit que* f *est bornée sur* $[a, b]$ *si* f *est majorée et minorée sur* $[a, b]$*.*

Théorème 1.2.2 *Si* f *est une fonction continue sur intervalle fermé bornée* $[a, b]$*, alors* f *est bornée sur* $[a, b]$ *et atteint ses bornées sur* $[a, b]$*.*

1.3 Fonctions dérivables

Définition 1.3.1 *Soit une fonction réelle définie sur un intervalle* $[a, b]$*, et soit* $x_0 \in [a, b]$*. On dit* f *est dérivable en* x_0*si :*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite dans $\mathbb{R}$ *quand* $h \longrightarrow 0$*, ou de maniére équivalente, si le rapport*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

admet une limite dans $\mathbb{R}$ *quand* $x \longrightarrow x_0$*, cette limite est notée* $f'(x_0)$ $\left(ou\ \frac{df}{dx}(x_0)\right)$ *et, est appelée dérivée de* f *en* x_0*.*

Proposition 1.3.1 *Soit* f *et* g *deux fonction de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *dérivables en* $x_0 \in]a, b[$*. Alors* $f + g$ *et* $f - g$ *et* fg *sont dérivables en* x_0*. Cela vant* *également pour* $\frac{f}{g}$ *si* $g(x_0) \neq 0$ *et* $(g \circ f)$. *Les dérivées en* x_0 *sont données par les fonctions suivantes :*

1. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.
2. $(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$.
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$, *tel que* $g(x_0) \neq 0$.

Théorème 1.3.1 (Théoréme des accroissements finis) *Soit f une fonction continue de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$, *dérivable dans* $[a,b]$, *alors il existe (ou moins) un point* $c \in [a,b]$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

1.4 Intégrale de Riemann

Définition 1.4.1 (Subdivision) *Soit* $[a,b]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$, *On appelle* P=$(x_0, x_1, ...x_n)$, *une subdivision de* $[a,b]$, *l'ensemble des points*

$$a{=}x_0 < x_1 < .... < x_n = b$$

l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$ *est désigné par* $Sub([a,b])$. *Une fonction* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.*est dite* ***fonction en escalier*** *s'il existe une subdivision* $P = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ *de* $[a,b]$ *et des nombres réels* $c_1...c_n$, *telle que* $\forall i \in \{1...n\}$ *on a :*

$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[\qquad f(x) = c_i.$$

Autrement dit f *est une fonction constante sur chacun des sous intervalles de la subdivision .*

Définition 1.4.2 (Intégrale des fonctions en escalier) *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction en escalier,* $P = (x_i)_{0<i<n}$ *une subdivision,* $c_i \in \mathbb{R}$ *pour* $i \in \{1...n\}$ *tels que*

$$f(x) = c_i \text{ sur }]x_{i-1}, x_i[$$

Son intégrale, notée $\int_a^b f(x)\,dx$*, est définie par :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1}).$$

Définition 1.4.3 (Sommes de Darboux) *Soit* $a{=}x_0 < x_1 < .... < x_n = b$ *une subdivision de* $[a,b]$ *et soit* f *une fonction bornée, définie sur* $[a,b]$ *à valeurs réelles. On appelle somme de Darboux supérieure la somme*

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

On appelle somme de Darboux inférieure la somme

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

On pose :

$$I^-(f) = \sup_{P\in sub([a,b])} s(f,P), \qquad I^+(f) = \inf_{P\in sub([a,b])} S(f,P)$$

Définition 1.4.4 *On dit que la fonction* f *est intégrable sur* $[a,b]$ *si* $I^-(f) = I^+(f)$*. Alors, on note :*

$$I^-(f) = I^+(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Définition 1.4.5 (Somme de Riemann) *Soit* f *une fonction définie sur* $[a,b]$*,* $P = (x_0...x_n)$ *une subdivision de* $[a,b]$*, et soit* $t = (t_i)_{1\le i\le n}$ *une suite* *de points tels que, pour tout* $1 \leq i \leq n$, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. *On note* $\|P\| = \max\{x_i - x_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}$. *On appelle somme de Riemann de la fonction* f, *la quantité*

$$S(f, P, t) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i).$$

On dit que f *est Riemann intégrable sur* $[a, b]$, *s'il existe* $I \in \mathbb{R}$, *tel que*

$$\forall \varepsilon \geq 0, \exists \alpha \geq 0, \forall P \in Sub([a, b]), \|P\| < \alpha, \forall t, |S(f, P, t) - I| < \varepsilon.$$

Dans ce cas,

$$I = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Définition 1.4.6 *On a :*

- *Toute fonction Riemann intégrable sur un intervalle* $[a, b]$ *est bornée.*
- *Les fonctions continues sont Riemann intégrables.*
- *Les fonctions monotones (croissantes ou décroissantes) sont Riemann intégrables.*

Proposition 1.4.1 (Linéarité) *Si* f *et* g *deux fonctions définie sur* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *sont Riemann-intégrables alors leurs combinaisons linéaires le sont aussi et pour tout* α, β *réels,an a*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b f(x)\, dx.$$

Autement dit, l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables est un espace sur lequel l'intégrale définit une application linéaire.

Proposition 1.4.2 (Relation de Chasles) *Si* f *est Riemann-intégrable sur* $[a, b]$ *et* $c \in]a, b[$ *alors* f *est encore sur* $[a, c]$ *et sur* $[c, b]$ *on a*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Si f est positive et Riemann-intégrable sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Corollaire 1.4.1 *Si f et g sont Rieman-intégrable et $f \leq g$, alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

C'est la propriété prcédente appliquée à $g-f$, fonction positive.

Proposition 1.4.3 (Intégrale et valeurs absolues) *Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, alors*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

1.5 Topologie générale

Pour plus de détails sur cette section se réfèrer à [3],[8], [11].

Définition 1.5.1 (Espace vectoriel topologique) *Un espace vectoriel topologique est un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ muni d'une topologie pour laquelle applications $(x,y) \longrightarrow x+y$ de $E \times E$ dans E et $(\gamma, x) \longrightarrow \gamma x$ de $\mathbb{k}$ dans E sont continues.*

Définition 1.5.2 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme sur E est une application de E dans $\mathbb{R}_+$, notée $x \longrightarrow \|x\|$ vérifant les propriétés suivants :*

- *Pour tout $x \in E$, $k \in \mathbb{k}$: $\|kx\| = \|k\|\,\|x\|$;*
- *Pour tout $x, y \in E$: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$;*
- *Un élément x de E vérifie $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.*

Définition 1.5.3 (Convergence simple) *On dit que* (f_n) *converge simplement vers* f *si pour tout* $x \in E$ *pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$, *et pour tout* $n \geq n_0$ *on dit* $\|f_n(x) - f(x)\|_F < \varepsilon$. *Autrement dit pour tout* $x \in X$ *on dit* $\|f_n(x) - f(x)\|_F \longrightarrow 0$, *quand* $n \longrightarrow \infty$. *On note* $f_n \longrightarrow f$.

Définition 1.5.4 (Convergence uniforme) *Soit* E *et* F *deux espace normés. On dit une suite* $(f_n)_n$ *d'applications de* E *dans* F *converge uniformément vers une application* $f : E \longrightarrow F$ *si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que , pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *tel que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ *et pour tout* $x \in E$, *on dit* $\|f_n(x) - f(x)\|_F < \varepsilon$, *c'est à dire*

$$\sup_{x \in E} \|f_n(x) - f(x)\|_F < \varepsilon.$$

Définition 1.5.5 (Convergence presque partout) *On dit que la suite* $(f_n)_n$ *converge vers* f *presque partout sur* $X \subset \mathbb{R}$, *si* $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *pour tout* $x \in X$ *sauf sur une partie dénombrable de* X.

Définition 1.5.6 (Espace métrique) *Soit* E *un ensemblevnon vide. On appelle distance sur* E *toute application* d *définie de* $E \times E$ *dans* $\mathbb{R}$ *et vérifiant les propriétés suivantes :*

- $\forall x, y \in E, \;\; d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$
- $\forall x, y \in E, \;\; d(x, y) = d(x, y);$
- $\forall x, y, z \in E, \;\; d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z).$

Le coupe (E, d) *s'appelle un espace métrique.*

Définition 1.5.7 (Suite de Cauchy) *Soit* (E, d) *un espace métrique, et soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* E. *On dit que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy dans* (E, d) *si elle vérifie,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \; \forall p, q \in \mathbb{N} : p, q \geq n_0 \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Définition 1.5.8 (Espace complet) *On dit qu'un espace métrique* (E, d) *est complet si toute suite de Cauchy dans* E *converge.*

Définition 1.5.9 (Espace de Banach) *On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet.*

Chapitre 2

Fonction à variation bornèe

Dnas ce chapitre, nous introduisons les fonctions à variations bornées d'une seule variable on donnant la définition et quelques propriétés élémentaires relatives à ces fonctions.

On rappelle : $\|P\| = \max\{x_i - x_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}$.

Définition 2.0.10 *Soit une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $P = (x_0\,, x_1, ...x_n)$, une subdivision de $[a,b]$. La quantité :*

$$V(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

est dite variation de f, pour P.La quantité

$$V_a^b(f) = \sup_{P \in Sub([a,b])} V(f,P),$$

s'appelle la variation totale de f sur $[a,b]$.

Définition 2.0.11 (variation bornée) *Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite à variation bornée si*

$$V_a^b(f) < \infty.$$

Exemple 2.0.1 (de fonction continue,qui n'est pas à variation bornée)
La fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0, \end{cases}$$

est continue sur $[0,1]$, *mais n'est pas à variation bornée. En effet.*

On considére la subdivision suivante de $[0,1]$,

$$P_n = 0 < \frac{1}{n\pi} < \frac{1}{(n-1)\pi} < ... < \frac{1}{2\pi} < \frac{1}{\pi} < 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} V_a^b(f, P_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \\ &\geq \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left| f\left(\frac{1}{(i+1)\pi}\right) - f\left(\frac{1}{i\pi}\right) \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)} - \frac{(-1)^i}{i} \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{(-1)}{(i+1)} - \frac{1}{i} \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(i+1)} + \frac{1}{i} \right) \\ &\geq \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+1} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2}{i+1}. \end{aligned}$$

donc,

$$V(f, P_n) \geq \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2}{i+1}.$$

Or la série $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1}$ *est divergente* ($\sim \log(n)$)*, donc* f *n'est pas à variation bornée.*

2.1 Propriétés des fonctions à variation bornée

Définition 2.1.1 *Une suite* $(a_k)_{k\geq 1}$*est dite à variation bornée, si et seulement si elle vérifie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| < \infty. \tag{2.1}$$

Théorème 2.1.1 *Toute suite à variation bornée est convergente.*

Preuve. Lorsque, $m < n$ on forme la somme télescopante

$$\sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_m.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire on obtient :

$$|a_n - a_m| = \left| \sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \right| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| \tag{2.2}$$

Par (2.1) et en utilisant la définition de convergence de Cauchy on a de (2.2)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > m > N(\varepsilon), |a_n - a_m| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| < \varepsilon.$$

La suite (a_n), est de Cauchy, donc convergente dans l'espace métrique complet $\mathbb{R}$. ■

Théorème 2.1.2 (voir[12]) *Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *, et soit* $c \in \,]a, b[$. *Alors* $f \in VB[a, b]$ *si et seulement si* $f \in VB[a, c]$ *et on a* $f \in VB[a, b]$ *avec :*

$$V_a^b(f) = V_a^c(f,) + V_c^b(f).$$

Théorème 2.1.3 (voir[7]) *Si f est monotone sur $[a,b]$, alors f est de variation bornée, et la valeur de sa variation totale est $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.*

Preuve. Soit $\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ une subdivision de $[a,b]$, supposons f est croissante

$$x_i > x_{i-1} \Longrightarrow f(x_i) > f(x_{i-1}).$$

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) > 0 \Longrightarrow |f(x_i) - f(x_{i-1})| = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

Soit, considérons la somme :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= f(x_2) - f(x_1) + ... + f(x_n) - f(x_{n-1}) \\ &= f(x_n) - f(x_1) < f(x_n) < f(b) < \infty. \end{aligned}$$

Donc f est à variation bornée sur $[a,b]$. Ainsi on voit que,

$$V_a^b(f,[a,b]) = \sup_p \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = f(b) - f(a).$$

■

Remarque 2.1.1 *La réciproque est fausse, il existe des fonctions à variation bornée qui ne sont pas monotones.*

Exemple 2.1.1 *$f(x) = \sin(x)$ fonction à variation bornée sur $[0, 2\pi]$ mais non monotone.*

Proposition 2.1.1 (voir [6]) *. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée sur $[a,b]$, alors f est bornée sur $[a,b]$ et*

$$|f(x)| \leq |f(a)| + V_a^b(f), \quad \forall x \in [a,b].$$

Preuve. Soit $x \in [a,b]$, on utilisante la subdivision $P = (x_0, x_1, x_2)$ de $[a,b]$, telle que $x_0 = a$, $x_1 = x$, $x_2 = b$, nous avons

$$V(f,P) = \sum_{i=0}^{1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq V_a^b(f)$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| &= |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| \\ &= |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \\ &\leq V_a^b(f),\end{aligned}$$

implique

$$|f(x) - f(a)| \leq V_a^b(f)$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leq |f(a) + f(x) - f(a)| \\ &\leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \\ &\leq |f(a)| + V_a^b(f).\end{aligned}$$

donc,

$$|f(x)| \leq |f(a)| + V_a^b(f), \forall x \in [a,b].$$

■

Théorème 2.1.4 (voir [9]) *Soit I désigne le segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si $f \in C^1(I,\mathbb{R})$, alors f est à variation bornée et*

$$V_{[a,b]}(f) = \int_a^b \|f'(x)\| \, dx.$$

Preuve. Tout d'abord, f est à variation bornée et

$$V_{[a,b]}(f) \leq \int_a^b \|f'(x)\| \, dx.$$

Soit en effet $P = (x_0, ..., x_n)$ une subdivision de I

$$\begin{aligned} V(f,P) &= \sum_{i=0}^{n-1} \|f(x_{i+1}) - f(x_i)\| \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(t) \, dt \right\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|f'(x)\| \, dx. \\ &= \int_a^b \|f'(x)\| \, dx \end{aligned}$$

■

Remarque 2.1.2 . *La réciproque est fausse ; Il existe des fonctions à variation bornée qui ne sont pas dérivables.*

Théorème 2.1.5 *Si f est absolument continue sur $[a,b]$ et $[c,d] \subset [a,b]$, alors f est absolument continue sur $[c,d]$ aussi. Si $a < c < b$, et f est absolument continue sur $[a,c]$ et $[c,b]$, alors f est absolument continue sur $[a,b]$.*

Preuve. On suppose que $c \in (a,b)$, $f \in [a,b]$, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout système d'intervalles $\{[\alpha_k, \beta_k] : k = 1, 2, ...n\}$ tel que $\alpha \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 ... < \beta_{n-1} \leq \alpha_n < \beta_n < c$ et

$$\sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k) < \delta.$$

■

Théorème 2.1.6 (voir [11]) *Si une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est absolument continue sur un intervalle $[a,b]$, alors f est à variation bornée sur $[a,b]$.*

Preuve. Soit $f \in [a,b]$, choisir $\delta > 0$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < 1$$

Pour tout système d'intervalles $\{[\alpha_k, \beta_k] : k = 1, 2, ..., n\}$, choisir une subdivision $(y_0, y_1, ..., y_m)$ de $[a,b]$ tel que

$$0 < y_i - y_{i-1} < \delta \qquad\qquad \text{pour } i = 1, ..., m.$$

Pour chaque division $P^i = (x_0^i, x_1^i, ..., x_{ni}^i)$ de l'intervalle $[y_{i-1}, y_i]$, nous avons

$$\sum_{k=1}^{ni} \left(x_k^i - x_{k-1}^i\right) = y_i - y_{i-1} < \delta,$$

Par conséquent,

$$V_a^b(f) = \sum_{i=1}^{m} V_{x_{i-1}}^{x_i}(f) = \sum_{i=1}^{m} \sup_{P^i \in [x_i, x_{i-1}]} V\left(f, P^i\right) \leq m < \infty.$$

Donc f à variation bornée. ■

Théorème 2.1.7 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et f' existe et bornée sur $]a,b[$, alors f est absolument continue sur $[a,b]$.*

Preuve. On suppose que qu'il existe $M > 0$, telle que $|f'(x)| < M$, pour tout $x \in]a,b[$. Soit $\varepsilon > 0$ et on considère $\sum_{k=1}^{n} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)|$ où $\{[\alpha_k, \beta_k] : k = 1, 2, ..., n\}$

une subdivision dénombrable de l'intervalle $[a, b]$ par des intervalle $[\alpha_k, \beta_k]$, telle que

$$\sum_{k=1}^{n} |\beta_k - \alpha_k| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Alors, nous avons

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| = \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(\beta_k) - f(\alpha_k)|}{|\beta_k - \alpha_k|} |\beta_k - \alpha_k|.$$

Par le Théorème des accroissements finis pour tous $k = 1, 2, ..., n$, ilexiste $c_k \in [\alpha_k, \beta_k]$ telle que

$$\frac{|f(\beta_k) - f(\alpha_k)|}{|\beta_k - \alpha_k|} = |f\prime(c_k)| < M.$$

implique

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{|f(\beta_k) - f(\alpha_k)|}{|\beta_k - \alpha_k|} |\beta_k - \alpha_k| &< \sum_{k=1}^{n} M |\beta_k - \alpha_k| \\
&= M \sum_{k=1}^{n} |\beta_k - \alpha_k| \\
&= M \frac{\varepsilon}{M} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc, f est absolument continue sur $[a, b]$. ■

Théorème 2.1.8 (voir [10]) *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée, alors la fonction $v(x) = V_a^x(f)$ est continue en $c \in [a, b]$ si et seulement si f est continue en c.*

Preuve. Supposons que $v(.)$ est continue en $c \in [a, b]$, c'est à dire pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - c| < \delta$, impliquent $|v(x) - v(c)| < \varepsilon$. Par la définition de la variation bornée, soit $P = (a = x_0, x_1 = b)$ une subdivision de $[a, b]$, nous avons

$$|f(b) - f(a)| \leq V_a^b(f).$$

Ainsi, si $x < c$,

$$|f(c) - f(x)| \leq V_x^c(f),$$

on a

$$V_a^c(f) = V_a^x(f) + V_x^c(f)$$

$$V_x^c(f) = V_a^c(f) - V_a^x(f) = v(c) - v(x),$$

donc $|f(c) - f(x)| \leq V_c^x(f) = v(x) - v(c)$. Cela montre que quand $|x - c| < \delta$, on a

$$|f(x) - f(c)| \leq |v(x) - v(c)| < \varepsilon.$$

Donc, la continiuté de $v(.)$ implique la continuité de f.

Supposons maintenant que f est continue en $c \in [a, b]$, soit $\varepsilon > 0$, alors existe $\delta > 0$ telle que

$$0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour ce ε, il existe $\delta \in Sub([c, b])$, tel que

$$P = (c = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b)$$

et

$$V_c^b(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Si $x_1 - x_0 \geq \delta$, en ajoutante un point $x_{\frac{1}{2}}$ à P tel que $x_{\frac{1}{2}} - x_0 < \delta$. Alors

$$\begin{aligned}
V_c^b(f) - \frac{\varepsilon}{2} &< |f(x_1) - f(x_0)| + \sum_{k=2}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\
&\leq \left| f(x_1) - f\left(x_{\frac{1}{2}}\right) \right| + \left| f\left(x_{\frac{1}{2}}\right) - f(x_0) \right| + \sum_{k=2}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\
&< \left| f(x_1) - f\left(x_{\frac{1}{2}}\right) \right| + \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=2}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| .
\end{aligned}$$

Comme $\left\{x_{\frac{1}{2}}, x_1, ..., x_n\right\}$ est une subdivision de $\left[x_{\frac{1}{2}}, b\right]$, nous avons

$$V_c^b(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + V_{x_{\frac{1}{2}}}^b(f) .$$

Par conséquent

$$V_c^b(f) - V_{x_{\frac{1}{2}}}^b(f) < \varepsilon,$$

d'autre part,

$$V_c^b(f) = V_c^{x_{\frac{1}{2}}} + V_{x_{\frac{1}{2}}}^b(f)$$

$$\begin{aligned}
V_c^b(f) - V_{x_{\frac{1}{2}}}^b(f) &= V_c^{x_{\frac{1}{2}}}(f) \\
&= V_a^{x_{\frac{1}{2}}} - V_a^c(f) \\
&= v\left(x_{\frac{1}{2}}\right) - v(c) .
\end{aligned}$$

Ainsi, si $x_{\frac{1}{2}} - c < \delta$, alors $v\left(x_{\frac{1}{2}}\right) - v(c) < \varepsilon$. Donc, par conséquent $v(.)$ est continue à droite en c. De même, on peut monter que si $x \in]a, b]$, $v(.)$ est continue à gauch en c. Donc $v(.)$ est continue en c. ■

Définition 2.1.2 *On dit que $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction Lipschizienne s'il existe une constante $L > 0$, tel que pour tout $x, y \in [a, b]$, nous avons*

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y| .$$

Proposition 2.1.2 (voir [7]) *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est Lipschitzienne, de rapport L, alors f est à variation bornée et on a :*

$$V_a^b(f) \leq L(b-a). \tag{2.3}$$

Preuve. Comme f est lipschitzienne, il existe un réel L positive tel que

$$\forall x, y \in [a, b] \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|.$$

Soit $P = (x_0, ..., x_n) \in Sub([a, b])$. On a

$$V_a^b(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x)| \leq L \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = L(b-a),$$

Donc f est à variation bornée et

$$V_a^b(f) \leq L(b-a).$$

■

Théorème 2.1.9 (voir [9]) *Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $[a, b]$ et s'il existe $M > 0$ tel que $|f'(x)| \leq M$ sur $[a, b]$ alors, f est à variation bornee :*

$$V_a^b(f) \leq M(b-a).$$

Preuve. Pour tout $x, y \in [a, b]$ on a $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$ pour certains c entre x et y selon le théorème de la valeur moyenne.Ainsi

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x-y| \leq M|x-y|$$

pour tout $x, y \in [a, b]$, c-à-d que f une condition de lipschitz sur $[a, b]$ avec constante M et donc (2.3) donne le résultat. ■

Exemple 2.1.2 *Montrer que* $f \in [0,1]$ *si*

$$f(x) = \begin{cases} x^{3/2}\cos\left(\pi / \sqrt{x}\right) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Pour tout $x \in (0,1]$ *la fonction* $f(x)$ *à la dérivée*

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}\cos\left(\pi / \sqrt{x}\right) + \frac{\pi}{2}\sin\left(\pi / \sqrt{x}\right)$$

au point 0 *la dérivée*

$$f'(0) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0} x^{1/2}\cos\left(\pi / \sqrt{x}\right) = 0$$

Maintenant, pour tout $x \in [0,1]$ *nous avon*

$$|f'(x)| \leq \left|\frac{3}{2}x^{1/2}\cos\left(\pi / \sqrt{x}\right)\right| + \left|\frac{\pi}{2}\sin\left(\pi / \sqrt{x}\right)\right| \leq \frac{3}{2} + \frac{\pi}{2} = L.$$

Puisque f *à une dérivée bornée sur* $[0,1]$*,* f *est a variation bornee, avec* $V_a^b(f) \leq L$.

Lemme 2.1.1 *Pour des fonctions* f, g *données :*$[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *et un nombre réel* c*, on a les relations*

$$V_a^b(f+g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$$

et

$$V_a^b(cf) = |c|\, V_a^b(f)$$

De plus, $V_a^b(f) = 0$ *si et seulement si* f *est constante sur* $[a,b]$.

Proposition 2.1.3 (voir [7]) *Soit* $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions à variations bornées sur* $[a,b]$ *et* α *une constante alors*

1. *f est une fonction à variation bornée sur chaque sous intervalle fermé de $[a,b]$.*
2. *αf est à variation bornée sur $[a,b]$.*
3. *$f+g$ et $f-g$ sont à variations bornées sur $[a,b]$.*
4. *Si $\frac{1}{g}$ est bornée sur $[a,b]$, alors $\frac{f}{g}$ est à variations bornées sur $[a,b]$.*

Preuve. 1. Soit f est une fonction à variation bornée. Donc

$$V_a^b(f) = \sup_{P\in Sub([a,b])} V(f,P) = r,$$

où r est un nombre réel positif.

Soit $[c,d]$ un sous intervalle fermé de $[a,b]$ et $P_1 = \{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ une subdivision de $[c,d]$, en ajoutant les points a et b à P_1, on obtient $P_2 = \{x_i : 0 \leq i \leq n+1\}$ est une subdivision de $[a,b]$, telle que $x_1 = c$ et $x_n = d$. Alors

$$\begin{aligned}
V(f,P_1) &= \sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \\
&\leq |f(x_1) - f(a)| + \sum_{i=2}^{n+1} |f(x_i) - f(x_{i+1})| + |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \\
&= \sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \\
&= V(f,P_2) \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Et comme la subdivision de $[c,d]$, on conclut que

$$V_a^d(f) = r,$$

donc f est à variation bornée sur $[c,d]$.

2. Soit $P = (x_0, x_1 ..., x_n)$ une subdivision de $[a, b]$. On a

$$\begin{aligned} V(\alpha f, P) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left|(\alpha f)(x_{i+1}) - (\alpha f)(x_i)\right| \\ &= |\alpha| \sum_{i=0}^{n-1} \left|f(x_{i+1}) - f(x_i)\right| \\ &= |\alpha| V(f, P). \end{aligned}$$

Alors, αf est à variation bornée. En plus

$$V_a^b(\alpha f) = |\alpha| V_a^b(f).$$

3. Par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} V(f+g, P) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left|(f+g)(x_{i+1}) - (f+g)(x_i)\right| \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left|f(x_{i+1}) - g(x_i) - f(x_i) - g(x_i)\right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left|f(x_{i+1}) - f(x_i)\right| + \sum_{i=0}^{n-1} \left|g(x_{i+1}) - g(x_i)\right| \\ &= V(f, P) + V(g, P) \\ &\leq V_a^b(f) + V_a^b(g). \end{aligned}$$

On a f et g sont à variations bornées, donc $V_a^b(f) + V_a^b(g)$ est finie, alors $f + g$ est à variation bornée, (meme preuve pour$f - g$).

4. Par la propriété précédent, il suffit de montrer que $\frac{1}{g}$ est à variation bornée. On a $\frac{1}{g}$ est bornée sur $[a, b]$,donc $\exists M > 0$, tel que pour tout $x \in$

$[a,b]$on a $\left|\frac{1}{g(x)}\right| \leq M$ alors nous avons

$$\begin{aligned} V\left(\frac{1}{g},P\right) &= \sum_{i=0}^{n-1}\left|\frac{1}{g(x_{i+1})}-\frac{1}{g(x_i)}\right| \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{g(x_{i+1})\,g(x_i)}\right| \\ &\leq M^2\sum_{i=0}^{n-1}\left|g(x_{i+1})-g(x_i)\right| \\ &= M^2 V(g,P) \\ &\leq M^2 V_a^b(g). \end{aligned}$$

et comme P est une subdivision, on conclut que $\frac{1}{g}$ est à variation bornée.

■

2.2 Théorème de Jordan

Théorème 2.2.1 (voir [11]) *Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction à variation bornée, si et seulement si'il existe deux fonctions croissantes f_1, f_2 telle que $f=f_1-f_2$.*

Preuve. Si f_1 et f_2 son deux fonction croissante sur $[a,b]$ et $f=f_1-f_2$. Alors f_1 et f_2 ont une variation bornée sur $[a,b]$, nous avons $V_a^b(f)<\infty$. Supposons que $f\in VB([a,b])$, et définissons $f_1(x)=V_a^x(f)$ et $f_2(x)=f_1(x)-f(x)$ pour $x\in a,b$. Soient $x,y\in[a,b]$ et $y\leq x$. Alors

$$f_1(y)=f_1(x)+V_x^y(f),$$

Puisque la variation est toujours positive, il s'ensuit que f_1 est croissante sur $[a,b]$. De plus, d'aprés le Théorème nous avons

$$f_2(y)=f_1(x)+V_x^y(f)-f(y)$$

et

$$f_2(y) - f_2(x) = V_x^y(f) - (f(y) - f(x)) \geq 0.$$

■

Exemple 2.2.1 *Soit* $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction définit par*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & si \;\; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & si \qquad x = 1 \\ 1 & si \;\; 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

alors f *est la difference de deux fonctions croissantes* f_1 *et* f_2*. En effet. On a la fonction* f *est décroissante sur* $[0,1[$, *alors si* $x \in [0,1[$, *donc, on a*

$$\begin{aligned} V_0^x(f) &= |f(x) - f(0)| \\ &= \left|-x^2 - 0\right| \\ &= x^2. \end{aligned}$$

Pour déterminer $V_0^1(f)$, *soit* $P = (x_0 = 0, x_1, ..., x_n = 1)$ *une subdivision de* $[0,1]$, *nous avons*

$$\begin{aligned} V_a^b(f,P) &= \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \\ &= |f(1) - f(x_{n-1})| + \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \\ &= x_{n-1}^2 + \sum_{i=0}^{n-1} \left(x_{n+1}^2 - x_n^2\right) \\ &= 2x_{n-1}^2. \end{aligned}$$

En prenant le point x_{n-1} *tel que* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_{n-1} = 1$, *donc* $V_a^b(f,P)$ *assez proch à 1. Ainsi* $V_0^1(f) = 2$*. Finalement, si* $x \in]1,2]$, *nous avons*

$$\begin{aligned} V_0^x(f) &= V_0^1(f) + V_1^x(f) \\ &= 2 + V_1^x(f). \end{aligned}$$

Soit $P = (x_0, x_1, ...x_n)$ *une subdivision de* $[1, x[$, *donc*

$$\begin{aligned} V_a^b(f,P) &= \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \\ &= |f(x_1) - f(x_0)| + \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \\ &= |1-0| \\ &= 1. \end{aligned}$$

Il est clair que $V_a^b(f,P)$ *est indépendant de la subdivision* P, *donc* $V_1^x(f) = 1$, *donc si* $x \in]1,2]$ *,on a* $V_{à}^x(f) = 3$. *Par conséquent*

$$f_1(x) = V_0^x(f) = \begin{cases} x^2 & si \;\; 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & si \qquad\quad x = 1 \\ 3 & si \;\; 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} f(x) &= V_0^x(f) - (V_0^x(f) - f(x)) \\ &= f_1(x) - f_2(x). \end{aligned}$$

Corollaire 2.2.1 (voir [11]) *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction à variation bornée sur* $[a,b]$, *alors* f *est la différence de fonctions strictement croissantes.*

Proposition 2.2.1 *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ *et* $g : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions telle que* g *est à variation bornée sur* $[c,d]$, *alors* $(g \circ f)$ *est à variation bornée sur* $[a,b]$.

2.3 Espace des fonction à variation bornée VB$[a,b]$

Théorème 2.3.1 (voir [1]) *L'espace des fonction à variation bornée, noté* $VB[a,b]$, *muni de la norme*

$$\|f\| = |f(a)| + V_a^b(f).$$

est un espace de Banach.

Preuve. Pour des fonctions données $f, g \in VB\,[a, b]$ et c un nombre réel, tel que

$$\|f+g\|_{VB} = \|f\|_{VB} + \|g\|_{VB} \qquad et \qquad \|cf\|_{VB} = |c|\,\|f\|_{VB}\,. \tag{2.4}$$

Si $\|f\|_{VB} = 0$, alors $f(a) = 0$ et $V_a^b(f) = 0$ $f(x) - f(a) = 0$ sur $[a, b]$, f est élément nul de $VB([a, b])$. ■

Théorème 2.3.2 (voir [9]) *(***VB** $[a, b]\,, ||.||$*) est un espace de Banach.*

Preuve. Soit (f_n) est une suite de Cauchy dans l'espace $VB([a, b])$, donc si $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon > 0$, tel que si $n, m \geq n_\varepsilon$, alors

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{VB} < \varepsilon. \tag{2.5}$$

a) Ce qui implique que $\{f_n(x)\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, pour tout $x \in [a, b]$, il a une limite finie

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} |f_n(x) - f_{n_\varepsilon}| = f(x)\,.$$

b) Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n_\varepsilon > 0$, alors

$$|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| = \lim_{n \longrightarrow \infty} |f_n(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| \leq \varepsilon,$$

et donc les inégalités

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon$$

pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et $x \in [a,b]$ cela que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0.$$

Autrement dit, la suite $\{f_n(x)\}$ tend vers f uniformément sur $[a,b]$.

c) Par (2.4) et (2.5) il existe $n_1 > 0$ tel que

$$V_a^b(f_n) \leq \|f_n\|_{VB} \leq \|f_{n_1}\|_{VB} + 1 \quad \text{pour } n \geq n_1.$$

Par conséquent, la suite $\left\{V_a^b(f_n)\right\}$ des nombres réels borné par $d \in [0,\infty)$, nous avons

$$V(f,P) = \lim_{n \longrightarrow \infty} V(f_n, P) \leq d \quad \text{pour tous } P \in [a,b],$$

ce qui implique

$$V_a^b(f) = \sup_{P \in [a,b]} V(f,P) \leq d.$$

En particulier, $f \in VB([a,b])$.

d) Il reste à montrer que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|f - f_n\|_{VB} = 0. \tag{2.6}$$

Soit un $\varepsilon > 0$ donné. D'aprés (2.5), il existe un $n_\varepsilon > 0$ tel que

$$V(f_n - f_m, P) \leq V_a^b(f_n - f_m) < \varepsilon \text{ pour } n \geq n_\varepsilon \text{ et } P \in [a,b],$$

et

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} V_a^b(f_n - f) = 0.$$

Ce fait ainsi que la partie a) de la preuve (2.6) est vrai. ■

Chapitre 3

L'intégrale de Stieltjes

Comme une application des fonctions a variation bornée, nous considérons maintenant une généralisation de l'intégrale de Riemann appeleé l'intégrale de Stieltjes.

3.1 Définition de l'intégrale de Stieltjes

Définition 3.1.1 (Subdivision d'un intervalle) *Soit f et g deux fonctions bornées définies sur un intervalle $[a, b]$*

$$P = (a = x_0, x_1, ...x_n = b).$$

Définition 3.1.2 (la somme de Stieltjes) *Une subdivision de $[a, b]$ et $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$. La somme de Stieltjes de f par rapport à g est :*

$$S(P, f, g) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j) [g(x_j) - g(x_{j-1})]$$

Définition 3.1.3 (Intégrabilité au sens de Stieltjes) *Une fonction f est dite intégrable au sens de Stieltjes par rapport à g sur $[a, b]$, s'il existe $I \in \mathbb{R}$*

tel que

$$S(P,f,g) \longrightarrow I \qquad avec \quad \max|g(x_j)-g(x_{j+1})| \longrightarrow 0.$$

C-à-d $\forall \varepsilon > 0\ \exists I \in \mathbb{R}\ \ tq\ \ \exists\ P_\varepsilon \in Sub([a,b])\ \ et\ \forall P \supset P_\varepsilon\ \ et\ \forall t_j \in [x_{j-1},x_j]$, *nous avons*

$$|S(P,f,g)-I| < \varepsilon.$$

Exemple 3.1.1 *Soit* $h(x) = x$ *et* $g(x) = x + [x]$ *trouver* $\int_0^{10} h(x)\,dg(x)$. *Considérons la subdivision*

$$P = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{10n}{n}\right\}$$

puis

$$\begin{aligned} S(P,h,g) &= \sum_{j=1}^{10n} h(t_j)\left(g\left(\frac{j}{n}\right) - g\left(\frac{j-1}{n}\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{10n} t_j\left(\left(\frac{j}{n} + \left[\frac{j}{n}\right]\right) - \left(\frac{j-1}{n} + \left[\frac{j-1}{n}\right]\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{10n} t_j\left(\frac{1}{n} + \left(\left[\frac{j}{n}\right] - \left[\frac{j-1}{n}\right]\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{10n} \frac{t_j}{n} + \sum_{j=1}^{10n} t_j\left(\left[\frac{j}{n}\right] - \left[\frac{j-1}{n}\right]\right). \end{aligned}$$

puis

$$\sum_{j=1}^{10n} \frac{t_j}{n} \longrightarrow \int_0^{10} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{10} = 50$$

et

$$\sum_{j=1}^{10n} t_j\left(\left[\frac{j}{n}\right] - \left[\frac{j-1}{n}\right]\right) = \sum_{k=0}^{9} t_{(k+1)n}\left((k+1)-k\right) \longrightarrow 55.$$

Quand $n \longrightarrow \infty$ *on a :*

$$\int_0^{10} h(x)\,dg(x) = 50 + 55 = 105.$$

3.2 Existence de l'intégrale de Stieltjes :

Nous considérons maintenant un cas important dans lequel l'intégrale de Stieltjes existe.

Théorème 3.2.1 (voir [1]) *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et $g \in VB[a,b]$, alors l'intégrale*

$$\int_a^b f(x)\, dg(x).$$

existe.

Preuve. Comme g est à variation bornée, on peut supposer que g est croissante. Soit $P = (a = x_0, x_1, ..., x_n = b)$ une subdivision de $[a,b]$, et

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_K]\},$$

et

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_K]\}.$$

On pose

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k [g(x_k) - g(x_{k-1})],$$

et

$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k [g(x_k) - g(x_{k-1})].$$

Avec s et S sont les sommes inférieure et supérieure respectivement associeés à la subdivision P. Alors

$$s \leq S(P, f, g) \leq S, \tag{3.1}$$

Pour tous les choix des points $t_k \in [x_{k-1}, x_K]$ .En ajoutant le point x' à P, on obtient une subdivision P_0 de $[a, b]$. Alors $x' \in [x_{j-1}, x_j]$ .Soit

$$m' = \inf \{f(x) : x \in [x_{j-1}, x']\},$$

et

$$m'' = \inf \{f(x) : x \in [x', x_j]\}.$$

Alors $m_j \leq m'$ et $m_j \leq m''$, ainsi

$$\begin{aligned} m_j [g(x_j) - g(x_{j-1})] &= m_j [g(x_j) - g(x') + g(x') - g(x_{j-1})] \\ &= m_j [g(x_j) - g(x')] + m_j [g(x') - g(x_{j-1})] \\ &\leq m'' [g(x_j) - g(x')] + m' [g(x') - g(x_{j-1})], \end{aligned}$$

Donc, si s_0 est la somme inférieure associeé à la subdivision P_0, alors $s \leq s_0$, de même si S_0 est la somme suprérieure associeé à la subdivision P_0, alors $S \leq S_0$. Par conséquent, si S est la somme suprérieure associeé à toute de subdivision de $[a, b]$, et s la somme inférieure associeé à n'importe quelle subdivision(éventuellement différent), alors $s \leq S$.

Soit I la plus petite borne suprérieure de toutes les sommes inférieures,alors par la relation (3.1), nous avons

$$|S(P, f, g) - I| \leq S - s.$$

Comme f est uniformément continue sur $[a, b]$, alors pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x' - x''| < \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2[g(b) - g(a)]}.$$

Nous avons

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{2\left[g\left(b\right)-g\left(a\right)\right]}, \left(k = 1, n\right),$$

ainsi

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n} M_k \left[g\left(x_k\right) - g\left(x_{k-1}\right)\right] - \sum_{k=1}^{n} m_k \left[g\left(x_k\right) - g\left(x_{k-1}\right)\right] \\ = & \sum_{k=1}^{n} \left(M_k - m_k\right)\left[g\left(x_k\right) - g\left(x_{k-1}\right)\right] \\ \leq & \frac{\varepsilon}{2\left[g\left(b\right)-g\left(a\right)\right]} \sum_{k=1}^{n} \left[g\left(x_k\right) - g\left(x_{k-1}\right)\right] \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} S - s & \leq \frac{\varepsilon}{2\left[g\left(b\right)-g\left(a\right)\right]} \sum_{k=1}^{n} \left[g\left(x_k\right) - g\left(x_{k-1}\right)\right] \\ & = \frac{\varepsilon}{2} \\ & < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc

$$\left|S\left(P, f, g\right) - I\right| \leq S - s < \varepsilon,$$

et comme ε est arbitraire, on obtient $I = \int_a^b f\left(x\right) dg\left(x\right)$. ■

3.3 Propriétés des intégrales de Stieltjes

Théorème 3.3.1 (voir [9]) *Si $f_1, f_2 \in S_T\left(g\right)$ sur $\left[a, b\right]$ et $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, alors $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in S_T\left(g\right)$ sur $\left[a, b\right]$ et*

$$\int_a^b \left(c_1 f_1 + c_2 f_2\right)\left(x\right) dg\left(x\right) = c_1 \int_a^b f_1\left(x\right) dg\left(x\right) + c_2 \int_a^b f_2\left(x\right) dg\left(x\right).$$

Preuve. On pose $h = c_1 f_1 + c_2 f_2$.Soit $P = (a = x_0, x_1, ...x_n = b)$ une subdivision de $[a, b]$ et $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$, alors

$$\begin{aligned}
S(P, h, g) &= \sum_{i=1}^{n} h(t_j)[g(x_i) - g(x_{i-1})] \\
&= \sum_{i=1}^{n} (c_1 f_1(t_j) + c_2 f_2(t_j))[g(x_i) - g(x_{i-1})] \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_1 f_1(t_j)[g(x_i) - g(x_{i-1})] + \sum_{i=1}^{n} c_2 f_2(t_j)[g(x_i) - g(x_{i-1})] \\
&= c_1 \sum_{i=1}^{n} f_1(t_j)[g(x_i) - g(x_{i-1})] \\
&\quad + c_1 \sum_{i=1}^{n} f_2(t_j)[g(x_i) - g(x_{i-1})] \\
&= c_1 S(P, f_1, g) + c_2 S(P, f_2, g).
\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$ en choisissent P'_ε tel que $P \supseteq P'_\varepsilon$ cela implique

$$\left| S(P, f_1, g) - \int_a^b f_1 dg \right| < \varepsilon$$

et choisir P''_ε tel que $P \supseteq P''_\varepsilon$ cela implique

$$\left| S(f_2, dg, P) - \int_a^b f_2 dg \right| < \varepsilon$$

Sinons prenons $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$ alors

$$
\begin{aligned}
\left|S\left(P,h,g\right)-c_1\int_a^b f_1dg-c_2\int_a^b f_2dg\right| &= \begin{array}{c}\left|c_1S\left(P,f_1,g\right)+c_2S\left(P,f_2,g\right)-\right.\\ \left.c_1\int_a^b f_1dg-c_2\int_a^b f_2dg\right|\end{array}\\
&= \begin{array}{c}\left|c_1\left(S\left(P,f_1,g\right)-\int_a^b f_1dg\right)+\right.\\ \left.c_2\left(S\left(P,f_2,g\right)-\int_a^b f_2dg\right)\right|\end{array}\\
&\leq \left|c_1\right|\left|\left(S\left(P,f_1,g\right)-\int_a^b f_1dg\right)\right|\\
&\quad +\left|c_2\right|\left|S\left(P,f_2,P\right)-\int_a^b f_2dg\right|\\
&\leq \left(\left|c_1\right|+\left|c_2\right|\right)\varepsilon,
\end{aligned}
$$

alors

$$\int_a^b \left(c_1f_1+c_2f_2\right)(x)\,dg(x)=c_1\int_a^b f_1(x)\,dg(x)+c_2\int_a^b f_2(x)\,dg(x).$$

■

Théorème 3.3.2 (voir [9]) *Si* $f\in S_T(g_1)$ *et* $f\in S_T(g_2)$ *sur* $[a,b]$ *et* $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ *alors* $f\in S_T(c_1g_1+c_2g_2)$ *sur* $[a,b]$ *et*

$$\int_a^b f(x)\,d\left(c_1g_1+c_2g_2\right)(x)=c_1\int_a^b f(x)\,dg_1(x)+c_2\int_a^b f(x)\,dg_2(x).$$

Preuve. On pose $w = c_1g_1 + c_2g_2$, soit $P = (a = x_0, x_1, ...x_n = b)$ une subdivision de $[a, b]$ et $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$, alors nous avons

$$\begin{aligned} S(P, f, w) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_j)[w(x_i) - w(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_j)[c_1g_1 + c_2g_2(x_i) - (c_1g_1 + c_2g_2)(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_j)[c_1g_1(x_i) - c_1g_1(x_{i-1})] + \sum_{i=1}^{n} f(t_j)[c_2g_2(x_i) - c_2g_2(x_{i-1})] \\ &= c_1\sum_{i=1}^{n} f(t_j)[g_1(x_i) - g_1(x_{i-1})] + c_2\sum_{i=1}^{n} f(t_j)[g_1(x_i) - g_1(x_{i-1})] \\ &= c_1S(P, f, g_1) + c_2S(P, f, g_2). \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$ en choisissent P'_ε tel que $P \supseteq P'_\varepsilon$ cela implique

$$\left| S(P, f, g_1) - \int_a^b f dg_1 \right| < \varepsilon$$

et choisir P''_ε tel que $P \supseteq P''_\varepsilon$ cela implique

$$\left| S(P, f, g_2) - \int_a^b f dg_2 \right| < \varepsilon$$

Sinons prenons $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$ alors

$$\begin{aligned} \left| S(P, f, w) - c_1\int_a^b f dg_1 - c_2\int_a^b f dg_2 \right| &= \begin{array}{c} \left| c_1S(P, f, g_1) + c_2S(P, f, g_2) - \right. \\ \left. c_1\int_a^b f dg_1 - c_2\int_a^b f dg_2 \right| \end{array} \\ &\leq \begin{array}{c} \left| c_1S(P, f, g_1) - c_1\int_a^b f dg_1 \right| + \\ \left| c_2S(P, f, g_2) - c_2\int_a^b f dg_2 \right| \end{array} \\ &\leq (|c_1| + |c_2|)\varepsilon, \end{aligned}$$

donc

$$\int_a^b f(x)\, d(c_1 g_1 + c_2 g_2)(x) = c_1 \int_a^b f(x)\, dg_1(x) + c_2 \int_a^b f(x)\, dg_2(x).$$

■

Théorème 3.3.3 *Soit $c \in]a,b[$ si les intégrales suivantes :*

$$\int_a^b f(x)\, dg(x)$$

existent alors

$$\int_a^c f(x)\, dg(x) \;\; \text{et et} \int_c^b f(x)\, dg(x)$$

existe, et on a

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^c f(x)\, dg(x) + \int_c^b f(x)\, dg(x).$$

Preuve. Si P une subdivisoin de $[a,b]$ telle que $c \in P$, soit

$$P' = P \cap [a,c] \text{ et } P'' = P \cap [c,b],$$

désignentb les subdivision de $[a,c]$ et $[c,b]$ respectivement alors

$$S(P,f,g) = S(P',f,g) + S(P'',f,g).$$

supposons que $\int_a^c f(x)\, dg(x) = I_1$ et $\int_c^b f(x)\, dg(x) = I_2$. Alors pour $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision P'_ε de $[a,c]$ tel que

$$|S(P',f,g) - I_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

et une subdivision P''_ε de $[c,b]$ tel que

$$|S(P'',f,g) - I_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$ est une subdivision de $[a, b]$, tel que P est une rainement de P_ε, implique que $P'_\varepsilon \subseteq P'$ et $P''_\varepsilon \subseteq P''$.Par conséquent si P est une rainement de P_ε, on a

$$\begin{aligned}
|S(P, f, g) - I_1 - I_2| &= |S(P', f, g) + S(P'', f, g) - I_1 - I_2| \\
&\leq |S(P', f, g) - I_1| + |S(P'', f, g) - I_2| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc $\int_a^b f(x)\, dg(x)$existe et on a

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^c f(x)\, dg(x) + \int_c^b f(x)\, dg(x).$$

■

Théorème 3.3.4 (voir [9]) *Si $f \in S_T(g)$ sur $[a, b]$, alors $g \in S_T(f)$ sur $[a, b]$ et*

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) + \int_a^b g(x)\, df(x) = f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a).$$

Remarque 3.3.1 *Cette équation est connue comme la formule d'intégration par parties.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, comme $\int_a^b f dg$ existe, donc $\exists\ P_\varepsilon \in [a, b]$, tel que pour P' une rafinement de P_ε, nous avons

$$\left| S(P', f, g) - \int_a^b f dg \right| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Soit $P = (a = x_0, x_1, ..., x_n = b)$ est une rafinement de P_ε, nous avons

$$\begin{aligned} S(P,g,f) &= \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\left[f(x_k) - f(x_{k-1})\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[g(t_k) f(x_k) - g(t_k) f(x_{k-1})\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} g(t_k) f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} g(t_k) f(x_{k-1}). \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) g(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) g(x_{k-1}) &= f(x_n) g(x_n) - f(x_0) g(x_0) \\ &= f(b) g(b) - f(a) g(a), \end{aligned}$$

on pose

$$B = f(b) g(b) - f(a) g(a),$$

donc

$$\begin{aligned} B - S(P,g,f) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) g(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) g(x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} g(t_k) f(x_k) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} g(t_k) f(x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left[g(x_k) - g(t_k)\right] + \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\left[g(t_k) - g(x_{k-1})\right] \\ &= S(P', f, g), \end{aligned}$$

où $P' \in [a,b]$, si en prenant les points x_k et t_k ensemble. Par conséquent, l'inégalité (3.2) est valable et nous avons

$$\left| B - S(P,g,f) - \int_a^b f dg \right| = \left| S(P',g,f) - \int_a^b f dg \right| < \varepsilon,$$

Donc l'intégrale $\int_a^b gdf$ existe et

$$\int_a^b gdf = B - \int_a^b fdg.$$

■

Théorème 3.3.5 *Soit $f \in S_T(g)$ sur $[a,b]$, et g a une dérivée continue g' sur $[a,b]$. Alors $\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$ existe est nous avons*

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx.$$

3.4 Théorème de Helly

Théorème 3.4.1 *Soit (w_n) une suite de fonctions à variation bornée de $E \longrightarrow \mathbb{R}$ convergente simplement vers la fonction w, et vérifiant : $(\exists C > 0)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ $V_{[a,b]}(w_n) \leq C$. Alors, w est à variation bornée et pour tout fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ on a :*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_a^b f(x)\, dw_n(x) = \int_a^b f(x)\, dw(x).$$

Preuve. Soit $P = (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$ une subdivision de $\mathbb{R}$, quelconque, mais fixée.

$$V_a^b(w_n, P) = \sum_{i=0}^{n-1} \|w_n(x_{i+1}) - w_n(x_n)\| \leq V_{[a,b]}(w_n) \leq C.$$

Donc w est de variation totale. ■

3.5 Des inégalités concernant les fonctions à variation bornée

Théorème 3.5.1 (voir [5]) *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée sur $[a,b]$ alors*

$$\|f\|_{[a,b],\infty} \leq \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| + V_a^b(f). \tag{3.3}$$

La constante 1 devant $V_a^b(f)$ est optimal.

Preuve. Nous appliquons l'inégalité de type Ostrowski obtenue par l'auteur dans [4] (voir également [11]) :

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \left[\frac{1}{2} + \frac{\left|x - \frac{a+b}{2}\right|}{b-a}\right] V_a^b(f) \tag{3.4}$$

Pour tout $x \in [a,b]$, la constante $\frac{1}{2}$ est la meilleure possible sens qu'elle ne peut etre remplacé par une plus petit quantité. En prenant le supremum de (3.4) sur $[a,b]$ on obtient

$$\left\|f - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right\|_{[a,b],\infty} \leq \sup_{x\in[a,b]}\left[\frac{1}{2} + \frac{\left|x - \frac{a+b}{2}\right|}{b-a}\right] V_a^b(f) \tag{3.5}$$

Maintenant, par l'inégalité triangulaire appliquée pour la sup-norme $\|.\|_\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}\|f\|_{[a,b],\infty} &\leq \left\|f - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right\|_{[a,b],\infty} + \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right| \\ &\leq \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| + V_a^b(f)\end{aligned}$$

et l'inégalité (3.3) est prouvée. Pour prouver la constante 1, supposons que l'inégalité suivante

$$\|f\|_{[a,b],\infty} \leq \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| + CV_a^b(f) \tag{3.6}$$

avec $C > 0$. ■

Exemple 3.5.1 *Considérons la fonction* $f_0 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_0(t) = \begin{cases} 0, & t \in [a,b) \\ 1, & t = b \end{cases}$$

Alors f_0 *est à variation bornée sur* $[a,b]$ *et*

$$\|f_0\|_{[a,b],\infty} = 1, \qquad \int_a^b f_0(t)\,dt = 0 \qquad et \quad V_a^b(f_0) = 1.$$

Pour ce choix, (3.6) devient $C \geq 1$, *prouvant de la constant.*

Théorème 3.5.2 *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction à variation bornée sur* $[a,b]$, *alors pour* $p \geq 1$ *on a l'inégalité*

$$\|f\|_{[a,b],\infty} \leq \frac{1}{(b-a)^{1-\frac{1}{p}}} \left| \int_a^b f(t)\,dt \right| + \frac{1}{2} \cdot \frac{(b-a)^{\frac{1}{p}} \left(2^{p+1}-1\right)^{\frac{1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} V_a^b(f). \quad (3.7)$$

La constant $\frac{1}{2}$ *est meilleure possible en ce sens qu'elle ne peut pas etre remplacée par une plus petit quantité.*

Preuve. En prenant la p-norme dans (3.7), on en déduit

$$\left\| f - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt \right\|_{[a,b],p} \leq V_a^b(f)\, I_p,$$

où

$$I_p = \left(\int_a^b \left[\frac{1}{2} + \frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a} \right]^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

nous observons que

$$\begin{aligned} I_p &= \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[\frac{1}{2} + \frac{\frac{a+b}{2} - x}{b-a} \right]^p dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left[\frac{1}{2} + \frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a} \right]^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-x)^p\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-a)^p\,dx \right] \\ &= \frac{(b-a)^{\frac{1}{p}} \left(2^{p+1}-1\right)^{\frac{1}{p}}}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}, \quad p \geq 1. \end{aligned}$$

Utilisation de l'inégalité triangulaire pour la p-norme$\|.\|_p$, on a

$$\begin{aligned}\|f\|_{[a,b],p} &\leq \left\| f - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \right\|_{[a,b],p} + \left\| \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \right\|_{[a,b],p} \\ &\leq \frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}\left(2^{p+1}-1\right)^{\frac{1}{p}}}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} V_a^b(f) + (b-a)^{\frac{1}{p}} \left| \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \right|\end{aligned}$$

et l'inégalité (3.7) est obtenue. Supposons que (3.7) sont vérifie avec une constante $D > 0$ c-à-d

$$\|f\|_{[a,b],p} \leq \frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{p}}} \left| \int_a^b f(t)\,dt \right| + D.\frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}\left(2^{p+1}-1\right)^{\frac{1}{p}}}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} V_a^b(f). \tag{3.8}$$

■

Exemple 3.5.2 *Considérons la fonction $f_0 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $a = 0$ et $b > 1$ donné par*

$$f_0(t) = \begin{cases} 0, & si \quad t \in [0, b-1] \\ 1, & si \quad t \in (b-1, b]. \end{cases}$$

Cette fonction est à variation bornée sur $[a,b]$ et

$$\|f\|_{[a,b],p} = 1, \qquad \int_a^b f(t)\,dt = 1 \qquad et \qquad V_a^b(f) = 1$$

puis, par (3.8), en déduit

$$1 \leq \frac{1}{b^{1-\frac{1}{p}}} + D\frac{b^{\frac{1}{p}}\left(2^{p+1}-1\right)^{\frac{1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}, \qquad b > 1, \quad p \geq 1$$

donné

$$b^{1-\frac{1}{p}} \leq 1 + D.b\frac{\left(2^{p+1}-1\right)^{\frac{1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}. \tag{3.9}$$

dénoter

$$q = \frac{\left(2^{p+1}-1\right)^{\frac{1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}.$$

alors

$$\ln q = \frac{\ln(2^{p+1}-1) - \ln(p+1)}{p}.$$

On observe,

$$\begin{aligned}\lim_{p\longrightarrow\infty}\left[\frac{\ln(2^{p+1}-1)}{p}\right] &= \lim_{p\longrightarrow\infty}\frac{[\ln(2^{p+1}-1)]'}{(p)'}\\ &= \lim_{p\longrightarrow\infty}\frac{(2^{p+1}-1)'}{2^{p+1}-1}\\ &= \ln 2\end{aligned}$$

et

$$\lim_{p\longrightarrow\infty}\left[\frac{\ln(p+1)}{p}\right] = 0,$$

par conséquent, $\lim_{p\longrightarrow\infty} q = 2$. *Dans (3.9), en déduit*

$$b \leq 1 + 2Db, \qquad \textit{for} \qquad b > 1.$$

d'où nous avons

$$D \geq \frac{b-1}{2b}, \qquad b > 1. \tag{3.10}$$

En prenant la limite sur $b \longrightarrow \infty$ *dans (3.10) nous concluons que* $D \geq \frac{1}{2}$, *monotrone que le constante* $\frac{1}{2}$ *en (3.7) ne peut pas étre remplacé par une quantité inférieure en (3.7).*

Bibliographie

[1] **Apostol and Tom M,** Mathematical Advanced Analysis on the real line, Adison-Westey, Resly, MA, 1974.

[2] **Bernard Gostiaux**. Gours de Mathématiques spèciales, tome 2 : topologie, analyse. PUF, 1993.

[3] **Bourbaki**, Espace Vectoriels Topologiques, Verlag Berlin Heidelberg 2007.

[4] **S.S.Dragomir**, The Ostrowski integral inequality for mappings of bounded variation, *Bull. Austral. Math. Soc.* 60 (1999), 145-156.

[5] **S. S. Dragomir,** On the Ostrowski's integral inequality for mappings with bounded variation and applications, *Math. Ineq. & Appl.*, 4 (1) (2001), 59-66.

[6] **Jean-Marie Arnaudiès**, **Henri Fraysse**. Gours de Mathématiques spèciales, tome 2, Analyse. Dunod, 1991.

[7] **Jones and Frank**, Lebesgue Intégration on Euclidean Space, Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1993.

[8] **G.Gilles, A.Got et M-C.Marle,** Topologie, ellipese, éditionnmarketing S.A, 1997 32 rue bargue, Paris (15).

[9] **Kurwzeil-Stieljes.**

[10] **Natanson, T.P**. Theoryof function of a Real Variable, Vol.1, rev-ed ; Frederick Ungar Publishing, New york, 1991.

[11] **X.Gourdon**, Analyse, Ellipses, 1994.

[12] **W.Rudin**, Principles of mathematical analysis, Thrid edition, Mc Gaw-Hill, 1976.

[13] **Y.Sonntag**, Topologie et Analyse fonctionnelle, ellepse, édition marketing S.A, 1998.